

08.

**PROPOSTAS
DE RESOLUÇÃO
MANUAL**

Materials disponíveis em formato fotocopiável e projetável em

20 AULA DIGITAL
PROFESSOR

Tema I - Cálculo Combinatório

Unidade 1 - Revisões

Páginas 8 e 9

1. $A =]-\infty, 8[$, $B = [5, 9]$, $C = [\sqrt{30}, +\infty[$
 - a) $\bar{A} = [8, +\infty[$
 - b) $\bar{B} =]-\infty, 5[\cap]9, +\infty[$
 - c) $A \cap B =]-\infty, 8[\cap [5, 9] = [5, 8[$
 - d) $B \cup C = [5, 9] \cup [\sqrt{30}, +\infty[= [5, +\infty[$
 - e) $A \setminus B = A \cap \bar{B} =]-\infty, 8[\cap (]-\infty, 5[\cup]9, +\infty[) =]-\infty, 5[$
 - f) $B \setminus A = B \cap \bar{A} = [5, 9] \cap [8, +\infty[= [8, 9]$
 - g) $B \setminus (A \cap C) = B \cap \overline{(A \cap C)} =$
 $= [5, 9] \cap \overline{([-\infty, 8[\cap [\sqrt{30}, +\infty[)} =$
 $= [5, 9] \cap [\sqrt{30}, 8[=$
 $= [5, 9] \cap (]-\infty, \sqrt{30}[\cup [8, +\infty[) =$
 $= [5, \sqrt{30}[\cup [8, 9]$

Unidade 2 - Propriedades das operações sobre conjuntos

Páginas 10 a 12

2. $A =]-2, \pi[$, $B = [-\sqrt{5}, 4]$
 - a) $A \cap B =]-2, \pi[\cap [-\sqrt{5}, 4] =]-2, \pi[= A$
 - b) $A \cup B =]-2, \pi[\cup [-\sqrt{5}, 4] = [-\sqrt{5}, 4] = B$
 - c) $\bar{A} =]-\infty, -2] \cup [\pi, +\infty[$
 - d) $\bar{B} =]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]4, +\infty[$
 - e) $\bar{A} \cap \bar{B} = (]-\infty, -2] \cup [\pi, +\infty[) \cap (]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]4, +\infty[) =$
 $=]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]4, +\infty[=$
 $= \bar{B}$
 - f) $\bar{A} \cup \bar{B} = (]-\infty, -2] \cup [\pi, +\infty[) \cup (]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]4, +\infty[) =$
 $=]-\infty, -2] \cup [\pi, +\infty[=$
 $= \bar{A}$
3. $A =]-2, 1[$, $B = \left[-\frac{2}{3}, +\infty\right[$
 - a) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} =$
 $= (]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[) \cup \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[=$
 $= \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[\cup [1, +\infty[$

- b) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} =$
 $= (]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[) \cap \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[=$
 $=]-\infty, -2]$
4.
 - a) $\overline{\bar{A} \cap \bar{A}} = \bar{\bar{A}} \cup \bar{\bar{A}} = A \cup A = U$
 - b) $\bar{B} \cup (A \cup B) = \bar{B} \cup A \cup B = A \cup \bar{B} \cup B = A \cup U = U$
 - c) $\bar{B} \cap (A \cap B) = \bar{B} \cap A \cap B = A \cap \bar{B} \cap B = A \cap \emptyset = \emptyset$
5. $(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C = \emptyset \cup C = C$
6. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C = U \cap C = C$
7.
 - a) $\overline{B \setminus A} = \overline{B \cap \bar{A}} = \bar{B} \cup \bar{\bar{A}} = A \cup \bar{B}$
 - b) $(A \cup \bar{B}) \cap \bar{A} = (A \cap \bar{A}) \cup (\bar{B} \cap \bar{A}) =$
 $= \emptyset \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) =$
 $= \overline{A \cup B}$
 - c) $\overline{(A \cup B) \cup B} = \overline{(A \cap \bar{B}) \cup B} =$
 $= \overline{(A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B)} =$
 $= \overline{(A \cup B) \cap U} =$
 $= \bar{A} \cup \bar{B}$
 - d) $A \cap (B \cup \bar{A}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{A}) =$
 $= (A \cap B) \cup \emptyset =$
 $= A \cap B$
 - e) $\overline{B \cup (\bar{A} \cap B)} = \bar{B} \cap \overline{(\bar{A} \cap B)} =$
 $= B \cap (\bar{\bar{A}} \cup \bar{B}) =$
 $= B \cap (A \cup \bar{B}) =$
 $= (B \cap A) \cup (B \cap \bar{B}) =$
 $= (A \cap B) \cup \emptyset =$
 $= A \cap B$
 - f) $\overline{(B \cup \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B)} = \overline{(B \cup \bar{C})} \cap \overline{(\bar{A} \cap B)} =$
 $= (B \cap C) \cap (A \cup \bar{B}) =$
 $= C \cap B \cap (A \cup \bar{B}) =$
 $= C \cap [(B \cap A) \cup (B \cap \bar{B})] =$
 $= C \cap [(B \cap A) \cup \emptyset] =$
 $= C \cap B \cap A =$
 $= A \cap B \cap C$
 - g) $\overline{\bar{A} \cup (A \cap B)} = A \cap \overline{(\bar{A} \cap B)} =$
 $= A \cap (\bar{\bar{A}} \cup \bar{B}) =$
 $= (A \cap A) \cup (A \cap \bar{B}) =$
 $= \emptyset \cup (A \cap \bar{B}) =$
 $= A \cap \bar{B} =$
 $= A \setminus B$
 - h) $\overline{(A \cap B) \cup (\bar{A} \cup \bar{B})} = \overline{(A \cap B)} \cap \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} =$
 $= (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{\bar{A}} \cup \bar{\bar{B}}) =$
 $= \emptyset$

Unidade 3 - Introdução ao cálculo combinatório

Páginas 13 a 38

8.

a) $2 \times 3 \times 2 = 12$ menus

b) $2 \times 1 \times 2 = 4$ menus

9. $12 \times 11 = 132$ maneiras

10. $2 \times (5 \times 1) \times (4 \times 1) \times (3 \times 1) \times (2 \times 1) \times (1 \times 1) = 240$ maneiras

11.

a) $3 \times 2 \times 1 = 6$ modos

b) $5 \times 4 \times 3 = 60$ modos

12. $\underbrace{2 \times 1}_{\text{lugares à frente}} \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{\text{lugares atrás}} = 12$ maneiras

13. $5 \times 10 \times 5 \times 10 \times 5 \times 10 + 10 \times 5 \times 10 \times 5 \times 10 \times 5 = 250\,000$ códigos

14.

Cálculo auxiliar

$$8 + 8 + 8 + x < 27 \Leftrightarrow x < 27 - 24 \Leftrightarrow x < 3$$

Logo:

$$4 \times (1 \times 1 \times 1 \times \underbrace{3}_{0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 2}) = 12 \text{ códigos}$$

15. Sem vermelho: $9 \times 8 \times 7$

Com a faixa central vermelha: $9 \times 1 \times 9$

Com uma das faixas extremas vermelha:

$$2 \times 1 \times 9 \times 8$$

Com duas faixas vermelhas: $1 \times 9 \times 1$

Logo:

$$9 \times 8 \times 7 + 9 \times 1 \times 9 + 2 \times 1 \times 9 \times 8 + 1 \times 9 \times 1 = 738 \text{ bandeiras}$$

16. Começando por 1, 2 ou 3: $3 \times 9 \times 8 \times 7$

Começando por 4: $1 \times 5 \times 8 \times 7$

Logo:

$$3 \times 9 \times 8 \times 7 + 1 \times 5 \times 8 \times 7 = 1792 \text{ números}$$

17. Copas – rei de paus ou rei de espadas – espadas:

$$13 \times 2 \times 13$$

Copas exceto rei – rei de copas – espadas:

$$12 \times 1 \times 13$$

Copas – rei de espadas – espadas exceto rei:

$$13 \times 1 \times 12$$

Logo:

$$13 \times 2 \times 13 + 12 \times 1 \times 13 + 13 \times 1 \times 12 = 650 \text{ extrações}$$

18.

a) $3 \times (1 \times 1 \times 6) = 18$ números

b) $7 \times 7 \times 1 = 49$ números

c) Com um algarismo par e dois ímpares:

$$3 \times (3 \times 4 \times 4)$$

Com dois algarismos pares e um ímpar:

$$3 \times (3 \times 3 \times 4)$$

Com três algarismos pares: $3 \times 3 \times 3$

Logo:

$$3 \times (3 \times 4 \times 4) + 3 \times (3 \times 3 \times 4) + 3 \times 3 \times 3 = 279 \text{ números}$$

19.

a) Números entre 2400 e 2999: $1 \times 6 \times 8 \times 7$

Números entre 3000 e 9999: $7 \times 9 \times 8 \times 7$

Logo:

$$1 \times 6 \times 8 \times 7 + 7 \times 9 \times 8 \times 7 = 3864 \text{ números}$$

b) Números entre 2400 e 2499: $1 \times 1 \times 7 \times 7$

Números entre 2500 e 2999: $1 \times 3 \times 7 \times 7$

Números entre 3000 e 9999: $4 \times 7 \times 7 \times 7$

Logo:

$$1 \times 1 \times 7 \times 7 + 1 \times 3 \times 7 \times 7 + 4 \times 7 \times 7 \times 7 = 1568$$

Mas 2400 não é maior que 2400, logo a resposta é $1568 - 1 = 1567$ números.

c) Números entre 2400 e 2999: $1 \times 4 \times 5 \times 4$

Números entre 3000 e 9999: $4 \times 6 \times 5 \times 4$

Logo:

$$1 \times 4 \times 5 \times 4 + 4 \times 6 \times 5 \times 4 = 560 \text{ números}$$

20.

a) $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

Logo:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \text{ divisores}$$

b) $1716 = 2^2 \times 3 \times 11 \times 13$

Logo:

$$3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24 \text{ divisores}$$

c) $75\,600 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$

Logo:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120 \text{ divisores}$$

21. ${}^{26}A_3' = 17\,576$ sequências

22. ${}^5A_{10}' = 5^{10} = 9\,765\,625$ chaves

23. $2 + {}^2A_2' + {}^2A_3' + {}^2A_4' = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$ sequências

24. ${}^4A_5' = 4^5 = 1024$ maneiras

25. ${}^3A_4' = 3^4 = 81$ sequências

26. ${}^2A_7' = 2^7 = 128$ subconjuntos

27. $2^{12} - 1 - 12 = 4083$ cocktails

28. $2^7 - 1 - 7 = 120$ maneiras

29.

a) $4! = 24$ formas

b) $8! = 40\,320$ formas

30. $6! = 720$ maneiras

31.

a) $9! = 362\,880$ maneiras

b) $5! \times 4! = 2880$ maneiras

c) $2 \times 5! \times 4! = 5760$ maneiras

d) $4! \times 5! \times 6 = 17\,280$ maneiras

e) ${}^5A_2 \times 7! = 100\,800$ maneiras

32.

a) $4! = 24$ anagramas

b) $6! = 720$ anagramas

33. $6! \times 5! = 86\,400$ maneiras

34.

a) $12! = 479\,001\,600$ formas

b) $6! \times 4! \times 4! = 414\,720$ formas

c) $6! \times 4! \times 2! \times 3! = 207\,360$ formas

35.

a) $\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

b) $\frac{2017!}{2016!} = \frac{2017 \times 2016!}{2016!} = 2017$

c) $\frac{20! + 18!}{17!} = \frac{20!}{17!} + \frac{18!}{17!} =$
 $= \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17!} + \frac{18 \times 17!}{17!} =$
 $= 20 \times 19 \times 18 + 18 = 6858$

36.

a) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$

b) $\frac{(n-1)!}{(n+2)!} = \frac{\cancel{(n-1)!}}{(n+2)(n+1)n\cancel{(n-1)!}} =$
 $= \frac{1}{(n^2 + 3n + 2)n} =$
 $= \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$

c) $\frac{(n+1)! + (n-1)!}{n!} = \frac{(n+1)n!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} =$
 $= n + 1 + \frac{1}{n} =$
 $= \frac{n^2 + n + 1}{n}$

37. $12n! + 5(n+1)! = (n+2)!$

$\Leftrightarrow 12n! + 5(n+1) \times n! = (n+2) \times (n+1) \times n!$

$\Leftrightarrow 12 + 5(n+1) = (n+2)(n+1)$

$\Leftrightarrow 12 + 5n + 5 = n^2 + 2n + n + 2$

$\Leftrightarrow n^2 + 3n - 5n + 2 - 5 - 12 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 15 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-15)}}{2}$

$\Leftrightarrow n = \frac{2 \pm 8}{2}$

$\Leftrightarrow n = 5 \vee n = -3$

Como $n \geq 0$, então $n = 5$.

38.

a) $12 \times 11 \times 10 \times 9 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8!} = \frac{12!}{8!}$

b) $2015 \times 2016 \times 2017 =$
 $= \frac{2017 \times 2016 \times 2015 \times 2014!}{2014!} =$
 $= \frac{2017!}{2014!}$

c) $(n+2) \times (n+1) \times n = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} =$
 $= \frac{(n+2)!}{(n-1)!}$

d) $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) =$
 $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!} =$

$$= \frac{n!}{(n-5)!}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1) &= \\ = \frac{n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-p+1) \times (n-p)!}{(n-p)!} &= \\ = \frac{n!}{(n-p)!} \end{aligned}$$

$$39. {}^{26}A_3 = 15\,600 \text{ seqüências}$$

$$40. {}^{12}A_2 = 132 \text{ maneiras}$$

$$41. {}^{10}A_3 = 720 \text{ maneiras}$$

$$42. {}^6A_4 = 360 \text{ formas}$$

$$43. {}^5A_4 \times {}^5A_2 \times 4! = 57\,600 \text{ formas}$$

44.

- a) $4 \times 12 \times 12 \times 20 = 11\,520$ maneiras
- b) $26 \times 26 \times 13 \times 13 = 114\,244$ maneiras
- c) $4 \times 26 \times 26 \times 26 \times 4 = 281\,216$ maneiras

$$45. {}^5C_2 = 10 \text{ subconjuntos}$$

46.

- a) ${}^8C_2 = 28$ subconjuntos
- b) ${}^8C_6 = 28$ subconjuntos
- c) ${}^8C_8 = 1$ subconjunto

$$\begin{aligned} 47. \quad \frac{180 \times 179 \times \dots \times 142 \times 141}{40!} &= \\ = \frac{180 \times 179 \times \dots \times 142 \times 141 \times 140!}{40! \times 140!} &= \\ = \frac{180!}{40! \times 140!} &= {}^{180}C_{40}, \text{ que é um número natural, pois} \\ &\text{representa o número de subconjuntos de 40 ele-} \\ &\text{mentos de um conjunto com 180 elementos (ou o} \\ &\text{número de subconjuntos de 140 elementos de um} \\ &\text{conjunto com 180 elementos).} \end{aligned}$$

$$48. {}^{40}C_{10} = 847\,660\,528 \text{ mãos}$$

$$49. {}^{25}C_5 \times {}^{20}C_5 \times {}^{15}C_5 \times {}^{10}C_5 \text{ maneiras}$$

$$50. {}^2C_1 \times {}^8C_4 \times {}^6C_4 \times {}^5C_2 = 21\,000 \text{ opções}$$

51.

- a) ${}^4C_2 - 4 = 2$ diagonais
- b) ${}^5C_2 - 5 = 5$ diagonais
- c) ${}^nC_2 - n$ diagonais

$$52. {}^8C_3 = 56 \text{ planos}$$

$$53. {}^5C_1 + {}^5C_2 + {}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5 = 31 \text{ planos}$$

54.

- a) ${}^8C_3 = 56$ maneiras
- b) ${}^5C_2 \times {}^3C_1 = 30$ maneiras
- c) ${}^8C_3 - 1 = 55$ maneiras
- d) $2 \times {}^6C_2 + {}^6C_3 = 50$ maneiras
- e) ${}^6C_1 = 6$ maneiras

55.

- a) ${}^7C_3 \times 4! = 840$ números
- b) ${}^6C_3 \times 3! \times 3 = 360$ números

56. Pretende-se saber quantos números da forma $9_ _ _$ existem, com os algarismos todos diferentes (escolhidos de entre os algarismos de 1 a 9) e tais que a soma dos seus quatro algarismos seja par.

Ora, para que a soma dos quatro algarismos seja par é necessário que a soma dos três últimos algarismos seja ímpar.

Para que a soma destes três algarismos seja ímpar, há duas hipóteses: ou são todos ímpares ou dois deles são pares e o outro é ímpar.

No primeiro caso, temos de escolher ordenadamente três de quatro algarismos ímpares (1, 3 e 7), o que pode ser feito de 4A_3 maneiras diferentes.

No segundo caso, temos de começar por escolher a posição do algarismo ímpar, o que pode ser feito de três maneiras diferentes.

Para cada uma destas, existem quatro maneiras de escolher esse ímpar (1, 3, 5 ou 7).

Para cada posição do algarismo ímpar e para cada valor deste, existem 4A_2 maneiras diferentes de escolher ordenadamente dois de quatro algarismos pares (2, 4, 6 ou 8). Assim, neste segundo caso, existem $3 \times 4 \times {}^4A_2$ números diferentes, nas condições requeridas.

Logo, o número pedido é $3 \times 4 \times {}^4A_2 + {}^4A_3$.

57.

- a) $\frac{10!}{4!4!} = 6300$ anagramas
- b) $\frac{10!}{2!3!2!} = 151\,200$ anagramas
- c) $\frac{11!}{5!2!2!} = 83\,160$ anagramas

58.

a) ${}^{12}C_5 = 792$ maneiras

b) $3 \times 8 = 24$ maneiras

59.

a) $10 \times 5 \times 10 \times 5 \times 10 \times 5 \times 10 = 1\,250\,000$ códigos

b) $10 \times 5 \times 5 \times 5 \times 10 \times 10 \times 10 \times 3 = 3\,750\,000$ códigos

c) $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 78\,125$ códigos

d) ${}^7C_2 \times {}^5C_2 \times 9^2 \times 5^3 = 2\,126\,250$ códigos

e) ${}^7C_3 \times 5^3 \times 10^4 = 43\,750\,000$ códigos

60.

a) ${}^4C_4 \times {}^{48}C_1 = 48$ maneiras

b) ${}^4C_2 \times {}^{48}C_3 = 103\,776$ maneiras

c) ${}^{26}C_4 \times {}^{26}C_1 = 388\,700$ maneiras

d) ${}^4C_2 \times {}^{48}C_3 + {}^4C_3 \times {}^{48}C_2 + {}^4C_4 \times {}^{48}C_1 = 108\,336$ maneiras

61.

a) ${}^{12}C_4 \times 4 = 1980$ maneiras

b) ${}^9C_2 \times {}^{10}C_3 + {}^3C_1 \times {}^9C_1 \times {}^{10}C_2 \times {}^{30}C_1 + {}^3C_{12} \times {}^{10}C_1 \times {}^{30}C_2 = 53\,820$ maneiras

62. $n+1 \geq 4 \wedge n \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 3$

$${}^{n+1}A_4 = \frac{3}{2} {}^4A_4 \times {}^nC_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{(n+1-4)!} = \frac{3}{2} \times 4! \times \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} =$$

$$= \frac{3}{2} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow (n+1)n(n-1)(n-2) = 18n(n-1)$$

$$\Leftrightarrow (n+1)(n-2) = 18$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -4 \vee n = 5$$

Como $n \geq 3$, então $n = 5$.

63. ${}^nC_2 = 78 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 78$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} = 78$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 156$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 156 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+624}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -12 \vee n = 13$$

Como $n \geq 2$, então $n = 13$.

Unidade 4 - Triângulo de Pascal e binômio de Newton

Páginas 39 a 47

64.

a) ${}^{20}C_5 = {}^{20}C_m \Leftrightarrow 5 = m \vee 5 + m = 20$
 $\Leftrightarrow m = 5 \vee m = 15$

b) ${}^{30}C_{m+2} = {}^{30}C_{2m+4}$
 $\Leftrightarrow m+2 = 2m+4 \vee m+2 + 2m+4 = 30$
 $\Leftrightarrow m = -2 \vee m = 8$

65.

a) ${}^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6 = 2^6 - 1 = 63$ grupos

b) 6C_4 é o número de grupos que se podem formar com quatro crianças escolhidas, entre as seis que existem nessa sala, podendo a Helena estar incluída nessas quatro crianças ou não.

Uma outra resposta ao problema é ${}^5C_3 + {}^5C_4$, que corresponde ao número de grupos que se podem formar incluindo a Helena ou não incluindo a Helena. 5C_3 é, então, o número de grupos de quatro crianças que se podem formar incluindo a Helena; como a Helena está já selecionada restam cinco crianças das quais se podem escolher aleatoriamente três, o que pode ser feito de 5C_3 maneiras diferentes. O número de grupos que se podem formar, não incluindo a Helena, é dado por 5C_4 , que é o número de maneiras de escolher aleatoriamente cinco das seis crianças, já que a Helena não está incluída.

66.

a) ${}^{100}C_4 + {}^{100}C_5 = {}^mC_5 \Leftrightarrow {}^{101}C_5 = {}^mC_5 \Leftrightarrow m = 101$

b) ${}^{2m+2}C_{10} + {}^{2m+2}C_{11} = {}^{27}C_{11} \Leftrightarrow {}^{2m+3}C_{11} = {}^{27}C_{11}$
 $\Leftrightarrow 2m+3 = 27$
 $\Leftrightarrow m = 12$

67. ${}^{11}C_{p+1} + {}^{11}C_{p+2} + {}^{12}C_{p+3} = {}^{12}C_{p+2} + {}^{12}C_{p+3} =$
 $= {}^{13}C_{p+3} =$
 $= 1716$

68. Opção (A)

$$n = 10$$

O sexto elemento da linha 10 é ${}^{10}C_5$.

69. A linha do triângulo de Pascal com 21 elementos é a linha 20.

a) ${}^{20}C_2 = 190$

b) ${}^{19}C_4 = 3876$

c) ${}^{20}C_{10} = 184\,756$

d) $2^{20} = 1\,048\,576$

70. Opção (D)

Os seguintes elementos são menores que ${}^{2019}C_5$:

$${}^{2019}C_0 = {}^{2019}C_{2019}; {}^{2019}C_1 = {}^{2019}C_{2018};$$

$${}^{2019}C_2 = {}^{2019}C_{2017}; {}^{2019}C_3 = {}^{2019}C_{2016};$$

$${}^{2019}C_4 = {}^{2019}C_{2015}$$

71. ${}^nC_5 = {}^nC_6$

Logo:

$$n = 5 + 6 \Leftrightarrow n = 11$$

Assim, o elemento central da linha seguinte é

$${}^{12}C_6 = 924.$$

72. ${}^nC_p + {}^nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1} \Leftrightarrow 3432 + {}^nC_{p+1} = 6435$
 $\Leftrightarrow {}^nC_{p+1} = 3003$

$${}^nC_{p+1} + {}^nC_{p+2} = {}^{n+1}C_{p+2}$$

$$\Leftrightarrow {}^{n+1}C_{p+2} = 3003 + 2002$$

$$\Leftrightarrow {}^{n+1}C_{p+2} = 5005$$

$${}^{n+1}C_{p+1} + {}^{n+1}C_{p+2} = {}^{n+2}C_{p+2}$$

$$\Leftrightarrow {}^{n+2}C_{p+2} = 6435 + 5005$$

$$\Leftrightarrow {}^{n+2}C_{p+2} = 11\,440$$

$${}^{n+2}C_{n-p} = {}^{n+2}C_x \Leftrightarrow n - p + x = n + 2$$

$$\Leftrightarrow x = p + 2$$

Logo, ${}^{n+2}C_{n-p} = {}^{n+2}C_{p+2} = 11\,440$.

73.

a) ${}^{10}C_7 = 120$ caminhos

b) ${}^4C_2 \times {}^6C_1 = 36$ caminhos

74.

a) $(a + 2b)^5 =$

$$\begin{aligned} &= {}^5C_0 \times a^5 \times (2b)^0 + {}^5C_1 \times a^4 \times (2b)^1 + {}^5C_2 \times a^3 \times (2b)^2 + \\ &\quad + {}^5C_3 \times a^2 \times (2b)^3 + {}^5C_4 \times a^1 \times (2b)^4 + \\ &\quad + {}^5C_5 \times a^0 \times (2b)^5 = \\ &= a^5 + 5 \times a^4 \times 2b + 10 \times a^3 \times 4b^2 + 10 \times a^2 \times 8b^3 + \\ &\quad + 5 \times a \times 16b^4 + 32b^5 = \\ &= a^5 + 10a^4b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 80ab^4 + 32b^5 \end{aligned}$$

b) $(\sqrt{x} - 2)^6 =$

$$\begin{aligned} &= {}^6C_0 \times (\sqrt{x})^6 \times (-2)^0 + {}^6C_1 \times (\sqrt{x})^5 \times (-2)^1 + \\ &\quad + {}^6C_2 \times (\sqrt{x})^4 \times (-2)^2 + {}^6C_3 \times (\sqrt{x})^3 \times (-2)^3 + \\ &\quad + {}^6C_4 \times (\sqrt{x})^2 \times (-2)^4 + {}^6C_5 \times (\sqrt{x})^1 \times (-2)^5 + \\ &\quad + {}^6C_6 \times (\sqrt{x})^0 \times (-2)^6 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x^3 - 6 \times x^2 \sqrt{x} \times 2 + 15 \times x^2 \times 4 - 20 \times x \sqrt{x} \times 8 + \\ &\quad + 15 \times x \times 16 - 6 \times \sqrt{x} \times 32 + 64 = \\ &= x^3 - 12x^2 \sqrt{x} + 60x^2 - 160x \sqrt{x} + 240x - 192 \sqrt{x} + \\ &\quad + 64 \end{aligned}$$

75.

a) ${}^{14}C_3 \times \left(\frac{x^2}{2}\right)^{11} \times 3^3 = 364 \times \frac{x^{22}}{2048} \times 27 =$
 $= \frac{2457}{512} x^{22}$

b) Termo geral:

$${}^{14}C_p \times \left(\frac{x^2}{2}\right)^{14-p} \times 3^p = \frac{{}^{14}C_p \times 3^p}{2^{14-p}} \times x^{28-2p}$$

Assim:

$$28 - 2p = 20 \Leftrightarrow 2p = 8$$

$$\Leftrightarrow p = 4$$

Logo, o coeficiente de x^{20} é $\frac{{}^{14}C_4 \times 3^4}{2^{14-4}} = \frac{81\,081}{1024}$.

c) Termo geral:

$${}^{14}C_7 \times \left(\frac{x^2}{2}\right)^{14-7} \times 3^7 = \frac{938\,223}{16} x^{14}$$

d) $2^{14} = 16\,384$

76. Termo geral:

$$\begin{aligned} {}^{12}C_p \times (2\sqrt{x})^{12-p} \left(\frac{3}{x}\right)^p &= {}^{12}C_p \times 2^{12-p} \times \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{12-p} \times \frac{3^p}{x^p} = \\ &= {}^{12}C_p \times 2^{12-p} \times x^{6-\frac{1}{2}p} \times 3^p \times x^{-p} = \\ &= {}^{12}C_p \times 2^{12-p} \times 3^p \times x^{6-\frac{3}{2}p} \end{aligned}$$

Assim:

$$6 - \frac{3}{2}p = 0 \Leftrightarrow 12 - 3p = 0$$

$$\Leftrightarrow p = 4$$

Logo, o termo independente de x é

$${}^{12}C_4 \times 2^{12-4} \times 3^4 = 10\,264\,320.$$

77. Termo geral:

$$\begin{aligned} {}^9C_p \times \left(\frac{1}{x}\right)^{9-p} (5x^2)^p &= {}^9C_p \times x^{-9+p} \times 5^p \times x^{2p} = \\ &= {}^9C_p \times 5^p \times x^{-9+3p} \end{aligned}$$

Assim:

$$-9 + 3p = 0 \Leftrightarrow p = 3$$

Logo, o termo independente de x é

$${}^9C_3 \times 5^3 = 10\,500.$$

78. $2^n = (1 + 1)^n =$

$$\begin{aligned} &= {}^nC_0 \times 1^n \times 1^0 + {}^nC_1 \times 1^{n-1} \times 1^1 + {}^nC_2 \times 1^{n-2} \times 1^2 + \\ &\quad + \dots + {}^nC_n \times 1^0 \times 1^n = \\ &= {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots + {}^nC_n \end{aligned}$$

Aprende Fazendo

Páginas 52 a 64

1. Opção (C)

$$10 \times 5 \times 5 \times 10 = 2500 \text{ códigos}$$

2. Opção (D)

$$1 \times 9 \times 10 \times 10 \times 18 \times 18 = 291\,600 \text{ matrículas}$$

3. Opção (A)

${}^{15}C_6$ é o número de maneiras de escolher os seis compartimentos, dos quinze, para colocar os seis refrigerantes que são iguais entre si.

4. Opção (C)

$$2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 48 \text{ maneiras}$$

5. Opção (A)

$${}^5C_2 = 10 \text{ cordas}$$

6. Opção (A)

O segundo elemento é 13, logo $n = 13$. Assim, o sexto elemento dessa linha é ${}^{13}C_5$.

7. Opção (C)

O penúltimo elemento é 2018. Assim, $n = 2018$. Logo, o décimo elemento dessa linha é ${}^{2018}C_9$.

8. Opção (B)

$$2^n = 16 \Leftrightarrow n = 4, \text{ ou seja, a linha tem cinco elementos.}$$

9. Opção (C)

$${}^{2020}C_{300} + {}^{2020}C_{301} = {}^{2021}C_{301}$$

10. Opção (A)

Termo central:

$${}^{10}C_5 \times x^5 \times (-2)^5 = -8064x^5$$

11. Opção (C)

$$\frac{8! \times 4}{4! \times 4!} = 280 \text{ números}$$

12. Opção (B)

$$9! - 2! \times 8! = 282\,240$$

13. Opção (B)

A linha tem 50 elementos, logo $n = 49$. Assim, o vigésimo elemento da linha seguinte é ${}^{50}C_{19}$.

14. Opção (A)

$$1 + n + n + 1 = 40 \Leftrightarrow n = 19$$

Assim, o terceiro elemento da linha anterior é ${}^{18}C_2 = 153$.

15. Opção (C)

A linha tem 31 elementos, logo $n = 30$.

O maior elemento dessa linha corresponde ao elemento central.

$$\text{Assim, } k = {}^{30}C_{15}.$$

16. Opção (D)

$$2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$$

O número de subconjuntos com seis elementos é ${}^{12}C_6 = 924$.

17. Opção (B)

$$2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

O número de divisores de 2310 é

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32.$$

18. Opção (D)

$10! \times {}^{11}A_5$, onde $10!$ é o número de maneiras distintas de arrumar os dez livros de Matemática A e, para cada uma destas, ${}^{11}A_5$ é o número de maneiras diferentes de arrumar os cinco livros de Física A nos 11 espaços existentes entre os livros de Matemática A.

19. Opção (B)

O penúltimo elemento é 10. Assim, $n = 10$.

Então, a soma dos três primeiros elementos da linha anterior é ${}^9C_0 + {}^9C_1 + {}^9C_2 = 46$.

20. Opção (C)

Se um dos termos do desenvolvimento de $(2\pi + 5)^n$ é $288\,000\pi^8$, então esse termo é da forma ${}^nC_8 \times (2\pi)^8 \times 5^{n-8}$.

Assim:

$${}^nC_8 \times (2\pi)^8 \times 5^{n-8} = 288\,000\pi^8$$

$$\Leftrightarrow {}^nC_8 \times 2^8 \times \pi^8 \times 5^{n-8} = 288\,000\pi^8$$

$$\Leftrightarrow {}^nC_8 \times 5^{n-8} = \frac{288\,000}{2^8}$$

$$\Leftrightarrow {}^nC_8 \times 5^{n-8} = 1125$$

Das opções apresentadas:

- se $n = 8$, então ${}^8C_8 \times 5^{8-8} = 1$
- se $n = 9$, então ${}^9C_8 \times 5^{9-8} = 40$
- se $n = 10$, então ${}^{10}C_8 \times 5^{10-8} = 1125$
- se $n = 11$, então ${}^{11}C_8 \times 5^{11-8} = 20\,625$

21. Opção (B)

$$\begin{aligned}
& {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \dots + (-1)^n \times {}^nC_n = \\
& = {}^nC_0 \times 1^n \times (-1)^0 - {}^nC_1 \times 1^{n-1} \times (-1)^1 + {}^nC_2 \times \\
& \times 1^{n-2} \times (-1)^2 - {}^nC_3 \times 1^{n-3} \times (-1)^3 + \dots + {}^nC_n \times \\
& \times 1^0 \times (-1)^n = \\
& = (1 + (-1))^n = \\
& = 0
\end{aligned}$$

22.

a) $B \cup (\overline{B \cap A}) =$
 $= (B \cup \overline{B}) \cup A$ (Associatividade)
 $= U \cup A$ (Complementar de um conjunto)
 $= U$ (Existência de elemento absorvente)

b) $A \cap (B \cap \overline{A}) =$
 $= A \cap (\overline{A \cap B})$ (Comutatividade)
 $= (A \cap \overline{A}) \cap B$ (Associatividade)
 $= \emptyset \cap B$ (Complementar de um conjunto)
 $= \emptyset$ (Existência de elemento absorvente)

c) $A \cup (B \cap \overline{A}) =$
 $= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})$ (Distributividade)
 $= (A \cup B) \cap U$ (Complementar de um conjunto)
 $= A \cup B$ (Existência de elemento neutro)

d) $(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) =$
 $= B \cap (A \cup \overline{A})$ (Distributividade)
 $= B \cap U$ (Complementar de um conjunto)
 $= B$

e) $[A \cap (\overline{B \cap \overline{A}})] \cup \overline{A} =$
 $= [A \cap (\overline{B \cup \overline{A}})] \cup \overline{A}$ (Lei de De Morgan)
 $= [A \cap (\overline{B \cup A})] \cup \overline{A}$ (Complementar do complementar de um conjunto)
 $= (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B \cup A \cup \overline{A}})$ (Distributividade)
 $= U \cap (\overline{B \cup U})$ (Complementar de um conjunto)
 $= U \cap U$ (Existência de elemento absorvente)
 $= U$ (Idempotência)

23.

a) $4 \times 4 = 16$ maneiras distintas
b) $4 \times 3 = 12$ maneiras distintas

24.

a) $26 \times 26 \times 26 \times 26 = 456\,976$
b) $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 = 1\,757\,600$

25. ${}^{30}A_8 = 235\,989\,936\,000$

26.

a) $\frac{5}{4!} - \frac{4}{5!} = \frac{5}{4!} - \frac{4}{5 \times 4!} = \frac{5 \times 5 - 4}{5 \times 4!} = \frac{21}{5!} = \frac{7}{40}$

b) $\frac{2}{3!6!} + \frac{3}{4!5!} = \frac{2 \times 4 + 3 \times 6}{4!6!} = \frac{26}{4!6!} = \frac{13}{8640}$

c) $\frac{1}{(n+1)!} - \frac{3}{2n!} = \frac{2 - 3(n+1)}{(n+1) \times 2n!} = \frac{-3n-1}{2(n+1)!}$

d) $\frac{2}{(n+1)!} - \frac{n}{(n+2)!} + \frac{1}{n!} =$
 $= \frac{2(n+2) - n + (n+2)(n+1)}{(n+2)!} =$
 $= \frac{2n+4 - n + n^2 + 3n+2}{(n+2)!} =$
 $= \frac{n^2 + 4n + 6}{(n+2)!}$

e) ${}^nA_2 + {}^{n+1}A_2 = \frac{n!}{(n-2)!} + \frac{(n+1)!}{(n-1)!} =$
 $= \frac{(n-1)n! + (n+1)!}{(n-1)!} =$
 $= \frac{(n-1+n+1)n!}{(n-1)!} =$
 $= \frac{2n \times n \times (n-1)!}{(n-1)!} =$
 $= \frac{2n \times n!}{(n-1)!}$

27. ${}^{10}C_6 \times {}^4C_4 = 210$ maneiras

28. $3 \times 5! = 360$ modos

29. ${}^{50}C_5 \times {}^{12}C_2 = 139\,838\,160$

30.

a) ${}^{28}C_5 = 98\,280$ formas

b)

i) ${}^{10}C_5 = 252$ comissões

ii) ${}^{28}C_5 - {}^{18}C_5 = 89\,712$ comissões

iii) $1 \times {}^9C_2 \times {}^{18}C_2 = 5508$ comissões

31. $1 + n = 36 \Leftrightarrow n = 35$

a) A linha tem 36 elementos.

b) Como a linha tem 36 elementos, existem dois elementos centrais iguais e que representam o maior valor dessa linha:

${}^{35}C_{17} = {}^{35}C_{18} = 4\,537\,567\,650$

c) ${}^{34}C_3 = 5984$

d) ${}^{36}C_9 = 94\,143\,280$

32.

a) $(x-2)^5 =$
 $= {}^5C_0 \times x^5 \times (-2)^0 + {}^5C_1 \times x^4 \times (-2)^1 + {}^5C_2 \times x^3 \times$
 $\times (-2)^2 + {}^5C_3 \times x^2 \times (-2)^3 + {}^5C_4 \times x^1 \times (-2)^4 +$
 $+ {}^5C_5 \times x^0 \times (-2)^5 =$

$$\begin{aligned}
&= x^5 - 5 \times x^4 \times 2 + 10 \times x^3 \times 4 - 10 \times x^2 \times 8 + 5 \times x \times \\
&\quad \times 16 - 32 = \\
&= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \left(2x + \frac{1}{x}\right)^4 &= \\
&= {}^4C_0 \times (2x)^4 \times \left(\frac{1}{x}\right)^0 + {}^4C_1 \times (2x)^3 \times \left(\frac{1}{x}\right)^1 + \\
&\quad + {}^4C_2 \times (2x)^2 \times \left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}^4C_3 \times (2x)^1 \times \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \\
&\quad + {}^4C_4 \times (2x)^0 \times \left(\frac{1}{x}\right)^4 = \\
&= 16x^4 + 4 \times 8x^3 \times \frac{1}{x} + 6 \times 4x^2 \times \frac{1}{x^2} + 4 \times 2x \times \\
&\quad \times \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} = \\
&= 16x^4 + 32x^2 + 24 + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \left(\frac{x}{3} - x^2\right)^5 &= \\
&= {}^5C_0 \times \left(\frac{x}{3}\right)^5 \times (-x^2)^0 + {}^5C_1 \times \left(\frac{x}{3}\right)^4 \times (-x^2)^1 + \\
&\quad + {}^5C_2 \times \left(\frac{x}{3}\right)^3 \times (-x^2)^2 + {}^5C_3 \times \left(\frac{x}{3}\right)^2 \times (-x^2)^3 + \\
&\quad + {}^5C_4 \times \left(\frac{x}{3}\right)^1 \times (-x^2)^4 + {}^5C_5 \times \left(\frac{x}{3}\right)^0 \times (-x^2)^5 = \\
&= \frac{x^5}{243} - 5 \times \frac{x^4}{81} \times x^2 + 10 \times \frac{x^3}{27} \times x^4 - 10 \times \frac{x^2}{9} \times \\
&\quad \times x^6 + 5 \times \frac{x}{3} \times x^8 - x^{10} = \\
&= \frac{1}{243} x^5 - \frac{5}{81} x^6 + \frac{10}{27} x^7 - \frac{10}{9} x^8 + \frac{5}{3} x^9 - x^{10}
\end{aligned}$$

33.

a) O desenvolvimento tem 11 (= 10 + 1) termos.

$$\begin{aligned}
\text{b)} {}^{10}C_2 \times (17x)^8 \times \left(\frac{y}{17}\right)^2 &= 45 \times 17^8 x^8 \times \frac{y^2}{17^2} = \\
&= 45 \times 17^6 x^8 y^2 = \\
&= 1\,086\,190\,605 x^8 y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} {}^{10}C_5 \times (17x)^5 \times \left(\frac{y}{17}\right)^5 &= 252 \times 17^5 x^5 \times \frac{y^5}{17^5} = \\
&= 252 x^5 y^5
\end{aligned}$$

$$\text{d)} {}^{10}C_0 + {}^{10}C_1 + {}^{10}C_2 + \dots + {}^{10}C_{10} = 2^{10} = 1024$$

34.

a) Verdadeira para quaisquer A e B.

$$\begin{aligned}
B \setminus A &= \{x \in B: x \notin A\} = \{x: x \in B \wedge x \notin A\} = \\
&= \{x: x \in B \wedge x \in \bar{A}\} = \\
&= B \cap \bar{A}
\end{aligned}$$

b) Não é verdadeira para quaisquer A e B.

Por exemplo, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6\}$.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$(A \cup B) \setminus A = \{1, 2, 3\} \neq B$$

c) Verdadeira para quaisquer A, B e C.

$$\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A \cap (B \cap C)} = \bar{A} \cup \overline{(B \cap C)} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$$

35.

a) $5 + 5 \times 5 + 5 \times 5 \times 5 = 155$ números naturais

b) $5 + 5 \times 4 + 5 \times 4 \times 3 = 85$ números naturais

36.

a) $9 \times 9 \times 8 = 648$

b) $9 \times 8 \times 7 = 504$

c) $8 \times 7 \times 6 = 336$

d) $9 \times 8 \times 7 + 8 \times 8 \times 7 - 8 \times 7 \times 6 = 616$

37.

a) $3! \times 3! \times 2 = 72$ maneiras

b) $3! \times 4! = 144$ maneiras

c) $2! \times 2! \times 2! \times 3! = 48$ maneiras

38.

a) ${}^{20}C_{15} = 15\,504$ possibilidades

b) $1 \times 1 \times {}^{18}C_{13} = 8568$ possibilidades

c) $2 \times {}^{18}C_{14} + 1 \times 1 \times {}^{18}C_{13} = 14\,688$ possibilidades

d) ${}^{10}C_5 \times {}^{10}C_{10} = 252$ possibilidades

$$\begin{aligned}
\text{39. } {}^5C_4 \times {}^{30}C_{21} + {}^5C_3 \times {}^{30}C_{22} + {}^5C_2 \times {}^{30}C_{23} &= \\
&= 150\,423\,000 \text{ escolhas}
\end{aligned}$$

40.

a) $4^8 = 65\,536$ maneiras

b) ${}^8C_4 \times 1^4 \times 3^4 = 5670$ casos

41.

a) ${}^{12}C_6 \times {}^{28}C_4 = 18\,918\,900$ mãos

b) ${}^4C_4 \times {}^{36}C_6 = 1\,947\,792$ mãos

c) ${}^4C_2 \times {}^{36}C_8 + {}^4C_3 \times {}^{36}C_7 + {}^4C_4 \times {}^{36}C_6 = 216\,900\,552$ mãos

42.

a) $12^5 = 248\,832$ possibilidades

- b) $12 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 12$ possibilidades
 c) $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95\,040$ possibilidades
 d) ${}^5C_3 \times 12 \times 1 \times 1 \times 11 \times 10 = 13\,200$ possibilidades

43.

a) ${}^{20}C_8 \times {}^{12}A_4 = 1\,496\,523\,600$

b)

i) ${}^8C_3 \times {}^4C_1 = 224$

ii) $8! \times 4! \times 5 = 4\,838\,400$

44. 9A_4 é o número de maneiras distintas de escolher ordenadamente as três amigas a quem a Patrícia vai oferecer um dos diferentes colares. Por cada uma destas maneiras, existem 5A_3 modos distintos de escolher ordenadamente as amigas a quem a Patrícia vai oferecer cada uma das diferentes pulseiras. Assim, ${}^9A_4 \times {}^5A_3$ é o número de maneiras diferentes que a Patrícia tem de apresentar as amigas.

9C_7 é o número de maneiras de escolher as sete amigas que vão ser presenteadas de entre as nove amigas. Por cada uma destas maneiras, existem 7A_4 modos distintos de escolher ordenadamente quatro das sete amigas que vão receber cada um dos colares. Depois de escolhidas as quatro amigas que vão receber os colares, existem $3!$ maneiras diferentes de distribuir as três pulseiras pelas três amigas. Ou seja, ${}^9C_7 \times {}^7A_4 \times 3!$ é uma resposta correta.

45. A resposta correta é a II.

Se nos quatro dadores escolhidos pelo menos dois são do grupo O, então existem três possibilidades mutuamente exclusivas: exatamente dois dadores do grupo O, exatamente três dadores do grupo O ou quatro dadores do grupo O.

${}^{10}C_2 \times {}^{10}C_2$ é o número de maneiras distintas de escolher dois dadores do grupo O e dois dadores que não são do grupo O; ${}^{10}C_3 \times {}^{10}C_1$ é o número de maneiras diferentes de escolher três dadores do grupo O e um dador que não é do grupo O; ${}^{10}C_4$ é o número de modos distintos de escolher quatro dadores do grupo O.

Assim, ${}^{10}C_2 \times {}^{10}C_2 + {}^{10}C_3 \times {}^{10}C_1 + {}^{10}C_4$ é o número de maneiras de escolher pelo menos dois dadores do grupo O.

${}^{20}C_4 - {}^{10}C_4 - {}^{10}C_1 \times {}^{10}C_3$ também seria uma resposta correta.

${}^{20}C_4$ é o número de maneiras de escolher quatro dadores de entre os 20 sem quaisquer restrições.

${}^{10}C_4$ é o número de maneiras de escolher quatro dadores que não são do grupo O e ${}^{10}C_1 \times {}^{10}C_3$ é o número de maneiras de escolher um dador do grupo O e três que não são do grupo O. Se ao número de possibilidades de escolher quaisquer quatro dadores retirarmos o número de possibilidades de não ter nenhum dador do grupo O e exatamente um dador do grupo O, obtemos o número de possibilidades de obtermos pelo menos dois dadores do grupo O.

46. $1 + n + n + 1 = 50 \Leftrightarrow n = 24$

a) A linha tem 25 ($24 + 1$) elementos.

b) Os elementos da linha em questão são do tipo ${}^{24}C_k$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, 24\}$.

$${}^{24}C_0 = {}^{24}C_{24} = 1$$

$${}^{24}C_1 = {}^{24}C_{23} = 24$$

$${}^{24}C_2 = {}^{24}C_{22} = 276$$

São seis os elementos dessa linha menores que 300.

c) Em 12 casos, já que a linha tem 25 elementos e os elementos equidistantes dos extremos são iguais.

$$\begin{aligned} 47. {}^9C_1 + {}^9C_2 + {}^9C_3 + {}^9C_4 + {}^9C_5 + {}^9C_6 + {}^9C_7 + {}^9C_8 + {}^9C_9 &= \\ &= 2^9 - 1 = \\ &= 511 \end{aligned}$$

48.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} &= {}^nC_3 + {}^nC_2 = \\ &= {}^{n+1}C_3 = \\ &= \frac{(n+1)!}{3!(n+1-3)!} = \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{3!(n-2)!} = \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{({}^7C_{p-1} + {}^7C_p) \times p!}{{}^8A_p} &= \frac{{}^8C_p \times p!}{{}^8A_p} = \\ &= \frac{{}^8A_p \times p!}{p! \times {}^8A_p} = \\ &= \frac{{}^8A_p}{{}^8A_p} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

49. Se o desenvolvimento de $\left(\sqrt{3}a - \frac{1}{b}\right)^n$ tem sete elementos, então $n = 6$ e os três últimos termos são:

$${}^6C_4 \times (\sqrt{3}a)^2 \times \left(-\frac{1}{b}\right)^4 = 15 \times 3 \times a^2 \times \frac{1}{b^4} = 45 \frac{a^2}{b^4}$$

$${}^6C_5 \times (\sqrt{3}a)^1 \times \left(-\frac{1}{b}\right)^5 = 6 \times \sqrt{3} \times a \times \frac{(-1)}{b^5} =$$

$$= -6\sqrt{3} \frac{a}{b^5}$$

$${}^6C_6 \times (\sqrt{3}a)^0 \times \left(-\frac{1}{b}\right)^6 = 1 \times 1 \times \frac{1}{b^6} = \frac{1}{b^6}$$

50. Termo geral:

$${}^6C_p \times \left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)^{6-p} \times \left(\frac{1}{x}\right)^p = {}^6C_p \times \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{6-p}}{3^{6-p}} \times \frac{1}{x^p} =$$

$$= {}^6C_p \times \frac{x^{3-\frac{1}{2}-p}}{3^{6-p}} \times \frac{1}{x^p} =$$

$$= {}^6C_p \times \frac{1}{3^{6-p}} \times x^{3-\frac{3}{2}p}$$

a) $3 - \frac{3}{2}p = -3 \Leftrightarrow p = 4$

Assim, o termo em x^{-3} é:

$${}^6C_4 \times \left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)^{6-4} \times \left(\frac{1}{x}\right)^4 = 15 \times \frac{x}{9} \times \frac{1}{x^4} = \frac{5}{3} x^{-3}$$

b) $3 - \frac{3}{2}p = 0 \Leftrightarrow p = 2$

Assim, o termo independente é:

$${}^6C_2 \times \left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)^{6-2} \times \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 15 \times \frac{x^2}{3^4} \times \frac{1}{x^2} = \frac{5}{27}$$

51.

a) $\sum_{k=0}^{12} {}^{12}C_k 4^{12-k} (-2)^k = (4 + (-2))^{12} = 2^{12} = 4096$

b) $\sum_{k=0}^n {}^nC_k (-1)^k = \sum_{k=0}^n {}^nC_k 1^{n-k} (-1)^k = (1 + (-1))^n = 0$

52. $\frac{7!}{3! \times 2!} - \frac{6!}{3! \times 2!} = 360$ números

53.

a) $5^{10} = 9\,765\,625$

b) ${}^{10}C_4 \times 1^4 \times 5^6 = 3\,281\,250$

c) ${}^{10}C_8 \times 1^8 \times 5^2 + {}^{10}C_9 \times 1^9 \times 5^1 + {}^{10}C_{10} \times 1^{10} \times 5^0 = 1176$

d) ${}^{10}C_0 \times 1^0 \times 5^{10} + {}^{10}C_1 \times 1^1 \times 5^9 + {}^{10}C_2 \times 1^2 \times 5^8 = 46\,875\,000$

54. $n! \times m! \times (m+1)! = n! \times (m+1)!$

55. $\frac{9 \times 10 \times 10 \times 10}{\text{número de quatro algarismos}} - \frac{9 \times 9 \times 8 \times 7}{\text{números de quatro algarismos todos distintos}} = 4464$ números

56. $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8! = 40\,320$ maneiras

57. ${}^nC_2 = 45 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 45$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} = 45$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 90$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-90)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 19}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 10 \vee n = -9$$

Como $n \geq 2$, então $n = 10$.

São 10 participantes.

58. A resposta correta é a I.

Para que os três pontos escolhidos definam um plano, não podem ser os três colineares. Assim, podemos escolher dois pontos da aresta $[AC]$ e um ponto da aresta $[DF]$ ou escolher dois pontos da aresta $[DF]$ e um ponto da aresta $[AC]$.

3C_2 é o número de maneiras diferentes de escolher dois vértices da aresta $[AC]$. E, por cada uma destas maneiras, existem três hipóteses para escolher um vértice da aresta $[DF]$. Logo, ${}^3C_2 \times 3$ é o número de maneiras de escolher dois pontos da aresta $[AC]$ e um ponto da aresta $[DF]$.

Analogamente, 3C_2 é o número de maneiras diferentes de escolher dois vértices da aresta $[DF]$. E, por cada uma destas maneiras, existem três hipóteses para escolher um vértice da aresta $[AC]$. Logo, ${}^3C_2 \times 3$ é o número de maneiras de escolher dois pontos da aresta $[DF]$ e um ponto da aresta $[AC]$.

Assim, ${}^3C_2 \times 3 + {}^3C_2 \times 3$ é o número de maneiras de escolher três pontos que definam um plano.

Uma outra resposta correta para este problema é ${}^6C_3 - {}^3C_3 \times 2$.

6C_3 é o número de maneiras distintas de escolher três pontos quaisquer de entre os seis possíveis. ${}^3C_3 \times 2$ é o número de modos distintos de escolher três pontos que não definem um plano. Se ao número de maneiras distintas de escolher três pontos quaisquer de entre os seis possíveis retirarmos o número de possibilidades de escolher três pontos que não definem um plano, obtemos o número de maneiras de escolher três pontos que definam um plano.

59.

a) ${}^{16}C_8 \times 8! \times 2 \times 8! \times 2$ maneiras

b) ${}^{16}C_{10} \times 10! \times 2 \times 6! \times 2 \times 2$ maneiras

60.

a) ${}^{10}C_6 \times {}^4C_4 = 210$ modos

b) $\frac{{}^{10}C_5 \times {}^5C_5}{2} = 126$ modos

c) $\frac{{}^{10}C_5 \times {}^8C_2 \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2}{5!} = 945$ modos

61. ${}^6C_4 = 15$ casos

62. ${}^nC_3 = 4060$

$${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 = 4526$$

$$\Leftrightarrow 1 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + 4060 = 4526$$

$$\Leftrightarrow {}^nC_1 + {}^nC_2 = 465$$

$$\Leftrightarrow {}^{n+1}C_2 = 465$$

63. ${}^nC_{n-2} = 1225$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 1225$$

$$\Leftrightarrow \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2 \times (n-2)!} = 1225$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 2450$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 2450 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2450)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 50 \vee n = -49$$

Como $n \in \mathbb{N}_0$, então $n = 50$.

A linha em questão tem 51 elementos.

64. $2^n = 256 \Leftrightarrow n = 8$

Termo geral:

$${}^8C_p \times (\sqrt[4]{x})^{8-p} \times \left(-\frac{1}{x}\right)^p =$$

$$= {}^8C_p \times \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{8-p} \times (-1)^p \times x^{-p} =$$

$$= {}^8C_p \times (-1)^p \times x^{2 - \frac{1}{4}p} \times x^{-p} =$$

$$= {}^8C_p \times (-1)^p \times x^{2 - \frac{5}{4}p} =$$

Assim:

$$2 - \frac{5}{4}p = 0 \Leftrightarrow p = \frac{8}{5}$$

Como $\frac{8}{5} \notin \mathbb{N}_0$, conclui-se que não existe termo

independente no desenvolvimento de $\left(\sqrt[4]{x} - \frac{1}{x}\right)^8$.

65. $\frac{1}{2} {}^nC_4 = \frac{1}{6} {}^nC_6$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{1}{6} \times \frac{n!}{6!(n-6)!}$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 4!(n-4)! = 6 \times 6!(n-6)!$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 4!(n-4)(n-5)(n-6)! = 6 \times 6!(n-6)!$$

$$\Leftrightarrow (n-4)(n-5) = \frac{6 \times 6!}{2 \times 4!}$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 9n + 20 = 90$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 9n - 70 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \times (-70)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 14 \vee n = -5$$

Como $-5 \notin \mathbb{N}_0$, então $n = 14$.

Assim, o desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$ tem 15 termos.

66. Consideremos um conjunto com n elementos, $n \in \mathbb{N}_0$.

2^n é o número total de subconjuntos que se podem formar de um conjunto com n elementos, que é naturalmente superior a n , que é o número de subconjuntos que é possível formar com apenas um elemento. Isto é, $2^n > n, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

67. $(2x - 3)^{11} =$

$$= {}^{11}C_0 \times (2x)^{11} \times (-3)^0 + {}^{11}C_1 \times (2x)^{10} \times (-3)^1 + \dots +$$

$$+ {}^{11}C_{11} \times (2x)^0 \times (-3)^{11} =$$

$$= {}^{11}C_0 \times 2^{11} \times (-3)^0 x^{11} + {}^{11}C_1 \times 2^{10} \times (-3)^1 x^{10} + \dots +$$

$$+ {}^{11}C_{11} \times 2^0 \times (-3)^{11} x^0$$

Se $x = 1$, obtém-se a soma dos coeficientes do desenvolvimento:

$${}^{11}C_0 \times 2^{11} \times (-3)^0 + {}^{11}C_1 \times 2^{10} \times (-3)^1 + \dots +$$

$$+ {}^{11}C_{11} \times 2^0 \times (-3)^{11} =$$

$$= (2 - 3)^{11} =$$

$$= (-1)^{11} =$$

$$= -1$$

Teste Final

Páginas 66 e 67

Grupo I

1. Opção (B)

$$A \cap [\overline{A \cup (A \cup \overline{B})}] = A \cap [\overline{A} \cup (\overline{A} \cap \overline{B})] =$$

$$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{A} \cap \overline{B}) =$$

$$= \emptyset \cup (\emptyset \cap \overline{B}) =$$

$$= \emptyset \cup \emptyset =$$

$$= \emptyset$$

2. Opção (C)

$${}^6C_3 \times 9 \times 8 \times 7 = 10\,080$$

3. Opção (D)

$$3 \times 3! \times {}^6A_2 = 540$$

4. Opção (C)

$$a + 2b = {}^{2018}C_{20} + {}^{2018}C_{21} + {}^{2018}C_{21} = {}^{2019}C_{21} + {}^{2018}C_{21}$$

5. Opção (A)

$$\sum_{i=0}^n {}^nC_i = 4096 \Leftrightarrow 2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$$

Assim, ${}^{12-1}C_4 = 330$ e, portanto, a proposição I é verdadeira.

$$\sum_{i=0}^{12+2} {}^{12+2}C_i = 2^{14} = 16\,384, \text{ ou seja, a proposição II é verdadeira.}$$

Grupo II

1. Os números ímpares menores do que 1000, com os algarismos todos diferentes, podem ter só um algarismo, dois algarismos ou três algarismos, possibilidades estas que se excluem mutuamente. Assim, existem cinco números ímpares menores do que 1000 só com um algarismo (1, 3, 5, 7 e 9); 8×5 é o número de números ímpares menores do que 1000 só com dois algarismos, pois para ser ímpar tem que terminar em algarismo ímpar (1, 3, 5, 7 ou 9) – cinco hipóteses, e por cada uma dessas possibilidades existem oito possibilidades para o algarismo das dezenas (não pode ser o algarismo escolhido para as unidades nem o zero); $8^2 \times 5$ é o número de números ímpares menores do que 1000 com três algarismos, pois para ser ímpar tem que terminar em algarismo ímpar (1, 3, 5, 7 ou 9) – cinco hipóteses, e por cada uma dessas possibilidades existem oito possibilidades para o algarismo das centenas (não pode ser o algarismo escolhido para as unidades nem o zero) e por cada uma dessas possibilidades existem oito hipóteses para o algarismo das dezenas (não podem ser os algarismos escolhidos para as unidades nem para as centenas). Logo, $5 + 8 \times 5 + 8^2 \times 5$ é o número de números ímpares inferiores a 1000 que não têm dois algarismos iguais.

2.

2.1. ${}^{10}A_7 = 604\,800$ maneiras

2.2. Existem dois casos diferentes:

- ou o Nuno estaciona no primeiro ou no último lugar e existem $2 \times {}^8A_7$ maneiras de o fazer;
- ou o Nuno estaciona em qualquer um dos oito lugares que não os dos extremos e existem $8 \times 7!$ maneiras de o fazer.

Assim, existem $2 \times {}^8A_7 + 8 \times 7! = 120\,960$ configurações que permitem satisfazer a vontade do Nuno.

3.

3.1. $2 \times 6 \times 1 \times 4 \times 1 \times 2 \times 1 = 96$ casos

3.2. Seja n o número de rapazes do grupo de amigos.

$${}^nC_2 + {}^{20-n}C_2 = 91$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{(20-n)!}{2!(18-n)!} = 91$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} + \frac{(20-n)(19-n)(18-n)!}{2 \times (18-n)!} = 91$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) + (20-n)(19-n) = 182$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n + 380 - 39n + n^2 = 182$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 40n + 198 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 20n + 99 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \times 99}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 9 \vee n = 11$$

Como o número de raparigas é maior que o número de rapazes, então $n = 9$.

3.3. ${}^7C_4 \times 7 \times 1 \times 1 \times 1 \times 6 \times 5 \times 4 = 29\,400$ casos

3.4. $2! \times 6! = 1440$ casos

4. Termo geral:

$$\begin{aligned} & {}^{10}C_p \times (2x)^{10-p} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^p = \\ & = {}^{10}C_p \times 2^{10-p} \times x^{10-p} \times (-1)^p \times x^{-2p} = \\ & = {}^{10}C_p \times 2^{10-p} \times (-1)^p \times x^{10-3p} \end{aligned}$$

Então:

$$10 - 3p = -5 \Leftrightarrow p = 5$$

Logo:

$$2kx^{-5} = {}^{10}C_5 \times (2x)^{10-5} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^5 =$$

$$\Leftrightarrow 2kx^{-5} = 252 \times 32 \times (-1)x^{-5}$$

$$\Leftrightarrow 2k = 252 \times 32 \times (-1)x^{-5}$$

$$\Leftrightarrow 2k = -8064$$

$$\Leftrightarrow k = -4032$$

Tema II - Probabilidades

Unidade 1 - Revisões

Páginas 70 e 74

1.

a) $E = \{0, 1, 2, 3\}$

b) $E = \{\text{verde, azul, rosa, amarelo, branco, laranja, vermelho}\}$

2.

a) Consideremos os acontecimentos:

N : "Sair face nacional."

E : "Sair face europeia."

Assim:

$$E = \{(N, 1), (N, 2), (N, 3), (N, 4), (N, 5), (N, 6), (E, 1), (E, 2), (E, 3), (E, 4), (E, 5), (E, 6)\}$$

b) Consideremos os acontecimentos:

F : "Ser a favor."

C : "Ser contra."

Assim:

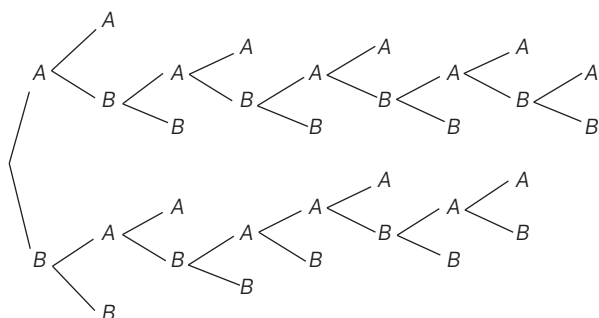
$$E = \{(F, F, F), (F, F, C), (F, C, F), (F, C, C), (C, F, F), (C, F, C), (C, C, F), (C, C, C)\}$$

c) $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

3. A: "Ganha o jogador A."

B: "Ganha o jogador B."

1.º jogo 2.º jogo 3.º jogo 4.º jogo 5.º jogo 6.º jogo 7.º jogo 8.º jogo 9.º jogo



$$E = \{AA, ABB, ABAA, ABABB, ABABAA, ABABABB, ABABABAA, ABABABABA, ABABABABB, BB, BAA, BABB, BABAA, BABABB, BABABAA, BABABABB, BABABABAB, BABABABAA\}$$

$$\#E = 18$$

4.

a) $E = \{(F, F, F), (F, F, M), (F, M, F), (F, M, M), (M, F, F), (M, F, M), (M, M, F), (M, M, M)\}$

b)

i) Por exemplo, A: "os três filhos serem rapazes".

$$A = \{(M, M, M)\}$$

ii) Por exemplo, B: "ter pelo menos dois rapazes".

$$B = \{(M, M, F), (M, F, M), (F, M, M), (M, M, M)\}$$

iii) Por exemplo, C: "ter pelo menos um rapaz ou uma rapariga".

c)

i) $\{(F, M, M), (M, F, M), (M, M, F)\}$

ii) $\{(F, M, M), (M, F, M), (M, M, F), (F, F, M), (F, M, F), (M, F, F), (F, F, F)\}$

iii) $\{(M, M, M), (F, M, M), (M, F, M), (M, M, F), (F, F, M), (F, M, F), (M, F, F)\}$

iv) $\{(F, F, M), (F, M, F), (M, F, F), (F, F, F)\}$

v) $\{(M, M, M)\}$

5.

a) $A \cup B = \{0, 1, 3, 5, 7, 8\}$

b) $A \cap B = \{1, 7\}$

c) $\bar{A} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

d) $A \cap \bar{B} = \{0, 8\}$

e) $\bar{A} \cap B = \{3, 5\}$

6. $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

a) $P(\text{"as pontuações obtidas são iguais"}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

b) $P(\text{"nenhuma pontuação é 2"}) = \frac{4}{9}$

c) $P(\text{"pelo menos uma pontuação é 3"}) = \frac{5}{9}$

d) $P(\text{"nenhuma pontuação é 2 e ambas as pontuações são iguais"}) = \frac{2}{9}$

e) $P(\text{"nenhuma pontuação é 2 e ambas as pontuações são iguais"}) = \frac{5}{9}$

Unidade 2 - Espaços de probabilidade

Páginas 75 a 93

7. Por exemplo, $P(\emptyset) = 0$, $P(\{1\}) = \frac{5}{6}$, $P(\{2\}) = \frac{1}{6}$ e

$$P(E) = 1 \text{ ou, por exemplo, } P(\emptyset) = 0, P(\{1\}) = \frac{1}{2},$$

$$P(\{2\}) = \frac{1}{2} \text{ e } P(E) = 1.$$

8.

a)

i) Um acontecimento certo é $\{a, b, c\}$.

ii) Um acontecimento impossível é $\emptyset$.

b)

i) Dois acontecimentos incompatíveis são, por exemplo, $\{a\}$ e $\{c\}$.

ii) Dois acontecimentos contrários são, por exemplo, $\{b\}$ e $\{a, c\}$.

iii) Dois acontecimentos equiprováveis são, por exemplo, $\{b\}$ e $\{c\}$.

9. Opção (C)

10.

a) A proposição é verdadeira.

Se dois acontecimentos A e B de uma mesma experiência aleatória são contrários, então $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = E$. Assim, como $A \cap B = \emptyset$, então A e B são incompatíveis.

b) A proposição é falsa.

Contraexemplo:

$E = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1\}$

$B = \{3, 4\}$

$A \cap B = \emptyset$, ou seja, A e B são acontecimentos incompatíveis. Porém, $A \cup B \neq E$, logo A e B não são contrários.

11. Consideremos os acontecimentos:

C : "Especializar-se em Cardiologia."

P : "Especializar-se em Pediatria."

R : "Especializar-se em Reumatologia."

Pelo enunciado, sabemos que:

$\#E = 116$

$\#C = 56$

$\#P = 50$

$\#R = 46$

$\#(C \cap P) = 18$

$\#(C \cap R) = 16$

$\#(P \cap R) = 22$

Logo:

$\#(C \cap P \cap R) = 10$

$\#(P \cap C \cap \bar{R}) = 18 - 10 = 8$

$\#(P \cap \bar{C} \cap R) = 22 - 10 = 12$

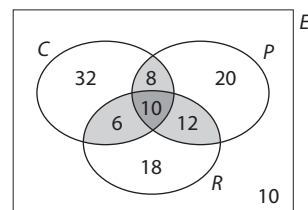
$\#(\bar{P} \cap C \cap R) = 16 - 10 = 6$

$\#(P \cap \bar{C} \cap \bar{R}) = 50 - 8 - 10 - 12 = 20$

$\#(\bar{P} \cap C \cap \bar{R}) = 56 - 8 - 10 - 6 = 32$

$\#(\bar{P} \cap \bar{C} \cap R) = 46 - 6 - 10 - 12 = 18$

$\#(\bar{P} \cap \bar{R} \cap \bar{C}) = 116 - (32 + 20 + 18 + 8 + 10 + 12 + 6) = 10$



Assim, por observação do diagrama, facilmente concluímos que as probabilidades pretendidas são:

$$a) P = \frac{10}{116} = \frac{5}{58}$$

$$b) P = \frac{32 + 20 + 18}{116} = \frac{70}{116} = \frac{35}{58}$$

$$c) P = \frac{6 + 8 + 10 + 12}{116} = \frac{36}{116} = \frac{9}{29}$$

12.

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

$$a) P = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$b) P = \frac{11}{36}$$

$$c) P = \frac{25}{36}$$

d)

x	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$$P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$e) P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

f)

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

g) $P = 0$

h) $P = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$

13.

a) $P = \frac{4 \times 4 \times 3}{9 \times 9 \times 8} = \frac{48}{648} = \frac{2}{27}$

b) Número de casos favoráveis:

$$\underbrace{9 \times 8 \times 1}_{\text{números que terminam em 0}} + \underbrace{8 \times 8 \times 1}_{\text{números que terminam em 5}}$$

$$P = \frac{9 \times 8 \times 1 + 8 \times 8 \times 1}{9 \times 9 \times 8} = \frac{136}{648} = \frac{17}{81}$$

c) Número de casos favoráveis:

$$\underbrace{1 \times 5 \times 8}_{\text{números entre 250 e 300}} + \underbrace{7 \times 9 \times 8}_{\text{números maiores que 300}} - \underbrace{1}_{\text{o número 250 não é superior a 250}}$$

$$P = \frac{1 \times 5 \times 8 + 7 \times 9 \times 8 - 1}{9 \times 9 \times 8} = \frac{543}{648} = \frac{181}{216}$$

14. $P = \frac{5 \times 6! \times 4}{8!} = \frac{5}{14}$

15.

a) $P = \frac{{}^4C_4 \times {}^{48}C_1}{{}^{52}C_5} = \frac{48}{2\,598\,960} = \frac{1}{54\,145}$

b) $P = \frac{{}^4C_2 \times {}^{48}C_3}{{}^{52}C_5} = \frac{103\,776}{2\,598\,960} = \frac{2162}{54\,145}$

c) $P = \frac{{}^{26}C_4 \times {}^{26}C_1}{{}^{52}C_5} = \frac{388\,700}{2\,598\,960} = \frac{1495}{9996}$

d) $P = \frac{{}^4C_2 \times {}^{48}C_3 + {}^4C_3 \times {}^{48}C_2 + {}^4C_2 \times {}^{48}C_1}{{}^{52}C_5} =$
 $= \frac{108\,336}{2\,598\,960} =$
 $= \frac{2257}{54\,145}$

16.

a) $P = \frac{2 \times 5!}{6!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

b) $P = \frac{2! \times 4! \times 5}{6!} = \frac{1}{3}$

c) $P = \frac{6! - 2! \times 4! \times 5}{6!} = \frac{2}{3}$

17.

a) $P = \frac{1}{{}^{16}C_8} = \frac{1}{12\,870}$

b) $P = \frac{4 \times {}^{12}C_4 - {}^4C_2}{{}^{16}C_8} = \frac{329}{2145}$

c) $P = \frac{{}^4C_2}{{}^{16}C_8} = \frac{1}{2145}$

18. O número de casos possíveis é 6^3 , pois, como em cada lançamento existem seis possibilidades, em três lançamentos existem $6 \times 6 \times 6$ possibilidades. Relativamente aos casos favoráveis, existem três hipóteses em alternativa, que se excluem mutuamente: ou os números saídos são 1, 2 e 3, ou são 1, 1 e 4, ou são 2, 2 e 2. No primeiro caso, temos 3! possibilidades, que é o número de permutações de três elementos. No segundo caso, temos três possibilidades (a face 4 pode sair, ou no primeiro lançamento, ou no segundo, ou no terceiro). No terceiro caso, temos apenas uma possibilidade (a face 2 tem que sair no primeiro lançamento, no segundo e no terceiro). Portanto, o número de casos favoráveis é $3! + 3 + 1 = 3! + 4$.

De acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis e em número finito. A probabilidade pedida é, portanto, $\frac{3! + 4}{6^3}$.

19. De acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis. Pretendemos colocar as 28 peças em quatro filas horizontais, cada uma com sete peças, e o número total de maneiras de o fazer é igual ao número de configurações visuais distintas que se podem obter com a colocação das peças. ${}^{28}C_8$ é o número de modos distintos de escolher quais as posições que vão tomar as oito peças azuis. Por cada um destes modos, existe apenas um modo de colocar as 20 peças vermelhas nas 20 posições restantes (${}^{20}C_{20}$). O número de casos possíveis é, então, ${}^{28}C_8 \times {}^{20}C_{20} = 3\,108\,105$.

Pretende-se preencher uma fila horizontal toda com peças azuis, o que pode ser feito de apenas quatro modos. Depois de escolhida a fila horizontal e de preenchida com peças azuis (o que pode ser feito apenas de quatro modos distintos, já que o que interessa contabilizar são configurações visuais distintas), sobra-nos uma peça azul e 20 vermelhas para colocar nas 21 posições restantes. Assim, a peça azul pode ser colocada de 21 modos distintos (${}^{21}C_1$) e, por cada um destes modos, só existe um modo de colocar as 20 peças vermelhas nas 20 posições restantes (${}^{20}C_{20}$). Assim, o número de casos favoráveis é $4 \times {}^{21}C_1 \times {}^{20}C_{20} = 84$. Donde se conclui que a probabilidade pedida é $\frac{84}{3\,108\,105} = \frac{4}{148\,005}$.

20.

a)

i) $5! \times 7! = 604\,800$

ii) $(5 \times 6 \times {}^6A_4 + {}^5C_3 \times {}^6A_3 \times {}^6A_2 + {}^6A_5) \times 7! = 239\,500\,800$

b) $P = \frac{{}^{14}C_4 \times {}^{14}A_{10}}{15^{14}} \approx 0,000\,12$

21. Seja n o número de bolas azuis. Tem-se que:

$$\frac{n \times {}^2C_2}{{}^2C_3} = \frac{1}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{\frac{(n+2)(n+1)n}{6}} = \frac{1}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6n}{(n+2)(n+1)n} = \frac{1}{7}$$

$$\Leftrightarrow 42 = (n+2)(n+1)$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n + 2 - 42 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n - 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times (-40)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm 13}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -8 \vee n = 5$$

Como $n \in \mathbb{N}$, então $n = 5$.

Logo, há 5 bolas azuis.

22. $P = 1 - \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{220}{221}$

23. $P = 1 - \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{8}{15}$

24. $P(\bar{A}) = 3x$, logo $P(A) = 1 - 3x$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow 9x = 1 - 3x + \frac{1}{2} - 3x$$

$$\Leftrightarrow 9x + 6x = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 15x = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{30}$$

$$\Leftrightarrow x = 0,1$$

25. $P(\{\text{😊, 😐}\}) + P(\{\text{😐, 😊}\}) = \frac{7}{6}$

$$\Leftrightarrow P(\{\text{😊}\})P(\{\text{😐}\}) + P(\{\text{😐}\})P(\{\text{😊}\}) = \frac{7}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(\{\text{😊, 😐, 😐}\}) + P(\{\text{😐}\}) = \frac{7}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1 + P(\{\text{😐}\}) = \frac{7}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(\{\text{😐}\}) = \frac{1}{6}$$

26.

a) Sejam A e B dois acontecimentos quaisquer de um mesmo espaço amostral.

$$\text{Então, } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Como $P(A \cap B) \geq 0$, então $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

A proposição é verdadeira.

b) A proposição é falsa.

Consideremos o espaço amostral $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ e os resultados elementares são equiprováveis.

Tem-se que $P(A) = P(B) = 0,5$, ou seja, $1 - P(A) = P(B)$ e A e B não são acontecimentos contrários, já que $A \cap B = \{3\} \neq \emptyset$ e $A \cup B = \{2, 3, 4\} \neq E$.

c) A proposição é falsa.

Considere-se o mesmo contraexemplo da alínea anterior.

27. Como $P(\bar{A}) = \frac{5}{8}$, então $P(A) = \frac{3}{8}$.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{8} = \frac{3}{8} + P(B) - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{7}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{4}$$

b) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) =$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

c) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) =$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

28.

a) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,7 - 0,2 = 0,8$

29. R: "O Real Madrid ganha."

N: "Há um empate."

B: "O Barcelona ganha."

$$P(R) = 2 \times P(N)$$

$$P(N) = 3 \times P(B)$$

a) Como R, E e B são acontecimentos disjuntos dois a dois e $R \cup N \cup B = E$, vem que:

$$P(R) + P(N) + P(B) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2P(N) + 3P(B) + P(B) = 1$$

$$\Leftrightarrow 6P(B) + 3P(B) + P(B) = 1$$

$$\Leftrightarrow 10P(B) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(B) = 0,1$$

$$\text{Assim, } P(R) = 6 \times 0,1 \Leftrightarrow P(R) = 0,6.$$

b) $P(B) = 0,1$

30.

$$\begin{aligned} \mathbf{a)} \quad & P(A) + P(B) + P(\overline{A \cap B}) = \\ & = P(A) + P(B) + P(\overline{A \cup B}) = \\ & = P(A) + P(B) + 1 - P(A \cup B) = \\ & = P(A) + P(B) + 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = \\ & = 1 + P(A \cap B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \quad & P(\overline{A \cup B}) = \\ & = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A \cap B}) = \\ & = P(\overline{A}) + 1 - P(B) - P(\overline{A \cup B}) = \\ & = P(\overline{A}) + 1 - P(B) - 1 + P(A \cup B) = \\ & = P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cup B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c)} \quad & P(B) + P(\overline{A}) + P(\overline{A \cup B}) = \\ & = P(B) + P(\overline{A}) + P(\overline{A \cap B}) = \\ & = P(B) + P(\overline{A}) + 1 - P(A \cap B) = \\ & = P(B) + P(\overline{A}) + 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B) = \\ & = P(\overline{A}) + P(\overline{A}) + P(A \cup B) = \\ & = 2P(\overline{A}) + P(A \cup B) \end{aligned}$$

31.

$$\mathbf{a)} \quad 1 - P(\overline{B \cap A}) = 1 - P(A) + P(A \cap B) = P(\overline{A}) + P(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \quad & P(A) + P(\overline{A \cap B}) = \\ & = P(A) + P(\overline{A \cup B}) = \\ & = P(A) + P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A \cap B}) = \\ & = P(A) + 1 - P(A) + P(B) - P(\overline{A \cap B}) = \\ & = P(B) + 1 - P(\overline{A \cap B}) = \\ & = P(B) + P(\overline{A \cap B}) = \\ & = P(B) + P(A \cup B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c)} \quad & P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = \\ & = P(A) + 1 - P(B) - P(A \cap \overline{B}) = \\ & = P(A) - P(B) + 1 - P(A \cap \overline{B}) = \\ & = P(A) - P(B) + P(\overline{A \cap \overline{B}}) = \\ & = P(A) - P(B) + P(\overline{A \cup B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d)} \quad & P(A) - P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) = \\ & = P(A) + P(\overline{B}) [-1 + P(\overline{A})] = \\ & = P(A) + P(\overline{B}) [-1 + 1 - P(A)] = \\ & = P(A) + P(\overline{B}) \times [-P(A)] = \\ & = P(A) [1 - P(\overline{B})] = \\ & = P(A) \times P(B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e)} \quad & 1 - P(A \cup \overline{B}) + P(B \cup \overline{A}) = \\ & = P(\overline{A \cup \overline{B}}) + P(B \cup \overline{A}) = \\ & = P(\overline{A \cap B}) + P(B \cup \overline{A}) = \\ & = P(\overline{A \cap B}) + P(B) + P(\overline{A}) - P(B \cap \overline{A}) = \\ & = P(\overline{B \cap A}) + P(B) + 1 - P(A) - P(\overline{B \cap A}) = \\ & = -P(A) + P(B) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{32.} \quad & \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(B)} = \frac{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A \cap B})}{P(B)} = \\ & = \frac{P(\overline{A})}{P(B)} + \frac{P(\overline{B}) - P(\overline{A \cap B})}{P(B)} = \\ & = \frac{P(\overline{A})}{P(B)} + \frac{1 - P(B) - P(\overline{A \cup B})}{P(B)} = \\ & = \frac{P(\overline{A})}{P(B)} + \frac{1 - P(B) - 1 + P(A \cup B)}{P(B)} = \\ & = \frac{P(\overline{A})}{P(B)} + \frac{-P(B) + P(A \cup B)}{P(B)} = \\ & = \frac{P(\overline{A})}{P(B)} - 1 + \frac{P(A \cup B)}{P(B)} \geq \frac{P(\overline{A})}{P(B)} - 1, \end{aligned}$$

uma vez que $P(A \cup B) \geq P(B)$ e, portanto,

$$\frac{P(A \cup B)}{P(B)} \geq 0.$$

33.

$$\begin{aligned} \mathbf{a)} \quad & P(\overline{A}) + P(A \cup B) = 1 - P(A) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ & = P(B) + 1 - P(A \cap B) = \\ & = P(B) + P(\overline{A \cap B}) = \\ & = P(B) + P(\overline{A \cup B}) \end{aligned}$$

b) Sejam A: "o aluno realiza exame de Biologia e Geologia" e B: "o aluno realiza exame de Física e Química A".

$$\begin{aligned} & P(\overline{A}) + P(A \cup B) = P(B) + P(\overline{A \cup B}) \\ & \Leftrightarrow 0,25 + 0,85 = 0,7 + P(\overline{A \cup B}) \\ & \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0,25 + 0,85 - 0,7 \\ & \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0,4 \end{aligned}$$

Unidade 3 - Probabilidade condicionada

Páginas 94 a 112

34. Opção (C)

Sejam R: "ser rapariga" e H: "ter hábitos de estudo".

$$\text{Então, } P(H | R) = \frac{860}{1400} = \frac{43}{70}.$$

- 35.** Para a soma dos números obtidos ser 6, só pode ter ocorrido um dos seguintes casos: (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3).

Assim, a probabilidade de ter saído o mesmo número nos dois dados, sabendo que a soma dos números saídos foi 6, é $\frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} 36. P(\bar{A} \cup \bar{B}) &= P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \\ &= 1 - P(A) \times \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= 1 - P(A) \times P(B | A) \end{aligned}$$

37.

$$\begin{aligned} \text{b)} P(\bar{A} | B) &= \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \\ &= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \\ &= 1 - P(A | B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} P[(A \cup C) | B] &= \\ &= \frac{P[(A \cup C) \cap B]}{P(B)} = \\ &= \frac{P[(A \cap B) \cup (C \cap B)]}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A \cap B) + P(C \cap B) - P[(A \cap B) \cap (C \cap B)]}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(C \cap B)}{P(B)} - \frac{P[(A \cap C) \cap B]}{P(B)} = \\ &= P(A | B) + P(C | B) - P[(A \cap C) | B] \end{aligned}$$

- 38.** No contexto do problema, $P(Y | X)$ significa “probabilidade de a pessoa escolhida ser do sexo feminino, sabendo que a carta retirada foi uma copa”.

Ora, se a carta retirada foi uma copa, escolhe-se uma pessoa da turma A, onde existem 15 raparigas, num total de 25 alunos.

Assim, e segundo a regra de Laplace, num espaço amostral com um número finito de elementos e cujos resultados elementares são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento (neste caso 15) e o número de casos possíveis (neste caso 25). A probabilidade pedida é, então, $\frac{15}{25}$, ou seja, $\frac{3}{5}$.

- 39.** No contexto da situação descrita, $P(B | \bar{A})$ é a probabilidade de as bolas retiradas da caixa serem da mesma cor, sabendo que a carta retirada do baralho não é de copas.

Dado que a carta retirada do baralho não é de copas, adiciona-se à caixa uma bola de cor verde, pelo que a caixa fica com cinco bolas brancas e quatro bolas verdes, num total de nove bolas.

Retiramos então duas bolas dessas nove, e queremos determinar a probabilidade de elas serem da mesma cor, ou seja, ou as duas brancas ou as duas verdes, casos que se excluem mutuamente. Existem 9C_2 maneiras diferentes de tirar simultaneamente duas bolas, de entre nove. Por isso, o número de casos possíveis é 9C_2 .

Existem 5C_2 maneiras diferentes de tirar simultaneamente duas bolas brancas e 4C_2 maneiras diferentes de tirar simultaneamente duas bolas verdes. Por isso, o número de casos favoráveis é ${}^5C_2 + {}^4C_2$.

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{{}^5C_2 + {}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{4}{9}$.

40.

$$\begin{aligned} \text{a)} P((\bar{A} \cap \bar{B}) | B) &= \frac{P((\bar{A} \cap \bar{B}) \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P((A \cup \bar{B}) \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P((A \cap B) \cup (\bar{B} \cap B))}{P(B)} = \\ &= \frac{P((A \cap B) \cup \emptyset)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \\ &= P(A | B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} 1 - P(A | B) \times P(B) - P(A \cap \bar{B}) &= \\ &= 1 - P(A \cap B) - P(A) + P(A \cap B) = \\ &= 1 - P(A) = \\ &= P(\bar{A}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} P(A \cup \bar{B}) - 1 + P(B) &= \\ &= P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) - P(\bar{B}) = \\ &= P(A) - P(A) + P(A \cap B) = \\ &= P(A \cap B) = \\ &= P(A) \times \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= P(A) \times P(B | A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} P(\overline{A \cap B} | B) + P(A | B) &= \\ &= \frac{P((\overline{A \cap B}) \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P((\bar{A} \cup \bar{B}) \cap B) + P(A \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P((\bar{A} \cap B) \cup (\bar{B} \cap B)) + P(A \cap B)}{P(B)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P(\overline{A} \cap B) \cup \emptyset + P(A \cap B)}{P(B)} = \\
&= \frac{P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)}{P(B)} = \\
&= \frac{P(B)}{P(B)} = \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e)} \quad &\frac{P(A \cup B)}{P(B)} - P(\overline{A} | B) = \\
&= \frac{P(A \cup B)}{P(B)} - \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \\
&= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \\
&= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(B) + P(A \cap B)}{P(B)} = \\
&= \frac{P(A)}{P(B)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{f)} \quad &P(A \cup B) < P(A | B) \times P(\overline{B}) \\
&\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) < P(A | B) (1 - P(B)) \\
&\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) < P(A | B) - P(A | B) \times P(B) \\
&\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) < P(A | B) - P(A \cap B) \\
&\Leftrightarrow P(A) + P(B) < P(A | B)
\end{aligned}$$

41.

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad &\frac{P(\overline{A} \cap \overline{B}) - P(\overline{A})}{P(B)} = \frac{P(\overline{A \cup B}) - P(\overline{A})}{P(B)} = \\
&= \frac{1 - P(A \cup B) - 1 + P(A)}{P(B)} = \\
&= \frac{-P(A \cup B) + P(A)}{P(B)} = \\
&= \frac{-P(A) - P(B) + P(A \cap B) + P(A)}{P(B)} = \\
&= \frac{P(A \cap B) - P(B)}{P(B)} = \\
&= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(B)}{P(B)} = \\
&= P(A | B) - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad &P(\overline{A} | B) - P(\overline{A} | B) \times P(\overline{B}) = \\
&= P(\overline{A} | B) \times (1 - P(\overline{B})) = \\
&= \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} \times P(B) = \\
&= P(\overline{A} \cap B) = \\
&= 1 - P(A \cap B) = \\
&= 1 - P(A \cup B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{42.} \quad &P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow 0,25 = \frac{0,1}{P(B)} \\
&\Leftrightarrow P(B) = \frac{0,1}{0,25} \\
&\Leftrightarrow P(B) = 0,4
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
\Leftrightarrow 0,8 &= P(A) + 0,4 - 0,1 \\
\Leftrightarrow P(A) &= 0,5
\end{aligned}$$

$$\text{Assim, } P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,5 = 0,5.$$

Como $P(A) = P(\overline{A})$, temos que A e $\overline{A}$ são acontecimentos equiprováveis.

43.

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad &P(A | B) = 0,6 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,6 \\
&\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{0,3} = 0,6 \\
&\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,18 \\
\text{b)} \quad &P(B | A) = 0,5 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0,5 \\
&\Leftrightarrow \frac{0,18}{P(A)} = 0,5 \\
&\Leftrightarrow P(A) = 0,36
\end{aligned}$$

$$\text{Assim, } P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,36 = 0,64.$$

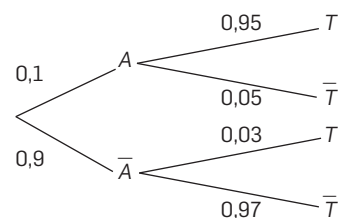
$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad &P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\
&= 0,36 + 0,3 - 0,18 = \\
&= 0,48
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d)} \quad &P(\overline{A} | B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \\
&= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \\
&= \frac{0,3 - 0,18}{0,3} = \\
&= 0,4
\end{aligned}$$

44. Sejam:

A: "Haver um assalto."

T: "O alarme tocar".



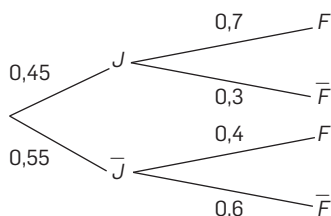
$$\text{a)} \quad P(T) = 0,1 \times 0,95 + 0,9 \times 0,03 = 0,122$$

$$\text{b)} \quad P(\overline{A} | T) = \frac{P(\overline{A} \cap T)}{P(T)} = \frac{0,9 \times 0,03}{0,122} = \frac{27}{122}$$

45. Sejam:

J: "Ser habitante jovem."

F: "Ser favorável ao projeto."



a) $P(F) = 0,45 \times 0,7 + 0,55 \times 0,4 = 0,535$

b) $P(J | F) = \frac{P(J \cap F)}{P(F)} = \frac{0,45 \times 0,7}{0,535} \approx 0,59$

46. Sejam:

M: "Ser rapaz."

F: "Ser rapariga."

D: "Ser estudante de Direito."

E: "Ser estudante de Engenharia."

A: "Ser estudante de Arquitetura."

Sabe-se que:

• $P(M) = \frac{1}{3}$

• $P(A) = \frac{1}{2}$

• $P(F | A) = 80\%$

• $P(E | M) = 50\%$

• $P(D \cap M) = P(D \cap F)$

Assim:

• $P(F | A) = 80\% \Leftrightarrow \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = 0,8$

$\Leftrightarrow P(F \cap A) = 0,8 \times \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow P(F \cap A) = 0,4$

• $P(E | M) = 50\% \Leftrightarrow \frac{P(E \cap M)}{P(M)} = 0,5$

$\Leftrightarrow P(E \cap M) = 0,5 \times \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow P(E \cap M) = \frac{1}{6}$

• $P(A \cap M) = \frac{1}{2} - 0,4 = \frac{1}{10}$

• $P(D \cap M) = \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$

• $P(D \cap F) = \frac{1}{15}$

• $P(D) = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$

• $P(E) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{15} = \frac{11}{30}$

• $P(F \cap E) = \frac{11}{30} - \frac{1}{6} = \frac{1}{5}$

	D	E	A	Total
M	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$
F	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$
Total	$\frac{2}{15}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{2}$	1

a) $P(E) = \frac{11}{30}$

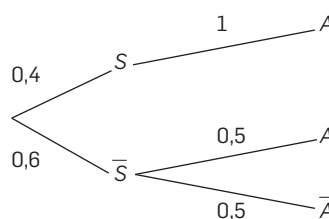
b) $P(D | F) = \frac{P(D \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{20} = \frac{1}{10}$

c) Sabe-se que a probabilidade de ser estudante de Engenharia e rapaz é $\frac{1}{6}$. Como estão presentes 10 rapazes de Engenharia, então $\frac{10}{n} = \frac{1}{6}$, onde n é o número total de estudantes presentes. Assim, $n = 60$. Como a probabilidade de ser uma rapariga e estudante de Arquitetura é $\frac{2}{5}$, estão presentes na atuação $\frac{2}{5} \times 60 = 24$ raparigas de Arquitetura.

47. Sejam:

S: "Saber a resposta certa."

A: "Acertar na resposta."

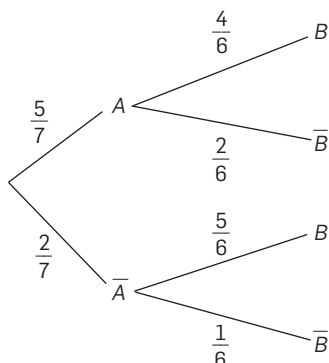


$P(S | A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{0,4 \times 1}{0,4 \times 1 + 0,6 \times 0,5} = \frac{4}{7}$

48. Sejam:

A: "Sair moeda verdadeira na primeira extração."

B: "Sair moeda verdadeira na segunda extração."



a) $P(A \cap B) = \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{10}{21}$

b) $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{20}{21}$

$$c) P(\bar{B} | A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

49.

a) Sejam V_A e V_B os acontecimentos:

V_A : "Sair bola verde da urna A."

V_B : "Sair bola verde da urna B."

$$i) P(V_A | \bar{V}_B) = \frac{5}{7+1} = \frac{5}{8}$$

$$\begin{aligned} ii) P(\bar{V}_A) &= P(\bar{V}_B) \times P(\bar{V}_A | \bar{V}_B) + P(V_B) \times P(\bar{V}_A | V_B) = \\ &= \frac{3}{7} \times \frac{2+1}{7+1} + \frac{4}{7} \times \frac{2}{7+1} = \\ &= \frac{17}{56} \end{aligned}$$

b) Sejam A e V os acontecimentos:

A : "Sair bola da urna A."

V : "Sair bola verde."

$$i) P(V | A) = \frac{5}{7}$$

$$ii) P(\bar{V} | \bar{A}) = \frac{3}{7}$$

$$\begin{aligned} iii) P(V) &= P(A) \times P(V | A) + P(\bar{A}) \times P(V | \bar{A}) = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \\ &= \frac{9}{14} \end{aligned}$$

$$iv) P(A | \bar{V}) = \frac{P(A \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{7}}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7}} = \frac{2}{5}$$

50.

$$a) P = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

$$b) P = \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

51. Para A e B serem independentes, tem que acontecer $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ \Leftrightarrow 0,8 &= k + (k + 0,1) - k \times (k + 0,1) \\ \Leftrightarrow 0,8 &= 2k + 0,1 - k^2 - 0,1k \\ \Leftrightarrow k^2 - 1,9k + 0,7 &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{7}{5} \vee k = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como $\frac{7}{5} > 1$, k só pode admitir o valor $\frac{1}{2}$.

52. Se A e B são acontecimentos independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Se A e B fossem acontecimentos disjuntos, isto é, $A \cap B = \emptyset$, teríamos:

$$\begin{aligned} 0 &= P(A) \times P(B) \Leftrightarrow P(A) = 0 \vee P(B) = 0 \\ &\Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \end{aligned}$$

o que contraria as condições do enunciado.

Logo, A e B não são disjuntos.

$$\begin{aligned} 53. P(A | B) &= \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} P(B) \end{aligned}$$

Assim:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} = 2P(B) + P(B) - \frac{1}{6} P(B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{17}{6} P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{4}{17}$$

Então:

$$P(A) = 2 \times \frac{4}{17} = \frac{8}{17}$$

e:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{17} = \frac{2}{51}$$

$$\text{Como } P(A) \times P(B) = \frac{8}{17} \times \frac{4}{17} = \frac{32}{289} \neq P(A \cap B) = \frac{2}{51},$$

então os acontecimentos A e B não são independentes.

54. Sejam:

V : "A pessoa vê o anúncio."

C : "A pessoa compra o jogo."

Sabe-se que:

- $P(\bar{V}) = 0,35$
- $P(C) = 0,45$
- $P(\bar{V} \cap \bar{C}) = 0,2$

Assim:

	C	$\bar{C}$	Total
V	0,30	0,35	0,65
$\bar{V}$	0,15	0,20	0,35
Total	0,45	0,55	1

$$a) P(C | V) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{0,30}{0,65} = \frac{6}{13} \approx 46\%$$

$$b) P(V \cap C) = 0,30$$

$$P(V) \times P(C) = 0,65 \times 0,45 = 0,2925$$

Como $P(V \cap C) \neq P(V) \times P(C)$, tem-se que V e C não são acontecimentos independentes.

55. Se A e B são acontecimentos independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Assim:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + (1 - P(A)) \times (1 - P(B)) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) + 1 - P(B) - P(A) - \\ &\quad - P(A) \times P(B) = \\ &= 1 \end{aligned}$$

56. Se A e B são acontecimentos independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(B) - P(A) \times P(B) = \\ &= (1 - P(A)) \times P(B) = \\ &= P(\bar{A}) \times P(B) \end{aligned}$$

Como $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$, então $\bar{A}$ e B são acontecimentos independentes.

57.

- a) $P(B | A) = P(B | \bar{A})$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} &= \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} \\ \Leftrightarrow P(B \cap A) \times P(\bar{A}) &= P(B \cap \bar{A}) \times P(A) \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) \times (1 - P(A)) &= (P(B) - P(A \cap B)) \times P(A) \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) - P(A \cap B) \times P(A) &= P(B) \times P(A) - \\ &\quad - P(A \cap B) \times P(A) \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) &= P(B) \times P(A) \end{aligned}$$

- b) Sejam:

S : "Ter idade superior a 18 anos."

F : "Ser do sexo feminino."

Os acontecimentos S e F são independentes, uma vez que $P(S) = P(S | F) = \frac{1}{4}$.

Assim, $P(S | \bar{F}) = P(S | F) = \frac{1}{4}$.

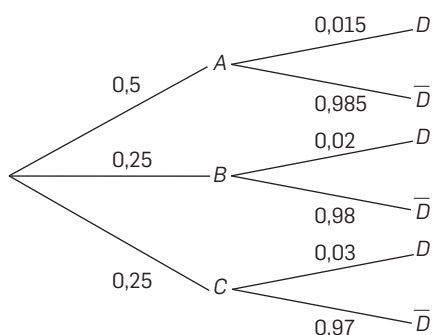
58. Sejam:

A : "A peça é produzida pela máquina A."

B : "A peça é produzida pela máquina B."

C : "A peça é produzida pela máquina C."

D : "A peça é defeituosa."



a) $P(D) = 0,5 \times 0,015 + 0,25 \times 0,02 + 0,25 \times 0,03 = 0,02$

b) $P(C | D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0,25 \times 0,03}{0,02} = 0,375$

Aprende Fazendo

Páginas 116 a 132

1. Opção (B)

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{2, 3, 5\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

2. Opção (C)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,6 + 0,6 - P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 1,2 - P(A \cap B)$$

Sabe-se que $P(A \cup B) \leq 1$, logo $P(A \cap B) > 0$ e assim $A \cap B \neq \emptyset$, logo A e B são acontecimentos compatíveis.

3. Opção (D)

$$P = \frac{2 \times 6!}{7!} = \frac{2 \times 6!}{7 \times 6!} = \frac{2}{7}$$

4. Opção (A)

Considere-se os acontecimentos:

M : "Ser funcionário mulher."

F : "Ser funcionário fumador."

$$P(M|F) = \frac{30}{80} = 0,375 = 37,5\%$$

5. Opção (D)

Pretende-se determinar o valor de $P(X|Y)$, ou seja, a probabilidade de, ao escolher um aluno ao acaso, ser escolhida uma rapariga, sabendo que o aluno é da turma B. Ora, na turma B há doze alunos, sendo oito raparigas; assim, tem-se que $P(X|Y) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

6. Opção (C)

Como A e B são acontecimentos independentes, $P(A|B) = P(A)$. Logo, $P(A|B) = 0,3$.

7. Opção (D)

Sendo $P(A) \leq P(B)$, $P(A \cap B) \leq P(A)$.

Assim, de todas as opções apresentadas, o único valor que $P(A \cap B)$ pode tomar é 0,3.

8. Opção (A)

Sendo $P(A) \leq P(B)$, $P(A \cup B) \geq P(B)$.

Assim, de todas as opções apresentadas, o único valor que $P(A \cup B)$ pode tomar é 0,8.

9. Opção (B)

Por definição de acontecimentos incompatíveis ($A \cap B = \emptyset$), sabe-se que se ocorre A , não pode ocorrer B .

Assim, a afirmação necessariamente verdadeira é a (B).

10. Opção (C)

Números de casos possíveis: $5 \times 5 = 25$

Número de casos favoráveis: 5

Probabilidade pretendida: $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

11. Opção (C)

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$$

Cálculo auxiliar

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0,9 = 0,6 + P(B) - 0,1$$

$$\Leftrightarrow P(B) = 0,4$$

12. Opção (C)

No contexto da situação descrita, $P(\bar{B} | A)$ significa "a probabilidade de não sair bola com número ímpar na segunda extração, sabendo que saiu bola azul na primeira extração. Ora, se saiu bola azul na primeira extração quer dizer que saiu bola com número par. Assim, e como não houve reposição, restam no saco cinco bolas, sendo três ímpares (vermelhas) e duas pares (azuis). Logo, $P(\bar{B} | A) = \frac{2}{5}$.

13. Opção (C)

Considera o acontecimento S : "A e B não estarem juntas", ou seja, estarem separadas.

$$\frac{A}{2!} \times \frac{B}{6!} \times \frac{\text{---}}{7!}$$

$$P(S) = 1 - P(\bar{S}) = 1 - \frac{2! \times 7!}{8!} = \frac{3}{4}$$

14. Opção (A)

$$P = \frac{{}^8C_5}{{}^{10}C_5} = \frac{2}{9}$$

15. Opção (D)

Números de casos possíveis: 1 000 000

Número de casos favoráveis:

$$\frac{P}{5 \times 5 \times 5} \times \frac{I}{5 \times 5 \times 5} \times {}^6C_3$$

Número de maneiras de escolher ordenadamente com repetição três números pares de entre cinco (0, 2, 4, 6 e 8).

Número de maneiras de escolher ordenadamente com repetição três números ímpares de entre cinco (1, 3, 5, 7 e 9).

Número de maneiras diferentes de escolher as três posições de entre seis para colocar números pares.

$$\text{Assim, } P = \frac{312\,500}{1\,000\,000} = \frac{5}{16}.$$

16. Opção (B)

$$P = {}^5C_3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,032$$

17. Opção (C)

Números de casos possíveis:

$$\bar{5} \times \bar{5} \times \bar{5} \times \bar{5} \times \bar{5} = 5^5 = 3125$$

Números de casos favoráveis:

$$\bar{5} \times \bar{1} \times \bar{1} \times \bar{4} \times \bar{3} \times {}^5C_3 = 600$$

Número de maneiras de três amigos escolherem o mesmo restaurante de entre cinco possíveis.

Número de maneiras dos restantes amigos escolherem dois restaurantes diferentes, dos quatro ainda disponíveis.

Número de maneiras de formar o grupo de três amigos que escolhem o mesmo restaurante.

$$\text{Assim, a probabilidade pretendida é } \frac{600}{3125} = \frac{24}{125}.$$

18. Opção (B)

Seja $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (6, 6)\}$

$$\#E = 36$$

X: "No dado D aparece um 1."

$$X = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$$

$$P(X) = \frac{3}{36} = \frac{1}{6}$$

Y: "A soma dos dois números é igual a 7."

$$Y = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

$$P(Y) = \frac{3}{36} = \frac{1}{6}$$

Z: "Os dois números são iguais."

$$Z = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$P(Z) = \frac{3}{36} = \frac{1}{6}$$

$$X \cap Y = \{(1, 6)\}$$

$$P(X \cap Y) = \frac{1}{36}$$

$$P(X) \times P(Y) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Como $P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y)$, X e Y são acontecimentos independentes.

A opção (A) é falsa.

$$X \cap Z = \{(1, 1)\}$$

$$P(X \cap Z) = \frac{1}{36}$$

$$P(X) \times P(Z) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Como $P(X \cap Z) = P(X) \times P(Z)$, X e Z são acontecimentos independentes.

A opção (B) é verdadeira.

$Y \cap Z = \emptyset$, logo Y e Z são acontecimentos incompatíveis e não são independentes.

$$P(Y \cap Z) = 0$$

$$P(Y) \times P(Z) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

As opções (C) e (D) são falsas.

19. Opção (C)

Num conjunto de seis pessoas, considere-se os acontecimentos:

A: "Pelo menos duas pessoas pertencerem ao mesmo signo."

Assim:

$\bar{A}$: "Nenhuma pertencer ao mesmo signo."

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) =$$

$$= 1 - \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12} =$$

$$= 1 - \frac{385}{1728} =$$

$$= \frac{1343}{1728}$$

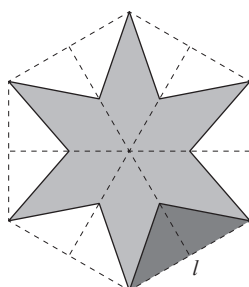
20. Opção (A)

A probabilidade pedida será o quociente entre a área da estrela e a área do hexágono.

• **Determinação da área do hexágono (A_1):**

$$A_1 = \frac{p}{2} \times ap = \frac{6l}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{3\sqrt{3}}{2} l^2$$

• **Determinação da área da estrela (A_2):**



Cálculo auxiliar

Determinação da área de cada triângulo sombreado:

$$\begin{aligned} & l \times \frac{\sqrt{3}}{2} l \\ & \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} l^2 \\ A_{\Delta} &= \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} l^2 \\ A_2 &= A_1 - 6A_{\Delta} = \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} l^2 - 6 \times \frac{\sqrt{3}}{8} l^2 = \\ &= \frac{12\sqrt{3}}{8} l^2 - \frac{6\sqrt{3}}{8} l^2 = \\ &= \frac{6\sqrt{3}}{8} l^2 = \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} l^2 \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade pedida é:

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4} l^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2} l^2} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

21. Opção (A)

Número de casos possíveis: 9!

Como os homens não podem estar juntos necessitamos de duas mulheres que funcionam como separadores. Logo, dos nove lugares disponíveis, retiramos dois para colocar as mulheres "separadoras".

Assim, restam-nos sete lugares para os três homens.

Número de casos favoráveis: ${}^7C_3 \times 3! \times 6!$

$$P = \frac{5}{12}$$

22. B: "A equipa vencedora ser o Brasil."

S: "A equipa vencedora ser a Espanha."

H: "A equipa vencedora ser a Holanda."

T: "A equipa vencedora ser Portugal."

a) $E = \{B, S, H, T\}$

b) $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{B\}, \{S\}, \{H\}, \{T\}, \{B, S\}, \{B, H\}, \{B, T\}, \{S, H\}, \{S, T\}, \{H, T\}, \{B, S, H\}, \{B, S, T\}, \{B, H, T\}, \{S, H, T\}, E\}$

c) Por exemplo:

"A equipa vencedora ser a China" → acontecimento impossível.

"A equipa vencedora ser Portugal" → acontecimento elementar.

"A equipa vencedora ser europeia" → acontecimento composto.

"A equipa vencedora ser europeia ou de língua portuguesa" $\rightarrow$ acontecimento certo.

23.

- a) $E = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \}$
- b) $A = \{ (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4) \}$
 $B = \{ (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5) \}$
- i) $A \cap B = A = \{ (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4) \}$
- ii) $A \cup B = B = \{ (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5) \}$
- iii) $B \setminus A = \{ (1, 2), (1, 6), (2, 1), (2, 5), (3, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5) \}$
- iv) $A \setminus B = \emptyset$

24.

1.ª extr.	2.ª extr.	3.ª extr.	Resultados possíveis
0	1	2	(0, 1, 2)
	2	1	(0, 2, 1)
1	0	2	(1, 0, 2)
	2	0	(1, 2, 0)
2	0	1	(2, 0, 1)
	1	0	(2, 1, 0)

- a) $E = \{ (0, 1, 2), (0, 2, 1), (1, 0, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1), (2, 1, 0) \}$
- b) $A = \{ (1, 0, 2), (2, 0, 1), (2, 1, 0) \}$
 $B = \{ (0, 2, 1), (1, 2, 0), (2, 1, 0) \}$
 $C = \{ (0, 1, 2), (0, 2, 1), (2, 0, 1), (2, 1, 0) \}$
- i) $A \cap B = \{ (2, 1, 0) \}$
- ii) $A \cap C = \{ (2, 0, 1), (2, 1, 0) \}$
- iii) $A \cup B = \{ (0, 2, 1), (1, 2, 0), (1, 0, 2), (2, 0, 1), (2, 1, 0) \}$
- iv) $\overline{B \cup C} = \{ (0, 1, 2), (1, 2, 0), (1, 0, 2), (2, 0, 1) \}$
- v) $\overline{B \cup C} = \{ (1, 0, 2) \}$
- vi) $B \setminus C = \{ (1, 2, 0) \}$
- vii) $C \setminus B = \{ (0, 1, 2), (2, 0, 1) \}$

- 25.** $A = \{1, 2, 5\}$
 $B = \{2, 4, 6\}$

- a) $A \cap B$
- b) $\overline{A \cup B}$ ou $\overline{A} \cap \overline{B}$
- c) $A \setminus B$
- d) $B \setminus A$

26.

- a) $P(\text{"sair uma figura"}) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$
- b) $P(\text{"sair vermelha ou espadas"}) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$
- c) $P(\text{"sair preta e figura"}) = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$
- d) $P(\text{"sair rei ou ás"}) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$
- e) $P(\text{"sair nem paus nem figura"}) = \frac{21}{40}$
- f) $P(\text{"sair preta e não ás"}) = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$

27.

- a) $P = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$
- b) $P = \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$
- c) $P = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$
- d) $P = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{15}$
- e) $P = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$

- 28.** Bolas azuis: 1, 2, 3, 4, 5
 Bolas vermelhas: 6, 7, 8, 9, 10, 11

- a)
- i) Casos favoráveis: 2, 4, 6, 8, 10
 $P = \frac{5}{11}$
- ii) Casos favoráveis: 1, 3, 5
 $P = \frac{3}{11}$
- iii) Casos favoráveis: 7, 11
 $P = \frac{2}{11}$
- b)
- i) $P = \frac{5}{11} \times \frac{5}{11} + \frac{6}{11} \times \frac{6}{11} = \frac{61}{121}$
- ii) $P = \frac{5}{11} \times \frac{6}{11} \times 2 = \frac{60}{121}$
- iii) $P = \frac{11}{11} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{11}$
- c)
- i) $P = \frac{{}^5C_3 + {}^6C_3}{{}^{11}C_3} = \frac{2}{11}$

$$\text{ii)} P = \frac{{}^5C_2 \times {}^6C_1}{{}^{11}C_3} = \frac{4}{11}$$

$$\text{iii)} P = \frac{{}^5C_1 \times {}^3C_2}{{}^{11}C_3} = \frac{1}{11}$$

29. Número de casos possíveis: $6^4 = 1296$

Número de casos favoráveis: $5^4 = 625$

$$P(\text{"nunca sair o número 1"}) = \frac{625}{1296}$$

Número de casos possíveis: $6^4 = 1296$

Número de casos favoráveis: $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

$$P(\text{"saírem números todos diferentes"}) = \frac{360}{1296} = \frac{5}{18}$$

Como $\frac{625}{1296} > \frac{360}{1296}$, concluímos que é mais provável nunca sair o número 1 do que saírem números todos diferentes.

30. Sejam A e B os acontecimentos:

A : "Ser português."

B : "Ser homem."

Tem-se:

	B	$\bar{B}$	Total
A	0,15	0,45	0,6
$\bar{A}$	0,21	0,19	0,4
Total	0,36	0,64	1

Assim, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,19$.

31. R : "Ter praticado rapel."

S : "Ter praticado slide."

$$P(\bar{R}) = 0,55 \quad P(R) = 0,45$$

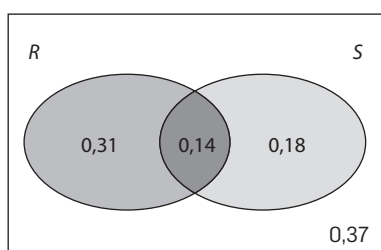
$$P(\bar{S}) = 0,68 \quad P(S) = 0,32$$

$$P(R \cap S) = 0,14$$

$$P(R \setminus S) = 0,45 - 0,14 = 0,31$$

$$P(S \setminus R) = 0,32 - 0,14 = 0,18$$

$$P(\bar{R} \cap \bar{S}) = 1 - 0,31 - 0,14 - 0,18 = 0,37$$



32.

$$\text{a)} P(A \cap B) = \frac{7}{32}$$

$$\text{a)} P(A \cup B) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

$$\text{c)} P(\bar{B}) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$$\text{d)} P(A \setminus B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$\text{e)} P(\bar{A} \setminus \bar{B}) = \frac{9}{32}$$

33. Sejam os acontecimentos:

M : "O doente melhorou."

A : "O doente utilizou medicamento em creme."

B : "O doente utilizou medicamento em comprimido."

	M	$\bar{M}$	Total
A	36	14	50
B	30	20	50
Total	66	34	100

a)

$$\text{i)} P(M) = \frac{66}{100} = \frac{33}{50}$$

$$\text{ii)} P(\bar{M} | A) = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

$$\text{b)} P(B | M) = \frac{30}{66} = \frac{5}{11}$$

34. Sejam os acontecimentos:

B : "Comprar o hambúrguer com bebida."

F : "Comprar o hambúrguer com batata frita."

Do enunciado, temos que:

$$\bullet P(B \cap F) = 40\%$$

$$\bullet P(\bar{B} \cap \bar{F}) = 15\%$$

$$\bullet P(B) = 65\%$$

Assim:

	F	$\bar{F}$	Total
B	40%	25%	65%
$\bar{B}$	20%	15%	35%
Total	60%	40%	100%

$$\text{a)} P(B \cap \bar{F}) = 25\%$$

$$P(\bar{B} \cap F) = 20\%$$

A Maria tem razão. De facto, a probabilidade de um cliente comprar o hambúrguer com bebida e sem batata frita (25%) é maior que a probabilidade de um cliente comprar o hambúrguer com batata frita e sem bebida (20%).

b) Pretende-se determinar $P(F|B)$:

$$P(F | B) = \frac{P(F \cap B)}{P(B)} = \frac{0,40}{0,65} = \frac{8}{13}$$

$$\text{c)} P(B) = 0,65$$

$$P(F) = 0,60$$

$$P(B \cap F) = 0,40$$

$$P(B) \times P(F) = 0,65 \times 0,60 = 0,39$$

Como $P(B \cap F) \neq P(B) \times P(F)$, os acontecimentos B : "comprar hambúrguer com bebida" e F : "comprar hambúrguer com batata frita" não são acontecimentos independentes.

- 35.** No contexto da situação descrita, $P(B|A)$ significa "a probabilidade de a segunda ficha retirada ser ímpar, sabendo que a primeira ficha retirada foi par".

Assim, o número de casos possíveis é igual a 9, pois, após se ter retirado uma ficha da caixa, esta é de novo introduzida na caixa.

O número de casos favoráveis é igual a 5, pois existem na caixa cinco fichas com um número ímpar (1, 3, 5, 7 e 9), que continuam na caixa após a primeira extração.

Segundo a regra de Laplace, num espaço amostral com um número finito de elementos e cujos resultados elementares são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é dado pelo quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis; portanto, a probabilidade pedida é $\frac{5}{9}$.

- 36.** No contexto da situação descrita, $P(B | L)$ significa "a probabilidade de o segundo bombom retirado ser de chocolate branco, sabendo que o primeiro bombom retirado foi de chocolate de leite". Ora,

$P(B | L) = \frac{1}{2}$ significa que, no momento da segunda extração, encontravam-se na caixa tantos bombons de chocolate branco, como de chocolate de leite, ou seja, 15 bombons de cada – já que o primeiro bombom retirado e comido foi de chocolate de leite – restam na caixa todos os bombons de chocolate branco existentes inicialmente (15) e a mesma quantidade de bombons de chocolate de leite.

Conclui-se, assim, que inicialmente existiam na caixa 16 bombons de chocolate de leite.

- 37.** $P(A) = P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = P(A) \times P(A) = (P(A))^2$$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(A) - P(A) \times P(A)$, pois A e B são acontecimentos equiprováveis e independentes.

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 2P(A) - [P(A)]^2$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) [2 - P(A)]$$

- 38.** Sabe-se que:

$$\bullet P(A) = 0,4$$

$$\bullet P(A \cup B) = 0,7$$

$\bullet A$ e B acontecimentos independentes, logo $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Assim:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0,7 = 0,4 + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$\Leftrightarrow 0,3 = P(B) - 0,4 \times P(B)$$

$$\Leftrightarrow 0,6 P(B) = 0,3$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{0,3}{0,6}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

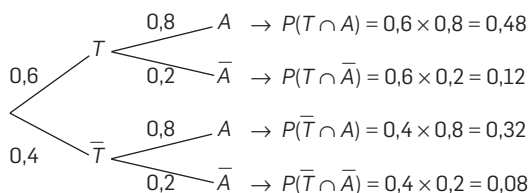
- 39.** Sejam os acontecimentos:

T : "Tomás passar no exame."

A : "António passar no exame."

$$P(T) = 0,6 \text{ e } P(A) = 0,8$$

Dispondo os dados num diagrama de árvore:



Assim:

$$\text{a) } P(\bar{T} \cap \bar{A}) = 0,08$$

$$\text{b) } P(\bar{T} \cap A) = 0,32$$

$$\text{c) } P(T \cap \bar{A}) + P(\bar{T} \cap A) = 0,12 + 0,32 = 0,44$$

- 40. Número de casos possíveis:**

$$52 \times 51 = 2652$$

- a) Número de casos favoráveis:**

$$\frac{A}{4} \times \frac{R}{4} \text{ ou } \frac{R}{4} \times \frac{A}{4} = 32$$

$$P(\text{"sair um ás e um rei, por qualquer ordem"}) = \frac{32}{2652} = \frac{8}{663}$$

- b) Número de casos favoráveis:**

$$\frac{C}{13} \times \frac{C}{12} = 156$$

$$P(\text{"saírem ambos de copas"}) = \frac{156}{2652} = \frac{1}{17}$$

- c) Número de casos favoráveis:**

$$\frac{C}{13} \times \frac{\bar{C}}{39} + \frac{\bar{C}}{39} \times \frac{C}{13} + \frac{C}{13} \times \frac{C}{12} = 1170$$

$$P(\text{"sair pelo menos uma carta de copas"}) = \frac{1170}{2652} = \frac{15}{34}$$

d) Número de casos favoráveis:

$$\frac{\overline{C}}{39} \times \frac{\overline{C}}{38} = 1482$$

$$P(\text{"não sair copas"}) = \frac{1482}{2652} = \frac{19}{34}$$

41.**a) Número de casos possíveis:**

$$\overline{12} \times \overline{12} \times \overline{12} = 1728$$

Número de casos favoráveis:

$$\overline{12} \times \overline{1} \times \overline{1} = 12$$

$$P(\text{"terem nascido todas no mesmo mês"}) =$$

$$= \frac{12}{1728} = \frac{1}{144}$$

b) Número de casos possíveis:

$$\overline{12} \times \overline{12} \times \overline{12} = 1728$$

Número de casos favoráveis:

$$\overline{12} \times \overline{11} \times \overline{10} = 1320$$

$$P(\text{"terem nascido todas em meses diferentes"}) =$$

$$= \frac{1320}{1728} = \frac{55}{72}$$

c) Número de casos possíveis:

$$\overline{12} \times \overline{12} \times \overline{12} = 1728$$

Número de casos favoráveis:

$$\frac{M}{12} \times \frac{M}{1} \times \frac{D}{11} \times 3 = 396$$

$$P(\text{"terem nascido duas e só duas no mesmo mês"}) =$$

$$= \frac{396}{1728} = \frac{11}{48}$$

42. Número de casos possíveis:

$$5 \times 5 \times 5 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,250\,000$$

a) Número de casos favoráveis:

$$3 \times 5 \times 1 \times 4 \times 10 \times 1 \times 1 \times 1 + 5 \times 4 \times 3 \times 10 \times 1 \times 1 \times 1 = 600 + 600 = 1200$$

$$P = \frac{1200}{1\,250\,000} = \frac{3}{3125}$$

b) Número de casos favoráveis:

$$3 \times 1 \times 4 \times 4 \times {}^4C_2 \times 1 \times 1 \times 9 \times 9 = 23\,328$$

$$P = \frac{23\,328}{1\,250\,000} = \frac{1458}{78\,125}$$

c) $P(\text{"pelo menos um algarismo ser igual a 4"}) =$

$$= 1 - P(\text{"todos os algarismos serem diferentes de 4"}) =$$

$$= 1 - \frac{4^3 \times 9^4}{1\,250\,000} = \frac{3439}{10\,000}$$

43. $P(\text{"não escolher nenhum fora do prazo"}) =$

$$= \frac{{}^{42}C_3}{{}^{50}C_3} = \frac{11\,480}{19\,600} = \frac{41}{70}$$

44. $P(\text{"Hermínia ganhar o prêmio"}) = 1 - \frac{{}^{27}C_5}{{}^{30}C_5} = \frac{88}{203}$ **45. Número de casos possíveis:**

$$\frac{M_1}{5} \times \frac{M_2}{5} \times \frac{M_3}{5} \times \frac{M_4}{5} \times \frac{M_5}{5} = 5^5 = 3125$$

Número de casos favoráveis:

$$\frac{M_1}{5} \times \frac{M_2}{4} \times \frac{M_3}{3} \times \frac{M_4}{2} \times \frac{M_5}{1} = 120$$

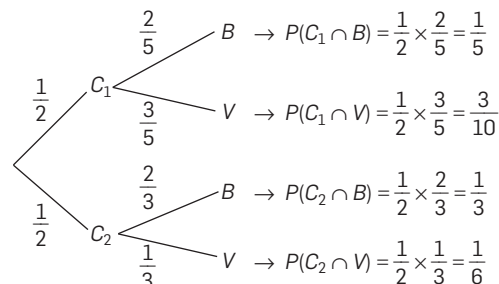
$$P(\text{"ficarem todos em hotéis distintos"}) =$$

$$= \frac{120}{3125} = \frac{24}{625}$$

46. Número de casos possíveis: $5^{10} = 9\,765\,625$ **Número de casos favoráveis: 5**

$$P(\text{"saírem todos na mesma paragem"}) =$$

$$= \frac{5}{5^{10}} = \frac{1}{5^9} = \frac{1}{1\,953\,125}$$

47.

$$\text{a) } P(V | C_1) = \frac{3}{5}$$

$$\text{b) } P(V | C_2) = \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } P(V) = P(V \cap C_1) + P(V \cap C_2) = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{7}{15}$$

$$\text{d) } P(C_1 | V) = \frac{P(C_1 \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{15}} = \frac{9}{14}$$

$$\text{e) } P(C_2 | B) = \frac{P(C_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{8}$$

Cálculo auxiliar

$$P(B) = P(B \cap C_1) + P(B \cap C_2) =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$$

$$f) P(C_1 | B) = \frac{P(C_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{8}$$

48. No contexto da situação descrita, $P(B | \bar{A})$ significa "a probabilidade de sair um rebugado de morango, sabendo que não saiu face par no lançamento do dado tetraédrico". Ora, se não saiu face par, significa que não saiu face 4 e, logo, retira-se, ao acaso, um rebugado do saco 2. No saco 2 existem quinze rebugados, sendo quatro de morango.

Como segundo a regra de Laplace, num espaço amostral com um número finito de elementos e cujos resultados elementares são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é dado pelo quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento (neste caso 4) e o número de casos possíveis (neste caso 15), temos que

$P(B | \bar{A}) = \frac{4}{15}$. Assim, dos três amigos, quem tem razão é o José.

49.

a) Número de casos possíveis: $^{10}C_4 = 210$

Número de casos favoráveis: $^4C_4 = 1$

$$P(\text{"serem todas da mesma cor"}) = \frac{1}{210}$$

b) Número de casos possíveis: $^{10}C_4 = 210$

Número de casos favoráveis:

$$^4C_3 \times 6 + ^3C_3 \times 7 + ^4C_4 = 24 + 7 + 1 = 32$$

Exatamente três da mesma cor **ou** quatro da mesma cor

$$^4C_3 \times 6 + ^3C_3 \times 7 + ^4C_4 \\ P(\text{"pelo menos três bolas serem da mesma cor"}) = \\ = \frac{32}{210} = \frac{16}{105}$$

c) Número de casos possíveis: $^4C_3 \times 6 + ^3C_3 \times 7 = 31$

Número de casos favoráveis: $^3C_3 \times 7 = 7$

$$P(\text{"haver três bolas brancas sabendo que três e só três são da mesma cor"}) = \frac{7}{31}$$

50. Sejam os acontecimentos:

X: "Tomar o analgésico X."

Y: "Tomar o analgésico Y."

A: "Sentir-se agoniado."

Do enunciado, sabe-se que:

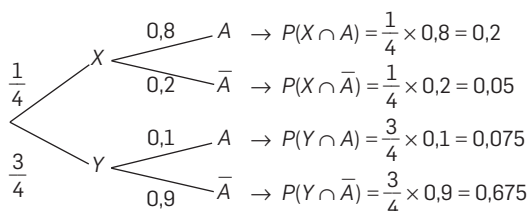
$$\bullet P(X) = \frac{1}{4}$$

$$\bullet P(A | X) = 0,8$$

$$\bullet P(Y) = \frac{3}{4}$$

$$\bullet P(A | Y) = 0,1$$

Dispondo os dados num diagrama em árvore:



$$\bullet P(X | A) = \frac{P(X \cap A)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,275} = \frac{8}{11}$$

$$\bullet P(Y | A) = \frac{P(Y \cap A)}{P(A)} = \frac{0,075}{0,275} = \frac{3}{11}$$

Cálculo auxiliar

$$P(A) = P(X \cap A) + P(Y \cap A) = \\ = 0,2 + 0,075 = \\ = 0,275$$

Observe-se que $P(X | A) > P(Y | A)$, ou seja, sabendo que, de manhã, quando acorda, a Andreia se sente bastante agoniada, é mais provável ter tomado o analgésico X.

51. Sejam os acontecimentos:

F: "Ser do sexo feminino."

M: "Ser do sexo masculino."

E: "Ser candidato ao primeiro emprego."

Do enunciado, temos que:

$$\bullet P(F) = 0,7$$

$$\bullet P(E) = 0,6$$

$$\bullet P(M | E) = 0,25$$

Então, podemos concluir que:

$$P(M | E) = 0,25 \Leftrightarrow \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = 0,25$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(M \cap E)}{0,6} = 0,25$$

$$\Leftrightarrow P(M \cap E) = 0,15$$

Organizando os dados numa tabela, temos:

	F	M	Total
E	0,45	0,15	0,6
$\bar{E}$	0,25	0,15	0,4
Total	0,7	0,3	1

Pretende-se saber $P(F | E)$.

$$\text{Assim, } P(F | E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{0,45}{0,6} = 0,75.$$

$$\begin{aligned}
52. P(\bar{A} | \bar{B}) \times P(\bar{B}) - P(\bar{A}) &= \\
&= \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \times P(\bar{B}) - P(\bar{A}) \quad (P(\bar{B}) \neq 0) \\
&= P(\bar{A} \cap \bar{B}) - P(\bar{A}) = \\
&= P(A \cup B) - [1 - P(A)] = \\
&= 1 - P(A \cup B) - 1 + P(A) = \\
&= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] - 1 + P(A) = \\
&= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) + 1 - P(A) = \\
&= P(A \cap B) - P(B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
53. P(A) &= P(B) \\
1 + P(\bar{B} | A) &= 1 + \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \\
&= \frac{P(A) + P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \\
&= \frac{P(A) + P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \\
&= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(A)} \quad (\text{pois } P(A) = P(B)) \\
&= \frac{P(A \cup B)}{P(A)}
\end{aligned}$$

54.

$$\begin{aligned}
a) P(\bar{A}) \times P(B | \bar{A}) + P(\bar{B}) &= \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} \times P(\bar{A}) + P(\bar{B}) \\
&\quad (P(\bar{A}) \neq 0) \\
&= P(B \cap \bar{A}) + P(\bar{B}) = \\
&= P(\bar{B}) - P(A \cap B) + 1 - P(\bar{B}) = \\
&= 1 - P(A \cap B) = \\
&= P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \\
&= P(\bar{A} \cup \bar{B})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b) P(A \cap B) &\geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) \\
&\Leftrightarrow P(A \cap B) \geq 1 - [1 - P(A)] - [1 - P(B)] \\
&\Leftrightarrow P(A \cap B) \geq 1 - 1 + P(A) - 1 + P(B) \\
&\Leftrightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1 \\
&\Leftrightarrow 1 \geq P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
&\Leftrightarrow 1 \geq P(A \cup B) \\
&\Leftrightarrow P(A \cup B) \leq 1
\end{aligned}$$

Esta desigualdade é verdadeira, quaisquer que sejam os acontecimentos A e B , pois a probabilidade de qualquer acontecimento nunca é superior a 1.

$$\begin{aligned}
c) P(\bar{A} | \bar{B}) &= \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \quad (P(\bar{B}) \neq 0) \\
&= \frac{P(\bar{A} \cup \bar{B})}{P(\bar{B})} = \\
&= \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\bar{B})} = \\
&= \frac{1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]}{P(\bar{B})} = \\
&= \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{P(\bar{B})} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P(\bar{B}) - P(A) + P(A \cap B)}{P(\bar{B})} = \\
&= 1 + \frac{P(A \cap B) - P(A)}{P(\bar{B})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
55. X \cap Y = \emptyset &\Leftrightarrow P(X \cap Y) = 0 \\
[P(X) + P(Y)] \times P(X | (X \cup Y)) &= \\
&= [P(X) + P(Y)] \times \frac{P[X \cap (X \cup Y)]}{P(X \cup Y)} = \\
&= [P(X) + P(Y)] \times \frac{P(X)^{(1)}}{P(X) + P(Y)^{(2)}} = \\
&\quad (1) \text{ pois } X \subset X \cup Y. \\
&\quad (2) \text{ pois } X \text{ e } Y \text{ são incompatíveis.} \\
&= P(X)
\end{aligned}$$

56. Sejam os acontecimentos:

A : "Ana embrulha o presente."

B : "Berta embrulha o presente."

C : "Carolina embrulha o presente."

T : "O presente ter o preço."

Do enunciado, temos que:

- $P(A) = 0,3$
- $P(T|A) = 0,03$
- $P(B) = 0,2$
- $P(T|B) = 0,08$
- $P(C) = 0,5$
- $P(T|C) = 0,05$

Donde, podemos concluir que:

$$P(T | A) = \frac{P(T \cap A)}{P(A)}$$

$$\Leftrightarrow 0,03 = \frac{P(T \cap A)}{0,3}$$

$$\Leftrightarrow P(T \cap A) = 0,009$$

$$P(T | B) = \frac{P(T \cap B)}{P(B)}$$

$$\Leftrightarrow 0,08 = \frac{P(T \cap B)}{0,2}$$

$$\Leftrightarrow P(T \cap B) = 0,016$$

$$P(T | C) = \frac{P(T \cap C)}{P(C)}$$

$$\Leftrightarrow 0,05 = \frac{P(T \cap C)}{0,5}$$

$$\Leftrightarrow P(T \cap C) = 0,025$$

Organizando os dados numa tabela:

	A	B	C	Total
T	0,009	0,016	0,025	0,05
$\bar{T}$				
Total	0,3	0,2	0,5	1

a) $P(T) = P(T \cap A) + P(T \cap B) + P(T \cap C) = 0,05$

b) Pretende-se determinar $P(B | T)$:

$$P(B | T) = \frac{P(B \cap T)}{P(T)} = \frac{0,016}{0,05} = 0,32$$

c) $P(T) = 0,05$

$$P(B) = 0,2$$

$$P(T \cap B) = 0,016$$

$$P(T) \times P(B) = 0,05 \times 0,2 = 0,01$$

Como $P(T \cap B) \neq P(T) \times P(B)$, conclui-se que os acontecimentos T : "o presente embrulhado ter preço" e B : "o presente ser embrulhado pela Carolina" não são acontecimentos independentes.

d) $P(T) = 0,05$

$$P(C) = 0,5$$

$$P(T \cap C) = 0,025$$

$$P(T) \times P(C) = 0,05 \times 0,5 = 0,025$$

Como $P(T \cap C) = P(T) \times P(C)$, conclui-se que os acontecimentos T : "o presente embrulhado ter preço" e C : "o presente ser embrulhado pela Carolina" são acontecimentos independentes.

57. $P(A) = 0,4$

$$P(A \cup B) = 0,5$$

a) $P(A \cap B) = 0$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, então:

$$0,5 = 0,4 + P(B) - 0 \Leftrightarrow P(B) = 0,1$$

b) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,4 \times P(B)$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, então:

$$0,5 = 0,4 + P(B) - 0,4 P(B)$$

$$\Leftrightarrow 0,1 = 0,6 P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{6}$$

c) $P(A|B) = 0,1 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,1 \times P(B)$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, então:

$$0,5 = 0,4 + P(B) - 0,1 P(B)$$

$$\Leftrightarrow 0,1 = 0,9 P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{9}$$

58. Consideremos os acontecimentos:

T_1 : "Tomás escolher o café Central."

T_2 : "Tomás escolher o café Convívio."

T_3 : "Tomás escolher o café da Esquina."

Sabemos que $P(T_1) = \frac{5}{9}$, $P(T_2) = P(T_3)$ e que

$$P(T_1) + P(T_2) + P(T_3) = 1, \text{ logo:}$$

$$\frac{5}{9} + P(T_2) + P(T_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(T_2) = \frac{1 - \frac{5}{9}}{2} \Leftrightarrow P(T_2) = \frac{2}{9} \text{ e } P(T_3) = \frac{2}{9}$$

M_1 : "Joaquim escolher o café Central."

M_2 : "Joaquim escolher o café Convívio."

M_3 : "Joaquim escolher o café da Esquina."

Sabemos que $P(M_2) = \frac{1}{7}$, $P(M_1) = P(M_3)$ e que

$$P(M_1) + P(M_2) + P(M_3) = 1, \text{ logo:}$$

$$P(M_1) + \frac{1}{7} + P(M_1) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(M_1) = \frac{1 - \frac{1}{7}}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(M_1) = \frac{3}{7} \text{ e } P(M_3) = \frac{3}{7}$$

J_1 : "João escolher o café Central."

J_2 : "João escolher o café Convívio."

J_3 : "João escolher o café da Esquina."

Sabemos que $P(J_1) = P(J_2) = P(J_3) = \frac{1}{3}$.

a) $P(T_1 \cap M_1 \cap J_1) = P(T_1) \times P(M_1) \times P(J_1) =$

$$= \frac{5}{9} \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{63}$$

b) $P(T_1 \cap M_1 \cap J_1) + P(T_2 \cap M_2 \cap J_2) + P(T_3 \cap M_3 \cap J_3) =$

$$= \frac{5}{63} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{5}{63} + \frac{2}{189} + \frac{2}{63} =$$

$$= \frac{23}{189}$$

c) Seja A o acontecimento "no máximo dois amigos encontram-se no mesmo café", então $\bar{A}$ é o acontecimento "todos os amigos se encontram no mesmo café".

Assim:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) =$$

$$= 1 - \frac{23}{189} \text{ (determinado na alínea anterior)}$$

$$= \frac{166}{189}$$

59. Número de casos possíveis:

$$\frac{x}{6} \times \frac{y}{6} \times \frac{z}{6} = 216$$

a) Número de casos favoráveis:

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = 36$$

$$P(\text{"o ponto } P \text{ pertencer ao plano } z = 1\text{"}) = \frac{1}{6}$$

b) Número de casos favoráveis:

$$\overline{6} \times \overline{6} \times \overline{1} = 36$$

$$P(\text{"o ponto } P \text{ pertencer ao plano } y = z") = \frac{1}{6}$$

c) Número de casos favoráveis:

$$\overline{3} \times \overline{6} \times \overline{6} = 108$$

$$P(\text{"o ponto } P \text{ pertencer ao semiplano } x \leq 3") = \frac{1}{2}$$

60. M: "A Vitória apaixonar-se por rapazes morenos."

D: "A Vitória apaixonar-se por rapazes desportistas."

$$P(M) = 0,6$$

$$P(D) = 0,7$$

$$P(\overline{M} \cap \overline{D}) = 0,25$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P((M \cap \overline{D}) \cup (D \cap \overline{M})) &= P(M \cap \overline{D}) + P(D \cap \overline{M}) \\ (\text{pois } (M \cap \overline{D}) \text{ e } (D \cap \overline{M}) \text{ são acontecimentos disjuntos.}) \\ &= P(M) - P(M \cap D) + P(D) - P(D \cap M) \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} P(\overline{M} \cap \overline{D}) = 0,25 &\Leftrightarrow P(\overline{M \cup D}) = 0,25 \\ &\Leftrightarrow 1 - P(M \cup D) = 0,25 \\ &\Leftrightarrow 0,75 = P(M \cup D) \end{aligned}$$

$$P(M \cup D) = P(M) + P(D) - P(M \cap D)$$

Então:

$$0,75 = 0,6 + 0,7 - P(M \cap D)$$

$$\Leftrightarrow P(M \cap D) = 1,3 - 0,75$$

$$\Leftrightarrow P(M \cap D) = 0,55$$

Continuando o cálculo de $P[(M \cap \overline{D}) \cup (D \cap \overline{M})]$:

$$\begin{aligned} P(M) - P(M \cap D) + P(D) - P(D \cap M) &= \\ = 0,6 - 0,55 + 0,7 - 0,55 &= \\ = 1,3 - 1,1 = 0,2 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(M | \overline{D}) = \frac{P(M \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0,05}{0,3} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

61. A: "A carta extraída ser ás."

O: "A carta extraída ser de ouros."

$$P(A) = 0,2$$

$$P(O) = 0,6$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{O}) = 0,3$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(A \cap O) = 0,3 &\Leftrightarrow P(A \cup O) = 0,3 \\ &\Leftrightarrow 1 - P(A \cup O) = 0,3 \\ &\Leftrightarrow 1 - 0,3 = P(A \cup O) \\ &\Leftrightarrow P(A \cup O) = 0,7 \end{aligned}$$

Sabemos que:

$$P(A \cup O) = P(A) + P(O) - P(A \cap O)$$

$$0,7 = 0,2 + 0,6 - P(A \cap O)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap O) = 0,8 - 0,7$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap O) = 0,1$$

Dado que $P(A \cap O) \neq 0$, concluímos que $A \cap O$: "a carta extraída ser o ás de ouros" é um acontecimento possível. Tal só pode acontecer se o ás de ouros estiver no baralho.

$$\text{b) } P(\text{"ser extraído o ás de ouros"}) = 0,1$$

Logo, $\frac{1}{10} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow n = 10$ é o número de cartas do baralho incompleto.

$$\text{c) } \frac{6}{10} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow x = 6 \text{ é o número de cartas de ouros deste baralho incompleto.}$$

$$\begin{aligned} 62. P &= \frac{4 \times {}^{36}C_9 \times 3 \times {}^{27}C_9 \times 2 \times {}^{18}C_9 \times 1 \times {}^9C_9}{{}^{40}C_{10} \times {}^{30}C_{10} \times {}^{20}C_{10} \times {}^{10}C_{10}} = \\ &= \frac{1000}{9139} \end{aligned}$$

63.

$$\text{a) } P = \frac{8 \times 8 \times 8 \times 1}{8 \times 8 \times 8 \times 8} = \frac{1}{8}$$

$$\text{b) } P = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{8 \times 8 \times 8 \times 8} = \frac{105}{256}$$

64.**a)**

$$\text{i) } P = \frac{8}{{}^8C_2} = \frac{2}{7}$$

$$\text{ii) } P = \frac{4}{{}^8C_2} = \frac{1}{7}$$

$$\text{b) } P = \frac{4 \times 6}{{}^8C_3} = \frac{3}{7}$$

65.**a) Número de casos possíveis:** ${}^{14}C_5$ Número de casos favoráveis: ${}^8C_5 + {}^6C_5$

A probabilidade pedida é:

$$\begin{aligned} P &= \frac{{}^8C_5 + {}^6C_5}{{}^{14}C_5} = \\ &= \frac{62}{2002} = \\ &= \frac{31}{1001} \end{aligned}$$

b) Número de casos possíveis: ${}^{14}C_3$ Número de casos favoráveis: $6 \times {}^4C_3 + 8 \times {}^4C_3$

A probabilidade pedida é:

$$\begin{aligned} P &= \frac{6 \times {}^4C_3 + 8 \times {}^4C_3}{{}^{14}C_3} = \\ &= \frac{56}{364} = \\ &= \frac{2}{13} \end{aligned}$$

66. ${}^{25}C_{15}$ é o número de modos distintos de colocar os quinze carrinhos na caixa.

Supondo que os carrinhos ocupam pelo menos uma das diagonais, sobram-nos dez carrinhos para colocar em vinte compartimentos, o que pode ser feito de ${}^{20}C_{10}$ modos distintos, para cada diagonal, ou seja, podemos preencher pelo menos uma das diagonais de $2 \times {}^{20}C_{10}$ modos distintos. Porém, $2 \times {}^{20}C_{10}$ contabilizou o dobro das vezes o caso em que as duas diagonais são preenchidas em simultâneo. Logo, temos de subtrair o número de modos de preencher as duas diagonais em simultâneo.

Uma vez preenchidas as duas diagonais em simultâneo, sobram $15 - 9 = 6$ carrinhos para colocar em dezasseis compartimentos, o que pode ser feito de ${}^{16}C_6$ maneiras distintas.

Assim, $2 \times {}^{20}C_{10} - {}^{16}C_6$ é o número de maneiras de ocupar pelo menos uma das diagonais.

Pela regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pela razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando os resultados elementares são equiprováveis e em número finito, ou seja,

$\frac{2 \times {}^{20}C_{10} - {}^{16}C_6}{{}^{25}C_{15}}$ é uma resposta correta a este problema.

67. O desenvolvimento pelo binómio de Newton de $(x - 2)^{11}$, $x > 0$, tem doze parcelas das quais seis são negativas e seis são positivas. Como se pretende que o produto das parcelas seja negativo, uma delas tem de ser positiva e a outra negativa.

$$\text{Então, } P = \frac{6 \times 6}{{}^{12}C_2} = \frac{6}{11}.$$

68.

a) $1 + n + n + 1 = 26 \Leftrightarrow n = 12$

Sendo a linha $n = 12$ do triângulo de Pascal, temos 13 elementos.

Assim, na extração sucessiva, sem reposição, de dois cartões da caixa, temos:

Número de casos possíveis: $13 \times 12 = 156$

Número de casos favoráveis: $12 \times 1 = 12$

(já que, dada a simetria de cada uma das linhas do triângulo de Pascal, em 13 elementos, apenas um – o central – não tem outro elemento igual a ele.)

Assim, a probabilidade pretendida é:

$$P = \frac{12}{156} = \frac{1}{13}$$

b) No contexto da situação descrita, $P(B | A)$ significa “a probabilidade de, numa extração sucessiva e sem reposição de dois cartões da caixa, os números escritos nos cartões serem diferentes, sabendo que saiu um cartão correspondente ao elemento central da linha”.

Ora, dada a simetria de cada uma das linhas do triângulo de Pascal, em 13 elementos, apenas o elemento central não tem qualquer elemento igual a ele. Assim, sabendo que um dos cartões extraído correspondia ao elemento central, então os números escritos nos dois cartões são certamente diferentes, sendo $B|A$ um acontecimento certo. Portanto, $P(B | A) = 1$.

69. Sejam os acontecimentos:

A: “O bolo é fornecido pela empresa A.”

B: “O bolo é fornecido pela empresa B.”

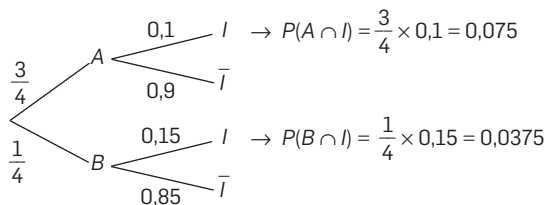
I: “O bolo apresenta peso significativamente inferior ao estabelecido.”

- $P(A) = 3 P(B)$
- $P(I | A) = 0,1$
- $P(I | B) = 0,15$

$$P(A) + P(B) = 1 \Leftrightarrow 3P(B) + P(B) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4P(B) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$



Pretende-se determinar $P(A | I)$:

$$\begin{aligned} P(A | I) &= \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \\ &= \frac{0,075}{0,075 + 0,0375} = \\ &= \frac{0,075}{0,1125} \\ &= \frac{2}{3} \approx 0,667 \end{aligned}$$

Assim, $P(A | I) \approx 67\%$.

70. Sejam os acontecimentos:

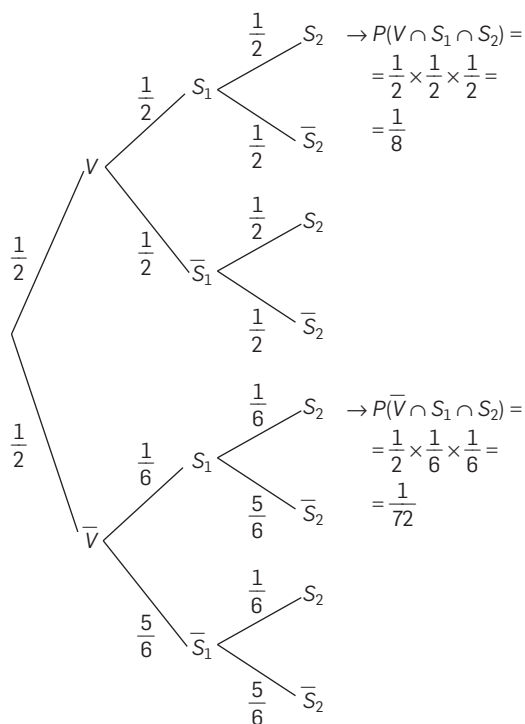
V: “Ser dado viciado.”

S: “Sair um num lançamento do dado.”

$$P(S | V) = \frac{1}{2}$$

$$P(S | \bar{V}) = \frac{1}{6}$$

Assim:



Pretende-se:

$$\begin{aligned}
 P(V | (S_1 \cap S_2)) &= \frac{P(V \cap S_1 \cap S_2)}{P(S_1 \cap S_2)} = \\
 &= \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{72}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{36}} = \\
 &= \frac{9}{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 71. P(\bar{A} | B) - P(\bar{B}) \times P(\bar{A} | B) &= \\
 &= P(\bar{A} | B) [1 - P(\bar{B})] = \\
 &= P(\bar{A} | B) \times P(B) = \\
 &= \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} \times P(B) \quad (P(B) \neq 0) \\
 &= P(\bar{A} \cap B) = \\
 &= P(A \cup B) = \\
 &= 1 - P(A \cup \bar{B}) = \\
 &= 1 - P(\bar{B} \cup A)
 \end{aligned}$$

72.

$$\begin{aligned}
 a) P(B \cap \bar{C}) &= P(B) - P(B \cap C) = \\
 &= P(B) - P(B) \times P(C) \\
 &\text{(pois } B \text{ e } C \text{ são acontecimentos independentes.)} \\
 &= P(B) [1 - P(C)] = \\
 &= P(B) \times P(\bar{C})
 \end{aligned}$$

Logo, B e $\bar{C}$ são acontecimentos independentes.

$$\begin{aligned}
 b) P(A | (B \cap C)) \times P(C) + P(A | (B \cap \bar{C})) \times P(\bar{C}) &= \\
 &= \frac{P[A \cap (B \cap C)]}{P(B \cap C)} \times P(C) + \frac{P[A \cap (B \cap \bar{C})]}{P(B \cap \bar{C})} \times P(\bar{C}) = \\
 &= \underbrace{\frac{P[A \cap (B \cap C)]}{P(B) \times P(C)}}_{\text{pois } B \text{ e } C \text{ são independentes.}} \times P(C) + \underbrace{\frac{P[A \cap (B \cap \bar{C})]}{P(B) \times P(\bar{C})}}_{\text{se } B \text{ e } C \text{ são independentes, então } B \text{ e } \bar{C} \text{ também são independentes.}} \times P(\bar{C}) = \\
 &= \frac{P[(A \cap B) \cap C]}{P(B)} + \frac{P[(A \cap B) \cap \bar{C}]}{P(B)} = \\
 &= \frac{P[(A \cap B) \cap C] + P[(A \cap B) \cap \bar{C}]}{P(B)} = \\
 &= \frac{P[(A \cap B) \cap (C \cup \bar{C})]}{P(B)} = \\
 &\text{(pois } [(A \cap B) \cap C] \text{ e } [(A \cap B) \cap \bar{C}] \text{ são acontecimentos disjuntos.)} \\
 &= \frac{P[(A \cap B) \cap (C \cup \bar{C})]}{P(B)} = \\
 &= \frac{P[(A \cap B) \cap U]}{P(B)} = \\
 &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \\
 &= P(A | B)
 \end{aligned}$$

Teste Final

Páginas 134 a 137

Grupo I

1. Opção (B)

$$\#E = 2^3 = 8$$

$$\#\mathcal{P}(E) = 2^8 = 256$$

2. Opção (A)

Após a extração de um bombom com recheio de licor, restam no saco dezanove bombons, dos quais sete são de chocolate negro (sendo quatro com recheio de licor e três com recheio de morango). A probabilidade de a Margarida ter pegado num bombom com recheio de morango, sabendo que se tratou de um bombom de chocolate negro é, então, $\frac{3}{7}$.

3. Opção (B)

A linha n do triângulo de Pascal tem $n + 1$ elementos, dos quais dois são iguais a 1.

$$\frac{2}{n+1} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow 20 = n+1 \Leftrightarrow n = 19$$

4. Opção (B)

$$\begin{aligned}P(B \cup C) &= 0,6 \Leftrightarrow P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0,6 \\&\Leftrightarrow 0,45 + 0,35 - P(B \cap C) = 0,6 \\&\Leftrightarrow P(B \cap C) = 0,2 \\&\Leftrightarrow P(A) = 0,2\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}P(A \cup (B \cap C)) &= P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) = \\&= 0,2 + 0,2 - 0 = 0,4\end{aligned}$$

5. Opção (D)

No contexto da situação descrita, $P(A | \bar{B})$ significa "probabilidade de o número da ficha escolhida ser um número primo, sabendo que a ficha escolhida não é um triângulo".

Ora, há seis fichas que não são triângulos, das quais três contêm números primos.

$$\text{Assim, } P(A | \bar{B}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Grupo II

1.

$$1.1. P = \frac{{}^7C_6}{{}^{16}C_6} = \frac{7}{8008} \approx 0,00087$$

$$1.2. P = \frac{{}^{10}C_4 \times {}^6C_2 + {}^{10}C_5 \times {}^6C_1}{{}^{16}C_6 - {}^{10}C_6 - {}^6C_6} = \frac{4662}{7797}$$

$$1.3. a) P = \frac{3}{12} = 25\%$$

$$\begin{aligned}b) \frac{{}^{n+3}C_3}{{}^{n+4}C_3} &= \frac{\frac{(n+3)!}{3!n!}}{\frac{(n+4)!}{3!(n+1)!}} = \\&= \frac{\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n!}{3!n!}}{\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!}{3!(n+1)!}} = \\&= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{(n+4)(n+3)(n+2)} = \\&= \frac{n+1}{n+4}\end{aligned}$$

2. A resposta correta é a I.

Segundo a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, quando os acontecimentos elementares são equiprováveis.

Assim, a resposta I apresenta como número de casos possíveis ${}^{52}A_5$, já que existem ${}^{52}A_5$ maneiras diferentes de se extrair, sucessivamente e sem

reposição, cinco cartas de um baralho de cinquenta e duas cartas.

O número de casos favoráveis é $39 \times {}^{13}C_4 \times 5!$, pois existem 39 maneiras diferentes de escolher uma carta que não seja do naipe de espadas. Por cada uma destas maneiras, existem ${}^{13}C_4$ maneiras diferentes de formar conjuntos de quatro cartas das treze que existem do naipe de espadas, e por cada um destes conjuntos de cinco cartas, sendo apenas quatro do naipe de espadas, existem 5! maneiras diferentes de as cartas se encontrarem ordenadas. A resposta II ficaria correta se o número de casos favoráveis alterasse para ${}^{39}A_1 \times {}^{13}A_4 \times 5$, pois existem ${}^{39}A_1$ maneiras diferentes de escolher uma carta que não seja do naipe de espadas e, por cada uma destas maneiras, existem ${}^{13}A_4$ de se extraírem, sucessivamente e sem reposição, quatro cartas de entre as treze existentes do naipe de espadas, e, por cada um destes casos, existem cinco formas de posicionar a carta que não é do naipe de espadas.

$$\begin{aligned}3. P(\bar{A} | \bar{B}) \times P(\bar{B}) - P(A \cap B) + P(B) &= \\&= P(\bar{A} \cap \bar{B}) - P(A \cap B) + P(B) = \\&= P(\bar{A} \cup \bar{B}) - P(A \cap B) + P(B) = \\&= 1 - P(A \cup B) - P(A \cap B) + P(B) = \\&= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) - P(A \cap B) + P(B) = \\&= 1 - P(A) = \\&= P(\bar{A})\end{aligned}$$

4.

$$4.1. P = \frac{{}^6A_5 \times {}^6A_5}{{}^{12}A_{10}} = \frac{1}{462}$$

$$4.2. P = \frac{6! \times {}^6A_4}{{}^{12}A_{10}} = \frac{1}{924}$$

$$4.3. P = \frac{8 \times {}^9A_7}{{}^{12}A_{10}} = \frac{1}{165}$$

Tema III - Funções Reais de Variável Real

Unidade 1 - Limites

Páginas 6 a 18

1. $u_n = \frac{3n-1}{n}$

a) $u_1 = \frac{3-1}{1} = 2$

$u_2 = \frac{6-1}{2} = \frac{5}{2}$

$u_3 = \frac{9-1}{3} = \frac{8}{3}$

b) i) Proposição falsa.

$$u_n = 1 \Leftrightarrow \frac{3n-1}{n} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3n-1 = n$$

$$\Leftrightarrow 2n = 1$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1}{2} (\notin \mathbb{N})$$

ii) Proposição verdadeira.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3n+2}{n+1} - \frac{3n-1}{n} = \\ &= \frac{(3n+2)n - (3n-1)(n+1)}{n(n+1)} = \\ &= \frac{3n^2 + 2n - 3n^2 - 3n + n + 1}{n(n+1)} = \\ &= \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, a sucessão (u_n) é monótona crescente. Assim, $u_1 = 2$ é um minorante dos termos da sucessão.

$$u_n = \frac{3n-1}{n} = 3 - \frac{1}{n}$$

Como $\frac{1}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, tem-se que $3 - \frac{1}{n} < 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Então, $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_n < 3$.

2.

a) Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N},$

$$n \geq p \Rightarrow \left| \frac{4n-1}{n+1} - 4 \right| < \delta.$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{4n-1}{n+1} - 4 \right| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{4n-1-4n-4}{n+1} \right| < \delta \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{-5}{n+1} \right| < \delta \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{n+1} < \delta \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{5} > \frac{1}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow n+1 > \frac{5}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{5}{\delta} - 1$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{5-\delta}{\delta}$$

Assim, se $n > \frac{5-\delta}{\delta}$, então $\left| \frac{4n-1}{n+1} - 4 \right| < \delta$. Portanto,

se $p > \frac{5-\delta}{\delta}$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{4n-1}{n+1} - 4 \right| < \delta, \text{ ou seja, que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n+1} = 4.$$

b) Dado $L \in \mathbb{R}^+$:

$$3n+1 > L \Leftrightarrow 3n > L-1 \Leftrightarrow n > \frac{L-1}{3}$$

Então, para qualquer $L > 0$, se considerarmos um número natural p , superior a $\frac{L-1}{3}$, tem-se $3n+1 > L$, desde que $n \geq p$.

Fica provado que $\lim (3n+1) = +\infty$.

c) Dado $L \in \mathbb{R}^+$:

$$-n+10 < -L \Leftrightarrow -n < -L-10 \Leftrightarrow n > L+10$$

Então, para qualquer $L > 0$, se considerarmos um número natural p , superior a $L+10$, tem-se $-n+10 < -L$, desde que $n \geq p$.

Fica provado que $\lim (-n+10) = -\infty$.

3.

a) $\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = +\infty - (-\infty) = +\infty$

b) $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = +\infty + (-\infty)$
Nada se pode concluir.

c) $\lim (a_n + f_n) = \lim a_n + \lim f_n = +\infty + (-4) = +\infty$

d) $\lim (b_n + e_n) = \lim b_n + \lim e_n = -\infty + 5 = -\infty$

e) $\lim (a_n + e_n) = \lim a_n + \lim e_n = +\infty + 5 = +\infty$

f) $\lim (b_n - e_n) = \lim b_n - \lim e_n = -\infty - 5 = -\infty$

g) $\lim (e_n + f_n) = \lim e_n + \lim f_n = 5 + (-4) = 1$

h) $\lim (a_n \times b_n) = \lim a_n \times \lim b_n = +\infty \times (-\infty) = -\infty$

i) $\lim (a_n \times c_n) = \lim a_n \times \lim c_n = +\infty \times 0^+$
Nada se pode concluir.

j) $\lim (b_n \times e_n) = \lim b_n \times \lim e_n = -\infty \times 5 = -\infty$

k) $\lim (b_n \times f_n) = \lim b_n \times \lim f_n = -\infty \times (-4) = +\infty$

l) $\lim (e_n \times f_n) = \lim e_n \times \lim f_n = 5 \times (-4) = -20$

m) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{-\infty}{-\infty}$ Nada se pode concluir.

$$\text{n)} \lim \frac{a_n}{c_n} = \frac{\lim a_n}{\lim c_n} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

$$\text{o)} \lim \frac{a_n}{d_n} = \frac{\lim a_n}{\lim d_n} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$$

$$\text{p)} \lim \frac{c_n}{d_n} = \frac{\lim c_n}{\lim d_n} = \frac{0^+}{0^-} \text{ Nada se pode concluir.}$$

$$\text{q)} \lim \frac{c_n}{b_n} = \frac{\lim c_n}{\lim b_n} = \frac{0^+}{-\infty} = 0$$

$$\text{r)} \lim \frac{e_n}{f_n} = \frac{\lim e_n}{\lim f_n} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$

$$\text{s)} \lim (a_n)^{2018} = (+\infty)^{2018} = +\infty$$

$$\text{t)} \lim (b_n)^{2019} = (-\infty)^{2019} = -\infty$$

4.

$$\text{a)} \text{ Tem-se que } \lim \frac{1}{n} = 0 \text{ e } -1 \leq \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Logo, } \lim \left(\frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right) = 0.$$

$$\text{b)} \text{ Tem-se que } \lim \frac{1}{-n^3 + n} = 0 \text{ e } -1 \leq \sin n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Logo, } \lim \frac{\sin n}{-n^3 + n} = 0.$$

5.

$$\begin{aligned} \text{a)} \lim (-n^7 + 5n^5 + 2n) &= \lim \left[n^7 \left(-1 + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^6} \right) \right] = \\ &= +\infty \times (-1 + 0 + 0) = \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \lim \frac{4n^2 - 5n - 7}{-n^3 + 6n} &= \lim \frac{n^2 \left(4 - \frac{5}{n} - \frac{7}{n^2} \right)}{n^3 \left(-1 + \frac{6}{n^2} \right)} = \\ &= \lim \frac{4 - \frac{5}{n} - \frac{7}{n^2}}{n \left(-1 + \frac{6}{n^2} \right)} = \\ &= \frac{4}{+\infty \times (-1)} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \lim \frac{n^2 + n + 2\sqrt{n}}{\sqrt{n^5 + 2n^2 + 3}} &= \\ &= \lim \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{\sqrt{n^3}} \right)}{\sqrt{n^4 \left(n + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^4} \right)}} = \\ &= \lim \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{\sqrt{n^3}} \right)}{n^2 \sqrt{n + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^4}}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{\sqrt{n^3}}}{\sqrt{n + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^4}}} = \\ &= \frac{1}{+\infty} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \lim (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 1}) &= \\ &= \lim \frac{n^2 + 2n - n^2 + 1}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - 1}} = \\ &= \lim \frac{2n + 1}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} \right)} + \sqrt{n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)}} = \\ &= \lim \frac{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)}{n \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + n \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \\ &= \lim \frac{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)} = \\ &= \lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \\ &= \frac{2}{1 + 1} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \lim \frac{\sqrt{n^2 + n} - 1}{\sqrt{n^2 + n} + 1} &= \lim \frac{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)} - 1}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)} + 1} = \\ &= \lim \frac{n \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}{n \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \\ &= \lim \frac{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \right)} = \\ &= \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n}} = \\ &= \frac{1}{1} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

6.

a) $\lim 3^n = +\infty$

b) $\lim \pi^n = +\infty$

c) $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

d) $\lim \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

e) $\lim \sqrt[n]{0,5} = 1$

f) $\lim \frac{-7^n + 0,3^n}{\sqrt[n]{10}} = \frac{-\infty + 0}{1} = -\infty$

g) $\lim \frac{5^n - 3^n}{5^n + 3^n} = \lim \frac{5^n \left(1 - \frac{3^n}{5^n}\right)}{5^n \left(1 + \frac{3^n}{5^n}\right)} =$
 $= \lim \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n} =$
 $= \frac{1 - 0}{1 + 0}$
 $= 1$

7.

a) Opção (A)

Tem-se que $u_n - v_n \leq 0 \Leftrightarrow u_n \leq v_n$.

Então, $\lim u_n \leq \lim v_n \Leftrightarrow \lim u_n \leq 1$.

Assim, $\lim u_n$ pode ser 0.

8.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, 2n - 1 \leq 2n \Leftrightarrow \frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2n}$
 $\Leftrightarrow \frac{4n^3}{2n-1} \geq \frac{4n^3}{2n}$
 $\Leftrightarrow \frac{4n^3}{2n-1} \geq 2n^2$

Como, além disso, $\lim (2n^2) = +\infty$, então

$$\lim \frac{4n^3}{2n-1} = +\infty.$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{n+1} \geq 3^n$

Como, além disso, $\lim 3^n = +\infty$, então $\lim 3^{n+1} = +\infty$.

9. Sabe-se que $\lim u_n = -\infty$.

Então, $\lim (-u_n + \sqrt[n]{2}) = -(-\infty) + 1 = +\infty$.

Como $\lim (-u_n + \sqrt[n]{2}) = +\infty$ e $v_n \geq -u_n + \sqrt[n]{2}$, para $n \geq 2018$, então $\lim v_n = +\infty$.

10. Como $\lim v_n = -\infty$, existe uma ordem $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_1 \Rightarrow v_n < 0$.

Além disso, tem-se que, para $n > 2019$, $w_n = 3v_n$.

Seja p o maior valor entre p_1 e 2019. Então,

$\forall n \geq p, v_n > w_n$.

Atendendo a que $\forall n \geq p, v_n < w_n$ e $\lim v_n = -\infty$, conclui-se que $\lim w_n = -\infty$.

11.

a) Para todo o número natural n , tem-se que:

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \sin n \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{2 + \sin n}{n} \leq \frac{3}{n}$$

Como $\lim \frac{1}{n} = \lim \frac{3}{n} = 0$ então, pelo teorema das sucessões encastradas, conclui-se que

$$\lim \frac{2 + \sin n}{n} = 0.$$

b) Para todo o número natural n , tem-se que:

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \Leftrightarrow 2n - 1 \leq 2n + \cos n \leq 2n + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n-1}{n+2} \leq \frac{2n+\cos n}{n+2} \leq \frac{2n+1}{n+2}$$

Ora, $\lim \frac{2n-1}{n+2} = \lim \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 2$ e

$$\lim \frac{2n+1}{n+2} = \lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 2.$$

Então, pelo teorema das sucessões encastradas, conclui-se que $\lim \frac{2n + \cos n}{n+2} = 2$.

c) Para todo o número natural n , tem-se que:

$$0 \leq \cos^4 \left(n \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\cos^4 \left(n \frac{\pi}{3}\right)}{3n+2} \leq \frac{1}{3n+2}$$

Como $\lim \frac{1}{3n+2} = \lim 0 = 0$, então, pelo teorema das sucessões encastradas, conclui-se que

$$\lim \frac{\cos^4 \left(n \frac{\pi}{3}\right)}{3n+2} = 0.$$

d) Seja (a_n) a sucessão de termo geral $a_n = \frac{2n}{4n+1}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+2}{4n+5} - \frac{2n}{4n+1} =$$

$$= \frac{(2n+2)(4n+1) - 2n(4n+5)}{(4n+5)(4n+1)} =$$

$$= \frac{8n^2 + 8n + 2n + 2 - 8n^2 - 10n}{(4n+5)(4n+1)} =$$

$$= \frac{2}{(4n+5)(4n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, a sucessão (a_n) é monótona crescente.

$$a_1 = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2n}{4n+1} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{4n+1} < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 2n & 4n+1 \\ -2n - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{2} & \end{array}$$

Então, $\frac{2}{5} \leq a_n < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq \left(\frac{2n}{4n+1}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim \left(\frac{2}{5}\right)^n = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ então, pelo teorema das sucessões encastradas, conclui-se que

$$\lim \left(\frac{2n}{4n+1}\right)^n = 0.$$

e) Seja (a_n) a sucessão de termo geral $a_n = \frac{2n}{6n+1}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2n+2}{6n+7} - \frac{2n}{6n+1} = \\ &= \frac{(2n+2)(6n+1) - 2n(6n+7)}{(6n+7)(6n+1)} = \\ &= \frac{12n^2 + 2n + 12n + 2 - 12n^2 - 14n}{(6n+7)(6n+1)} = \\ &= \frac{2}{(6n+7)(6n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, a sucessão (a_n) é monótona crescente.

$$a_1 = \frac{2}{7}$$

$$\frac{2n}{6n+1} = \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{3}}{6n+1} < \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 2n & 6n+1 \\ -2n - \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline -\frac{1}{3} & \end{array}$$

Então, $\frac{2}{7} \leq a_n < \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\left(\frac{2}{7}\right)^n \leq \left(\frac{2n}{6n+1}\right)^n < \left(\frac{1}{3}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim \left(\frac{2}{7}\right)^n = \lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ então, pelo teorema das sucessões encastradas, conclui-se que

$$\lim \left(\frac{2n}{6n+1}\right)^n = 0.$$

f) Para todo o número natural n , tem-se que:

$$\begin{aligned} 0 \leq (\sin n)^2 \leq 1 &\Leftrightarrow 1 \leq (\sin n)^2 + 1 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{(\sin n)^2 + 1}{2^n} \leq \frac{2}{2^n} \end{aligned}$$

Como $\lim \frac{1}{2^n} = \lim \frac{2}{2^n} = 0$, então, pelo teorema das sucessões encastradas, conclui-se que

$$\lim \frac{(\sin n)^2 + 1}{2^n} = 0.$$

g) Para todo o número natural n , tem-se que:

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos n \leq 1 &\Leftrightarrow 3n^2 - 1 \leq 3n^2 + \cos n \leq 3n^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3n^2 - 1} \geq \frac{1}{3n^2 + \cos n} \geq \frac{1}{3n^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{n^2}{3n^2 - 1} \geq \frac{n^2}{3n^2 + \cos n} \geq \frac{n^2}{3n^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Ora, } \lim \frac{n^2}{3n^2 - 1} = \lim \frac{1}{3 - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3} \text{ e}$$

$$\lim \frac{n^2}{3n^2 + 1} = \lim \frac{1}{3 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3}.$$

Então, pelo teorema das sucessões encastradas, conclui-se que $\lim \frac{n^2}{3n^2 + \cos n} = \frac{1}{3}$.

$$h) \sum_{k=1}^n \frac{3n}{4n^2 + k} = \frac{3n}{4n^2 + 1} + \frac{3n}{4n^2 + 2} + \dots + \frac{3n}{4n^2 + n}$$

Como, $\frac{3n}{4n^2 + 1} > \frac{3n}{4n^2 + 2} > \dots > \frac{3n}{4n^2 + n}$, então:

$$\begin{aligned} \frac{3n}{4n^2 + 1} + \frac{3n}{4n^2 + 2} + \dots + \frac{3n}{4n^2 + n} &< \frac{3n^2}{4n^2 + 1} + \\ + \frac{3n}{4n^2 + 1} + \dots + \frac{3n}{4n^2 + 1} &= n \times \frac{3n}{4n^2 + 1} = \frac{3n^2}{4n^2 + 1} \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \frac{3n}{4n^2 + 1} + \frac{3n}{4n^2 + 2} + \dots + \frac{3n}{4n^2 + n} &> \frac{3n}{4n^2 + n} + \\ + \frac{3n}{4n^2 + n} + \dots + \frac{3n}{4n^2 + n} &= n \times \frac{3n}{4n^2 + n} = \frac{3n^2}{4n^2 + n} = \\ = \frac{3n}{4n+1} \end{aligned}$$

Assim:

$$\frac{3n}{4n+1} < \sum_{k=1}^n \frac{3n}{4n^2 + k} < \frac{3n^2}{4n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Como } \lim \frac{3n}{4n+1} = \lim \frac{3}{4 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{4} \text{ e}$$

$$\lim \frac{3n^2}{4n^2 + 1} = \lim \frac{3}{4 + \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{4}, \text{ então, pelo}$$

teorema das sucessões encastradas,

$$\lim \sum_{k=1}^n \frac{3n}{4n^2 + k} = \frac{3}{4}.$$

12. Para todo o número natural n , tem-se que:

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos n \leq 1 &\Leftrightarrow -3 \leq \cos n - 2 \leq -1 \\ &\Leftrightarrow -3n^4 \leq n^4 (\cos n - 2) \leq -n^4 \end{aligned}$$

Ora, $\lim (-3n^4) = \lim (-n^4) = -\infty$.

Então, pelo teorema das sucessões encastradas, conclui-se que $\lim [n^4 (\cos n - 2)] = -\infty$.

13.

a) Tem-se que, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq 5 + \sin x \leq 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}} \leq \frac{5 + \sin x}{\sqrt{x}} \leq \frac{6}{\sqrt{x}}$$

Além disso:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{\sqrt{x}} = 0$$

Logo, pelo teorema das funções encastradas, con-

clui-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \sin x}{\sqrt{x}} = 0$.

b) Para todo o número real x , tem-se que:

$$-1 \leq \sin(4x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{1+x^2} \leq \frac{\sin(4x)}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

Além disso:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1+x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Logo, pelo teorema das funções encastradas, con-

clui-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(4x)}{1+x^2} = 0$.

c) Para todo o número real x , tem-se que:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -x-1 \leq -x + \cos x \leq -x+1$$

Como para $x \rightarrow +\infty$ se tem $x+2 > 0$, vem que:

$$\frac{-x-1}{x+2} \leq \frac{-x + \cos x}{x+2} \leq \frac{-x+1}{x+2}$$

Além disso:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -1$$

Logo, pelo teorema das funções encastradas, con-

clui-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \cos x}{x+2} = -1$.

d) Tem-se que, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 \cos \frac{1}{x} \leq x^2$$

Além disso:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Logo, pelo teorema das funções encastradas, con-

clui-se que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cos \frac{1}{x} \right) = 0$.

e) Para todo o número real x , tem-se que:

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos x \leq 1 &\Leftrightarrow 1 \leq 2 + \cos x \leq 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 \leq x^2 (2 + \cos x) \leq 3x^2 \end{aligned}$$

Além disso:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2) = +\infty$$

Logo, pelo teorema das funções encastradas, con-

clui-se que $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x^2 (2 + \cos x)] = +\infty$.

f) Para todo o número real x , tem-se que:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

Como para $x \rightarrow +\infty$ se tem $\frac{x}{2} > 0$, vem que:

$$-\frac{x}{2} \leq \frac{x}{2} \sin x \leq \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} \leq x + \frac{x}{2} \sin x \leq \frac{3x}{2}$$

Além disso:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2} = +\infty$$

Logo, pelo teorema das funções encastradas, con-

clui-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{x}{2} \sin x \right) = +\infty$.

14. Tem-se que, $\forall x \in]1, +\infty[$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq x + \sin x \leq x+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x + \sin x} \leq \frac{1}{x-1}$$

Como para $x \rightarrow -\infty$ se tem $x^3 < 0$, vem que:

$$\frac{x^3}{x-1} \leq \frac{x^3}{x + \sin x} \leq \frac{x^3}{x+1}$$

Além disso:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1 - \frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

Logo, pelo teorema das funções encaixadas,

$$\text{conclui-se que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x + \sin x} = +\infty.$$

15. Sabe-se que f é uma função limitada. Então, por definição, existem números reais m e M tais que $\forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M$.

Seja a igual ao máximo dos valores $|m|$ e $|M|$. Então, $\forall x \in \mathbb{R}, -a \leq f(x) \leq a$, ou seja, $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq a$.

Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x)| |g(x)| \leq a |g(x)|$$

Isto é:

$$|f(x)g(x)| \leq a |g(x)|$$

Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$-a |g(x)| \leq f(x)g(x) \leq a |g(x)|$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, sabe-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} |g(x)| = 0$.

Portanto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -a |g(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} a |g(x)| = 0$ e, pelo teorema das funções encaixadas, conclui-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = 0$.

A função h , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = a |g(x)|$ é tal que $-h(x) \leq f(x)g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

Unidade 2 - Continuidade

Páginas 19 a 28

16. Para que a função f seja contínua em $x = 4$, tem de se ter $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$.

$$\bullet f(4) = -4^2 + 2 \times 4 + 9 = 1$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} (-x^2 + 2x + 9) = \\ &= -4^2 + 2 \times 4 + 9 = \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{6\sqrt{x+5} - 18}{x-4} = \\ &= \left(\frac{0}{0} \right) = 6 \times \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{\sqrt{x+5} - 3}{x-4} \times \frac{\sqrt{x+5} + 3}{\sqrt{x+5} + 3} \right) = \\ &= 6 \times \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x+5-9}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} = \\ &= 6 \times \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{x+5}+3} = \\ &= 6 \times \frac{1}{6} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$, a função f é contínua em $x = 4$.

17. A função g é contínua em $]-9, 0[$, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas, em que o denominador não se anula no intervalo considerado: uma que é uma função polinomial e outra que é uma função irracional.

A função g é contínua em $]0, +\infty[$, por se tratar de uma função racional.

Para que a função seja contínua em $x = 0$, tem de se ter $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$.

$$\bullet g(0) = a$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^3 + 9x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^2(x+9)}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 3x}{|x| \sqrt{x+9}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-3)}{-x \sqrt{x+9}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-3}{-\sqrt{x+9}} = \frac{-3}{-3} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - bx}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-b)}{x(x+1)} = \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-b}{x+1} &= -\frac{b}{1} = -b \end{aligned}$$

Assim:

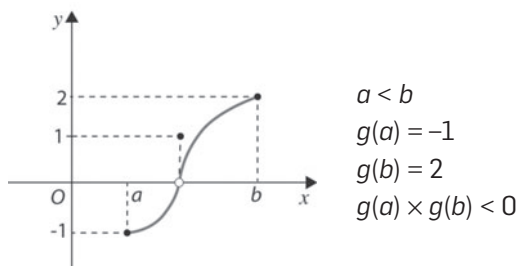
$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \Leftrightarrow a = 1$$

E:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \Leftrightarrow -b = 1 \Leftrightarrow b = -1$$

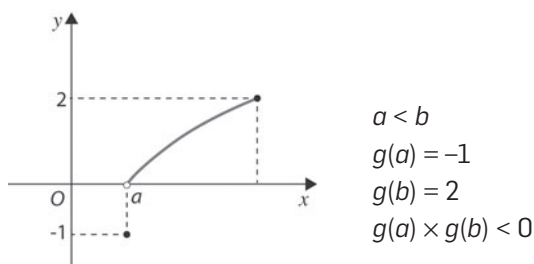
18. A função g não é contínua em $[a, b]$.

Por exemplo:



e não existe nenhum número real x tal que $a < x < b$ e $g(x) = 0$.

Ou, por exemplo:



e não existe nenhum número real x tal que $a < x < b$ e $g(x) = 0$.

19. A função f é contínua em $[a, b]$.

Se $f(a) \times f(b) < 0$, então $f(a) < 0 < f(b)$ ou $f(b) < 0 < f(a)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos um número real c entre a e b cuja imagem é 0, ou seja, a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]a, b[$.

20. Por exemplo, a função f definida no intervalo $[1, 3]$ por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Tem-se que $f(1) = -1$ e $f(3) = 1$, logo $f(1) \times f(3) < 0$, mas, para todo $x \in [1, 3]$, $f(x) \neq 0$.

21. $h(x) = |x - 1| + x^2 - \sqrt{x + 2} =$

$$= \begin{cases} x - 1 + x^2 - \sqrt{x + 2} & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ -x + 1 + x^2 - \sqrt{x + 2} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

A função h é contínua em $[1, 2]$, por se tratar, neste intervalo, da soma entre duas funções contínuas: uma função polinomial e uma função irracional.

$$h(1) = -1 + 1 + 1^2 - \sqrt{1 + 2} = 1 - \sqrt{3}$$

$$h(2) = -2 + 1 + 2^2 - \sqrt{2 + 2} = 1$$

Logo, $h(1) < 0 < h(2)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos um zero da função h pertencente ao intervalo $[1, 2]$.

22. $h(x) = \frac{1}{g(x)}$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R}: g(x) \neq 0\}$$

Se o domínio de h fosse o intervalo $[a, b]$, significaria que não existia nenhum valor c no intervalo $]a, b[$ tal que $g(c) = 0$.

No entanto, como g é contínua no intervalo $[a, b]$, $g(a) = 4$ e $g(b) = -2$, ou seja, $g(a) \times g(b) < 0$, pode concluir-se, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, que existe pelo menos um número real $c \in]a, b[$ tal que $g(c) = 0$.

Logo, h não pode ter como domínio o intervalo $[a, b]$.

23. Às 10 horas de um determinado dia corresponde $t = 0$, logo às 11 horas e às 11 horas e 30 minutos do referido dia correspondem $t = 1$ e $t = 1,5$, respetivamente.

Sabe-se também que P está expresso em milhões de bactérias.

Assim, pretende-se provar que $\exists t \in]1; 1,5[$:

$$P(t) = 0,5.$$

A função P é contínua em $[1; 1,5]$, visto tratar-se de uma função racional.

$$P(1) = \frac{5 \times 1^2}{2 \times 1^3 + 10} = \frac{5}{12} \approx 0,417$$

$$P(1,5) = \frac{5 \times (1,5)^2}{2 \times (1,5)^3 + 10} = \frac{45}{67} \approx 0,672$$

Logo, $P(1) < 0,5 < P(1,5)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe pelo menos um instante $t \in]1; 1,5[$ tal que $P(t) = 0,5$.

24. Seja h a função definida por $h(x) = \sqrt{x + 1} - (x - 2)^3$. Provar que a equação $f(x) = g(x)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[3, 4]$ é equivalente a provar que a função h tem pelo menos um zero no intervalo $[3, 4]$.

A função h é contínua em $[3, 4]$, visto tratar-se da diferença entre duas funções contínuas neste intervalo (uma função irracional e uma função polinomial).

$$h(3) = \sqrt{3 + 1} - (3 - 2)^3 = 2 - 1 = 1$$

$$h(4) = \sqrt{4 + 1} - (4 - 2)^3 = \sqrt{5} - 8$$

Logo, $h(4) < 0 < h(3)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, pode concluir-se que a função h tem pelo menos um zero no intervalo $[3, 4]$, isto é, $\exists c \in [3, 4]: h(c) = 0$
 $\Leftrightarrow \exists c \in [3, 4]: f(c) - g(c) = 0$
 $\Leftrightarrow \exists c \in [3, 4]: f(c) = g(c)$.

25.

a) A função f é contínua em $]-\infty, 4[$, visto, neste intervalo, estar definida pelo quociente entre duas funções contínuas: uma que é uma função polinomial e outra que é uma função irracional.

A função f é contínua em $]4, +\infty[$, visto, neste intervalo, estar definida por uma função racional.

Em $x = 4$:

$$\begin{aligned} \bullet f(4) &= \frac{4^3 - 3 \times 4^2 - 6 \times 4 + 8}{4^2 + 4 - 2} = \\ &= \frac{64 - 48 - 24 + 8}{16 + 4 - 2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 2} = \\ &= \frac{4^3 - 3 \times 4^2 - 6 \times 4 + 8}{4^2 + 4 - 2} = 0 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{12 - 3x}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{x^2 - 4}{\sqrt{4-x}} \times \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-x}} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x-4)(x+4)\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-x}} = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \lim_{x \rightarrow 4^-} (-(x+4)\sqrt{4-x}) = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-8 \times 0) = 0
\end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4)$, então a função f é contínua em $x = 4$.

Conclui-se assim que a função f é contínua em $\mathbb{R}$.

- b)** Pela alínea anterior, a função f é contínua em $\mathbb{R}$; em particular, f é contínua em $[3, 5]$.

$$f(3) = \frac{3^2 - 16}{\sqrt{12 - 3 \times 3}} = \frac{-7}{\sqrt{3}} = -\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$f(5) = \frac{5^3 - 3 \times 5^2 - 6 \times 5 + 8}{5^2 + 5 - 2} = 1$$

Logo, $f(3) < -1 < f(5)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, pode concluir-se que $\exists c \in]3, 5[: f(c) = -1$.

- 26.** A função g é contínua em $[0, 1]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas (uma que é o produto de uma constante pela função f e outra constante).

$$g(0) = 2f(0) - f(1) = 2f(0) - 3f(0) = -f(0) > 0$$

$$g(1) = 2f(1) - f(1) = f(1) = 3f(0) < 0$$

Logo, $g(0)$ e $g(1)$ têm sinais contrários. Então, 0 é um valor intermédio.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que $\exists c \in]0, 1[: f(c) = 0$.

- 27.** Seja $g: [1, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = f(x-1) - f(\pi-x)$.

A função g é contínua em $[1, \pi]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas (ambas são a composta de f com uma função afim).

$$g(1) = f(0) - f(\pi-1) \neq 0$$

$$g(\pi) = f(\pi-1) - f(0) \neq 0$$

Logo, $g(1)$ e $g(\pi)$ têm sinais contrários. Então, 0 é um valor intermédio.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists c \in]1, \pi[: g(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]1, \pi[: f(c-1) - f(\pi-c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]1, \pi[: f(c-1) = f(\pi-c)$$

- 28.** Seja $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x) = f(x) - x.$$

A função g é contínua em $[0, 1]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas (a função f e a função identidade).

$$g(0) = f(0) - 0 = 1$$

$$g(1) = f(1) - 1 = -1$$

Logo, $g(1) < 0 < g(0)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy:

$$\exists c \in]0, 1[: g(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in]0, 1[: f(c) - c = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]0, 1[: f(c) = c$$

29.

- a)** Seja h a função definida por $h(x) = f(x) - g(x)$.

A função h é contínua em $[a, b]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas.

$$h(a) = f(a) - g(a) < 0, \text{ uma vez que}$$

$$g(a) > f(a) \Leftrightarrow g(a) - f(a) > 0 \Leftrightarrow f(a) - g(a) < 0.$$

$$h(b) = f(b) - g(b) > 0, \text{ uma vez que}$$

$$f(b) > g(b) \Leftrightarrow f(b) - g(b) > 0.$$

Logo, $h(a) < 0 < h(b)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy:

$$\exists c \in]a, b[: h(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in]a, b[: f(c) - g(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]a, b[: f(c) = g(c)$$

- b)** Seja h a função definida por $h(x) = f(x) - g(x)$.

A função h é contínua em $[a, b]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas.

$$h(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(b)$$

$$h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - f(a)$$

Como $h(a)$ e $h(b)$ têm sinais contrários, pois $f(a) \neq f(b)$, vem que 0 pertence ao intervalo de extremos $h(a)$ e $h(b)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy:

$$\exists c \in]a, b[: h(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in]a, b[: f(c) - g(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]a, b[: f(c) = g(c)$$

30.

- a)** Seja, por exemplo, f a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. A função f é contínua em $]0, 1]$, mas não tem máximo.

- b)** Seja, por exemplo, f a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

definida por $f(x) = -\frac{1}{x}$. A função f é contínua em $]0, 1]$, mas não tem mínimo.

- c)** Seja, por exemplo, f a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

definida por $f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. A função f é contínua em $]0, 1]$, mas não tem máximo nem mínimo.

31.

a) A função f é contínua em $]1, +\infty[$, por estar definida, neste intervalo, por uma função afim.

A função f é contínua em $] -\infty, 1[$, por estar definida, neste intervalo, por uma função polinomial.

Para $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x^3 + x - 2) = -2 + 1 - 2 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x + 1) = -2 + 1 = -1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, então a função f não é contínua em $x = 1$.

Assim, f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) De acordo com a alínea anterior, a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; em particular, f é contínua em $[-2, -1]$.

$$f(-2) = -2 \times (-2)^3 - 2 - 2 = 12$$

$$f(-1) = -2 \times (-1)^3 - 1 - 2 = -1$$

Logo, $f(-1) < 0 < f(-2)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, pode concluir-se que existe pelo menos um zero de f no intervalo $[-2, -1]$.

c) De acordo com a alínea a), a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; em particular, f é contínua em $[-1, 0]$.

Então, pode concluir-se, pelo teorema de Weierstrass, que a função f admite, neste intervalo, máximo e mínimo absolutos.

d) Em $[-1, 0]$, $f(x) = -2x^3 + x - 2$.

$$f'(x) = -6x^2 + 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{6}}{6} \vee x = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

x	-1		$-\frac{\sqrt{6}}{6}$		0
Sinal de f'	-	-	0	+	+
Variação de f	-1 Máx.	$\searrow$	Mín. $-2 - \frac{\sqrt{6}}{9}$	$\nearrow$	-2

Conclui-se assim que no intervalo $[-1, 0]$ o mínimo de f é $-2 - \frac{\sqrt{6}}{9}$ e o máximo é -1 .

Unidade 3 - Derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão

Páginas 29 a 59

32.

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x - 12}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 6)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 6) = 14 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

	1	0	2	-12
2		2	4	12
	1	2	6	0

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{x}{x+2} - (-1)}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+x+2}{(x+2)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x+2} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

33. Opção (D)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3 \Leftrightarrow f'(1) = 3, \text{ logo a afirmação (B) é verdadeira.}$$

A afirmação (A) é verdadeira, já que se f tem derivada finita em $x = 1$, então f é contínua em $x = 1$.

A afirmação (C) é verdadeira porque

$$f'(1) = 3 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3.$$

A afirmação (D) é falsa porque a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 1$ tem declive 3, logo não é uma reta horizontal.

34.

$$\begin{aligned} \text{a)} f'(x) &= ((x^2 - 5x)^3(2x + 1))' = \\ &= ((x^2 - 5x)^3)'(2x + 1) + (x^2 - 5x)^3(2x + 1)' = \\ &= 3(x^2 - 5x)^2(x^2 - 5x)'(2x + 1) + (x^2 - 5x)^3 \times 2 = \\ &= 3(x^2 - 5x)^2(2x - 5)(2x + 1) + 2(x^2 - 5x)^3 = \\ &= (x^2 - 5x)^2[3(2x - 5)(2x + 1) + 2(x^2 - 5x)] = \\ &= [x(x - 5)]^2[3(4x^2 + 2x - 10x - 5) + 2x^2 - 10x] = \\ &= (x - 5)^2x^2(12x^2 - 24x - 15 + 2x^2 - 10x) = \\ &= (x - 5)^2x^2(14x^2 - 34x - 15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} f'(x) &= \left(\frac{2x-3}{5-x} \right)' = \\ &= \frac{(2x-3)'(5-x) - (2x-3)(5-x)'}{(5-x)^2} = \\ &= \frac{2(5-x) - (2x-3)(-1)}{(5-x)^2} = \\ &= \frac{10-2x+2x-3}{(5-x)^2} = \\ &= \frac{7}{(5-x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} f'(x) &= (\sqrt[3]{2x+4})' = \\ &= \frac{1}{3} (2x+4)^{-\frac{2}{3}} \times 2 = \\ &= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+4)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} f'(x) &= \left(\left(\frac{1-x^2}{2-x} \right)^3 \right)' = \\ &= 3 \left(\frac{1-x^2}{2-x} \right)^2 \left(\frac{1-x^2}{2-x} \right)' = \\ &= 3 \left(\frac{1-x^2}{2-x} \right)^2 \frac{(1-x^2)'(2-x) - (1-x^2)(2-x)'}{(2-x)^2} = \\ &= 3 \left(\frac{1-x^2}{2-x} \right)^2 \frac{(-2x)(2-x) - (1-x^2)(-1)}{(2-x)^2} = \\ &= 3 \left(\frac{1-x^2}{2-x} \right)^2 \frac{-4x+2x^2+1-x^2}{(2-x)^2} = \\ &= 3 \left(\frac{1-x^2}{2-x} \right)^2 \frac{x^2-4x+1}{(2-x)^2} = \\ &= \frac{3(1-x^2)^2(x^2-4x+1)}{(2-x)^4} \end{aligned}$$

35.

$$\text{a)} \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{90-10}{2} = 40$$

A velocidade média entre os instantes 1 e 3 é 40 m/s.

b) Dado que f é contínua em $[1, 3]$ e diferenciável em $]1, 3[$, então, pelo teorema de Lagrange, existe pelo menos um $c \in]1, 3[$ tal que $f'(c) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1}$, isto é, tal que $f'(c) = 40$, ou seja, existe pelo menos um instante entre 1 e 3 em que a velocidade instantânea do corpo é igual a 40 m/s.

36. Função $f \rightarrow$ gráfico f' é o gráfico I

Função $g \rightarrow$ gráfico g' é o gráfico IV

Função $h \rightarrow$ gráfico h' é o gráfico III

Função $j \rightarrow$ gráfico j' é o gráfico II

37.

$$\text{a)} f(-1) = 3 \times (-1)^4 - 20 \times (-1)^3 + 36 \times (-1)^2 + 2 = 61$$

Logo, $A(-1, 61)$.

$$f(2) = 3 \times 2^4 - 20 \times 2^3 + 36 \times 2^2 + 2 = 34$$

Logo, $B(2, 34)$.

Seja m_s o declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos A e B.

$$m_s = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{34-61}{2-(-1)} = -9$$

b) Dado que f é contínua em $[-1, 2]$ e diferenciável em $] -1, 2[$, então, pelo teorema de Lagrange, existe pelo menos um $c \in] -1, 2[$ tal que $f'(c) = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}$, isto é, $f'(c) = -9$.

$$\begin{aligned} \text{c)} f'(x) &= (3x^4 - 20x^3 + 36x^2 + 2)' = \\ &= 12x^3 - 60x^2 + 72x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 12x^3 - 60x^2 + 72x = 0 \\ &\Leftrightarrow 12x(x^2 - 5x + 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow 12x = 0 \vee x^2 - 5x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = 3 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0		2		3	$+\infty$
x	-	0	+	+	+	+	+
$x^2 - 4x + 6$	+	+	+	0	-	0	+
Sinal de f'	-	0	+	0	-	0	+
Variação de f	$\searrow$	Mín. 2	$\nearrow$	Máx. 34	$\searrow$	Mín. 29	$\nearrow$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $[2, 3]$ e é estritamente crescente em $[0, 2]$ e em $[3, +\infty[$; 2 é mínimo absoluto para $x = 0$ e 34 é máximo relativo para $x = 2$, 29 é mínimo relativo para $x = 3$.

38.

$$\begin{aligned} \text{a)} f'(x) &= (2x^5 + 3x^2 - 4)' = 10x^4 + 6x \\ f''(x) &= (10x^4 + 6x)' = 40x^3 + 6 \end{aligned}$$

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow 40x^3 + 6$$

$$\begin{aligned} \text{b)} f'''(x) &= (40x^3 + 6)' = 120x^2 \\ f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 120x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ x = 0 &\text{ é o único zero de } f'''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad f^{(IV)}(x) &= (120x^2)' = 240x \\ f^{(V)}(x) &= 240 \\ f^{(VI)}(x) &= 0 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

39.

- a) Como se observa pelo gráfico apresentado, f' é uma função negativa em todo o seu domínio, logo f é estritamente decrescente, pelo que, dos valores de x assinalados, é em x_5 que f assume o menor valor.
- b) Pelo mesmo motivo da alínea anterior, é em x_1 que f assume o maior valor.
- c) Por observação do gráfico de f , conclui-se que, dos valores assinalados, é em x_5 que f atinge o menor valor.
- d) Pelo mesmo motivo da alínea anterior, dos valores assinalados, é em x_2 que f assume o maior valor.
- e) Como o gráfico apresentado diz respeito à função f , tem-se que os declives das retas tangentes ao gráfico de f nos pontos de abscissa x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 correspondem aos valores de $f'(x_1), f'(x_2), f'(x_3), f'(x_4)$ e $f'(x_5)$.
Assim, e como em x_3 e em x_5 a reta tangente ao gráfico tem declive igual e negativo, conclui-se que é em x_3 e em x_5 que f'' assume o menor valor.
- f) Pelo mesmo motivo da alínea anterior, conclui-se que, dos valores assinalados, é apenas em x_1 que a reta tangente ao gráfico de f tem declive positivo, logo é em x_1 que f'' assume o maior valor.

40. Opção (A)

Por observação da representação gráfica de g' , sabe-se que:

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
Variação de g'	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Completando a tabela anterior, e sendo g' uma função contínua, terá de se verificar:

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
Sinal de g''	+	0	-	0	+
Variação de g'	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Das opções apresentadas, apenas a representação gráfica que se encontra na opção (A) verifica todas as condições.

41. Opção (D)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 - x^2 \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
Sinal de f'	-	0	+	0	-
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo nos intervalos $]-\infty, -2[$ e $]2, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-2, 2[$, apresentando dois pontos de inflexão nos pontos de abscissa -2 e 2 .

Das opções apresentadas, apenas a representação gráfica que se encontra na opção (D) verifica estas características.

42. Opção (C)

$$\begin{aligned} f'(x) &= x + 3 \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
Sinal de f''	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	P.I.	$\cup$

Assim, -3 é a abscissa do ponto de inflexão do gráfico de f .

43.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(x) &= 2x^3 + 6x^2 - 5x + 1 & D_f &= \mathbb{R} \\ f'(x) &= 6x^2 + 12x - 5 & D_{f'} &= \mathbb{R} \\ f''(x) &= 12x + 12 & D_{f''} &= \mathbb{R} \\ f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 12x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Sinal de f''	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	P.I.	$\cup$

$$f(-1) = 10$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e voltada para cima em $]-1, +\infty[$. Tem um ponto de inflexão de coordenadas $(-1, 10)$.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad g(x) &= x + \frac{4}{x} & D_g &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ g'(x) &= 1 + \frac{4' \times x - 4 \times x'}{x^2} = 1 - \frac{4}{x^2} & D_{g'} &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

$$g''(x) = \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)' = 0 - \frac{4' \times x^2 - 4 \times (x^2)'}{(x^2)^2} =$$

$$= -\frac{0 - 8x}{x^4} = \frac{8}{x^3} \quad D_{g'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{8}{x^3}} = 0$$

condição impossível, logo g'' não tem zeros.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de g''	-	n.d.	+
Sentido das concavidades do gráfico de g	$\cap$	n.d.	$\cup$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e voltada para cima em $]0, +\infty[$.
Não existem pontos de inflexão.

44. Opção (B)

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3(x^2-4) \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) (x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \vee \underbrace{x^2 + \frac{1}{2} = 0}_{\text{condição impossível em } \mathbb{R}}$$

$$\vee (x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = -2 \vee x = -1$$

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$(x-1)^3$	-	-	-	0	+	+
$x^2 - 4$	+	0	-	-	0	+
$x^2 + \frac{1}{2}$	+	+	+	+	+	+
$(x+1)^2$	+	+	0	+	+	+
Sinal de f'	-	0	+	0	-	0
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	P.I.	$\cup$	$\cup$	P.I.	$\cap$

O gráfico de f tem 3 pontos de inflexão.

45.

$$\text{a) } Q'(t) = \left(1 - \frac{3t}{t^2 + 4}\right)' =$$

$$= -\frac{(3t)'(t^2 + 4) - 3t(t^2 + 4)'}{(t^2 + 4)^2} =$$

$$= -\frac{3t^2 + 12 - 6t^2}{(t^2 + 4)^2} =$$

$$= \frac{3t^2 - 12}{(t^2 + 4)^2}$$

$$\text{Logo, } Q'(3) = \frac{3 \times 3^2 - 12}{(3^2 + 4)^2} = \frac{15}{169} \approx 0,09.$$

Três dias após a descoberta do surto, o número de pessoas contagiadas está a aumentar aproximadamente à taxa de 9 pessoas por dia.

$$\text{b) } Q''(t) = \left(\frac{3t^2 - 12}{(t^2 + 4)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(3t^2 - 12)'(t^2 + 4)^2 - (3t^2 - 12)((t^2 + 4)')}{(t^2 + 4)^4} =$$

$$= \frac{6t(t^2 + 4)^2 - (3t^2 - 12)2(t^2 + 4)2t}{(t^2 + 4)^4} =$$

$$= \frac{(t^2 + 4)[6t(t^2 + 4) - 4t(3t^2 - 12)]}{(t^2 + 4)^4} =$$

$$= \frac{2t[3(t^2 + 4) - 2(3t^2 - 12)]}{(t^2 + 4)^3} =$$

$$= \frac{3t(3t^2 + 12 - 6t^2 + 24)}{(t^2 + 4)^3} =$$

$$= \frac{3t(-3t^2 + 36)}{(t^2 + 4)^3} =$$

$$Q''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3t(-3t^2 + 36)}{(t^2 + 4)^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t(-3t^2 + 36) = 0 \wedge \underbrace{(t^2 + 4)^3 \neq 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow 3t = 0 \vee -3t^2 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 2\sqrt{3} \vee t = -2\sqrt{3}$$

Como $t \geq 0$, então, $t = 0 \vee t = 2\sqrt{3}$.

t	0	$2\sqrt{3}$	$+\infty$
3t	0	+	+
$(-3t^2 + 36)$	+	0	-
$(t^2 + 4)^3$	+	+	+
Sinal de Q''	0	+	0
Variação de Q'	Mín.	$\nearrow$	Máx.

O máximo de Q' é atingido quando $t = 2\sqrt{3}$. Como $2\sqrt{3} \approx 3,5$, conclui-se que o momento em que a doença está a alastrar-se mais rapidamente é 3,5 dias, aproximadamente, após o seu aparecimento.

46.

a) Seja P a quantidade de vedação usada, em metros, em função do comprimento e da largura do parque:

$$P = x + x + y = 2x + y$$

Como Área = 5000, vem que:

$$x \times y = 5000 \Leftrightarrow y = \frac{5000}{x}$$

$$\text{Logo, } P(x) = 2x + \frac{5000}{x}, \text{ com } x \in]0, +\infty[.$$

$$P'(x) = \left(2x + \frac{5000}{x}\right)' = 2 + 5000 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 2 - \frac{5000}{x^2} = \frac{2x^2 - 5000}{x^2}$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5000 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2500$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2500}$$

$$\Leftrightarrow x = 50 \wedge x = -50 \notin D_P$$

x	0		50	$+\infty$
Sinal de P'	n.d.	-	0	+
Variação de P	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

A quantidade mínima de vedação a ser utilizada verifica-se para $x = 50$, logo a menor quantidade de cerca que se pode gastar é $P(50) = 200$ metros.

- b) A quantidade mínima de vedação a ser utilizada verifica-se para $x = 50$, logo o parque terá $100 \left(y = \frac{5000}{50}\right)$ metros de comprimento por 50 metros de largura.

47. Sejam x e y , respetivamente, o comprimento e a altura de um retângulo.

Tem-se que:

$$P = 60 \Leftrightarrow 2x + 2y = 60 \Leftrightarrow x + y = 30 \Leftrightarrow y = 30 - x$$

A área de um destes retângulos é dada por:

$$A(x) = x \times y \Leftrightarrow A(x) = x(30 - x) \Leftrightarrow 30x - x^2$$

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 30$$

Logo, $x \in]0, 30[$.

$$A'(x) = 30 - 2x$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 30 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 15$$

x	0		15		30
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de A	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

A área máxima obtém-se quando $x = 15$ e $y = 30 - 15 = 15$, ou seja, quando o comprimento e a largura são iguais a 15 cm.

48. $x \in]0, 3000[$

A distância da central ao ponto P é dada, em função de x , por $3000 - x$.

A distância do ponto P à fábrica é dada, em função de x , por:

$$\sqrt{x^2 + 900^2} = \sqrt{x^2 + 810\,000}$$

Seja C a função que a cada x associa o custo para fazer passar o cabo entre a central e a fábrica.

$$C(x) = 4 \times (3000 - x) + 5 \times \sqrt{x^2 + 810\,000}$$

$$C'(x) = -4 + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 810\,000}}$$

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow -4 + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 810\,000}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 810\,000}} = 4$$

$$\Leftrightarrow 5x = 4\sqrt{x^2 + 810\,000} \quad (\sqrt{x^2 + 810\,000} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow 25x^2 = 16(x^2 + 810\,000)$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 - 16x^2 = 16 \times 810\,000$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1\,440\,000$$

$$\Leftrightarrow x = 1200 \vee x = -1200$$

Como $x > 0$, então $x = 1200$.

x	0		1200		3000
Sinal de C'	n.d.	-	0	+	n.d.
Variação de C	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	n.d.

$$C(1200) = 4 \times (3000 - 1200) + 5 \times \sqrt{1200^2 + 810\,000} = 14\,700$$

O custo mínimo é de 14 700 euros e, para tal, o cabo deve percorrer em linha reta e por terra 1800 metros, desde a central até ao ponto P marcado na figura, e só depois passar debaixo de água até à fábrica.

49. Sejam r o raio e h a altura do cilindro.

$$V_0 = A_b \times h \Leftrightarrow V_0 = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{V_0}{\pi r^2}$$

$$A_L = P_b \times h = 2\pi r h = 2\pi r \times \frac{V_0}{\pi r^2} = \frac{2V_0}{r}$$

Seja C a função que a cada r associa o custo de produção do cilindro.

$$C(r) = 3 \times 2\pi r^2 + 2 \times \frac{2V_0}{r} = 6\pi r^2 + \frac{4V_0}{r}$$

$$C'(r) = 12\pi r - \frac{4V_0}{r^2} = \frac{12\pi r^3 - 4V_0}{r^2}$$

$$C'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{12\pi r^3 - 4V_0}{r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 12\pi r^3 - 4V_0 = 0 \wedge r^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{3\pi}}$$

x	0		$\sqrt[3]{\frac{V_0}{3\pi}}$		$+\infty$
Sinal de C'	n.d.	-	0	+	
Variação de C	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	

O custo de produção é mínimo quando:

$$r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{3\pi}} \Leftrightarrow r^3 = \frac{V_0}{3\pi}$$

$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{\pi r^2 h}{3\pi}$$

$$\Leftrightarrow 3r^3 = r^2 h$$

$$\Leftrightarrow h = 3rh$$

Então, o custo de produção é minimizado se a altura do cilindro for três vezes superior ao raio da base.

50. Sejam c o comprimento da janela e l a sua largura. Pela semelhança de triângulos, tem-se que:

$$\frac{\frac{c}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{b-l}{b} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{b-l}{b} \Leftrightarrow c = \frac{ab-al}{2}$$

$$l \in]0, b[$$

Seja A a função que a cada l associa a área da janela.

$$A(l) = \frac{c \times l}{2} = \frac{\frac{ab-al}{b} \times l}{2} = \frac{abl-al^2}{2b}$$

$$A'(l) = \frac{ab-2al}{2b}$$

$$A'(l) = 0 \Leftrightarrow \frac{ab-2al}{2b} = 0 \Leftrightarrow ab-2al = 0 \Leftrightarrow l = \frac{b}{2}$$

l	0		$\frac{b}{2}$		b
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de A	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

A área máxima obtém-se para $l = \frac{b}{2}$.

Se $l = \frac{b}{2}$, então

$$c = \frac{ab-al}{2b} = \frac{ab-a \times \frac{b}{2}}{2b} = \frac{2ab-ab}{4b} = \frac{a}{2}$$

Assim, a área máxima obtém-se com comprimento $\frac{a}{2}$ e largura $\frac{b}{2}$.

51.

a) $f(x) = \frac{2}{x^2+3}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \underbrace{x^2+3 \neq 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}}\} = \mathbb{R}$$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2+3} = 0$, que é uma condição impossível em $\mathbb{R}$. Logo, a função f não tem zeros.

$$f'(x) = \left(\frac{2}{x^2+3}\right)' = \frac{2'(x^2+3) - 2(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \frac{-4x}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{(x^2+3)^2} = 0 \Leftrightarrow -4x = 0 \wedge$$

$$\wedge \underbrace{(x^2+3)^2 \neq 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}} \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	-
Variação de f	$\nearrow$	Máx. $\frac{2}{3}$	$\searrow$

f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$; $\frac{2}{3}$ é máximo relativo (absoluto) em 0.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{-4x}{(x^2+3)^2}\right)' = \\ &= \frac{(-4x)'(x^2+3)^2 - (-4x)((x^2+3)^2)'}{(x^2+3)^4} = \\ &= \frac{-4(x^2+3)^2 + 4x \times 2(x^2+3) \times 2x}{(x^2+3)^4} = \\ &= \frac{4(x^2+3)[-(x^2+3) + 4x^2]}{(x^2+3)^4} = \\ &= \frac{4(3x^2-3)}{(x^2+3)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{4(3x^2-3)}{(x^2+3)^3} = 0 \\ &\Leftrightarrow 4(3x^2-3) = 0 \wedge \underbrace{(x^2+3)^3 \neq 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]-1, 1[$.

Os pontos de coordenadas $(-1, f(-1)) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ e

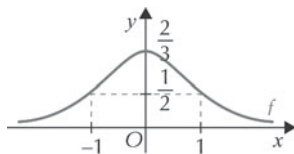
$(1, f(1)) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ são pontos de inflexão do gráfico de f .

f é contínua no seu domínio, $\mathbb{R}$, por se tratar de uma função racional. Como tal, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2+3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2+3} = 0$$

Conclui-se assim que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.



b) $g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$g(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = g(x), \forall x \in D_g$, logo g é

uma função par, ou seja, o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy .

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \wedge x \in D_g$

$\Leftrightarrow x = 0 \wedge x \in D_g$

g tem um único zero: $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

Como a função é par, pode concluir-se que a reta de equação $x = -1$ é também assíntota vertical ao gráfico de g .

Não há mais assíntotas verticais, pois verifica-se que a função é contínua no seu domínio.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, conclui-se que a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de g , para $x \rightarrow +\infty$ e, novamente considerando o facto de g ser par, conclui-se que para $x \rightarrow -\infty$ a assíntota é a mesma.

$g'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(x^2)' \times (x^2 - 1) - x^2 \times (x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} =$
 $= \frac{2x \times (x^2 - 1) - x^2 \times 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$

$D_{g'} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \wedge x \in D_{g'}$

$\Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Sinal de g'	+	n.d.	+	+	-	n.d.	-
Variação de g	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$

$g(0) = \frac{0^2}{0^2 - 1} = 0$

g é estritamente crescente em $]-\infty, -1[$ e em $]-1, 0[$ e é estritamente decrescente em $[0, 1[$ e em $]1, +\infty[$; 0 é máximo relativo para $x = 0$.

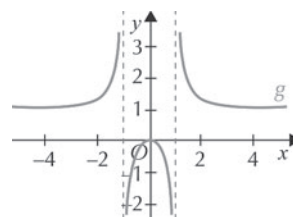
$g''(x) = \left(\frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \right)' =$
 $= \frac{(-2x)' \times (x^2 - 1)^2 - (-2x) \times ((x^2 - 1)^2)'}{(x^2 - 1)^4} =$
 $= \frac{-2(x^2 - 1)^2 + 2x \times 2(x^2 - 1) \times 2x}{(x^2 - 1)^4} =$
 $= \frac{(x^2 - 1)[-2(x^2 - 1) + 8x^2]}{(x^2 - 1)^4} =$
 $= \frac{(-2x^2 + 2 + 8x^2)}{(x^2 - 1)^3} =$
 $= \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{6x^2 + 2 = 0}_{\text{condição impossível em } \mathbb{R}} \wedge x \in D_{g'}$

condição impossível em $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$6x^2 + 2$	+	n.d.	+	n.d.	+
$(x^2 - 1)^3$	+	n.d.	-	n.d.	+
Sinal de g''	+	n.d.	-	n.d.	+
Sentido das concavidades do gráfico de g	$\cup$	n.d.	$\cap$	n.d.	$\cup$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$ e voltada para baixo em $]-1, 1[$.



c) $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x + 1}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 1}{2x + 1} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0 \wedge 2x + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \wedge x \neq -\frac{1}{2}$

condição impossível em $\mathbb{R}$

Logo, a função h não tem zeros.

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \left(\frac{x^2 + x + 1}{2x + 1} \right)' = \\
 &= \frac{(x^2 + x + 1)'(2x + 1) - (x^2 + x + 1)(2x + 1)'}{(2x + 1)^2} = \\
 &= \frac{(2x + 1)(2x + 1) - (x^2 + x + 1)2}{(2x + 1)^2} = \\
 &= \frac{4x^2 + 4x + 1 - 2x^2 - 2x - 2}{(2x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - 1}{(2x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 2x - 1}{(2x + 1)^2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0 \wedge (2x + 1)^2 \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{4} \wedge x \neq -\frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \vee x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$		$-\frac{1}{2}$
Sinal de h'	+	0	-	n.d.
Variação de h	$\nearrow$	Máx. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	n.d.

x		$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
Sinal de h'	-	0	+
Variação de h	$\searrow$	Mín. $\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$

h é estritamente crescente em $\left] -\infty, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ e em $\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty \right[$ e é estritamente decrescente em $\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right[$ e em $\left] -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$.
 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ é máximo relativo (absoluto) em $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ é mínimo relativo (absoluto) em $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned}
 h''(x) &= \left(\frac{2x^2 + 2x - 1}{(2x + 1)^2} \right)' = \\
 &= \frac{(2x^2 + 2x - 1)'(2x + 1)^2 - (2x^2 + 2x - 1)((2x + 1)^2)'}{(2x + 1)^4} = \\
 &= \frac{(4x + 2)(2x + 1)^2 - (2x^2 + 2x - 1)2(2x + 1)}{(2x + 1)^4} = \\
 &= \frac{(2x + 1)[(4x + 2)(2x + 1) - 4(2x^2 + 2x - 1)]}{(2x + 1)^4} = \\
 &= \frac{6}{(2x + 1)^3}
 \end{aligned}$$

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{(2x + 1)^3} = 0$, que é uma condição impossível em $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
Sinal de h''	-	n.d.	+
Sentido das concavidades do gráfico de h	$\cap$	n.d.	$\cup$

O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$; não tem pontos de inflexão.

h é contínua no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$, por se tratar de uma função racional. Assim, só a reta de equação $x = -\frac{1}{2}$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{x^2 + x + 1}{2x + 1} = \frac{\frac{3}{4}}{0^+} = +\infty$$

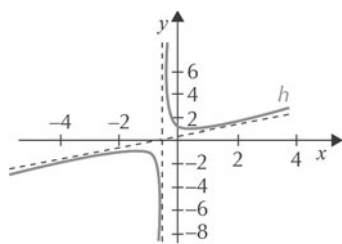
$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{x^2 + x + 1}{2x + 1} = \frac{\frac{3}{4}}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = -\frac{1}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \\
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(h(x) - \frac{1}{2}x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{2x + 1} - \frac{1}{2}x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{4x + 2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{4 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{4} \\
 m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(h(x) - \frac{1}{2}x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{2x + 1} - \frac{1}{2}x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{4x + 2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{4 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Conclui-se assim que a reta de equação $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.



52.

a) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1+x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \wedge 1+x \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$$

1 é o único zero da função.

$$f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)' = \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{(1+x)^2} = 0, \text{ que é uma condição impossível em } \mathbb{R}.$$

$$f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1[$ e em $]-1, +\infty[$.

$$f''(x) = \left(-\frac{2}{(1+x)^2} \right)' = \frac{2 \times 2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{4}{(1+x)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{(1+x)^3} = 0, \text{ que é uma condição impossível em } \mathbb{R}.$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Sinal de f'	-	n.d.	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	n.d.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-1, +\infty[$.

f é contínua no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, por se tratar de uma função racional.

Assim, só a reta de equação $x = -1$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

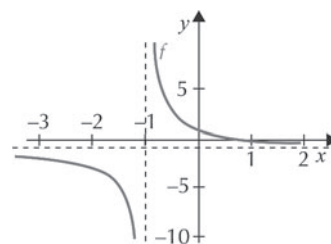
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = -1$$

Conclui-se assim que a reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.



b) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \wedge x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

0 é o único zero da função.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-1} \right)' = \frac{2x(x-1) + x^2 \times 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \wedge (x-1)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	-	n.d.	-	0	+
Variação de f	$\nearrow$	Máx. 0	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	Mín. 4	$\nearrow$

f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[0, 1[$ e em $]1, 2]$; 0 é máximo relativo para $x = 0$ e 4 é mínimo relativo para $x = 2$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x) \times 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)((2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x))}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x-1)^3} = 0$, que é uma condição impossível em $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Sinal de f'	-	n.d.	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	n.d.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 1[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]1, +\infty[$.

f é contínua no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, por se tratar de uma função racional.

Assim, só a reta de equação $x = 1$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

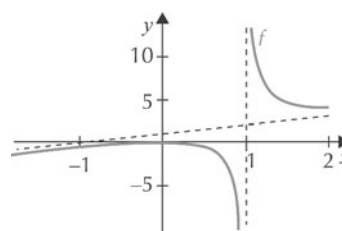
$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

Conclui-se assim que a reta de equação $y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.



c) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

0 é o único zero da função.

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 - 4} \right)' = \frac{(x^2 - 4) - x \times 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-x^2 - 4 = 0}_{\text{condição impossível em } \mathbb{R}} \wedge (x^2 - 4)^2 \neq 0$$

$$f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -2[$, em $]-2, 2[$ e em $[2, +\infty[$.

$$f'(x) = \left(\frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2} \right)' = \frac{-2x(x^2 - 4)^2 - (-x^2 - 4) \times 2(x^2 - 4)2x}{(x^2 - 4)^4} = \frac{(x^2 - 4)2x(-x^2 + 4 + 2(x^2 + 4))}{(x^2 - 4)^4} = \frac{2x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 12) = 0 \wedge$$

$$\wedge (x^2 - 4)^3 \neq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$2x(x^2 + 12)$	-	-	-	0	+	+	+
$(x^2 - 4)^3$	+	0	-	-	-	0	+
Sinal de f'	-	n.d.	+	0	-	n.d.	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$	n.d.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2[$ e em $]0, 2[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]0, 2[$ e em $]2, +\infty[$, tem um ponto de inflexão de coordenadas $(0, 0)$.

f é contínua no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, por se tratar de uma função racional.

Assim, só as retas de equação $x = -2$ e $x = 2$ são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

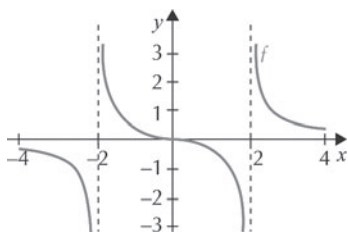
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

As retas de equação $x = -2$ e $x = 2$ são assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \frac{4}{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - \frac{4}{x}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Conclui-se assim que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.



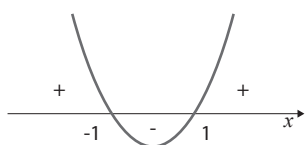
53.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

-1 e 1 são os únicos zeros da função.

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 - 1})' = \frac{1}{2} (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin D_f$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
Sinal de f'	-	n.d.	n.d.	+
Varição de f	$\searrow$	Máx. 0	Mín. 0	$\nearrow$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e é estritamente crescente em $[1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)' = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x \times \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{(\sqrt{x^2 - 1})^2} = \\ &= -\frac{1}{(\sqrt{x^2 - 1})^2} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{(\sqrt{x^2 - 1})^2} = 0$, que é uma equação impossível em $\mathbb{R}$.

$$f'(x) < 0, \forall x \in D_f$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e em $[1, +\infty[$.

f é contínua no seu domínio, $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, por se tratar da composta da função raiz quadrada com uma função polinomial.

Assim, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

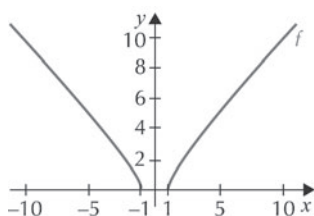
$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \right) = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-1} + x) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = 0
 \end{aligned}$$

Conclui-se assim que as retas de equação $y = x$ e $y = -x$ são assíntotas oblíquas ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$, respetivamente.



b) $f(x) = \frac{|x+3|}{2x+1}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{|x+3|}{2x+1} = 0 \\
 &\Leftrightarrow |x+3| = 0 \wedge 2x+1 \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow x = -3
 \end{aligned}$$

-3 é o único zero da função.

$$f(x) = \frac{|x+3|}{2x+1} = \begin{cases} \frac{x+3}{2x+1} & \text{se } x \geq -3 \\ \frac{-x-3}{2x+1} & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

Se $x > -3$:

$$f'(x) = \left(\frac{x+3}{2x+1} \right)' = \frac{2x+1 - (x+3) \times 2}{(2x+1)^2} = \frac{-5}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-5}{(2x+1)^2} = 0, \text{ que é uma condição impossível em } \mathbb{R}.$$

$$f'(x) < 0, \forall x \in]-3, +\infty[\setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

Se $x < -3$:

$$f'(x) = \left(\frac{-x-3}{2x+1} \right)' = \frac{-(2x+1) - (-x-3) \times 2}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{(2x+1)^2} = 0, \text{ que é uma condição impossível em } \mathbb{R}.$$

$$f'(x) > 0, \forall x \in]-\infty, -3[$$

Se $x = -3$, tem-se que $f'(-3^+) \neq f'(-3^-)$, pelo que não existe $f'(-3)$.

x	$-\infty$	-3		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
Sinal de f'	+	n.d.	-	n.d.	-
Variação de f	$\nearrow$	Máx. 0	$\searrow$	n.d.	$\searrow$

f é estritamente crescente em $]-\infty, -3[$ e é estritamente decrescente em $\left[-3, -\frac{1}{2}\right[$ e em $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$; 0 é máximo relativo para $x = -3$.

Se $x > -3$:

$$f''(x) = \left(\frac{-5}{(2x+1)^2} \right)' = \frac{5 \times 2(2x+1) \times 2}{(2x+1)^4} = \frac{20}{(2x+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{20}{(2x+1)^3} = 0, \text{ que é uma condição impossível em } \mathbb{R}.$$

Se $x < -3$:

$$f''(x) = \left(\frac{5}{(2x+1)^2} \right)' = \frac{-5 \times 2(2x+1) \times 2}{(2x+1)^4} = -\frac{20}{(2x+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{20}{(2x+1)^3} = 0, \text{ que é uma condição impossível em } \mathbb{R}.$$

$$f''(x) > 0, \forall x \in]-\infty, -3[$$

x	$-\infty$	-3		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
Sinal de f''	+	n.d.	-	n.d.	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cup$	P.I.	$\cap$	n.d.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-3, -\frac{1}{2}\right[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -3[$ e em $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

f é contínua no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas.

Assim, só a reta de equação $x = -\frac{1}{2}$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{|x+3|}{2x+1} = \frac{\frac{5}{2}}{0^+} = +\infty$$

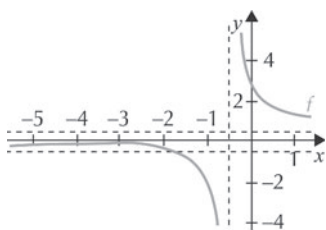
$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{|x+3|}{2x+1} = \frac{\frac{5}{2}}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = -\frac{1}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-3}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1-\frac{3}{x}}{2-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}$$

Conclui-se assim que as retas de equação $y = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{1}{2}$ são assíntotas oblíquas ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$, respetivamente.



54.

a) $t.m.v._{[0,3]} = \frac{P(3)-P(0)}{3-0} = \frac{23-5}{3} = 6$

A velocidade média do ponto entre os instantes $t = 0$ e $t = 3$ é 6 cm/s.

b) $P'(t) = 6t^2 - 8t$

$$P'(3) = 6 \times 9 - 8 \times 3 = 30$$

A velocidade no instante $t = 3$ é igual a 30 cm/s.

c) $\frac{P'(3)-P'(2)}{3-2} = \frac{30-8}{1} = 22$

A aceleração média entre os instantes $t = 2$ e $t = 3$ é 22 cm/s².

d) $P''(t) = 12t - 8$

$$P''(t) = 0 \Leftrightarrow 12t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

t	0		$\frac{2}{3}$		60
Sinal de P''	-	-	0	+	+
Variação de P'	Máx.	↘	Mín.	↗	Máx.

A velocidade diminui no intervalo de tempo $\left]0, \frac{2}{3}\right[$ e aumenta no intervalo de tempo $\left]\frac{2}{3}, 60\right[$; atinge a velocidade mínima em $t = \frac{2}{3}$ e, nesse instante, a aceleração é igual a 0 cm/s².

55.

a) $h(t) = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 120t = 0$
 $\Leftrightarrow t(-4,9t + 120) = 0$
 $\Leftrightarrow t = 0 \vee -4,9t + 120 = 0$
 $\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{120}{4,9}$

Como $\frac{120}{4,9} \approx 24,5$, então o projétil atingiu o solo aos 24,5 segundos, aproximadamente.

$$h'(t) = -9,8t + 120$$

$$h'\left(\frac{120}{4,9}\right) = -120$$

A velocidade com que o projétil atinge o solo é -120 m/s.

b) $h'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 120 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{120}{9,8}$

t	0		$\frac{120}{9,8}$		$\frac{120}{4,9}$
Sinal de h'	+	+	0	-	-
Variação de h	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.

$$h\left(\frac{120}{9,8}\right) \approx 734,69$$

A altura máxima alcançada pelo projétil é 734,69 m.

c) $\frac{h'(4)-h'(2)}{4-2} = \frac{80,8-100,4}{2} = -9,8$

A aceleração média entre os instantes $t = 2$ e $t = 4$ é de -9,8 m/s².

d) $a(t) = h''(t) = -9,8$

Em qualquer instante a aceleração é de -9,8 m/s².

56.

a) Seja h a função de domínio $\mathbb{R}_0^+$ definida por

$$h(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - \frac{3}{x^2 + 3}$$

A função h é contínua em $[0, 1]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas neste intervalo.

$$h(0) = 0 - \frac{3}{3} = -1$$

$$h(1) = 1 - \frac{3}{1+3} = \frac{1}{4}$$

Assim, $h(0) < 0 < h(1)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$$\exists c \in]0, 1[: h(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in]0, 1[: f(c) - g(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]0, 1[: f(c) = g(c)$$

Ou seja, a equação $f(x) = g(x)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, 1[$.

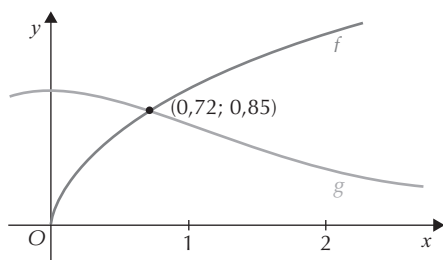
$$b) f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Logo, a função f é crescente em $\mathbb{R}_0^+$; em particular, f é crescente em $]0, 1[$.

$$g'(x) = \left(\frac{3}{x^2 + 3}\right)' = \frac{0 - 3 \times 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-6x}{(x^2 + 3)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Logo, a função g é decrescente em $\mathbb{R}^+$; em particular, g é crescente em $]0, 1[$.

- c) As funções f e g interseitam-se pelo menos num ponto do intervalo $]0, 1[$, de acordo com a alínea a). Além disso, f e g são estritamente monótonas em $]0, 1[$, como ficou provado na alínea anterior. Este facto permite garantir a unicidade do ponto de interseção dos gráficos em $]0, 1[$ e utilizar com confiança os resultados observados em intervalos contendo o ponto de interseção, tão pequenos quanto a capacidade da calculadora o permitir, já que, nesses intervalos, teremos os mesmos resultados de monotonia e comparação das duas funções que supusemos para o intervalo inicial.



Assim, $x \approx 0,72$.

57.

- a) A função f é contínua em $[-3, -2]$, por se tratar de uma função polinomial.

$$f(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 + 5 \times (-3) + 1 = 40$$

$$f(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 + 5 \times (-2) + 1 = -1$$

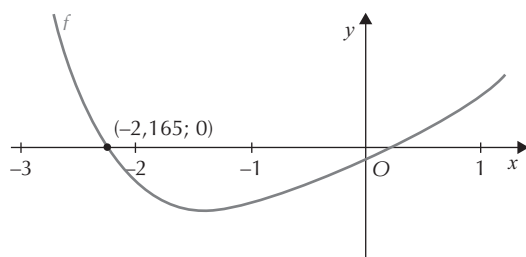
Assim, $f(-3) < 0 < f(-2)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$\exists c \in]-3, -2[: f(c) = 0$.

A proposição é verdadeira.

b)



$c \approx -2,165$

58.

$$a) D_g = \{x \in \mathbb{R}: x + 5 \geq 0\} = [-5, +\infty[$$

$$g'(x) = (2 - \sqrt{x+5})' = -\frac{1}{2}(x+5)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x+5}} < 0, \forall x \in [-5, +\infty[$$

Assim, a função g é decrescente em todo o seu domínio.

$$b) g(-1) = 2 - \sqrt{4} = 0$$

Logo, $A(-1, 0)$.

$$g(1) = 2 - \sqrt{6}$$

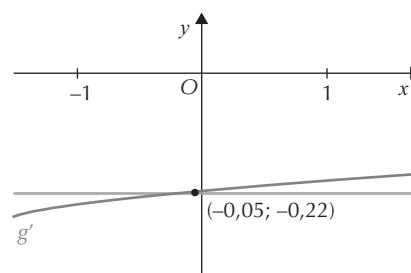
Logo, $B(1, 2 - \sqrt{6})$.

O declive da reta AB é:

$$\frac{0 - (2 - \sqrt{6})}{-1 - 1} = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}$$

Como a função g é contínua em $[-1, 1]$, por se tratar da soma de duas funções contínuas neste intervalo, e diferenciável em $] -1, 1[$, então o teorema de Lagrange permite concluir que existe pelo menos um ponto do gráfico de g no qual a tangente é paralela à secante AB . Fica assim justificada a existência de um ponto C do gráfico de g em que a reta tangente tem declive igual ao da reta AB .

$$c) g'(x) = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$$



$x \approx -0,05$

59.

$$a) D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$h'(x) = \left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)' = 6x - \frac{1}{x^2}$$

A função h' é contínua em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas neste intervalo.

$$h'\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -1$$

$$h'(1) = 6 \times 1 - \frac{1}{1} = 5$$

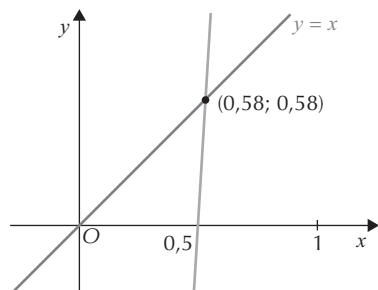
Assim, $h'\left(\frac{1}{2}\right) < 1 < h'(5)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$$\exists c \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[: h'(c) = 1.$$

Ou seja, existe pelo menos um ponto de abscissa pertencente ao intervalo $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$ para o qual a reta tangente ao gráfico de h é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

b)



$$x \approx 0,6$$

Aprende Fazendo

Páginas 64 a 75

1. Opção (A)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-1} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 3} h(x) > \frac{5}{2}.$$

Assim, o valor de $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$ pode ser 3.

2. Opção (C)

x	-6		-1		3
Variação de h	-2	↗	4	↘	-3

Nestas condições, e sendo a função contínua em todo o seu domínio, pode concluir-se que $h(x) = 1$ tem duas soluções: uma no intervalo $]-6, -1[$ e outra no intervalo $]-1, 3[$.

3. Opção (B)

O único gráfico que apresenta mudança de sinal no ponto de abscissa 2 é o gráfico da opção (B).

4. Opção (A)

x	0		b	$+\infty$
Sinal de f	0	-	0	+
Variação de f		↘	Mín.	↗

x	0		a	$+\infty$
Sinal de f'	-	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f		∩	P.I.	∪

5. Opção (A)

x	$-\infty$	$+\infty$
Sinal de h''	-	
Sentido das concavidades do gráfico de h	∩	

6. Opção (A)

Sabendo que a primeira derivada de g é negativa em $\mathbb{R}$ e a segunda derivada é positiva em $\mathbb{R}$, então trata-se de uma função estritamente decrescente cujo gráfico tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$.

7. Opção (C)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} (-f(x)) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x^2-4} \right) = \\ &\stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x-2+2}{x^2-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x}{x^2-4} = -\frac{2}{0^-} = +\infty \end{aligned}$$

Logo, como $\forall x \in \mathbb{R}^+, h(x) > -f(x)$, então o valor de $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x)$ é $+\infty$.

8. Opção (B)

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}} = \\ &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-2)}{\sqrt{x^2(x+4)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-2)}{|x|\sqrt{x+4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{-\sqrt{x+4}} = \frac{-2}{-2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+3)^2 - 9}{12\sqrt{3}(\sqrt{x+3} - \sqrt{3})} = \\ &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{1}{12\sqrt{3}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+3-3)(x+3+3)(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}{x+3-3} = \\ &= \frac{1}{12\sqrt{3}} \lim_{x \rightarrow 0^-} [(x+6)(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})] = \\ &= \frac{1}{12\sqrt{3}} \times 6 \times 2\sqrt{3} = 1 \end{aligned}$$

Então, pelo teorema das funções encaixadas, vem que $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 1$.

9. Opção (D)

Como a função f é contínua no intervalo $[-1, 3]$, em qualquer uma das opções se encontra uma expressão de uma função g também ela contínua em $[-1, 3]$ (soma ou diferença de funções contínuas).

Assim, basta averiguar em qual das expressões as imagens de -1 e 3 por g mudam de sinal:

Na opção (A): $g(x) = x + f(x)$

$$g(-1) = -1 + f(-1) = -1 + 3 = 2 > 0$$

$$g(3) = 3 + f(3) = 3 + 8 = 11 > 0$$

Na opção (B): $g(x) = x - f(x)$

$$g(-1) = -1 - f(-1) = -1 - 3 = -4 < 0$$

$$g(3) = 3 - f(3) = 3 - 8 = -5 < 0$$

Na opção (C): $g(x) = x^2 + f(x)$

$$g(-1) = (-1)^2 + f(-1) = 1 + 3 = 4 > 0$$

$$g(3) = 3^2 + f(3) = 9 + 8 = 17 > 0$$

Na opção (D): $g(x) = x^2 - f(x)$

$$g(-1) = (-1)^2 - f(-1) = 1 - 3 = -2 < 0$$

$$g(3) = 3^2 - f(3) = 9 - 8 = 1 > 0$$

10. Opção (B)

- A opção (A) é falsa; contraexemplo: $f(x) = x^2 + 1$.
- A opção (B) é verdadeira.

Seja f uma função polinomial de grau ímpar definida por $f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1x + a_0$, com $a_{2n+1} > 0$.

Então, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

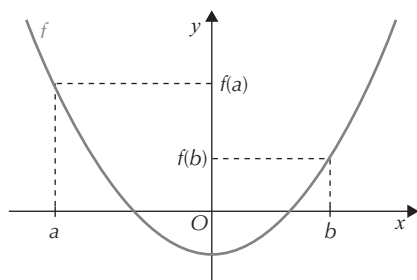
A função f é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar de uma função polinomial, em particular, f é contínua em qualquer intervalo fechado de números reais $[a, b]$ tais que $f(a) < 0 < f(b)$.

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

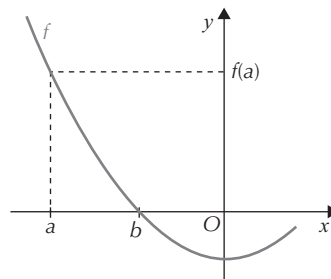
$\exists c \in]a, b[$: $f(c) = 0$.

A demonstração para o caso em que $a_{2n+1} < 0$ é análoga.

- A opção (C) é falsa; contraexemplo:



- A opção (D) é falsa; contraexemplo:



11. Opção (B)

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 1)(x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \vee x^2 + 1 = 0 \vee (x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \vee \underbrace{x^2 = -1}_{\text{condição impossível em } \mathbb{R}} \vee x - 2 = 0$$

condição impossível em $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \vee x = 2$$

x		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2	
$(x^2 - 3)$	+	0	-	0	+	+	+
$(x^2 + 1)$	+	+	+	+	+	+	+
$(x - 2)^2$	+	+	+	+	+	0	+
Sinal de f'	+	0	-	0	+	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$		$\cup$

O gráfico de f tem dois pontos de inflexão.

12. Opção (A)

Sabe-se que:

- $h(0) = 2$;
- $h'(0)$ é o declive da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa 0. Como esta é paralela à bissetriz dos quadrantes pares, então o seu declive é -1 . Assim, $h'(0) = -1$;
- $h''(0) = 0$, pois, em $x = 0$, o gráfico da função h muda o sentido das concavidades.

Assim, $h(0) + h'(0) + h''(0) = 2 + (-1) + 0 = 1$.

13. Opção (C)

Por observação do gráfico de g , sabe-se que $g(a) < 0$, $g'(a) < 0$ e $g''(a) > 0$. Assim, $g'(a) \times g''(a) < 0$.

14. Opção (A)

$$h(x) = -\frac{1}{2}g(x) + \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(-\frac{1}{2}g(x) + \frac{x^2}{2}\right)' = -\frac{1}{2}g'(x) + \frac{2x}{2} \\ &= -\frac{1}{2}g'(x) + x \end{aligned}$$

$$h''(x) = \left(-\frac{1}{2}g'(x) + x\right)' = -\frac{1}{2}g'(x) + 1$$

O gráfico da função h'' obtém-se do gráfico da função g'' por uma contração vertical segundo fator $\frac{1}{2}$, seguida de uma simetria em relação ao eixo Ox e posteriormente de uma translação associada ao vetor $\vec{u}(0, 1)$.

15. Opção (C)

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
Sinal de f''	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	P.I.	$\cup$

16. Opção (D)

f é estritamente decrescente em $[0, 5]$, logo $f'(x) < 0, \forall x \in [0, 5]$. Assim, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $[0, 5]$.

17. Opção (A)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 3x + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{2x \sqrt{1 + \frac{3}{4x} + \frac{1}{4x^2}} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(2 \sqrt{1 + \frac{3}{4x} + \frac{1}{4x^2}} + 2\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2 \sqrt{1 + \frac{3}{4x} + \frac{1}{4x^2}} + 2} = \\ &= \frac{3}{2 + 2} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Como $\forall x \in \mathbb{R}^+, h(x) > f(x)$, então o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ pode ser 1.

18. Opção (B)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1) - f(x)}{x^2 - 1} &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \\ &= -f'(1) \times \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

19. Opção (C)

Das opções apresentadas, $f(1)$ é máximo relativo de f apenas nas opções (A) e (C); destas, é apenas em (C) que se verifica $f'(x)$ constante se $-2 < x < 1$.

20. Sabe-se que $\lim u_n = +\infty$.

Tem-se que $\frac{v_n}{u_n} \geq 1 \Leftrightarrow v_n \geq u_n$, para $n \geq 20$.

Assim, $\lim v_n > \lim u_n$, logo $\lim v_n = +\infty$.

21. $\lim w_n = \lim (-v_n) = -\lim v_n = -(+\infty) = -\infty$

22. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar de uma função polinomial, em particular, a função f é contínua em $[1, 2]$.

$$f(1) = 1^4 - 5 \times 1 = -4$$

$$f(2) = 2^4 - 5 \times 2 = 6$$

Logo, $f(1) < 0 < f(2)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a função f tem pelo menos um zero no intervalo $]1, 2[$.

23.

a) A função f é contínua em $[-2, -1[$, por estar definida, neste intervalo, por uma função polinomial. A função f é contínua em $] -1, 0]$ por estar definida, neste intervalo, por uma função afim.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2(x+1)^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-2x - 1) = 1$$

$$f(-1) = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$, então f é contínua em $x = -1$.

Assim, f é contínua em $[-2, 0]$.

b) Pela alínea anterior, f é contínua em $[-2, 0]$.

$$f(-2) = 2(-2+1)^2 + 1 = 3$$

$$f(0) = -2 \times 0 - 1 = -1$$

Logo, $f(0) < 0 < f(-2)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$\exists c \in]-2, 0[: f(c) = 0$.

24.

a) Se $x \leq 3$, então:

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = 2 \Leftrightarrow x = 6 \notin]-\infty, 3]$$

Se $x > 3$, então:

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow x + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 0 \notin]3, +\infty[$$

Logo, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 2$, em particular, $\forall x \in [0, 4], f(x) \neq 2$.

b) $f(0) = \frac{0}{3} = 0$

$$f(4) = 4 + 2 = 6$$

Logo, $f(0) < 2 < f(4)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 2) = 5$$

Como $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ e $3 \in D_f$, então f não é contínua em $x = 3$.

Assim, como a função não é contínua em $[0, 4]$ não é garantido que exista $x \in [0, 4]$ tal que $f(x) = 2$, apesar de $f(0) < 2 < f(4)$. Logo, a veracidade da proposição da alínea anterior não contradiz o teorema de Bolzano-Cauchy.

c) A função f é contínua em $]-\infty, 3]$, por se tratar de uma função afim, em particular, f é contínua em $[0, 3]$. Assim, pode concluir-se, pelo teorema de Weierstrass, que a função f admite neste intervalo um máximo e um mínimo.

d) Se $x \in]-\infty, 3]$, então, $f'(x) = \left(\frac{x}{3}\right)' = \frac{1}{3}$.

x	0		3
Sinal de f'	+	+	+
Variação de f	Mín. 0	↗	Máx. 1

Conclui-se assim que no intervalo $[0, 3]$ o mínimo de f é 0 e o máximo de f é 1.

25. Seja x o comprimento do parque, em metros, e seja y a sua largura, em metros.

$$\text{Tem-se que } x \times y = 3600 \Leftrightarrow y = \frac{3600}{x}$$

Seja P a função que a cada x associa o perímetro do parque.

$$x \in]0, 3600[$$

$$P(x) = 2x + 2 \times \frac{3600}{x} = 2x + \frac{7200}{x}$$

$$P'(x) = \left(2x + \frac{7200}{x}\right)' = 2 - \frac{7200}{x^2}$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{7200}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 7200}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7200 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3600$$

$$\Leftrightarrow x = 60 \vee x = -60$$

Como $x > 0$, então $x = 60$.

x	0		60		3600
Sinal de P'		+	0	-	
Variação de P		↗	Máx.	↘	

$$y = \frac{3600}{60} = 60$$

Assim, o parque deverá ter comprimento e largura iguais a 60 metros.

26. Seja x o comprimento do campo, em metros, e seja y a sua largura, em metros.

Tem-se que:

$$2x + 2y = 360 \Leftrightarrow x + y = 180 \Leftrightarrow y = 180 - x$$

Seja A a função que a cada x associa a área do campo.

$$x \in]0, 180[$$

$$A(x) = x \times (180 - x) = 180x - x^2$$

$$A'(x) = 180 - 2x$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 180 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 90$$

x	0		90		180
Sinal de A'		-	0	+	
Variação de A		↘	Mín.	↗	

$$y = 180 - 90 = 90$$

Assim, o campo deverá ter comprimento e largura iguais a 90 metros.

27.

a) Para todo o número natural n , tem-se que:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{n\pi}{7}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq \cos\left(\frac{n\pi}{7}\right) - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{n^2 + 1} \leq \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{7}\right) - 1}{n^2 + 1} \leq \frac{0}{n^2 + 1}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{n^2 + 1} = 0$, então, pelo teorema das sucessões encastradas, conclui-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{7}\right) - 1}{n^2 + 1} = 0.$$

b) Para todo o número natural n , tem-se que:

$$0 \leq \cos^2(n\alpha) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \cos^2(n\alpha) - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\cos^2(n\alpha) - 1}{\sqrt{n}} \leq \frac{0}{\sqrt{n}}$$

Como $\lim \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \lim \frac{0}{\sqrt{n}} = 0$, então, pelo

teorema das sucessões encaixadas, conclui-se

$$\text{que } \lim \frac{\cos^2(n\alpha) - 1}{\sqrt{n}} = 0.$$

c) Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = \frac{n}{3n+2}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{3n+5} - \frac{n}{3n+2} = \\ &= \frac{(n+1)(3n+2) - n(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)} = \\ &= \frac{3n^2 + 2n + 3n + 2 - 3n^2 - 5n}{(3n+5)(3n+2)} = \\ &= \frac{2}{(3n+5)(3n+2)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, a sucessão (u_n) é monótona crescente.

$$u_1 = \frac{1}{5}$$

$$u_n = \frac{n}{3n+2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3(3n+2)} < \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} n & 3n+2 \\ -n - \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & -\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\text{Então, } \frac{1}{5} \leq \frac{n}{3n+2} \leq \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e}$$

$$\left(\frac{1}{5} \right)^n \leq \left(\frac{n}{3n+2} \right)^n \leq \left(\frac{1}{3} \right)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim \left(\frac{1}{5} \right)^n = \lim \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0$, então, pelo teorema das sucessões encaixadas, conclui-se que

$$\lim \left(\frac{n}{3n+2} \right)^n = 0.$$

d) Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n-4}{3n-1}$.

$$u_n > 0 \Leftrightarrow \frac{2n-4}{3n-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow (2n-4 > 0 \wedge 3n-1 > 0) \vee (2n-4 < 0 \wedge 3n-1 < 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(n > 2 \wedge n > \frac{1}{3} \right) \vee \underbrace{\left(n < 2 \wedge n < \frac{1}{3} \right)}_{\text{condição impossível em } \mathbb{N}}$$

$$\Leftrightarrow n > 2$$

Logo, os termos da sucessão de ordem superior a 2 são todos positivos.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2n-2}{3n+2} - \frac{2n-4}{3n-1} = \\ &= \frac{(2n-2)(3n-1) - (2n-4)(3n+2)}{(3n+2)(3n-1)} = \\ &= \frac{6n^2 - 2n - 6n + 2 - 6n^2 - 4n + 12n + 8}{(3n+2)(3n-1)} = \\ &= \frac{10}{(3n+2)(3n-1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, a sucessão (u_n) é monótona crescente.

$$u_3 = \frac{1}{2}$$

$$u_n = \frac{n}{3n+2} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3(3n-1)} < \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 2n-2 & 3n-1 \\ -2n + \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline & -\frac{4}{3} \end{array}$$

$$\text{Então, } \frac{1}{2} \leq \frac{2n-4}{3n-1} \leq \frac{2}{3}, \forall n \geq 3 \text{ e}$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^n \leq \left(\frac{2n-4}{3n-1} \right)^n \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n, \forall n \geq 3.$$

Como $\lim \left(\frac{1}{2} \right)^n = \lim \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$, então, pelo teorema das sucessões encaixadas, conclui-se que

$$\lim \left(\frac{2n-4}{3n-1} \right)^n = 0.$$

e) Todos os termos da sucessão $\frac{n!}{n^n}$ são positivos, logo $e_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{n!}{n^n} &= \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \dots \times \frac{1}{n} \leq \frac{n}{n} \times \frac{n}{n} \times \frac{n}{n} \times \dots \times \\ &\times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\text{Então, } 0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 2 + \frac{n!}{n^n} \leq 2 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\lim 2 = \lim \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2$, então, pelo teorema das sucessões encaixadas, conclui-se que

$$\lim \left(2 + \frac{n!}{n^n} \right) = 2.$$

28. Para todo o número natural n , tem-se que:

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq \sin n - 3 \leq -2$$

$$\Leftrightarrow -4n^2 \leq n^2(\sin n - 3) \leq -2n^2$$

Como $\lim (-4n^2) = \lim (-2n^2) = -\infty$, então, pelo teorema das sucessões encaixadas, conclui-se que $\lim (n^2(\sin n - 3)) = -\infty$.

29. Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n+1}{n-2}$.

$$u_n = \frac{2n+1}{n-2} = 2 + \frac{5}{n-2}$$

Para todo o número natural $n > 2$, tem-se que $u_n \geq 2$.

$$\text{Assim, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+1}{n-2} \right)^n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n.$$

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$, então, conclui-se que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+1}{n-2} \right)^n = +\infty.$$

30.

a) Tem-se que:

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4 \leq 5 + \cos x \leq 6, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{4}{\sqrt{x}} \leq \frac{5 + \cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{6}{\sqrt{x}}, \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{\sqrt{x}} = 0, \text{ então, pelo}$$

teorema das funções encastradas,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \cos x}{\sqrt{x}} = 0.$$

b) Tem-se que:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$-(x-2) \leq (x-2) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x-2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 2} (-(x-2)) = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0, \text{ então, pelo}$$

teorema das funções encastradas,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[(x-2) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$$

c) Tem-se que:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-1 + 2x^2 \leq \sin x + 2x^2 \leq 1 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{-1 + 2x^2}{x + \frac{1}{2}x^2} \leq \frac{\sin x + 2x^2}{x + \frac{1}{2}x^2} \leq \frac{1 + 2x^2}{x + \frac{1}{2}x^2},$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 0]$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + 2x^2}{x + \frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} + 2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}} = 4$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2x^2}{x + \frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + 2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}} = 4, \text{ então,}$$

então, pelo teorema das funções encastradas,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 2x^2}{x + \frac{1}{2}x^2} = 4.$$

d) Tem-se que:

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-x \geq -x \cos x \geq x, \forall x \in \mathbb{R}_0^-$$

$$-x^4 - x \geq -x^4 - x \cos x \geq -x^4 + x, \forall x \in \mathbb{R}_0^-$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^4 \left(-1 - \frac{1}{x^3} \right) \right) = +\infty \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^4 \left(-1 + \frac{1}{x^3} \right) \right) = +\infty, \text{ então,}$$

pelo teorema das funções encastradas,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 - x \cos x) = -\infty.$$

e) Tem-se que:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2x - 1 \geq 2x + \sin x \geq 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\frac{1}{2x-1} \leq \frac{1}{2x+\sin x} \leq \frac{1}{2x+1}, \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\frac{x^2}{2x-1} \leq \frac{x^2}{2x+\sin x} \leq \frac{x^2}{2x+1}, \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \frac{1}{x}} = +\infty \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 + \frac{1}{x}} = +\infty, \text{ então, pelo teo-}$$

$$\text{rema das funções encastradas, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x+\sin x} = +\infty.$$

f) Tem-se que:

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 - 1 \leq x^2 + \cos x \leq x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{x^2-1} \leq \frac{1}{x^2+\cos x} \leq \frac{1}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x^2}{x^2-1} \leq \frac{x^2}{x^2+\cos x} \leq \frac{x^2}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1, \text{ então, pelo teo-}$$

$$\text{rema das funções encastradas, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2+\cos x} = 1.$$

31. A função g é contínua em $[-3, 0]$, por se tratar da soma de duas funções contínuas.

$$g(-3) = f(-3) - 3 < 0, \text{ pois } 1 \leq f(-3) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq f(-3) - 3 \leq -1$$

$$g(0) = f(0) > 0, \text{ pois } 1 \leq f(0) \leq 2$$

$$\text{Logo, } g(-3) < 0 < g(0).$$

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$$\exists c \in]-3, 0[: g(c) = 0.$$

32. A função h é contínua em $[-1, 1]$, por se tratar de uma função polinomial.

$$h(-1) = a + 1$$

$$h(1) = a - 1$$

Logo, $h(1) < a < h(-1)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$\exists c \in]-1, 1[: h(c) = a$, ou seja, o gráfico de h intersecta a reta de equação $y = a$.

33. $P(x) = 18x^6 - 3x^4 + 1$

$$P'(x) = 108x^5 - 12x^3$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 108x^5 - 12x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x^3(9x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x^3 = 0 \vee 9x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{3} \vee x = -\frac{1}{3}$$

x	0		$\frac{1}{3}$
$12x^3$	0	+	+
$9x^2 - 1$	-	-	0
Sinal de P'	0	-	0
Variação de P	Máx.	$\searrow$	Mín.

A função P é estritamente decrescente em $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, logo o polinómio $P(x)$ tem, no máximo, um zero no intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

34. A função g é contínua em $]-\infty, 1[$, por estar definida, neste intervalo, por uma função polinomial.

A função g é contínua em $]1, +\infty[$, por estar definida, neste intervalo, por uma função racional.

$$g(-1) = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 3x + 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 - 3x}{x} = -1$$

Logo, a função g é contínua em $x = 1$, pois

$$g(-1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x).$$

Assim, a função g é contínua em $\mathbb{R}$ e, em particular, é contínua em $[-1, 2]$.

Então, pelo teorema de Weierstrass, a função g tem um máximo e um mínimo no intervalo $[-1, 2]$.

35. Seja P um polinómio de grau 5 com cinco zeros distintos. Sejam a e b dois quaisquer zeros consecutivos de P .

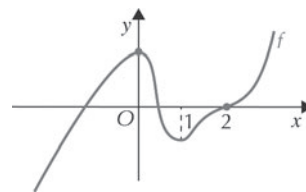
Como P é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, em particular, P é contínua em $[a, b]$ e é diferenciável em $]a, b[$. Logo, pelo teorema de Lagrange, existe

$$c \in]a, b[: P'(c) = \frac{P(b) - P(a)}{b - a} = 0.$$

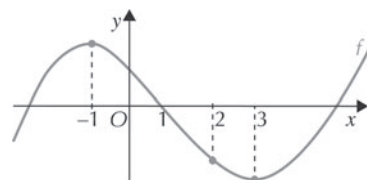
Assim, entre cada par de zeros consecutivos de P , há um zero de P' . Como P tem cinco zeros distintos, então P' tem quatro zeros.

36.

a) Por exemplo:



b) Por exemplo:



37. Da análise do gráfico de f , decorre que esta função é decrescente no intervalo $]-\infty, -a]$ e no intervalo $[a, +\infty[$ e é crescente em $[-a, a]$. Logo, f é negativa para $x < -a$ e para $x > a$ e é positiva entre $-a$ e a . Portanto, a primeira derivada de f está representada na figura 3.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima para x entre $-b$ e 0 e para $x > b$, tem a concavidade voltada para baixo para $x < -b$ e para x entre 0 e b .

Logo, f' é positiva para x entre $-b$ e 0 e para $x > b$ e negativa para $x < -b$ e para x entre 0 e b . Portanto, a segunda derivada de f está representada na figura 2.

38.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ é o valor do declive da assíntota não vertical ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m.$$

Os pontos (1, 0) e (2, 2) pertencem à assíntota

$$y = mx + b; \text{ então, } m = \frac{2 - 0}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$\text{Ou seja, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2.$$

b) $y = 2x + b$

Como o ponto (1, 0) pertence à reta, vem que:

$$0 = 2 \times 1 + b \Leftrightarrow 0 = 2 + b \Leftrightarrow -2 = b$$

$y = 2x - 2$ é uma equação da assíntota oblíqua.

c)

i) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

$$\text{C.S.} = \{-2, 1\}$$

ii) $f(x) \times f'(x) > 0$

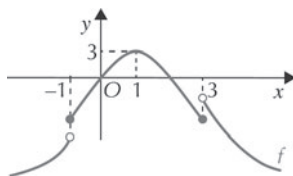
$$\Leftrightarrow [f(x) > 0 \wedge f'(x) > 0] \vee [f(x) < 0 \wedge f'(x) < 0]$$

$$\Leftrightarrow x > 1 \vee -2 < x < 0$$

$$\text{C.S.} =]-2, 0[\cup]1, +\infty[$$

iii) $f(x) \times f'(x) < 0$
 $\Leftrightarrow [f'(x) < 0 \wedge f'(x) > 0] \vee [f'(x) > 0 \wedge f'(x) < 0]$
 $\Leftrightarrow 0 < x < 1 \vee x < -2$
C.S. = $] -\infty, -2[\cup] 0, 1[$

39. Por exemplo:



40.

a) $f(x) = \frac{x^4}{12} - 2x^2 + 2$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{4x^3}{12} - 4x = \frac{x^3}{3} - 4x$

$f''(x) = \frac{3x^2}{3} - 4 = x^2 - 4$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
Sinal de f''	+	0	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cup$	P.I. $-\frac{14}{3}$	$\cap$	P.I. $-\frac{14}{3}$	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $] -\infty, -2[$ e em $] 2, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $] -2, 2[$, tem pontos de inflexão de coordenadas $(-2, -\frac{14}{3})$ e $(2, -\frac{14}{3})$.

b) $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f'(x) = \frac{x+2-(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$

$f''(x) = \frac{-5 \times 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-10}{(x+2)^3}$

$f''(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Sinal de f''	+	n.d.	-
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cup$	n.d.	$\cap$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $] -\infty, -2[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $] -2, +\infty[$, não tem pontos de inflexão.

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2}$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{2x(x^2+2) - x^2 \times 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{4x}{(x^2+2)^2}$

$f''(x) = \frac{4(x^2+2)^2 - 4x \times 2(x^2+2)2x}{(x^2+2)^4} =$

$= \frac{4(x^2+2) - 16x^2}{(x^2+2)^3} =$

$= \frac{-12x^2+8}{(x^2+2)^3}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-12x^2+8}{(x^2+2)^3} = 0$

$\Leftrightarrow -12x^2+8=0 \wedge \underbrace{(x^2+2)^3 \neq 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}}$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3} \vee x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$		$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$+\infty$
Sinal de f''	-	0	+	0	-
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	P.I. $\frac{1}{4}$	$\cup$	P.I. $\frac{1}{4}$	$\cap$

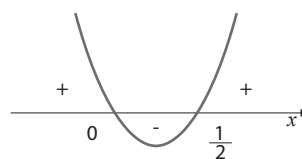
O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $] -\infty, -\frac{\sqrt{6}}{3}[$ e em $] \frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $] -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}[$, tem pontos de inflexão de coordenadas $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{4})$ e $(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{4})$.

d) $f(x) = \sqrt{6x^2-3x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: 6x^2-3x \geq 0\} =]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$

Cálculo auxiliar

$6x^2-3x=0 \Leftrightarrow 3x(2x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{1}{2}$



$f'(x) = \frac{1}{2} (6x^2-3x)^{-\frac{1}{2}} (12x-3) = \frac{12x-3}{2\sqrt{6x^2-3x}}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: 6x^2-3x > 0\} =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{12 \times 2\sqrt{6x^2-3x} - (12x-3) \times 2 \times \frac{1}{2} (6x^2-3x)^{-\frac{1}{2}} (12x-3)}{4(\sqrt{6x^2-3x})^2} = \\
 &= \frac{24\sqrt{6x^2-3x} - \frac{(12x-3)^2}{\sqrt{6x^2-3x}}}{4(\sqrt{6x^2-3x})^2} = \\
 &= \frac{24(6x^2-3x) - (12x-3)^2}{4(\sqrt{6x^2-3x})^3} = \\
 &= -\frac{9}{4(\sqrt{6x^2-3x})^3}
 \end{aligned}$$

$$f''(x) < 0, \forall x \in]-\infty, 0[\cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e em $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$, não tem pontos de inflexão.

- 41.** Sejam x o comprimento do retângulo e y a sua altura.

$$\begin{aligned}
 \text{Tem-se que } \frac{12}{12-x} = \frac{15}{y} &\Leftrightarrow y = \frac{15(12-x)}{12} \\
 &\Leftrightarrow y = \frac{5(12-x)}{4}
 \end{aligned}$$

Seja A a função que a cada x associa a área do retângulo.

$$A(x) = x \times \frac{5(12-x)}{4} \Leftrightarrow A(x) = \frac{5x(12-x)}{4}$$

$$x \in]0, 12[$$

$$A'(x) = \frac{5}{4} (12-x-x) = \frac{5}{2} (6-x)$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} (6-x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

x	0		6		12
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de A	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

$$\text{Se } x = 6, \text{ então } y = \frac{5 \times 6}{4} = 2,5$$

A área máxima é atingida quando o comprimento é 6 cm e a largura é 2,5 cm.

- 42.** Sejam r o raio e h a altura do cilindro.

$$V = 4\pi \Leftrightarrow \pi \times r^2 \times h = 4\pi \Leftrightarrow h = \frac{4}{r^2}$$

Seja k o preço do material utilizado na parte lateral do cilindro.

Seja C a função que a cada r associa o custo de produção do cilindro.

$$C(r) = 2 \times 2k \times \pi r^2 + k \times 2\pi r \times \frac{4}{r^2} = 4k\pi r^2 + \frac{8k\pi}{r}$$

$$C'(r) = 8k\pi r - \frac{8k\pi}{r^2}$$

$$C'(r) = 0 \Leftrightarrow 8k\pi r - \frac{8k\pi}{r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8k\pi r^3 - 8k\pi = 0 \wedge r^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r^3 = 1 \wedge r \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r = 1$$

r	0		1	$+\infty$
Sinal de C'	n.d.	-	0	+
Variação de C	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

O custo de produção é mínimo quando o raio é 1 cm e a altura é 4 cm.

- 43.** Pelo teorema de Pitágoras:

$$30^2 = l^2 + c^2$$

$$\text{Logo, } l = \sqrt{900 - c^2}.$$

Seja R a função que a cada valor de c associa a resistência da viga de madeira.

$$R(c) = kc^2 \sqrt{900 - c^2}$$

$$c \in]0, 30[$$

$$R'(c) = 2kc \sqrt{900 - c^2} + kc^2 \times \frac{1}{2} (900 - c^2)^{-\frac{1}{2}} (-2c) =$$

$$= 2kc \sqrt{900 - c^2} - \frac{kc^3}{\sqrt{900 - c^2}} =$$

$$= \frac{2kc(900 - c^2) - kc^3}{\sqrt{900 - c^2}} =$$

$$= \frac{1800kc - 3kc^3}{\sqrt{900 - c^2}}$$

$$R'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{1800kc - 3kc^3}{\sqrt{900 - c^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1800kc - 3kc^3 = 0 \wedge \sqrt{900 - c^2} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 3kc(600 - c^2) = 0 \wedge 900 - c^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow c = 0 \vee c = \sqrt{600} \vee c = -\sqrt{600}$$

c	0		$\sqrt{600}$		30
Sinal de R'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de R	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

$$\sqrt{600} \approx 24,495$$

$$l = \sqrt{900 - 600} = \sqrt{300} \approx 17,321$$

A resistência da viga é máxima quando a largura é, aproximadamente, 17,321 cm e o comprimento é, aproximadamente, 24,495 cm.

44. Sejam x e y , respetivamente, o comprimento e a largura da folha de papel.

$$(x-4)(y-8) = 25 \Leftrightarrow y = \frac{25}{x-4} + 8 \Leftrightarrow y = \frac{8x-7}{x-4}$$

Seja A a função que a cada valor do comprimento da folha de papel associa a sua área.

$$A(x) = x \times \frac{8x-7}{x-4} \Leftrightarrow A(x) = \frac{8x^2-7x}{x-4}$$

$$x \in]0, 4[$$

$$A'(x) = \frac{(16x-7)(x-4) - (8x^2-7x)}{(x-4)^2} = \frac{8x^2-128x+28}{(x-4)^2}$$

$$\begin{aligned} A'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{8x^2-128x+28}{(x-4)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 8x^2-128x+28 = 0 \wedge (x-4)^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2-16x+7 = 0 \wedge x-4 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{256-42}}{4} \wedge x \neq 4 \\ &\Leftrightarrow x = 4 - \frac{5\sqrt{2}}{2} \vee x = 4 + \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

x	0		$4 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$		4
Sinal de A'	n.d.	-	0	+	n.d.
Variação de A	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	n.d.

$$y = \frac{8\left(4 + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) - 7}{\left(4 + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) - 4} = \frac{10 + 8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} + 8$$

A folha de papel tem a menor área quando a largura é $4 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm e o comprimento é $5\sqrt{2} + 8$ cm.

45.

a) $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: (x+1)^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

0 é o único zero da função f .

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - x \times 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{x+1-2x}{(x+1)^3} = \frac{-x+1}{(x+1)^3}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-x+1}{(x+1)^3} = 0 \\ &\Leftrightarrow -x+1 = 0 \wedge (x+1)^3 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$-x+1$	+	+	+	0	-
$(x+1)^3$	-	0	+	+	+
Sinal de f'	-	n.d.	+	0	-
Variação de f	$\searrow$	n.d.	$\nearrow$	Máx. $\frac{1}{4}$	$\searrow$

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1[$ e em $[1, +\infty[$ e estritamente crescente em $]-1, 1[$; $\frac{1}{4}$ é máximo absoluto em 1.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(x+1)^3 - (-x+1) 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \\ &= \frac{-(x+1) - 3(-x+1)}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{2x-4}{(x+1)^4} \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2x-4}{(x+1)^4} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x-4 = 0 \wedge (x+1)^4 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
Sinal de f'	-	n.d.	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	n.d.	$\cap$	P.I. $\frac{2}{9}$	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e em $]-1, 2[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]2, +\infty[$. O ponto de coordenadas $\left(2, \frac{2}{9}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico de f .

A função f é contínua no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, por se tratar de uma função racional. Assim, só a reta de equação $x = -1$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{(x+1)^2} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{(x+1)^2} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

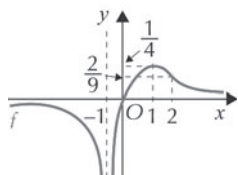
$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{1}{x+2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(x+1)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \times \frac{1}{x + 2 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.



b) $g(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 - 9} = 0, \text{ que é uma condição impossível em } \mathbb{R}.$$

A função g não tem zeros.

$$g'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 9)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{(x^2 - 9)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x = 0 \wedge (x^2 - 9)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
Sinal de g'	+	n.d.	+	0	-	n.d.	-
Variação de g	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	Máx. $-\frac{1}{9}$	$\searrow$	n.d.	$\searrow$

A função g é estritamente crescente em $]-\infty, -3[$ e em $]-3, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, 3[$ e em $]3, +\infty[$; $-\frac{1}{9}$ é máximo relativo em 0 .

$$g''(x) = \frac{-2(x^2 - 9)^2 - (-2x)2(x^2 - 9)2x}{(x^2 - 9)^4} =$$

$$= \frac{-2(x^2 - 9) + 8x^2}{(x^2 - 9)^3} =$$

$$= \frac{6x^2 + 18}{(x^2 - 9)^3}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x^2 + 18}{(x^2 - 9)^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{6x^2 + 18 = 0}_{\text{condição impossível em } \mathbb{R}} \wedge (x^2 - 9)^3 \neq 0$$

condição impossível em $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-3		3	$+\infty$
Sinal de g''	+	n.d.	-	n.d.	+
Sentido das concavidades do gráfico de g	$\cup$	n.d.	$\cap$	n.d.	$\cup$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -3[$ e em $]3, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]-3, 3[$. Não existem pontos de inflexão.

A função g é contínua no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, por se tratar de uma função racional. Assim, só as retas de equação $x = -3$ e $x = 3$ são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

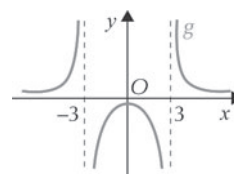
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(x^2 - 9)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x(x^2 - 9)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.



c) $h(x) = x - \frac{1}{x}$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

-1 e 1 são os zeros da função h .

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

condição impossível em $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de h'	+	n.d.	+
Variação de h	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$

A função h é estritamente crescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$; não possui extremos relativos.

$$h''(x) = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x^3} = 0$, que é uma condição impossível em $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de h''	+	n.d.	-
Sentido das concavidades do gráfico de h	$\cup$	n.d.	$\cap$

O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $]0, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0[$. Não existem pontos de inflexão.

A função h é contínua no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, por se tratar da soma de duas funções contínuas (uma função afim e uma função racional). Assim, só a reta de equação $x = 0$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{0^-} = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de h .

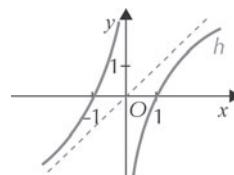
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 - 0 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 - 0 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.



d) $i(x) = x^{\frac{2}{3}}$

$$D_i = \mathbb{R}$$

$$i(x) = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

0 é o zero da função i .

$$i'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$D_{i'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$i'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$, que é uma condição impossível em $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de i'	-	n.d.	+
Variação de i	$\searrow$	Mín. 0	$\nearrow$

A função i é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e é estritamente crescente em $]0, +\infty[$; 0 é um mínimo absoluto em 0.

$$i''(x) = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$i''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} = 0$, que é uma condição impossível em $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de i''	-	n.d.	-
Sentido das concavidades do gráfico de i	$\cap$	n.d.	$\cap$

O gráfico de i tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$. Não existem pontos de inflexão.

A função i é contínua no seu domínio, $\mathbb{R}$, por se tratar de uma função potência de expoente racional. Assim, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

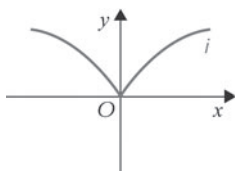
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{2}{3}} = +\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} i(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{\frac{2}{3}} = +\infty$$

O gráfico de i não admite assíntotas não verticais.



e) $j(x) = \sqrt[3]{x-1}$

$$D_j = \mathbb{R}$$

$$j(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

1 é o zero da função j .

$$j'(x) = \frac{1}{3} (x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$D_{j'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$j'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 0, \text{ que é uma condição}$$

impossível em $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Sinal de j''	+	n.d.	+
Variação de j	$\nearrow$	0	$\nearrow$

A função j é estritamente crescente $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$; não possui extremos relativos.

$$j''(x) = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right) (x-1)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$$

$$j''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}} = 0, \text{ que é uma condição}$$

impossível em $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Sinal de j''	+	n.d.	-
Sentido das concavidades do gráfico de j	$\cup$	0	$\cap$

O gráfico de j tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 1[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]1, +\infty[$. O ponto de coordenadas (1, 0) é ponto de inflexão.

A função j é contínua no seu domínio, $\mathbb{R}$, por se tratar de uma função irracional. Assim, o gráfico de j não admite assíntotas verticais.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x\sqrt[3]{(x-1)^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} j(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x-1} = +\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{j(x)}{x} =$$

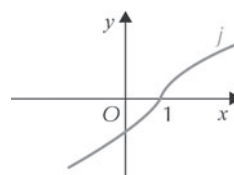
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x\sqrt[3]{(x-1)^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} j(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x-1} = -\infty$$

O gráfico de j não admite assíntotas não verticais.



f) $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

$$D_k = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x \neq 0\} = \mathbb{R}^+$$

$$k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = 0 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

1 é o zero da função k .

$$k'(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x^2}$$

$$k'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\sqrt{x}+2}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x} + 2 = 0 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

x	$-\infty$		4	$+\infty$
Sinal de k'	n.d.	+	0	-
Variação de k	n.d.	$\nearrow$	Máx. $\frac{1}{4}$	$\searrow$

A função k é estritamente crescente em $]0, 4]$ e é estritamente decrescente em $[4, +\infty[$; $\frac{1}{4}$ é máximo absoluto em 4.

$$k''(x) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{5}{2}} - \frac{2x}{x^4} = \frac{3}{4\sqrt{x^5}} - \frac{2}{x^3}$$

$$k''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4\sqrt{x^5}} - \frac{2}{x^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-8}{4x^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x} - 8 = 0 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{64}{9}$$

x	0		$\frac{64}{9}$	$+\infty$
Sinal de k''	n.d.	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de k	n.d.	$\cap$	P.I. $\frac{15}{64}$	$\cup$

O gráfico de k tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, \frac{64}{9}[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]\frac{64}{9}, +\infty[$. O ponto de coordenadas $\left(\frac{64}{9}, \frac{15}{64}\right)$ é ponto de inflexão.

A função k é contínua no seu domínio, $\mathbb{R}^+$, por se tratar da soma de duas funções contínuas. Assim, a reta de equação $x = 0$ é a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de k .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de k .

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}-1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{x(\sqrt{x}+1)} =$$

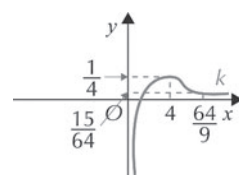
$$= \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de k quando $x \rightarrow +\infty$.



46. Teorema das sucessões encaixadas: Dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes com o mesmo limite l e uma sucessão (w_n) tal que a partir de certa ordem $u_n \leq w_n \leq v_n$, então (w_n) é convergente e $\lim w_n = l$.

$$a) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{2n}{n^2+k} = \frac{2n}{n^2+1} + \frac{2n}{n^2+2} + \dots + \frac{2n}{n^2+n}$$

Como $\frac{2n}{n^2+1} > \frac{2n}{n^2+2} > \dots > \frac{2n}{n^2+n}$, então tem-se que

$$\frac{2n}{n^2+1} + \frac{2n}{n^2+2} + \dots + \frac{2n}{n^2+n} > \frac{2n}{n^2+n} + \frac{2n}{n^2+n} +$$

$$+ \dots + \frac{2n}{n^2+n} = n \times \frac{2n}{n^2+n} = \frac{2n}{n+1}$$

E tem-se também que:

$$\frac{2n}{n^2+1} + \frac{2n}{n^2+2} + \dots + \frac{2n}{n^2+n} < \frac{2n}{n^2+1} + \frac{2n}{n^2+1} +$$

$$+ \dots + \frac{2n}{n^2+1} = n \times \frac{2n}{n^2+1} = \frac{2n^2}{n^2+1}.$$

$$\text{Assim, } \frac{2n^2}{n^2+1} < u_n < \frac{2n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Como } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} = 2 \text{ e}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n^2}} = 2, \text{ então, pelo teorema}$$

das sucessões encaixadas, $\lim u_n = 2$.

$$b) u_n = \sum_{k=4}^{2n} \frac{5n-1}{2n^2+k} = \frac{5n-1}{2n^2+4} + \frac{5n-1}{2n^2+5} + \dots + \frac{5n-1}{2n^2+2n}$$

Como $\frac{5n-1}{2n^2+4} > \frac{5n-1}{2n^2+5} > \dots > \frac{5n-1}{2n^2+2n}$, então tem-se que

$$\frac{5n-1}{2n^2+4} + \frac{5n-1}{2n^2+5} + \dots + \frac{5n-1}{2n^2+2n} >$$

$$> \frac{5n-1}{2n^2+2n} + \frac{5n-1}{2n^2+2n} + \dots + \frac{5n-1}{2n^2+2n} =$$

$$= n \times \frac{5n-1}{2n^2+2n} = \frac{5n-1}{2n+2}$$

E tem-se também que:

$$\frac{5n-1}{2n^2+4} + \frac{5n-1}{2n^2+5} + \dots + \frac{5n-1}{2n^2+2n} <$$

$$< \frac{5n-1}{2n^2+4} + \frac{5n-1}{2n^2+4} + \dots + \frac{5n-1}{2n^2+4} =$$

$$= n \times \frac{5n-1}{2n^2+4} = \frac{5n^2-n}{2n^2+4}$$

Assim, $\frac{5n-1}{2n+2} < u_n < \frac{5n^2-n}{2n^2+4}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-1}{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{2}{n}} = \frac{5}{2}$ e

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2-n}{2n^2+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{4}{n^2}} = \frac{5}{2}$, então, pelo teo-

rema das sucessões encastradas, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{5}{2}$.

47. $f(x) = f(x+1) \Leftrightarrow f(x) - f(x+1) = 0$

Seja $g(x) = f(x) - f(x+1)$.

A função g é contínua em $[a, a+1]$, por ser a diferença entre duas funções contínuas.

$g(a) = f(a) - f(a+1) = -f(a+1) < 0$

$g(a+1) = f(a+1) - f(a+2) = f(a+1) > 0$

Logo, $g(a) < 0 < g(a+1)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, pode concluir-se que:

$\exists c \in]a, a+1[: g(c) = 0$

$\Leftrightarrow \exists c \in]a, a+1[: f(c) - f(c+1) = 0$

$\Leftrightarrow \exists c \in]a, a+1[: f(c) = f(c+1)$

48. $g(x) = x - 1 \Leftrightarrow g(x) - x + 1 = 0$

Seja $h(x) = g(x) - x + 1$.

A função h é contínua em $[g^{-1}(a), a]$, por ser a soma de duas funções contínuas.

$h(g^{-1}(a)) = g(g^{-1}(a)) - g^{-1}(a) + 1 =$

$= a - g(a) + 1 =$

$= -g(a) + a - 1$

$h(a) = g(a) - a + 1$

Como $g(a) < a - 1$ vem que $g(a) - a + 1 > 0$ e $-g(a) + a - 1 > 0$.

Logo, $h(g^{-1}(a)) < 0 < h(a)$.

Assim, pelo teorema Bolzano-Cauchy, pode concluir-se que:

$\exists c \in]g^{-1}(a), a[: h(c) = 0$

$\Leftrightarrow \exists c \in]g^{-1}(a), a[: g(c) - c + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \exists c \in]g^{-1}(a), a[: g(c) = c - 1$

49.

a) A função f é contínua em $[-1, 0]$, por se tratar da soma de duas funções contínuas (uma função polinomial e a função módulo).

$f(-1) = -(-1)^3 + (-1)^2 + |-1| = 1 + 1 + 1 = 3$

$f(0) = -0^3 + 0^2 + |0| = 0$

Ou seja, $f(0) < 2 < f(-1)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$\exists c \in]-1, 0[: f(c) = 2$

b) Em $]-1, 0[$, $f(x) = -x^3 + x^2 - x$.

Então:

$f(x) = -3x^2 + 2x - 1$

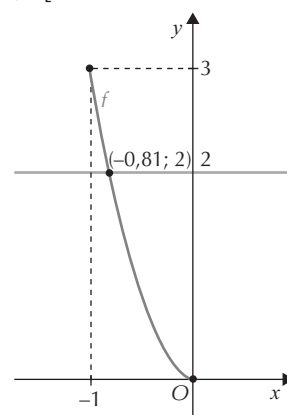
$f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{-6}$, que é uma equação

impossível em $\mathbb{R}$.

Tem-se que $f'(x) < 0, \forall x \in]-1, 0[$, logo, a função f é decrescente no intervalo $]-1, 0[$.

c) Na alínea a) provou-se que existe pelo menos um valor c do intervalo $]-1, 0[$ para o qual se tem $f(c) = 2$. Como na alínea b) se concluiu que a função f é decrescente no intervalo $]-1, 0[$, então existe um único número real c do intervalo $]-1, 0[$ para o qual se tem $f(c) = 2$, ou seja, o gráfico da função f e a reta de equação $y = 2$ interseccionam-se num único ponto de abscissa c no intervalo $]-1, 0[$. Pretende-se agora resolver graficamente a equação $f(x) = 2$ no intervalo $]-1, 0[$.



Assim, $c \approx -0,81$.

50. A reta s é tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa a . Logo, a sua equação reduzida é do tipo $y = g'(a)x + b$.

Como $(a, g(a))$ é um ponto da reta s , então:

$$g(a) = g'(a) \times a + b \Leftrightarrow b = g(a) - ag'(a)$$

$$\text{Logo, } s: y = g'(a)x + g(a) - ag'(a).$$

A reta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa a . Logo, a sua equação reduzida é do tipo $y = f'(a)x + b$.

$$\text{Como } f'(x) = (g(x) + x + 1)' = g'(x) + 1, \text{ então}$$

$$f'(a) = g'(a) + 1 \text{ e } r: y = (g'(a) + 1)x + b.$$

Como $(a, f(a)) = (a, g(a) + a + 1)$ é um ponto da reta r , então:

$$g(a) + a + 1 = (g'(a) + 1) \times a + b$$

$$\Leftrightarrow b = g(a) - ag'(a) + 1$$

$$\text{Logo, } r: y = (g'(a) + 1)x + g(a) - ag'(a) + 1.$$

Então:

$$g'(a)x + g(a) - ag'(a) = (g'(a) + 1)x + g(a) - ag'(a) + 1$$

$$\Leftrightarrow g'(a)x = (g'(a) + 1)x + 1$$

$$\Leftrightarrow g'(a)x = g'(a)x + x + 1$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 0$$

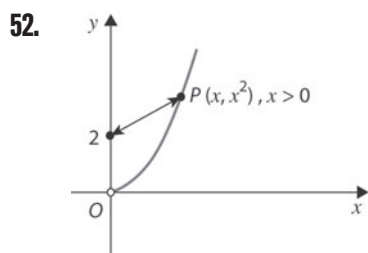
$$\Leftrightarrow x = -1$$

Conclui-se assim que as retas r e s se intersectam num ponto de abscissa -1 .

51. A função f' é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua em $[a, b]$.

Como as retas tangentes ao gráfico de f , nos pontos de abscissas a e b , são perpendiculares, então tem-se que $f''(a) \times f''(b) = -1$, ou seja, $f''(a)$ e $f''(b)$ têm sinais contrários, pelo que 0 é um valor intermédio entre $f''(a)$ e $f''(b)$.

Conclui-se, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, que f'' tem pelo menos um zero em $]a, b[$.



Seja d a distância entre o ponto P e o ponto $(0, 2)$, em função da abscissa do ponto P .

$$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (x^2-2)^2}, x > 0$$

$$d(x) = \sqrt{x^2 + x^4 - 4x^2 + 4}, x > 0$$

$$d(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}, x > 0$$

$$d'(x) = \frac{1}{2} \times (x^4 - 3x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} \times (4x^3 - 6x)$$

$$= \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x = 0 \wedge 2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x(4x^2 - 6) = 0 \wedge \underbrace{x^4 - 3x^2 + 4 \neq 0}_{\text{condição universal}}$$

condição universal

Cálculo auxiliar

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 4}}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

condição impossível em $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x=0}_{x \notin D} \vee x = \sqrt{\frac{3}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \underbrace{x \notin D}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

x	0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
Sinal de d'	n.d.	-	0	+
Variação de d	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

O ponto que está mais próximo do ponto $(0, 2)$ é o

ponto $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e a distância entre os dois pontos é:

$$d\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \sqrt{\frac{9}{4} - 3 \times \frac{6}{4} + 4} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4} = \sqrt{\frac{9 - 18 + 16}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

53. Sejam x e y , respetivamente, o comprimento e a largura de um retângulo de perímetro P .

$$2x + 2y = P \Leftrightarrow y = \frac{P - 2x}{2}$$

Seja A a função que a cada valor do comprimento do retângulo associa a sua área.

$$A(x) = x \times \frac{P - 2x}{2} \Leftrightarrow A(x) = \frac{Px - 2x^2}{2}$$

$$x \in \left]0, \frac{P}{2}\right[$$

$$A'(x) = \left(\frac{Px - 2x^2}{2}\right)' = \frac{P - 4x}{2}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{P - 4x}{2} = 0 \Leftrightarrow 4x = P \Leftrightarrow x = \frac{P}{4}$$

x	0		$\frac{P}{4}$		$\frac{P}{2}$
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de A	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

$$y = \frac{P - 2 \times \frac{P}{4}}{2} = \frac{P}{4}$$

Pode, então, concluir-se que, de todos os retângulos com perímetro P , o quadrado é o que tem a maior área.

54. Sejam x e y , respectivamente, o comprimento e a largura de um retângulo de área A .

$$x \times y = A \Leftrightarrow y = \frac{A}{x}$$

Seja P a função que a cada valor do comprimento do retângulo associa o seu perímetro.

$$P(x) = 2x + 2 \times \frac{A}{x}$$

$$x \in]0, A[$$

$$P'(x) = \left(2x + 2 \times \frac{A}{x}\right)' = 2 - \frac{2A}{x^2} = \frac{2x^2 - 2A}{x^2}$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2A}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2A = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = A \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{A}$$

x	0		$\sqrt{A}$		A
Sinal de P'	n.d.	-	0	+	n.d.
Variação de P	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	n.d.

$$y = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$$

Pode, então, concluir-se que, de todos os retângulos com área A , o quadrado é o que tem o menor perímetro.

Teste Final

Páginas 78 a 81

Grupo I

1. Opção (A)

O número de casos favoráveis é 12, que corresponde ao número de arestas do octaedro.

O número de casos possíveis é 6C_2 , que é o número de maneiras de escolher ao acaso dois dos seis vértices do octaedro.

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{12}{{}^6C_2}$.

2. Opção (B)

A linha do triângulo de Pascal com 17 elementos é a linha cujos elementos são da forma ${}^{16}C_p$. Nessa linha, os dois primeiros elementos e os dois últimos são menores ou iguais a 16. Logo, os restantes 13 elementos são maiores do que 16.

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{13}{17}$.

3. Opção (C)

A opção (A) é falsa, já que $f(c) > 0$ e $f'(c) < 0$, logo $f(c) \times f'(c) < 0$.

A opção (B) é falsa, porque $f'(c) < 0$ e $f''(c) < 0$, logo $f'(c) \times f''(c) > 0$.

A opção (C) é verdadeira, uma vez que $f(c) > 0$ e $f'(c) < 0$, logo $f(c) \times f'(c) < 0$.

A opção (D) é falsa, já que $f(c) > 0$, $f'(c) < 0$ e $f''(c) < 0$, logo $f(c) \times f'(c) \times f''(c) > 0$.

4. Opção (D)

x	$-\infty$	a		b		c	$+\infty$
Variação de h'	$\nearrow$		$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$
Sinal de h''	+	+	+	0	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de h	$\cup$		$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

As abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de h são b e c .

5. Opção (C)

A segunda derivada de um polinómio de grau 7 é um polinómio de grau 5. Logo, o número de zeros deste polinómio pode variar entre 1 e 5.

Grupo II

1. Sejam A e B os acontecimentos:

A : "Aperceber-se da iniciativa."

B : "Comprar o perfume."

$$P(\bar{A}) = 0,4 \Leftrightarrow P(A) = 0,6$$

$$P(B) = 0,55$$

$$P(B | A) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{3} \times 0,6$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,4$$

$$\begin{aligned} 11. P(B | \bar{A}) &= \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \\ &= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(\bar{A})} = \\ &= \frac{0,55 - 0,4}{0,4} = \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$12. 2! \times 3! \times 4! \times 3! = 1728$$

13. Seja x a medida de um dos catetos do triângulo $[ABC]$ e seja y a medida do outro cateto.

Pelo teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = (2r)^2 \Leftrightarrow y^2 = 4r^2 - x^2$$

$$\text{Logo, } y = \sqrt{4r^2 - x^2}.$$

Seja A a função que a cada valor de x faz corresponder a área do triângulo $[ABC]$.

$$A(x) = \frac{x \times \sqrt{4r^2 - x^2}}{2} = \frac{x}{2} \times \sqrt{4r^2 - x^2} \quad (x \in]0, 2r[)$$

$$\begin{aligned} A'(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)' \times \sqrt{4r^2 - x^2} + \frac{x}{2} \times (\sqrt{4r^2 - x^2})' = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - x^2} + \frac{x}{2} \times \frac{1}{2} (4r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} = \\ &= \frac{4r^2 - x^2 - x^2}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} = \\ &= \frac{2r^2 - x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2r^2 - x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2r^2 - x^2 = 0 \wedge \sqrt{4r^2 - x^2} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2r^2 \wedge x^2 \neq 4r^2 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{2}r \vee x = -\sqrt{2}r \end{aligned}$$

x	0		$\sqrt{2}r$		$2r$
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de A	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

Se $x = \sqrt{2}r$, então:

$$y = \sqrt{4r^2 - (\sqrt{2}r)^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r = x$$

A área é máxima para $x = \sqrt{2}r$ e, nesse caso, o outro cateto também tem medida $r\sqrt{2}$. Assim, os triângulos que têm área máxima têm dois catetos iguais, ou seja, são isósceles.

2. Teorema das sucessões encastradas:

Dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes com o mesmo limite l e uma sucessão (w_n) tal que a partir de certa ordem $u_n \leq w_n \leq v_n$, então (w_n) é convergente e $\lim w_n = l$.

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)^2 \leq 1$$

$$1 \leq 1 + \left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)^2 \leq 2$$

$$\frac{1}{4^n} \leq \frac{1 + \left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)^2}{4^n} \leq \frac{2}{4^n}$$

$$\text{Assim, } \frac{1}{4^n} \leq u_n \leq \frac{2}{4^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim \frac{1}{4^n} = 0$ e $\lim \frac{2}{4^n} = 0$, então, pelo teorema das sucessões encastradas, $\lim u_n = 0$.

3. A função h é contínua em $[a, b]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas neste intervalo. Como $g(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, em particular, $g(b) > 0$.

$$h(a) = 2g(a) - g(b) = 2 \times \frac{g(b)}{4} - g(b) = -\frac{1}{2}g(b) < 0$$

$$h(b) = 2g(b) - g(b) = g(b) > 0$$

Assim, $h(a) < 0 < h(b)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, pode concluir-se que $\exists c \in]a, b[: h(c) = 0$, ou seja, a função h tem pelo menos um zero.

4.

$$\begin{aligned} 4.1. \text{ t.m.v.}_{[1, 5]} &= \frac{P(5) - P(1)}{5 - 1} = \\ &= \frac{(30 \times 5^2 - 5^3) - (30 \times 1^2 - 1^3)}{4} = \\ &= 149 \end{aligned}$$

Logo, t.m.v._[1, 5] = 149 doentes/dia

$$P'(d) = 60d - 3d^2$$

$$P'(5) = 60 \times 5 - 3 \times 5^2 = 225$$

Logo, $P'(5) = 225$ doentes/dia.

$$\begin{aligned} 4.2. P(d) = 0 &\Leftrightarrow 30d^2 - d^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow d^2(30 - d) = 0 \\ &\Leftrightarrow d = 0 \vee d = 30 \end{aligned}$$

$$P'(d) = 60d - 3d^2$$

$$P'(d) = 0 \Leftrightarrow 60d - 3d^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3d(20 - d) = 0$$

$$\Leftrightarrow d = 0 \vee d = 20$$

d	0		20		30
Sinal de P'	0	+	0	-	-
Variação de P	Mín. $P(0) = 0$	$\nearrow$	Máx. $P(20) = 4000$	$\searrow$	Mín. $P(30) = 0$

$$P''(d) = 60 - 6d$$

$$P''(d) = 0 \Leftrightarrow 60 - 6d = 0 \Leftrightarrow d = 10$$

d	0		10		30
Sinal de P''	+	+	0	-	-
Variação de P'	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.

O número de doentes aumentou durante os primeiros 20 dias, atingindo o máximo de 4000 pessoas infectadas em $t = 20$ e tendo diminuído a partir daí; após 30 dias, a doença foi considerada erradicada e o momento em que a doença se estava a propagar com maior rapidez foi em $t = 10$.

Tema IV - Trigonometria e Funções Trigonométricas

Unidade 1 - Revisões

Páginas 84 a 86

1. Opção (B)

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{tg}(2017\pi) + \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)} + \frac{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{2}\right)} = \\ & = \frac{\operatorname{tg}(\pi) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} + \frac{-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \\ & = \frac{0 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{-\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{-1} = \\ & = -\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \\ & = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \times \cos(2018\pi)}{2 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \times \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = \\ & = \frac{-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \times \cos(0)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = \\ & = \frac{-1 - \frac{1}{2} \times 1}{2 \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \\ & = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \\ & = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \frac{\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}(-13\pi) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} =$$

$$\begin{aligned} & = \frac{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{0 - \frac{1}{2}} = \\ & = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - 0}{-\frac{1}{2}} = \\ & = \sqrt{3} + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \cos(2017\pi) + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \\ & + 9 \operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{2018\pi}{2}\right) = \\ & = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 9 \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos(1009\pi) = \\ & = 1 - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 9 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 1 = \\ & = \frac{\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3} - 1 = \\ & = -1 - \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

3. Tem-se que:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}(-x) - \frac{1}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi + x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow & \operatorname{tg}(-x) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow & -\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow & -\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow & \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{tg}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2} &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \Leftrightarrow \cos^2 x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Como } x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right], \text{ então } \cos x &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \Leftrightarrow \cos x &= -\frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Além disso:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x + \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{3}$$

Como $x \in \left] -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right[$ e $\operatorname{tg} x < 0$, então

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} 5 \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{2} + x \right) - 2 \cos (-\pi - x) + \operatorname{sen} (3\pi - x) &= \\ = -5 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - 2 \cos (\pi + x) + \operatorname{sen} (\pi - x) &= \\ = -5 \cos x + 2 \cos x + \operatorname{sen} x &= \\ = -3 \cos x + \operatorname{sen} x &= \\ = -3 \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} &= \\ = \sqrt{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

4.

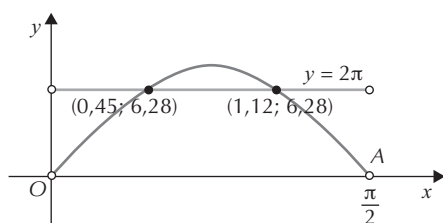
a) $P\hat{Q}R = \alpha$

Logo, $\overline{QR} = 4 \cos \alpha$ e $\overline{OR} = 4 \operatorname{sen} \alpha$.

Então:

$$A(\alpha) = \frac{4 \cos \alpha \times (2 \times 4 \operatorname{sen} \alpha)}{2} = 16 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

b) $A(\alpha) = \frac{1}{8} \times \pi \times 16 \Leftrightarrow A(\alpha) = 2\pi$



Logo, $\alpha \in]0; 0,45[\cup]1,12; \frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) &= \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{12} \right) &= \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) &= \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \operatorname{sen} \left(\frac{11\pi}{12} \right) + \cos \left(\frac{11\pi}{12} \right) &= \\ &= \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) + \\ &\quad + \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Unidade 2 - Fórmulas de trigonometria

Páginas 87 a 92

$$\begin{aligned} 5. \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{12} \right) &= \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

8.

a) $2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{\pi}{8} \right) = \operatorname{sen} \left(2 \times \frac{\pi}{8} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos^2 \left(\frac{\pi}{8} \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} \right) = \cos \left(2 \times \frac{\pi}{8} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sin \left(\frac{5\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{5\pi}{8} \right) = \frac{1}{2} \times 2 \sin \left(\frac{5\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{5\pi}{8} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(2 \times \frac{5\pi}{8} \right) =$

$$= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

9. Tem-se que:

$$\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{2}{5}$$

Então:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{4}{25} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{21}{25}$$

$$\text{Como } x \in]-\pi, 0[, \text{ então } \sin x = -\sqrt{\frac{21}{25}}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{21}}{5}.$$

Assim:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x =$$

$$= 2 \times \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4\sqrt{21}}{25}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{4}{25} - \frac{21}{25} = -\frac{17}{25}$$

$$\operatorname{tg}(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{\frac{4\sqrt{21}}{25}}{-\frac{17}{25}} = -\frac{4\sqrt{21}}{17}$$

Logo:

$$\sin(-2x) - 2 \operatorname{tg}(\pi - 2x) - \cos(13\pi + 2x) =$$

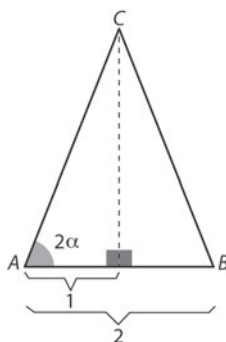
$$= -\sin(2x) - 2 \operatorname{tg}(-2x) - \cos(\pi + 2x) =$$

$$= -\sin(2x) + 2 \operatorname{tg}(2x) + \cos(2x) =$$

$$= -\frac{4\sqrt{21}}{25} + 2 \times \left(-\frac{4\sqrt{21}}{17}\right) - \frac{17}{25} =$$

$$= -\frac{17}{25} - \frac{268\sqrt{21}}{425}$$

10. $\cos(2\alpha) = \frac{1}{AC} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{1}{\cos(2\alpha)}$



$$\text{Perímetro} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} =$$

$$= 2 + \frac{1}{\cos(2\alpha)} + \frac{1}{\cos(2\alpha)} =$$

$$= \frac{2\cos(2\alpha) + 2}{\cos(2\alpha)} =$$

$$= \frac{2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2}{\cos(2\alpha)} =$$

$$= \frac{2\cos^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha + 2}{\cos(2\alpha)} =$$

$$= \frac{2\cos^2 \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) + 2}{\cos(2\alpha)} =$$

$$= \frac{2\cos^2 \alpha - 2 + 2\cos^2 \alpha + 2}{\cos(2\alpha)} =$$

$$= \frac{4\cos^2 \alpha}{\cos(2\alpha)}$$

11.

a) $\sin(2x) + \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee 2 \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

c) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = -2$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) $5 \cos x - 3 = \cos(2x)$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) - 5 \cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - 5 \cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - 5 \cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$$

Considerando a mudança de variável $y = \cos x$, vem que:

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 2}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5+3}{4} \vee y = \frac{5-3}{4}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = \frac{1}{2}$$

Substituindo y por $\cos x$, vem que:

$$\underbrace{\cos x = 2}_{\text{condição impossível}} \vee \cos x = \frac{1}{2}$$

condição impossível

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{e) } \sin(2x) + \cos x = -\frac{2 \sin x + 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + \cos x = -\frac{2 \sin x + 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin x \cos x + 2 \cos x = -2 \sin x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (2 \sin x + 1) + 2 \sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x + 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x + 1 = 0 \vee 2 \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee$$

$$\vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

12.

$$\text{a) } \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin x + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos x - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{6} - x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = -\frac{4\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{4} + x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \vee x = -\frac{13\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d) } \sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{4} - x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{e) } \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{f) } \cos(2x) - 3 \sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \vee \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g)} \quad & \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(2x)} = \sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow & \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} = \sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow & \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow & \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow & \tan x = \sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \\
 & = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \sin(2x) = \\
 & = 1 + \sin(2x) \\
 \text{b)} \quad & \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = \\
 & = 1 - 2 \sin^2 x \\
 \text{c)} \quad & \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) \times \cos^2 x = \\
 & = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)
 \end{aligned}$$

Unidade 3 - O limite notável $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Páginas 93 a 98

14.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \pi}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0 \\
 \text{b)} \quad & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{x} = \frac{\cos \pi}{\pi} = -\frac{1}{\pi} \\
 \text{c)} \quad & \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{3\pi}{4}\right) = (-1)^2 = 1 \\
 \text{d)} \quad & \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2}\right)^+ = -\infty \\
 \text{e)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = \frac{\cos 0}{0} = \frac{1}{0}
 \end{aligned}$$

Cálculo dos limites laterais:

$$\left. \begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} &= \frac{1}{0^+} = +\infty \\
 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x} &= \frac{1}{0^-} = -\infty
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{limites laterais} \\ \text{diferentes} \end{array}$$

Conclui-se que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$ não existe.

$$\text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{x}\right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2^+}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^- = +\infty$$

15.

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \times \sin(3x)}{3x}\right) =$$

Mudança de variável:

$$3x = y$$

Se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

$$= 3 \times \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y}} \frac{\sin y}{y} = 3 \times 1 = 3$$

limite notável

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 4 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 4 \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \\
 & = 4 \times \frac{1}{1} = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{-5x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} -\frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \\
 & = -\frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \times 2\right) = \\
 & = -\frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} =
 \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$2x = y$$

Se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

$$= -\frac{2}{5} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = -\frac{2}{5} \times 1 = -\frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{x} \times \frac{x}{\sin(3x)}\right) = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(3x)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \times 2\right) \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x}} =
 \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$2x = y$$

Se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

$$= 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \times 3} =$$

Mudança de variável:

$$3x = z$$

Se $x \rightarrow 0$, então $z \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
 & = 2 \times 1 \times \frac{1}{3 \times \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z}} = \\
 & = 2 \times 1 \times \frac{1}{3 \times 1} = \\
 & = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x^2}\right) = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} =
 \end{aligned}$$

$$= 1 \times \frac{1}{0^+} =$$

$$= +\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = 1 \times \frac{1}{0}$$

Cálculo dos limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x} \right) = 1 \times \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^2} = \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x} \right) = 1 \times \frac{1}{0^-} = -\infty$$

} limites laterais diferentes

Conclui-se que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2}$.

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{5 \tan x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{5 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{5 \sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \times \frac{\cos x}{5} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{5} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

Mudança de variável:

$$x - \pi = y \Leftrightarrow x = y + \pi$$

Se $x \rightarrow \pi$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y + \pi)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{y} =$$

$$= -1 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = -1 \times 1 = -1$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{3\pi}{2} - 3x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

Mudança de variável:

$$y = \frac{3\pi}{2} - 3x \Leftrightarrow 3x = \frac{3\pi}{2} - y \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{y}{3}$$

Se $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{3}\right)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{y}{3}\right)}{\frac{y}{3}} =$$

$$= \lim_{\frac{y}{3} \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{y}{3}\right)}{\frac{y}{3}} \times \frac{1}{3} = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi + x)}{-x^2 + x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x(-x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(-x + 1) \cos x} =$$

$$= 1 \times 1 = 1$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} =$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(2x) + \sin x}{\sin(2x) + \cos x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x}{2 \sin x \cos x + \cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin^2 x + \sin x}{\cos x (2 \sin x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \frac{1 + 2 \sin x - 2 \sin^2 x - \sin x}{\cos x (2 \sin x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \frac{(1 + 2 \sin x) - \sin x (2 \sin x + 1)}{\cos x (2 \sin x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \frac{(2 \sin x + 1)(1 - \sin x)}{\cos x (2 \sin x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \stackrel{(\infty \times 0)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \times \pi =$$

Mudança de variável:

$$\frac{\pi}{n} = x$$

Se $n \rightarrow +\infty$, então $x \rightarrow 0$.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \pi \right) = 1 \times \pi = \pi$$

$n \in \mathbb{N}, n \rightarrow +\infty$

17. A função g é contínua se e somente se

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = g\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\bullet g\left(\frac{\pi}{2}\right) = k$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4 \cos x}{\pi - 2x} = \\ &= 4 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos\left(y - \frac{\pi}{2}\right)}{2y} = \\ &= 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = x - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = y + \frac{\pi}{2}$$

Se $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, então $y \rightarrow 0$.

Assim, para que g seja contínua em $x = \frac{\pi}{2}$ tem de se ter $k = 2$.

18.

a) A função f é contínua em $x = 0$ se e somente se

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9x}{x + \sin(2x)} = \\ &= 9 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{x + \sin(2x)}{x}} = \\ &= 9 \times \left(\frac{1}{1 + \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times 2} \right) = \\ &= \frac{9}{1 + 1 \times 2} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x^2) + 1 - \cos x}{1 - \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x^2)}{1 - \cos x} + 1 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x^2) (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} + 1 = \\ &= \lim_{x^2 \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sin x} \times \\ &\quad \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sin x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + \cos x) + 1 = \\ &= 1 \times 1 \times 1 \times 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\bullet f(0) = 3$$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, então f é contínua em $x = 0$.

b) A função f é contínua em $]-2\pi, +\infty[$, logo o único candidato a assíntota vertical é a reta de equação $x = -2\pi$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2\pi)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2\pi)^+} \frac{\sin(x^2) + 1 - \cos x}{1 - \cos x} = \\ &= \frac{\sin(4\pi^2)}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

A reta de equação $x = -2\pi$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{9x}{x + \sin(2x)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x + \sin(2x)} \end{aligned}$$

Para qualquer $x \in]1, +\infty[$

$$-1 \leq \sin(2x) \leq 1$$

$$x - 1 \leq x + \sin(2x) \leq x + 1$$

$$\frac{9}{x+1} \leq \frac{9}{x + \sin(2x)} \leq \frac{9}{-1+x}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{-1+x} \right) = 0$, então,

pelo teorema das funções encastradas, tem-se

$$\text{que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x + \sin(2x)} = 0.$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x}{x + \sin(2x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{1 + \frac{\sin(2x)}{x}} \end{aligned}$$

Para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$,

$$-1 \leq \sin(2x) \leq 1$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(2x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, então, pelo teorema das funções encastradas, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(2x)}{x} = 0.$$

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{1 + \frac{\sin(2x)}{x}} = \frac{9}{1+0} = 9.$$

Logo, a reta de equação $y = 9$ é assíntota horizontal ao gráfico de f .

c) Seja $g(x) = f(x) - x$.

A função g é contínua em $[0, 3\pi]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas neste intervalo.

$$g(0) = f(0) - 0 = 3 - 0 = 3 > 0$$

$$g(3\pi) = f(3\pi) - 3\pi = \frac{9 \times 3\pi}{3\pi + \sin(6\pi)} - 3\pi = \frac{27\pi}{3\pi} - 3\pi = 9 - 3\pi < 0$$

Logo, $g(3\pi) < 0 < g(0)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$$\exists c \in]0, 3\pi[: g(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in]0, 3\pi[: f(c) - c = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]0, 3\pi[: f(c) = c, \text{ ou seja, a equação } f(x) = x \text{ tem pelo menos uma solução no intervalo }]0, 3\pi[.$$

Unidade 4 - Derivadas de funções trigonométricas

Páginas 99 a 109

19.

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \\ &= \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times 2 = 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

$$f'(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(2x)}{x - \pi} =$$

Mudança de variável:

$$y = x - \pi \Leftrightarrow x = y + \pi$$

Se $x \rightarrow \pi$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(2y + 2\pi)}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(2y)}{y} =$$

$$= \lim_{2y \rightarrow 0} \frac{\sin(2y)}{2y} \times 2 = 1 \times 2 = 2$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(2x) - 1}{x(\cos(2x) + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(2x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2x) + 1} = \\ &= - \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x) \times \\ &\quad \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2x) + 1} = -1 \times 2 \times 0 \times \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(\pi) &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos(2x) - 1}{x - \pi} = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = x - \pi \Leftrightarrow x = y + \pi$$

Se $x \rightarrow \pi$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(2y + 2\pi) - 1}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(2y) - 1}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos^2(2y) - 1}{y(\cos(2y) + 1)} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2y)}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-1}{\cos(2y) + 1} =$$

$$= \lim_{2y \rightarrow 0} \frac{\sin(2y)}{2y} \times 2 \times \lim_{y \rightarrow 0} \sin(2y) \times$$

$$\times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-1}{\cos(2y) + 1} = 1 \times 2 \times 0 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x \cos(2x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2x)} = \\ &= - \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2x)} = \\ &= 1 \times 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

$$f'(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan(2x)}{x - \pi} =$$

Mudança de variável:

$$y = x - \pi \Leftrightarrow x = y + \pi$$

Se $x \rightarrow \pi$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan(2y + 2\pi)}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan(2y)}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(2y)}{y \cos(2y)} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(2y)}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2y)} =$$

$$= \lim_{2y \rightarrow 0} \frac{\sin(2y)}{2y} \times 2 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2y)} =$$

$$= 1 \times 2 \times 1 = 2$$

20.

$$\text{a) } f'(x) = (3 \sin x + 4)' = (3 \sin x)' + 4' = 3 \cos x$$

$$\text{b) } f'(x) = (x^2 - \cos x)' = (x^2)' - (\cos x)' = 2x + \sin x$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(x) &= (\sin(5x + \pi))' = (5x + \pi)' \cos(5x + \pi) = \\ &= 5 \cos(5x + \pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f'(x) &= \left(\frac{\cos(2x)}{x} \right)' = \\ &= \frac{(\cos(2x))' \times x - (\cos(2x)) \times x'}{x^2} = \\ &= \frac{-2 \sin(2x) \times x - \cos(2x)}{x^2} = \\ &= - \frac{2x \sin(2x) + \cos(2x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } f'(x) &= (\sin^3(5x))' = 3 \sin^2(5x) \times (\sin(5x))' = \\ &= 3 \sin^2(5x) \times 5 \times \cos(5x) = \\ &= 15 \sin^2(5x) \cos(5x) \end{aligned}$$

21.

$$\text{a) } f'(x) = (\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } f'(x) &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \\
 &= \frac{(\cos x)' \times \sin x - (\cos x) \times (\sin x)'}{\sin^2 x} = \\
 &= \frac{-\sin x \times \sin x - \cos x \times \cos x}{\sin^2 x} = \\
 &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \\
 &= -\frac{1}{\sin^2 x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } f'(x) &= (\cos(x^2) - 3 \sin^2 x)' = (\cos(x^2))' - 3 \times (\sin^2 x)' = \\
 &= -(x^2)' \sin(x^2) - 3 \times 2 \sin x \times (\sin x)' = \\
 &= -2x \sin(x^2) - 6 \sin x \cos x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } f'(x) &= (\operatorname{tg} x \times \sin x)' = (\operatorname{tg} x)' \times \sin x + (\operatorname{tg} x) \times (\sin x)' = \\
 &= \frac{1}{\cos^2 x} \times \sin x + \operatorname{tg} x \times \cos x = \\
 &= \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} \times \cos x = \\
 &= \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} + \operatorname{tg} x \times \cos x = \\
 &= \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos x} + \cos x \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{e) } f'(x) = (\operatorname{tg}(2x) + x)' = \frac{2}{\cos^2(2x)} + 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } f'(x) &= \left(\frac{5}{\operatorname{tg} x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = \\
 &= \frac{5' \times \operatorname{tg} x - 5 \times (\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x} + \left(\frac{1}{x} \right)' \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \\
 &= -\frac{5 \times \frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1' \times x - 1 \times x'}{x^2} \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \\
 &= -\frac{5}{\cos^2 x \times \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} - \frac{1}{x^2} \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \\
 &= -\frac{5}{\sin^2(5x)} - \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g) } f'(x) &= (\operatorname{tg}^3(5x))' = 3 \operatorname{tg}^2(5x) \times (\operatorname{tg}(5x))' = \\
 &= 3 \operatorname{tg}^2(5x) \times \frac{5}{\cos^2(5x)} = \\
 &= \frac{15 \sin^2 x}{\cos^4(5x)}
 \end{aligned}$$

22.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f'(x) &= (3 \cos x \sin(2x))' = \\
 &= (3 \cos x)' \sin(2x) + (3 \cos x)(\sin(2x))' = \\
 &= -3 \sin x \sin(2x) + 3 \cos x \times 2 \cos(2x) = \\
 &= -3 \sin x \sin(2x) + 6 \cos x \cos(2x)
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } f'(x) = \left(\frac{3 \cos x}{1 + \sin x} \right)' =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(3 \cos x)'(1 + \sin x) - 3 \cos x (1 + \sin x)'}{(1 + \sin x)^2} = \\
 &= \frac{-3 \sin x (1 + \sin x) - 3 \cos x \cos x}{(1 + \sin x)^2} = \\
 &= \frac{-3 \sin x - 3 \sin^2 x - 3 \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = \\
 &= \frac{-3 \sin x - 3(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 + \sin x)^2} = \\
 &= \frac{-3 \sin x - 3}{(1 + \sin x)^2} = \\
 &= \frac{-3(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2} = \\
 &= -\frac{3}{1 + \sin x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } f'(x) &= \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right)' = \\
 &= \frac{1}{\cos^2 x} + \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \\
 &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \\
 &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \\
 &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}
 \end{aligned}$$

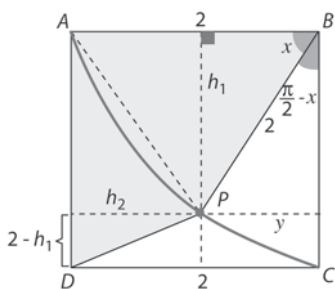
$$\begin{aligned}
 \text{d) } f'(x) &= \left(\sqrt{\frac{3 - \cos x}{3 - \sin(3x)}} \right)' = \left(\left(\frac{3 - \cos x}{3 - \sin(5x)} \right)^{\frac{1}{2}} \right)' = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3 - \cos x}{3 - \sin(5x)} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3 - \cos x}{3 - \sin(5x)} \right)' = \\
 &= \frac{(3 - \cos x)' (3 - \sin(5x)) - (3 - \cos x)(3 - \sin(5x))'}{(3 - \sin(5x))^2} = \\
 &= \frac{\sin x (3 - \sin(5x)) - (3 - \cos x)(-5 \cos(5x))}{(3 - \sin(5x))^2} = \\
 &= \frac{\sin x}{3 - \sin(5x)} + \frac{5(3 - \cos x) \cos(5x)}{(3 - \sin(5x))^2} = \\
 &= \frac{\sin x}{3 - \sin(5x)} + \frac{5(3 - \cos x) \cos(5x)}{(3 - \sin(5x))^2} =
 \end{aligned}$$

23.

$$\text{a) } A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2} = \frac{1 \times \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sin x}{2 \cos x}$$

24.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin x &= \frac{h_1}{2} \\ \Leftrightarrow h_1 &= 2 \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{y}{2} \\ \Leftrightarrow y &= 2 \cos x \\ h_2 &= 2 - y = \\ &= 2 - 2 \cos x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A_{[ABPD]} &= A_{\triangle[APB]} + A_{\triangle[APD]} = \\ &= \frac{2 \times h_1}{2} + \frac{2 \times h_2}{2} = \\ &= h_1 + h_2 = \\ &= 2 \sin x + 2 - 2 \cos x = \\ &= 2(1 + \sin x - \cos x) \end{aligned}$$

$$\text{b) } P_{[ABPD]} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{BP} + \overline{PD}$$

Cálculo de $\overline{PD}$:

$$\begin{aligned} \overline{PD}^2 &= h_2^2 + (2 - h_1)^2 \\ \Leftrightarrow \overline{PD}^2 &= (2 - 2 \cos x)^2 + (2 - 2 \sin x)^2 \\ \Leftrightarrow \overline{PD}^2 &= 4 - 8 \cos x + 4 \cos^2 x + 4 - 8 \sin x + 4 \sin^2 x \\ \Leftrightarrow \overline{PD}^2 &= 8 - 8 \cos x - 8 \sin x + 4 \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_1 \\ \Leftrightarrow \overline{PD} &= \sqrt{12 - 8 \cos x - 8 \sin x}, \overline{PD} > 0 \\ P_{[ABPD]} &= 2 + 2 + 2 + \sqrt{12 - 8 \cos x - 8 \sin x} = \\ &= 6 + \sqrt{4(3 - 2 \cos x - 2 \sin x)} = \\ &= 6 + 2 \sqrt{3 - 2 \cos x - 2 \sin x} \end{aligned}$$

25.

$$\begin{aligned} \text{a) } A(\alpha) &= \frac{\overline{OR} \times \text{ordenada de } P}{2} \\ \cos \alpha &= \text{abscissa de } P \\ \sin \alpha &= \text{ordenada de } P \\ \overline{OR} &= 2 \cos \alpha \\ A(\alpha) &= \frac{2 \cos \alpha \times \sin \alpha}{2} = \sin \alpha \times \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A'(\alpha) &= (\sin \alpha \cos \alpha)' = \\ &= (\sin \alpha)' \cos \alpha + \sin \alpha (\cos \alpha)' = \\ &= \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha (-\sin \alpha) = \\ &= \cos (2\alpha) \end{aligned}$$

$$A'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos (2\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \text{ então } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

α	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Varição de A	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

Logo, a área é máxima para $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

26.

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= (\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x = \sin x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Em $[0, 2\pi]$ os zeros de f' são $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
Sinal de f'	+	+	0	-	0	+	+
Varição de f	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.

$$f(0) = 1 \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \quad f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \quad f(2\pi) = 1$$

f é estritamente crescente em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$;

f é estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$;

1 é mínimo relativo para $x = 0$;

$\sqrt{2}$ é máximo absoluto para $x = \frac{\pi}{4}$;

$-\sqrt{2}$ é mínimo absoluto para $x = \frac{5\pi}{4}$;

1 é máximo relativo para $x = 2\pi$;

$$\begin{aligned} \text{b) } g'(x) &= \left(\frac{1}{\tan x}\right)' = \frac{1' \times \tan x - 1 \times (\tan x)'}{\tan^2 x} = \\ &= \frac{-1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x \times \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sin^2 x} = 0$, que é uma equação impossível. Logo, g' não tem zeros.

Como $-\frac{1}{\sin^2 x} < 0, \forall x \in]0, \pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, conclui-se que g é estritamente decrescente em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e em $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e não tem extremos.

27.

$$\text{a) } f'(x) = (x^2 - (\cos x + 1)^2)' = 2x + 2(\cos x + 1) \sin x$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= (2x + 2(\cos x + 1) \sin x)' = \\
 &= 2 + 2((\cos x + 1)' \sin x + (\cos x + 1)(\sin x)') = \\
 &= 2 + 2(-\sin x \sin x + (\cos x + 1) \cos x) = \\
 &= 2 + 2(-1 + \cos^2 x + \cos^2 x + \cos x) = \\
 &= 2 - 2 + 4 \cos^2 x + 2 \cos x = \\
 &= 4 \cos^2 x + 2 \cos x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 4 \cos^2 x + 2 \cos x &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2 \cos x (2 \cos x + 1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2 \cos x = 0 \vee 2 \cos x + 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x &= -\frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Como } x \in [0, 2\pi], \text{ então } x &= \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee \\
 \vee x &= \frac{4\pi}{3} \vee x = \frac{3\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$2 \cos x$	+	+	0	-	-	-	-	-	0	+	+
$2 \cos x + 1$	+	+	+	+	0	-	0	+	+	+	+
Sinal de f'	+	+	0	-	0	+	0	-	0	+	+
Sentido das concavidades do gráfico de f			$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, em $\left]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ e em $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ e em $\left]\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right]$; apresenta quatro pontos de inflexão de abscissas $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

- b)** $f'(x) = (x^2 - (\cos x + 1)^2)' = 2x + 2(\cos x + 1) \sin x$
 $f'(\pi) = 2\pi + 2(\cos \pi + 1) \sin \pi = 2\pi$
A reta r é do tipo $y = 2\pi x + b$.
 $f(\pi) = \pi^2 - (\cos \pi + 1)^2 = \pi^2$
O ponto A , de coordenadas (π, π^2) , pertence à reta r , logo $\pi^2 = 2\pi \times \pi + b \Leftrightarrow b = -\pi^2$.
Assim, $r: y = 2\pi x - \pi^2$.
Se $y = 0$, então $x = \frac{\pi}{2}$. Logo, $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
Se $x = 0$, então $y = -\pi^2$. Logo, $C(0, -\pi^2)$.

Então:

$$A_{[OBC]} = \frac{\frac{\pi}{2} \times \pi^2}{2} = \frac{\pi^3}{4}$$

28. Tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \frac{\overline{BC}}{4} \Leftrightarrow \overline{BC} = 4 \cos \alpha \\
 \sin \alpha &= \frac{\overline{AC}}{4} \Leftrightarrow \overline{AC} = 4 \sin \alpha
 \end{aligned}$$

Seja S a região a sombreado. Então,

$$\begin{aligned}
 A_S &= \frac{\pi \times 2^2}{2} - \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = 2\pi - \frac{4 \sin \alpha \times 4 \cos \alpha}{2} = \\
 &= 2\pi - 8 \sin \alpha \cos \alpha = 2\pi - 4 \sin (2\alpha)
 \end{aligned}$$

Como A é uma função real de variável real contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Fica assim garantido, pelo teorema de Weierstrass, que A admite máximo e mínimo absolutos, ou seja, fica justificado que existe um valor real de α para o qual a área da região a sombreado é mínima.

$$A'(\alpha) = (2\pi - 4 \sin (2\alpha))' = -8 \cos (2\alpha)$$

$$\begin{aligned}
 A'(\alpha) &= 0 \Leftrightarrow -8 \cos (2\alpha) = 0 \\
 \Leftrightarrow \cos (2\alpha) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ vem que } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
Sinal de A'	-	0	+
Variação de A	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

O valor de α para o qual a área do triângulo é mínima é $\frac{\pi}{4}$.

- 29.** $f(x) = \frac{1}{\sin x}$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
 $f(-x) = \frac{1}{\sin(-x)} = \frac{1}{-\sin x} = -\frac{1}{\sin x} = -f(x), \forall x \in D_f$
ou seja, f é ímpar.

A função é periódica, de período positivo mínimo 2π .
 $f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in D_f$.

Assim, basta estudar a função num intervalo de amplitude 2π , como, por exemplo, $]0, 2\pi[$.

Pontos de interseção do gráfico de f com os eixos coordenados:

Com o eixo Ox :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} = 0$$

Equação impossível logo, f não intersesta o eixo Ox , isto é, f não tem zeros.

Com o eixo Oy :

O gráfico de f não intersesta o eixo Oy já que $0 \notin D_f$.

Assíntotas:

Assíntotas não verticais:

Como basta estudar a função no intervalo $]0, 2\pi[$, atendendo à periodicidade da função, não faz sentido a análise da existência de assíntotas não verticais.

Assíntotas verticais:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Em $]0, 2\pi[$:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta da equação $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f . Atendendo à periodicidade da função, pode concluir-se que as retas de equação $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ são assíntotas do gráfico de f .

$$(2) \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = \pi$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f . Mais uma vez, atendendo à periodicidade da função, pode concluir-se que as retas de equação $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ são assíntotas ao gráfico de f .

Assim, de (1) e (2) temos que as retas de equação $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ são assíntotas ao gráfico de f .

Variação de f :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sin x} \right)' = \frac{1' \times \sin x - 1 \times (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \wedge x \in D_f$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = 0 \wedge x \in D_f$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \wedge x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $]0, 2\pi[$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
Sinal de f'	n.d.	-	0	+	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de f	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -1$$

f apresenta um mínimo relativo igual a 1 para

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ e um máximo relativo igual a } -1 \text{ para } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Sentido das concavidades do gráfico de f :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-\cos x}{\sin^2 x} \right)' = \\ &= \frac{(-\cos x)' \times \sin^2 x - (-\cos x) \times (\sin^2 x)'}{(\sin^2 x)^2} = \\ &= \frac{\sin x \times \sin^2 x + \cos x \times 2 \times \sin x \times \cos x}{\sin^4 x} = \\ &= \frac{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}{\sin^3 x} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \wedge x \in D_f$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}{\sin^3 x} = 0 \wedge x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + 2 \cos^2 x = 0 \wedge x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

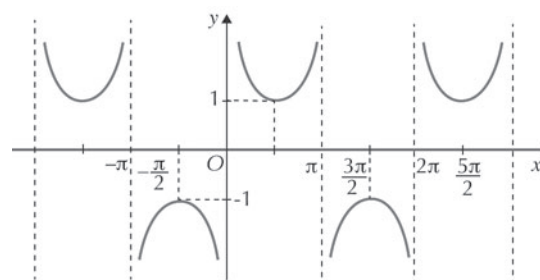
$$\Leftrightarrow \underbrace{\sin^2 x = -2 \cos^2 x}_{\text{condição impossível, logo } f'' \text{ não tem zeros.}} \wedge x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Em $]0, 2\pi[$:

x	0		π		2π
Sinal de f'	n.d.	+	n.d.	-	n.d.
Sentido das concavidades do gráfico de f	n.d.	$\cup$	n.d.	$\cap$	n.d.

f não apresenta pontos de inflexão.

Representação gráfica:



$$D_f' =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

$$30. D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Cálculo auxiliar

$$1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{1 - \cos(-x)} = \frac{-\sin x}{1 - \cos x} = -\frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

$$= -f(x), \forall x \in D_f, \text{ ou seja, } f \text{ é ímpar.}$$

A função f é periódica, de período positivo mínimo 2π : $f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in D_f$

Assim, basta estudar a função num intervalo de amplitude 2π , por exemplo, $]0, 2\pi[$.

Pontos de interseção do gráfico de f com os eixos coordenados:

Com o eixo Ox :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{1 - \cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \wedge x \in D_f$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox são os pontos da forma $(\pi + 2k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$.

Com o eixo Oy :

O gráfico de f não intersesta o eixo Oy já que $0 \notin D_f$.

Assíntotas:

Assíntotas não verticais:

Como basta estudar a função no intervalo $]0, 2\pi[$, atendendo à periodicidade da função, não faz sentido a análise da existência de assíntotas não verticais.

Assíntotas verticais:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Em $]0, 2\pi[$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{1 - \cos x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \times (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x (1 + \cos x)}{\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \cos x}{\sin x} =$$

$$= \frac{1 + \cos 0^+}{\sin 0^+} =$$

$$= \frac{2}{0^+} =$$

$$= +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico da função f . Atendendo à periodicidade da função, pode concluir-se que as retas de equação $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ são assíntotas ao gráfico de f .

Variação de f :

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} \right)' =$$

$$= \frac{(\sin x)' \times (1 - \cos x) - \sin x \times (1 - \cos x)'}{(1 - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x (1 - \cos x) - \sin x (\sin x)}{(1 - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(1 - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x - 1}{(1 - \cos x)^2} =$$

$$= -\frac{1 - \cos x}{(1 - \cos x)^2} =$$

$$= -\frac{1}{1 - \cos x}$$

$f'(x) < 0, \forall x \in]0, 2\pi[$, logo f é estritamente decrescente e não tem extremos.

Sentido das concavidades do gráfico de f :

$$f''(x) = \left(\frac{-1}{1 - \cos x} \right)' =$$

$$= \frac{(-1)' \times (1 - \cos x) - (-1) \times (1 - \cos x)'}{(1 - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2}$$

$$f''(x) = 0 \wedge x \in D_f$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2} = 0 \wedge x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \wedge x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

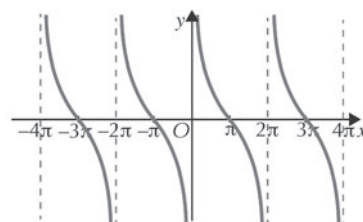
$$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Em $]0, 2\pi[$:

x	0		π		2π
Sinal de f'	n.d.	+	0	-	n.d.
Sentido das concavidades do gráfico de f	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$	n.d.

Os pontos de inflexão são os pontos da forma $(\pi + 2k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$.

Representação gráfica:



$$D'_f = \mathbb{R}$$

Unidade 5 - Estudo das funções definidas analiticamente por $a \sin(bx + c) + d$, $a \cos(bx + c) + d$ e $a \tan(bx + c) + d$, ($a, b \neq 0$)

Páginas 110 a 116

31.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f'\left(x + \frac{2\pi}{b}\right) &= \cos\left[b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right)\right] = \\ &= \cos(bx + 2\pi) = \cos(bx) = f(x) \end{aligned}$$

Logo, $\frac{2\pi}{b}$ é o período de f .

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad g\left(x + \frac{2\pi}{b}\right) &= \sin\left[b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right)\right] + \cos\left[b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right)\right] = \\ &= \sin(bx + 2\pi) + \cos(bx + 2\pi) = \\ &= \sin(bx) + \cos(bx) = \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Logo, $\frac{2\pi}{b}$ é o período de g .

32.

a) Dilatação vertical segundo fator 3.

b) Compressão horizontal segundo fator $\frac{1}{3}$.

c) Translação horizontal segundo o vetor $\left(-\frac{\pi}{5}, 0\right)$.

d) Simetria em relação ao eixo Ox .

e) Simetria em relação ao eixo Oy .

$$\text{f)} \quad f_6(x) = 2 \cos(3x - \pi) - 1 = 2 \cos\left[3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] - 1$$

Compressão horizontal segundo fator $\frac{1}{3}$; translação horizontal segundo o vetor $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$; dilatação vertical segundo fator 2; translação vertical segundo o vetor $(0, -1)$.

33.

$$\text{a)} \quad 3 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(3x) = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

($\times 5$) ($\times 2$)

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{10} - \frac{2\pi}{10} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{10} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$-\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(-x) = 0 \Leftrightarrow -x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \cos(3x - \pi) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(3x - \pi) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(3x - \pi) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x - \pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 3x - \pi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 3x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \vee 3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b)} \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3 \cos x \leq 3 \quad D'_{f_1} = [-3, 3]$$

$$-1 \leq \cos(3x) \leq 1 \quad D'_{f_2} = [-1, 1]$$

$$-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \leq 1 \quad D'_{f_3} = [-1, 1]$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\cos x \leq 1 \quad D'_{f_4} = [-1, 1]$$

$$-1 \leq \cos(-x) \leq 1 \quad D'_{f_5} = [-1, 1]$$

$$-1 \leq \cos(3x - \pi) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos(3x - \pi) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq 2 \cos(3x - \pi) - 1 \leq 1 \quad D'_{f_6} = [-3, 1]$$

c) f_1, f_3, f_4 e f_5 têm período positivo mínimo 2π (partindo do gráfico de $f(x) = \sin x$, cujo período positivo mínimo é 2π , as transformações não envolvem dilatações nem compressões horizontais e por isso o período mantém-se). Os gráficos de f_2 e f_6 sofrem uma compressão horizontal segundo fator $\frac{1}{3}$. Logo, o período positivo mínimo é $\frac{2\pi}{3}$.

34.

a)

i) Dilatação vertical segundo fator 4.

ii) Compressão horizontal segundo fator $\frac{1}{4}$.

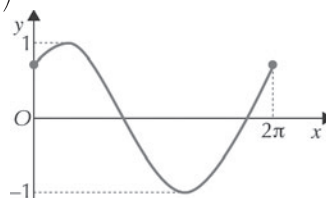
iii) Dilatação horizontal segundo fator 2.

iv) Dilatação horizontal segundo fator 4; dilatação vertical segundo fator 5; translação vertical segundo o vetor $(0, 1)$.

$$\text{b)} \quad f_1 \rightarrow \pi \quad f_2 \rightarrow \frac{\pi}{4} \quad f_3 \rightarrow 2\pi \quad f_4 \rightarrow 4\pi$$

35.

$$\text{a)} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \text{ em } [0, 2\pi]$$



Período positivo mínimo: 2π

Contradomínio: $[-1, 1]$

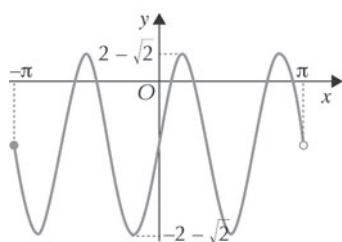
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [0, 2\pi]$, então $x = \frac{3\pi}{4} \vee x = \frac{7\pi}{4}$.

Zeros: $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$

b) $2 \sin(3x) - \sqrt{2}$, em $[-\pi, \pi]$



Período positivo mínimo: $\frac{2\pi}{3}$

Contradomínio: $[-2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}]$

$$2 \sin(3x) - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 3x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

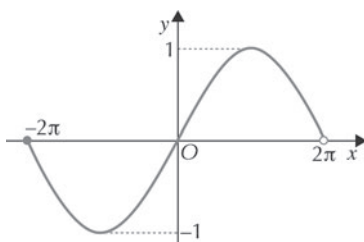
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [-\pi, \pi]$, então $x = -\frac{7\pi}{12} \vee x = -\frac{5\pi}{12} \vee$

$$\vee x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4} \vee x = \frac{11\pi}{12}$$

Zeros: $-\frac{7\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}$

c) $\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$, em $[-2\pi, 2\pi]$

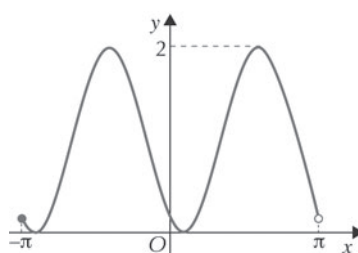


Período positivo mínimo: 4π

Contradomínio: $[-1, 1]$

Zeros: $-2\pi, 0$

d) $1 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, em $[-\pi, \pi]$



Período positivo mínimo: π

Contradomínio: $[0, 2]$

$$1 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

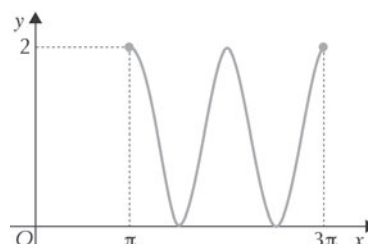
$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [-\pi, \pi]$, então $x = -\frac{11\pi}{12} \vee x = \frac{\pi}{12}$.

Zeros: $-\frac{11\pi}{12}, \frac{\pi}{12}$

e) $\cos(2x) + 1$, em $[\pi, 3\pi]$



Período positivo mínimo: 2π

Contradomínio: $[0, 2]$

$$\cos(2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -1$$

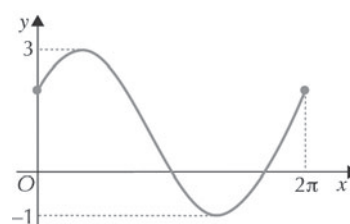
$$\Leftrightarrow 2x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [\pi, 3\pi]$, então $x = \frac{3\pi}{2} \vee x = \frac{5\pi}{2}$.

Zeros: $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$

f) $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$, em $[0, 2\pi]$



Período positivo mínimo: 2π

Contradomínio: $[-1, 3]$

$$2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

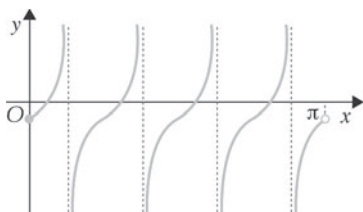
$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [0, 2\pi]$, então $x = \pi \vee x = \frac{5\pi}{3}$.

Zeros: $\pi, \frac{5\pi}{3}$

g) $\tan(4x) - 1$, em $[0, \pi[\setminus \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \right\}$



Período positivo mínimo: $\frac{\pi}{4}$

Contradomínio: $\mathbb{R}$

$$\tan(4x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan(4x) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

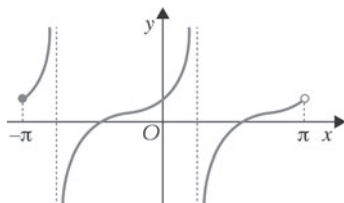
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [0, \pi[\setminus \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \right\}$, então

$$x = \frac{\pi}{16} \vee x = \frac{5\pi}{16} \vee x = \frac{9\pi}{16} \vee x = \frac{13\pi}{16}.$$

Zeros: $\frac{\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{13\pi}{16}$

h) $3 \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}$, em $[-\pi, \pi[\setminus \left\{ -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\}$



Período positivo mínimo: π

Contradomínio: $\mathbb{R}$

$$3 \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [-\pi, \pi[\setminus \left\{ -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\}$, então

$$x = \frac{7\pi}{12} \vee x = -\frac{5\pi}{12}.$$

Zeros: $-\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}$

36. $f(x) = 2 \operatorname{tg}(0,5x + 3) - 1$

$$= 2 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(x + 6)\right) - 1$$

a) $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R}: 0,5x + 3 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} =$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}: \frac{1}{2}x \neq \frac{\pi}{2} - 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} =$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}: x \neq \pi - 6 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$$

$$D'_f = \mathbb{R}$$

b) $f(x + 2\pi) = 2 \operatorname{tg}(0,5(x + 2\pi) + 3) - 1 =$

$$= 2 \operatorname{tg}(0,5x + \pi + 3) - 1 =$$

$$= 2 \operatorname{tg}(0,5x + 3) - 1 =$$

$$= f(x), \forall x \in D_f$$

Logo, 2π é o período da função.

c) Dilatação horizontal segundo fator 2;

translação horizontal segundo o vetor $(-6, 0)$;

dilatação vertical segundo fator 2;

translação vertical segundo o vetor $(0, -1)$.

Unidade 6 - Aplicações aos osciladores harmônicos

Páginas 117 a 130

37. $x(t) = 5 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{8}\right)$

Amplitude: $A = 5$

Pulsuação: $\omega = \frac{\pi}{2}$

Fase: $\varphi = \frac{\pi}{8}$

38.

a) $x(0) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -1 + \sqrt{2}$

$$x(1) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - 1 =$$

$$= 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) - 1 =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 1 =$$

$$= -1 - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

b) A amplitude de $x(t)$ é $A = 2$.

c) O período de $x(t)$ é $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ e a sua frequência

$$\text{é } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{6}.$$

d) $|x(t)| = \sqrt{3} - 1$

$$\Leftrightarrow 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = \sqrt{3} - 1 \vee 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = -\sqrt{3} + 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$

Assim:

$$\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee$$

$$\vee \frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4} \approx 1,44 + k\pi \vee \frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{4} \approx 4,85 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}t = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{3}t = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \vee$$

$$\vee \frac{\pi}{3}t \approx 1,44 - \frac{\pi}{4} + k\pi \vee \frac{\pi}{3}t \approx 4,85 - \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{4} + 6k \vee t = -\frac{5}{4} + 6k \vee$$

$$\vee t \approx \frac{4,32}{\pi} - \frac{3}{4} + 3k \vee t \approx \frac{14,55}{\pi} - \frac{3}{4} + 3k, k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in [0, 6]$, então $t = 5,75 \vee t = 4,75 \vee$
 $\vee t \approx 0,62 \vee t \approx 3,88$.

e) Para qualquer valor real t , tem-se:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 1$$

Isto é, $-3 \leq x(t) \leq 1$.

Então:

$$|x(t)| = 3$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 3 \vee 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = -3$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \vee \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) = -1}_{\text{condição impossível}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{9}{4} + 6k, k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in [0, 6]$, então $t = \frac{9}{4}$.

39.

a) Para qualquer valor real t , tem-se:

$$-1 \leq \left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 4 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) \leq 7$$

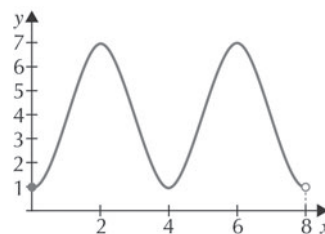
Assim, a distância mínima do corpo C ao solo é 1 metro e a distância máxima é 7 metros.

b) $A = 3$

c) $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4}$$

d) $\varphi = \pi$



e) $|D(t)| = 4$

$$\Leftrightarrow 4 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = 4 \vee 4 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = -4$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = 0 \vee 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = -8$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = 0 \vee \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = -\frac{8}{3}}_{\text{condição impossível}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}t + \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}t = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = -1 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in [0, 8]$, então $t = 1 \vee t = 3 \vee t = 5 \vee t = 7$.

40.

a) $A = 4$, pois o máximo é 4 e o mínimo é -4 .

$T = 2$, pois $2 - 0 = 2$.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow 2 = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \omega = \pi$$

Como g é um oscilador harmónico, então é definido por uma expressão do tipo $g(t) = 4 \cos(\pi t + \varphi)$.

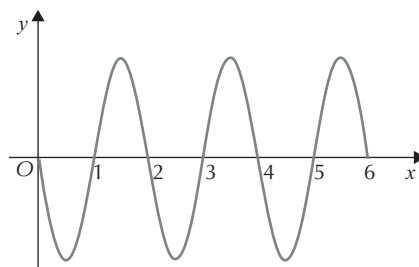
$$g(0) = 0 \Leftrightarrow 4 \cos(\varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\varphi) = 0$$

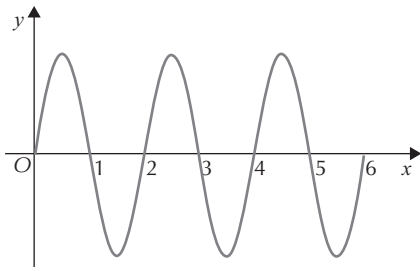
$$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\varphi \in [0, 2\pi]$, então $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Se $\varphi = \frac{\pi}{2}$, então g teria a seguinte representação gráfica:



Se $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, então g teria a seguinte representação gráfica:



Pela observação dos gráficos, conclui-se que $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

b) Pela alínea anterior, conclui-se que

$$g(t) = 4 \cos\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{c) } g(t) = 1 &\Leftrightarrow 4 \cos\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Então:

$$\pi t + \frac{3\pi}{2} \approx 1,318 + 2k\pi \vee \pi t + \frac{3\pi}{2} = -1,318 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t \approx \frac{1,318}{\pi} - \frac{3}{2} + 2k\pi \vee t \approx -\frac{1,318}{\pi} - \frac{3}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in [0, 6]$, então $t \approx 0,08 \vee t \approx 0,92 \vee t \approx 2,08 \vee t \approx 2,92 \vee t \approx 4,08$ ou $t \approx 4,92$.

$$41. f(t) = \sin t + \cos t$$

$$f'(t) = (\sin t + \cos t)' = \cos t - \sin t$$

$$f''(t) = (\cos t - \sin t)' =$$

$$= -\sin t - \cos t =$$

$$= -(\sin t + \cos t) =$$

$$= -f(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

$$42. f(t) = \sin(3t) + 5 \cos(3t)$$

$$f'(t) = (\sin(3t) + 5 \cos(3t))' = 3 \cos(3t) - 15 \sin(3t)$$

$$f''(t) = (3 \cos(3t) - 15 \sin(3t))' =$$

$$= -9 \sin(3t) - 45 \cos(3t) =$$

$$= -9(\sin(3t) + 5 \cos(3t)) =$$

$$= -9f(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

$$43. f(t) = 3 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$f'(t) = \left(3 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)\right)' = -6 \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$f''(t) = \left(-6 \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)\right)' =$$

$$= -12 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -4 \times 3 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -4f(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

$$44. f(t) = \cos(3t + \pi)$$

$$f'(t) = (\cos(3t + \pi))' = -3 \sin(3t + \pi)$$

$f''(t) = (-3 \sin(3t + \pi))' = -9 \cos(3t + \pi) \neq f(t)$, já que, por exemplo, para $t = 0$, $f(0) = 1$ e $f''(0) = -9$.

45.

$$\text{a) } f(t) = \sin(3t) + \sqrt{3} \cos(3t) =$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \sin(3t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(3t)\right) =$$

$$= 2 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(3t) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(3t)\right) =$$

$$= 2 \cos\left(3t - \frac{\pi}{3}\right), \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } f'(t) = \left(2 \cos\left(3t - \frac{\pi}{3}\right)\right)' = -6 \sin\left(3t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$f''(t) = \left(-6 \sin\left(3t - \frac{\pi}{3}\right)\right)' =$$

$$= -18 \cos\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= -9 \times 2 \cos\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) = -9 \times f(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

Assim, $k = 9$.

46.

$$\text{a) } x(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) =$$

$$= 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) =$$

$$= 3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) =$$

$$= 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right), \forall t \in \mathbb{R}$$

Como $x(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$ e $3 > 0$, $\frac{\pi}{2} > 0$ e

$\frac{\pi}{6} \in [0, 2\pi]$, então $x(t)$ é um oscilador harmônico.

b) Amplitude: $A = 3$

$$\text{Período: } T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$\text{Frequência: } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Ângulo de fase: } \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{c) } x'(t) = \left(3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)\right)' = -\frac{3\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$|x'(t)| = 0 \Leftrightarrow \left|-\frac{3\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}t = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad x''(t) &= \left(-\frac{3\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)\right)' = \\ &= -\frac{3\pi^2}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= -\frac{\pi^2}{4} \times 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= -\frac{\pi^2}{4} f(t), \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } k = \frac{\pi^2}{4}.$$

47.

a) Se $y(t) = x(t) - \frac{1}{4}$, então:

$$\begin{aligned} y''(t) &= -4y(t) \\ \Leftrightarrow \left(x(t) - \frac{1}{4}\right)'' &= -4\left(x(t) - \frac{1}{4}\right) \\ \Leftrightarrow (x'(t))' &= -4x(t) + 1 \\ \Leftrightarrow x''(t) &= x''(t), \text{ pois } x''(t) = -4x(t) + 1 \end{aligned}$$

Assim, a função y satisfaz a equação diferencial linear $y''(t) = -4y(t)$.

b) $x(t)$ representa a abscissa de um ponto material P no instante t em que se desloca num eixo r .

Como $y(t) = x(t) - \frac{1}{4}$, então o ponto R de abscissa $\frac{1}{4}$ pode ser considerado como origem do referencial. Assim, a abscissa do ponto P pode ser dada por $y(t)$.

c) Se $y(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$, então:

$$\begin{aligned} y''(t) &= -4y(t) \\ \Leftrightarrow (a \cos(2t) + b \sin(2t))'' &= -4(a \cos(2t) + \\ &\quad + b \sin(2t)) \\ \Leftrightarrow (-2a \sin(2t) + 2b \cos(2t))' &= -4a \cos(2t) - \\ &\quad - 4b \sin(2t) \\ \Leftrightarrow -4a \cos(2t) - 4b \sin(2t) &= -4a \cos(2t) - \\ &\quad - 4b \sin(2t) \end{aligned}$$

Como chegamos a uma igualdade verdadeira, concluímos que a função definida por $y(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$ satisfaz a equação diferencial linear $y''(t) = -4y(t)$.

d) Sabe-se que:

- $y(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$
- $y(0) = 3$
- $y'(\pi) = 10$

Então:

$$\begin{aligned} y(0) = 3 &\Leftrightarrow a \cos(0) + b \sin(0) = 3 \\ &\Leftrightarrow a = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(t) &= (a \cos(2t) + b \sin(2t))' = \\ &= -2a \sin(2t) + 2b \cos(2t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(\pi) = 10 &\Leftrightarrow -6 \sin(2\pi) + 2b \cos(2\pi) = 10 \\ &\Leftrightarrow 2b = 10 \\ &\Leftrightarrow b = 5 \end{aligned}$$

Aprende Fazendo

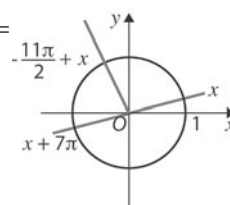
Páginas 134 a 151

1. Opção (C)

O seno é crescente e negativo no 4.º quadrante e neste quadrante o seno é negativo e o cosseno é positivo, logo o produto é negativo.

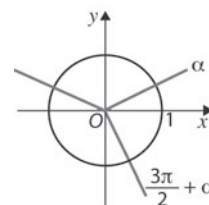
2. Opção (B)

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{11\pi}{2}\right) - 2 \cos(x + 7\pi) &= \\ = \cos x - (-2 \cos x) &= \\ = \cos x + 2 \cos x &= \\ = 3 \cos x \end{aligned}$$



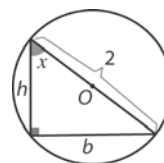
3. Opção (D)

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= -\cos \alpha \\ \cos(-\alpha + \pi) &= -\cos \alpha \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= \\ = \cos(-\alpha + \pi), \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



4. Opção (A)

$$\begin{aligned} A_{\text{sombreada}} &= A_{\text{círculo}} - A_{\text{triângulo}} = \\ &= \pi \times 1^2 - \frac{b \times h}{2} = \\ &= \pi - \frac{2 \sin x \times 2 \cos x}{2} = \\ &= \pi - 2 \sin x \cos x = \\ &= \pi - \sin(2x) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{b}{2} \\ \Leftrightarrow b &= 2 \sin x \\ \cos x &= \frac{h}{2} \\ \Leftrightarrow h &= 2 \cos x \end{aligned}$$

5. Opção (A)

$$\begin{aligned} \text{Comprimento do arco de circunferência } AP &= C(\alpha) = \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \times \pi = \alpha \end{aligned}$$

6. Opção (C)

$$D = \{x \in \mathbb{R}: \sin(2x) \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Cálculo auxiliar

$$\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

7. Opção (C)

$$\text{Se } x = \frac{\pi}{3}:$$

$$\text{– na opção (A): } \cos\left(3 \times \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(3 \times \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \pi + \sin \pi = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 = 0$$

Proposição falsa.

$$\text{– na opção (B): } \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(3 \times \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos 0 = \sin \pi$$

$$\Leftrightarrow 1 = 0$$

Proposição falsa.

$$\text{– na opção (C): } 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Proposição falsa, logo $\frac{\pi}{3}$ é a solução.

$$\text{– na opção (D): } \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} = 0$$

Proposição falsa.

8. Opção (C)

$$4 \sin^2 x = 4$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

9. Opção (A)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin(5x)}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x + e^x + k)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{5x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin(5x) \times 5}{5x}\right) = \cos 0 + e^0 + k$$

$$\Leftrightarrow 5 \times \lim_{5x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(5x)}{5x} = 1 + 1 + k$$

$$\Leftrightarrow 5 \times 1 = 2 + k$$

$$\Leftrightarrow k = 3$$

10. Opção (A)

π é o período positivo mínimo, pois:

$$f(x + \pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x + \pi) = 6 \cos(2(x + \pi)) - 3 =$$

$$= 6 \cos(2x + 2\pi) - 3 =$$

$$= 6 \cos(2x) - 3 =$$

$$= f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

11. Opção (B)

Para qualquer valor real x , tem-se que:

$$0 \leq \left| \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right) \right| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 1 + \left| \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right) \right| \leq 2$$

Ou seja, $1 \leq g(x) \leq 2$, logo $D'_g = [1, 2]$.

12. Opção (A)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: \cos x \geq 0\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}: -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

13. Opção (C)

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} (\operatorname{tg} x - 3x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{0^-} - \frac{3\pi}{2} = -\infty$$

Logo, o gráfico de f admite assíntotas verticais da

forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

14. Opção (B)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + h) - \sin \pi}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin h - 0}{h} = \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = -1 \end{aligned}$$

15. Opção (D)

Para qualquer valor real x , tem-se:

$$-1 \leq \sin\left(bx - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -a \leq a \sin\left(bx - \frac{\pi}{3}\right) \leq a$$

$$\Leftrightarrow 1 - a \leq 1 + a \sin\left(bx - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 + a$$

$$\text{Como } -2 \leq f(x) \leq 4, \text{ então } \begin{cases} 1 - a = -2 \\ 1 + a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3.$$

Por outro lado:

$$f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3 \sin\left(-\frac{\pi}{12}b - \frac{\pi}{3}\right) = -2$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{12}b - \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{12}b - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{12}b + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow b + 4 = 6 + 24k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow b = 2 + 24k, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $b = 2$.

16. Opção (A)

$$\pi - \frac{3}{n} < \pi, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Assim, } u_n = f\left(\pi - \frac{3}{n}\right) = \cos\left(\pi - \frac{3}{n}\right) = -\cos\left(\frac{3}{n}\right).$$

$$\text{Logo, } \lim u_n = \lim\left(-\cos\left(\frac{3}{n}\right)\right) = -\cos 0 = -1.$$

17. Opção (A)

$$\lim_{x \rightarrow 3\pi} \frac{\sin x}{x - 3\pi} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y + 3\pi)}{y} =$$

Mudança de variável:

$$x - 3\pi = y \Leftrightarrow x = y + 3\pi$$

Se $x \rightarrow 3\pi$, então $y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{y} = \\ &= -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = -1 \end{aligned}$$

18. Opção (B)

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\cos^2 x - \sin x)' = \\ &= 2 \cos x (-\sin x) - \cos x = \\ &= -2 \sin x \cos x - \cos x \end{aligned}$$

$$g'(\pi) = -2 \sin \pi \cos \pi - \cos \pi = 1$$

Logo, a equação da reta t é do tipo $y = x + b$.

$$g(\pi) = \cos^2 \pi - \sin \pi = 1$$

O ponto de coordenadas $(\pi, 1)$ pertence à reta t .

$$\text{Assim, } 1 = \pi + b \Leftrightarrow b = -\pi + 1.$$

$$\text{Então } t: y = x - \pi + 1.$$

$$\text{Se } y = 0, \text{ então } 0 = x - \pi + 1 \Leftrightarrow x = \pi - 1.$$

As coordenadas do ponto de interseção da reta t com o eixo das abscissas são $(\pi - 1, 0)$.

19. Opção (C)

Sejam f e g as funções seno e cosseno, respectivamente.

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Um vetor diretor da reta r , tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $\frac{\pi}{3}$, pode ser $\vec{r}(2, 1)$.

$$g'(x) = (\cos x)' = -\sin x$$

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Um vetor diretor da reta s , tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa $\frac{\pi}{3}$, pode ser $\vec{s}(-2, \sqrt{3})$.

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = -4 + \sqrt{3}$$

Seja α o ângulo formado pelas retas r e s .

$$\cos \alpha = \frac{|-4 + \sqrt{3}|}{\sqrt{5} \times \sqrt{7}}$$

Logo, $\alpha \approx 67^\circ$.

20.

$$\text{a) } A_{[PSRQ]} = \frac{\overline{SP} + \overline{RQ}}{2} \times \overline{QT} =$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet \sin x = \frac{\overline{QT}}{4} \Leftrightarrow \overline{QT} = 4 \sin x$$

$$\bullet \cos x = \frac{\overline{TP}}{4} \Leftrightarrow \overline{TP} = 4 \cos x$$

$$\bullet \overline{SP} = 1 + \overline{TP} = 1 + 4 \cos x$$

$$= \frac{1 + 4 \cos x + 1}{2} \times 4 \sin x =$$

$$= 4 \sin x (1 + 2 \cos x) =$$

$$\text{b) } A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \left(1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= 4 \times 1 \times (1 + 2 \times 0) =$$

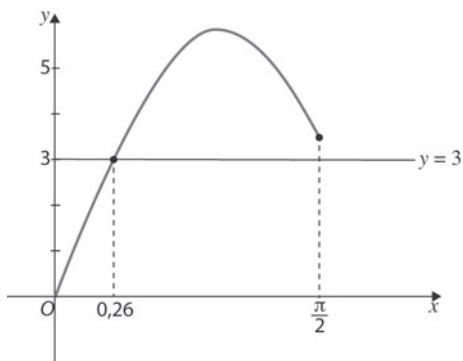
$$= 4 \text{ cm}^2$$

Quando $x = \frac{\pi}{2}$, o trapézio retângulo da figura corresponde ao retângulo $[RSTQ]$ de área $4 \times 1 = 4 \text{ cm}^2$.

c) Pretende-se os valores de x para os quais $A(x) < 3$

$$y_1 = 4 \sin x (1 + 2 \cos x)$$

$$y_2 = 3$$



Verifica-se que, os valores de x para os quais $A(x) < 3$ são os valores do intervalo $[0; 0,26[$.

d) $A(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 4 \sin x (1 + 2 \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin x = 0 \vee 1 + 2 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, x = 0 \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Se } k = -1, x = -\pi \vee x = -\frac{4\pi}{3} \vee x = -\frac{8\pi}{3}$$

$$\quad \quad \quad \notin [-\pi, 2\pi[\quad \quad \quad \notin [-\pi, 2\pi[$$

$$\text{Se } k = -2, x = -2\pi \vee x = -\frac{10\pi}{3} \vee x = -\frac{14\pi}{3}$$

$$\quad \quad \quad \notin [-\pi, 2\pi[\quad \quad \quad \notin [-\pi, 2\pi[\quad \quad \quad \notin [-\pi, 2\pi[$$

$$\text{Se } k = 1, x = \pi \vee x = \frac{8\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3}$$

$$\quad \quad \quad \notin [-\pi, 2\pi[$$

$$\text{Se } k = 2, x = 2\pi \vee x = \frac{14\pi}{3} \vee x = \frac{10\pi}{3}$$

$$\quad \quad \quad \notin [-\pi, 2\pi[\quad \quad \quad \notin [-\pi, 2\pi[\quad \quad \quad \notin [-\pi, 2\pi[$$

$$\text{Em } [-\pi, 2\pi[\text{ as soluções são } \left\{ -\pi, -\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3} \right\}.$$

21.

$$\begin{aligned} \text{a) } (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) &= (1 - \cos^2 \alpha) \times \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(1 - \cos^2 \alpha)(1 + \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{1 - \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{c) } \frac{\sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha}{2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1)} =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha \times \frac{1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1} =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha \times \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

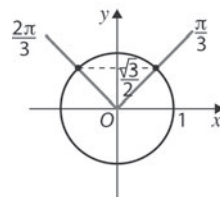
22.

$$\text{a) } \sin(5x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(5x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 5x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5} \vee x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

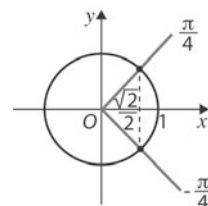


$$\text{b) } \operatorname{tg} x \times \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \vee \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \vee \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\text{c) } \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{10} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

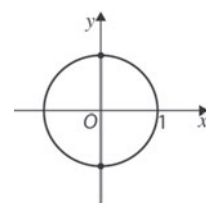
$$\Leftrightarrow x = \frac{6\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \curvearrowright x = \frac{3\pi}{5}$$

$$k = 1 \curvearrowright x = \frac{13\pi}{5}$$

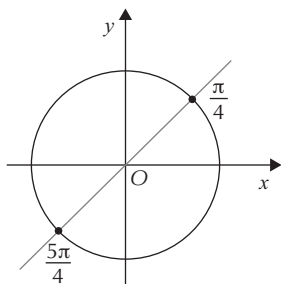
$$\text{Em } [0, 3\pi]: x = \frac{3\pi}{5} \vee x = \frac{13\pi}{5}$$



d) $\operatorname{tg}^2 x = 1$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \vee \operatorname{tg} x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



e) $\sin(3x) = -\sin x$

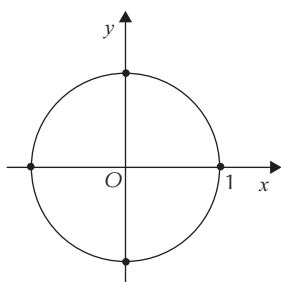
$$\Leftrightarrow \sin(3x) = \sin(-x)$$

$$\Leftrightarrow 3x = -x + 2k\pi \vee 3x = \pi + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4x = 2k\pi \vee 2x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



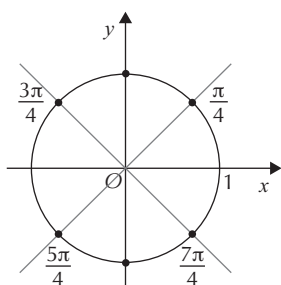
f) $\cos(3x) = -\cos x$

$$\Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(\pi - x)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi - x + 2k\pi \vee 3x = -\pi + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pi + 2k\pi \vee 2x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



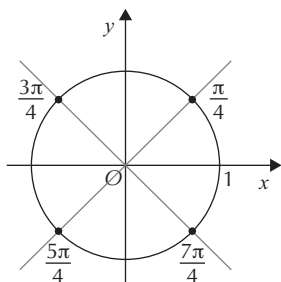
g) $\operatorname{tg}(3x) = -\operatorname{tg} x$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(3x) = \operatorname{tg}(-x)$$

$$\Leftrightarrow 3x = -x + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$



h) $\cos x = \sin x$

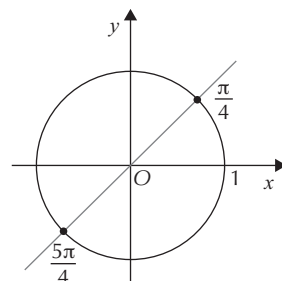
$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

condição impossível

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



Como $x \in [0, 2\pi[$, então $x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4}$.

i) $\sin(2x) - \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

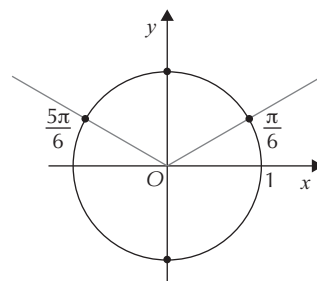
$$\Leftrightarrow \cos x (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2 \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



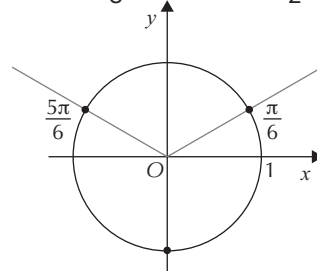
j) $2 \sin^2 x = 1 - \sin x$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



Como $x \in [0, 2\pi[$, então $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{3\pi}{2}$.

23.

$$\begin{aligned} \text{a) } D_f &= \mathbb{R}; D_g = \mathbb{R} \text{ e } D_h = \left\{ x \in \mathbb{R}: \frac{x}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{3\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

b) Zeros de f :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \cos x + \sin(2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cos x + 2 \sin x \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cos x (1 + \sin x) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cos x \vee 1 + \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Zeros de g :

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow |\sin x| = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Zeros de h :

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right) = -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{3} = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

c) 2π é o período da função f , pois:

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= f(x), \forall x \in D_f \\ f(x + 2\pi) &= 2 \cos(x + 2\pi) + \sin(2(x + 2\pi)) = \\ &= 2 \cos x + \sin(2x + 4\pi) = \\ &= 2 \cos x + \sin(2x) = \\ &= f(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

π é o período de g , pois:

$$\begin{aligned} g(x + \pi) &= g(x), \forall x \in D_g \\ g(x + \pi) &= |\sin(x + \pi)| = \\ &= |-\sin x| = \\ &= |\sin x| = \\ &= g(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3π é o período de h , pois:

$$\begin{aligned} h(x + 3\pi) &= 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{x + 3\pi}{3}\right) = \\ &= 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \pi\right) = \\ &= 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right) = \\ &= 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right) = \\ &= h(x), \forall x \in D_h \end{aligned}$$

d) Os gráficos de f e de g não admitem assíntotas verticais, na medida em que são funções contínuas de domínio $\mathbb{R}$: f é a soma de funções contínuas ($x \mapsto 2 \cos x$ e $x \mapsto \sin(2x)$) e g é a composta de duas funções contínuas ($x \mapsto |x|$ e $x \mapsto \sin x$).

$$h(x) = 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{3\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Por exemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} \left(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right)\right) = \\ &= 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)^- = 1 + (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $x = \frac{3\pi}{2}$ é uma assíntota vertical ao gráfico de h .

E atendendo ao período positivo mínimo da função (3π), conclui-se que as retas de equação

$x = \frac{3\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}$ são as assíntotas verticais ao gráfico de h . Não há quaisquer outras assíntotas verticais, pois a função h é contínua em todos os pontos do domínio.

$$24. \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{5}{13} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{144}{169}$$

$$\text{Como } \alpha \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[, \text{ então } \sin \alpha = -\sqrt{\frac{144}{169}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{12}{13}.$$

$$\cdot \operatorname{tg}(2013\pi - \beta) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(-\beta) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \beta = -\frac{4}{3}$$

$$\cdot 1 + \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Leftrightarrow 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \beta}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \beta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 \beta}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{9}{25}$$

$$\text{Como } \beta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[, \text{ então } \cos \beta = -\sqrt{\frac{9}{25}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin^2 \beta + \cos^2 \beta &= 1 \Leftrightarrow \sin^2 \beta + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \sin^2 \beta = 1 - \frac{9}{25} \\ &\Leftrightarrow \sin^2 \beta = \frac{16}{25} \\ \text{Como } \beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \text{ então } \sin \beta &= \sqrt{\frac{16}{25}} \\ &\Leftrightarrow \sin \beta = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\text{a) } \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \left(-\frac{12}{13}\right) \times \frac{5}{13} = -\frac{120}{169}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \\ &= -\frac{12}{13} \times \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} = \frac{56}{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \\ &= \frac{5}{13} \times \left(-\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{12}{13}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{33}{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \operatorname{tg}(2\alpha) &= \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{-\frac{120}{169}}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{-\frac{120}{169}}{\frac{25}{169} - \frac{144}{169}} = \frac{120}{119} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin \beta = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

25.

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= (x + \cos(4x))' = \\ &= x' - (4x)' \sin(4x) = \\ &= 1 - 4 \sin(4x) \end{aligned}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \left(\frac{x}{\sin x}\right)' = \frac{x' \times \sin x - x \times (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \\ &= \frac{\sin x - x \times \cos x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: \sin^2 x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{c) } f'(x) = \left(\frac{2 \sin x}{\cos x}\right)' = (2 \operatorname{tg} x)' = 2 \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos^2 x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: \cos^2 x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f'(x) &= ((\operatorname{tg} x + 5x)^2)' = 2(\operatorname{tg} x + 5x) \times (\operatorname{tg} x + 5x)' = \\ &= 2(\operatorname{tg} x + 5x) \times \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 5\right) \end{aligned}$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } f'(x) &= \left(\frac{x}{\sin(2x)}\right)' = \frac{x' \times \sin(2x) - x \times (\sin(2x))'}{(\sin(2x))^2} = \\ &= \frac{\sin(2x) - 2x \cos(2x)}{\sin^2(2x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R}: \sin^2(2x) \neq 0\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} \sin^2(2x) = 0 &\Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

26.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \\ &= \frac{2 \sin x}{\cos x} \times \cos^2 x = \\ &= 2 \sin x \cos x = \\ &= \sin(2x), x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \\ &= \cos^2 x + \cos^2 x - 1 = \\ &= 2 \cos^2 x - 1, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \cos x &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \left(1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \\ &= 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{1 - \cos(2x)}{2} &= \frac{1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{2} = \\ &= \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{2} = \\ &= \frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{2} = \\ &= \frac{2 \sin^2 x}{2} = \sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } (1 + \cos(2x)) \times \operatorname{tg} x &= \\ &= (1 + \cos^2 x - \sin^2 x) \times \operatorname{tg} x = \\ &= (\cos^2 x + \cos^2 x) \times \operatorname{tg} x = \\ &= 2 \cos^2 x \times \frac{\sin x}{\cos x} = \end{aligned}$$

$$= 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}(2x), x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad \frac{1}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} &= \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \\ &= \frac{\cos x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen} x \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen} x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos x \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \\ &= \frac{\cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sen} x \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\operatorname{sen} x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)} = \\ &= \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}, x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \times \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \\ &= \left(\operatorname{sen} x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos x \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \times \\ &\quad \times \left(\operatorname{sen} x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos x \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \\ &= \operatorname{sen}^2 x \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2 x \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \operatorname{sen}^2 x \times \frac{1}{2} - \cos^2 x \times \frac{1}{2} = \\ &= \operatorname{sen}^2 x \times \frac{1}{2} - (1 - \operatorname{sen}^2 x) \times \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x = \\ &= \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad \operatorname{sen}(3x) &= \operatorname{sen}(2x + x) = \\ &= \operatorname{sen}(2x) \cos x + \cos(2x) \operatorname{sen} x = \\ &= 2 \operatorname{sen} x \cos x \cos x + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x = \\ &= 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x = \\ &= 3 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^3 x = \\ &= 3 \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen}^3 x = \\ &= 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \frac{1 + \operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)} &= \frac{1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \\ &= \frac{(\cos x + \operatorname{sen} x)^2}{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)} = \\ &= \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \\ &= \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}, x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \quad 1 + \frac{\cos(3x)}{\cos x} &= 1 + \frac{\cos(2x + x)}{\cos x} = \\ &= 1 + \frac{\cos(2x) \cos x - \operatorname{sen}(2x) \operatorname{sen} x}{\cos x} = \\ &= 1 + \frac{\cos(2x) \cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{sen} x}{\cos x} = \\ &= 1 + \frac{\cos x (\cos(2x) - 2 \operatorname{sen}^2 x)}{\cos x} = \\ &= 1 + (\cos(2x) - 2 \operatorname{sen}^2 x) = \\ &= 1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen}^2 x = \\ &= 2 \cos^2 x - 2 \operatorname{sen}^2 x = \\ &= 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \\ &= 2 \cos(2x), x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

27.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x} \times 5 \right) = \\ &= 5 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x} = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$5x = y$$

Se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} &= 5 \times \lim_{y \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{limite notável}} = \\ &= 5 \times 1 = 5 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x - \pi)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = -1$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{2x-2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{2(x-1)} = \\ &= \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = x - 1$$

Se $x \rightarrow 1$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{2x^2-2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{2(x^2-1)} = \\ &= \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(x-1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = x - 1$$

Se $x \rightarrow 1^-$, então $y \rightarrow 0^-$.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \times \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\sin(8x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{tg}(3x)}{x} \times \frac{x}{\sin(8x)} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg}(3x)}{3x} \times 3 \right) \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{8x}{\sin(8x)} \times \frac{1}{8} \right) = \\ &= 3 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{3x} \times \frac{1}{8} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin(8x)}{8x}} = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$8x = u$$

Se $x \rightarrow 0$, então $u \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{8} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\cos(3x) \times 3x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin u}{u}} = \\ &= \frac{3}{8} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(3x)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \times \frac{1}{1} = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$3x = v$$

Se $x \rightarrow 0$, então $v \rightarrow 0$.

$$= \frac{3}{8} \times \frac{1}{1} \times \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin v}{v} \times 1 = \frac{3}{8} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-\sin x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = -\frac{1}{1} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{\frac{1}{x} \rightarrow 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right]^2 = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$\frac{1}{x} = y$$

Se $x \rightarrow +\infty$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \right)^2 = \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \right)^2 = 1^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{5}} &= 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \\ &= \frac{5}{2} \lim_{\frac{x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = \frac{x}{2}$$

Se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \frac{5}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{2}$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{x - \pi \rightarrow 0} \frac{-\sin(x - \pi)}{x - \pi} =$$

Mudança de variável:

$$y = x - \pi$$

Se $x \rightarrow \pi$, então $y \rightarrow 0$.

$$= -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = -1$$

$$\begin{aligned} \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{tg} x}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{m) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 1 \times 0 = 0$$

$$\text{n) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{2x-2} = \lim_{x-1 \rightarrow 0} \frac{\sin(x-1)}{2(x-1)} =$$

Mudança de variável:

$$y = x - 1$$

Se $x \rightarrow 1$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{o) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{\sin^2(x-2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{\sin^2(x-2)} = \\ &= \lim_{x-2 \rightarrow 0} \frac{x-2}{\sin(x-2)} \times \lim_{x-2 \rightarrow 0} \frac{x-2}{\sin(x-2)} = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = x - 2$$

Se $x \rightarrow 2$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1 \times 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{p)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{7x - 21}{\sin(5x - 15)} &= 7 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sin(5x - 15)} = \\ &= \frac{7}{5} \lim_{x-3 \rightarrow 0} \frac{5x - 15}{\sin(5x - 15)} = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = 5x - 15$$

Se $x \rightarrow 3$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \frac{7}{5} \times \frac{y}{\sin y} = \frac{7}{5} \times 1 = \frac{7}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{q)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\pi - 3x} &= \lim_{x - \frac{\pi}{3} \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{3\left(\frac{\pi}{3} - x\right)} = \\ &= -\frac{1}{3} \times \lim_{x - \frac{\pi}{3} \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = x - \frac{\pi}{3}$$

Se $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$, então $y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \\ &= -\frac{1}{3} \times 1 = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{r)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{tg}(2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) \cos(2x)}{\sin(2x) \cos(3x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(2x)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x)}{\cos(3x)} = \\ &= \frac{3}{2} \times \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \times \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(2x)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x)}{\cos(3x)} = \\ &= \frac{3}{2} \times 1 \times 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin^2 x} &= \\ &= \lim_{x^2 \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \\ &= 1 \times 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{t)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x - \operatorname{tg}(2x)}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x - \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}{\sin x} = \\ &= 10 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin x \cos(2x)} = \\ &= 10 \times 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2x)} = \\ &= 10 - 2 \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times 1 \times 1 = \\ &= 10 - 2 \times 1 = 8 \end{aligned}$$

$$\text{u)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sin 0 = 0$$

$$\text{v)} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2 \lim_{\frac{1}{x} \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

Mudança de variável:

$$y = \frac{1}{x}$$

Se $x \rightarrow +\infty$, então $y \rightarrow 0$.

$$= 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 2 \times 1 = 2$$

$$\text{x)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \sin x}{x}$$

Para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x} \leq \frac{2 \sin x}{x} \leq \frac{2}{x}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x}\right) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$, então pelo teorema das funções encaixadas, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \sin x}{x} = 0.$$

$$\text{z)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x+1}$$

Para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x+1}\right) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, então, pelo teorema das funções encaixadas, tem-se

$$\text{que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0.$$

28.

$$\begin{aligned} \text{a)} a'(x) &= \left[\sin\left(3x - \frac{5\pi}{4}\right) \right]' = \\ &= \left(3x - \frac{5\pi}{4}\right)' \times \cos\left(3x - \frac{5\pi}{4}\right) = \\ &= 3 \times \cos\left(3x - \frac{5\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} b'(x) &= (x^2)' \times \cos x + x^2 \times (\cos x)' = \\ &= 2x \cos x - x^2 \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} c'(x) &= [(\sin x + \cos x)^2]' = \\ &= 2(\sin x + \cos x)' \times (\sin x + \cos x)' = \\ &= 2(\sin x + \cos x) \times (\cos x - \sin x) = \\ &= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad d'(x) &= (\operatorname{tg} x - x)' \times \cos x + (\operatorname{tg} x - x) \times (\cos x)' = \\ &= \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \times \cos x + (\operatorname{tg} x - x) \times (-\sin x) = \\ &= \frac{1}{\cos x} - \cos x - \sin x \operatorname{tg} x + x \times \sin x \end{aligned}$$

$$\text{e)} \quad e'(x) = \frac{(\sin x)' \times x - \sin x \times x'}{x^2} = \frac{\cos x \times x - \sin x}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad f'(x) &= \\ &= \frac{(1 - \cos x)' \times (1 + \cos x) - (1 - \cos x) \times (1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{\sin x \times (1 + \cos x) - (1 - \cos x) \times (-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{\sin x + \sin x \times \cos x + \sin x - \sin x \times \cos x}{(1 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{2 \sin x}{(1 + \cos x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad g'(x) &= \frac{(\operatorname{tg} x)' \times (1 + x^2) - \operatorname{tg} x \times (1 + x^2)'}{(1 + x^2)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2x \times \operatorname{tg} x}{(1 + x^2)^2} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x \times (1 + x^2)} - \frac{2x \times \operatorname{tg} x}{(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad h'(x) &= \frac{1}{2} (\cos x + 1)^{-\frac{1}{2}} (\cos x + 1)' = \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{\cos x + 1}} \times (-\sin x) = \\ &= -\frac{\sin x}{2 \sqrt{\cos x + 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad i'(x) &= (\sqrt{x+2})' \times \cos(\sqrt{x+2}) = \\ &= \frac{1}{2} \times (x+2)^{-\frac{1}{2}} \times \cos(\sqrt{x+2}) = \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{x+2}} \times \cos(\sqrt{x+2}) = \\ &= \frac{\cos(\sqrt{x+2})}{2 \sqrt{x+2}} \end{aligned}$$

29.

a) Para que f seja contínua em $x = 0$ tem de se ter $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = -1 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, então f não é contínua em $x = 0$.

b) Se $x > 0$, então $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{(\sin x)' \times x - \sin x \times (x)'}{x^2} = \\ &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \end{aligned}$$

$$f'(\pi) = \frac{\pi \cos \pi - \sin \pi}{\pi^2} = -\frac{\pi}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi}$$

A equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = \pi$ é do tipo $y = -\frac{1}{\pi}x + b$.

$$f(\pi) = \frac{\sin \pi}{\pi} = 0$$

$$\text{Logo, } 0 = -\frac{1}{\pi} \times \pi + b \Leftrightarrow b = 1$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = \pi$ é $y = -\frac{x}{\pi} + 1$.

30.

$$\text{a)} \quad A_{[ABCD]} = \frac{\overline{BD} \times \overline{AC}}{2} =$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet \sin \theta = \frac{\overline{BD}}{2a} \Leftrightarrow \overline{BD} = 2a \sin \theta$$

$$\bullet \cos \theta = \frac{\overline{AC}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2a \cos \theta$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2a \sin \theta \times 2a \cos \theta}{2} = \\ &= a^2 \times 2 \sin \theta \cos \theta = \\ &= a^2 \sin(2\theta) \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad A\left(\frac{\pi}{4}\right) = a^2 \times \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = a^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2 \times 1 = a^2$$

Quando $\theta = \frac{\pi}{4}$, o losango $[ABCD]$ adquire a forma de um quadrado de lado a .

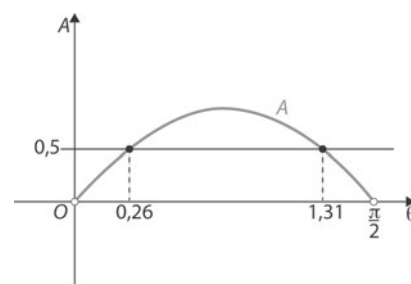
c)

$$\text{i)} \quad a = 1; A(\theta) = \sin(2\theta)$$

Pretende-se determinar os valores de θ para os quais $A(\theta) = 0,5$.

$$y_1 = \sin(2\theta)$$

$$y_2 = 0,5$$



Os valores de θ , com aproximação às centésimas, para os quais $A(\theta) = 0,5$ são $\theta \approx 0,26$ rad e $\theta \approx 1,31$ rad.

ii) $A(x) = \sin x$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

iii) $P\left(\frac{\pi}{2}, A\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, ou seja, $P\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$$A'(\theta) = (\sin(2\theta))' = 2 \cos(2\theta)$$

$$A'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = -2$$

Assim, o declive da reta tangente ao gráfico de A no ponto de abscissa $\frac{\pi}{2}$ é -2 .

Logo, o declive da reta normal ao gráfico da função de A no ponto de abscissa $\frac{\pi}{2}$ é $\frac{1}{2}$.

$$y = \frac{1}{2}x + b$$

$$P\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \in \text{reta}: 0 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + b \Leftrightarrow b = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Equação da reta normal pretendida: } y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}.$$

31.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \sin^4 x - \cos^4 x = \\ &= (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1 = \end{aligned}$$

$$= \sin^2 x - \cos^2 x =$$

$$= \sin^2 x - (1 - \sin^2 x) =$$

$$= 2 \sin^2 x - 1$$

b) $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee$$

$$\vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Pela Fórmula Fundamental da Trigonometria, tem-se que, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Logo:

$$\sin^2 x + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{5}{9}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{4}{9}$$

$$\text{Assim, } f(x) = 2 \sin^2 x - 1 = 2 \times \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f'(x) &= (2 \sin^2 x - 1)' = 2 \times 2 \sin x \times (\sin x)' = \\ &= 4 \sin x \times \cos x = \\ &= 2 \sin(2x) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Em $]0, 2\pi[$:

Se $k = 0, x \neq 0 \notin]0, 2\pi[$

Se $k = 1, x = \frac{\pi}{2}$

Se $k = 2, x = \pi$

Se $k = 3, x = \frac{3\pi}{2}$

Se $k = 4, x = 2\pi \notin]0, 2\pi[$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
Sinal de f'	n.d.	+	0	-	0	+	0	-	n.d.
Varição de f	n.d.	$\nearrow$	Máx. 1	$\searrow$	-1 Mín.	$\nearrow$	Máx. 1	$\searrow$	n.d.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$f(\pi) = 2 \sin^2(\pi) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 1 = 2 - 1 = 1$$

f é estritamente crescente no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ e em

$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$; f é estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e

em $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$; f tem um máximo: 1, para $x = \frac{\pi}{2}$ e para

$x = \frac{3\pi}{2}$; f tem um mínimo: -1 , para $x = \pi$.

$$\begin{aligned} \text{e) } f''(x) &= (2 \sin(2x))' = 2 \times (2x)' \times \cos(2x) = \\ &= 4 \cos(2x) \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \cos(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Em $]0, 2\pi[$:

Se $k = 0, x = \frac{\pi}{4}$

Se $k = 1, x = \frac{3\pi}{4}$

Se $k = 2, x = \frac{5\pi}{4}$

Se $k = 3, x = \frac{7\pi}{4}$

Se $k = 4, x = \frac{9\pi}{4} \notin]0, 2\pi[$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
Sinal de f'	n.d.	+	0	-	0	+	0	-	0	+	n.d.
Sentido das concavidades do gráfico de f	n.d.	$\cup$	P.I. 0	$\cap$	P.I. 0	$\cup$	P.I. 0	$\cap$	P.I. 0	$\cup$	n.d.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima nos intervalos $]0, \frac{\pi}{4}[$, $]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[$ e $]\frac{7\pi}{4}, 2\pi[$; o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo nos intervalos $]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$ e $]\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}[$; os pontos de inflexão são os pontos de coordenadas: $(\frac{\pi}{4}, 0)$, $(\frac{3\pi}{4}, 0)$, $(\frac{5\pi}{4}, 0)$ e $(\frac{7\pi}{4}, 0)$.

f) $f(x) = 2 \sin^2 x - 1$

$$f'(x) = 2 \sin(2x) \quad P\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$$

Seja m o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $\frac{\pi}{4}$: $m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 2$.

$y = 2x + b$ e como $(\frac{\pi}{4}, 0)$ pertence à reta tangente, tem-se $0 = 2 \times \frac{\pi}{4} + b \Leftrightarrow b = -\frac{\pi}{2}$.

Assim, a equação da reta pretendida é $y = 2x - \frac{\pi}{2}$.

g) $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x - 1 - (-1)}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x - 1 + 1}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} =$
 $= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 2 \times 1 \times 0 = 0$

32. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \sin x - \cos x \neq 0\} =$
 $= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Cálculo auxiliar

$$\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)' = \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)'(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{-\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} - \\ &= \frac{2 \sin x \cos x - \sin^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{-2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{-2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) < 0, \forall x \in D_f$$

Logo, a função f é decrescente em qualquer intervalo em que se encontra definida.

33.

a) $f(x) = 3 - \cos(3x)$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos(3x) \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq -\cos(3x) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 2 \leq 3 - \cos(3x) \leq 4 \end{aligned}$$

$$D'_f = [2, 4]$$

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= 3 - \cos\left(3 \times \left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \\ &= 3 - \cos(3x + 2\pi) = \\ &= 3 - \cos(3x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\frac{2\pi}{3} \text{ é o período de } f.$$

$$\forall x \in D_f, -x \in D_f$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3 - \cos(3(-x)) = \\ &= 3 - \cos(-3x) = \\ &= 3 - \cos(3x) = f(x), \forall x \in D_f \end{aligned}$$

A função f é uma função par.

A função f é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar da soma de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ (uma função constante e a composta de uma função trigonométrica com uma função afim).

Como f é contínua em $\mathbb{R}$, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

Como basta estudar a função no intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, atendendo à periodicidade da função, não faz sentido a análise da existência de assíntotas não verticais.

O gráfico de f não tem assíntotas.

$$f'(x) = (3 - \cos(3x))' = 3 \sin(3x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \sin(3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right], \text{ então } x = 0 \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}.$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$
Sinal de f'	0	+	0	-	0
Varição de f	Mín. 2	$\nearrow$	Máx. 4	$\searrow$	Mín. 2

2 é mínimo da função para $x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ e 4 é

máximo da função para $x = \frac{(2k+1)\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

$$f''(x) = (3 \sin(3x))' = 9 \cos(3x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 9 \cos(3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right], \text{ então } x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{2}.$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
Sinal de f''	+	+	0	-	0	+	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	2	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	4

Os pontos de inflexão são os pontos de abscissa

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{b) } g(x) = 2x + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D'_g = \mathbb{R}$$

Não há nenhuma indicação que nos permita concluir que a função g é periódica.

$$\forall x \in D_g, -x \in D_g$$

$$g(-x) = 2(-x) + \sin\left(2(-x) + \frac{\pi}{3}\right) = -2x + \sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\exists x \in D_g: g(-x) \neq g(x) \text{ e } \forall x \in D_g: g(-x) \neq -g(x)$$

A função g não é uma função par nem é uma função ímpar.

A função g é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar da soma de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ (uma função afim e a composta de uma função trigonométrica com uma função afim).

Como g é contínua em $\mathbb{R}$, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

$$\begin{aligned} m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{x} = \\ &= 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{x} = 2 + 0 = 2 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, -1 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$, então, pelo teorema das funções encaixadas, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{x} = 0.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Este limite não existe, logo o gráfico da função g não admite assíntota não vertical quando $x \rightarrow +\infty$.

Analogamente se conclui que o gráfico da função g não admite assíntota não vertical quando $x \rightarrow -\infty$.

$$g'(x) = \left(2x + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = 2 + 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: -1 \leq \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2 + 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 4$$

Assim, $g'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, logo g é estritamente crescente e não tem extremos.

$$g''(x) = \left(2 + 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = -4 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$g''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Como g'' é periódica de período π , basta estudar o sinal de g'' em $[0, \pi]$.

Se $x \in [0, \pi]$, então $x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{6}$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
Sinal de g''	-	-	0	+	0	-	-
Sentido das concavidades do gráfico de g		$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$	

Os pontos de inflexão são os pontos de abscissa

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

c) $h(x) = \frac{x}{2} + \operatorname{tg} x$

$$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$D'_h = \mathbb{R}$$

Não há nenhuma indicação que nos permita concluir que a função g é periódica.

$$\forall x \in D_h, -x \in D_h$$

$$h(-x) = -\frac{x}{2} + \operatorname{tg}(-x) = -\frac{x}{2} - \operatorname{tg} x = -h(x), \forall x \in D_h$$

A função h é uma função ímpar.

A função h é contínua em $\left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, por se tratar da soma de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ (uma função afim e uma função trigonométrica).

Como h é contínua em $\left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, as retas de equação $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \left(\frac{x}{2} + \operatorname{tg} x \right) = \frac{\pi}{4} + (-\infty) = -\infty$$

Assim, as retas de equação $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ são assíntotas verticais ao gráfico de h .

Atendendo ao domínio da função, não faz sentido a análise da existência de assíntotas não verticais.

$$h'(x) = \left(\frac{x}{2} + \operatorname{tg} x \right)' = \frac{1}{2} + \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$h'(x) > 0, \forall x \in D_h$$

Logo, h é estritamente crescente em qualquer intervalo onde esteja definida e não tem extremos.

$$\begin{aligned} h''(x) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\cos^2 x} \right)' = \frac{-2 \cos x \sin x}{\cos^4 x} = \\ &= \frac{-2 \sin x}{\cos^3 x} \left(= \frac{-2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \right) \end{aligned}$$

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2 \sin x}{\cos^3 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin x = 0 \wedge \cos^3 x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como h'' é periódica de período π , basta estudar o sinal de h'' em $[0, \pi]$.

Se $x \in [0, \pi]$, então $x = 0 \vee x = \pi$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Sinal de h''	0	+	n.d.	-	0
Sentido das concavidades do gráfico de h	P.I.	$\cup$	n.d.	$\cap$	P.I.

Os pontos de inflexão são os pontos de abscissa

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

34.

a) $f'(x) = (\cos(2x) + 2 \cos x)' = -2 \sin(2x) - 2 \sin x$
 $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow -2 \sin(2x) - 2 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{R}$$

Como $x \in [0, 2\pi]$, então $x = 0 \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \pi \vee x = \frac{4\pi}{3} \vee x = 2\pi$.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
Sinal de f'	0	-	0	+	0	-	0	+	0
Varição de f	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.

As abscissas de P , Q e R são, respetivamente, $\frac{2\pi}{3}$, π e $\frac{4\pi}{3}$.

A ordenada de P é:

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

A ordenada de Q é:

$$f(\pi) = \cos(2\pi) + 2 \cos \pi = 1 + 2 \times (-1) = -1$$

A ordenada de R é:

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

b) $f(0) = f(2\pi) = 3$ é o máximo absoluto de f .

De acordo com a alínea anterior, $-\frac{3}{2}$ é o mínimo absoluto de f .

$$\text{Assim, } D'_f = \left[-\frac{3}{2}, 3\right].$$

c) A reta tangente ao gráfico de f no ponto Q é paralela ao eixo Ox , logo o seu declive é igual a zero. Assim, uma equação da reta é $y = 0x + f(\pi)$, isto é, $y = -1$.

Pretende-se determinar as soluções da equação

$$f(x) = -1 \wedge x \in [0, 2\pi]$$

$$f(x) = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) + 2 \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 2 \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 2 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } x \in [0, 2\pi], \text{ então } x = \frac{\pi}{2} \vee x = \pi \vee x = \frac{3\pi}{2}.$$

Assim, as abscissas de N e de S são, respetivamente, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

35.

a) O triângulo $[BAP]$ é retângulo em P , por se tratar de um triângulo inscrito numa semicircunferência, logo:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AP} = 4 \cos \alpha$$

Como BAP é um ângulo inscrito, o comprimento do arco PB é dado por $2 \times \alpha = 2\alpha$.

$$\text{Assim, } d(\alpha) = 4 \cos \alpha + 2 \alpha.$$

b) $d'(\alpha) = (4 \cos \alpha + 2\alpha)' = -4 \sin \alpha + 2$

$$d'(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4 \sin \alpha + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

36.

a) Tem-se que $\widehat{BCD} = \pi - \alpha$.

Seja E a projeção ortogonal de B sobre CD .

Então:

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow -\cos \alpha = \frac{\overline{EC}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{EC} = -2 \cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{BE}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BE} = 2 \sin \alpha$$

Assim:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{\overline{DC} + \overline{AB}}{2} \times \overline{BE} = \\ &= \frac{(1 - 2 \cos \alpha + 1)}{2} \times 2 \sin \alpha = \\ &= (1 - \cos \alpha) \times 2 \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha - \sin(2\alpha) \end{aligned}$$

b) $A'(\alpha) = (2 \sin \alpha - \sin(2\alpha))' =$
 $= 2 \cos \alpha - 2 \cos(2\alpha)$

$$A'(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \alpha - 2 \cos(2\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \cos(2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2\alpha + 2k\pi \vee \alpha = -2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -\alpha = 2k\pi \vee 3\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \vee \alpha = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[, \text{ então } \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

x	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de A	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

$$\begin{aligned} A\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

A área máxima do trapézio é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

37.

- a) O comprimento do arco CE é igual ao comprimento do arco FB que, por sua vez, é igual a 2α .

$$\overline{CB} = 2 \times \cos \alpha = \overline{EF}$$

$$\overline{OB} = \overline{OF} = 1$$

$$\text{Então, } P(\alpha) = 2\alpha + 2 \cos \alpha + 1 + 1 + 2 \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow P(\alpha) = 2 + 2\alpha + 4 \cos \alpha.$$

- b) $P'(\alpha) = (2 + 2\alpha + 4 \cos \alpha)' = 2 - 4 \sin \alpha$

$$P'(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - 4 \sin \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[, \text{ então } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

α	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
Sinal de P'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de P	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

O perímetro da região a sombreado é máximo para

$$\alpha = \frac{\pi}{6}.$$

- c) A área do setor circular OCE é dada por $2 \times \frac{\alpha}{2} = \alpha$.

$$A_{[OBC]} = A_{[OEF]} = \frac{2 \cos \alpha \times \sin \alpha}{2} = \sin \alpha \cos \alpha$$

Assim:

$$A(\alpha) = \alpha + 2 \times \sin \alpha \cos \alpha \Leftrightarrow A(\alpha) = \alpha + \sin(2\alpha)$$

- d) $A'(\alpha) = (\alpha + \sin(2\alpha))' = 1 + 2 \cos(2\alpha)$

$$A'(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \cos(2\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2\alpha) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2\alpha = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[, \text{ então } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

α	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de A	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

A área da região a sombreado é máxima para

$$\alpha = \frac{\pi}{3}.$$

38.

	$y = \sin x$	$y = \sin(ax)$	$y = \sin(x - b)$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contra-domínio	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$
Zeros	$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{k\pi}{a}, k \in \mathbb{Z}$	$x = b + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Máximo	1	1	1
Maximizante	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2a} + \frac{2k\pi}{a}, k \in \mathbb{Z}$	$x = b + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Mínimo	-1	-1	-1
Minimizante	$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2a} + \frac{2k\pi}{a}, k \in \mathbb{Z}$	$x = b - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Período	2π	$\frac{2\pi}{a}$	2π

	$y = \sin x$	$y = c \sin x$	$y = d + \sin x$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contra-domínio	$[-1, 1]$	$[-c, c]$	$[-1 + d, 1 + d]$
Zeros	$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	Só tem zeros se $-1 \leq d \leq 1$
Máximo	1	c	$1 + d$
Maximizante	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Mínimo	-1	-c	$-1 + d$
Minimizante	$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Período	2π	2π	2π

39. $f(x) = a + b \sin(cx + d)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(cx + d) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -b \leq b \sin(cx + d) \leq b$$

$$\Leftrightarrow a - b \leq a + b \sin(cx + d) \leq a + b$$

Como 3 é máximo absoluto de f e -1 é mínimo absoluto de f , então:

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 + b \\ -1 + b + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Logo, } f(x) = 1 + 2 \sin(cx + d).$$

Como π é período positivo mínimo de f , então

$$\frac{2\pi}{c} = \pi \Leftrightarrow c = 2.$$

$$\text{Logo, } f(x) = 1 + 2 \sin(2x + d).$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2} + d\right) = 1 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\pi + d) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin d = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow d = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee d = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, por exemplo, $d = -\frac{\pi}{3}$.

40. $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$

$$\Leftrightarrow -a^2 \leq a^2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq a^2$$

$$\Leftrightarrow -a^2 + \frac{k}{3} \leq a^2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{k}{3} \leq a^2 + \frac{k}{3}$$

Como $D'_g = [-3, 5]$, então:

$$\begin{cases} -a^2 + \frac{k}{3} = -3 \\ a^2 + \frac{k}{3} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 3 + \frac{k}{3} \\ 3 + \frac{k}{3} + \frac{k}{3} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 2k = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ k = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -2 \\ k = 3 \end{cases}$$

Como $a \in \mathbb{R}^+$, então $\begin{cases} a = 2 \\ k = 3 \end{cases}$.

41.

a) Determinação de p – período positivo mínimo da função d :

$$d(t+p) = d(t), \forall t \in D$$

$$40 - 10 \cos\left(\frac{\pi(t+p)}{2}\right) = 40 - 10 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t + \pi p}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t + \pi p}{2} = \frac{\pi t}{2} + 2k\pi \vee \frac{\pi t + \pi p}{2} = -\frac{\pi t}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \pi t + \pi p = \pi t + 4k\pi \vee \pi t + \pi p = -\pi t + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \pi p = 4k\pi \vee \pi p = -2\pi t + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow p = 4k \vee \underbrace{p = -2t + 4k, k \in \mathbb{Z}}_{p \text{ depende de } t}$$

Se $k = 1, p = 4 \leftarrow$ período positivo mínimo

Como, no contexto do problema, o período positivo mínimo é 4 segundos, então num minuto (60 segundos) a bola faz 15 oscilações.

b) $d(t) = 45$

$$\Leftrightarrow 40 - 10 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 45$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{\pi t}{2} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Leftrightarrow \pi t = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi \vee \pi t = \frac{8\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{4}{3} + 4k \vee t = \frac{8}{3} + 4k, k \in \mathbb{N}_0$$

Quando $k = 0, t = \frac{4}{3}$.

O primeiro instante em que a bola atingiu 45 cm de distância ao solo foi aos $\frac{4}{3}$ s.

c) Pretende-se determinar $d'(9)$:

$$\begin{aligned} d'(t) &= \left(40 - 10 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)' = 10 \left(\frac{\pi t}{2}\right)' \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) = \\ &= 10 \times \frac{\pi}{2} \times \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \end{aligned}$$

$$d'(9) = 5\pi \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 5\pi \times 1 = 5\pi$$

Quando $t = 9$ s, a velocidade da bola é de 5π cm/s.

d) No instante inicial a bola que se encontrava mais perto do chão era a bola da Alice, já que

$$m(0) = 40 - 15\cos 0 = 25 \text{ cm e}$$

$$d(0) = 40 - 10\cos 0 = 30 \text{ cm.}$$

Apesar disso, depois de se iniciar o movimento, é a bola da Alice que atinge uma maior altura, 55 cm, pois $D'_m = [25, 55]$, enquanto que a bola da Anabela atinge uma altura máxima de 50 cm, pois $D'_d = [30, 50]$.

Cálculos auxiliares

$$\bullet -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -10 \leq -10 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \leq 10, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 30 \leq 40 - 10 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \leq 50, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\bullet -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -15 \leq -15 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 15, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 25 \leq 40 - 15 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 55, \forall t \in \mathbb{R}$$

Quanto à bola que mais oscilações realizou, conclui-se que foi a bola da Anabela, pois esta realizou, como se viu na primeira alínea, 15 oscilações durante o primeiro minuto (já que o período positivo mínimo da função d é de 4 s), enquanto que a bola da Alice realizou quase 4 oscilações completas, pois, como o período positivo mínimo da função m é de 16 s, vem que $\frac{60}{16} = 3,75$ oscilações.

42.

a) $x(0) = 5 \cos(0 + \pi) = -5$

$$x(2) = 5 \cos\left(\frac{\pi}{2} \times 2 + \pi\right) = 5 \cos(2\pi) = 5$$

$$\text{b) } t.v.m._{[0, 2]} = \frac{x(2) - x(0)}{2 - 0} = \frac{5 - (-5)}{2} = 5 \text{ unidade/se-}$$

gundo

$$\text{c) } x'(t) = \left(5 \cos \left(\frac{\pi}{2} t + \pi \right) \right)' = -5 \times \frac{\pi}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} t + \pi \right)$$

$$x'(3) = -\frac{5\pi}{2} \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \pi \right) = -\frac{5\pi}{2} \times 1 = -\frac{5\pi}{2} \text{ unida-}$$

de/segundo

$$\text{d) } x''(t) = \left(-\frac{5\pi}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} t + \pi \right) \right)' = -\frac{5\pi^2}{4} \cos \left(\frac{\pi}{2} t + \pi \right)$$

$$x''(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5\pi^2}{4} \cos \left(\frac{\pi}{2} t + \pi \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} t + \pi \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} t + \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} t = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = -1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

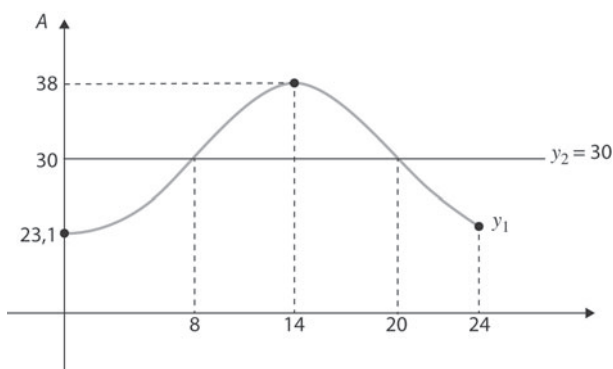
Como $t \in [0, 4]$, então $t = 1 \vee t = 3$.

t	0		1		3		4
Sinal de x''		+	0	-	0	+	n.d.
Varição de x'	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	n.d.

A velocidade do ponto P é crescente em $[0, 1]$ e em $[3, 4]$ e é decrescente em $[1, 3]$. O ponto P atinge a velocidade máxima em $t = 1$ e a aceleração é nula nesse instante.

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{x'(3) - x'(2)}{3 - 2} &= -\frac{5\pi}{2} \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \pi \right) + \frac{5\pi}{2} \sin (\pi + \pi) = \\ &= -\frac{5\pi}{2} \times 1 + 0 = \\ &= -\frac{5\pi}{2} \text{ unidades/segundo}^2 \end{aligned}$$

$$43. y_1 = 30 + 8 \cos \left(\frac{\pi t + 10\pi}{12} \right); y_2 = 30$$



O primeiro dia de férias começou com uma temperatura de aproximadamente $23,1^\circ\text{C}$, logo às 0 h desse dia, tendo aumentado até às 14 h, altura em que atingiu o máximo de 38°C .

A partir dessa hora a temperatura começou a diminuir até às 24 h, momento em que atingiu a temperatura com a qual o dia tinha iniciado: aproximadamente, $23,1^\circ\text{C}$.

Durante este dia, a temperatura foi superior a 30°C das 8 h às 20 h. Assim, o Joaquim tinha razão quando afirmava que durante toda a tarde a temperatura foi superior a 30°C .

$$\begin{aligned} 44. 1 + \frac{\cos(3x)}{\cos x} &= 1 + \frac{\cos(x+2x)}{\cos x} = \\ &= 1 + \frac{\cos x \cos(2x) - \sin x \sin(2x)}{\cos x} = \\ &= 1 + \frac{\cancel{\cos x} \cos(2x) - \sin x \times 2 \sin x \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}} = \\ &= 1 + \cos(2x) - 2 \sin^2 x = \\ &= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x + \cos(2x) = \\ &= \underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{\cos(2x)} + \cos(2x) = \\ &= \cos(2x) + \cos(2x) = \\ &= 2 \cos(2x), \text{ com } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45. \sin(a-b) + \cos(a+b) &= \\ &= \sin a \cos b - \cos a \sin b + \cos a \cos b - \\ &\quad - \sin a \sin b = \\ &= \sin a \cos b - \sin a \sin b - \cos a \sin b + \\ &\quad + \cos a \cos b = \\ &= \sin a (\cos b - \sin b) + \cos a (-\sin b + \cos b) = \\ &= (\cos b - \sin b)(\sin a + \cos a) = \\ &= (\cos a + \sin a)(\cos b - \sin b), \forall a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

46.

$$\text{a) } \sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \sin x - \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } \sin x - \cos x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

c) $\cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \vee \sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos x \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) -$$

$$- \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

$$= \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = x - \frac{\pi}{5} + 2k\pi \vee x = -x + \frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}_{\text{condição impossível}}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

47.

a) Assíntotas não verticais:

Como o domínio de g é limitado, o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\cos x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\cos x(1 + \sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{1 + 1}{0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x(1 + \sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{1 + 1}{0^-} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = \frac{\pi}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico de g . Como g é contínua no seu domínio (por se tratar do quociente entre duas funções contínuas), então o gráfico de g não admite mais assíntotas verticais.

b) $g'(x) = \frac{(\cos x)'(1 - \sin x) - \cos x(1 - \sin x)'}{(1 - \sin x)^2} =$

$$= \frac{-\sin x(1 - \sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1 - \sin x)^2} =$$

$$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2} =$$

$$= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} =$$

$$= \frac{1}{1 - \sin x}$$

c) $g''(x) = \frac{-(1 - \sin x)'}{(1 - \sin x)^2} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$

Como $(1 - \sin x)^2 > 0, \forall x \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ o sinal de g'' depende apenas do sinal de $\cos x$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
Sinal de g''	+	+	n.d.	-	0	+	+
Sentido das concavidades do gráfico de g		$\cup$	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$	

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e em $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ é ponto de inflexão.

d) $g'(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$

Sejam m_r e m_s os declives das retas r e s , respetivamente.

$$m_r = g'(a) = \frac{1}{1 - \sin a}$$

$$m_s = g'(b) = \frac{1}{1 - \sin b}$$

Como $a + b = \pi$, então $b = \pi - a$, pelo que:

$$\begin{aligned} m_s = g'(b) &= \frac{1}{1 - \sin b} = \\ &= \frac{1}{1 - \sin(\pi - a)} = \\ &= \frac{1}{1 - \sin a} = \\ &= g'(a) = \\ &= m_r \end{aligned}$$

Logo, as retas r e s são paralelas.

48. A abcissa do ponto p é um zero de f'' .

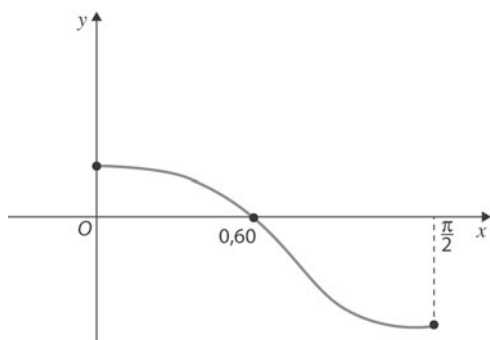
Pretende-se determinar a solução da equação

$$f''(x) = 0 \wedge x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 \times \cos x)' = \\ &= (x^2)' \times \cos x + (x^2) \times (\cos x)' = \\ &= 2x \cos x - x^2 \times \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x \cos x - x^2 \times \sin x)' = \\ &= (2x \cos x)' - (x^2 \times \sin x)' = \\ &= 2 \times \cos x - 2x \times \sin x - 2x \times \sin x - x^2 \times \cos x = \\ &= 2 \cos x - 4x \sin x - x^2 \times \cos x \end{aligned}$$

Determinação dos zeros de $f''(x)$ na calculadora:



Assim, a abcissa do ponto P é aproximadamente 0,60.

49.

$$\begin{aligned} \text{a) } g'(x) &= \left(\left(\frac{x}{2k} + 1 \right) \sin(kx) \right)' = \\ &= \left(\frac{x}{2k} + 1 \right)' \sin(kx) + \left(\frac{x}{2k} + 1 \right) (\sin(kx))' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2k} \sin(kx) + \left(\frac{x}{2k} + 1 \right) k \cos(kx) = \\ &= \frac{1}{2k} \sin(kx) + \left(\frac{x}{2} + k \right) \cos(kx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\frac{1}{2k} \sin(kx) + \left(\frac{x}{2} + k \right) \cos(kx) \right)' = \\ &= \frac{1}{2k} \times k \cos(kx) + \left(\frac{x}{2} + k \right)' \cos(kx) + \left(\frac{x}{2} + k \right) (\cos(kx))' = \\ &= \frac{1}{2} \cos(kx) + \frac{1}{2} \cos(kx) + \left(\frac{x}{2} + k \right) (-k \sin(kx)) = \\ &= \cos(kx) - \left(\frac{kx}{2} + k^2 \right) \sin(kx) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} g''(x) + h^2 g(x) &= \\ &= \cos(kx) - \left(\frac{kx}{2} + k^2 \right) \sin(kx) + k^2 \left(\frac{x}{2k} + 1 \right) \sin(kx) = \\ &= \cos(kx) - \left(\frac{kx}{2} + k^2 \right) \sin(kx) + \left(\frac{kx}{2} + k^2 \right) \sin(kx) = \\ &= \cos(kx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x}{2k} + 1 \right) \sin(kx)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{2k} + 1 \right) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{x} = \\ &= 1 \times \lim_{kx \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{kx} \times k = \\ &= 1 \times 1 \times k = k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } g'(x) &= \frac{1}{2k} \sin(kx) + \left(\frac{x}{2} + k \right) \cos(kx) \\ g'(0) &= \frac{1}{2k} \sin 0 + (0 + k) \cos 0 = k \end{aligned}$$

$$g(0) = (0 + 1) \sin 0 = 0$$

Logo, uma equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0 é $y = kx$.

50.

$$\text{a) } D_g = \{x \in \mathbb{R} : \sin(\pi x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} \sin(\pi x) &= 0 \Leftrightarrow \pi x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

b) Para que h seja contínua em $x = 0$ tem de se ter

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0)$$

$$\bullet h(0) = a$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{\sin(\pi x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1)}{\sin(\pi x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin(\pi x)} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = \\
&= \lim_{\pi x \rightarrow 0^+} \frac{\pi x}{\sin(\pi x)} \times \frac{1}{\pi} \times (-1) = \\
&= 1 \times \frac{1}{\pi} \times (-1) = -\frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

Logo, $a = -\frac{1}{\pi}$.

Para que h seja contínua em $x = 1$ tem de se ter

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = h(1)$$

• $h(1) = b$

$$\begin{aligned}
&\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{\sin(\pi x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x-1)}{\sin(\pi x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\sin(\pi x)} \times \lim_{x \rightarrow 1^-} x =
\end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1$$

Se $x \rightarrow 1^-$, então $y \rightarrow 0^-$.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{\sin(\pi y + \pi)} \times 1 = \\
&= -\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{\sin(\pi y)} = \\
&= -\lim_{\pi y \rightarrow 0^-} \frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \times \frac{1}{\pi} = \\
&= -1 \times \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

Logo, $b = -\frac{1}{\pi}$.

51.

a) $f(x) = \sin^2 x \sin(2x)$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in D_f, -x \in D_f$$

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \sin^2(-x) \sin(2(-x)) = \\
&= (-\sin x)^2 \sin(-2x) = \\
&= \sin^2 x (-\sin(2x)) = \\
&= -\sin^2 x \sin(2x) = -f(x), \forall x \in D_f
\end{aligned}$$

Logo, a função f é ímpar.

$$\begin{aligned}
f(x + \pi) &= \sin^2(x + \pi) \sin(2(x + \pi)) = \\
&= (\sin(-x))^2 \sin(2x + 2\pi) = \\
&= (-\sin x)^2 \sin(2x) = \\
&= \sin^2 x \sin(2x) = f(x), \forall x \in D_f
\end{aligned}$$

Logo, f é periódica de período π .

Assim, basta estudar a monotonia de f no intervalo $[0, \pi]$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\sin^2 x \sin(2x))' = \\
&= (\sin^2 x)' \sin(2x) + \sin^2 x (\sin(2x))' = \\
&= 2 \sin x \cos x \sin(2x) + \sin^2 x \times 2 \cos(2x) = \\
&= 2 \sin x \cos x \times 2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x \cos(2x) = \\
&= 4 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \sin^2 x \cos(2x) = \\
&= 2 \sin^2 x (2 \cos^2 x + \cos(2x))
\end{aligned}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x (2 \cos^2 x + \cos(2x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x = 0 \vee 2 \cos^2 x + \cos(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee 2 \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee 3 \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee 4 \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [0, \pi]$, então $x = 0 \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \pi$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
Sinal de f'	0	+	0	-	0	+	0
Variação de f	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.

f é crescente em $\left[0 + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$ e em

$\left[\frac{2\pi}{3} + k\pi, \pi + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ e é decrescente em

$\left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$.

b) $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 + \cos x \neq 0\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Cálculo auxiliar

$$1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\forall x \in D_f, -x \in D_f$$

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{1 + \cos(-x)} = \frac{\cos x}{1 + \cos x} = f(x), \forall x \in D_f$$

Logo, a função f é par.

$$f(x + 2\pi) = \frac{\cos(x + 2\pi)}{1 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{\cos x}{1 + \cos x} = f(x), \forall x \in D_f$$

Logo, f é periódica de período 2π .

Assim, basta estudar a monotonia de f no intervalo $[0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{\cos x}{1 + \cos x} \right)' = \\
 &= \frac{(\cos x)'(1 + \cos x) - \cos x(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} = \\
 &= \frac{-\sin x(1 + \cos x) - \cos x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \\
 &= \frac{-\sin x - \sin x \cos x + \sin x \cos x}{(1 + \cos x)^2} = \\
 &= -\frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \wedge (1 + \cos x)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [0, 2\pi]$, então $x = 0 \vee x = 2\pi$.

x	0		π		2π
Sinal de f'	0	-	n.d.	+	0
Variação de f	Máx.	$\searrow$	n.d.	$\nearrow$	Máx.

f é decrescente em $[0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$ e é crescente em $] \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$

$$\begin{aligned}
 D_f &= \{x \in \mathbb{R} : \cos x + 1 \neq 0\} = \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\forall x \in D_f, -x \in D_f$$

$$f(-x) = \frac{\sin(-x) - 1}{\cos(-x) + 1} = \frac{-\sin x - 1}{\cos x + 1}$$

$$\exists x \in D_f : f(-x) \neq f(x)$$

$$\exists x \in D_f : f(-x) \neq -f(x)$$

Logo, a função f não é par nem é ímpar.

$$f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi) - 1}{\cos(2\pi) + 1} = \frac{\sin x - 1}{\cos x + 1} = f(x), \forall x \in D_f$$

Logo, f é periódica de período 2π .

Assim, basta estudar a monotonia de f no intervalo $[0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1} \right)' = \\
 &= \frac{(\sin x - 1)'(\cos x + 1) - (\sin x - 1)(\cos x + 1)'}{(\cos x + 1)^2} = \\
 &= \frac{\cos x(\cos x + 1) - (\sin x - 1)(-\sin x)}{(\cos x + 1)^2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos^2 x + \cos x + \sin^2 x - \sin x}{(\cos x + 1)^2} = \\
 &= \frac{1 + \cos x - \sin x}{(\cos x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos x - \sin x}{(\cos x + 1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos x - \sin x = 0 \wedge (\cos x + 1)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = -1 \wedge x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge$$

$$\wedge x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{4} + x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{4} + x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) \wedge$$

$$\wedge x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [0, 2\pi]$, então $x = \frac{\pi}{2}$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		2π
Sinal de f'	+	+	0	-	n.d.	+	+
Variação de f	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$

f é crescente em $]-\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ e é decrescente em $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

52.

a) Seja M o ponto médio de $[AB]$.

Tem-se que:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\overline{GM}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \overline{GM} = 2 \operatorname{tg} \theta$$

$$\text{Assim, } A_{[ABG]} = \frac{4 \times 2 \operatorname{tg} \theta}{2} = 4 \operatorname{tg} \theta.$$

Seja O o centro do hexágono.

$$O\hat{A}B = \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\overline{OM}}{2} \Leftrightarrow \overline{OM} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Assim, } A_{[OAB]} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Então, a área da região a sombreado é dada por:

$$A(\theta) = 6 \times (4\sqrt{3} - 4 \operatorname{tg} \theta) = 24(\sqrt{3} - \operatorname{tg} \theta)$$

$$b) A\left(\frac{\pi}{3}\right) = 24\left(\sqrt{3} - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 24(\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 0$$

A figura que se obtém para $x = \frac{\pi}{3}$ é



pelo que, para $x = \frac{\pi}{3}$, a superfície reduz-se a um ponto. Portanto, a sua área é nula.

$$c) A(\beta) = 24\sqrt{3} - 6 \Leftrightarrow 24(\sqrt{3} - \operatorname{tg} \beta) = 24\sqrt{3} - 6 \\ \Leftrightarrow 24\sqrt{3} - 24 \operatorname{tg} \beta = 24\sqrt{3} - 6 \\ \Leftrightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{16} = \frac{1}{\cos^2 \beta}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{16}{17}$$

$$\text{Como } \beta \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[, \text{ então } \cos \beta = \sqrt{\frac{16}{17}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \beta + \frac{16}{17} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \beta = \frac{1}{17}$$

$$\text{Como } \beta \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[, \text{ então } \sin \beta = \sqrt{\frac{1}{17}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$\text{Assim, } (\sin \beta + \cos \beta)^2 = \left(\frac{\sqrt{17}}{17} + \frac{4\sqrt{17}}{17}\right)^2 = \\ = \left(\frac{5\sqrt{17}}{17}\right)^2 = \frac{25}{17}$$

d) A função A é contínua em $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}\right]$, por se tratar do produto entre duas funções contínuas.

$$A\left(\frac{\pi}{8}\right) = 24\left(\sqrt{3} - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \approx 31,628$$

$$A\left(\frac{\pi}{6}\right) = 24\left(\sqrt{3} - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \approx 27,713$$

$$\text{Logo, } A\left(\frac{\pi}{6}\right) < 30 < A\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$$\exists c \in \left]\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}\right[: A(c) = 30.$$

$$A'(\theta) = (24(\sqrt{3} - \operatorname{tg} \beta))' = -\frac{24}{\cos^2 \theta}$$

$$A'(\theta) < 0, \forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$$

Logo, a função A é estritamente decrescente em $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$.

Assim, existe um e um só $\theta \in \left]\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}\right[: A(\theta) = 30$.

53.

$$a) A = \frac{2 \times 2 \operatorname{sen} \alpha (2 - 2 \cos \alpha)}{2} =$$

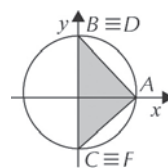
$$= 4 \operatorname{sen} \alpha (1 - \cos \alpha) =$$

$$= 4 \operatorname{sen} \alpha - 4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha =$$

$$= 4 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} (2\alpha) = A(\alpha)$$

$$b) A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 \operatorname{sen} \pi = 4 - 0 = 4$$

Para $x = \frac{\pi}{2}$, a figura é:



Isto é, o ponto B coincide com o ponto D e o ponto C coincide com o ponto F , pelo que o triângulo $[ABC]$ coincide com o triângulo $[ADF]$ cuja área é 4.

$$c) A'(\alpha) = (4 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} (2\alpha))' = 4 \cos \alpha - 4 \cos (2\alpha)$$

$$A'(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos \alpha - 4 \cos (2\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \cos (2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2\alpha + 2k\pi \vee \alpha = -2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -\alpha = 2k\pi \vee 3\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \vee \alpha = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \text{ então } \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

α	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
Sinal de A'	+	+	0	-	n.d.
Variação de A	Mín.	↗	Máx.	↘	n.d.

$$A\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$$

A área máxima do triângulo $[ABC]$ é $3\sqrt{3}$ u.a.

$$d) \text{ Para } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]:$$

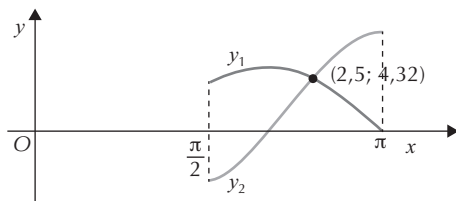
$$A(x) = -A'(x)$$

$$\Leftrightarrow 4 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} (2x) = -4 \cos x + 4 \cos (2x)$$

Sejam:

$$y_1 = 4 \sin x - 2 \sin (2x)$$

$$y_2 = -4 \cos x + 4 \cos (2x)$$



A abscissa do ponto P é, aproximadamente, 2,50.

54.

a) Seja M o ponto médio de $[EF]$.

$$\widehat{BAM} = \frac{1}{2} \widehat{BAD} = x$$

$$\text{Assim, } \operatorname{tg} x = \frac{\overline{FM}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \overline{AM} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Seja N o ponto médio de $[FG]$.

$$\widehat{BFN} = \widehat{BAC} = x$$

$$\text{Assim, } \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BN}}{\overline{FN}} \Leftrightarrow \overline{BN} = \operatorname{tg} x$$

Então, a área do losango é dada por:

$$f(x) = \frac{2(\operatorname{tg} x + 1) \times 2\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} + 1\right)}{2} =$$

$$= 2(\operatorname{tg} x + 1)\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} + 1\right) =$$

$$= 2\left(1 + \operatorname{tg} x \frac{1}{\operatorname{tg} x} + 1\right) =$$

$$= 2\left(2 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x\right)$$

$$\text{b) } f'(x) = \left(2\left(2 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x\right)\right)' =$$

$$= 2\left(\frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) =$$

$$= 2 \frac{-\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} =$$

$$= \frac{-2 \cos (2x)}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$\text{c) } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2 \cos (2x)}{\sin^2 x \cos^2 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \cos (2x) = 0 \wedge x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Leftrightarrow \cos (2x) = 0 \wedge x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
Sinal de f'	n.d.	-	0	+	n.d.
Variação de f	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	n.d.

A área do losango é mínima para $x = \frac{\pi}{4}$.

55.

$$\text{a) } x(t) = \sin (\pi t) - \sqrt{3} \cos (\pi t) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \sin (\pi t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos (\pi t)\right) =$$

$$= 2\left(\sin \left(\frac{\pi}{6}\right) \sin (\pi t) - \cos \left(\frac{\pi}{6}\right) \cos (\pi t)\right) =$$

$$= -2\left(\cos \left(\frac{\pi}{6}\right) \cos (\pi t) - \sin \left(\frac{\pi}{6}\right) \sin (\pi t)\right) =$$

$$= -2 \cos \left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 2 \cos \left(\pi t + \frac{\pi}{6} + \pi\right) =$$

$$= 2 \cos \left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$$

Como $x(t) = 2 \cos \left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$ e $2 > 0$ e

$\pi > 0$ e $\frac{7\pi}{6} \in [0, 2\pi]$, então $x(t)$ é um oscilador harmônico.

b) Amplitude: 2

$$\text{Período: } \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$\text{Frequência: } \frac{1}{2}$$

$$\text{Ângulo de fase: } \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{c) } x'(t) = \left(2 \cos \left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)\right)' =$$

$$= -2\pi \sin \left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$$

$$|x'(t)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left|-2\pi \sin \left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)\right| = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi \left|\sin \left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)\right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left|\sin \left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)\right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi t + \frac{7\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \pi t = -\frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{7}{6} + k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad x''(t) &= \left(-2\pi \sin \left(\pi t + \frac{7\pi}{6} \right) \right)' = \\ &= -2\pi^2 \cos \left(\pi t + \frac{7\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

Então:

$$x''(t) = -k \times x(t)$$

$$\Leftrightarrow -2\pi^2 \cos \left(\pi t + \frac{7\pi}{6} \right) = -k \times 2 \cos \left(\pi t + \frac{7\pi}{6} \right)$$

$$\Leftrightarrow -2\pi^2 = -2k$$

$$\Leftrightarrow k = \pi^2$$

Teste Final

Páginas 154 a 157

Grupo I

1. Opção (B)

Se o número de subconjuntos de um conjunto é 2^{11} , então o número de elementos desse conjunto é 11.

O número de subconjuntos com exatamente cinco elementos é então ${}^{11}C_5 = 462$.

2. Opção (A)

Como $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então excluem-se as opções (C) e (D).

Como $-|\sin 0| = 0$, então exclui-se a opção (B).

3. Opção (B)

Determinar o número de tangentes ao gráfico de f que são paralelas ao eixo Ox é o mesmo que determinar o número de zeros da função f' , derivada de f .

$$f'(x) = (x + \sin x)' = 1 + \cos x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

A equação $f'(x) = 0$ tem uma solução em cada um dos intervalos $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, ..., $[98\pi, 100\pi]$. Então, a equação $f'(x) = 0$ tem 50 soluções.

4. Opção (B)

$$D_h = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2\sin x}{x^2 + 1} \right) = 1 + 0 = 1$$

Cálculo auxiliar

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x^2 + 1} \leq \frac{2 \sin x}{x^2 + 1} \leq \frac{2}{x^2 + 1}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x^2 + 1} \right) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 + 1} = 0$, então, pelo teorema das funções encaixadas,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \sin x}{x^2 + 1} = 0.$$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota ao gráfico de h .

5. Opção (A)

$$\overline{EA} = \cos \theta$$

$$\overline{OE} = \sin \theta$$

$$A = 2 \times \frac{\overline{EA} \times \overline{OE}}{2} = 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} = \frac{\sin (2\theta)}{2}$$

Grupo II

1. Formas de construir a sequência de algarismos nas condições do enunciado:

$$4 \underbrace{\text{ímpar}}_4 \underbrace{\text{ímpar}}_3 \text{ ou } 4 \underbrace{\text{par}}_4 \underbrace{\text{par}}_3$$

Formas de construir a sequência de letras nas condições do enunciado:

$$\underbrace{\text{vogal}}_5 \underbrace{\text{consoante}}_{21} \underbrace{\text{consoante}}_{20} \text{ ou } \underbrace{\text{consoante}}_{21} \underbrace{\text{vogal}}_5$$

$$\underbrace{\text{consoante}}_{20} \text{ ou } \underbrace{\text{consoante}}_{21} \underbrace{\text{consoante}}_{20} \underbrace{\text{vogal}}_5$$

Assim, o número de casos possíveis é:

$$2 \times (4 \times 3) \times 3 \times (5 \times 21 \times 20) = 151\,200$$

$$\text{Então, } P = \frac{1}{151\,200}.$$

2. $f(x) = \sin(2x) + x + 1$

$$D_f = [0, 2\pi]$$

2.1. $f'(x) = (\sin(2x) + x + 1)' = 2 \cos(2x) + 1$

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos(2x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } x \in [0, 2\pi], \text{ então } x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee$$

$$\vee x = \frac{4\pi}{3} \vee x = \frac{11\pi}{12}.$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
Sinal de f'	+	+	0	-	0	+	0	-	0	+	+
Variação de f	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.	↗	Máx.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\pi}{3}$$

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(2 \times \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{4\pi}{3} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{4\pi}{3}$$

Então:

$$A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\pi}{3}\right), B\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{4\pi}{3}\right),$$

$$C\left(\frac{\pi}{3}, 0\right), D\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$$

Assim:

$$A_{[ABCD]} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{4\pi}{3}}{2} \times$$

$$\times \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{6}\right) \times \pi \text{ u.a.}$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) + x + 1 - 1}{4x} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{2}{4} \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

2.3. Seja g a função definida por

$$g(x) = f(x) - f'(x) =$$

$$= \sin(2x) + x + 1 - 2 \cos(2x) - 1 =$$

$$= \sin(2x) - 2 \cos(2x) + 1$$

A função g é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, por se tratar da soma de duas funções contínuas.

$$g(0) = \sin 0 - 2 \cos 0 + 1 = -1$$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 1 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 =$$

$$= 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Logo, } g(0) < 0 < g\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

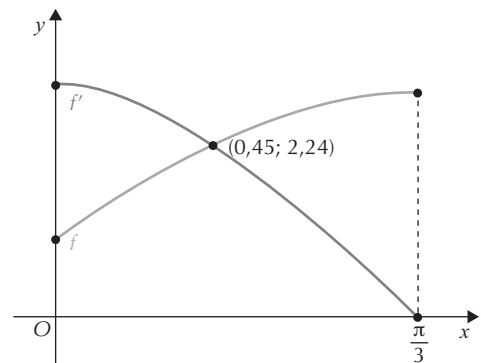
Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$$\exists c \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[: g(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[: f(c) - f'(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[: f(c) = f'(c)$$

2.4.



$$x \approx 0,45$$

$$3. g'(x) = x - 2 \cos x$$

$$D_g = D_{g'} = [-\pi, \pi]$$

$$3.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(0) = 0 - 2 \cos 0 = -2$$

$$3.2. g''(x) = (x - 2 \cos x)' = 1 + 2 \sin x$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } x \in [-\pi, \pi], \text{ então } x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}.$$

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		π
Sinal de g''		-	0	+	0	-	
Sentido das concavidades do gráfico de g		∩	P.I.	∪	P.I.	∩	

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right[$ e em $\left]-\frac{\pi}{6}, \pi\right[$ e tem a conca-

vidade voltada para cima em $\left] -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right]$; tem dois pontos de inflexão de abscissas $-\frac{5\pi}{6}$ e $-\frac{\pi}{6}$.

4. $D(t) = 4 + 2 \cos(\pi t + \pi)$
 $t \in [0, 4]$

4.1. $\forall t \in [0, 4], -1 \leq \cos(\pi t + \pi) \leq 1$
 $\Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos(\pi t + \pi) \leq 2$
 $\Leftrightarrow 2 \leq 4 + 2 \cos(\pi t + \pi) \leq 6$

A distância mínima do corpo ao solo é 2 metros e a distância máxima do corpo ao solo é 6 metros.

4.2. Amplitude: 2

Pulsção: π

Fase: π

Período: $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

Frequência: $\frac{1}{2}$

4.3. $D(t) = 5$

$\Leftrightarrow 4 + 2 \cos(\pi t + \pi) = 5$

$\Leftrightarrow \cos(\pi t + \pi) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \pi t + \pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \pi t + \pi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \pi t = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \pi t = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t = -\frac{2}{3} + 2k \vee t = -\frac{4}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 1$, então $t = \frac{4}{3} \vee t = \frac{2}{3}$

Se $k = 2$, então $t = \frac{10}{3} \vee t = \frac{8}{3}$

Assim, como $t \in [0, 4]$, $t = \frac{2}{3} \vee t = \frac{4}{3} \vee t = \frac{8}{3} \vee$

$t = \frac{10}{3}$.

Tema V - Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas

Unidade 1 - Juros compostos

Páginas 6 a 10

1. $C_{17} = 500 (1 + 0,025)^{17} \approx 760,81 \text{ €}$

2. Banco A:

$C_2 = 50\,000 (1 + 0,025)^2 = 52\,531,25 \text{ €}$

Banco B:

$C_4 = 50\,000 (1 + 0,0125)^4 = 52\,547,27 \text{ €}$

O banco B propõe uma situação mais lucrativa para o Pedro.

3. $C_0 (1 + r)^{15} = 2C_0 \Leftrightarrow (1 + r)^{15} = 2$
 $\Leftrightarrow 1 + r = \sqrt[15]{2}$
 $\Leftrightarrow r = \sqrt[15]{2} - 1$

Logo, $r \approx 4,7\%$.

4.

a) $1500 (1 + 0,012)^1 - 1500 = 1518 - 1500 = 18 \text{ €}$

b) $1500 \left(1 + \frac{0,012}{2}\right)^2 - 1500 \approx 1518,05 - 1500 = 18,05 \text{ €}$

c) $1500 \left(1 + \frac{0,012}{4}\right)^4 - 1500 \approx 1518,08 - 1500 = 18,08 \text{ €}$

d) $1500 \left(1 + \frac{0,012}{12}\right)^{12} - 1500 \approx 1518,10 - 1500 = 18,10 \text{ €}$

5.

a) $C_1 = 8500 (1 + 0,02)^1 = 8670 \text{ €}$

b) $C_{10} = 8500 (1 + 0,02)^{10} \approx 10\,361,45 \text{ €}$

c) Seja C_n o capital acumulado ao fim de n ($n \in \mathbb{N}$) anos.

$C_1 = 8500 \times (1 + 0,02) = 8500 \times 1,02$

$C_2 = C_1 \times (1 + 0,02) = C_1 \times 1,02$

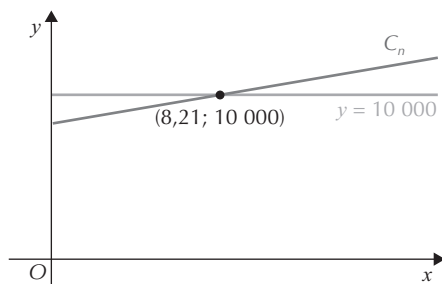
$C_3 = C_2 \times 1,02$

E assim sucessivamente.

Então, o capital acumulado ao fim de um ano corresponde ao capital acumulado no ano anterior multiplicado pelo fator 1,02, que traduz o facto de o capital acumulado crescer à taxa de 2% ao ano. Logo, a sucessão $C_1, C_2, \dots, C_n$ é uma progressão geométrica de razão 1,02.

d) $C_n = 8500 \times 1,02^n$

e) $C_n > 10\,000 \Leftrightarrow 8500 \times 1,02^n > 10\,000$



Ao fim de nove anos será possível obter um capital acumulado superior a 10 000 euros.

f) O capital disponível ao fim de um ano, com juros pagos mensalmente a uma taxa de 1,9% ao ano, é:

$$8500 \times \left(1 + \frac{0,019}{12}\right)^{12} \approx 8662,91 \text{ €}$$

Na alínea a), viu-se que o capital disponível ao fim de um ano, a uma taxa de 1,9% ao ano, é 8670 €. Assim, o capital acumulado é inferior ao obtido na opção inicial.

6. Seja u_n a população de bactérias existente, passados n dias. Assim, se 10 000 é a população inicial, então passado 1 dia teremos:

$$\begin{aligned} u_1 &= 10\,000 + 10\,000 \times 0,031 = \\ &= 10\,000 \underbrace{(1 + 0,031)}_r = 10\,310 \end{aligned}$$

e $u_n = u_1 \times r^{n-1}$, onde $r = 1 + 0,031$.

Logo, $u_n = 10\,310 \times 1,031^{n-1}$.

Assim, o número de bactérias passados 10 dias é $u_{10} = 10\,310 \times 1,031^{10-1} \approx 13\,570$.

7. $48\,900 (1 - 0,13)^4 \approx 28\,014,69 \text{ €}$

8. Opção (B)

$$2,4 \times (1 - 0,15)^n = 2,4 \times 0,85^n$$

Unidade 2 - Número de Neper

Páginas 11 a 13

9.

a) $1000 \times (1 + 1)^1 = 2000,00 \text{ €}$

b) $1000 \times \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2250,00 \text{ €}$

c) $1000 \times \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 \approx 2441,41 \text{ €}$

d) $1000 \times \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2613,04 \text{ €}$

e) $1000 \times \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2714,57 \text{ €}$

f) $1000 \times \left(1 + \frac{1}{365 \times 24}\right)^{365 \times 24} \approx 2718,13 \text{ €}$

g) $1000 \times \left(1 + \frac{1}{365 \times 24 \times 60}\right)^{365 \times 24 \times 60} \approx 2718,28 \text{ €}$

h) $1000 \times \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2718,28 \text{ €}$

Unidade 3 - Funções exponenciais

Páginas 14 a 34

10.

a) $100 \times 2 = 200$

b) $100 \times 2^3 = 800$

c) $100 \times 2^{\frac{1}{2}} \approx 141$

d) $100 \times 2^{\frac{7}{4}} \approx 336$

11.

a) $f(0) = 2 \Leftrightarrow b \times a^0 = 2 \Leftrightarrow b = 2$
 f é crescente se $a > 1$.

b) $f(0) = 3 \Leftrightarrow b \times a^0 = 3 \Leftrightarrow b = 3$
 f é decrescente se $0 < a < 1$.

12.
$$\begin{cases} 12 = b \times a^2 \\ 24 = b \times a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 b = 12 \\ a \times a^2 b = 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 12a = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^2 b = 12 \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

13.

a) $32^{\frac{2}{5}} + 64^{\frac{2}{3}} = (2^5)^{\frac{2}{5}} + (2^6)^{\frac{2}{3}} =$
 $= 2^2 + 2^4 =$
 $= 4 + 16 =$
 $= 20$

b) $16^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{49}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = (2^4)^{\frac{3}{2}} - \left(\left(\frac{7}{3}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} =$
 $= 2^6 - \frac{7}{3} =$
 $= 64 - \frac{7}{3} =$
 $= \frac{185}{3}$

$$c) 100^{-2,5} = (10^2)^{-\frac{5}{2}} = 10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100\,000}$$

$$d) \left(\frac{\pi^2}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{\pi^2}{\pi^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{4}{3}} = \left(\pi^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{4}{3}} = \pi^2$$

$$e) \left(\frac{16}{81} \right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{125}{8} \right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\left(\frac{2}{3} \right)^4 \right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\left(\frac{5}{2} \right)^3 \right)^{-\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3} \times \left(\frac{5}{2} \right)^{-2} =$$

$$= \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{5} \right)^2 =$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{4}{25} = \frac{8}{75}$$

14.

$$a) \sqrt{\frac{1}{5}} = (5^{-1})^{\frac{1}{2}} = 5^{-\frac{1}{2}}$$

$$b) \sqrt[3]{\left(\frac{1}{6} \right)^{-2}} = \sqrt[3]{6^2} = 6^{\frac{2}{3}}$$

$$c) \frac{1}{\sqrt[4]{7}} = 7^{-\frac{1}{4}}$$

15.

$$a) \left(x^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$b) \left(x^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{3}{4}} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$c) \left(x^{-\frac{7}{8}} \right)^{-\frac{8}{7}} = x$$

$$d) \left(x^{\frac{5}{6}} \right)^{-\frac{6}{5}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$e) (27x^6)^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} (x^6)^{\frac{2}{3}} = 3^2 x^4 = 9x^4$$

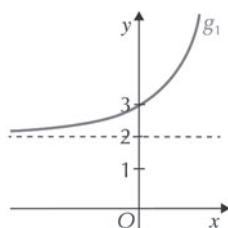
$$f) (8x^2 y^3)^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} (x^2)^{\frac{1}{3}} (y^3)^{\frac{1}{3}} = 2x^{\frac{2}{3}} y$$

$$g) \left(\frac{x^2 y^3}{x^0} \right)^{\frac{1}{6}} = (x^2)^{\frac{1}{6}} (y^3)^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}}$$

$$h) (z^{2012})^{\frac{1}{1006}} \times (x^{10} + y^{20})^0 = z^2 \times 1 = z^2$$

16.

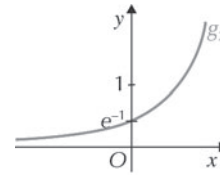
a)



$$g_1(x) = g(x) + 2 = e^x + 2$$

O gráfico de g_1 obtém-se a partir do gráfico de g segundo uma translação associada ao vetor $(0, 2)$.

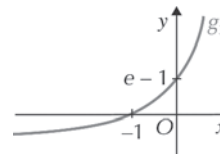
b)



$$g_2(x) = g(x - 1) = e^{x-1}$$

O gráfico de g_2 obtém-se a partir do gráfico de g segundo uma translação associada ao vetor $(1, 0)$.

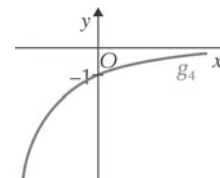
c)



$$g_3(x) = g(x + 1) - 1 = e^{x+1} - 1$$

O gráfico de g_3 obtém-se a partir do gráfico de g segundo uma translação associada ao vetor $(-1, -1)$.

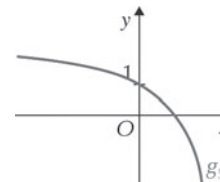
d)



$$g_4(x) = -g(-x) = -e^{-x}$$

O gráfico de g_4 obtém-se a partir do gráfico de g segundo uma simetria relativamente a Oy , seguida de uma simetria relativamente a Ox .

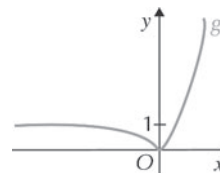
e)



$$g_5(x) = -g(x) + 2 = -e^x + 2$$

O gráfico de g_5 obtém-se a partir do gráfico de g segundo uma simetria relativamente a Ox , seguida de uma translação associada ao vetor $(0, 2)$.

f)



$$g_6(x) = |g(x) - 1| = |e^x - 1|$$

O gráfico de g_6 obtém-se a partir do gráfico de g mantendo os pontos de ordenada não negativa e efetuando uma simetria dos pontos de ordenada negativa relativamente a Ox .

17.

a) $8^{\sqrt{2}} = (2^3)^{\sqrt{2}} = 2^{3\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{18}}$
 Como $\sqrt{18} > \sqrt{5}$, então $8^{\sqrt{2}} > 8^{\sqrt{5}}$.

b) $9^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{8}}$
 Como $\pi > \sqrt{8}$, então $3^\pi > 3^{\sqrt{8}}$.

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^\pi = 2^{-\pi}$
 $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2^{-2}$
 Como $-\pi < -2$, então $\left(\frac{1}{2}\right)^\pi < \frac{1}{4}$.

d) $\frac{1}{27} = 3^{-3}$
 $\left(\frac{1}{9}\right)^\pi = 3^{-2\pi}$
 Como $-3 > -2\pi$, então $\frac{1}{27} > \left(\frac{1}{9}\right)^\pi$.

18.

a) Proposição verdadeira.

$$2^\pi \times 2^{-\pi} = 2^{\pi + (-\pi)} = 2^0 = 1$$

b) Proposição falsa.

$$(2^\pi)^\pi = 2^{\pi \times \pi} = 2^{\pi^2} \neq 2^{2\pi}$$

c) Proposição verdadeira.

$$2^{\sqrt{3}} \times 2^{\sqrt{12}} = 2^{\sqrt{3} + \sqrt{12}} = 2^{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}} = 2^{3\sqrt{3}}$$

d) Proposição verdadeira.

$$\frac{2^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{8}}} = 2^{\sqrt{2} - \sqrt{8}} = 2^{\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} = 2^{-\sqrt{2}}$$

19.

a) $4^{-\pi} \times 24^\pi : 6^\pi = \left(\frac{1}{4}\right)^\pi \times 24^\pi : 6^\pi =$
 $= \left(\frac{24}{4}\right)^\pi : 6^\pi =$
 $= 6^\pi : 6^\pi = 1$

b) $(6^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 6^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 6^2 = 36$

c) $\frac{e^{\sqrt{3}+1}}{e^{\sqrt{3}}} - e^0 = e^{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}} - 1 = e - 1$

20.

a) $5^x = \frac{5^{x+1}}{5} = \frac{15}{5} = 3$

b) $5^{3x} = (5^x)^3 = 3^3 = 27$

c) $25^x = (5^2)^x = (5^x)^2 = 3^2 = 9$

d) $5^{\frac{x}{3}} = (5^x)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$

e) $5^{-x+2} = (5^x)^{-1} \times 5^2 = 3^{-1} \times 25 = \frac{25}{3}$

f) $5^{-\frac{x}{2}+1} = (5^x)^{-\frac{1}{2}} \times 5 = 3^{-\frac{1}{2}} \times 5 = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

21.

a) $2^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^x = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$$\text{C.S.} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

b) $\pi^x = 1 \Leftrightarrow \pi^x = \pi^0 \Leftrightarrow x = 0$
 $\text{C.S.} = \{0\}$

c) $\frac{1}{5^x} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5^{-x} = 5^{\frac{1}{2}}$
 $\Leftrightarrow -x = \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$$\text{C.S.} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

d) $3^x + 2 = 29 \Leftrightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow 3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$
 $\text{C.S.} = \{3\}$

e) $9^x = \frac{1}{243} \Leftrightarrow (3^2)^x = \frac{1}{3^5}$
 $\Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{-5}$
 $\Leftrightarrow 2x = -5$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$

$$\text{C.S.} = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$$

f) $5^{|x-2|} - 125 = 0 \Leftrightarrow 5^{|x-2|} = 125$
 $\Leftrightarrow 5^{|x-2|} = 5^3$
 $\Leftrightarrow |x-2| = 3$
 $\Leftrightarrow x-2 = 3 \vee x-2 = -3$
 $\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$

$$\text{C.S.} = \{-1, 5\}$$

g) $\frac{27^{x+1}}{9^x} = 9 \Leftrightarrow \frac{(3^3)^{x+1}}{(3^2)^x} = 3^2$
 $\Leftrightarrow \frac{3^{3x+3}}{3^{2x}} = 3^2$
 $\Leftrightarrow 3^{3x+3-2x} = 3^2$
 $\Leftrightarrow 3^{x+3} = 3^2$
 $\Leftrightarrow x+3 = 2$
 $\Leftrightarrow x = -1$

$$\text{C.S.} = \{-1\}$$

h) $3^x \times x^2 - 3^x \times x = 0 \Leftrightarrow 3^x (x^2 - x) = 0$
 $\Leftrightarrow \underbrace{3^x = 0} \vee x^2 - x = 0$
 condição impossível
 $\Leftrightarrow x(x-1) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

$$\text{C.S.} = \{0, 1\}$$

22. Opção (B)

$$f(k+x) = 100 \times f(x) \Leftrightarrow 10^{k+x} = 10^2 \times 10^x$$

 $\Leftrightarrow 10^{k+x} = 10^{2+x}$
 $\Leftrightarrow k+x = 2+x$
 $\Leftrightarrow k = 2$

23.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (\sqrt[3]{4})^x &= \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \Leftrightarrow \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^x = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} \\ &\Leftrightarrow 2^{\frac{2}{3}x} = 2^{-\frac{3}{4}} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3}x = -\frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{9}{8} \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \left\{-\frac{9}{8}\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 2^x &= \frac{\sqrt[3]{2}}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2^x = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^2 \times 2^{\frac{1}{2}}} \\ &\Leftrightarrow 2^x = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{5}{2}}} \\ &\Leftrightarrow 2^x = 2^{\frac{1}{3} - \frac{5}{2}} \\ &\Leftrightarrow 2^x = 2^{-\frac{13}{6}} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{13}{6} \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \left\{-\frac{13}{6}\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3}} &= 3^x \Leftrightarrow \sqrt{3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}} = 3^x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3^{\frac{1}{2}}(1+1+1)} = 3^x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3^{\frac{1}{2}} \times 3} = 3^x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3^{\frac{3}{2}}} = 3^x \\ &\Leftrightarrow \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^x \\ &\Leftrightarrow 3^{\frac{3}{4}} = 3^x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \left\{\frac{3}{4}\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \frac{8}{10^x} &= 5^{-x} \Leftrightarrow \frac{8}{2^x \times 5^x} = 5^{-x} \\ &\Leftrightarrow 8 = 5^{-x} \times 5^x \times 2^x \\ &\Leftrightarrow 8 = 5^{-x+x} \times 2^x \\ &\Leftrightarrow 2^x = 8 \\ &\Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{3\}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} &= 7 \Leftrightarrow 2^x(2 + 2^2 + 2^3) = 7 \\ &\Leftrightarrow 2^x(2 + 4 + 8) = 7 \\ &\Leftrightarrow 2^x \times 14 = 7 \\ &\Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2^x = 2^{-1} \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{-1\}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n &= 254 \Leftrightarrow 2 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 254 \\ &\Leftrightarrow -2 \times (1-2^{n+1}) = 254 \\ &\Leftrightarrow 1-2^{n+1} = -127 \\ &\Leftrightarrow 2^{n+1} = 128 \\ &\Leftrightarrow 2^{n+1} = 2^7 \\ &\Leftrightarrow n+1 = 7 \\ &\Leftrightarrow n = 6 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{6\}$$

24.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 4^{x+1} - 9 \times 2^x &= -2 \Leftrightarrow (2^2)^{x+1} - 9 \times 2^x = -2 \\ &\Leftrightarrow 2^{2x+2} - 9 \times 2^x = -2 \\ &\Leftrightarrow 2^2 \times 2^{2x} - 9 \times 2^x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 \times (2^x)^2 - 9 \times 2^x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável, $2^x = y$, vem que:

$$\begin{aligned} 4y^2 - 9y + 2 &= 0 \Leftrightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \times 4 \times 2}}{8} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{8} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{9 \pm 7}{8} \\ &\Leftrightarrow y = 2 \vee y = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Substituindo y por 2^x , vem que:

$$\begin{aligned} 2^x = 2 \vee 2^x = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow 2^x = 2^1 \vee 2^x = 2^{-2} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{1, -2\}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 4^{2x+1} - 9 \times 2^{2x} + 2 &= 0 \Leftrightarrow 4 \times 4^{2x} - 9 \times 4^x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 \times (4^x)^2 - 9 \times (4^x) + 2 = 0 \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável, $4^x = y$, vem que:

$$\begin{aligned} 4y^2 - 9y + 2 &= 0 \Leftrightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \times 4 \times 2}}{8} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{8} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{9 \pm 7}{8} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{16}{8} \vee y = \frac{2}{8} \\ &\Leftrightarrow y = 2 \vee y = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Substituindo y por 4^x , vem que:

$$\begin{aligned} 4^x = 2 \vee 4^x = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow 4^x = \sqrt{4} \vee 4^x = 4^{-1} \\ &\Leftrightarrow 4^x = 4^{\frac{1}{2}} \vee 4^x = 4^{-1} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \left\{\frac{1}{2}, -1\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 5^{x+1} + 5^{-x+2} &= 126 \Leftrightarrow 5^x \times 5 + 5^2 \times 5^{-x} - 126 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5 \times 5^x + 5^2 \times \frac{1}{5^x} - 126 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5 \times 5^{2x} + 5^2 - 126 \times 5^x = 0 \\ &\Leftrightarrow 5 \times (5^x)^2 - 126 \times 5^x + 25 = 0 \end{aligned}$$

Considerando a mudança de variável $5^x = y$, vem que:

$$\begin{aligned} 5y^2 - 126y + 25 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{126 \pm \sqrt{15\,876 - 4 \times 5 \times 25}}{10} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{126 \pm \sqrt{15\,376}}{10} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{126 \pm 124}{10} \\ \Leftrightarrow y &= 25 \vee y = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Substituindo y por 5^x , vem que:

$$\begin{aligned} 5^x &= 25 \vee 5^x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^x = 5^2 \vee 5^x = 5^{-1} \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{2, -1\}$$

25.

$$\begin{aligned} \text{a) } 1 - 3^x < -8 &\Leftrightarrow 9 < 3^x \Leftrightarrow 3^2 < 3^x \Leftrightarrow 2 < x \Leftrightarrow x > 2 \\ \text{C.S.} &=]2, +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} &\leq 27^{-x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \leq 3^{-3x} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3x} \\ &\Leftrightarrow x - 2 \geq 3x \\ &\Leftrightarrow -2 \geq 2x \\ &\Leftrightarrow -1 \geq x \\ &\Leftrightarrow x \leq -1 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, -1]$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 10^{x^2-3x} &> 0,01 \Leftrightarrow 10^{x^2-3x} > 10^{-2} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x > -2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow x < 1 \vee x > 2 \end{aligned}$$

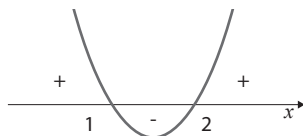
$$\text{C.S.} =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$$



$$\begin{aligned} \text{d) } 8^{3x^2-5x} &> \frac{1}{16} \Leftrightarrow (2^3)^{3x^2-5x} > 2^{-4} \\ &\Leftrightarrow 2^{9x^2-15x} > 2^{-4} \\ &\Leftrightarrow 9x^2 - 15x > -4 \\ &\Leftrightarrow 9x^2 - 15x + 4 > 0 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

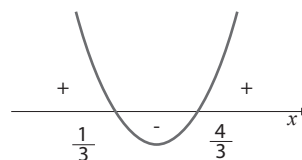
$$9x^2 - 15x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 4 \times 9 \times 4}}{18}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{81}}{18}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{15 \pm 9}{18}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{24}{18} \vee x = \frac{6}{18}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \vee x = \frac{1}{3}$$



Retomando a resolução da inequação, vem que:

$$9x^2 - 15x + 4 = 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3} \vee x > \frac{4}{3}$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, \frac{1}{3}[\cup]\frac{4}{3}, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \text{e) } 2^{\frac{1}{x}} &< 4 \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x}} < 2^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x} < 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x} - 2 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} < 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$1 - 2x$	+	+	+	0	-
x	-	0	+	+	+
$\frac{1-2x}{x}$	-	n.d.	+	0	-

$$\text{C.S.} =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{2^x}{1-2^x} &\geq 1 \Leftrightarrow \frac{2^x}{1-2^x} - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2^x - 1 + 2^x}{1-2^x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2^{x+1} - 1}{1-2^x} \geq 0 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \bullet 2^{x+1} - 1 = 0 &\Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \\ \bullet 1 - 2^x = 0 &\Leftrightarrow 2^x = 2^0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$2^{x+1} - 1$	-	0	+	+	+
$1 - 2^x$	+	+	+	0	-
$\frac{2^{x+1} - 1}{1 - 2^x}$	-	0	+	n.d.	-

$$\text{C.S.} = [-1, 0[$$

26.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Cálculo auxiliar

$$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{b) } g(x) = \sqrt{3 - 9^{2x}}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : 3 - 9^{2x} \geq 0\} = \left] -\infty, \frac{1}{4} \right]$$

Cálculo auxiliar

$$3 - 9^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow -(3^2)^{2x} \geq -3 \Leftrightarrow 3^{4x} \leq 3 \Leftrightarrow 4x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{c) } h(x) = \frac{1}{(e^x + 2)(125 - 5^x)}$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : (e^x + 2)(125 - 5^x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} (e^x + 2)(125 - 5^x) = 0 &\Leftrightarrow \underbrace{e^x + 2 = 0}_{\text{condição impossível}} \vee 125 - 5^x = 0 \\ &\Leftrightarrow 5^x = 5^3 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

$$\text{d) } i(x) = \sqrt{\frac{2^x - 1}{3 - x}}$$

$$D_i = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2^x - 1}{3 - x} \geq 0 \wedge 3 - x \neq 0 \right\} = [0, 3[$$

Cálculo auxiliar

$$2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2^0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$2^x - 1$	-	0	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	0	-
$\frac{2^x - 1}{3 - x}$	-	0	+	n.d.	-

$$\text{e) } j(x) = \sqrt{-16^x + 4^x + 2}$$

$$D_j = \{x \in \mathbb{R} : -16^x + 4^x + 2 \geq 0\} = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \bullet -16^x + 4^x + 2 \geq 0 &\Leftrightarrow -4^{2x} + 4^x + 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -y^2 + y + 2 \geq 0 \wedge y = 4^x \end{aligned}$$

$$\bullet -y^2 + y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = -1$$

$$\Leftrightarrow y \geq -1 \wedge y \leq 2 \wedge y = 4^x$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{4^x \geq -1}_{\text{condição universal}} \wedge 4^x \leq 2$$

condição universal

$$\Leftrightarrow 2^{2x} \leq 2^1$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

27.

$$\text{a) } \lim \left(1 + \frac{5}{n} \right)^n = e^5$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim \left(1 + \frac{5}{2n} \right)^n &= \lim \left(1 + \frac{\frac{5}{2}}{n} \right)^n = \\ &= e^{\frac{5}{2}} = \sqrt{e^5} = e^2 \sqrt{e} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \lim \left(1 + \frac{(-1)}{n} \right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\text{d) } \lim \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{3n} = \left(\lim \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n \right)^3 = (e^2)^3 = e^6$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim \left(1 + \frac{\pi}{n} \right)^{n+1} &= \lim \left(\left(1 + \frac{\pi}{n} \right)^n \times \left(1 + \frac{\pi}{n} \right) \right) = \\ &= \lim \left(1 + \frac{\pi}{n} \right)^n \times \lim \left(1 + \frac{\pi}{n} \right) = \\ &= e^\pi \times (1 + 0) = e^\pi \end{aligned}$$

$$\text{f) } \lim \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} = \lim \left(1 + \frac{(-1)}{n^2} \right)^{n^2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

g)

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} n+7 & n+4 \\ -n-4 & 1 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \lim \left(\frac{n+7}{n+4} \right)^n &= \lim \left(1 + \frac{3}{n+4} \right)^n = \\
 &= \lim \left(1 + \frac{3}{n+4} \right)^{n+4-4} = \\
 &= \lim \left[\left(1 + \frac{3}{n+4} \right)^{n+4} \times \left(1 + \frac{3}{n+4} \right)^{-4} \right] = \\
 &= \lim \left(1 + \frac{3}{n+4} \right)^{n+4} \times \lim \left(1 + \frac{3}{n+4} \right)^{-4} = \\
 &= e^3 \times (1+0)^{-4} = e^3
 \end{aligned}$$

28. Opção (A)

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{\frac{n}{2}} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} \right]^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}$$

29.

$$\text{a) } \lim \left(\frac{n^3-1}{n^3} \right)^{-n^3} = \lim \left[\left(1 + \frac{-1}{n^3} \right)^{n^3} \right]^{-1} = (e^{-1})^{-1} = e$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \lim \left(\frac{n^2}{n^2 - \frac{5}{4}n} \right)^{4n} &= \lim \left(1 + \frac{\frac{5}{4}n}{n^2 - \frac{5}{4}n} \right)^{4n} = \\
 &= \lim \left(1 + \frac{5}{4n-5} \right)^{4n} = \\
 &= \lim \left[\left(1 + \frac{5}{4n-5} \right)^{4n-5} \right]^{\frac{4n}{4n-5}} = (e^5)^1 = e^5
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l}
 n^2 & n^2 - \frac{5}{4}n \\
 \hline
 -n^2 + \frac{5}{4}n & 1 \\
 \hline
 \frac{5}{4}n &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \lim \left(\frac{n-2}{1+n} \right)^{3n-1} &= \lim \left(1 + \frac{-3}{n+1} \right)^{3n-1} = \\
 &= \lim \left[\left(1 + \frac{-3}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{\frac{3n-1}{n+1}} = (e^{-3})^{-3} = e^9
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l}
 n-2 & n+1 \\
 \hline
 -n-1 & 1 \\
 \hline
 -3 &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \lim \left(\frac{3n+1}{3n+2} \right)^{\frac{n}{4}} &= \lim \left(\frac{3n+2-1}{3n+2} \right)^{\frac{n}{4}} = \\
 &= \lim \left(1 + \frac{-1}{3n+2} \right)^{\frac{n}{4}} = \\
 &= \lim \left(\left(1 + \frac{-1}{3n+2} \right)^{3n+2} \right)^{\frac{n}{4(3n+2)}} = (e^{-1})^{\frac{1}{12}} = e^{-\frac{1}{12}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \lim \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^n &= \lim \left(-1 + \frac{2}{n+1} \right)^n = \\
 &= \lim \left((-1)^n \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^n \right)
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l}
 -n+1 & n+1 \\
 \hline
 n+1 & -1 \\
 \hline
 2 &
 \end{array}$$

Se n par:

$$\begin{aligned}
 \lim \left((-1)^n \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^n \right) &= \lim \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^n = \\
 &= \lim \left[\left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{\frac{n}{n+1}} = (e^{-2})^1 = e^{-2}
 \end{aligned}$$

Se n ímpar:

$$\begin{aligned}
 \lim \left((-1)^n \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^n \right) &= -\lim \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^n = \\
 &= -\lim \left[\left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{\frac{n}{n+1}} = -(e^{-2})^1 = -e^{-2}
 \end{aligned}$$

Como encontramos duas subsucessões com limites distintos, concluímos que não existe

$$\lim \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^n.$$

$$\text{f) } \lim \left(1 - \frac{2}{n^2} \right)^n = \lim \left[\left(1 - \frac{2}{n^2} \right)^{n^2} \right]^{\frac{1}{n}} = (e^{-2})^0 = 1$$

$$\text{g) } \lim \left(\frac{1 + \frac{n}{2}}{1+n} \right)^n = \lim \left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{n+1} \right)^n = \left(\frac{1}{2} \right)^{+\infty} = 0$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l}
 \frac{n}{2}+1 & n+1 \\
 \hline
 -\frac{n}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 \hline
 \frac{1}{2} &
 \end{array}$$

$$\text{h) } \lim \left(\frac{n+3}{2n-3} \right)^n = \lim \left(\frac{1 + \frac{3}{n}}{2 - \frac{3}{n}} \right)^n = \left(\frac{1}{2} \right)^{+\infty} = 0$$

$$\text{i) } \lim \left(\frac{3n+3}{2n-1} \right)^n = \lim \left(\frac{3 + \frac{3}{n}}{2 - \frac{1}{n}} \right)^n = \left(\frac{3}{2} \right)^{+\infty} = +\infty$$

$$\text{j) } \lim \left(\frac{2n^2+4n+1}{n^2+2} \right)^{3n^2+1} =$$

$$= \lim \left(\frac{2 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} \right)^{3n^2+1} = 2^{+\infty} = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{k) } \lim \left[\left(\frac{4-2n}{4+2n} \right)^{n+1} + e^n \right] &= \\ &= \lim \left(-1 + \frac{8}{4+2n} \right)^{n+1} + \lim e^n = \\ &= \lim \left((-1)^{n+1} \left(1 + \frac{-8}{4+2n} \right)^{n+1} \right) + \lim e^n \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} -2n+4 & 2n+4 \\ \hline 2n+4 & -1 \\ \hline & 8 \end{array}$$

Se n ímpar:

$$\begin{aligned} \lim \left((-1)^{n+1} \left(1 + \frac{-8}{4+2n} \right)^{n+1} \right) + \lim e^n &= \\ &= \lim \left(1 + \frac{-8}{4+2n} \right)^{n+1} + \lim e^n = \\ &= \lim \left[\left(1 + \frac{-8}{4+2n} \right)^{4+2n} \right]^{\frac{n+1}{4+2n}} + \lim e^n = \\ &= (e^{-8})^{\frac{1}{2}} + (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

Se n par:

$$\begin{aligned} \lim \left((-1)^{n+1} \left(1 + \frac{-8}{4+2n} \right)^{n+1} \right) + \lim e^n &= \\ &= -\lim \left(1 + \frac{-8}{4+2n} \right)^{n+1} + \lim e^n = \\ &= -\lim \left[\left(1 + \frac{-8}{4+2n} \right)^{4+2n} \right]^{\frac{n+1}{4+2n}} + \lim e^n = \\ &= -(e^{-8})^{\frac{1}{2}} + (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \lim \left[\left(\frac{4-2n}{4+2n} \right)^{n+1} + e^n \right] = +\infty.$$

30.

$$\text{a) } \lim \left(\frac{3n-2}{4n+1} \right)^{\frac{2n-1}{n+1}} = \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\text{b) } \lim \left(\frac{4n-2}{3n+1} \right)^{\frac{3n-1}{n^2+1}} = \left(\frac{4}{3} \right)^0 = 1$$

$$\text{c) } \lim \left(\frac{2n^2-1}{n^2+3} \right)^{\frac{1-2n}{3n+4}} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

31.

$$\text{a) } \lim \left(\frac{2n}{5n+1} \right)^n = \left(\frac{2}{5} \right)^{+\infty} = 0$$

$$\text{b) } \lim \left(\frac{3n^2-2}{n+3} \right)^{\frac{2n+1}{2-3n}} = (+\infty)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{+\infty} \right)^2} = 0$$

$$\text{c) } \lim \left(\frac{2n^2-1}{n^3+3} \right)^{\frac{1-2n}{3n+4}} = 0^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{0} \right)^2} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$$

32.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x} = \frac{\left(\frac{0}{0} \right)}{3} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(e^x - 1)}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = -1$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3 \right) = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$3x = y$$

Se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} &= 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \\ &= 3 \times 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{e^x - 1} &= 4 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 4 \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}} = \\ &= 4 \times \frac{1}{1} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{e^x - e^5}{x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{e^5 (e^{x-5} - 1)}{x - 5} = \\ &= e^5 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = e^5 \times 1 = e^5 \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$x - 5 = y$$

Se $x \rightarrow 5$, então $y \rightarrow 0$.

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e - e^x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-e (e^{x-1} - 1)}{x - 1} = -e \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} =$$

Mudança de variável:

$$x - 1 = y$$

Se $x \rightarrow 1$, então $y \rightarrow 0$.

$$= -e \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = -e \times 1 = -e$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{(e^x - 1)(e^x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x + 1} = \\ &= \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1 \times 1 = 1$$

33. Para que a função f seja contínua em $x = 0$ tem de se ter $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

$$f(0) = 2 \times 0 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 3) = 3$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{kx}}{x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{kx} - 1}{x} = \\ &= -\lim_{kx \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{kx} \times k = \\ &= -1 \times k = -k\end{aligned}$$

Assim, $-k = 3 \Leftrightarrow k = -3$.

34. Opção (B)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{ae^{x-a} - a}{x^2 - a^2} &= a \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{x-a} - 1}{(x-a)(x+a)} = \\ &= a \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{x-a} - 1}{x-a} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x+a} =\end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$x - a = y$$

Se $x \rightarrow a$, então $y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}&= a \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \times \frac{1}{a+a} = \\ &= a \times 1 \times \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

35.

$$\begin{aligned}\text{a) } f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} = \\ &= e^2 \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x - 2} =\end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$x - 2 = y$$

Se $x \rightarrow 2$, então $y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}&= e^2 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \\ &= e^2 \times 1 = e^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } f'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{2x} - e^6}{x - 3} = \\ &= e^6 \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{2x-6} - 1}{x - 3} = \\ &= e^6 \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{2x-6} - 1}{2x - 6} \times 2 =\end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$2x - 6 = y$$

Se $x \rightarrow 3$, então $y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}&= 2e^6 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \\ &= 2e^6 \times 1 = 2e^6\end{aligned}$$

36. Opção (B)

$$h(x) = e^\pi$$

$$h'(x) = 0$$

Logo, $h'(1) = 0$.

37.

$$\begin{aligned}\text{a) } f'(x) &= (6x^2 + e^x)' = \\ &= (6x^2)' + (e^x)' = \\ &= 12x + e^x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } g'(x) &= ((x^2 + 3x) \times e^x)' = \\ &= (x^2 + 3x)' \times e^x + (x^2 + 3x) \times (e^x)' = \\ &= (2x + 3) \times e^x + (x^2 + 3x) \times e^x = \\ &= e^x (2x + 3 + x^2 + 3x) = \\ &= e^x (x^2 + 5x + 3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } h'(x) &= \left(\frac{2x}{e^x}\right)' = \\ &= \frac{(2x)' \times e^x - (2x) \times (e^x)'}{(e^x)^2} = \\ &= \frac{2 \times e^x - 2x \times e^x}{(e^x)^2} = \\ &= \frac{e^x (2 - 2x)}{(e^x)^2} = \\ &= \frac{2 - 2x}{e^x}\end{aligned}$$

$$\text{d) } i'(x) = (e^{2x-7})' = (2x - 7)' e^{2x-7} = 2e^{2x-7}$$

$$\begin{aligned}\text{e) } j'(x) &= \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} = \\ &= -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{f) } k'(x) &= (3e^{x+\sqrt{x}} + x^2)' = \\ &= 3(x + \sqrt{x})' e^{x+\sqrt{x}} + 2x = \\ &= 3\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) e^{x+\sqrt{x}} + 2x\end{aligned}$$

38.

$$\begin{aligned}\text{a) } f'(x) &= (e^{2x+3})' = \\ &= (2x + 3)' e^{2x+3} = \\ &= 2e^{2x+3} \\ f'(0) &= 2e^3 \\ f(0) &= e^3\end{aligned}$$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0 é $y = 2e^3x + e^3$.

$$\begin{aligned}\text{b) } f'(x) &= 2 \Leftrightarrow 2e^{2x+3} = 2 \\ &\Leftrightarrow e^{2x+3} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = e^0 = 1$$

$$1 = 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + b \Leftrightarrow b = 4$$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f que é paralela à reta de equação $y = 2x$ é $y = 2x + 4$.

Unidade 4 - Funções logarítmicas

Páginas 35 a 78

39.

- a) $\log_2 (64) = 6$, pois $2^6 = 64$.
 b) $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = -1$, pois $2^{-1} = \frac{1}{2}$.
 c) $\log_3 (\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$, pois $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.
 d) $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = -2$, pois $4^{-2} = \frac{1}{16}$.
 e) $\log_{\frac{1}{2}} (32) = -5$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$.
 f) $\log_{\sqrt{5}} (25) = 4$, pois $(\sqrt{5})^4 = 25$.
 g) $\log_{2012} (1) = 0$, pois $2012^0 = 1$.
 h) $\log_{2012} (2012) = 1$, pois $2012^1 = 2012$.
 i) $\log_{12} (12^{10}) = 10$, pois $12^{10} = 12^{10}$.
 j) $3^{\log_3 (81)} = 81$

40.

- a) $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
 Logo, $x \in]-1, +\infty[$.
 b) $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$
 Logo, $x \in \mathbb{R}^+$.
 c) $x^2 > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 0$
 Logo, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 d) $x^2 + 1 > 0$ Condição universal em $\mathbb{R}$
 Logo, $x \in \mathbb{R}$.
 e) $2 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -2 \Leftrightarrow x < 2$
 Logo, $x \in]-\infty, 2[$.

41.

- a) $3^{1 + \log_3 (x)} = 3^1 \times 3^{\log_3 (x)} = 3x$
 b) $4^{3 \log_4 (x)} = 4^{\log_4 (x^3)} = x^3$
 c) $5^{6 \log_5 (x) - 2 \log_5 (x)} = 5^{4 \log_5 (x)} = 5^{\log_5 (x^4)} = x^4$
 d) $\log_3 (9^x) = \log_3 (3^{2x}) = 2x$

42.

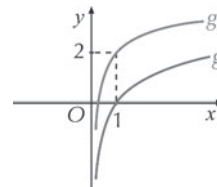
- a) $13 = \log_2 (2^{13}) = \log_2 (8192)$
 b) $13 = \log_3 (3^{13}) = \log_3 (1\,594\,323)$
 c) $13 = \log_5 (5^{13}) = \log_5 (1\,220\,703\,125)$
 d) $13 = \log (10^{13}) = \log (10\,000\,000\,000\,000)$
 e) $13 = \ln (e^{13})$

43.

- a) $13 = 2^{\log_2 (13)}$
 b) $13 = 3^{\log_3 (13)}$
 c) $13 = 5^{\log_5 (13)}$
 d) $13 = 10^{\log (13)}$
 e) $13 = e^{\ln (13)}$

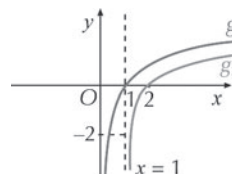
44.

a)
i)



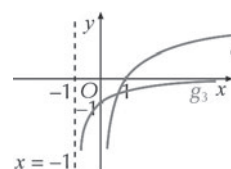
O gráfico de g_1 obtém-se a partir do gráfico de g segundo uma translação associada ao vetor $(0, 2)$.

ii)



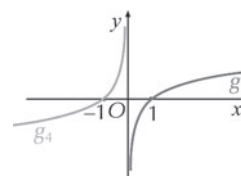
O gráfico de g_2 obtém-se a partir do gráfico de g segundo uma translação associada ao vetor $(1, 0)$.

iii)



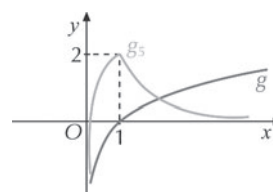
O gráfico de g_3 obtém-se a partir do gráfico de g segundo uma translação associada ao vetor $(-1, 0)$ seguida de uma translação associada ao vetor $(0, -1)$.

iv)



O gráfico de g_4 obtém-se a partir do gráfico de g segundo uma simetria em relação a Oy seguida de uma simetria em relação a Ox .

v)



O gráfico de g_5 obtém-se a partir do gráfico de g mantendo os pontos da ordenada não negativa e efetuando uma simetria dos pontos de ordenada negativa em relação a Ox , seguida de uma simetria em relação a Ox , seguida de uma translação associada ao vetor $(0, 2)$.

b) $D_{g_1} = \mathbb{R}^+ \quad D'_{g_1} = \mathbb{R}$
 Equação da assíntota: $x = 0$
 $D_{g_2} =]1, +\infty[\quad D'_{g_2} = \mathbb{R}$
 Equação da assíntota: $x = 1$
 $D_{g_3} =]-1, +\infty[\quad D'_{g_3} = \mathbb{R}$
 Equação da assíntota: $x = -1$
 $D_{g_4} = \mathbb{R}^- \quad D'_{g_4} = \mathbb{R}$
 Equação da assíntota: $x = 0$
 $D_{g_5} = \mathbb{R}^+ \quad D'_{g_5} =]-\infty, 2]$
 Equação da assíntota: $x = 0$

45. f é contínua no intervalo $[5, 6]$, visto tratar-se do produto de funções contínuas em $\mathbb{R}^+$, logo contínuas em $[5, 6]$.

$f(5) = e^5 \times \ln(5) \approx 238,862$
 $f(6) = e^6 \times \ln(6) \approx 722,847$
 ou seja, $f(5) < 500 < f(6)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in]5, 6[$ tal que $f(c) = 500$.

46. Se o ponto $(0, 2)$ pertence ao gráfico de f , então $f(0) = 2$.

Se o ponto $(1, -2)$ pertence ao gráfico de f^{-1} , então $f(-2) = 1$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(0) = 2 \\ f(-2) = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_a(0 + b) = 2 \\ \log_a(-2 + b) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^2 \\ -2 + b = a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ b = a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = a^2 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 2 = 0 \\ \text{---} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Mas $-1 \notin]1, +\infty[$, logo $a = 2$ e $b = 4$.

47. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$

$f(7) = \log_{\frac{1}{2}}(8) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right) = -3$

Assim, $A(7, -3)$ e $B(0, -3)$.

Logo, $A_{[ABO]} = \frac{7 \times 3}{2} = \frac{21}{2}$.

48.

a) $\log_2(x) = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 \Leftrightarrow x = 16$

b) $\ln(x) = 5 \Leftrightarrow x = e^5$

c) $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

d) $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

e) $\ln(x) = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$

f) $\log(x) = 3 \Leftrightarrow x = 10^3 \Leftrightarrow x = 1000$

g) $4^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_4(3)$

h) $10^x = 4 \Leftrightarrow x = \log(4)$

i) $e^x = 6 \Leftrightarrow x = \ln(6)$

j) $e^x = -2$ Condição impossível, logo não existe qualquer valor de x que satisfaça a igualdade.

49.

a) $H(100) = 2^{21 - 0,2 \times 100} = 2^{21 - 20} = 2$ horas

b) $H(d) = 8 \Leftrightarrow 2^{21 - 0,2d} = 8$
 $\Leftrightarrow 2^{21 - 0,2d} = 2^3$
 $\Leftrightarrow 21 - 0,2d = 3$
 $\Leftrightarrow 0,2d = 18$
 $\Leftrightarrow d = 90$ decibéis

50.

a) $\ln(125) = \ln(5^3) = 3 \ln(5)$

b) $\ln\left(\frac{25}{\sqrt{5}}\right) = \ln(25) - \ln(\sqrt{5}) =$
 $= \ln(5^2) - \ln\left(5^{\frac{1}{2}}\right) =$
 $= 2 \ln(5) - \frac{1}{2} \ln(5) =$
 $= \frac{3}{2} \ln(5)$

c) $\ln(65) - 2 \ln(\sqrt{13}) = \ln(65) - \ln(13) =$
 $= \ln\left(\frac{65}{13}\right) = \ln(5)$

d) $\ln(\pi) + \ln\left(\frac{\sqrt{125}}{\pi}\right) = \ln\left(\pi \times \frac{\sqrt{125}}{\pi}\right) =$
 $= \ln(5^3)^{\frac{1}{2}} =$
 $= \ln\left(5^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2} \ln(5)$

51. $\log(2\sqrt{10}) - \frac{1}{3} \log\left(\frac{8}{10}\right) - \log\left(\frac{3}{10}\right)^{-1} =$
 $= \log(2) + \log(\sqrt{10}) - \frac{1}{3}(\log(8) - \log(10)) +$
 $+ \log\left(\frac{3}{10}\right) =$

$$\begin{aligned}
&= \log(2) + \frac{1}{2} \log(10) - \frac{1}{3} \log(8) + \frac{1}{3} \log(10) + \\
&\quad + \log(3) - \log(10) = \\
&= \log(2) - \frac{1}{3} \log(2^3) + \log(3) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1\right) \log(10) = \\
&= \log(2) - \frac{3}{3} \log(2) + \log(3) - \frac{1}{6} \times 1 = \\
&= -\frac{1}{6} + \log(3)
\end{aligned}$$

52.

a) Afirmação verdadeira. Por exemplo, $\log\left(\frac{1}{10}\right) = -1$.

b) Afirmação falsa. Se $a > 0$ e $b < 0$, então $\frac{a}{b} < 0$ e $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ não existe.

c) Afirmação falsa. Se $a < 0$ e $b < 0$, então $\frac{a}{b} > 0$ e $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ existe.

d) Afirmação falsa. Por exemplo, se $k = -2$, $f(x) = \log(|-2|x) = \log(2x)$ tem domínio $\mathbb{R}^+$.

e) Afirmação falsa. Por exemplo, $2 > 0$ e $3 > 0$ e $\log(2) + \log(3) \neq \log(5)$.

f) Afirmação falsa. Por exemplo, $2 > 0$ e $3 > 0$ e $\log(2) : \log(3) \neq \log\left(\frac{2}{3}\right)$.

g) Afirmação falsa. Se $a > 0$, $\log(\sqrt{a}) = \log(a^{0.5})$ e não $(\log a)^{0.5}$.

53.

$$\begin{aligned}
\text{a)} \log_2(12) + \log_2(20) - \log_2(15) &= \\
&= \log_2(4 \times 3) + \log_2(4 \times 5) - \log_2(3 \times 5) = \\
&= \log_2(4) + \log_2(3) + \log_2(4) + \log_2(5) - \log_2(3) - \\
&\quad - \log_2(5) = \\
&= 2 + 2 = 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \frac{1}{2} \log_5(16) - \log_5\left(\frac{4}{5}\right) &= \\
&= \log_5\left(16^{\frac{1}{2}}\right) - \log_5(4) + \log_5(5) = \\
&= \log_5(4) - \log_5(4) + 1 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \ln(64) - 2 \ln(4) + 5 \ln(2) - \ln(2^7) &= \\
&= \ln(2^6) - 2 \ln(2^2) + 5 \ln(2) - 7 \ln(2) = \\
&= 6 \ln(2) - 4 \ln(2) - 2 \ln(2) = \\
&= 2 \ln(2) - 2 \ln(2) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d)} \log_3\left(\frac{27^{26} \times 3^{21} \times \sqrt{243}}{\sqrt[3]{81} \times 9^{50}}\right) &= \\
&= \log_3\left(\frac{3^{3 \times 26} \times 3^{21} \times 3^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{4}{3}} \times 3^{2 \times 50}}\right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \log_3\left(\frac{3^{99} \times 3^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{4}{3}} \times 3^{100}}\right) = \\
&= \log_3\left(\frac{3^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{4}{3}} \times 3}\right) = \\
&= \log_3\left(\frac{3^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{7}{3}}}\right) = \\
&= \log_3\left(3^{\frac{1}{6}}\right) = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

54.

$$\begin{aligned}
\text{a)} \log_a(bc^3) &= \log_a(b) + \log_a(c^3) = \\
&= \log_a(b) + 3 \log_a(c) = x + 3y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \log_a\left(\frac{b^2}{c}\right) &= \log_a(b^2) - \log_a(c) = \\
&= 2 \log_a(b) - \log_a(c) = 2x - y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \log_b(a\sqrt{b}) &= \log_b(a) + \log_b(\sqrt{b}) = \\
&= \frac{\log_a(a)}{\log_a(b)} + \log_b\left(b^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

55.

a) $2^x = 3^x$ e, como $x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$, vem que:

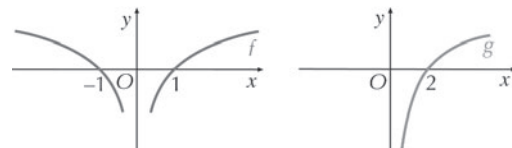
$$\begin{aligned}
2^x &= 3^y \Leftrightarrow 2^x = 3^{2-x} \\
\Leftrightarrow 2^x &= \frac{3^2}{3^x} \\
\Leftrightarrow 2^x \times 3^x &= 9 \\
\Leftrightarrow 6^x &= 9 \\
\Leftrightarrow x &= \log_6(9) \\
\Leftrightarrow x &= \frac{\ln(9)}{\ln(6)}
\end{aligned}$$

56.

$$\text{a)} D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Como $D_f \neq D_g$, então as funções f e g não são iguais.

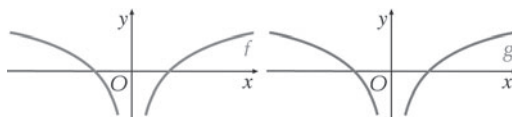


$$\text{b)} D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$g(x) = 2 \log |x| = \log |x|^2 = \log(x^2) = f(x)$$

Como $D_f = D_g$ e $g(x) = f(x)$, então as funções f e g são iguais.

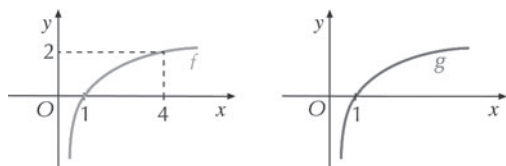


c) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: \sqrt{x} > 0\} = \mathbb{R}^+$

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$g(x) = \frac{1}{2} \log(x) = \log\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \log(\sqrt{x}) = f(x)$

Como $D_f = D_g$ e $g(x) = f(x)$, então as funções f e g são iguais.



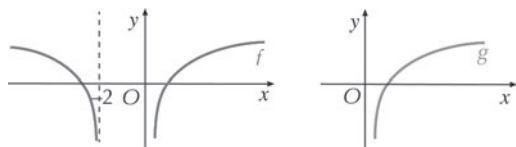
d) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x(x+2) > 0\} =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$

Cálculo auxiliar

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
x	-	-	-	0	+
x+2	-	0	+	+	+
x(x+2)	+	0	-	0	+

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge x+2 > 0\} =]0, +\infty[$

Como $D_f \neq D_g$, então as funções f e g não são iguais.



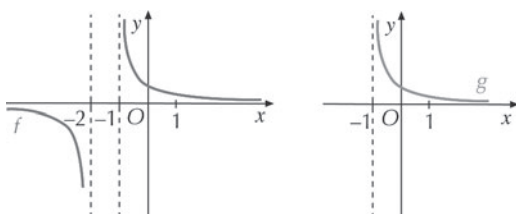
e) $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{x+2}{x+1} > 0\right\} =]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[$

Cálculo auxiliar

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
x+2	-	-	-	0	+
x+1	-	0	+	+	+
$\frac{x+2}{x+1}$	+	0	-	0	+

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x+2 > 0 \wedge x+1 > 0\} =]-1, +\infty[$

Como $D_f \neq D_g$, então as funções f e g não são iguais.



57.

a) $D = \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} & \log(x^5) + \log(\sqrt{x}) - \log(x^2) = \\ & = 5 \log(x) + \frac{1}{2} \log(x) - \log(x) \wedge x \in D = \\ & = 3 \log(x) + \frac{1}{2} \log(x) \wedge x \in D = \\ & = \frac{7}{2} \log(x) \wedge x \in D \end{aligned}$$

b) $D = \{x \in \mathbb{R}: 4-x > 0 \wedge 4+x > 0\} =]-4, 4[$

$$\begin{aligned} & \ln(4-x) + \ln(4+x) = \\ & = \ln[(4-x)(4+x)] \wedge x \in D = \\ & = \ln(16-x^2) \wedge x \in D \end{aligned}$$

c) $D = \{x \in \mathbb{R}: 25x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} & 4 \ln(2) + \frac{1}{2} \log(25x) = \\ & = \ln(2^4) + \ln(\sqrt{25x}) \wedge x \in D = \\ & = \ln(16 \times 5 \times \sqrt{x}) \wedge x \in D = \\ & = \ln(80 \times \sqrt{x}) \wedge x \in D \end{aligned}$$

d) $D = \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} & 2 \log(x) + 3 = \\ & = 2 \log(x) + \log(1000) \wedge x \in D = \\ & = \log(x^2) + \log(1000) \wedge x \in D = \\ & = \log(1000x^2) \wedge x \in D \end{aligned}$$

e) $D = \{x \in \mathbb{R}: |x| > 0 \wedge x+2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0 \wedge x > -2\} =]-2, 0[\cup]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} & 2 \log|x| - \log(x+2) = \\ & = \log|x|^2 - \log(x+2) \wedge x \in D = \\ & = \ln(x^2) - \log(x+2) \wedge x \in D = \\ & = \log\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \wedge x \in D \end{aligned}$$

58.

a) $\log\left(\frac{a}{b}\right) + \log\left(\frac{b}{c}\right) + \log\left(\frac{c}{a}\right) =$
 $= \log(a) - \log(b) + \log(b) - \log(c) + \log(c) - \log(a) = 0$

b) $\log_b(a) \times \log_c(b) \times \log_a(c) =$
 $= \frac{\log(a)}{\log(b)} \times \frac{\log(b)}{\log(c)} \times \frac{\log(c)}{\log(a)} = 1$

c) $\frac{\ln(\sqrt{e^a})}{2} = \frac{\ln(e^a)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\ln(e^a)}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{a}{4}$

59.

a) $f(x) = \log(10x^3) - \log(x) =$
 $= \log(10) + \log(x^3) - \log(x) =$
 $= 1 + 3 \log(x) - \log(x) =$
 $= 1 + 2 \log(x), \forall x \in \mathbb{R}^+$

b) $f(x) = 11 \Leftrightarrow 1 + 2 \log(x) = 11$
 $\Leftrightarrow 2 \log(x) = 10$

$$\Leftrightarrow \log(x) = 5$$

$$\Leftrightarrow x = 10^5$$

60.

$$\text{a) } D = \{x \in \mathbb{R}: 3x + 2 > 0 \wedge 2x + 5 > 0\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}: x > -\frac{2}{3} \wedge x > -\frac{5}{2}\right\} = \left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[$$

$$\log_6(3x + 2) = \log_6(2x + 5)$$

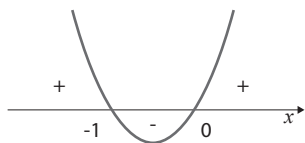
$$\Leftrightarrow 3x + 2 = 2x + 5 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \wedge x \in D$$

$$\text{b) } D = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 > 0 \wedge x^2 + x > 0\} =]0, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$



$$x^2 + x > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

$$\log_2(x + 1) = \log_2(x^2 + x)$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = x^2 + x \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1) \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \{1\}$$

$$\text{c) } D = \{x \in \mathbb{R}: 3x - 5 > 0\} = \left]\frac{5}{3}, +\infty\right[$$

$$\ln(3x - 5) = \ln(7)$$

$$\Leftrightarrow 3x - 5 = 7 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 3x = 12 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \{4\}$$

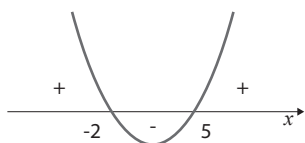
$$\text{d) } D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 3x - 10 > 0 \wedge 2 - 2x > 0\} =]-\infty, -2[$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-10)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 7}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -2$$



$$x^2 - 3x - 10 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$$

$$\bullet 2 - 2x > 0 \Leftrightarrow 2 > 2x \Leftrightarrow 1 > x \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[$$

$$\log(x^2 - 3x - 10) = \log(2 - 2x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 2 - 2x \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-12)}}{2} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 7}{2} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x = 4 \vee x = -3) \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \{-3\}$$

$$\text{e) } D = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 1 > 0\} = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

$$\log_3(2x + 1) = 4$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 3^4 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 81 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 2x = 80 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 40 \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \{40\}$$

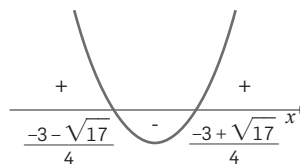
$$\text{f) } D = \{x \in \mathbb{R}: 2x^2 + 3x - 1 > 0\} =$$

$$= \left]-\infty, \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}\right[\cup \left]\frac{-3 + \sqrt{17}}{4}, +\infty\right[$$

Cálculo auxiliar

$$2x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-1)}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$$



$$2x^2 + 3x - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}\right[\cup \left]\frac{-3 + \sqrt{17}}{4}, +\infty\right[$$

$$\log_3(2x^2 + 3x - 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 9 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 10 = 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-10)}}{4} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{89}}{4} \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \left\{\frac{-3 - \sqrt{89}}{4}, \frac{-3 + \sqrt{89}}{4}\right\}$$

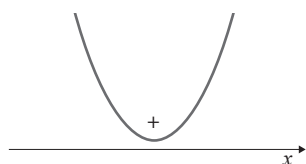
g) $D = \{x \in \mathbb{R}: 2x^2 + 5x + 4 > 0\} = \mathbb{R}$

Cálculo auxiliar

$$2x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 4}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

condição impossível em $\mathbb{R}$



$$2x^2 + 5x + 4 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\log_2 (2x^2 + 5x + 4) = 4$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 4 = 2^4 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 4 = 16 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 12 = 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times (-12)}}{4} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{4} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 11}{4} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -4 \vee x = \frac{3}{2} \right) \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -4, \frac{3}{2} \right\}$$

h) $D = \{x \in \mathbb{R}: (x-1)^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\log_5 (x-1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 5^2 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x-1 = 5 \vee x-1 = -5) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x = 6 \vee x = -4) \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \{-4, 6\}$$

61.

a) $D = \{x \in \mathbb{R}: x-2 > 0\} =]2, +\infty[$

$$10^{3 \log (x-2)} = 125$$

$$\Leftrightarrow 10^{\log (x-2)^3} = 5^3 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3 = 5^3 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 5 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \{7\}$$

b) $D = \{x \in \mathbb{R}: 3x+2 > 0 \wedge x^2 > 0\} =$

$$= \left] -\frac{2}{3}, 0 \right[\cup]0, +\infty[$$

$$2 \log_5 (3x+2) = \log_5 (x^2)$$

$$\Leftrightarrow \log_5 (3x+2)^2 = \log_5 (x^2) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (3x+2)^2 = x^2 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (3x+2 = x \vee 3x+2 = -x) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (2x = -2 \vee 4x = -2) \wedge x \in D$$

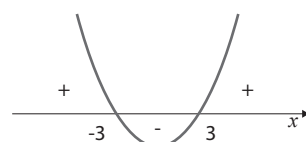
$$\Leftrightarrow \left(x = -1 \vee x = -\frac{1}{2} \right) \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

c) $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 9 > 0 \wedge x - 3 > 0\} =]3, +\infty[$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$



$$x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$$

$$\ln (x^2 - 9) - \ln (x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln (x^2 - 9) = \ln (x - 3) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = x - 3 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-6)}}{2} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x = 3 \vee x = -2) \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \emptyset$$

d) $D = \mathbb{R}^+$

$$\frac{1}{3} \log (x) + \log (3) = \log (5)$$

$$\Leftrightarrow \log (\sqrt[3]{x}) = \log (5) - \log (3) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log (\sqrt[3]{x}) = \log \left(\frac{5}{3} \right) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{5}{3} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{5}{3} \right)^3 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{125}{27} \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{125}{27} \right\}$$

e) $D = \{x \in \mathbb{R}: x+3 > 0 \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$$\log (x+3) + \log (x) = \log (28)$$

$$\Leftrightarrow \log [x(x+3)] = \log (28) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log (x^2 + 3x) = \log (28) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x = 28 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 28 = 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times (-28)}}{2} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 11}{2} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x = -7 \vee x = 4) \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \{4\}$$

f) $D = \{x \in \mathbb{R}: x+1 > 0 \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$$\log(x+1) - \log(x) = \log(3)$$

$$\Leftrightarrow \log(x+1) = \log(3) + \log(x) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log(x+1) = \log(3x) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 3x \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow -2x = -1 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

g) $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge 2x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$$\log_2(x) + \log_4(2x) = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x) + \frac{\log_2(2x)}{\log_2(4)} = 4 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x) + \frac{\log_2(2x)}{2} = 4 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_2(x) + \log_2(2x) = 8 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2) + \log_2(2x) = 8 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 \times 2x) = 8 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x^3) = 8 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 = 2^8 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 128 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 4\sqrt[3]{2} \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \{4\sqrt[3]{2}\}$$

h) $D = \mathbb{R}^+$

$$\log_2^2(x) - \log_2(x) - 2 = 0$$

Considerando a mudança de variável $\log_2(x) = y$, temos:

$$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = -1$$

Voltando a substituir y por $\log_2(x)$, vem que:

$$(\log_2(x) = 2 \vee \log_2(x) = -1) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x = 2^2 \vee x = 2^{-1}) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 4 \vee x = \frac{1}{2}\right) \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \left\{4, \frac{1}{2}\right\}$$

i) $\log_{\sqrt{2}}(3x^2 - 4x - 17) = \log_{\sqrt{2}}(2x^2 - 5x + 3)$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: 3x^2 - 4x - 17 > 0 \wedge 2x^2 - 5x + 3 > 0\} = \\ = \left]-\infty, \frac{2 - \sqrt{55}}{3}\right[\cup \left[\frac{2 + \sqrt{55}}{3}, +\infty\right[$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet 3x^2 - 4x - 17 = 0$$

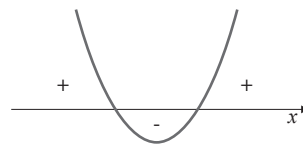
$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3 \times (-17)}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{220}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{55}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{55}}{3}$$

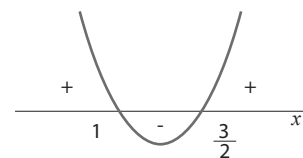
220	2
110	2
55	5
11	11
1	



$$\bullet 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = 1$$



$$\log_{\sqrt{2}}(3x^2 - 4x - 17) = \log_{\sqrt{2}}(2x^2 - 5x + 3)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 17 = 2x^2 - 5x + 3 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-20)}}{2} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 9}{2} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x = -5 \vee x = 4) \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \{-5, 4\}$$

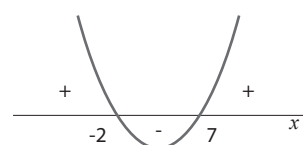
j) $\log[(x+2) \times (x-7)] + \log\left(\frac{x+2}{x-7}\right) = 2$

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}: (x+2)(x-7) > 0 \wedge \frac{x+2}{x-7} > 0\right\} = \\ =]-\infty, -2[\cup]7, +\infty[$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet (x+2)(x-7) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 7$$

$$(x+2)(x-7) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 7$$



$$\bullet \frac{x+2}{x-7} > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 7$$

x	$-\infty$	-2		7	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+	+
$x-7$	-	-	-	0	+
$\frac{x+2}{x-7}$	+	0	-	n.d.	+

$$x \in]-\infty, -2[\cup]7, +\infty[$$

$$\log [(x+2) \times (x-7)] + \log \left(\frac{x+2}{x-7} \right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log \left[(x+2) \times (x-7) \left(\frac{x+2}{x-7} \right) \right] = 2 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log (x+2)^2 = 2 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 10^2 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x+2 = 10 \vee x+2 = -10) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x=8 \vee x=-12) \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \{8, -12\}$$

$$62. D_g = \{x \in \mathbb{R}: x+6 > 0\} =]-6, +\infty[$$

$$a) \forall x \in D_g,$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \log_5 (x+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+6 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -5$$

$$\text{C.S.} = \{-5\}$$

$$b) \forall x \in D_g,$$

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \log_5 (x+6) > 0$$

$$\Leftrightarrow x+6 > 1$$

$$\Leftrightarrow x > -5$$

$$\text{C.S.} =]-6, +\infty[\cap]-5, +\infty[=]-5, +\infty[$$

$$c) \forall x \in D_g,$$

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow \log_5 (x+6) < 0$$

$$\Leftrightarrow x+6 < 1$$

$$\Leftrightarrow x < -5$$

$$\text{C.S.} =]-6, +\infty[\cap]-\infty, -5[=]-6, -5[$$

63.

$$a) D = \{x \in \mathbb{R}: 4x > 0\} = \mathbb{R}^+$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,$$

$$\log (4x) < \log (5) \Leftrightarrow 4x < 5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{4}$$

$$\text{C.S.} = \mathbb{R}^+ \cap \left] -\infty, \frac{5}{4} \right[= \left] 0, \frac{5}{4} \right[$$

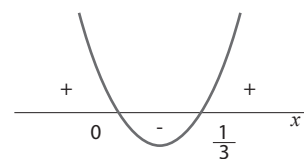
$$b) D = \{x \in \mathbb{R}: 3x^2 - x > 0 \wedge x+1 > 0\} =$$

$$= \left(\left] -\infty, 0[\cup \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[\right) \cap]-1, +\infty[=$$

$$=]-1, 0[\cup \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$$

Cálculo auxiliar

$$3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(3x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{3}$$



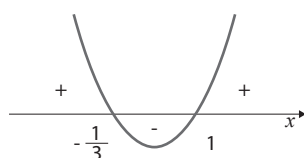
$$\forall x \in]-1, 0[\cup \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[,$$

$$\ln (3x^2 - x) \leq \ln (x+1) \Leftrightarrow 3x^2 - x \leq x+1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 \leq 0$$

Cálculo auxiliar

$$3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{3}$$



$$\text{C.S.} = \left(\left] -1, 0[\cup \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[\right) \cap \left[-\frac{1}{3}, 1 \right] =$$

$$= \left[-\frac{1}{3}, 0[\cup \left] \frac{1}{3}, 1 \right[\right]$$

$$c) D = \{x \in \mathbb{R}: 3x-1 > 0 \wedge 2x+3 > 0\} =$$

$$= \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[\cap \left[-\frac{3}{2}, +\infty \right[= \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$$

$$\forall x \in \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[,$$

$$\log \frac{1}{2} (3x-1) \geq \log \frac{1}{2} (2x+3) \Leftrightarrow 3x-1 \leq 2x+3$$

$$\Leftrightarrow x \leq 4$$

$$\text{C.S.} = \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[\cap]-\infty, 4] = \left] \frac{1}{3}, 4 \right[$$

$$d) D = \{x \in \mathbb{R}: x+5 > 0\} =]-5, +\infty[$$

$$\forall x \in]-5, +\infty[,$$

$$\log \frac{1}{2} (x+5) > 0 \Leftrightarrow \log \frac{1}{2} (x+5) > \log \frac{1}{2} (1)$$

$$\Leftrightarrow x+5 < 1$$

$$\Leftrightarrow x < -4$$

$$\text{C.S.} =]-5, +\infty[\cap]-\infty, -4[=]-5, -4[$$

64.

$$a) D = \{x \in \mathbb{R}: x-1 > 0 \wedge x+2 > 0\} =]1, +\infty[$$

$$\log (x-1) + \log (x+2) < \log (6)$$

$$\Leftrightarrow \log [(x-1)(x+2)] < \log (6) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 6 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 8 < 0 \wedge x \in D$$

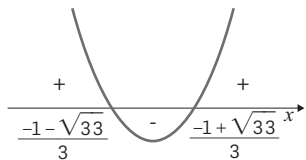
$$\Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{33}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \left] 1, \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \right[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-8)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}$$



$$x^2 + x - 8 < 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{-1-\sqrt{33}}{2}, \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \right[$$

$$\text{b) } D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x+1 > 0 \wedge 2x+6 > 0\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x > -1 \wedge x > -3\} = \mathbb{R}^+$$

$$\log(x) + \log(x+1) < \log(2x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log[x(x+1)] < \log(2x+6) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x < 2x + 6 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow -2 < x < 3 \wedge x \in D$$

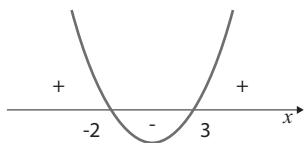
$$\text{C.S.} =]0, 3[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-6)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$



$$\text{c) } D = \{x \in \mathbb{R} : x-1 > 0 \wedge 13-x > 0\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : x > 1 \wedge 13 > x\} =]1, 13[$$

$$\log_2(x-1) \leq 5 - \log_2(13-x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1) + \log_2(13-x) \leq 5 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2[(x-1)(13-x)] \leq 5 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2(-x^2 + 14x - 13) \leq 5 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 14x - 13 \leq 2^5 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 14x - 13 \leq 32 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 14x - 45 \leq 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x \leq 5 \vee x \geq 9) \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} =]1, 5] \cup [9, 13[$$

Cálculo auxiliar

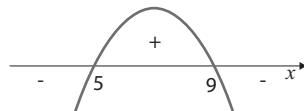
$$-x^2 + 14x - 45 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 4 \times (-1) \times (-45)}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{16}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm 4}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 9 \vee x = 5$$



$$\text{d) } 2 < \log_2(3x+2) - \log_2(1-2x)$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 3x+2 > 0 \wedge 1-2x > 0\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : x > -\frac{2}{3} \wedge x < \frac{1}{2} \right\} = \left] -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right[$$

$$2 < \log_2(3x+2) - \log_2(1-2x)$$

$$\Leftrightarrow 2 + \log_2(1-2x) < \log_2(3x+2) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4) + \log_2(1-2x) < \log_2(3x+2) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2[4(1-2x)] < \log_2(3x+2) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 4 - 8x < 3x + 2 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2 < 3x + 8x \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 2 < 11x \wedge x \in D$$

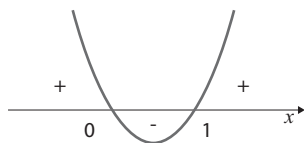
$$\Leftrightarrow x > \frac{2}{11} \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \left] \frac{2}{11}, \frac{1}{2} \right[$$

$$\text{e) } D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x > 0\} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \vee x = 0 \vee x = 1$$



$$\log_4(x^2 - x) > \log_{0,25}\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_4(x^2 - x) > \frac{\log_4\left(\frac{1}{6}\right)}{\log_4(0,25)} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_4(x^2 - x) > \frac{\log_4\left(\frac{1}{6}\right)}{-1} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_4(x^2 - x) > \log_4\left(\frac{1}{6}\right) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_4(x^2 - x) > \log_4(6) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x > 6 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 > 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x < -2 \vee x > 3) \wedge x \in D$$

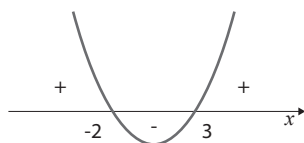
$$\text{C.S.} =]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-6)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$



$$\text{f) } D = \{x \in \mathbb{R}: 2 - x > 0 \wedge x + 1 > 0\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}: 2 > x \wedge x > -1\} =]-1, 2[$$

$$\log_2(2 - x) < \log_{0,5}(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2 - x) < \frac{\log_2(x + 1)}{\log_2(0,5)} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2 - x) < \frac{\log_2(x + 1)}{-1} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2 - x) < -\log_2(x + 1) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2 - x) < \log_2\left(\frac{1}{x + 1}\right) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 2 - x < \frac{1}{x + 1} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (2 - x) - \frac{1}{x + 1} < 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2 - x)(x + 1) - 1}{x + 1} < 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + x + 2 - 1}{x + 1} < 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1} < 0 \wedge x \in D$$

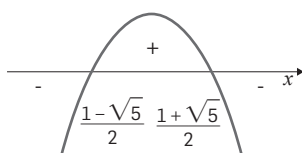
$$\Leftrightarrow \left(-1 < x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \vee x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \wedge x \in D$$

Cálculo auxiliar

$$-x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-1) \times 1}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$



x	$-\infty$	-1		$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$		$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$-x^2 + x + 1$	-	-	-	0	+	0	-
$x + 1$	-	0	+	+	+	+	+
$\frac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$	+	n.d.	-	0	+	0	-

$$\text{C.S.} = \left]-1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, 2\right[$$

$$\text{g) } D = \left\{x \in \mathbb{R}: x^2 - x - \frac{3}{4} > 0\right\} = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

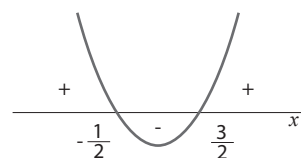
Cálculo auxiliar

$$x^2 - x - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 4 \times (-3)}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 8}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$



$$\log_{0,5}\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) > 2 - \log_2(5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right)}{\log_2(0,5)} > 2 - \log_2(5) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow -\log_2\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) > 2 - \log_2(5) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) < -2 - \log_2(5) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) + 2 < \log_2(5) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) + \log_2(4) < \log_2(5) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4x^2 - 4x - 3) < \log_2(5) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 3 < 5 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 8 < 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 2 \wedge x \in D$$

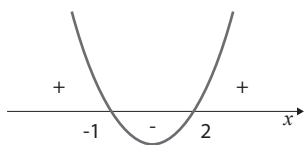
$$\text{C.S.} = \left]-1, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, 2\right[$$

Cálculo auxiliar

$$4x^2 - 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 4 \times (-8)}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 12}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$



$$4x^2 - 4x - 8 < 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 2[$$

h) $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge 3^x - 27 \neq 0\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{3\}$

Cálculo auxiliar

$$3^x - 27 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$$

x	0		3		e^2	$+\infty$
$\ln(x) - 2$	n.d.	-	-	-	0	+
$3^x - 27$	-	-	0	+	+	+
$\frac{\ln(x) - 2}{3^x - 27}$	n.d.	+	n.d.	-	0	+

$$\text{C.S.} =]0, 3[\cup [e^2, +\infty[$$

i) $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge x^2 > 0\} = \mathbb{R}^+$

$$(\ln(x))^2 - \ln(x^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln(x))^2 - 2 \ln(x) > 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) (\ln(x) - 2) > 0 \wedge x \in D$$

x	0		1		e^2	$+\infty$
$\ln(x)$	n.d.	-	0	+	+	+
$\ln(x) - 2$	n.d.	-	-	-	0	+
$\ln(x)(\ln(x) - 2)$	n.d.	+	0	-	0	+

Cálculo auxiliar

$$\ln(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = e^2$$

$$\text{C.S.} =]0, 1[\cup [e^2, +\infty[$$

j) $D = \mathbb{R}^+$

$$|2 + \log_2(x)| \geq 3$$

$$\Leftrightarrow (2 + \log_2(x) \geq 3 \vee 2 + \log_2(x) \leq -3) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (\log_2(x) \geq 1 \vee \log_2(x) \leq -5) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x \geq 2 \vee x \leq 2^{-5}) \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \left]0, \frac{1}{32}\right] \cup [2, +\infty[$$

k) $D = \mathbb{R}^+$

$$-3(\log_3(x))^2 - 5\log_3(x) + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3y^2 - 5y + 2 \geq 0 \wedge y = \log_3(x) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \left(y \geq -2 \wedge y \leq \frac{1}{3}\right) \wedge y = \log_3(x) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x) \geq -2 \wedge \log_3(x) \leq \frac{1}{3} \wedge x \in D$$

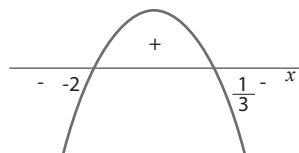
$$\Leftrightarrow x \geq 3^{-2} \wedge x \leq 3^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{9} \wedge x \leq \sqrt[3]{3}$$

Cálculo auxiliar

$$-3y^2 - 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{-6}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3} \vee y = -2$$



$$\text{C.S.} = \left[\frac{1}{9}, \sqrt[3]{3}\right]$$

65.

a) $1 - 2e^x > 0 \Leftrightarrow -2e^x > -1$

$$\Leftrightarrow e^x < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x < -\ln(2)$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, -\ln(2)[$$

b) $(4x - 5)(e^x - 2) \leq 0$

Cálculos auxiliares

$$\bullet 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$\bullet e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$$

x	$-\infty$	$\ln(2)$		$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$4x - 5$	-	-	-	0	+
$e^x - 2$	-	0	+	+	+
$(4x - 5)(e^x - 2)$	+	0	-	0	+

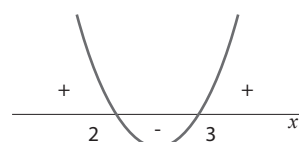
$$\text{C.S.} = \left[\ln(2), \frac{5}{4}\right]$$

c) $e^{2x} - 5e^x + 6 > 0$

Cálculo auxiliar

Seja $y = e^x$.

$$y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Leftrightarrow y = 3 \vee y = 2$$



$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 > 0 \wedge y = e^x \\ &\Leftrightarrow (y < 2 \vee y > 3) \wedge y = e^x \\ &\Leftrightarrow e^x < 2 \vee e^x > 3 \\ &\Leftrightarrow x < \ln(2) \vee x > \ln(3) \\ \text{C.S.} &=]-\infty, \ln(2)[\cup]\ln(3), +\infty[\end{aligned}$$

d) $e^x + e^{-x} > 2$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow e^x + \frac{1}{e^x} - 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} + 1 - 2e^x > 0 \\ &\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 > 0 \wedge y = e^x \\ &\Leftrightarrow (y - 1)^2 > 0 \wedge y = e^x \\ &\Leftrightarrow (y - 1 > 0 \vee y - 1 < 0) \wedge y = e^x \\ &\Leftrightarrow (y > 1 \vee y < 1) \wedge y = e^x \\ &\Leftrightarrow e^x > 1 \vee e^x < 1 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \vee x < 0 \\ \text{C.S.} &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

66.

$$\begin{aligned} \text{a) } D &= \{x \in \mathbb{R}: 1 - 2x > 0 \wedge 1 + \log_3(1 - 2x) > 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}: -2x > -1 \wedge \log_3(1 - 2x) > -1\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}: x < \frac{1}{2} \wedge x < \frac{1}{3}\right\} =]-\infty, -\frac{1}{3}[\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

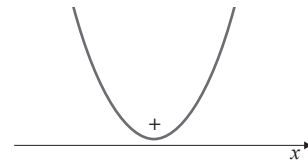
$$\begin{aligned} \log_3(1 - 2x) > -1 &\Leftrightarrow 1 - 2x > \frac{1}{3} \wedge x < \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow -2x > -\frac{2}{3} \wedge x < \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x < \frac{1}{3} \wedge x < \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_2(1 + \log_3(1 - 2x)) &= 2 \\ \Leftrightarrow 1 + \log_3(1 - 2x) &= 2^2 \wedge x \in D \\ \Leftrightarrow \log_3(1 - 2x) &= 3 \wedge x \in D \\ \Leftrightarrow 1 - 2x &= 3^3 \wedge x \in D \\ \Leftrightarrow 1 - 2x &= 27 \wedge x \in D \\ \Leftrightarrow -2x &= 26 \wedge x \in D \\ \Leftrightarrow x &= -13 \wedge x \in D \\ \text{C.S.} &= \{-13\} \end{aligned}$$

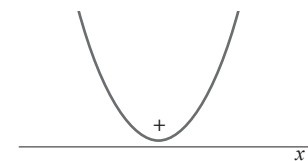
b) $D = \{x \in \mathbb{R}: \underbrace{3x^2 - 5x + 21 > 0}_{\text{condição universal}} \wedge \underbrace{\log_2(3x^2 - 5x + 21) > 0}_{\text{condição universal}}\} = \mathbb{R}$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \bullet 3x^2 - 5x + 21 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 3 \times 21}}{6} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{-227}}{6} \\ &\quad \text{condição impossível} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \log_2(3x^2 - 5x + 21) > 0 &\wedge x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 21 > 2^0 &\wedge x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \underbrace{3x^2 - 5x + 20 > 0}_{\text{condição universal}} &\wedge x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow x &\in \mathbb{R} \\ \bullet 3x^2 - 5x + 20 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 3 \times 20}}{6} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{-215}}{6} \\ &\quad \text{condição impossível em } \mathbb{R} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \log_5(\log_2(3x^2 - 5x + 21)) &= \log_5(2) \\ \Leftrightarrow \log_2(3x^2 - 5x + 21) &= 2 \wedge x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 21 &= 2^2 \wedge x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 21 &= 4 \wedge x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 17 &= 0 \wedge x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 3 \times 17}}{6} \wedge x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5 \pm \sqrt{-179}}{6} \wedge x \in \mathbb{R} \\ &\quad \text{condição impossível} \\ \text{C.S.} &= \emptyset \end{aligned}$$

67.

a) $D_f = \mathbb{R} = D'_{f-1}$

$$\begin{aligned} 3 - 4e^{-x} &= y \Leftrightarrow -4e^{-x} = y - 3 \\ &\Leftrightarrow e^{-x} = \frac{3 - y}{4} \\ &\Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{3 - y}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{3 - y}{4}\right) \end{aligned}$$

Assim, $f^{-1}(x) = -\ln\left(\frac{3 - x}{4}\right)$.

$D_{f-1} = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{3 - x}{4} > 0\right\} =]-\infty, 3[$

Cálculo auxiliar

$$\frac{3 - x}{4} > 0 \Leftrightarrow 3 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -3 \Leftrightarrow x < 3$$

$f^{-1}:]-\infty, 3[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto -\ln\left(\frac{3 - x}{4}\right)$$

$$b) D_g = \{x \in \mathbb{R}: 2 - 8x > 0\} = \left] -\infty, \frac{1}{4} \right[= D'_{g^{-1}}$$

$$5 - \ln(2 - 8x) = y$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 - 8x) = 5 - y$$

$$\Leftrightarrow 2 - 8x = e^{5-y}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e^{5-y} - 2}{-8}$$

$$\text{Assim, } g^{-1}(x) = \frac{2 - e^{5-x}}{8} \text{ e } D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \left] -\infty, \frac{1}{4} \right[\\ x \mapsto \frac{2 - e^{5-x}}{8}$$

$$c) D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\} = D'_{h^{-1}}$$

$$10^{\frac{1}{x}} + 3 = y \Leftrightarrow 10^{\frac{1}{x}} = y - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \log(y - 3)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\log(y - 3)}$$

$$\text{Assim, } h^{-1}(x) = \frac{1}{\log(x - 3)}.$$

$$D_{h^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: x - 3 > 0 \wedge \log(x - 3) \neq 0\} = \\ =]3, +\infty[\setminus \{4\}$$

Cálculo auxiliar

$$\log(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 4$$

$$h^{-1}:]3, +\infty[\setminus \{4\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$x \mapsto \frac{1}{\log(x - 3)}$$

68.

$$a) D_f = \{x \in \mathbb{R}: 10 - x > 0\} =]-\infty, 10[$$

Cálculo auxiliar

$$10 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -10 \Leftrightarrow x < 10$$

$$b) f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 + \log(10 - x)}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \log(10 - x) = -2$$

$$\Leftrightarrow 10 - x = 10^{-2} \wedge x \in D_f$$

$$\Leftrightarrow -x = \frac{1}{100} - 10 \wedge x \in]-\infty, 10[$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{999}{100} \wedge x \in]-\infty, 10[$$

$$\frac{999}{100} \text{ é zero de } f.$$

$$c) f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2 + \log(10 - x)}{3} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \log(10 - x) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 10 - x \leq 10^1 \wedge x \in D_f$$

$$\Leftrightarrow -x \leq 0 \wedge x \in]-\infty, 10[$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \in]-\infty, 10[$$

Assim:

$$C.S. = [0, +\infty[\cap]-\infty, 10[= [0, 10[$$

$$d) D'_f = D_{f^{-1}}$$

$$\text{Assim, } \frac{2 + \log(10 - x)}{3} = y \Leftrightarrow \log(10 - x) = 3y - 2$$

$$\Leftrightarrow 10 - x = 10^{3y-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 10 - 10^{3y-2}$$

$$\text{Logo, } f^{-1}(x) = 10 - 10^{3x-2} \text{ e } D_{f^{-1}} = \mathbb{R}. \text{ Assim, } D'_f = \mathbb{R}.$$

69.

$$a) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^{3x+1}) = \\ = \ln(2e^{3x+1}) = \\ = \ln(2) + \ln(e^{3x+1}) = \\ = \ln(2) + 3x + 1 = \\ = 3x + \ln(2) + 1$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \\ = \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R} \wedge e^{3x+1} \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R}$$

$$b) (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln(2x)) = \\ = e^{3 \ln(2x) + 1} = e^{3 \ln(2x)} \times e^1 = \\ = e^{\ln(2x)^3} \times e = (2x)^3 \times e = 8ex^3$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \\ = \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}^+ \wedge \ln(2x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+$$

70.

$$a) f'(x) = (10^x)' = 10^x \ln(10)$$

$$b) g'(x) = (2^x + \ln(x))' = 2^x \ln(2) + \frac{1}{x}$$

$$c) h'(x) = (3^x + x^3)' = 3^x \ln(3) + 3x^2$$

$$d) i'(x) = (e^x \ln(x))' = \\ = (e^x)' \ln(x) + e^x (\ln(x))' = \\ = e^x \ln(x) + e^x \times \frac{1}{x} = \\ = e^x \left(\ln(x) + \frac{1}{x} \right)$$

$$e) j'(x) = (x \ln(x))' = \\ = x' \ln(x) + x (\ln(x))' = \\ = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \\ = 1 + \ln(x)$$

$$f) k'(x) = \left(\frac{x}{\ln(x)} \right)' = \\ = \frac{x' \ln(x) - x (\ln(x))'}{(\ln(x))^2} = \\ = \frac{\ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \\ = \frac{-1 + \ln(x)}{(\ln(x))^2}$$

$$g) l'(x) = (\log_2(x))' = \frac{1}{x \ln(2)}$$

$$71. f(2) = \ln(1 + 2^2) = \ln(5)$$

$$f'(x) = (\ln(1 + x^2))' = \frac{(1 + x^2)'}{1 + x^2} = \frac{2x}{1 + x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 \times 2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5}$$

$$\ln(5) = \frac{4}{5} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -\frac{8}{5} + \ln(5)$$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de

$$f \text{ em } x = 2 \text{ é } y = \frac{4}{5}x - \frac{8}{5} + \ln(5).$$

$$\ln(5) = -\frac{5}{4} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{2} + \ln(5)$$

A equação reduzida da reta normal ao gráfico de f

$$\text{em } x = 2 \text{ é } y = -\frac{5}{4}x + \frac{5}{2} + \ln(5).$$

72.

$$\begin{aligned} a) f'(x) &= (2^{2x-7})' = \\ &= (2x-7)' \times 2^{2x-7} \times \ln(2) = \\ &= 2 \ln(2) \times 2^{2x-7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) g'(x) &= (10^{x^2-3x+4})' = \\ &= (x^2-3x+4)' \times 10^{x^2-3x+4} \times \ln(10) = \\ &= (2x-3) \times 10^{x^2-3x+4} \times \ln(10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) h'(x) &= (\log_2(-2x+1))' = \\ &= \frac{(-2x+1)'}{(-2x+1) \ln(2)} = \\ &= \frac{-2}{(-2x+1) \ln(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) i'(x) &= \left(\log\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{1}{x} \times \ln(10)} = \\ &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} \times \ln(10)} = \\ &= -\frac{1}{x \ln(10)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) j'(x) &= (\sqrt{\ln(x)})' = \\ &= \left((\ln(x))^{\frac{1}{2}} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} (\ln(x))^{-\frac{1}{2}} (\ln(x))' = \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{\ln(x)}} \times \frac{1}{x} = \\ &= \frac{1}{2x \sqrt{\ln(x)}} \end{aligned}$$

73.

$$\begin{aligned} a) f'(x) &= ((x^2 + 5x)^3)' = \\ &= 3(x^2 + 5x)^2 \times (x^2 + 5x)' = \\ &= 3(x^2 + 5x)^2 \times (2x + 5) = \\ &= (6x + 15)(x^2 + 5x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) g'(x) &= (3^{x^2+5x})' = \\ &= (x^2 + 5x)' \times 3^{x^2+5x} \times \ln(3) = \\ &= (2x + 5) \times 3^{x^2+5x} \times \ln(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) h'(x) &= \left(\frac{1 - \ln(2x)}{x} \right)' = \\ &= \frac{(1 - \ln(2x))' \times x - (1 - \ln(2x)) \times x'}{x^2} = \\ &= \frac{-\frac{(2x)'}{2x} \times x - (1 - \ln(2x)) \times 1}{x^2} = \\ &= \frac{-\frac{2}{2} - 1 + \ln(2x)}{x^2} = \\ &= \frac{-2 + \ln(2x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) i'(x) &= \left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \right)' = \\ &= \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\frac{x}{x+1}} = \\ &= \frac{\frac{x' \times (x+1) - x \times (x+1)'}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \\ &= \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x} = \\ &= \frac{1}{x(x+1)} = \\ &= \frac{1}{x^2 + x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) j'(x) &= \left(\left(\frac{x+1}{e^x} \right)^3 \right)' = \\ &= 3 \times \left(\frac{x+1}{e^x} \right)^2 \times \left(\frac{x+1}{e^x} \right)' = \\ &= 3 \times \frac{(x+1)^2}{(e^x)^2} \times \frac{(x+1)' \times e^x - (x+1) \times (e^x)'}{(e^x)^2} = \\ &= 3 \times \frac{(x+1)^2}{(e^x)^2} \times \frac{1 \times e^x - (x+1) \times e^x}{(e^x)^2} = \\ &= 3 \times \frac{(x+1)^2}{(e^x)^2} \times \frac{e^x(1-x-1)}{(e^x)^2} = \\ &= \frac{3(x+1)^2}{(e^x)^2} \times \frac{(-x)}{e^x} = \\ &= \frac{-3x(x+1)^2}{(e^x)^3} = \\ &= \frac{-3x(x+1)^2}{e^{3x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} k'(x) &= \left(\frac{(x+1)^3}{e^x} \right)' = \\ &= \frac{((x+1)^3)' \times e^x - (x+1)^3 \times (e^x)'}{(e^x)^2} = \\ &= \frac{3(x+1)^2 \times (x+1)' \times e^x - (x+1)^3 \times (e^x)'}{(e^x)^2} = \\ &= \frac{e^x(x+1)^2(3 - (x+1))}{(e^x)^2} = \\ &= \frac{(x+1)^2(3-x-1)}{e^x} = \\ &= \frac{(x+1)^2(2-x)}{e^x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} l'(x) &= \left(\sqrt{\frac{e^x}{\ln(x)}} \right)' = \left(\left(\frac{e^x}{\ln(x)} \right)^{\frac{1}{2}} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{e^x}{\ln(x)} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{e^x}{\ln(x)} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{e^x}{\ln(x)}}} \times \frac{(e^x)' \times \ln(x) - e^x \times (\ln(x))'}{(\ln(x))^2} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{e^x}{\ln(x)}}} \times \frac{e^x \times \ln(x) - e^x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \\ &= \frac{e^x \left(\ln(x) - \frac{1}{x} \right)}{2\sqrt{\frac{e^x}{\ln(x)}} \times (\ln(x))^2} \end{aligned}$$

74.

$$\begin{aligned} \text{a)} f'(-3) &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1 + 3e^{x+3} - (1 + 3e^0)}{x + 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1 + 3e^{x+3} - 1 - 3}{x + 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3e^{x+3} - 3}{x + 3} = \\ &= 3 \times \lim_{x+3 \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{x+3} - 1}{x+3}}_{\text{limite notável}} = \\ &= 3 \times 1 = 3 \end{aligned}$$

b) A equação pedida é da forma $y = 3ex + b$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e \Leftrightarrow (1 + 3e^{x+3})' = 3e \\ &\Leftrightarrow 3e^{x+3} = 3e \\ &\Leftrightarrow e^{x+3} = e \\ &\Leftrightarrow x + 3 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

$$f(-2) = 1 + 3e^{-2+3} = 1 + 3e$$

O ponto de tangência tem coordenadas $(-2, 1 + 3e)$,

$$\text{logo } 1 + 3e = 3e \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 9e + 1.$$

Logo, a equação pedida é $y = 3ex + 9e + 1$.

$$\text{c)} D_f = \mathbb{R} = D'_{f^{-1}}$$

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow 1 + 3e^{x+3} = y \\ &\Leftrightarrow 3e^{x+3} = y - 1 \\ &\Leftrightarrow e^{x+3} = \frac{y-1}{3} \\ &\Leftrightarrow x + 3 = \ln\left(\frac{y-1}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y-1}{3}\right) - 3 \end{aligned}$$

$$\text{Então, } f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3}\right) - 3.$$

$$D_{f^{-1}} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{3} > 0 \right\} =]1, +\infty[$$

Logo:

$$f^{-1}:]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{3}\right) - 3$$

$$\text{d)} f''(x) + f'(x) > f(x)$$

$$\Leftrightarrow 3e^{x+3} + 3e^{x+3} > 1 + 3e^{x+3}$$

$$\Leftrightarrow 3e^{x+3} > 1$$

$$\Leftrightarrow e^{x+3} > \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x + 3 > \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{1}{3}\right) - 3$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left] \ln\left(\frac{1}{3}\right) - 3, +\infty \right[.$$

75.

$$\text{a)} f(x) = x^3 e^{-x}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 e^{-x})' = \\ &= (x^3)' \times e^{-x} + x^3 \times (e^{-x})' = \\ &= 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = \\ &= e^{-x} x^2 (3 - x) \end{aligned}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{-x} \times x^2 (3 - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0} = 0 \vee x^2 = 0 \vee 3 - x = 0 \\ &\text{condição impossível em } \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$e^{-x} \times x^2$	+	0	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	0	-
Sinal de f'	+	0	+	0	-
Variação de f	$\nearrow$	$i(0)$	$\nearrow$	Máx. $i(3)$	$\searrow$

$$f(0) = 0^3 \times e^0 = 0$$

$$f(3) = 3^3 \times e^{-3} = \frac{27}{e^3}$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, 3]$ e é estritamente decrescente em $[3, +\infty[$; $\frac{27}{e^3}$ é máximo relativo para $x = 3$.

b) $g(x) = \ln(-x^2 + 8x)$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}: -x^2 + 8x > 0\} =]0, 8[$$

Cálculo auxiliar

$$-x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$$



$$g'(x) = (\ln(-x^2 + 8x))' = \frac{(-x^2 + 8x)'}{-x^2 + 8x} = \frac{-2x + 8}{-x^2 + 8x}$$

$$D_{g'} =]0, 8[$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x + 8}{-x^2 + 8x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 8 = 0 \wedge x \in D_{g'}$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

x	0		4		8
$-2x + 8$	n.d.	+	0	-	n.d.
$-x^2 + 8x$	n.d.	+	+	+	n.d.
Sinal de g'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de g	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

$$g(4) = \ln(-4^2 + 8 \times 4) = \ln(16)$$

g é estritamente crescente em $]0, 4]$ e é estritamente decrescente em $[4, 8[$; $\ln(16)$ é máximo relativo para $x = 4$.

c) $h(x) = x - \ln(1 - e^{-x})$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R}: 1 - e^{-x} > 0\} = \mathbb{R}^+$$

Cálculo auxiliar

$$1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow -e^{-x} > -1 \Leftrightarrow e^{-x} < 1$$

$$\Leftrightarrow -x < \ln(1) \Leftrightarrow x > 0$$

$$h'(x) = (x - \ln(1 - e^{-x}))' =$$

$$= x' - \frac{(1 - e^{-x})'}{1 - e^{-x}} =$$

$$= 1 - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1 - 2e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

$$D_{h'} = \mathbb{R}^+$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2e^{-x}}{1 - e^{-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2e^{-x} = 0 \wedge x \in D_{h'}$$

$$\Leftrightarrow 2e^{-x} = 1 \wedge x \in D_{h'}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{2} \wedge x \in D_{h'}$$

$$\Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \wedge x \in D_{h'}$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \wedge x \in D_{h'}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(2)$$

x	0		$\ln(2)$	$+\infty$
$1 - 2^x$	n.d.	-	0	+
$1 - e^{-x}$	n.d.	+	+	+
Sinal de h'	n.d.	-	0	+
Variação de h	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

$$h(\ln(2)) = \ln(2) - \ln(1 - e^{-\ln(2)}) =$$

$$= \ln(2) - \ln\left(1 - e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right) =$$

$$= \ln(2) - \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \ln(2) + \ln(2) = 2 \ln(2)$$

h é estritamente decrescente em $]0, \ln(2)]$ e é estritamente crescente em $[\ln(2), +\infty[$; $2 \ln(2)$ é mínimo relativo de h para $x = \ln(2)$.

76.

$$R(t) = 4te^{-0,16t} \quad D_R = \mathbb{R}^+$$

$$R'(t) = 4(t' \times e^{-0,16t} + t \times (e^{-0,16t})') =$$

$$= 4(e^{-0,16t} - t \times 0,16e^{-0,16t}) =$$

$$= 4e^{-0,16t} (1 - 0,16t)$$

$$R'(t) = 0 \Leftrightarrow 4e^{-0,16t} (1 - 0,16t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{4e^{-0,16t} = 0}_{\text{condição impossível}} \vee 1 - 0,16t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 6,25$$

x	0		6,25	$+\infty$
Sinal de R'	n.d.	+	0	-
Variação de R	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

A população de roedores é máxima após 6,25 semanas do solstício de inverno. Como o tempo de inclinação dos ovos de falcão é cinco semanas, para que o nascimento de filhotes de falcão coincida com a época em que a população de roedores é máxima, os ovos deverão ser postos após 1,25 semanas do solstício de inverno.

77.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4,6 \ln(2x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \\ &= 4,6 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(2x)}{2x} \times 2 \right) = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$2x = y$$

Se $x \rightarrow +\infty$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$= 2 \times 4,6 \lim_{y \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{\ln(y)}{y}}_{\text{limite notável}} = 9,2 \times 0 = 0$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; significa que à medida que a idade da fêmea vai aumentando o número médio de indivíduos gerados por essa fêmea tende para zero.

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &= \frac{4,6 \ln(2x)}{x} \\ D_f &= [0,5; +\infty[\\ f'(x) &= \left(4,6 \frac{\ln(2x)}{x} \right)' = \\ &= 4,6 \times \frac{(\ln(2x))' \times x - \ln(2x) \times x'}{x^2} = \\ &= 4,6 \times \frac{\frac{2}{2x} \times x - \ln(2x) \times 1}{x^2} = \\ &= 4,6 \times \frac{1 - \ln(2x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4,6 \times \frac{1 - \ln(2x)}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \ln(2x) = 0 \wedge x \in D_f, \\ &\Leftrightarrow \ln(2x) = 1 \wedge x \in D_f, \\ &\Leftrightarrow 2x = e \wedge x \in D_f, \\ &\Leftrightarrow x = \frac{e}{2} \end{aligned}$$

x	0,5		$\frac{e}{2}$	$+\infty$
$4,6(1 - \ln(2x))$	+	+	0	-
x^2	+	+	+	+
Sinal de f'	+	+	0	-
Variação de f	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

$$f(0,5) = \frac{4,6 \ln(1)}{0,5} = 0$$

$$f\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{4,6 \ln\left(2 \frac{e}{2}\right)}{\frac{e}{2}} = \frac{4,6 \times 1}{\frac{e}{2}} = \frac{9,2}{e}$$

f é estritamente crescente em $\left[0,5; \frac{e}{2}\right]$ e é estritamente decrescente em $\left[\frac{e}{2}, +\infty\right]$; 0 é mínimo relativo

vo para $x = 0,5$; $\frac{9,2}{e}$ é máximo relativo para $x = \frac{e}{2}$.

Como $\frac{e}{2} \approx 1,4$, então é com 1,4 anos de idade que as fêmeas geram o maior número de indivíduos.

$$\begin{aligned} \text{c) t.m.v.}_{[2, 4]} &= \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \\ &= \frac{\frac{4,6 \ln(8)}{4} - \frac{4,6 \ln(4)}{2}}{2} = \\ &= \frac{4,6 \times \frac{1}{4} \ln(8) - 4,6 \times \frac{1}{2} \ln(4)}{2} = \\ &= \frac{4,6 \times \ln\left(8^{\frac{1}{4}}\right) - 4,6 \ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right)}{2} = \\ &= \frac{4,6}{2} \times \ln\left(\frac{8^{\frac{1}{4}}}{4^{\frac{1}{2}}}\right) = 2,3 \ln\left(\frac{(2^3)^{\frac{1}{4}}}{2}\right) = \\ &= 2,3 \ln\left(\frac{2^{\frac{3}{4}}}{2}\right) = 2,3 \ln\left(2^{-\frac{1}{4}}\right) = \\ &= 2,3 \ln\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \end{aligned}$$

78.

$$\begin{aligned} \text{a) } f''(x) &= \left(\frac{1 + \ln(x)}{x} \right)' = \\ &= \frac{(1 + \ln(x))' \times x - (1 + \ln(x)) \times x'}{x^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln(x))}{x^2} = \\ &= \frac{1 - 1 - \ln(x)}{x^2} = \\ &= -\frac{\ln(x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

x	0		1	$+\infty$
Sinal de f''	n.d.	+	0	-
Sentido das concavidades do gráfico de f	n.d.	$\cup$	P.I. 0	$\cap$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]0, 1[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]1, +\infty[$; tem um ponto de inflexão de coordenadas (1, 0).

79.

$$a) f(x) = (x^2 + x + 2)e^{-x} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + x + 2)' \times e^{-x} + (x^2 + x + 2) \times (e^{-x})' = \\ &= (2x + 1) \times e^{-x} - (x^2 + x + 2) e^{-x} = \\ &= e^{-x} (2x + 1 - x^2 - x - 2) = \\ &= e^{-x} (-x^2 + x - 1) \quad D_{f'} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (e^{-x})' \times (-x^2 + x - 1) + (e^{-x}) \times (-x^2 + x - 1)' = \\ &= -e^{-x} (-x^2 + x - 1) + e^{-x} (-2x + 1) = \\ &= e^{-x} (x^2 - x + 1 - 2x + 1) = \\ &= e^{-x} (x^2 - 3x + 2) \quad D_{f''} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{-x} (x^2 - 3x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{condição impossível}} \vee x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

$$f(1) = 4e^{-1}$$

$$f(2) = 8e^{-2}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 1[$ e em $]2, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]1, 2[$.

Existem dois pontos de inflexão de coordenadas $(1, 4e^{-1})$ e $(2, 8e^{-2})$.

$$b) g(x) = (\ln(x))^2 \quad D_g = \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= ((\ln(x))^2)' = \\ &= 2 \ln(x) \times (\ln(x))' = \\ &= 2 \ln(x) \times \frac{1}{x} \quad D_{g'} = \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\frac{2 \ln(x)}{x} \right)' = \\ &= 2 \times \frac{(\ln(x))' \times x - (\ln(x)) \times x'}{x^2} = \\ &= 2 \times \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \\ &= 2 \times \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \quad D_{g''} = \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \times \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \wedge x \in D_{g''} \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = 1 \wedge x \in D_{g''} \\ &\Leftrightarrow x = e \end{aligned}$$

x	0		e	$+\infty$
$2(1 - \ln(x))$	n.d.	+	0	-
x^2	n.d.	+	+	+
Sinal de g''	n.d.	+	0	-
Sentido das concavidades do gráfico de g	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$

$$g(e) = (\ln(e))^2 = 1$$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]0, e[$ e voltada para baixo em $]e, +\infty[$.

Apresenta um ponto de inflexão de coordenadas $(e, 1)$.

$$c) h(x) = x^2 - 2 \ln(x) \quad D_h = \mathbb{R}^+$$

$$h'(x) = (x^2 - 2 \ln(x))' = 2x - 2 \times \frac{1}{x} \quad D_{h'} = \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} h''(x) &= \left(2x - 2 \times \frac{1}{x} \right)' = 2 - 2 \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \\ &= 2 + \frac{2}{x^2} \quad D_{h''} = \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{2 + \frac{2}{x^2}}_{\text{condição impossível em } \mathbb{R}} = 0$$

condição impossível em $\mathbb{R}$, logo h'' não tem zeros.

x	0	$+\infty$
Sinal de h''	n.d.	+
Sentido das concavidades do gráfico de h	n.d.	$\cup$

O gráfico de h apresenta a concavidade voltada para cima em todo o seu domínio.

Não existem pontos de inflexão.

80.

$$\begin{aligned} a) Q'(t) &= \left(\frac{80}{4 + 76e^{-1,2t}} \right)' = \\ &= \frac{80' \times (4 + 76e^{-1,2t}) - 80 \times (4 + 76e^{-1,2t})'}{(4 + 76e^{-1,2t})^2} = \\ &= \frac{0 - 80 \times (0 + 76 \times (-1,2) \times e^{-1,2t})}{(4 + 76e^{-1,2t})^2} = \\ &= \frac{7296e^{-1,2t}}{(4 + 76e^{-1,2t})^2} \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } Q'(2) = \frac{7296 \times e^{-1,2 \times 2}}{(4 + 76e^{-1,2 \times 2})^2} \approx 5,6; \text{ significa}$$

que após duas semanas do aparecimento do surto de gripe o número de pessoas contagiadas está a aumentar à taxa de 5,6 centenas de pessoas por semana.

b) Para determinar em que momento a doença está a alastrar-se mais rapidamente, é necessário analisar como varia a taxa de variação da função Q , isto é, estudar a variação da função Q' :

$$Q'(t) = \frac{7296e^{-1,2t}}{(4 + 76e^{-1,2t})^2}$$

(determinada na alínea anterior)

$$\begin{aligned} Q''(t) &= \frac{(7296 \times e^{-1,2t})' \times (4 + 76e^{-1,2t})^2}{(4 + 76e^{-1,2t})^4} - \\ &\quad - \frac{7296e^{-1,2t} \times ((4 + 76e^{-1,2t})^2)'}{(4 + 76e^{-1,2t})^4} = \\ &= \frac{-8755,2e^{-1,2t} \times (4 + 76e^{-1,2t})^2 + 7296e^{-1,2t} \times}{(4 + 76e^{-1,2t})^4} = \\ &\quad \times \frac{2(4 + 76e^{-1,2t}) \times (4 + 76e^{-1,2t})'}{(4 + 76e^{-1,2t})^4} = \\ &= \frac{e^{-1,2t} \times (4 + 76e^{-1,2t})[-8755,2(4 + 76e^{-1,2t})]}{(4 + 76e^{-1,2t})^3} - \\ &\quad - \frac{7296 \times 2 \times (0 - 91,2e^{-1,2t})}{(4 + 76e^{-1,2t})^3} = \\ &= \frac{e^{-1,2t} \times (-35\,020,8 + 665\,395,2e^{-1,2t})}{(4 + 76e^{-1,2t})^3} + \\ &\quad + \frac{1\,330\,790,4e^{-1,2t}}{(4 + 76e^{-1,2t})^3} = \\ &= \frac{e^{-1,2t} \times (-35\,020,8 + 665\,395,2e^{-1,2t})}{(4 + 76e^{-1,2t})^3} = \end{aligned}$$

$$D_{Q''} = \mathbb{R}^+$$

$$Q''(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-1,2t} (-35\,020,8 + 665\,395,2e^{-1,2t}) = 0$$

$$\wedge t \in D_{Q''}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-1,2t} = 0}_{\text{condição impossível}} \vee e^{-1,2t} = \frac{35\,020,8}{665\,395,2}$$

condição impossível

$$\Leftrightarrow -1,2t = \ln\left(\frac{1}{19}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{19}\right)}{-1,2}$$

$$\Leftrightarrow t \approx 2,45$$

x	0		$\frac{\ln\left(\frac{1}{19}\right)}{-1,2}$	$+\infty$
Sinal de Q''		+	0	-
Variação de Q'		$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

O máximo de Q' é atingido quando $t \approx 2,45$, o que significa que a doença está a alastrar-se mais rapidamente duas semanas (com a aproximação às unidades) após o seu aparecimento.

81.

a) $f(x) = e^x - e^{-x}$

• $D_f = \mathbb{R}$

• **Zeros:** $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$

• $f(-x) = e^{-x} - e^{-(-x)} = -(e^x - e^{-x}) = -g(x), \forall x \in D_f$

Logo, f é uma função ímpar, ou seja, o seu gráfico é simétrico em relação à origem do referencial.

• **Assíntotas:**

A função é contínua em $\mathbb{R}$, visto tratar-se da diferença entre funções contínuas, logo o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \\ &\quad \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{limite notável}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \\ &= +\infty - \frac{0}{+\infty} = +\infty \end{aligned}$$

Como $m \notin \mathbb{R}$, conclui-se que o gráfico de f não apresenta assíntotas não verticais para $x \rightarrow +\infty$ e, visto que a função é ímpar, o mesmo se pode concluir para $x \rightarrow -\infty$.

• $f'(x) = (e^x - e^{-x})' = e^x + e^{-x} \quad D_{f'} = \mathbb{R}$

Como $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, conclui-se que f é estritamente crescente em todo o seu domínio.

• $f''(x) = (e^x + e^{-x})' = e^x - e^{-x} \quad D_{f''} = \mathbb{R}$

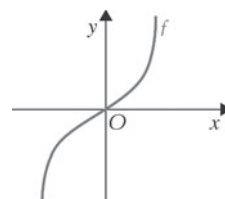
$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = e^{-x} \\ &\Leftrightarrow x = -x \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de f''	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	P.I.	$\cup$

$$f(0) = e^0 - e^{-0} = 1 - 1 = 0$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e voltada para cima em $]0, +\infty[$; tem um ponto de inflexão de coordenadas (0, 0).

• **Representação gráfica:**



b) $g(x) = \ln(e^x - 1)$

• $D_g = \{x \in \mathbb{R}: e^x - 1 > 0\} = \mathbb{R}^+$

Cálculo auxiliar

$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

• $g(x) = 0 \wedge x \in D_g$

$\Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow e^x - 1 = 1$

$\Leftrightarrow e^x = 2$

$\Leftrightarrow x = \ln(2)$

g tem um único zero: $x = \ln(2)$

Assíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^x - 1) = \ln(1^+ - 1) = \ln(0^+) = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de g . Este não apresenta mais assíntotas verticais já que a função g é contínua no seu domínio.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(e^x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x} \right) = 1 + \frac{\ln(1-0)}{+\infty} = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x - 1) - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(e^x \times \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right) - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{+\infty}\right) = \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$.

• $g'(x) = (\ln(e^x - 1))' = \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1} \quad D_{g'} = \mathbb{R}^+$

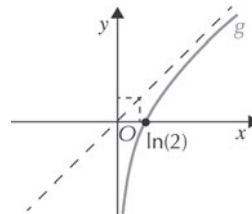
Como $g'(x) > 0, \forall x \in D_{g'}$, então verifica-se que g é estritamente crescente em todo o seu domínio.

$$\begin{aligned} \bullet g''(x) &= \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right)' = \\ &= \frac{(e^x)' \times (e^x - 1) - e^x \times (e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \times e^x}{(e^x - 1)^2} = \\ &= \frac{e^x(e^x - 1 - e^x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

Como $g''(x) < 0, \forall x \in D_g$, então verifica-se que g tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$.

Representação gráfica:



c) $h(x) = 2x + 1 + e^{-\frac{x}{2}}$

• $D_h = \mathbb{R}$

• O gráfico de h não tem assíntotas verticais, visto tratar-se de uma função contínua (soma de funções contínuas em $\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1 + e^{-\frac{x}{2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} + \frac{e^{-\infty}}{+\infty} = 2 + 0 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + 1 + e^{-\frac{x}{2}} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + e^{-\frac{x}{2}} \right) = 1 + e^{-\infty} = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 2x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{-2y} = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$-\frac{x}{2} = y \Leftrightarrow x = -2y$

Se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$= 2 - \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = 2 - \frac{1}{2} \times (+\infty) = -\infty$$

limite notável

Como $m \notin \mathbb{R}$ não existe assíntota não vertical ao gráfico de h quando $x \rightarrow -\infty$.

• $h'(x) = \left(2x + 1 + e^{-\frac{x}{2}} \right)' = 2 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \quad D_{h'} = \mathbb{R}$

• $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}} = 4$

$\Leftrightarrow -\frac{x}{2} = \ln(4) \Leftrightarrow x = -2 \ln(4)$

x	$-\infty$	$-2 \ln(4)$	$+\infty$
Sinal de h'	$-$	0	$+$
Variação de h	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Cálculo auxiliar

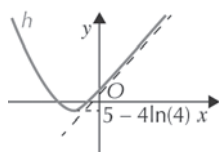
$$\begin{aligned} h(-2 \ln(4)) &= -2 \times 2 \ln(4) + 1 + e^{-\frac{(-2 \ln(4))}{2}} = \\ &= -4 \ln(4) + 1 + e^{\ln(4)} = \\ &= -4 \ln(4) + 1 + 4 = \\ &= 5 - 4 \ln(4) \end{aligned}$$

h é estritamente decrescente em $]-\infty, -2 \ln(4)]$ e estritamente crescente em $[-2 \ln(4), +\infty[$; $5 - 4 \ln(4)$ é mínimo absoluto para $x = -2 \ln(4)$.

$$\begin{aligned} \bullet h''(x) &= \left(2 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}\right)' = 0 - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = \\ &= \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$h''(x) > 0, \forall x \in D_h$, logo o gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$.

• Representação gráfica:



82. $g(x) = \frac{x}{1 - \ln(x)}$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge 1 - \ln(x) \neq 0\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$$

Cálculo auxiliar

$$1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

- a) O declive da bissetriz dos quadrantes pares é -1 . Pretende-se averiguar se existe alguma reta tangente ao gráfico de g cujo declive seja 1 .

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{x}{1 - \ln(x)}\right)' = \\ &= \frac{x'(1 - \ln(x)) - x(1 - \ln(x))'}{(1 - \ln(x))^2} = \\ &= \frac{1 - \ln(x) - x \times \left(-\frac{1}{x}\right)}{(1 - \ln(x))^2} = \\ &= \frac{1 - \ln(x) + 1}{(1 - \ln(x))^2} = \\ &= \frac{2 - \ln(x)}{(1 - \ln(x))^2} \end{aligned}$$

$$g'(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln(x)}{(1 - \ln(x))^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \ln(x)}{(1 - \ln(x))^2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \ln(x) + (1 - \ln(x))^2}{(1 - \ln(x))^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \ln(x) + 1 - 2 \ln(x) + (\ln(x))^2}{(1 - \ln(x))^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\ln(x))^2 - 3 \ln(x) + 3}{(1 - \ln(x))^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln(x))^2 - 3 \ln(x) + 3 = 0 \wedge (1 - \ln(x))^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} \wedge \wedge x \neq e$$

condição impossível em $\mathbb{R}$

Não existe qualquer reta tangente ao gráfico de g que seja paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

b) $D_g = \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1 - \ln(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \wedge x \in D_g$$

A função g não tem zeros.

Assíntotas:

A função g é contínua em $\mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$, logo as retas de equação $x = 0$ e $x = e$ são as únicas candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 - \ln(x)} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow e^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{x}{1 - \ln(x)} = \frac{e}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{x}{1 - \ln(x)} = \frac{e}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = e$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{1 - \ln(x)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 - \ln(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 - \ln(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{\ln(x)}}{\frac{1}{\ln(x)} - 1} = \frac{+\infty}{-1} = -\infty \end{aligned}$$

Não há assíntotas não verticais ao gráfico de g .

$$g'(x) = \frac{2 - \ln(x)}{(1 - \ln(x))^2}$$

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 - \ln(x) = 0 \wedge (1 - \ln(x))^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = 2 \wedge x \neq e \\ &\Leftrightarrow x = e^2 \end{aligned}$$

x	0		e		e ²	+
Sinal de g'	n.d.	+	n.d.	+	0	-
Variação de g	n.d.	↗	n.d.	↗	Máx.	↘

$$g(e^2) = \frac{e^2}{1 - \ln(e^2)} = -e^2$$

g é estritamente crescente em $]0, e[$ e em $]e, e^2[$ e é estritamente decrescente em $[e^2, +\infty[$; $-e^2$ é máximo relativo.

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\frac{2 - \ln(x)}{1 - \ln(x)^2} \right)' = \\ &= \frac{(2 - \ln(x))'(1 - \ln(x)^2) - (2 - \ln(x))(1 - \ln(x)^2)'}{(1 - \ln(x)^2)^2} = \\ &= \frac{-\frac{1}{x}(1 - \ln(x)^2) - (2 - \ln(x))2(1 - \ln(x))(1 - \ln(x))'}{(1 - \ln(x)^2)^2} = \\ &= \frac{-\frac{1}{x}(1 - \ln(x)) - 2(2 - \ln(x)) \times \left(-\frac{1}{x}\right)}{(1 - \ln(x))^3} = \\ &= -\frac{1}{x} \times \frac{1 - \ln(x) - 4 + 2 \ln(x)}{(1 - \ln(x))^3} = \\ &= \frac{3 - \ln(x)}{x(1 - \ln(x))^3} \end{aligned}$$

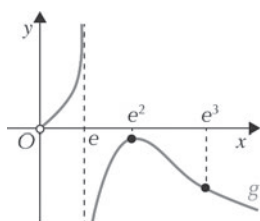
$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{3 - \ln(x)}{x(1 - \ln(x))^3} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 - \ln(x) = 0 \wedge x(1 - \ln(x))^3 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = e^3 \end{aligned}$$

x	0		e		e ³	+
Sinal de g''	n.d.	+	n.d.	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de g	n.d.	∪	n.d.	∩	Máx.	∪

$$g(e^3) = \frac{e^3}{1 - \ln(e^3)} = -\frac{e^3}{2}$$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]0, e[$ e em $]e^3, +\infty[$ e voltada para baixo em $]e, e^3[$; o ponto de coordenadas $\left(e^3, -\frac{e^3}{2}\right)$ é ponto de inflexão.

Representação gráfica:



83.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{-x}}{x} \right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(2x) - \cos x) = -1 = f(0)$$

Conclui-se que a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função. Não existem outras assíntotas verticais ao gráfico de f , pois a função é contínua em $]-\infty, 0[$ (visto estar definida pelo quociente entre funções contínuas) e f é também contínua em $]0, +\infty[$ (visto estar definida pela diferença entre funções contínuas).

b) Em $]-\infty, 0[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e^{-x}}{x} \right)' = \frac{(e^{-x})' \times x - (e^{-x}) \times x'}{x^2} = \\ &= \frac{-e^{-x} \times x - e^{-x}}{x^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-e^{-x} \times x - e^{-x}}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -e^{-x}(x+1) = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(-e^{-x} = 0)}_{\text{condição impossível}} \vee x+1=0 \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \wedge x \neq 0$$

x	$-\infty$	-1		0
Sinal de f'	+	0	-	n.d.
Variação de f	↗	Máx. $f(-1)$	↘	n.d.

$$f(-1) = \frac{e^{-(-1)}}{-1} = -e$$

f tem máximo igual a $-e$ para $x = -1$.

$$\text{c) Em }]-\infty, 0[: f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{x} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{condição impossível}} \wedge x \neq 0$$

Conclui-se que em $]-\infty, 0[$ f não tem zeros.

Em $[0, +\infty[$: $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2 \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Se } k = 1, x = \frac{3\pi}{2} \vee x = \frac{13\pi}{6} \vee x = \frac{17\pi}{6}$$

$$\quad \quad \quad \notin [0, 3[\quad \quad \quad \notin [0, 3[\quad \quad \quad \notin [0, 3[$$

Tem-se assim que, no intervalo $]-3, 3[$, a função f

tem três zeros: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{6}$.

84.

- a) No intervalo $]0, 1[$ a função f é contínua visto, neste intervalo, estar definida pela soma de duas funções contínuas: uma que é função constante ($x \mapsto 1$) e outra que é o quociente entre uma função logarítmica ($x \mapsto \ln(x)$) e uma função afim ($x \mapsto 4x$), que não se anula no intervalo considerado.

No intervalo $]1, +\infty[$ a função f é contínua visto, neste intervalo, estar definida pela soma de duas funções contínuas: uma que é função constante ($x \mapsto 1$) e outra que é o produto entre uma função afim ($x \mapsto x - 1$) e a composta de uma função afim com uma função exponencial ($x \mapsto e^{2-x}$).

Em $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(1 + \frac{\ln(x)}{4x} \right) = 1 + \frac{\ln(1)}{4} = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ((x-1)e^{2-x} + 1) = 0 \times e^2 + 1 = 1$$

$$f(1) = (1-1)e^{2-1} + 1 = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, então f é contínua em $x = 1$.

Conclui-se assim que f é contínua em todo o seu domínio, ou seja, em $\mathbb{R}^+$.

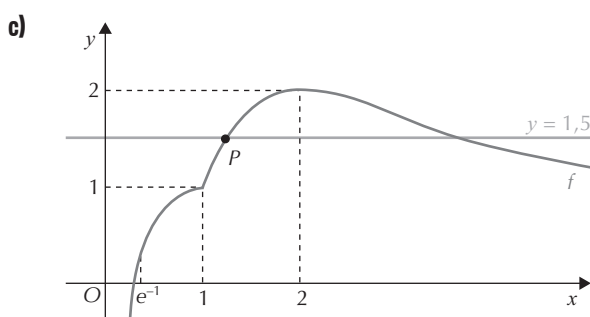
- b) Pela alínea anterior, sabe-se que f é contínua em $\mathbb{R}^+$, logo, em particular, é contínua em $[e^{-1}, 2]$.

$$f(e^{-1}) = 1 + \frac{\ln(e^{-1})}{4e^{-1}} = 1 + \frac{-1}{4e^{-1}} \approx 0,320$$

$$f(2) = (2-1)e^{2-2} + 1 = e^0 + 1 = 2$$

Ou seja, $f(e^{-1}) < 1,5 < f(2)$.

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que a equação $f(x) = 1,5$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]e^{-1}, 2[$.



No intervalo $]e^{-1}, 2[$, o ponto P de interseção do gráfico da função f com a reta de equação $y = 1,5$ tem coordenadas $(1,23; 1,5)$ (com aproximação às centésimas). Assim, $x \approx 1,23$.

85. Às dez horas de um determinado dia corresponde $t = 0$, logo às onze horas e ao meio-dia do referido dia corresponde $t = 1$ e $t = 2$, respetivamente.

Sabe-se também que P está expresso em milhões de bactérias.

Assim, pretende-se provar que:

$$\exists t \in]1, 2[: P(t) = 0,5$$

- A função P é contínua em $[1, 2]$, visto tratar-se do produto de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ ($t \mapsto t^2$ e $t \mapsto e^{-t}$), logo contínuas em $[1, 2]$.

$$P(1) = 1^2 \times e^{-1} \approx 0,368$$

$$P(2) = 2^2 \times e^{-2} \approx 0,541$$

ou seja, $P(1) < 0,5 < P(2)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe pelo menos um instante $t \in]1, 2[$ tal que $P(t) = 0,5$.

86.

- a) Seja f a função definida por $f(x) = e^x - x - 2$.

Provar que a equação $e^x = x + 2$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]-2, -1[$, é equivalente a provar que a função f tem pelo menos um zero no intervalo $]-2, -1[$.

Assim:

- f é contínua em $[-2, -1]$, visto tratar-se da diferença entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ ($x \mapsto e^x$ e $x \mapsto x + 2$), logo contínuas no intervalo $[-2, -1]$.

$$f(-2) = e^{-2} + 2 - 2 \approx 0,135$$

$$f(-1) = e^{-1} + 1 - 2 \approx -0,632$$

ou seja, $f(-1) \times f(-2) < 0$.

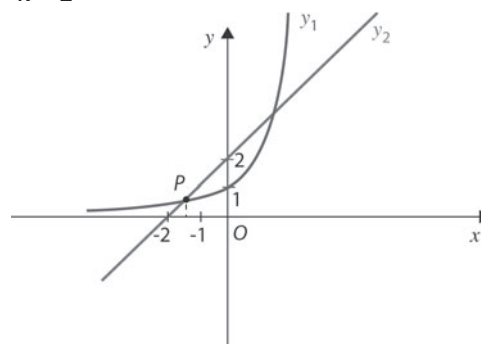
Pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que função f tem pelo menos um zero no intervalo $]-2, -1[$, isto é:

$$\exists c \in [-2, -1]: f(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in [-2, -1]: e^c - c - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in [-2, -1]: e^c = c + 2$$

- b) $y_1 = e^x$
 $y_2 = x + 2$



O ponto P de interseção do gráfico da função $x \mapsto e^x$ com o gráfico da função $x \mapsto x + 2$, no intervalo $]-2, -1[$ tem de coordenadas $P(-1,841; 0,159)$ (com aproximação às milésimas).

Assim, $x \approx -1,841$.

87.

a) $h(0) = 30 \times e^0 \times \cos 0 + 50 = 30 + 50 = 80$

O Filipe saltou de uma altura de 80 metros.

- b) As soluções da equação $h(t) = 50$ representam os instantes em que o Filipe se encontra a 50 metros do solo.

$$h(t) = 50$$

$$\Leftrightarrow 30e^{-0,2t} \times \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 50 = 50$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,2t} \times \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,2t} = 0} \vee \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) = 0$$

condição impossível

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{3} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3}{2} + 3k, k \in \mathbb{N}_0$$

- c) Consideremos, por exemplo, o intervalo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

Como a função h é contínua em todo o seu domínio (soma de funções contínuas), também o é no intervalo

$$\left[0, \frac{3}{2}\right].$$

$$h(0) = 80 > 60 \text{ e } h\left(\frac{3}{2}\right) = 50 < 60$$

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, pode concluir-se que $\exists t \in \left]0, \frac{3}{2}\right[: h(t) = 60$.

Portanto, existe pelo menos um instante em que o Filipe esteve a 60 metros do solo.

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(30e^{-0,2t} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 50 \right) = \\ &= 30 \lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(e^{-0,2t} \times \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \right)}_0 + 50 = \\ &= 30 \times 0 + 50 = \\ &= 50 \end{aligned}$$

Observe-se que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(e^{-0,2t} \times \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \right) = 0$, pois

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,2t} = 0 \text{ e } -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}_0^+.$$

88.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5^x - 2^x}{x^2 + 2x + 3} = \frac{5 - 2}{1 + 2 + 3} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} [3^x (5x - 2) + 8] = 3^0 (0 - 2) + 8 = 6$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} 2^{x^2 - 5} = 2^{9 - 5} = 16$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x}{4^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^x = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{3x}}{3^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8^x}{9^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = 0$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4^x - 4}{2^x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2^x - 2)(2^x + 2)}{2^x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} (2^x + 2) = 4$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{3} = \frac{+\infty}{3} = +\infty$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 5}{x} = \frac{5}{-\infty} = 0$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{20}{10^x + 5} = \frac{20}{5} = 4$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{5^{-x} + 1} = \frac{2}{+\infty} = 0$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{7^x - 15} = \frac{1}{+\infty} = 0$

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{8^{-x} - 3} = \frac{1}{-\infty} = -\frac{1}{3}$

m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(3 - 4x) \times 2^x] = -\infty \times (+\infty) = -\infty$

n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6 + 3^x}{4^x - 2} = \frac{6}{-2} = -3$

o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{x^2 - 3x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} = 2^{+\infty} = +\infty$

p) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{-x^2 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{-x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = 3^{-\infty} = 0$

89.

a) $\lim_{x \rightarrow 8} (2 - 3 \log_2(x)) = 2 - 3 \log_2(8) = 2 - 3 \times 3 = -7$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \ln(x)}{x + 2} = \frac{1 + 0}{1 + 2} = \frac{1}{3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log_3(x))^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [(x - 1) \ln(x)] = -1 \times (-\infty) = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x)}{x^2 - x} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(1 - x) \ln(x)] = -\infty \times (+\infty) = -\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \log_2(3x + 1) = \log_2(4) = 2$

h) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \ln(9 - x^2) = \ln(0^+) = -\infty$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log(1 - e^x) = \log(1) = 0$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(5^x - 7^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5^x \left(1 - \left(\frac{7}{5}\right)^x \right) \right) = \ln(0^+) = -\infty$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(3x - 1) - \ln(2x + 4)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{3x - 1}{2x + 4}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \text{d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x+1) - x \ln(x) + 4}{x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = \\ &= \ln(1) + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{m)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x+1) - x \ln(x^2+3) + 4}{x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{x+\frac{3}{x}}\right) + 0 = \\ &= \ln(0^+) = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{n)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(1 - \log_2(x)) = \log(1 - (-\infty)) = +\infty$$

$$\text{o)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \ln(x)}{3 \ln(x) + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{\ln(x)} - 1}{3 + \frac{1}{\ln(x)}} = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{p)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \log_4(x)}{\log_2(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{\log_2(x)}{\log_2(4)}}{\log_2(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{\log_2(x)} + \frac{1}{2} \right) = \\ &= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

90.

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x + 1 - e^3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^3(e^{x-2} - 1)}{x - 2} =$$

Mudança de variável:

$$y = x - 2$$

Se $x \rightarrow 2$, então $y \rightarrow 0$.

$$= e^3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = e^3 \times 1 = e^3$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(a^x)} - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(a)} - 1}{x} = \\ &= \ln(a) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(a)} - 1}{x \ln(a)} = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = x \ln(a)$$

Se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} &= \ln(a) \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \\ &= \ln(a) \times 1 = \\ &= \ln(a) \end{aligned}$$

91.

$$\begin{aligned} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \times 5^x}{3 \times 10^x + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3 \times 2^x + \frac{1}{5^x}} = \\ &= \frac{2}{+\infty + 0} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (7^x - 3^x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(7^x \left(1 - \left(\frac{3}{7} \right)^x \right) \right) = \\ &= +\infty(1 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 2^x}{5^x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^x \right)}{5^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^x \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 - \left(\frac{2}{5} \right)^x \right] = \\ &= +\infty \times (-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2^x}{5^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^x + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^x = 0 + 0 = 0$$

$$\text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{2013}} = +\infty$$

$$\text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^{2013}} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$\text{g)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2013}}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{h)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} \times x^7) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5 - 2^x}{x^5} = 3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^5} = 3 - (+\infty) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 2^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^x \right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^x \right) = \\ &= +\infty \times (1 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 5^x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x \left(\left(\frac{3}{5} \right)^x - 1 \right)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{3}{5} \right)^x - 1 \right) = \\ &= +\infty \times (0 - 1) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x + 10}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10}{x^2} = \\ &= \frac{0}{-\infty} + \frac{1}{-\infty} = \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{m)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x + 10}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{x^2} = \\ &= +\infty + 0 + 0 = +\infty \end{aligned}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x x^4) =$$

Mudança de variável:

$$y = -x$$

Se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} (e^{-y} (-y)^4) = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^4}{e^y} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \times e^{\frac{1}{x}} \right) =$$

Mudança de variável:

$$y = \frac{1}{x}$$

Se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} e^y \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty \end{aligned}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x x^{-2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^2} = +\infty$$

$$q) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^4} =$$

Mudança de variável:

$$y = -x$$

Se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{(-y)^4} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^4} = +\infty \end{aligned}$$

92.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 1 + \ln(x)}{-x} = -5 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} =$$

$$= -5 + 0 + 0 = -5$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{x}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} =$$

$$= \frac{0}{1 + 0 + 0} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln(x)}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} =$$

$$= \frac{3}{2} \times 0 = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(4x^3)}{5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(4) + \ln(x^3)}{5x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(4)}{5x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln(x)}{5x} =$$

$$= 0 + \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{3}{5} \times 0 = 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$$

$$= 0 \times \frac{1}{+\infty} = 0 \times 0 = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x \ln \left(\frac{1}{x} \right) \right] =$$

Mudança de variável:

$$y = \frac{1}{x}$$

Se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \ln(y) \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0 \end{aligned}$$

93.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 3 \ln(x)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} + 3 \frac{\ln(x)}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 + 3 \ln(x)}{x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 + 3 \ln(x)}{x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Logo, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 5 \ln(x)) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(3 - \frac{5 \ln(x)}{x} \right) \right] =$$

$$= +\infty \times (3 - 5 \times 0) = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^4}} =$$

$$= \frac{+\infty}{1 + 0} = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{4x} - 1}{x^2} \ln(2x) \right) =$$

$$= 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{4x} - 1}{4x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2x)}{x} =$$

Mudança de variável:

$$y = 4x$$

Se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow 0^+$.

$$\begin{aligned} &= 4 \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} \times \frac{-\infty}{0^+} = \\ &= 4 \times 1 \times (-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{4x} - 1}{x^2} \ln(2x) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{4x}}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x) = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = 4x$$

Se $x \rightarrow +\infty$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} &= \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{\left(\frac{y}{4}\right)^2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \right) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x) = \\ &= \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^2} \times 16 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \right) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x) = \\ &= (+\infty - 0) \times (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \ln(15 - 2e^x)) = \\ &= -\infty - \ln(15 - 2 \times 0) = -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(15 - 2e^x)) =$$

Mudança de variável:

$$y = 5 - 2e^x \Leftrightarrow 2e^x = 5 - y$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{5-y}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{5-y}{2}\right)$$

Se $x \rightarrow +\infty$, então $y \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\ln\left(\frac{5-y}{2}\right) - \ln(|y|) \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{5-y}{-2y}\right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{\frac{5}{y} - 1}{-2}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\log((x-3)^3)}{x^2 - 3x - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 \log(x-3)}{(x+1)(x-4)} = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{\ln(x-3)}{\ln(10)}}{x-4} \times \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+1} = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = \ln(x-3) \Leftrightarrow x-3 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 3$$

Se $x \rightarrow 4$, então $y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{\ln(10)} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} \times \frac{1}{5} = \\ &= \frac{3}{\ln(10)} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} \times \frac{1}{5} = \\ &= \frac{3}{\ln(10)} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} \times \frac{1}{5} = \\ &= \frac{3}{5 \ln(10)} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{5 \ln(10)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(x^2 - 9) - 2 \ln(x^2)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x (\ln(x^2 - 9) - \ln(x^4))) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln\left(\frac{x^2 - 9}{x^4}\right) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln\left(\frac{1 - \frac{9}{x^2}}{x^2}\right) \right) = \\ &= +\infty \times \ln(0^+) = \\ &= +\infty \times (-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{h)} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{\ln(x^x)}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x \ln(x)}) =$$

Mudança de variável:

$$y = \frac{1}{x}$$

Se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right)} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(e^{-\frac{\ln(y)}{y}} \right) = e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\frac{\ln(x)}{x}} \right) = e^{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2}{x-1} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{0^+} \right)^1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2}{x-1} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{0^-} \right)^1 = -\infty \end{aligned}$$

Logo, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}} = e^0 = 1$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} (\ln(x^2) - \ln(x-1)) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x} = \end{aligned}$$

Mudança de variável

$$y = x - 1$$

Se $x \rightarrow +\infty$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} &= 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y+1} = \\ &= 0 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(y)}{y}}{1 + \frac{1}{y}} = 0 - \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k)} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x^{\tan x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\sin x^{\tan x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\tan x \ln(\sin x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\sin x \ln(\sin x)}{\cos x}} = \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x \ln (\sin x)) =$$

Mudança de variável:

$$y = \frac{1}{\sin x}$$

Se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \ln \left(\frac{1}{y} \right) \right) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$$

$$= e^{\frac{0}{1}} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{I) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^x - 1)}{\ln(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^x \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = \ln(x+1) \Leftrightarrow e^y = x+1 \Leftrightarrow x = e^y - 1$$

Se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

$$= 1 \times 1 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} =$$

$$= 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - e^x}{\ln(x+1)} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} (e^x - 1) \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}} = \\ &= \frac{+\infty(+\infty - 1)}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} =$$

Mudança de variável:

$$y = x + 1$$

Se $x \rightarrow +\infty$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y-1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(y)}{y}}{1 - \frac{1}{y}} = \frac{0^+}{1} = 0^+$$

$$\begin{aligned} \text{m) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{2x} - 9}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3^x - 3)(3^x + 3)}{(x-1)(x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(3^{x-1} - 1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^x + 3}{x-3} = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\ln(3^{x-1})} - 1}{x-1} \times \frac{6}{-2} = \\ &= -9 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{(x-1) \ln(3)} - 1}{(x-1) \ln(3)} \times \ln(3) = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = (x-1) \ln(3)$$

Se $x \rightarrow 1$, então $y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} &= -9 \ln(3) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \\ &= -9 \ln(3) \times 1 = -9 \ln(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{2x} - 9}{x^2 - 4x + 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3^{2x}}{x^2} - \frac{9}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3^x}{x} \times \frac{3^x}{x} - \frac{9}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \\ &= \frac{+\infty \times (+\infty) - 0}{1 - 0 + 0} = +\infty \end{aligned}$$

94.

$$\text{a) } D = \{x \in \mathbb{R}: 1 - e^x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{1 - e^x} = \frac{1}{1 - 1^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{1 - e^x} = \frac{1}{1 - 1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Como a função f é contínua no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, o seu gráfico não admite mais assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x}}{\frac{1}{e^x} - \frac{e^x}{e^x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{+\infty} - 1} = \\ &= \frac{1}{0 - 1} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1 - e^x} = \frac{0}{1 - 0} = 0$$

A reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ e a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned} \text{b) } D &= \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge \ln(x) + 1 \neq 0\} = \\ &=]0, +\infty[\setminus \{e^{-1}\} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$$

Assíntotas verticais:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^3) + 4}{\ln(x) + 1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3 \ln(x)}{\ln(x)} + \frac{4}{\ln(x)}}{\frac{\ln(x)}{\ln(x)} + \frac{1}{\ln(x)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 + \frac{4}{\ln(x)}}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} = \\
&= \frac{3 + \frac{4}{-\infty}}{1 + \frac{1}{-\infty}} = \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3
\end{aligned}$$

A reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^+} \frac{\ln(x^3) + 4}{\ln(x) + 1} = \frac{\ln(e^{-1})^3 + 4}{-1^+ + 1} \\
&= \frac{-3 + 4}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\
\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^-} \frac{\ln(x^3) + 4}{\ln(x) + 1} = \frac{\ln(e^{-1})^3 + 4}{-1^- + 1} \\
&= \frac{-3 + 4}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty
\end{aligned}$$

A reta de equação $x = \frac{1}{e}$ é assíntota vertical ao gráfico de g quando $x \rightarrow -\infty$.

Como a função g é contínua no seu domínio, $]0, +\infty[\setminus \left\{\frac{1}{e}\right\}$, o seu gráfico não admite mais assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3) + 4}{\ln(x) + 1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3 \ln(x)}{\ln(x)} + \frac{4}{\ln(x)}}{\frac{\ln(x)}{\ln(x)} + \frac{1}{\ln(x)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{4}{\ln(x)}}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} = \\
&= \frac{3 + \frac{4}{+\infty}}{1 + \frac{1}{+\infty}} = \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3
\end{aligned}$$

A reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal ao gráfico da função g para $x \rightarrow +\infty$.

Dado que o domínio da função é limitado inferiormente, o seu gráfico não admite assíntota horizontal.

$$c) D = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Assíntotas verticais:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x} + 1} = e^{-\infty} = e \\
\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} + 1} = e^{+\infty} = +\infty
\end{aligned}$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de h .

Como a função h é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, o seu gráfico não admite mais assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x} + 1} = e^{0+1} = e$$

A reta de equação $y = e$ é assíntota horizontal ao gráfico da função h para $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} + 1} = e^{0+1} = e$$

A reta de equação $y = e$ é assíntota horizontal ao gráfico da função h para $x \rightarrow +\infty$.

95.

$$a) D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Assíntotas verticais:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + e^{\frac{1}{x}}\right) = 0 + e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty \\
\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + e^{\frac{1}{x}}\right) = 0 + e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0
\end{aligned}$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Como a função é contínua no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, não existem mais assíntotas verticais ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{\frac{1}{x}}}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\right) = \\
&= 1 + \frac{e^0}{+\infty} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1 \\
b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + e^{\frac{1}{x}} - x\right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1
\end{aligned}$$

Os cálculos para $x \rightarrow -\infty$ são idênticos e obtêm-se do mesmo modo $m = 1$ e $b = 1$.

Assim, a reta de equação $y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f para $x \rightarrow +\infty$ e para $x \rightarrow -\infty$.

$$b) D_g = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge \log(x) - 2 \neq 0\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{100\}$$

Cálculo auxiliar

$$\log(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow \log(x) = 2 \Leftrightarrow x = 10^2$$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\log(x) - 2} = \frac{0}{-\infty - 2} = 0$$

A reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow 100^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 100^+} \frac{x}{\log(x) - 2} = \frac{100}{2^+ - 2} = \frac{100}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 100^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{x}{\log(x) - 2} = \frac{100}{2^- - 2} = \frac{100}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 100$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico de g visto a função ser contínua no seu domínio.

Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{\log(x) - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(x) - 2} = \frac{1}{+\infty - 2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 0x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\log(x) - 2} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x) - 2}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log(x)}{x} - \frac{2}{x} \right)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x}} = \frac{1}{0 - 0} = +\infty$$

Como $b \notin \mathbb{R}$, conclui-se que o gráfico da função g não admite assíntotas não verticais para $x \rightarrow +\infty$. Dado que o domínio da função g é limitado inferiormente, não faz sentido averiguar a existência de assíntotas não verticais para $x \rightarrow -\infty$.

$$c) D_h = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{x} > 0 \wedge x \neq 0\right\} =]0, +\infty[$$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \ln\left(\frac{1}{x}\right) + 3x \right) \stackrel{(0 \times \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \ln\left(\frac{1}{x}\right) \right) + \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x =$$

Mudança de variável:

$$\frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$$

Se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \ln(y) + 0 = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0 \text{ (limite notável)}$$

A reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico da função h .

Não há assíntotas verticais visto a função ser contínua no seu domínio ($\mathbb{R}^+$).

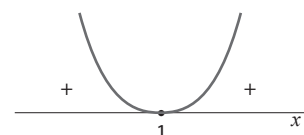
Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln\left(\frac{1}{x}\right) + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + 3 \right) = \ln(0^+) + 3 = -\infty$$

Como $m \notin \mathbb{R}$, conclui-se que o gráfico da função h não admite assíntotas não verticais para $x \rightarrow +\infty$. Dado que o domínio da função h é limitado inferiormente, não faz sentido averiguar a existência de assíntotas não verticais para $x \rightarrow -\infty$.

$$d) D_i = \{x \in \mathbb{R}: (x-1)^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Cálculo auxiliar



Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 1} i(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln(x-1)^2 = \ln(0^+) = -\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de i . Não existem mais assíntotas verticais visto a função ser contínua no seu domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x-1)}{x} =$$

Mudança de variável:

$$\ln(x-1) = y \Leftrightarrow x-1 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 1$$

Se $x \rightarrow +\infty$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$= 2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y + 1} = 2 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y} + \frac{1}{y}} = 2 \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y}} = 2 \times \frac{1}{+\infty + 0} = 2 \times 0 = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (i(x) - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1)^2 = +\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x-1)^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln|x-1|}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x+1)}{x} =$$

Mudança de variável:

$$\ln(-x+1) = y \Leftrightarrow x+1 = e^y \Leftrightarrow x = 1 - e^y$$

Se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$= 2 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{1 - e^y} = 2 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{y} - \frac{e^y}{y}\right)} =$$

$$= 2 \times \frac{1}{0 - (+\infty)} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (i(x) - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x-1)^2 = +\infty$$

Não existem assíntotas não verticais ao gráfico de i nem para $x \rightarrow +\infty$ nem para $x \rightarrow -\infty$.

96.

a) $D_f = \mathbb{R}$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x)) = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico de f , pois a função é contínua nos restantes pontos do seu domínio, isto é, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Como $b \notin \mathbb{R}$, verifica-se que não existem assíntotas não verticais ao gráfico de f para $x \rightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f para $x \rightarrow -\infty$.

b) $D_g = \mathbb{R}$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0) = 0$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico de g , pois a função é contínua nos restantes pontos do seu domínio, isto é, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \times 0 = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g para $x \rightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{x^2}{x-2}}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - 1 \times x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x-2} \right) \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$$

A reta de equação $y = x + 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g para $x \rightarrow -\infty$.

97.

a) Para que f seja contínua em $x = 1$ tem de se ter:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\bullet f(1) = \frac{1}{6}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \ln(x) - e^{x-1} + 1}{6(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \ln(x)}{6(x-1)} - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x-1} - 1}{6(x-1)} =$$

Mudanças de variável:

$$y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$$

Se $x \rightarrow 1^+$, então $y \rightarrow 0^+$.

$$z = x - 1$$

Se $x \rightarrow 1^+$, então $z \rightarrow 0^+$.

$$= \frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{e^y - 1} - \frac{1}{6} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{e^z - 1}{z} =$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} - \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 + x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{(\sqrt{x} + 1)(x - 1)(x + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)(x + 2)} =$$

$$= \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$, então f é contínua em $x = 1$.

- b) f é contínua em $]1, +\infty[$, por se tratar do quociente entre funções contínuas, em particular, f é contínua em $[4, 5]$.

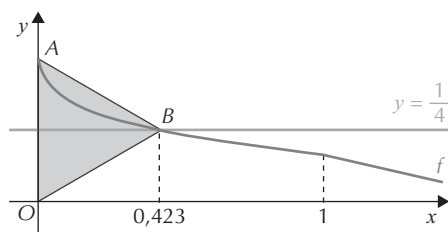
$$f(4) = \frac{2 \ln(4) - e^3 + 1}{6 \times 3} \approx -0,906$$

$$f(6) = \frac{2 \ln(6) - e^5 + 1}{6 \times 5} \approx -4,794$$

Logo, $f(6) < -1 < f(4)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos uma solução da equação $f(x) = -1$ no intervalo $]4, 6[$.

c) $f(0) = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$



$$A_{[OAB]} \approx \frac{\frac{1}{2} \times 0,423}{2} \approx 0,1 \text{ u. a.}$$

98.

a) Assíntotas verticais:

A função f é contínua em $\mathbb{R}^+$, por se tratar do produto de funções contínuas, logo o único candidato a assíntota vertical ao seu gráfico é a reta de equação $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x e^{-\frac{1}{x}} \right) =$$

Mudança de variável:

$$y = -\frac{1}{x}$$

Se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{y} e^y \right) = -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x e^{-\frac{1}{x}} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \left(e^{-\frac{1}{x}} - 1 \right) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = -\frac{1}{x}$$

Se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow 0$.

$$= -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = -1$$

A reta de equação $y = x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f .

- b) Se $x \geq 0$, então:

$$f'(x) = (\ln(x+1) - \ln(x+2))' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$f(1) = \ln(2) - \ln(3) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{6}$$

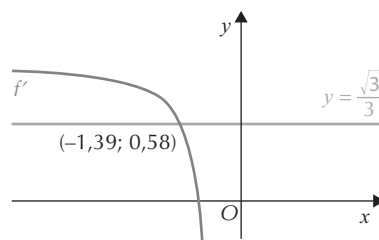
A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1 é $y = \frac{1}{6}x + \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{6}$.

c) $m = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Se $x < 0$, então:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x e^{-\frac{1}{x}} \right)' = \\ &= x' e^{-\frac{1}{x}} + x \left(e^{-\frac{1}{x}} \right)' = \\ &= e^{-\frac{1}{x}} + x \left(-\frac{1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x}} = \\ &= e^{-\frac{1}{x}} + x \times \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \\ &= e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Pretende-se resolver a equação $f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ em $\mathbb{R}^-$.



A abscissa do ponto é $-1,39$.

99. Tem-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$. Logo, a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f .

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + e^x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \\ &= 1 + (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

Como $m \notin \mathbb{R}$, o gráfico de g não tem assíntotas oblíquas quando $x \rightarrow +\infty$.

Dado que o domínio de g é limitado inferiormente, não faz sentido averiguar a existência de assíntotas não oblíquas para $x \rightarrow -\infty$.

Unidade 5 - Modelos exponenciais

Páginas 79 a 85

100. $P(0) = 750\,000$

$$P(10) = 900\,000$$

$$\Leftrightarrow 750\,000 e^{(N-M) \times 10} = 900\,000$$

$$\Leftrightarrow e^{10(N-M)} = \frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow 10(N-M) = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow N-M = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$\text{Assim, } P(t) = 750\,000 e^{\frac{1}{10} \ln\left(\frac{6}{5}\right)t}$$

a) $P(20) = 750\,000 e^{\frac{1}{10} \ln\left(\frac{6}{5}\right) \times 20} = 1\,296\,000$

b) $P(t) = 1\,500\,000$

$$\Leftrightarrow 750\,000 e^{\frac{1}{10} \ln\left(\frac{6}{5}\right)t} = 1\,500\,000$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{10} \ln\left(\frac{6}{5}\right)t} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} \ln\left(\frac{6}{5}\right)t = \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{\frac{1}{10} \ln\left(\frac{6}{5}\right)}$$

Logo, $t \approx 38$

Espera-se que a população atinja 1 500 000 habitantes em 2028.

101. $m(0) = 100$

$$m(10) = 35,539 \Leftrightarrow 100 \times e^{-k \times 10} = 35,539$$

$$\Leftrightarrow e^{-10k} = 0,35539$$

$$\Leftrightarrow -10k = \ln(0,35539)$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{\ln(0,35539)}{10}$$

$$\text{Assim, } m(t) = 100e^{\frac{\ln(0,35539)}{10}t}$$

$$m(t) = 50 \Leftrightarrow 100e^{\frac{\ln(0,35539)}{10}t} = 50$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{\ln(0,35539)}{10}t} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,35539)}{10}t = \ln(0,5)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{10 \ln(0,5)}{\ln(0,35539)}$$

Logo, $t \approx 6,7$ anos.

102. $m(t) = m_0 e^{-kt}$

$$m(33\,600) = \frac{3}{4} m_0 \Leftrightarrow m_0 e^{-k \times 33\,600} = \frac{3}{4} m_0$$

$$\Leftrightarrow e^{-33\,600k} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow -33\,600k = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{33\,600}$$

$$m(t) = \frac{m_0}{2} \Leftrightarrow m_0 e^{\frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{33\,600}t} = \frac{m_0}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{33\,600}t} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{33\,600}t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{33\,600 \ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$$

Logo, $t \approx 80\,957$ anos.

103.

a) $Q(5570) = \frac{Q_0}{2} \Leftrightarrow Q_0 e^{-k \times 5570} = \frac{Q_0}{2}$

$$\Leftrightarrow e^{-5570k} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -5570k = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{5570}$$

Logo, $k \approx 0,000\,124\,4$.

$$b) \frac{Q(t+100)}{Q(t)} = \frac{Q_0 e^{-k(t+100)}}{Q_0 e^{-kt}} = e^{-kt-100k+kt} = e^{-100k}$$

Como $k \approx 0,0001244$, então $e^{-100k} \approx 0,99$.

A cada 100 anos, a massa de carbono-14 presente na amostra diminui, aproximadamente, 1%.

$$\begin{aligned} c) Q(t) = 0,894Q_0 &\Leftrightarrow Q_0 e^{-kt} = 0,894Q_0 \\ &\Leftrightarrow e^{-kt} = 0,894 \\ &\Leftrightarrow -kt = \ln(0,894) \\ &\Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0,894)}{k} \end{aligned}$$

Como $k \approx 0,0001244$, então $t \approx 901$ anos.

Logo, a mesa não pode ser a Távola Redonda.

Aprende Fazendo

Páginas 94 a 119

1. Opção (C)

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^3 = (e^1)^3 = e^3$$

2. Opção (C)

Se y é a quantidade após t anos, então após 5 anos há $y = y_0 \times 0,88^5 \approx 0,5277 y_0$, ou seja, há, aproximadamente, 53% da quantidade inicial.

3. Opção (B)

Como a função g é contínua nos intervalos $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ e $[-1, 0]$, basta averiguar em qual destes intervalos as imagens dos extremos são uma inferior a 9 e a outra superior a 9.

$$g(0) = 2^0 + 3^0 = 2$$

$$g(1) = 2^1 + 3^1 = 5$$

$$g(2) = 2^2 + 3^2 = 13$$

$$g(3) = 2^3 + 3^3 = 35$$

$$g(-1) = 2^{-1} + 3^{-1} = \frac{5}{6}$$

Como $g(1) = 5 < 9$ e $g(2) = 13 > 9$, então, conclui-se que é no intervalo $]1, 2[$ que a equação $g(x) = 9$ tem pelo menos uma solução.

4. Opção (B)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{f(x)} = \frac{e}{+\infty} = 0$$

5. Opção (A)

$$\boxed{} \ln(b)$$

$$\ln(a)$$

$$\begin{aligned} \text{Perímetro} &= 2 \ln(a) + 2 \ln(b) = 2(\ln(a) + \ln(b)) = \\ &= 2 \ln(a \times b) \end{aligned}$$

6. Opção (B)

$$\log_b\left(\frac{b}{a}\right) = \log_b(b) - \log_b(a) = 1 - c$$

7. Opção (A)

$$\ln(ex) = y \Leftrightarrow ex = e^y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e^y}{e}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{y-1}$$

$$\text{Assim, } f^{-1}(x) = e^{x-1}.$$

8. Opção (A)

$P(n) = 1300 \times \left(1 + \frac{16}{100}\right)^n$, onde n é o número de anos decorridos desde 2012.

$$\text{Então, } P(18) = 1300 \times 1,016^{18}.$$

9. Opção (D)

Cálculos auxiliares

• A abscissa de A corresponde ao zero de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Logo, } \overline{AC} = 2(k-1).$$

$$\bullet f(k) = \log_k(k) = 1$$

$$A = \frac{\overline{AC} \times f(k)}{2} = \frac{2(k-1) \times 1}{2} = k-1$$

10. Opção (A)

$$\begin{aligned} b^{u+3v} &= b^u \times b^{3v} = \underbrace{b^u}_{=2} \times (b^v)^3 = \\ &= 2 \times 5^3 = \\ &= 250 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{b^{-2u}} = b^{2u} = (b^u)^2 = 2^2 = 4$$

11. Opção (B)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : e - e^x \neq 0 \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$e - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = e$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

12. Opção (B)

$$\begin{aligned} \log_a(a^3 \times \sqrt{b}) &= \log_a(a^3) + \log_a(\sqrt{b}) = \\ &= 3 + \log_a\left(b^{\frac{1}{2}}\right) = \\ &= 3 + \frac{1}{2} \log_a(b) = \\ &= 3 + \frac{1}{2} \times 5 = \\ &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

13. Opção (B)

$$\begin{aligned}
\text{t.m.v.}_{[0,4]} &= \ln(\sqrt[4]{3}) \\
\Leftrightarrow \frac{f(4)-f(0)}{4-0} &= \ln(\sqrt[4]{3}) \\
\Leftrightarrow \frac{\ln(8+k)-\ln(k)}{4} &= \ln(\sqrt[4]{3}) \\
\Leftrightarrow \ln\left(\frac{8+k}{k}\right) &= 4 \ln(\sqrt[4]{3}) \\
\Leftrightarrow \ln\left(\frac{8+k}{k}\right) &= \ln(\sqrt[4]{3})^4 \\
\Leftrightarrow \ln\left(\frac{8+k}{k}\right) &= \ln(3) \\
\Leftrightarrow \frac{8+k}{k} &= 3 \\
\Leftrightarrow 8+k &= 3k \\
\Leftrightarrow k &= 4
\end{aligned}$$

14. Opção (A)

$$\begin{aligned}
f'(x) = g'(x) &\Leftrightarrow \frac{(x+k)'}{x+k} = \frac{1}{x} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{x+k} = \frac{1}{x} \\
&\Leftrightarrow x+k = x \\
&\Leftrightarrow k = 0
\end{aligned}$$

15. Opção (B)

A sucessão (x_n) de termo geral $1 - n^2$ tende para $-\infty$, pelo que $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x_n) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

16. Opção (A)

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$ e $y = -5$ a equação da assíntota ao gráfico de f , então:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -5$$

Assim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \frac{\ln(0^+)}{-5} = \frac{-\infty}{-5} = +\infty$$

17. Opção (C)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \\
\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (k + \ln(e+x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{2x}-1}{x}\right) \\
\Leftrightarrow k + \ln(e+0) &= \lim_{2x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{2x}-1}{2x} \times 2\right) \\
\Leftrightarrow k+1 &= \lim_{2x \rightarrow 0^-} \underbrace{\frac{e^{2x}-1}{2x}}_{\text{limite notável}} \times 2 \\
\Leftrightarrow k+1 &= 1 \times 2 \\
\Leftrightarrow k &= 1
\end{aligned}$$

18. Opção (D)

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow (2x+1)e^{x^2+x} = 0 \\
&\Leftrightarrow 2x+1 = 0 \vee e^{x^2+x} = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \\
f\left(-\frac{1}{2}\right) &= e^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \neq e
\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = e$ não é tangente ao gráfico de f .

$$g'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{x} \neq 0 \quad \forall x \in D_{g'}$$

Logo, a reta de equação $y = e$ não é tangente ao gráfico de g .

$$\begin{aligned}
h'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow x = e
\end{aligned}$$

$$h(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e} \neq e$$

Logo, a reta de equação $y = e$ não é tangente ao gráfico de h .

$$\begin{aligned}
j'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^x \times x - e^x}{x^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow e^x(x-1) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}$$

$$j(1) = \frac{e}{1} = e$$

Logo, a reta de equação $y = e$ é tangente ao gráfico de j .

19. Opção (C)

$$\begin{aligned}
\lim u_n &= \lim \left(\frac{1-e^{2n}}{e^n}\right) = \lim \left(\frac{1}{e^n} - e^n\right) = \\
&= \frac{1}{+\infty} - (+\infty) = -\infty
\end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(u_n) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

20. Opção (A)

Sabendo que f é o tipo $f(x) = x^2 + bx + c$ e que admite como zeros os valores 3 e -4, então:

$$f(x) = (x-3) \times (x+4)$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x-3}-1}{(x-3)(x+4)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x-3}-1}{x-3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+4} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{e^{x-3}-1}{x-3}\right) \times \frac{1}{7} =
\end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = x - 3$$

Se $x \rightarrow 3$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{e^y - 1}{y} \right)}_{\text{limite notável}} \times \frac{1}{7} = 1 \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$$

21. Opção (D)

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : |3x| - 1 > 0\} = \left] -\infty, -\frac{1}{3} \right[\cup \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[= \\ = \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right]$$

$$|3x| - 1 > 0 \Leftrightarrow |3x| > 1 \\ \Leftrightarrow 3x > 1 \vee 3x < -1 \\ \Leftrightarrow x > \frac{1}{3} \vee x < -\frac{1}{3}$$

22. Opção (B)

$$\ln(a) = 2 - \ln(b) \Leftrightarrow \ln(a) + \ln(b) = 2 \\ \Leftrightarrow \ln(a \times b) = 2 \\ \Leftrightarrow a \times b = e^2 \\ \Leftrightarrow a = \frac{e^2}{b}$$

23. Opção (D)

$$\log_5(2b) = x \Leftrightarrow 2b = 5^x \\ \Leftrightarrow b = \frac{5^x}{2} \\ \text{e } \log_5(a) = y \Leftrightarrow a = 5^y \\ \text{Donde: } a \times b = 5^y \times \frac{5^x}{2} = \frac{5^{x+y}}{2}$$

24. Opção (A)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left(\log \left(\frac{1}{|x-5|} \right) \right) = \log \left(\frac{1}{0^+} \right) = \log(+\infty) = +\infty$$

25. Opção (A)

$$\lim \left(1 + \frac{\ln(2)}{n} \right)^{3n} = \left(\lim \left(1 + \frac{\ln(2)}{n} \right)^n \right)^3 = \\ = (e^{\ln(2)})^3 = 2^3 = 8$$

26. Opção (C)

$$h'(x) = (f(x) + \ln(x))' = f'(x) + \frac{1}{x}$$

Como f é uma função quadrática, então f' é uma função afim.

$$h''(x) = \left(f'(x) + \frac{1}{x} \right)' = f''(x) - \frac{1}{x^2}$$

Como f' é uma função afim, então f'' é uma função constante. Além disso, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$, logo $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Assim, o gráfico de h'' obtém-se do gráfico da função cuja expressão analítica é $y = -\frac{1}{x^2}$ através de uma translação de vetor $(0, k)$, com $k \in \mathbb{R}^+$.

27. Opção (B)**Cálculo auxiliar**

r é perpendicular à reta de equação $y = -\frac{1}{2}x + 1$, logo é do tipo $y = 2x + b$, $b \in \mathbb{R}$.

Como r é assíntota não vertical ao gráfico de g , então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x)}{x} + 2 = 0 + 2 = 2$$

28. Opção (B)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (10^x) = 0 \text{ e } -1 \leq \cos(3x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\cos(3x) \times 10^x) = 0.$$

29.

a) Ao fim de um ano: $2000 \left(1 + \frac{1,3}{100} \right)^1 = 2026$ euros

Ao fim de quatro anos: $2000 \left(1 + \frac{1,3}{100} \right)^4 \approx 2106$ euros

b) $u_n = u_1 \times r^{n-1}$

$$u_n = 2026 \times \left(1 + \frac{1,3}{100} \right)^{n-1} \Leftrightarrow 2026 \times 1,013^{n-1}$$

30.

a) $C_n = 10\,000 \times \left(1 + \frac{0,75}{100} \right)^n \Leftrightarrow C_n = 10\,000 \times 1,0075^n$

b) $C_1 = 10\,000 \times 1,0075^1 = 10\,075$ euros

Juros pagos mensalmente:

$$10\,000 \times \left(1 + \frac{0,75}{100 \times 12} \right)^{12} \approx 10\,075,26 \text{ euros}$$

O capital acumulado seria 0,26 euros superior à opção descrita inicialmente.

31.

a) $h(5) = 585 + 15e^{-16 \times 5} - 6 \times 5 \approx 555$

Após 5 segundos da abertura do paraquedas, o paraquedista encontrava-se a 555 metros de altitude.

b) 1 minuto e 30 segundos corresponde a $t = 90$ e 1 minuto e 31 segundos corresponde a $t = 91$.

• h é uma função contínua em $[90, 91]$, visto tratar-se da soma de funções contínuas ($t \mapsto 585 - 6t$ e $t \mapsto 15e^{-1,6t}$) em $\mathbb{R}$, logo contínuas em $[90, 91]$.

• $h(90) = 45 > 40$ e $h(91) = 39 < 40$

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy $\exists t \in]90, 91[$:
 $h(t) = 40$.

32.

a) $10^{x+3} = 0,01 \Leftrightarrow 10^{x+3} = 10^{-2}$
 $\Leftrightarrow x + 3 = -2$
 $\Leftrightarrow x = -5$

C.S. = $\{-5\}$

b) $2 \times 5^{x+1} = 10 \times 25^x \Leftrightarrow 5^{x+1} = 5 \times 5^{2x}$
 $\Leftrightarrow 5^{x+1} = 5^{2x+1}$
 $\Leftrightarrow x + 1 = 2x + 1$
 $\Leftrightarrow -x = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0$

C.S. = $\{0\}$

c) $8^x = \frac{1}{32} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$
C.S. = $\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

d) $(\sqrt{5})^x = \sqrt[4]{125} \Leftrightarrow \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^x = (5^3)^{\frac{1}{4}}$
 $\Leftrightarrow 5^{\frac{1}{2}x} = 5^{\frac{3}{4}}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{6}{4}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
C.S. = $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

33.

a) $2^{x+4} = 2^{2-3x} \Leftrightarrow x + 4 > 2 - 3x$
 $\Leftrightarrow x + 3x > 2 - 4$
 $\Leftrightarrow 4x > -2$
 $\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

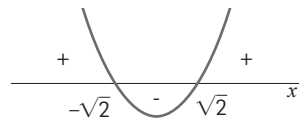
C.S. = $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2-3x} \Leftrightarrow x + 4 < 2 - 3x$, pois a função
exponencial de base $\frac{1}{2}$ é estritamente decrescente.
 $\Leftrightarrow x + 3x < 2 - 4$
 $\Leftrightarrow 4x < -2$
 $\Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$
C.S. = $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$

c) $2^{x^2} \geq 4 \Leftrightarrow 2^{x^2} \geq 2^2$
 $\Leftrightarrow x^2 \geq 2$
 $\Leftrightarrow x^2 - 2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2}$

Cálculo auxiliar

$x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2}$

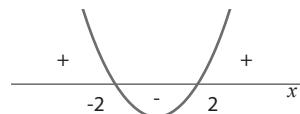


C.S. = $]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$

d) $5^{x^2-4} \geq 1 \Leftrightarrow 5^{x^2-4} \geq 5^0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$

Cálculo auxiliar

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$



C.S. = $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

e) $2^{3x-1} \leq 32 \Leftrightarrow 2^{3x-1} \leq 2^5$
 $\Leftrightarrow 3x - 1 \leq 5$
 $\Leftrightarrow 3x \leq 6$
 $\Leftrightarrow x \leq 2$

C.S. = $]-\infty, 2]$

f) $e^{-0,1x+3} \geq 1 \Leftrightarrow e^{-0,1x+3} \geq e^0$
 $\Leftrightarrow -0,1x + 3 \geq 0$
 $\Leftrightarrow -0,1x \geq -3$
 $\Leftrightarrow x \leq \frac{3}{0,1}$
 $\Leftrightarrow x \leq 30$

C.S. = $]-\infty, 30]$

g) $7^{3x+4} < 49^{2x-3} \Leftrightarrow 7^{3x+4} < 7^{4x-6}$
 $\Leftrightarrow 3x + 4 < 4x - 6$
 $\Leftrightarrow -x < -10$
 $\Leftrightarrow x > 10$

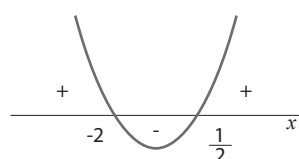
C.S. = $]10, +\infty[$

h) $5^{2x^2+3x-2} > 1 \Leftrightarrow 5^{2x^2+3x-2} > 5^0$
 $\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 > 0$

Cálculo auxiliar

$2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{1}{2}$



C.S. = $]-\infty, -2[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

34.

a) Justificar que a reta r intersesta a curva c em pelo menos um ponto, no intervalo $[0, 1]$, é equivalente a provar que a equação $f(x) = 5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[0, 1]$:

• f é contínua em $[0, 1]$, por se tratar da soma de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ e, portanto, contínuas em $[0, 1]$.

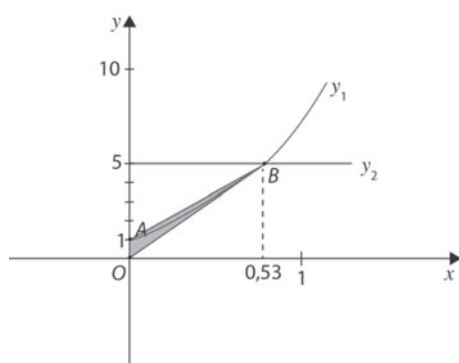
$$f(0) = 5^0 + 5 \times 0 = 1$$

$$f(1) = 5^1 + 5 \times 1 = 10$$

Ou seja, $f(0) < 5 < f(1)$.

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy pode concluir-se que existe pelo menos um número $c \in]0, 1[$ tal que $f(c) = 5$, isto é, $f(x) = 5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, 1[$.

b)



$$A_{\triangle[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times h}{2} = \frac{1 \times 0,53}{2} \approx 0,3 \text{ u. a.}$$

35.

$$a) \lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{3n} = \lim \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n\right)^3 = (e^{-2})^3 = e^{-6}$$

$$b) \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+4} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+4} = \lim \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{n+4}{n}} = (e^1)^1 = e$$

$$c) \lim \left(\frac{n}{n-2}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{2}{n-2}\right)^n = \lim \left(\left(1 + \frac{2}{n-2}\right)^{n-2}\right)^{\frac{n}{n-2}} = (e^2)^1 = e^2$$

$$d) \lim \left(1 - \frac{3}{4n}\right)^{5n} = \lim \left(\left(1 - \frac{3}{4n}\right)^{4n}\right)^{\frac{5}{4}} = (e^{-3})^{\frac{5}{4}} = e^{-\frac{15}{4}}$$

$$e) \lim \left(\frac{n+1}{n+5}\right)^{3n} = \lim \left(1 - \frac{4}{n+5}\right)^{3n} = \lim \left(\left(1 - \frac{4}{n+5}\right)^{n+5}\right)^{\frac{3n}{n+5}} = (e^{-4})^3 = e^{-12}$$

$$f) \lim \left(\frac{3n+2}{n}\right)^n = \lim \left(3 + \frac{2}{n}\right)^n = 3^{+\infty} = +\infty$$

$$g) \lim \left(\frac{n^2-3}{n^2}\right)^n = \lim \left(1 - \frac{3}{n^2}\right)^n = \lim \left(\left(1 - \frac{3}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = (e^{-3})^0 = 1$$

$$h) \lim \left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{4n} = \lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{4n} = \lim \left(\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{\frac{4}{3}} = (e^1)^{\frac{4}{3}} = e^{\frac{4}{3}} = e^{\sqrt[3]{4}}$$

36.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{4x} = \frac{1}{4} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

limite notável

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{3x}}{x} = -1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = -1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3 =$$

Mudança de variável:

$$3x = y$$

Se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

$$= -1 \times 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = -1 \times 3 \times 1 = -3$$

limite notável

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x-2} =$$

Mudança de variável:

$$x - 2 = y$$

Se $x \rightarrow 2$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

limite notável

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{e^x - 1} = 5 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 5 \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}} = 5 \times \frac{1}{1} = 5$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{e^x - e^4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{e^x \times (e^{x-4} - 1)}{x - 4} =$$

Mudança de variável:

$$x - 4 = y$$

Se $x \rightarrow 4$, então $y \rightarrow 0$.

$$= e^4 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = e^4 \times 1 = e^4$$

limite notável

37.

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{1-e^x} \right) = \frac{e^{-\infty}}{1-e^{-\infty}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-e^x}{e^x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} 1} = \frac{1}{\frac{1}{+\infty} - 1} = \frac{1}{0-1} = -1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{1}{0}$$

Cálculo dos limites laterais de g em $x = 0$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{1}{1-1^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

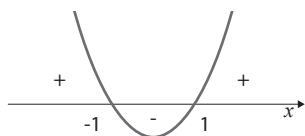
Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

38.

$$a) D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 > 0\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$



$$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$$

$$\log_2 (x^2 - 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 - 1) = \log_2 (4) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 4 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 5 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}) \wedge x \in D$$

$$C.S. = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

$$b) D = \{x \in \mathbb{R}: 3 + 5x > 0\} = \left] -\frac{3}{5}, +\infty \right[$$

Cálculo auxiliar

$$3 + 5x > 0 \Leftrightarrow 5x > -3 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{5}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (3 + 5x) = 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} (3 + 5x) = \log_{\frac{1}{2}} (1)$$

$$\Leftrightarrow 3 + 5x = 1 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 5x = -2 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{5} \wedge x \in D$$

$$C.S. = \left\{ -\frac{2}{5} \right\}$$

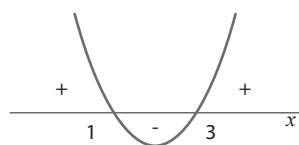
$$c) D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x + 3 > 0\} =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$$



$$x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3$$

$$\log_4 (x^2 - 4x + 3) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_4 (x^2 - 4x + 3) = \log_4 (2) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 2 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times 1}}{2} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3} \wedge x \in D$$

$$C.S. = \{2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}$$

$$d) D = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 > 0\} =]-1, +\infty[$$

$$\log (x + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 10 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 9 \wedge x \in D$$

$$C.S. = \{9\}$$

$$e) D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} =]0, +\infty[$$

$$\ln (x) - \ln (4) = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln (x) = \ln (e) + \ln (4) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \ln (x) = \ln (4e) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 4e \wedge x \in D$$

$$C.S. = \{4e\}$$

$$f) D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} =]0, +\infty[$$

$$3 \log_3 (2) + \log_3 (x) = -1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (8) + \log_3 (x) = \log_3 (3^{-1}) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (8x) = \log_3 \left(\frac{1}{3} \right) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 8x = \frac{1}{3} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{24} \wedge x \in D$$

$$C.S. = \left\{ \frac{1}{24} \right\}$$

g) $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge 2 - x > 0\} =]0, 2[$

$$\ln(x) + \ln(2 - x) = \ln(5)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x - x^2) = \ln(5) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 2x - x^2 = 5 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x - 5 = 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{-2} \wedge x \in D$$

condição impossível em $\mathbb{R}$

$$\text{C.S.} = \emptyset$$

h) $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} =]0, +\infty[$

$$5 = \log_4(x)$$

$$\Leftrightarrow x = 4^5 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 1024 \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \{1024\}$$

i) $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} =]0, +\infty[$

$$\log_2(x) = 16$$

$$\Leftrightarrow x = 2^{16} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 65\,536 \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \{65\,536\}$$

j) $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge x \neq 1\} =]0, +\infty[\setminus \{1\}$

$$\log_x(16) = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 16 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x = 4 \vee x = -4) \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \{4\}$$

39.

a) $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 > 0 \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$$\ln(x^2) + \ln(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 \times x) \leq \ln(1) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^3 \leq 1 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 1 \leq 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} =]0, 1]$$

Cálculos auxiliares

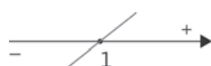
	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0 = r

$$\bullet x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

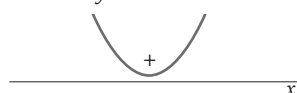
x	$-\infty$	1	$+\infty$
x - 1	-	0	+
$x^2 + x + 1$	+	+	+
$(x - 1)(x^2 + x + 1)$	-	0	+

$$x^3 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

$$y = x - 1$$



$$y = x^2 + x + 1$$



$$\bullet x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

condição impossível em $\mathbb{R}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 > 0 \wedge x + 1 > 0\} =$

$$= \{x \in \mathbb{R}: (x < -2 \vee x > 2) \wedge x > -1\} =$$

$$=]2, +\infty[$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$



$$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$$

$$\bullet x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

$$\ln(x^2 - 4) - \ln(x + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 - 4) \geq \ln(x + 1) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 \geq x + 1 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 5 \geq 0 \wedge x \in D$$

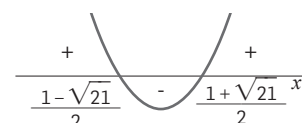
$$\Leftrightarrow \left(x \leq \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \vee x \geq \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right) \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \left[\frac{1 + \sqrt{21}}{2}, +\infty[\right.$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-5)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$



c) $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} =]0, +\infty[$

$$\ln(x) < 3$$

$$\Leftrightarrow x < e^3 \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} =]0, e^3[$$

d) $D = \{x \in \mathbb{R}: x + 3 > 0\} =]-3, +\infty[$

$$\ln(x + 3) < 0$$

$$\Leftrightarrow x + 3 < 1 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x < -2 \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} =]-3, -2[$$

40.

a) $d'(x) = (e^{2x+1})' = (2x + 1)' \times e^{2x+1} = 2e^{2x+1}$

$$b) b'(x) = (\ln(2x+1))' = \frac{(2x+1)'}{2x+1} = \frac{2}{2x+1}$$

$$c) c'(x) = (2e^{-x^2} + 2x)' = \\ = 2 \times (-x^2)' \times e^{-x^2} + x' \times 2x \times \ln(2) = \\ = -4xe^{-x^2} + 2x \times \ln(2)$$

$$d) d'(x) = (\ln(\ln(x)))' = \frac{(\ln(x))'}{\ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x \ln(x)}$$

$$e) e'(x) = \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{1}{x}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\frac{x}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

$$f) f'(x) = (e^{4x} \log_2(3x))' = \\ = (e^{4x})' \times \log_2(3x) + e^{4x} \times (\log_2(3x))' = \\ = 4e^{4x} \times \log_2(3x) + e^{4x} \times \frac{3}{3x \times \ln(2)} = \\ = 4e^{4x} \times \log_2(3x) + \frac{e^{4x}}{x \ln(2)}$$

$$g) g'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x^4} \right)' = \frac{(\ln(x))' \times x^4 - (\ln(x)) \times (x^4)'}{(x^4)^2} = \\ = \frac{\frac{1}{x} \times x^4 - \ln(x) \times 4x^3}{x^8} = \frac{x^3(1 - 4 \ln(x))}{x^8} = \\ = \frac{1 - 4 \ln(x)}{x^5}$$

$$h) h'(x) = (\sqrt{\ln(5x)})' = \left((\ln(5x))^{\frac{1}{2}} \right)' = \\ = \frac{1}{2} (\ln(5x))^{-\frac{1}{2}} \times (\ln(5x))' = \\ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\ln(5x)}} \times \frac{5}{5x} = \\ = \frac{1}{2x \sqrt{\ln(5x)}}$$

$$i) i'(x) = \left(\left(\frac{e^x}{x} \right)^3 \right)' = 3 \times \left(\frac{e^x}{x} \right)^2 \times \left(\frac{e^x}{x} \right)' = \\ = 3 \times \frac{(e^x)^2}{x^2} \times \frac{(e^x)' \times x - e^x \times x'}{x^2} = \\ = \frac{3e^{2x}}{x^2} \times \frac{e^x \times x - e^x}{x^2} = \\ = \frac{3e^{2x} \times e^x (x-1)}{x^4} = \\ = \frac{3e^{3x} (x-1)}{x^4}$$

$$j) j'(x) = (\ln(\cos x + 1))' = \frac{(\cos x + 1)'}{\cos x + 1} = \frac{-\sin x}{\cos x + 1}$$

$$k) k'(x) = (e^x + \sin x)' = \\ = (x + \sin x)' e^{x + \sin x} = \\ = (1 + \cos x) e^{x + \sin x}$$

$$41. C_0 \left(1 + \frac{r}{100} \right)^5 = 2C_0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{r}{100} \right)^5 = 2 \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{r}{100} = \sqrt[5]{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{100} = -1 + \sqrt[5]{2}$$

$$\Leftrightarrow r = 100 \times (-1 + \sqrt[5]{2})$$

Logo, $r \approx 14,87\%$.

42.

a) Para que f seja contínua em $t = 60$ terá que se verificar:

$$\lim_{t \rightarrow 60} f(t) = f(60)$$

Para que exista $\lim_{t \rightarrow 60} f(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow 60^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 60^-} f(t)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 60^+} (6 + A \times 2^{-0,05(t-60)}) = \lim_{t \rightarrow 60^+} (20 + 80 \times 2^{-0,05t})$$

$$\Leftrightarrow 6 + A \times 2^{-0,05 \times 0} = 20 + 80 \times 2^{-0,05 \times 60}$$

$$\Leftrightarrow 6 + A \times 2^0 = 20 + 80 \times 2^{-3}$$

$$\Leftrightarrow A = 20 + 10 - 6$$

$$\Leftrightarrow A = 24$$

b) Pretende-se $f(t) = 12$, para $t \geq 60$. Assim:

$$6 + 24 \times 2^{-0,05(t-60)} = 12$$

$$\Leftrightarrow 2^{-0,05(t-60)} = \frac{12-6}{24}$$

$$\Leftrightarrow 2^{-0,05(t-60)} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -0,05(t-60) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow -0,05(t-60) = -2$$

$$\Leftrightarrow t-60 = 40$$

$$\Leftrightarrow t = 100$$

O pudim atinge os doze graus após 100 minutos de ter sido confeccionado; como esteve 60 minutos a arrefecer na bancada da cozinha, precisa de estar 40 minutos no frigorífico para atingir esta temperatura.

43.

$$a) 2^{x+5} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2^{x+5} = 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x+5 = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -5 - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{11}{2}$$

$$C.S. = \left\{ -\frac{11}{2} \right\}$$

$$b) 25^{x^2-2x} = 5^{x^2-3} \Leftrightarrow 5^{2x^2-4x} = 5^{x^2-3}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = x^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

$$\text{C.S.} = \{1, 3\}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 4 \times 5^{3x+1} &= 20 \times 25^{x+4} \Leftrightarrow 5^{3x+1} = 5 \times 5^{2x+8} \\ &\Leftrightarrow 5^{3x+1} = 5^{2x+9} \\ &\Leftrightarrow 3x+1 = 2x+9 \\ &\Leftrightarrow x = 8 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{8\}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^3 \times 3^x &= 3^{x+3} \Leftrightarrow x^3 \times 3^x - 3^x \times 3^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3^x(x^3 - 3^3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{3^x = 0}_{\text{condição impossível}} \vee x^3 - 3^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 = 3^3 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{3\}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } 2x \times 5^x &= 5^{x-1} \Leftrightarrow 2x \times 5^x - 5^x \times 5^{-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow 5^x(2x - 5^{-1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{5^x = 0}_{\text{condição impossível}} \vee 2x - \frac{1}{5} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{1}{5} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{1}{10} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } -3^{2x-1} + 28 \times 3^{x-2} &= 1 \\ &\Leftrightarrow -3^{2x} \times 3^{-1} + 28 \times 3^x \times 3^{-2} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3^{2x} \times 3 + 28 \times 3^x - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3^x = \frac{-28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \times 3 \times 9}}{-6} \\ &\Leftrightarrow 3^x = \frac{28 \pm 26}{6} \\ &\Leftrightarrow 3^x = 9 \vee 3^x = \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1 \\ \text{C.S.} &= \{-1, 2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \frac{3^x(x^2-x)+4}{3^{x+1}+2} &= 2 \\ &\Leftrightarrow 3^x(x^2-x)+4 = 2 \times 3^{x+1} + 4 \\ &\Leftrightarrow 3^x(x^2-x) - 6 \times 3^x = 0 \\ &\Leftrightarrow 3^x(x^2-x-6) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{3^x = 0}_{\text{condição impossível}} \vee x^2-x-6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3 \\ \text{C.S.} &= \{-2, 3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \frac{50}{25^{x^2}+25} &= \frac{2}{1+125^{x^2+x}} \\ &\Leftrightarrow 50 \times (1+125^{x^2+x}) = 2 \times (25^{x^2}+25) \\ &\Leftrightarrow 50 + 50 \times 125^{x^2+x} = 2 \times 25^{x^2} + 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2 \times 25 \times 5^{3x^2+3x} = 2 \times 5^{2x^2} \\ &\Leftrightarrow 5^2 \times 5^{3x^2+3x} = 5^{2x^2} \\ &\Leftrightarrow 5^{3x^2+3x+2} = 5^{2x^2} \\ &\Leftrightarrow 3x^2+3x+2 = 2x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2+3x+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

$$\text{C.S.} = \{-2, -1\}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } 2^x - 2^{1-x} - 1 &= 0 \Leftrightarrow 2^x - \frac{2}{2^x} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^{2x} - 2 - 2^x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^{2x} - 2^x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{2^x = -1}_{\text{condição impossível}} \vee 2^x = 2 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{1\}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } 3^x + 1 &= 10 \times 3^{2-x} \Leftrightarrow 3^x + 1 - 10 \times \frac{9}{3^x} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3^{2x} + 3^x - 90 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3^x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+360}}{2} \\ &\Leftrightarrow 3^x = \frac{-1 \pm 19}{2} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{3^x = -10}_{\text{condição impossível}} \vee 3^x = 9 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{2\}$$

44.

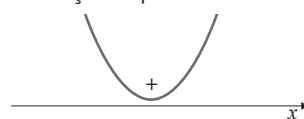
$$\begin{aligned} \text{a) } \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} &< 9^{2-x} \Leftrightarrow 3^{-x+1} < 3^{4-2x} \\ &\Leftrightarrow -x+1 < 4-2x \\ &\Leftrightarrow x < 3 \\ \text{C.S.} &=]-\infty, 3[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (0,1)^{x-x^2} &\leq 0,01 \Leftrightarrow 10^{-x+x^2} \leq 10^{-2} \\ &\Leftrightarrow -x+x^2 \leq -2 \\ &\Leftrightarrow x^2-x+2 \leq 0 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$$

condição impossível em IR



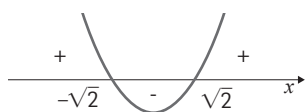
$$\text{C.S.} = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 3^{x^2} &> 9 \Leftrightarrow 3^{x^2} > 3^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 > 2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 > 0$$

Cálculo auxiliar

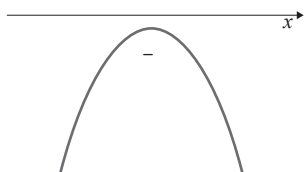
$$x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$



$$\text{C.S.} =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 5^{-x^2} &\leq 125 \Leftrightarrow 5^{-x^2} \leq 5^3 \\ &\Leftrightarrow -x^2 \leq 3 \\ &\Leftrightarrow -x^2 - 3 \leq 0 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar



$$\text{C.S.} = \mathbb{R}$$

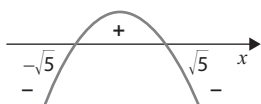
$$\begin{aligned} \text{e) } 3^x &\geq 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \geq \left(\frac{3}{2}\right)^0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \\ \text{C.S.} &= \mathbb{R}_0^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } 6^x &\geq 7^x \Leftrightarrow \left(\frac{6}{7}\right)^x \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{6}{7}\right)^x \geq \left(\frac{6}{7}\right)^0 \\ &\Leftrightarrow x \leq 0 \\ \text{C.S.} &= \mathbb{R}_0^- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } (5 - x^2) \pi^x &\leq 0 \Leftrightarrow 5 - x^2 \leq 0 \\ &> 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$5 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$$

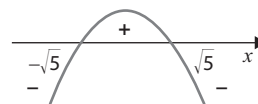


$$\text{C.S.} =]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \text{h) } 5^{x+1} &< x^2 \times 5^x \Leftrightarrow 5^x \times 5 - x^2 \times 5^x < 0 \\ &\Leftrightarrow 5^x (5 - x^2) < 0 \\ &> 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow 5 - x^2 < 0 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$5 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$$

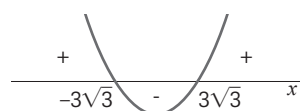


$$\text{C.S.} =]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \text{i) } x^2 \times 3^x &< 3^{x+3} \Leftrightarrow x^2 \times 3^x - 3^x \times 3^3 < 0 \\ &\Leftrightarrow 3^x (x^2 - 27) < 0 \\ &> 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 27 < 0 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} x^2 - 27 = 0 &\Leftrightarrow x = \sqrt{27} \vee x = -\sqrt{27} \\ &\Leftrightarrow x = 3\sqrt{3} \vee x = -3\sqrt{3} \end{aligned}$$

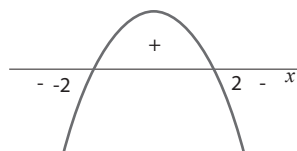


$$\text{C.S.} =]-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}[$$

$$\begin{aligned} \text{j) } e^{\frac{4-x^2}{x^2+1}} &> 1 \Leftrightarrow e^{\frac{4-x^2}{x^2+1}} > e^0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4-x^2}{x^2+1} > 0 \\ &\Leftrightarrow 4 - x^2 > 0 \text{ (já que } x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$



$$\text{C.S.} =]-2, 2[$$

$$\begin{aligned} \text{k) } 4^x &\leq \sqrt[3]{2^{3x+6}} \Leftrightarrow 2^{2x} \leq 2^{x+2} \\ &\Leftrightarrow 2x \leq x + 2 \\ &\Leftrightarrow x \leq 2 \end{aligned}$$

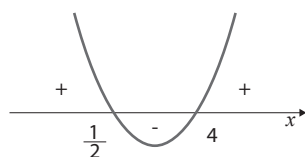
$$\text{C.S.} =]-\infty, 2]$$

$$\begin{aligned} \text{l) } 4^x + 2 &\leq 9 \times 2^{x-1} \Leftrightarrow 2^{2x} + 2 - \frac{9}{2} \times 2^x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \times 2^{2x} - 9 \times 2^x + 4 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 2y^2 - 9y + 4 \leq 0 \wedge y = 2^x \\ &\Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2} \wedge y \leq 4 \wedge y = 2^x \\ &\Leftrightarrow 2^x \geq \frac{1}{2} \wedge 2^x \leq 4 \\ &\Leftrightarrow x \geq -1 \wedge x \leq 2 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$2y^2 - 9y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{4}$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \vee y = \frac{1}{2}$$



$$\text{C.S.} = [-1, 2]$$

$$\text{m)} 3^x \leq 27^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 3^x \leq 3^{\frac{3}{x}}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{3}{x}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{3}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3}{x} \leq 0$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2 - 3$	+	0	-	-	-	0	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{x^2 - 3}{x}$	-	0	+	n.d.	-	0	+

$$\text{C.S.} =]-\infty, -\sqrt{3}] \cup]0, \sqrt{3}]$$

$$\text{n)} 81 \times 3^{2x-3} \leq \frac{9^x}{x} \Leftrightarrow 3^4 \times 3^{2x-3} - \frac{3^{2x}}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x+1} - \frac{3^{2x}}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} \left(3 - \frac{1}{x} \right) \leq 0$$

$$> 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-1}{x} \leq 0$$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x-1$	-	-	-	0	+
x	-	0	+	+	+
$\frac{3x-1}{x}$	+	n.d.	-	0	+

$$\text{C.S.} = \left] 0, \frac{1}{3} \right]$$

45.

a) Ao fim de um ano:

$$500 \times \left(1 + \frac{4}{100} \right)^1 = 520 \text{ euros}$$

Ao fim de dois anos:

$$500 \times \left(1 + \frac{4}{100} \right)^2 = 540,8 \text{ euros}$$

$$\text{b)} f(x) = 500 \times \left(1 + \frac{4}{100} \right)^x \Leftrightarrow f(x) = 500 \times 1,04^x$$

$$D_f = \mathbb{R}_0^+$$

$$\text{c)} 146 \text{ dias correspondem a } \frac{146}{365} = 0,4 \text{ anos.}$$

$$f(5,4) = 500 \times 1,04^{5,4} \approx 617,95 \text{ euros}$$

$$\text{d)} f(x) = 2000 \Leftrightarrow 500 \times 1,04^x = 2000$$

$$\Leftrightarrow 1,04^x = 4 \Leftrightarrow \log_{1,04}(4)$$

Logo, $x \approx 35,346$ anos.

$$0,346 \times 365 = 126,29$$

Demora 35 anos e 126 dias para acumular 2000 euros.

$$\text{e)} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{500 \times 1,04^{x+1}}{500 \times 1,04^x} = 1,04^{x+1-x} = 1,04$$

O capital acumulado cresce à taxa de 4% ao ano.

$$\text{f)} \frac{f(18)}{f(0)} = \frac{500 \times 1,04^{18}}{500} = 1,04^{18} \approx 2,03$$

$$f(18) = 2,03 \times f(0) \Leftrightarrow f(18) = f(0) + 1,03 f(0)$$

O capital cresceu 103%, aproximadamente.

$$\text{g)} f(x) = 500e^{bx} \Leftrightarrow 500 \times 1,04^x = 500 \times e^{bx}$$

$$\Leftrightarrow 1,04^x = (e^b)^x$$

$$\Leftrightarrow 1,04 = e^b$$

$$\Leftrightarrow b = \ln(1,04)$$

Logo, $b \approx 0,039$.

$$\text{Então, } f(x) = 500 \times e^{0,039x}.$$

46.

$$\text{a)} P(0) = 3000 \times e^{0,3 \times 0} = 3000 \times e^0 = 3000 \text{ moscas-da-fruta}$$

$$\text{b)} P(10) = 3000 \times e^{0,3 \times 10} = 3000 \times e^3 \approx 60\,257 \text{ moscas-da-fruta}$$

$$\text{c)} P(t) = 5000 \Leftrightarrow 3000 e^{0,3t} = 5000$$

$$\Leftrightarrow e^{0,3t} = \frac{5000}{3000}$$

$$\Leftrightarrow e^{0,3t} = \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow 0,3t = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{0,3} \Leftrightarrow t = \frac{10}{3} \times \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$t \approx 1,703$$

Cálculo auxiliar

$$d \text{ ————— } h$$

$$1 \text{ ————— } 24$$

$$0,703 \text{ ————— } x$$

$$x = 0,703 \times 24 = 16,872 \text{ h}$$

Ao fim de 1 dia e 17 horas, aproximadamente.

$$d) \frac{P(t+1)}{P(t)} = \frac{3000 e^{0,3(t+1)}}{3000 e^{0,3t}} = e^{0,3t+0,3-0,3t} = e^{0,3}$$

$$\frac{P(t+1)}{P(t)} \approx 1,35$$

$$P(t+1) \approx 1,35 \times P(t)$$

$$P(t+1) \approx (1 + 0,35) \times P(t)$$

$$P(t+1) \approx P(t) + 0,35 \times P(t)$$

A cada dia que passa a população de moscas-da-fruta aumenta a uma taxa de aproximadamente 35%.

47.

$$a) \frac{P(t+1)}{P(t)} = 1,1, \forall t \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\Leftrightarrow \frac{a \times b^{t+1}}{a \times b^t} = 1,1 \Leftrightarrow b = 1,1$$

$$P(t) = a \times 1,1^t, \forall t \in \mathbb{R}_0^+$$

$$P(2) = 0,605 \Leftrightarrow a \times 1,1^2 = 0,605$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{0,605}{1,1^2} \Leftrightarrow a = 0,5$$

$$\text{Logo, } P(t) = \frac{1}{2} \times 1,1^t, \forall t \in \mathbb{R}_0^+.$$

$$b) P(t) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 1,1^t = 3$$

$$\Leftrightarrow 1,1^t = 6$$

$$\Leftrightarrow t = \log_{1,1}(6)$$

$$\Leftrightarrow t \approx 19$$

O número de formigas é igual a 3000 ao fim de 19 dias, aproximadamente.

$$48. A(p) = -0,52 + 0,55 \ln(p), e^{2,3} \leq p \leq e^{4,1}$$

1,3 m corresponde a 130 cm.

$$a) 1,3 = -0,52 + 0,55 \ln(p) \Leftrightarrow 1,3 + 0,52 = 0,55 \ln(p)$$

$$\Leftrightarrow 1,82 = 0,55 \ln(p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1,82}{0,55} = \ln(p)$$

$$\Leftrightarrow p = e^{\frac{1,82}{0,55}}$$

$$\Leftrightarrow p \approx 27 \text{ kg}$$

$$b) A(2p) - A(p) = -0,52 + 0,55 \ln(2p) - (-0,52 + 0,55 \ln(p)) =$$

$$= -0,52 + 0,55 \ln(2p) + 0,52 - 0,55 \ln(p) =$$

$$= 0,55 [\ln(2p) - \ln(p)] =$$

$$= 0,55 [\ln(2p) + \ln\left(\frac{1}{p}\right) - \ln(p)] =$$

$$= 0,55 \times \ln(2) =$$

$$\approx 0,38$$

$$A(2p) - A(p) \approx 0,38$$

$$A(2p) \approx A(p) + 0,38$$

Quando o peso duplica a altura aumenta 38 cm, aproximadamente.

$$49. 10^{0,4(m-M)} = \frac{d^2}{100}$$

$$a) 10^{0,4(-1,44-1,45)} = \frac{d^2}{100} \Leftrightarrow 10^{0,4 \times (-2,89)} = \frac{d^2}{100}$$

$$\Leftrightarrow 10^2 \times 10^{-1,156} = d^2$$

$$\Leftrightarrow 10^{0,844} = d^2$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{10^{0,844}}, \text{ pois } d > 0$$

$$\Leftrightarrow d = 10^{0,422}$$

$$d \approx 3 \text{ parsec}$$

$$b) 10^{0,4(m-M)} = \frac{d^2}{100}$$

$$\Leftrightarrow 0,4(m-M) = \log\left(\frac{d^2}{100}\right) \wedge d > 0$$

$$\Leftrightarrow m-M = \frac{\left(\frac{d^2}{100}\right)}{0,4} \wedge d > 0$$

$$\Leftrightarrow m-M = \frac{10}{4} \times \log\left(\frac{d^2}{100}\right) \wedge d > 0$$

$$\Leftrightarrow m-M = \frac{5}{2} \times [\log(d^2) - \log(100)] \wedge d > 0$$

$$\Leftrightarrow m-M = \frac{5}{2} [2 \log(d) - 2] \wedge d > 0$$

$$\Leftrightarrow m-M = 5 \log(d) - 5 \wedge d > 0$$

$$\Leftrightarrow M = m - 5 \log(d) + 5 \wedge d > 0$$

$$\Leftrightarrow M = m + 5(1 - \log(d)) \wedge d > 0$$

50.

$$a) R(5,96 \times 10^{16}) = \frac{2}{3} \log\left(\frac{5,96 \times 10^{16}}{10^{4,4}}\right) \approx 8,25$$

A magnitude do terramoto de São Francisco de 1906 foi, aproximadamente, 8,3 na escala de Richter.

$$b) R(E) = 6,4 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \log\left(\frac{E}{10^{4,4}}\right) = 6,4$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{E}{10^{4,4}}\right) = 9,6$$

$$\Leftrightarrow \frac{E}{10^{4,4}} = 10^{9,6}$$

$$\Leftrightarrow E = 10^{4,4} \times 10^{9,6}$$

$$\Leftrightarrow E = 10^{14}$$

A energia libertada pelo terramoto da Índia de 1993 foi 10^{14} joules.

$$c) E = 4,2 \times 10^{17}, \text{ logo a sua magnitude foi}$$

$$R(4,2 \times 10^{17}) = \frac{2}{3} \log\left(\frac{4,2 \times 10^{17}}{10^{4,4}}\right) \approx 8,815 \text{ na esca-}$$

la de Richter; logo a sua intensidade será l :

$$R = \frac{\ln(l)}{\ln(10)} \Leftrightarrow 8,815 = \frac{\ln(l)}{\ln(10)}$$

$$\Leftrightarrow \ln(l) = 8,815 \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow l = e^{8,815 \ln(10)}$$

$$\Leftrightarrow l \approx 653\,130\,552,6$$

Assim, a intensidade do terramoto de Lisboa de 1755 foi 7×10^8 .

51.

$$a) I(t) = \frac{3e^{kt}}{1+pe^{kt}}$$

$$I(t) = 2,5 \Leftrightarrow \frac{3e^{0,5t}}{1+e^{0,5t}} = 2,5$$

$$\Leftrightarrow \frac{3e^{0,5t}}{1+e^{0,5t}} - 2,5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3e^{0,5t} - 2,5 - 2,5e^{0,5t}}{1+e^{0,5t}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,5e^{0,5t} - 2,5}{1+e^{0,5t}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0,5e^{0,5t} - 2,5 = 0 \wedge \underbrace{1+e^{0,5t} \neq 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow 0,5e^{0,5t} = 2,5$$

$$\Leftrightarrow e^{0,5t} = \frac{2,5}{0,5}$$

$$\Leftrightarrow 0,5t = \ln(5)$$

$$\Leftrightarrow t = 2 \times \ln(5)$$

$$\Leftrightarrow t = \ln(25)$$

Logo, $t \approx 3,219$.



Em 1963 havia 2500 pessoas infectadas.

$$b) I(t) = 1 \Leftrightarrow \frac{3e^k}{1+pe^k} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3e^k}{1+pe^k} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3e^k - 1 - pe^k}{1+pe^k} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-p)e^k - 1 = 0 \wedge \underbrace{1+pe^k \neq 0}_{\text{condição universal}}$$

$$\Leftrightarrow (3-p)e^k = 1$$

$$\Leftrightarrow e^k = \frac{1}{3-p}$$

$$\Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{1}{3-p}\right)$$

$$\Leftrightarrow k = \ln(3-p)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow k = -\ln(3-p)$$

52.

$$a) f(x) = -2 + \log(2-7x)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: 2-7x > 0\} = \left]-\infty, \frac{2}{7}\right[= D'_{f^{-1}}$$

Cálculo auxiliar

$$2-7x > 0 \Leftrightarrow -7x > -2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{7}$$

$$-2 + \log(2-7x) = y \Leftrightarrow \log(2-7x) = y+2$$

$$\Leftrightarrow 2-7x = 10^{y+2}$$

$$\Leftrightarrow -7x = 10^{y+2} - 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2-10^{y+2}}{7}$$

$$\text{Assim, } f^{-1}(x) = \frac{2-10^{x+2}}{7} \text{ e } D'_{f^{-1}} = \mathbb{R}.$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \left]-\infty, \frac{2}{7}\right[$$

$$x \mapsto \frac{2-10^{x+2}}{7}$$

$$b) f(x) \leq -1 \Leftrightarrow -2 + \log(2-7x) \leq -1$$

$$\Leftrightarrow \log(2-7x) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 2-7x \leq 10 \wedge x \in D_f$$

$$\Leftrightarrow -7x \leq 8 \wedge x \in \left]-\infty, \frac{2}{7}\right[$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{8}{7} \wedge x \in \left]-\infty, \frac{2}{7}\right[$$

$$\text{Assim, C.S.} = \left[-\frac{8}{7}, +\infty\right[\cap \left]-\infty, \frac{2}{7}\right[= \left[-\frac{8}{7}, \frac{2}{7}\right[.$$

$$\begin{aligned} c) 10^{f(x)} &= 10^{-2+\log(2-7x)} = \\ &= 10^{-2} \times 10^{\log(2-7x)} = \\ &= \frac{1}{100} \times (2-7x) = \\ &= \frac{2-7x}{100}, \forall x \in \left]-\infty, \frac{2}{7}\right[\end{aligned}$$

53.

$$a) f(x) = 3^{x+1}$$

$$D_f = D'_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3^{x+1} = y$$

$$\Leftrightarrow x+1 = \log_3(y)$$

$$\Leftrightarrow x = -1 + \log_3(y)$$

$$\text{Logo, } f^{-1}(x) = -1 + \log_3(x).$$

$$D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$$

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -1 + \log_3(x)$$

$$b) g(x) = 2 + \log(x+4)$$

$$D_g = D'_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: x+4 > 0\} = \left]-4, +\infty\right[$$

$$g(x) = y \Leftrightarrow 2 + \log(x+4) = y$$

$$\Leftrightarrow \log(x+4) = y-2$$

$$\Leftrightarrow x+4 = 10^{y-2}$$

$$\Leftrightarrow x = -4 + 10^{y-2}$$

$$\text{Logo, } g^{-1}(x) = -4 + 10^{x-2}.$$

$$D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \left]-4, +\infty\right[$$

$$x \mapsto -4 + 10^{x-2}$$

$$c) h(x) = 1 - 6 \times 4^{2x+3}$$

$$D_h = D'_{h^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$h(x) = y \Leftrightarrow 1 - 6 \times 4^{2x+3} = y$$

$$\Leftrightarrow 6 \times 4^{2x+3} = 1-y$$

$$\Leftrightarrow 4^{2x+3} = \frac{1-y}{6}$$

$$\Leftrightarrow 2x+3 = \log_4\left(\frac{1-y}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 + \log_4\left(\frac{1-y}{6}\right)}{2}$$

$$\text{Logo, } h^{-1}(x) = \frac{-3 + \log_4\left(\frac{1-x}{6}\right)}{2}.$$

$$D_{h^{-1}} = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1-x}{6} > 0\right\} =]-\infty, 1[$$

$$h^{-1}:]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{-3 + \log_4\left(\frac{1-x}{6}\right)}{2}$$

d) $j(x) = 6 + 3 \log_5(x-2)$
 $D_j = D'_{j^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: x-2 > 0\} =]2, +\infty[$
 $j(x) = y \Leftrightarrow 6 + 3 \log_5(x-2) = y$

$$\Leftrightarrow \log_5(x-2) = \frac{y-6}{3}$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 5^{\frac{y-6}{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + 5^{\frac{y-6}{3}}$$

$$\text{Logo, } j^{-1}(x) = 2 + 5^{\frac{x-6}{3}}.$$

$$D_{j^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$j^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow]2, +\infty[$$

$$x \mapsto 2 + 5^{\frac{x-6}{3}}$$

54.

a) $f(\ln(3)) = 1 - e^{1+2 \ln(3)} =$
 $= 1 - e \times e^{2 \ln(3)} =$
 $= 1 - e \times e^{\ln(3^2)} =$
 $= 1 - e \times 3^2 =$
 $= 1 - 9e$

b) $D_f = \mathbb{R} = D'_{f^{-1}}$
 $f(x) = 1 - e^{1+2x}$
 $1 - e^{1+2x} = y \Leftrightarrow -e^{1+2x} = y-1$
 $\Leftrightarrow e^{1+2x} = 1-y$
 $\Leftrightarrow 1+2x = \ln(1-y)$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\ln(1-y)-1}{2}$

$$\text{Assim, } f^{-1}(x) = \frac{\ln(1-x)-1}{2}.$$

$$D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: 1-x > 0\} =]-\infty, 1[$$

$$f^{-1}:]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\ln(1-x)-1}{2}$$

c) $D_h = \{x \in \mathbb{R}: g(x) \geq 0\}$
 $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 + \log_2(x-2) \geq 0$
 $\Leftrightarrow \log_2(x-2) \geq -2$
 $\Leftrightarrow x-2 \geq 2^{-2} \wedge x \in D_g$
 $\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4} + 2 \wedge x-2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{9}{4} \wedge x > 2$$

$$\text{C.S.} = \left[\frac{9}{4}, +\infty\right[, \text{logo } D_h = \left[\frac{9}{4}, +\infty\right[.$$

55. Em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a função f é contínua, por se tratar do quociente entre funções contínuas: uma que é o produto de uma função constante por uma função trigonométrica e a outra que é a diferença entre uma função exponencial e uma função constante, que não se anula em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Continuidade em $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{e^x - 1} = 3 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{e^x - 1}{x}} =$$

$$= 3 \times 1 = 3$$

$$\left(\text{nota que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\right)$$

$$f(0) = 3$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, f é contínua em $x = 0$.

Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$.

56.

a) $C(6) = 1,86 \Leftrightarrow 6 \times 1,05^{-A \times 6} = 1,86$

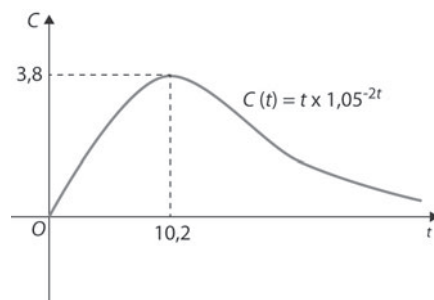
$$\Leftrightarrow 1,05^{-6 \times A} = \frac{1,86}{6}$$

$$\Leftrightarrow -6A = \log_{1,05}\left(\frac{1,86}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{\log_{1,05}\left(\frac{1,86}{6}\right)}{-6}$$

Logo, $A \approx 4$.

b) $C(t) = t \times 1,05^{-2t}$



10,2 horas = 10 horas + 0,2 hora

0,2 $\times$ 60 = 12 min

Recorrendo à calculadora gráfica, descobrimos que a concentração de *Stopdor* é máxima 10,2 horas após a administração do medicamento. Assim, o Tobias, tendo tomado o *Stopdor* às 8 horas, devia ter tomado o 2º medicamento às 18 h 12 min (8 h + 10 h + 12 min) e não às 15 horas como tomou. Conclui-se, assim, que não cumpriu com as recomendações do médico.

57.

a) $f(x) = e^{3x-1}$

Cálculo auxiliar

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow e^{3x-1} = 1 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$P\left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

$$f'(x) = (e^{3x-1})' = 3e^{3x-1}$$

Seja t a reta da equação $y = mx + b$, onde

$$m = f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3e^{3 \times \frac{1}{3} - 1} = 3.$$

 $P\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ pertence à reta t , logo:

$$1 = 3 \times \frac{1}{3} + b \Leftrightarrow b = 0$$

Assim, $y = 3x$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de ordenada 1.Seja n a reta de equação $y = mx + b$, onde

$$m = -\frac{1}{f'\left(\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{3}$$

 $P\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ pertence à reta n , logo:

$$1 = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + b \Leftrightarrow b = 1 + \frac{1}{9} \Leftrightarrow b = \frac{10}{9}$$

Assim, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{9}$ é a equação reduzida da normal à curva representativa da função f no ponto de ordenada 1.

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow \log(x^2 - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 1 \wedge x \in D_g$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge x \in D_g$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \vee x = -2) \wedge x \in D_g$$

$$g'(x) = (\log(x^2 - 3))' = \frac{(x^2 - 3)'}{(x^2 - 3) \times \ln(10)} = \frac{2x}{(x^2 - 3) \ln(10)}$$

• Em $x = 2$:Seja t a reta de equação $y = mx + b$, onde

$$m = g'(2) = \frac{4}{\ln(10)}$$

 $P(2, 0)$ pertence à reta t , logo:

$$0 = \frac{4}{\ln(10)} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -\frac{8}{\ln(10)}$$

Assim, $y = \frac{4}{\ln(10)}x - \frac{8}{\ln(10)}$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 2.Seja n a reta de equação $y = mx + b$, onde:

$$m = -\frac{1}{g'(2)} = -\frac{\ln(10)}{4}$$

 $P(2, 0)$ pertence à reta n , logo:

$$0 = -\frac{\ln(10)}{4} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{\ln(10)}{2}$$

Assim, $y = -\frac{\ln(10)}{4}x + \frac{\ln(10)}{2}$ é a equação reduzida da normal à curva representativa da função g no ponto de abscissa 2.• Em $x = -2$:Seja t a reta de equação $y = mx + b$, onde

$$m = g'(-2) = -\frac{4}{\ln(10)}$$

 $P(-2, 0)$ pertence à reta t , logo:

$$0 = -\frac{4}{\ln(10)} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = -\frac{8}{\ln(10)}$$

Assim, $y = -\frac{4}{\ln(10)}x - \frac{8}{\ln(10)}$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa -2.Seja n a reta de equação $y = mx + b$, onde:

$$m = -\frac{1}{g'(-2)} = \frac{\ln(10)}{4}$$

 $P(-2, 0)$ pertence à reta n , logo:

$$0 = \frac{\ln(10)}{4} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = \frac{\ln(10)}{2}$$

Assim, $y = \frac{\ln(10)}{4}x + \frac{\ln(10)}{2}$ é a equação reduzida da normal à curva representativa da função g no ponto de abscissa -2.

58. $6x - 2y = 7 \Leftrightarrow -2y = -6x + 7$

$$\Leftrightarrow y = 3x - \frac{7}{2}$$

$$f'(x) = 3 \Leftrightarrow (x - e^{-x})' = 3$$

$$\Leftrightarrow 1 + e^{-x} = 3$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = 2$$

$$\Leftrightarrow -x = \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln(2)$$

$$f(-\ln(2)) = -\ln(2) - e^{-(-\ln(2))} = -\ln(2) - 2$$

$$-\ln(2) - 2 = 3 \times (-\ln(2)) + b$$

$$\Leftrightarrow b = -\ln(2) - 2 + 3 \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow b = -2 + 2 \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow b = -2 + \ln(4)$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f e paralela à reta de equação $6x - 2y = 7$ é $y = 3x - 2 + \ln(4)$.

59. $f(0) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$

$$f'(x) = (ae^{2x} + be^x + c)' = 2ae^{2x} + be^x$$

$$f'\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow 2ae^{2\ln\left(\frac{3}{4}\right)} + be^{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2ae^{\ln(\frac{9}{16})} + b \times \frac{3}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2a \times \frac{9}{16} + \frac{3}{4}b = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{9}{8}a + \frac{3}{4}b = 0 \\ &\Leftrightarrow 9a + 6b = 0 \\ &\Leftrightarrow 3a + 2b = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (ae^{2x} + be^x + c) = 1 \\ &\Leftrightarrow a \times 0 + b \times 0 + c = 1 \\ &\Leftrightarrow c = 1 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b - 1 \\ -3b - 3 + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$$

60.

$$\begin{aligned} \text{a) } C'(t) &= \left(12te^{-\frac{t}{2}}\right)' = 12\left(t' \times e^{-\frac{t}{2}} + t \times \left(e^{-\frac{t}{2}}\right)'\right) = \\ &= 12\left(e^{-\frac{t}{2}} + t \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{t}{2}}\right) = \\ &= 12 \times e^{-\frac{t}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}t\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } C'(t) = 0 &\Leftrightarrow 12e^{-\frac{t}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}t\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{12e^{-\frac{t}{2}} = 0}_{\text{condição impossível}} \vee 1 - \frac{1}{2}t = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 2 \end{aligned}$$

x	0		2	$+\infty$
$12e^{-\frac{t}{2}}$	+	+	+	+
$1 - \frac{1}{2}t$	+	+	0	-
Sinal de C'	+	+	0	-
Varição de C	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Observa-se que a função é estritamente crescente em $[0, 2]$ e estritamente decrescente em $[2, +\infty[$, logo, são necessárias 2 horas, após a ingestão do álcool, para que o nível no sangue comece a decrescer.

61.

$$\begin{aligned} \text{a) } N'(t) &= \left(\frac{600}{1 + 3e^{-0,02t}}\right)' = \\ &= \frac{600' \times (1 + 3e^{-0,02t}) - 600 \times (1 + 3e^{-0,02t})'}{(1 + 3e^{-0,02t})^2} = \\ &= \frac{0 - 600 \times (0 + 3 \times (-0,02)e^{-0,02t})}{(1 + 3e^{-0,02t})^2} = \\ &= \frac{36e^{-0,02t}}{(1 + 3e^{-0,02t})^2} \end{aligned}$$

$N'(1) = \frac{36e^{-0,02}}{(1 + 3e^{-0,02})^2} \approx 2$, significa que, um ano após ter sido posta em prática essa política de proteção, o número de indivíduos da espécie em causa estava a crescer à taxa de dois indivíduos por ano.

$N'(20) = \frac{36e^{-0,02 \times 20}}{(1 + 3e^{-0,02 \times 20})^2} \approx 3$, significa que, 20 anos após ter sido posta em prática a política de proteção, o número de indivíduos da espécie em causa estava a crescer à taxa de três indivíduos por ano.

$$\begin{aligned} \text{b) } N'(t) = 0 &\Leftrightarrow \frac{36e^{-0,02t}}{(1 + 3e^{-0,02t})^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{3e^{-0,02t} = 0}_{\text{condição impossível}} \wedge t \in \mathbb{R}_0^+ \end{aligned}$$

$N'(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}_0^+$ logo, a função N é estritamente crescente, o que significa que a população desta espécie está sempre a aumentar.

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{600}{1 + 3e^{-0,02t}}\right) = \frac{600}{1 + 3e^{-\infty}} = \\ &= \frac{600}{1 + 0} = 600 \end{aligned}$$

Supondo que se mantém válido o modelo, o número de indivíduos esperado desta espécie, daqui a muitos, muitos anos, tende a ser 600 indivíduos.

62.

$$\begin{aligned} \text{a) } P'_1(t) &= \left(\frac{21}{1 + 25e^{-0,3t}}\right)' = \\ &= \frac{21' \times (1 + 25e^{-0,3t}) - 21 \times (1 + 25e^{-0,3t})'}{(1 + 25e^{-0,3t})^2} = \\ &= \frac{0 - 21 \times (0 + 25 \times (-0,3)e^{-0,3t})}{(1 + 25e^{-0,3t})^2} = \\ &= \frac{157,5e^{-0,3t}}{(1 + 25e^{-0,3t})^2} \end{aligned}$$

Assim:

$$P'_1(10) \approx 1,556$$

Quando $t = 10$, a planta 1 está a crescer à taxa de 1,556 centímetros por dia.

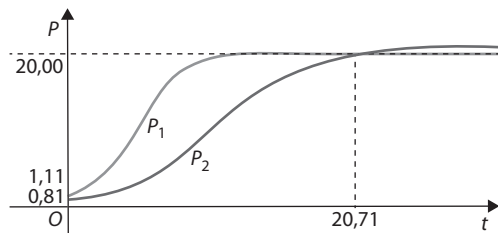
$$\begin{aligned} P'_2(t) &= \left(\frac{20}{1 + 17e^{-0,6t}}\right)' = \\ &= \frac{20' \times (1 + 17e^{-0,6t}) - 20 \times (1 + 17e^{-0,6t})'}{(1 + 17e^{-0,6t})^2} = \\ &= \frac{0 - 20 \times 17 \times (-0,6)e^{-0,6t}}{(1 + 17e^{-0,6t})^2} = \\ &= \frac{204e^{-0,6t}}{(1 + 17e^{-0,6t})^2} \end{aligned}$$

Assim:

$$P'_2(10) \approx 0,466$$

Quando $t = 10$, a planta 2 está a crescer à taxa de 0,466 centímetros por dia.

b)



Após, aproximadamente, 21 dias de terem sido plantadas, as duas plantas atingiram a mesma altura.

$$P'_1(21) = \frac{157,5e^{-0,3t}}{(1 + 25e^{-0,3t})^2} \approx 0,26439$$

$$P'_2(21) = \frac{204e^{-0,6t}}{(1 + 17e^{-0,6t})^2} \approx 0,00069$$

Como $P'_1(21) > P'_2(21)$, conclui-se que, no momento em que as duas plantas atingiram a mesma altura, era a planta 1 que estava a crescer mais rapidamente.

63.

a) Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{\ln(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x}{\ln(x)} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Como a função f é contínua em $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ o seu gráfico não admite mais assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$y = mx + b, m, b \in \mathbb{R} \quad (x \rightarrow +\infty)$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{3-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3-x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{3-x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \times \frac{1}{e^{-3}} \right) =$$

$$= e^3 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} =$$

$$= e^3 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} =$$

$$= e^3 \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}} =$$

$$= e^3 \times \frac{1}{+\infty} = e^3 \times 0 = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

b) f é contínua em $]1, +\infty[$ pois, neste intervalo, é definida pelo produto de duas funções contínuas: uma que é uma função afim e a outra que é a composta de uma função exponencial com uma função afim; em particular, f é contínua em $[4, 5]$.

$$f(4) = 4 \times e^{3-4} = \frac{4}{e} \approx 1,472$$

$$f(5) = 5 \times e^{3-5} = \frac{5}{e^2} \approx 0,677$$

$$-f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{\frac{3}{e}}{\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = -\frac{\frac{3}{e}}{-1} = \frac{3}{e} \approx 1,104$$

$$f(5) < -f\left(\frac{1}{e}\right) < f(4)$$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists c \in]4, 5[: f(c) = -f\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]4, 5[: f(c) + f\left(\frac{1}{e}\right) = 0$$

c) Em $]0, 1[$, $f(x) = \frac{3x}{\ln(x)}$

$$f'(x) = \frac{(3x)' \ln(x) - 3x (\ln(x))'}{(\ln(x))^2} =$$

$$= \frac{3 \times \ln(x) - 3x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} =$$

$$= \frac{3(\ln(x) - 1)}{(\ln(x))^2}$$

Como $(\ln(x))^2 > 0, \forall x \in]0, 1[$ e $3 > 0, \forall x \in]0, 1[$ o sinal de f' depende apenas do sinal de $(\ln(x) - 1)$. $\ln(x) - 1 < 0, \forall x \in]0, 1[$, isto é, $f'(x) < 0, \forall x \in]0, 1[$ logo, f é estritamente decrescente em $]0, 1[$.

d) Em $[1, +\infty[$, $f(x) = xe^{3-x}$

$$f'(x) = x'e^{3-x} + x(e^{3-x})' =$$

$$= e^{3-x} + x \times (-1) \times e^{3-x} =$$

$$= e^{3-x} (1 - x)$$

$$f''(x) = (e^{3-x})' \times (1 - x) + (e^{3-x}) \times (1 - x)' =$$

$$= -e^{3-x} \times (1 - x) + (e^{3-x}) \times (-1) =$$

$$= -e^{3-x} (1 - x + 1) =$$

$$= -e^{3-x} \times (2 - x)$$

$$f''(x) = 0 \wedge x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -e^{3-x} (2 - x) = 0 \wedge x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(-e^{3-x} = 0 \vee 2 - x = 0)}_{\text{condição impossível}} \wedge x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \wedge x \geq 1$$

x	1		2	$+\infty$
$-e^{3-x}$	-	-	-	-
$2-x$	+	+	0	-
Sinal de f''	-	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f		$\cap$	P.I.	$\cup$

$$f(2) = 2e^{3-2} = 2e$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]1, 2[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]2, +\infty[$; $(2, 2e)$ é ponto de inflexão.

- e) Seja $y = mx + b$ a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa 3.

$$m = f'(3) = e^{3-3} (1-3) = -2 \times e^0 = -2$$

$$y = -2x + b$$

O ponto $(3, f(3)) = (3, 3)$ pertence à reta, logo:

$$3 = -2 \times 3 + b \Leftrightarrow 3 = -6 + b \Leftrightarrow 9 = b$$

Assim, $y = -2x + 9$ é uma equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa 3.

64.

$$a) A_{[MNOP]} = \frac{\overline{MO} + \overline{PN}}{2} \times \overline{ON}$$

$$g'(x) = -e^{1-x}$$

$g'(a) = -e^{1-a}$ é o declive da reta r .

$$y = -e^{1-a}x + b$$

Como $(a, g(a)) = (a, e^{1-a})$ pertence à reta r , vem que:

$$e^{1-a} = -e^{1-a} \times a + b \Leftrightarrow e^{1-a} + e^{1-a} \times a = b$$

$$\Leftrightarrow e^{1-a} (1+a) = b$$

Assim, $r: y = -e^{1-a}x + e^{1-a}(1+a)$.

Logo, $M(0, e^{1-a}(1+a))$.

Sabemos, então que:

$$\overline{MO} = e^{1-a}(1+a)$$

$$\overline{PN} = e^{1-a}$$

$$\overline{ON} = a$$

$$\text{Logo: } A(a) = \frac{e^{1-a}(1+a) + e^{1-a}}{2} \times a$$

$$\Leftrightarrow A(a) = \frac{e^{1-a}(1+a+1)}{2} \times a$$

$$\Leftrightarrow A(a) = \frac{e^{1-a}(a+2)a}{2}$$

$$\Leftrightarrow A(a) = \frac{e^{1-a}(a^2+2a)}{2}$$

$$\begin{aligned} b) A'(a) &= \frac{1}{2} \times [(e^{1-a})' (a^2+2a) + e^{1-a} (a^2+2a)'] = \\ &= \frac{1}{2} \times [-e^{1-a} (a^2+2a) + e^{1-a} (2a+2)] = \\ &= \frac{1}{2} e^{1-a} (-a^2-2a+2a+2) = \\ &= \frac{1}{2} e^{1-a} (-a^2+2) \end{aligned}$$

$\frac{1}{2} e^{1-a} > 0, \forall a \in \mathbb{R}^+$, logo, o sinal de A' depende apenas do sinal de $-a^2+2$.

$$\begin{aligned} A'(a) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} e^{1-a} (-a^2+2) = 0 \wedge a \in \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow -a^2+2 = 0 \wedge a \in \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow a^2 = 2 \wedge a \in \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow (a = \pm\sqrt{2}) \wedge a \in \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow a = \sqrt{2} \end{aligned}$$

x	0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
Sinal de A'	n.d.	+	0	-
Variação de A	n.d.	$\nearrow$	Máx. $\sqrt{2}$	$\searrow$

$$A(\sqrt{2}) = \frac{e^{1-\sqrt{2}}(2+2\sqrt{2})}{2} = e^{1-\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})$$

A é estritamente crescente em $]0, \sqrt{2}[$ e é estritamente decrescente em $[\sqrt{2}, +\infty[$.

$A(\sqrt{2}) = e^{1-\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})$ é o valor máximo que a área do trapézio $[MNOP]$ pode assumir.

65.

$$a) f(x) = \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) - \ln(x^2+1) = \ln(2) \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \ln(2) + \ln(x^2+1) \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \ln(2x^2+2) \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow x = 2x^2+2 \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow -2x^2+x-2 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \times (-2) \times (-2)}}{2 \times (-2)} \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{-4} \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

condição impossível

$$C.S. = \emptyset$$

$$b) f'(x) = (\ln(x))' - [\ln(x^2+1)]' =$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x^2}{x^3+x} = \frac{-x^2+1}{x^3+x}$$

$$D_{f'} = \mathbb{R}^+$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+1 = 0 \wedge x^3+x \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow -x^2 = -1 \wedge x(x^2+1) \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge x \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 1) \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

x	0		1	$+\infty$
$-x^2-1$	n.d.	+	0	-
$x(x^2+1)$	n.d.	+	+	+
Sinal de f'	n.d.	+	0	-
Variação de f	n.d.	$\nearrow$	Máx. $f(1)$	$\searrow$

$f(1) = \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2)$
 f é estritamente crescente em $]0, 1]$;
 f é estritamente decrescente em $[1, +\infty[$;
 $f(1) = -\ln(2)$ é máximo relativo (absoluto) de f .

66.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^x - 3}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(e^x - 1)}{2x} = \\ &= \frac{3}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\text{limite notável}} = \\ &= \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4+x} - e^4}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^4(e^x - 1)}{3x} = \\ &= \frac{e^4}{3} \times \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\text{limite notável}} = \\ &= \frac{e^4}{3} \times 1 = \frac{e^4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^3} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{x^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = 1 \times \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \\ &= 1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Não existe, pois $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Assim, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$.

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} = \frac{e^4 - 1}{e^2 - 1} = \frac{(e^2 - 1)(e^2 + 1)}{e^2 - 1} = e^2 + 1$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln(x^2)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

Mudança de variável:

$$\ln(x^2) = y \Leftrightarrow x^2 = e^y$$

Se $x \rightarrow 1$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x+1)}{3x} =$$

Mudança de variável:

$$y = \ln(x+1) \Leftrightarrow e^y = x+1 \Leftrightarrow x = e^y - 1$$

Se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln(x+1)}{x} =$$

Mudança de variável:

$$y = \ln(x+1) \Leftrightarrow e^y = x+1 \Leftrightarrow x = e^y - 1$$

Se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

$$= 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = 3 \times \frac{1}{1} = 3$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\ln(x+3)}{x+2} =$$

Mudança de variável:

$$y = \ln(x+3) \Leftrightarrow e^y = x+3 \Leftrightarrow x = e^y - 3$$

Se $x \rightarrow -2$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \times \frac{x}{\ln(x)} \right) =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = \\ &= (+\infty) \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\text{limite notável}}} = \\ &= +\infty \times \frac{1}{0^+} = +\infty \times (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^4} = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{l) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x^3} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = \\ &= 0 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{m) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{e^x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}} =$$

Mudança de variável:

$$y = 3x$$

Se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \frac{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \times 3}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}} = \frac{1 \times 3}{1} = 3$$

67.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{xe^x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x} = \\ &= 1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{-1} \times \ln(x+1)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} =\end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = \ln(x+1) \Leftrightarrow e^y = x+1 \Leftrightarrow x = e^y - 1$$

Se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e, portanto, f não é contínua em $x = 0$.

$$\begin{aligned}\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{e^{2x} - 1} \right) = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{2x} - 1} = \\ &= 1 \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x}} = \\ &= \frac{1}{\lim_{2x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x}} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log(x)} = \frac{1}{\log(0^+)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ e, portanto, a função g não é contínua em $x = 0$.

$$\begin{aligned}\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{x-2} - 1}{-4x^3 - 9x^2 + 6x + 64} = \\ &= \frac{e^0 - 1}{8} = \frac{0}{8} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) &\neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x^2 - 4)}{x - 3} = \frac{\ln(0^+)}{-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty\end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ e, portanto, a função h não é contínua em $x = 2$.

68.

$$\text{a) } D_f = \mathbb{R}$$

Assíntotas verticais:

O gráfico de f não tem assíntotas verticais visto tratar-se de uma função contínua em $\mathbb{R}$ (quociente entre funções contínuas).

Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2+e^x}{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+e^x}{xe^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{xe^x} + \frac{1}{x} \right) = \frac{2}{+\infty} + \frac{1}{+\infty} = 0 + 0 = 0 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2+e^x}{e^x} \right) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^x} + \frac{e^x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = \\ &= \frac{2}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1\end{aligned}$$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+e^x}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{xe^x} + \frac{1}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{xe^x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{xe^x} + 0 = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x} =\end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$-x = y \Leftrightarrow x = -y$$

Se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}&= 2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{-y} = -2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = \\ &\quad \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{limite notável}} \\ &= -2 \times (+\infty) = -\infty\end{aligned}$$

Como $m \notin \mathbb{R}$, o gráfico de f não tem assíntotas não verticais quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\text{b) } D_g = \mathbb{R}^+$$

Assíntotas verticais:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x) + e^{1-x}) = \ln(0^+) + e^1 = \\ &= -\infty + e = -\infty\end{aligned}$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de g . Não existem mais assíntotas verticais já que a função é contínua no seu domínio.

Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + e^{1-x}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1-x}}{x} = 0 + \frac{e^{-\infty}}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0 \\ &\quad \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}}_{\text{limite notável}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) + e^{1-x}) = \\ &= +\infty + e^{-\infty} = +\infty + 0 = +\infty\end{aligned}$$

Como $b \notin \mathbb{R}$, conclui-se que não há assíntotas não verticais ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$. Dado o domínio de g ser $\mathbb{R}^+$, não faz sentido averiguar a existência de assíntota não vertical do gráfico quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\text{c) } D_h = \mathbb{R}$$

Assíntotas verticais:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^+} \left(e^{\frac{x-1}{x+3}} - 1 \right) = e^{\frac{-4}{0^+}} - 1 = \\ &= e^{-\infty} - 1 = 0 - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^-} \left(e^{\frac{x-1}{x+3}} - 1 \right) = e^{\frac{-4}{0^-}} - 1 = \\ &= e^{+\infty} - 1 = +\infty - 1 = +\infty\end{aligned}$$

A reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico de h .

Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico de h visto a função h ser contínua no seu domínio.

Assíntotas horizontais:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{x-1}{x+3}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x-1}{x+3} \left(\frac{\infty}{\infty} \right)} - 1 = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)} - 1 = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x}} - 1 = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1} - 1 = e^1 - 1 = e - 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{x-1}{x+3}} - 1 \right) = e^{\frac{x-1}{x+3} \left(\frac{\infty}{\infty} \right)} - 1 = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)} - 1 = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x}} - 1 = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1} - 1 = e^1 - 1 = e - 1\end{aligned}$$

A reta de equação $y = e - 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.

69.

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: e^x - 1 > 0\} = \mathbb{R}^+$

Cálculo auxiliar

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \wedge x \in D_f \\ &\Leftrightarrow e^x = 2 \wedge x \in D_f \\ &\Leftrightarrow x = \ln(2)\end{aligned}$$

Zero de f : $\ln(2)$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge x \neq 0\} = \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned}g(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = 0 \wedge x \in D_g \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = 0 \wedge x \in D_g \\ &\Leftrightarrow x = 1\end{aligned}$$

Zero de g : 1

$$D_h = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{x+1}{x} > 0\right\} =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+	+
x	-	-	-	0	+
$\frac{x+1}{x}$	+	0	-	n.d.	+

$$\begin{aligned}h(x) = 0 &\Leftrightarrow -\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0 \wedge x \in D_h \\ &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = 1 \wedge x \in D_h\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x} - 1 = 0 \wedge x \in D_h$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{x}} = 0 \wedge x \in D_h$$

condição impossível

A função h não tem zeros.

b) Assíntotas verticais:

A função f é contínua em $\mathbb{R}^+$, logo o único candidato a assíntota vertical ao seu gráfico é a reta de equação $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^x - 1) = \ln(0^+) = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x} = \\ &= 1 + \frac{\ln(1)}{+\infty} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x - 1) - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right) - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) = \\ &= \ln(1) = 0\end{aligned}$$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

Dado o domínio de f ser $\mathbb{R}^+$, não faz sentido averiguar a existência de assíntota não vertical ao seu gráfico quando $x \rightarrow -\infty$.

Assíntotas verticais:

A função g é contínua em $\mathbb{R}^+$, logo o único candidato a assíntota vertical ao seu gráfico é a reta de equação $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(0^+)}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \\ &= 0 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$.

Dado o domínio de g ser $\mathbb{R}^+$, não faz sentido averiguar a existência de assíntota não vertical ao seu gráfico quando $x \rightarrow -\infty$.

Assíntotas verticais:

A função h é contínua em $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, logo os únicos candidatos a assíntotas verticais ao seu gráfico são as retas de equação $x = -1$ e $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-\ln \left(\frac{x+1}{x} \right) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) = \\ &= -\ln(0^+) = +\infty \end{aligned}$$

A reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\ln \left(\frac{x+1}{x} \right) \right) = -\ln \left(\frac{1}{0^+} \right) = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\ln \left(\frac{x+1}{x} \right)}{x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x} = -\frac{\ln(1)}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\ln \left(\frac{x+1}{x} \right) \right) = \\ &= -\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = -\ln(1) = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln \left(\frac{x+1}{x} \right)}{x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x} = -\frac{\ln(1)}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\ln \left(\frac{x+1}{x} \right) \right) = \\ &= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = -\ln(1) = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x \rightarrow +\infty$.

$$c) f'(x) = (\ln(e^x - 1))' = \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$f'(x) > 0, \forall x \in D_f$$

A função f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$ e não tem extremos.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)' = \frac{(\ln(x))' x - \ln(x) \times (x)'}{x^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = 1 \wedge x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = e \end{aligned}$$

x	0		e	$+\infty$
Sinal de g'	n.d.	+	0	-
Variação de g	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

$$g(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$$

A função g é estritamente crescente em $]0, e]$ e é estritamente decrescente em $[e, +\infty[$, tem máximo absoluto $\frac{1}{e}$ para $x = e$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(-\ln \left(\frac{x+1}{x} \right) \right)' = \\ &= -\left(\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x+1}{x}} \right)' = \\ &= -\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \\ &= -\frac{x - x - 1}{x^2} = \\ &= -\frac{x}{x^2(x+1)} = \\ &= \frac{1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

$$h'(x) > 0, \forall x \in D_h$$

A função h é estritamente crescente em $]-\infty, -1[$ e em $]0, +\infty[$ e não tem extremos.

$$\begin{aligned} \text{d)} f''(x) &= \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right)' = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \times e^x}{(e^x - 1)^2} = \\ &= \frac{e^x(e^x - 1 - e^x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$f''(x) < 0, \forall x \in D_f$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$, não tem pontos de inflexão.

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\frac{1 - \ln(x)}{x^2} \right)' = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - (1 - \ln(x)) \times 2x}{x^4} = \\ &= \frac{-x - 2x(1 - \ln(x))}{x^4} = \frac{-3 + 2 \ln(x)}{x^3} \end{aligned}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -3 + 2 \ln(x) = 0 \wedge x^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3}{2} \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$$

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
Sinal de g''	n.d.	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de g	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$

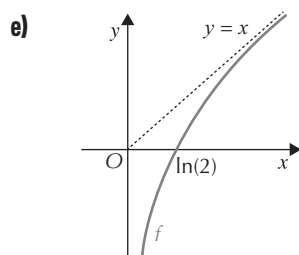
$$g\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]0, e^{\frac{3}{2}}[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$, tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$.

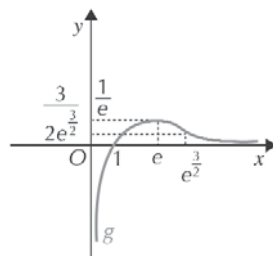
$$h''(x) = \left(\frac{1}{x^2 + x} \right)' = \frac{-(2x + 1)}{(x^2 + x)^2}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
Sinal de h''	+	n.d.	n.d.	-
Sentido das concavidades do gráfico de h	$\cup$	n.d.	n.d.	$\cap$

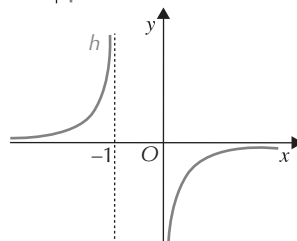
O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -1[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]0, +\infty[$, não tem pontos de inflexão.



$$D'_f = \mathbb{R}$$



$$D'_g = \left] -\infty, \frac{1}{e} \right]$$



$$D'_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

70.

a) Dado que $M'(t) = kM(t)$, então m é definida por um modelo do tipo $M(t) = M_0 \times b^{-k(t-t_0)}$.

Atendendo a que $M_0 = 12$ e $t_0 = 0$, tem-se

$$M(t) = 12 \times b^{-kt}$$

$$M(0,5) = 4 \Leftrightarrow 12 \times b^{-0,5k} = 4$$

$$\Leftrightarrow b^{-0,5k} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow -0,5k = \log_b\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}k = \log_b(3)$$

$$\Leftrightarrow k = 2 \log_b(3)$$

Se, por exemplo, $b = 3$, então $k = 2$ e tem-se:

$$M(t) = 12 \times 3^{-2t} \Leftrightarrow M(t) = 4 \times 3 \times 3^{-2t}$$

$$\Leftrightarrow M(t) = 4 \times 3^{-2t+1}$$

$$\text{b)} v_{[0,1]} = \frac{M(1) - M(0)}{1 - 0} = \frac{4 \times 3^{-1} - 12}{1} = \frac{4}{3} - 12 = -\frac{32}{3}$$

$$\begin{aligned} v_{[1,2]} &= \frac{M(2) - M(1)}{2 - 1} = \frac{4 \times 3^{-3} - 4 \times 3^{-1}}{2} = \\ &= \frac{4}{27} - \frac{4}{3} = -\frac{32}{27} \end{aligned}$$

Na primeira hora a massa da substância diminui a uma taxa de $\frac{32}{3}$ mg por hora, enquanto que na segunda hora a massa da substância diminui a uma taxa de $-\frac{32}{27}$ mg por hora. Logo, a taxa de desintegração média é menor na segunda hora.

$$\begin{aligned} \text{c)} M'(t) &= (4 \times 3^{-2t+1})' = \\ &= 4 \times (-2t + 1)' \times 3^{-2t+1} \times \ln(3) = \\ &= -8 \ln(3) \times 3^{-2t+1} \end{aligned}$$

$$M'(1,5) = -8 \ln(3) \times 3^{-2} \approx -0,977 \text{ mg/h}$$

$$M'(3) = -8 \ln(3) \times 3^{-5} \approx -0,036 \text{ mg/h}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } M''(t) &= (-8 \ln(3) \times 3^{-2t+1})' = \\ &= -8 \ln(3) \times (-2t+1)' \times 3^{-2t+1} \ln(3) = \\ &= 16 (\ln(3))^2 \times 3^{-2t+1} \end{aligned}$$

$$M''(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}_0^+$$

Logo, M' é crescente em $\mathbb{R}_0^+$.

A massa da substância diminui cada vez mais lentamente.

$$71. C_0 = 2000$$

$$C_1 = 2000 \times 1,025 + 1000$$

$$\begin{aligned} C_2 &= (2000 \times 1,025 + 1000) \times 1,025 + 1000 = \\ &= 2000 \times 1,025^2 + 1000 \times 1,025 + 1000 = \\ &= 2000 \times 1,025^2 + 1000 (1 + 1,025) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= [2000 \times 1,025^2 + 1000 (1 + 1,025)] \times \\ &\quad \times 1,025 + 1000 = \\ &= 2000 \times 1,025^3 + 1000 \times 1,025 + 1000 \times \\ &\quad \times 1,025^2 + 1000 = \\ &= 2000 \times 1,025^3 + 1000 \times (1 + 1,025 + 1,025^2) \end{aligned}$$

progressão geométrica de razão 1,025

E assim sucessivamente, obtendo-se:

$$\begin{aligned} C_{40} &= 2000 \times 1,025^{40} + 1000 \times 1 \times \\ &\quad \times \frac{1 - 1,025^{40}}{1 - 1,025} - 1000 \approx 71\,772,68 \text{ euros} \end{aligned}$$

72.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{C(x+1)}{C(x)} &= \frac{150\,000 \left(\frac{27}{25}\right)^{x+1}}{150\,000 \left(\frac{27}{25}\right)^x} = \\ &= \left(\frac{27}{25}\right)^{x+1-x} = \frac{27}{25} = 1,08 \end{aligned}$$

A valorização do andar é de 8% por ano.

$$\begin{aligned} \text{b) } C(x) &= 2C(0) \Leftrightarrow 150\,000 \left(\frac{27}{25}\right)^x = 300\,000 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{27}{25}\right)^x = 2 \\ &\Leftrightarrow x = \log_2 \left(\frac{27}{25}\right) \end{aligned}$$

Logo, $x \approx 9$ anos.

73.

$$\text{a) } C(x) = ae^{bx}$$

$$C(0) = 45\,000 \Leftrightarrow a \times e^0 = 45\,000 \Leftrightarrow a = 45\,000$$

$$C(1) = 45\,000 \times (1 - 0,2) \Leftrightarrow e^b = 0,8 \Leftrightarrow b = \ln(0,8)$$

Logo, $b \approx -0,223$.

Assim, $C(x) = 45\,000 \times e^{-0,223x}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } C(x) &= \frac{45\,000}{5} \Leftrightarrow e^{-0,223x} = \frac{1}{5} \\ &\Leftrightarrow -0,223x = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{-0,223}$$

Logo, $x \approx 7,217$.

Cálculo auxiliar

$$0,217 \times 365 = 79,025$$

Passados, aproximadamente, 7 anos e 79 dias o carro vale a quinta parte do seu valor inicial.

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{C\left(x + \frac{1}{12}\right)}{C(x)} &= \frac{45\,000 e^{-0,223\left(x + \frac{1}{12}\right)}}{45\,000 e^{-0,223x}} = \\ &= e^{-0,223x - 0,223 \times \frac{1}{12} + 0,223x} = \\ &= e^{-0,223x \times \frac{1}{12}} \approx 0,982 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$1 - 0,982 = 0,018$$

O carro desvaloriza cerca de 1,8% por mês.

74. Observe-se que se trata de uma progressão geométrica de razão 1,01 e a soma de n termos é dada

$$\text{por } S_n = \frac{1 - 1,01^n}{1 - 1,01} \times 1 = \frac{1 - 1,01^n}{-0,01}$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_n > 1\,000\,000 &\Leftrightarrow \frac{1 - 1,01^n}{-0,01} > 1\,000\,000 \\ &\Leftrightarrow 1 - 1,01^n < -10\,000 \\ &\Leftrightarrow -1,01^n < -10\,001 \\ &\Leftrightarrow 1,01^n > 10\,001 \\ &\Leftrightarrow n > \log_{1,01}(10\,001) \end{aligned}$$

Como $\log_{1,01}(10\,001) \approx 925,6$ e $n \in \mathbb{N}$, é necessário somar 926 termos desta progressão.

75.

$$\begin{aligned} \text{a) } 10 \times 3^{3x+2} - 30 \times 3^{x+1} &= 0 \\ &\Leftrightarrow 10 \times 3^{3x+2} = 30 \times 3^{x+1} \\ &\Leftrightarrow 3^{3x+2} = 3^{x+2} \\ &\Leftrightarrow 3x+2 = x+2 \\ &\Leftrightarrow 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \\ \text{C.S.} &= \{0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } e^x - 4 &= -3e^{-x} \Leftrightarrow e^x + 3e^{-x} - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x + \frac{3}{e^x} - 4 = 0 \end{aligned}$$

Consideremos a mudança de variável $e^x = y$. Então:

$$\begin{aligned} y + \frac{3}{y} - 4 &= 0 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 4y + 3}{y} = 0 \\ &\Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \wedge y \neq 0 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3}}{2} \wedge y \neq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4 \pm 2}{2} \wedge y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (y = 3 \vee y = 1) \wedge y \neq 0$$

Substituindo y por e^x , vem que:

$$e^x = 3 \vee e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(3) \vee x = 0$$

$$\text{C.S.} = \{\ln(3), 0\}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{9}{2 + e^{-x-1}} = 3 &\Leftrightarrow \frac{9}{2 + e^{-x-1}} - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{9 - 6 - 3e^{-x-1}}{2 + e^{-x-1}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3 - 3e^{-x-1}}{2 + e^{-x-1}} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 - 3e^{-x-1} = 0 \wedge \underbrace{2 + e^{-x-1} \neq 0}_{\text{condição universal em IR}} \\ &\Leftrightarrow 3e^{-x-1} = 3 \\ &\Leftrightarrow e^{-x-1} = 3 \\ &\Leftrightarrow -x - 1 = \ln(3) \\ &\Leftrightarrow -x = 0 + 1 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{-1\}$$

$$\text{d) } e^{2x} + 2e^x = 8 \Leftrightarrow (e^x)^2 + 2e^x - 8 = 0$$

Considerando a mudança de variável $e^x = y$, tem-se que:

$$\begin{aligned} y^2 + 2y - 8 = 0 &\Leftrightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-8)}}{2} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-2 \pm 6}{2} \\ &\Leftrightarrow y = 2 \vee y = -4 \end{aligned}$$

Substituindo y por e^x :

$$e^x = 2 \vee \underbrace{e^x = -4}_{\text{condição impossível em IR}}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(2)$$

$$\text{C.S.} = \{\ln(2)\}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } e^{3x} - 6e^{2x} = -5e^x &\Leftrightarrow e^x(e^{2x} - 6e^x + 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{condição impossível em IR}} \vee (e^x)^2 - 6e^x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 - 6e^x + 5 = 0 \end{aligned}$$

Considerando a mudança de variável $e^x = y$, tem-se que:

$$\begin{aligned} y^2 - 6y + 5 = 0 &\Leftrightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 5}}{2} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{6 \pm 4}{2} \\ &\Leftrightarrow y = 5 \vee y = 1 \end{aligned}$$

Substituindo y por e^x , vem que:

$$e^x = 5 \vee e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(5) \vee x = 0$$

$$\text{C.S.} = \{\ln(5), 0\}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } -16^{x+1} + 20 \times 4^{2x+1} &= 4 \\ &\Leftrightarrow -4^{2x+2} + 20 \times 4^{2x+1} = 4 \\ &\Leftrightarrow 4^{2x}(-4^2 + 20 \times 4) = 4 \\ &\Leftrightarrow 4^{2x} \times 64 = 4 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4^{2x} = \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow 4^{2x} = 4^{-2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{C.S.} = \{-1\}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \frac{8^x(x^2 - 3x) + 16}{8^x - 8} &= -2 \\ &\Leftrightarrow \frac{8^x(x^2 - 3x) + 16}{8^x - 8} + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{8^x(x^2 - 3x) + 16 + 2 \times 8^x - 16}{8^x - 8} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{8^x(x^2 - 3x + 2)}{8^x - 8} = 0 \\ &\Leftrightarrow 8^x(x^2 - 3x + 2) = 0 \wedge 8^x - 8 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(8^x = 0 \vee x^2 - 3x + 2 = 0)}_{\text{condição impossível}} \wedge 8^x \neq 8 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \wedge x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow (x = 2 \vee x = 1) \wedge x \neq 1 \\ &\text{C.S.} = \{2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } 4^x + 6^x &= 2 \times 9^x \\ &\Leftrightarrow 6^x \left(\left(\frac{4}{6} \right)^x + 1 - 2 \times \left(\frac{9}{6} \right)^x \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{6^x = 0}_{\text{condição impossível}} \vee \left(\frac{2}{3} \right)^x + 1 - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^x = 0 \\ &\Leftrightarrow y + 1 - \frac{2}{y} = 0 \wedge y = \left(\frac{2}{3} \right)^x \\ &\Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \wedge y = \left(\frac{2}{3} \right)^x \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} \wedge y = \left(\frac{2}{3} \right)^x \\ &\Leftrightarrow (y = -2 \vee y = 1) \wedge y = \left(\frac{2}{3} \right)^x \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{2}{3} \right)^x = -2 \vee \left(\frac{2}{3} \right)^x = 1}_{\text{condição impossível}} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \\ &\text{C.S.} = \{0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} &= 2 \Leftrightarrow \frac{3^x + \frac{1}{3^x}}{3^x - \frac{1}{3^x}} = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{3^{2x} + 1}{3^{2x} - 1} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3^{2x} + 1 - 2 \times 3^{2x} + 2}{3^{2x} - 1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3^{2x} + 3}{3^{2x} - 1} = 0 \\ &\Leftrightarrow -3^{2x} + 3 = 0 \wedge 3^{2x} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3^{2x} = 3 \wedge 3^{2x} \neq 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2x = 1 \wedge 2x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \wedge x \neq 0$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

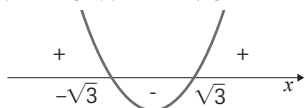
76.

a) $3^x \leq 27^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 3^x \leq 3^{\frac{3}{x}}$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{3}{x} \Leftrightarrow x - \frac{3}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3}{x} \leq 0$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{3}$$



x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2 - 3$	+	0	-	-	-	0	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{x^2 - 3}{x}$	-	0	+	n.d.	-	0	+

$$\text{C.S.} =]-\infty, -\sqrt{3}] \cup]0, \sqrt{3}]$$

b) $10^{x^2 + 2x} \leq 10^8 \Leftrightarrow x^2 + 2x \leq 8$

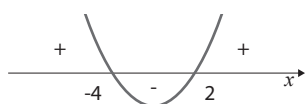
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-8)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 2$$



$$\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2$$

$$\text{C.S.} = [-4, 2]$$

c) $x^3 e^x \leq 27 e^x \Leftrightarrow x^3 e^x - 27 e^x \leq 0$

$$\Leftrightarrow e^x (x^3 - 27) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 27 \leq 0, \text{ pois } e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet x^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow x = 3$$

	1	0	0	-27
3		3	9	27
	1	3	9	0 = r

$$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$\bullet x^2 + 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 9}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2}$$

condição impossível

$$\Leftrightarrow x \leq 3$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x^2 - 3$	-	0	+
$x^2 + 3x + 9$	+	+	+
$(x + 3)(x^2 + 3x + 9)$	-	0	+

$$\text{C.S.} =]-\infty, 3]$$

d) $e^{4x-3} \leq 3e^{x-1}$

$$\Leftrightarrow e^{4x-3} - 3e^{x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x (e^{3x-3} - 3e^{-1}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{3x-3} - 3e^{-1} \leq 0, \text{ pois } e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow e^{3x-3} \leq 3e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow e^{3x-3} \leq e^{\ln(3e^{-1})}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3 \leq \ln(3e^{-1})$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3 \leq \ln(3) + \ln(e^{-1})$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3 \leq \ln(3) - 1$$

$$\Leftrightarrow 3x \leq \ln(3) + 2$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{\ln(3)}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{\ln(3) + 2}{3} \right]$$

e) $-2^{2x+1} + 4 \leq -31 \times 2^{x-1}$

$$\Leftrightarrow -2 \times 2^{2x} + 4 + \frac{31}{2} \times 2^x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2y^2 + \frac{31}{2}y + 4 \leq 0 \wedge y = 2^x$$

$$\Leftrightarrow -4y^2 + 31y + 8 \leq 0 \wedge y = 2^x$$

$$\Leftrightarrow \left(y \leq -\frac{1}{4} \vee y \geq 8 \right) \wedge y = 2^x$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2^x \leq -\frac{1}{4}}_{\text{condição impossível}} \vee 2^x \geq 8$$

$$\Leftrightarrow 2^x \geq 2^3$$

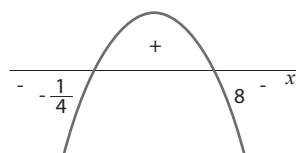
$$\Leftrightarrow x \geq 3$$

Cálculo auxiliar

$$-4y^2 + 31y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-31 \pm \sqrt{31^2 + 16 \times 8}}{-8}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{31 \pm 33}{8}$$

$$\Leftrightarrow y = 8 \vee y = -\frac{1}{4}$$



$$\text{C.S.} = [3, +\infty[$$

77.

$$\begin{aligned} \text{a) } D &= \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 7x + 12 > 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}: x < 3 \vee x > 4\} =]-\infty, 3[\cup]4, +\infty[\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 3$$



$$x \log_6 (x^2 - 7x + 12) = x$$

$$\Leftrightarrow x \log_6 (x^2 - 7x + 12) - x = 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x [\log_6 (x^2 - 7x + 12) - 1] = 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow [x = 0 \vee \log_6 (x^2 - 7x + 12) - 1 = 0] \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow [x = 0 \vee \log_6 (x^2 - 7x + 12) = 1] \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow [x = 0 \vee \log_6 (x^2 - 7x + 12) = \log_6 (6)] \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x^2 - 7x + 12 = 6) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 6}}{2} \right) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = \frac{7 \pm 5}{2} \right) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 6 \vee x = 1) \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \{0, 1, 6\}$$

$$\text{b) } D = \{x \in \mathbb{R}: |x + 1| - 3 > 0\} =]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$|x + 1| - 3 > 0 \Leftrightarrow |x + 1| > 3$$

$$\Leftrightarrow x + 1 > 3 \vee x + 1 < -3$$

$$\Leftrightarrow x > 2 \vee x < -4$$

$$\log_2 (|x + 1| - 3) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (|x + 1| - 3) = \log_2 (2) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow |x + 1| - 3 = 2 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow |x + 1| = 5 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x + 1 = 5 \vee x + 1 = -5) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x = 4 \vee x = -6) \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \{4, -6\}$$

$$\text{c) } D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$$

$$\log_3^2 (x) - 5 \log_9 (x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 (x) - \frac{5}{2} \log_3 (x) + 1 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

Cálculo auxiliar

$$\log_9 (x) = \frac{\log_3 (x)}{\log_3 (9)} = \frac{\log_3 (x)}{2}$$

Consideremos a mudança de variável $\log_3 (x) = y$.

Então:

$$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = \frac{1}{2}$$

Substituindo y por $\log_3 (x)$, tem-se que:

$$\log_3 (x) = 2 \vee \log_3 (x) = \frac{1}{2} \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow (x = 9 \vee x = \sqrt{3}) \wedge x \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{C.S.} = \{9, \sqrt{3}\}$$

$$\text{d) } D = \{x \in \mathbb{R}: x^7 > 0 \wedge x^{\log (x^7)} > 0 \wedge x^5 > 0\} = \mathbb{R}^+$$

$$\frac{1}{7} \log (x^{\log (x^7)}) - \log (x^5) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log (x^{\log (x^7)})^{\frac{1}{7}} - 5 \log (x) + 4 = 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log \left(x^{\frac{1}{7} \log (x^7)} \right) - 5 \log (x) + 4 = 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log (x^{\log (x)}) - 5 \log (x) + 4 = 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log (x) \times \log (x) - 5 \log (x) + 4 = 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (\log (x))^2 - 5 \log (x) + 4 = 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log (x) = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log (x) = \frac{5 \pm 3}{2} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (\log (x) = 1 \vee \log (x) = 4) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x = 10 \vee x = 10\,000) \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} = \{10, 10\,000\}$$

78.

$$\text{a) } D = \{x \in \mathbb{R}: \underbrace{x^2 + 3 > 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}} \wedge x + 1 > 0\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R} \wedge x > -1\} =]-1, +\infty[$$

$$\log_2 (x^2 + 3) < 2 + \log_2 (x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 3) < \log_2 (4) + \log_2 (x + 1) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 3) < \log_2 (4x + 4) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 < 4x + 4 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 < 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{5} < x < 2 + \sqrt{5} \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} =]2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}[$$

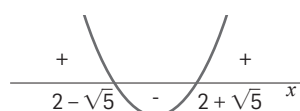
Cálculo auxiliar

$$x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$$



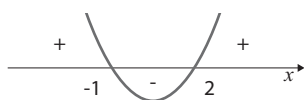
$$\text{b) } D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - x - 2 > 0 \wedge x - 2 > 0\} = \\ = \{x \in \mathbb{R}: (x < -1 \vee x > 2) \wedge x > 2\} =]2, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$



$$\log_3(x^2 - x - 2) - \log_3(x - 2) > 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - x - 2) > 1 + \log_3(x - 2) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - x - 2) > \log_3(3) + \log_3(x - 2) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - x - 2) > \log_3(3x - 6) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 3x - 6 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 > 0 \wedge x \in D$$

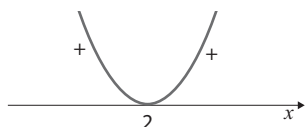
$$\text{C.S.} =]2, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$



$$x^2 - 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 2 \vee x > 2$$

$$\text{c) } D = \{x \in \mathbb{R}: 3x > 0 \wedge x + 6 > 0\} = \mathbb{R}^+$$

$$x^3 \ln(3x) + x^3 \log_{\frac{1}{e}}(x + 6) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^3}_{> 0, \forall x \in D} (\ln(3x) + \log_{\frac{1}{e}}(x + 6)) \leq 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \ln(3x) + \frac{\ln(x + 6)}{\ln\left(\frac{1}{e}\right)} \leq 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \ln(3x) - \ln(x + 6) \leq 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{3x}{x + 6}\right) \leq 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{x + 6} \leq 1 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{x + 6} - 1 \leq 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x - 6}{x + 6} \leq 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6 \leq 0 \wedge x \in D \quad (x + 6 > 0, \forall x \in D)$$

$$\Leftrightarrow x \leq 3 \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} =]0, 3]$$

$$\text{d) } D = \left\{x \in \mathbb{R}: 2x > 0 \wedge \frac{1-x}{x} > 0\right\} =]0, 1[$$

Cálculo auxiliar

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$1 - x$	+	+	+	0	-
x	-	0	+	+	+
$\frac{1-x}{x}$	-	n.d.	+	0	-

$$-\log_3(2x) < 2 + \log_3\left(\frac{1-x}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\log_3(2x) - \log_3\left(\frac{1-x}{x}\right) < 2 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3x) + \log_3\left(\frac{1-x}{x}\right) > -2 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{3-3x}{x}\right) > -2 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-3x}{x} > 3^{-2} \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-3x}{x} - \frac{1}{9} > 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{27-28x}{9x} > 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 27 - 28x > 0 \wedge x \in D \quad (9x > 0, \forall x \in D)$$

$$\Leftrightarrow 28x < 27 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{27}{28} \wedge x \in D$$

$$\text{C.S.} =]0, 1[$$

$$\text{e) } D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 > 0\} =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$



$$x \log_3(x^2 - 4) > x \Leftrightarrow x(\log_3(x^2 - 4) - 1) > 0 \wedge x \in D$$

Cálculo auxiliar

$$\log_3(x^2 - 4) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_3(x^2 - 4) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{7} \vee x = -\sqrt{7}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{7}$		-2	2		$\sqrt{7}$	$+\infty$
x	-	-	-	-	+	+	+	+
$\log_3(x^2 - 4) - 1$	+	0	-	n.d.	n.d.	-	0	+
$x(\log_3(x^2 - 4) - 1)$	-	0	+	n.d.	n.d.	-	0	+

$$\text{C.S.} =]-\sqrt{7}, -2[\cup]\sqrt{7}, +\infty[$$

$$f) D = \{x \in \mathbb{R}: x - 1 > 0 \wedge 3x - 4 > 0\} = \left] \frac{4}{3}, +\infty \right[$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet \log_2 (x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\bullet \log_2 (3x - 4) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

x	$\frac{4}{3}$		$\frac{5}{3}$		2	$+\infty$
$-\log_2 (x - 1)$	+	+	+	+	0	-
$\log_2 (3x - 4)$	n.d.	-	0	+	+	+
$-\log_2 (x - 1) \times \log_2 (3x - 4)$	n.d.	-	0	+	0	-

$$\text{C.S.} = \left] \frac{5}{3}, 2 \right[$$

79.

$$a) \log_b (a) = \frac{\log_a (a)}{\log_a (b)} = \frac{1}{\log_a (b)}$$

$$b) \log_n \left[\log_n \left(\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}} \right) \right] = \log_n \left[\log_n \left[\left(n^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^{\frac{1}{n}} \right] =$$

$$= \log_n \left(\log_n \left(n^{\frac{1}{n^3}} \right) \right) =$$

$$= \log_n \left(\frac{1}{n^3} \right) = \log_n (n^{-3}) = -3$$

$$c) a^{\ln(b)} = (b^{\log_b(a)})^{\ln(b)}, \text{ pois } a = b^{\log_b(a)}$$

$$= b^{\ln(b) \times \log_b(a)} =$$

$$= b^{\ln(b) \times \frac{\ln(a)}{\ln(b)}}, \text{ pois } \log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$$

$$= b^{\ln(a)}$$

80.

$$a) f(x) = \log_2 (x^2 - 3x + 2)$$

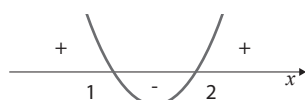
$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 3x + 2 > 0\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}: x < 1 \vee x > 2\} =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$$



$$g(x) = \frac{1}{1 - \log_7 (x)}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \vee 1 - \log_7 (x) \neq 0\} =]0, +\infty[\setminus \{7\}$$

Cálculo auxiliar

$$1 - \log_7 (x) = 0 \Leftrightarrow \log_7 (x) = 1 \Leftrightarrow x = 7$$

$$h(x) = \frac{\log_{\sqrt{3}} (x + 1)}{1 - 2^x}$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 > 0 \vee 1 - 2^x \neq 0\} =]-1, +\infty[\setminus \{0\}$$

Cálculo auxiliar

$$1 - 2^x = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$b) f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 1 \wedge x \in D_f$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \wedge x \in D_f$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \wedge x \in D_f$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$f \text{ tem dois zeros: } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ e } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$g(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \log_7 (x)} = 0$$

Condição impossível, logo g não tem zeros.

$$h(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{\sqrt{3}} (x + 1)}{1 - 2^x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} (x + 1) = 0 \wedge x \in D_h$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 1 \wedge x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \wedge x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$$

$0 \notin D_h$, logo h não tem zeros.

$$c) f(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 - 3x + 2) < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 1 \wedge x \in D_f$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 < 0 \wedge x \in D_f$$

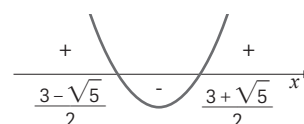
$$\Leftrightarrow x \in \left] \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right[$$

$$\wedge x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$



Assim, f é negativa em $\left] \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 1 \right[$ e em $\left] 2, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right[$.

$$d) D'_g = D_{g^{-1}}$$

$$\frac{1}{1 - \log_7 (x)} = y \Leftrightarrow \frac{1}{y} = 1 - \log_7 (x)$$

$$\Leftrightarrow \log_7 (x) = 1 - \frac{1}{y}$$

$$\Leftrightarrow x = 7^{1 - \frac{1}{y}}$$

Assim:

$$g^{-1}(x) = 7^{1-\frac{1}{x}} \text{ e } D_{g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ logo } D'_{g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

e) $f(0) + g(49) + h(2) =$

$$= \log_2(0 - 0 + 2) + \frac{1}{1 - \log_7(49)} + \frac{\log_{\sqrt{3}}(2+1)}{1-2^2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1-2} + \frac{2}{1-4} =$$

$$= 1 + (-1) + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

81. $k \in \mathbb{R}^+$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (-4)^2 - 4 \times 1 \times \log_2(k) > 0$$

$$\Leftrightarrow 16 - 4 \log_2(k) > 0$$

$$\Leftrightarrow -4 \log_2(k) > -16$$

$$\Leftrightarrow \log_2(k) < 4$$

$$\Leftrightarrow k < 2^4$$

$$\Leftrightarrow k < 16$$

Logo, $k \in]0, 16[$.

82. $\log_2(\sqrt{a+4} + \sqrt{a-4}) = b$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+4} + \sqrt{a-4} = 2^b$$

$$\Leftrightarrow (a+4) - (a-4) = 2^b (\sqrt{a+4} - \sqrt{a-4})$$

$$\Leftrightarrow a+4-a+4 = 2^b (\sqrt{a+4} - \sqrt{a-4})$$

$$\Leftrightarrow 8 = 2^b (\sqrt{a+4} - \sqrt{a-4})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+4} - \sqrt{a-4} = \frac{8}{2^b}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+4} - \sqrt{a-4} = 2^{3-b}$$

Assim:

$$\log_2(\sqrt{a+4} - \sqrt{a-4}) = \log_2(2^{3-b}) = 3 - b$$

83.

a) $P(0) = 1200 \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^0 = 1200$

$$P(7) = 1200 \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^7$$

$$P(7) - P(0) = 1200 \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^7 - 1200 \approx 3760$$

O aumento foi de 3760 unidades, aproximadamente.

b) $P(t) = 1200 \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^t = 1200 \times 1,5^{\frac{t}{2}} =$
 $= 1200 \times (e^{\ln(1,5)})^{\frac{t}{2}} = 1200 \times e^{\frac{\ln(1,5)}{2} \times t}$

$$k = \frac{\ln(1,5)}{2} \Leftrightarrow k \approx 0,203$$

$$P(t) = 1200 e^{0,203t}$$

c) $1200 e^{0,203t} = 3600 \Leftrightarrow e^{0,203t} = \frac{3600}{1200}$

$$\Leftrightarrow e^{0,203t} = 3$$

$$\Leftrightarrow 0,203t = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(3)}{0,203}$$

$$t \approx 5,412 \text{ dias}$$

$$5,412 \text{ dias} = 5 \text{ dias} + 0,412 \text{ dia}$$

$$0,412 \times 24 \approx 10 \text{ horas}$$



Às 10 h, aproximadamente, do dia 6 de julho.

84.

a) $t = 0$

$$\frac{350}{1 + 6e^{k \times 0}} = \frac{350}{1 + 6} = \frac{350}{7} = 50$$

50 chimpanzés.

b) $k = -0,2$

$$\frac{350}{1 + 6e^{-0,2t}} = 70$$

$$\Leftrightarrow \frac{350}{1 + 6e^{-0,2t}} - 70 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{350 - 70 - 420e^{-0,2t}}{1 + 6e^{-0,2t}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{280 - 420e^{-0,2t}}{1 + 6e^{-0,2t}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 280 - 420e^{-0,2t} = 0 \wedge \underbrace{1 + 6e^{-0,2t} \neq 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow 280 = 420e^{-0,2t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{280}{420} = e^{-0,2t}$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,2t} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow -0,2t = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

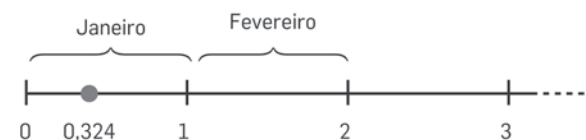
$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{-0,2}$$

$$\Leftrightarrow t = -5 \times \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow t \approx 2,027 \text{ anos}$$

$$2,027 \text{ anos} = 2 \text{ anos} + 0,027 \text{ ano}$$

$$0,027 \times 12 = 0,324$$

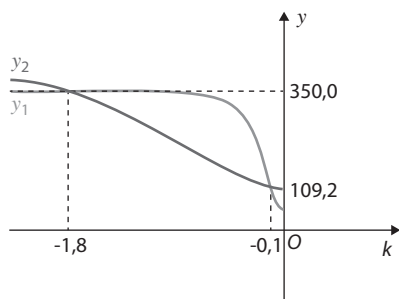


Em janeiro de 2004.

c) $\frac{350}{1 + 6e^{10k}} = 50 + \frac{350}{1 + 6e^{2k}}$

$$y_1 = \frac{350}{1 + 6e^{10k}}$$

$$y_2 = 50 + \frac{350}{1 + 6e^{2k}}$$

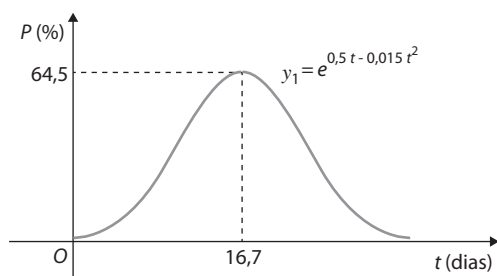


$$k = -1,8 \vee k = -0,1$$

85.

a) $P(0) = e^{0,5 \times 0 - 0,015 \times 0} = 1\%$

b)

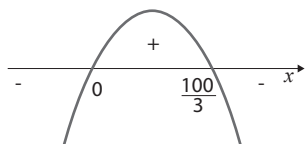


O pior momento da epidemia ocorreu aos 16,7 dias (aproximadamente) e a percentagem de doentes era de 64,5% (aproximadamente).

c) $P(t) < 1 \Leftrightarrow e^{0,5t - 0,015t^2} < 1 \wedge t > 0$
 $\Leftrightarrow e^{0,5t - 0,015t^2} < e^0 \wedge t \geq 0$
 $\Leftrightarrow 0,5t - 0,015t^2 < 0 \wedge t \geq 0$
 $\Leftrightarrow -0,015t^2 + 0,5t < 0 \wedge t \geq 0$
 $\Leftrightarrow \left(t < 0 \vee t > \frac{100}{3} \right) \wedge t \geq 0$
 $\Leftrightarrow t > \frac{100}{3}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} -0,015t^2 + 0,5t &= 0 \Leftrightarrow t(-0,015t + 0,5) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee -0,015t = -0,5 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{0,5}{0,015} \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{100}{3} \end{aligned}$$



$$\frac{100}{3} \text{ dias} = 33 \text{ dias} + \frac{1}{3} \text{ dia}$$

$$\frac{1}{3} \times 24 = 8 \text{ horas}$$

A epidemia encontra-se erradicada 33 dias e 8 horas após o início do estudo da epidemia.

d) $P(10) = e^{0,5 \times 10 - 0,015 \times 100} = e^{5 - 1,5} = e^{3,5} \approx 33\%$

86. A concentração máxima de antibiótico ocorre passadas 2 horas de ter sido administrado, logo, nesse momento, a taxa de variação é nula, isto é, $C'(2) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Como } C'(t) &= (Ate^{-kt})' = \\ &= A(t' \times e^{-kt} + t \times (e^{-kt})') = \\ &= A(e^{-kt} + t \times (-k) \times e^{-kt}) = \\ &= Ae^{-kt} (1 - kt) \end{aligned}$$

vem que;

$$\begin{aligned} C'(2) = 0 &\Leftrightarrow Ae^{-2k} (1 - 2k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{Ae^{-2k}}_{\text{condição impossível}} = 0 \vee 1 - 2k = 0 \\ &\Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como também se sabe que a concentração máxima é 10 microgramas por mililitro de sangue, para $t = 2$, vem que:

$$\begin{aligned} C(2) = 10 &\Leftrightarrow A \times 2 \times e^{-\frac{1}{2} \times 2} = 10 \\ &\Leftrightarrow A = \frac{10}{2e^{-1}} \\ &\Leftrightarrow A = 5e \end{aligned}$$

87.

a) $R'(t) = \left(\frac{\ln(t+1)}{t+1} \right)' =$
 $= \frac{(\ln(t+1))' \times (t+1) - \ln(t+1) \times (t+1)'}{(t+1)^2} =$
 $= \frac{\frac{1}{t+1} \times (t+1) - \ln(t+1)}{(t+1)^2} =$
 $= \frac{1 - \ln(t+1)}{(t+1)^2}$

$$\begin{aligned} R'(t) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1 - \ln(t+1)}{(t+1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \ln(t+1) = 0 \wedge t \in [0, 5] \\ &\Leftrightarrow \ln(t+1) = 1 \wedge t \in [0, 5] \\ &\Leftrightarrow t+1 = e \wedge t \in [0, 5] \\ &\Leftrightarrow t = e - 1 \wedge t \in [0, 5] \end{aligned}$$

t	0		e - 1		5
1 - ln(t + 1)	+	+	0	-	-
(t + 1) ²	+	+	+	+	+
Sinal de R'	+	+	0	-	-
Variação de R	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.

$$e - 1 \approx 1,7$$

É aproximadamente aos 2 anos de idade que a criança atinge a sua maior capacidade de aprendizagem.

$$\begin{aligned} R''(t) &= \left(\frac{1 - \ln(t+1)}{(t+1)^2} \right)' = \\ &= \frac{(1 - \ln(t+1))' \times (t+1)^2 - (1 - \ln(t+1)) \times ((t+1)^2)'}{((t+1)^2)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\frac{1}{t+1} \times (t+1)^2 - (1 - \ln(t+1)) \times 2(t+1)}{(t+1)^4} = \\
&= \frac{-(t+1) - 2(t+1)(1 - \ln(t+1))}{(t+1)^4} = \\
&= \frac{-1 - 2 + 2 \ln(t+1)}{(t+1)^3} = \\
&= \frac{-3 + 2 \ln(t+1)}{(t+1)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R''(t) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-3 + 2 \ln(t+1)}{(t+1)^3} = 0 \\
&\Leftrightarrow -3 + 2 \ln(t+1) = 0 \wedge t \in [0, 5] \\
&\Leftrightarrow \ln(t+1) = \frac{3}{2} \wedge t \in [0, 5] \\
&\Leftrightarrow t+1 = e^{\frac{3}{2}} \wedge t \in [0, 5] \\
&\Leftrightarrow t = e^{\frac{3}{2}} - 1 \wedge t \in [0, 5]
\end{aligned}$$

t	0		$e^{\frac{3}{2}} - 1$		5
$-3 + 2 \ln(t+1)$	-	-	0	+	+
$(t+1)^3$	+	+	+	+	+
Sinal de R''	-	-	0	+	+
Variação de R'	Máx. 1	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx. -0,02

Cálculos auxiliares

$$R'(0) = 1$$

$$R'(5) \approx -0,02$$

Como o máximo de R' é atingido em $t = 0$, isto significa que, para este modelo, o momento em que a capacidade de aprendizagem está a aumentar mais rapidamente é logo após o momento do nascimento.

88.

$$\begin{aligned}
\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln(x)) &\stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x \left(1 - \frac{\ln(x)}{e^x} \right) \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{e^x} \right) = \\
&= +\infty \times \left(1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{e^x} \times \frac{x}{e^x} \right) \right) = \\
&= +\infty \times \left(1 - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}}_{\text{limite notável}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}} \right)}_{\text{limite notável}} \right) = \\
&= +\infty \times (1 - 0 \times 0) = +\infty \times 1 = +\infty
\end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \times \ln(x)) \stackrel{(0 \times \infty)}{=}$$

Mudança de variável:

$$\ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y$$

Se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow -\infty$.

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} (e^y \times y) \stackrel{(0 \times \infty)}{=}$$

Mudança de variável:

$$-y = z \Leftrightarrow y = -z$$

Se $y \rightarrow -\infty$, então $z \rightarrow +\infty$.

$$= \lim_{z \rightarrow +\infty} (e^{-z} \times (-z)) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{-z}{e^z} = - \frac{1}{\underbrace{\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{e^z}{z}}_{\text{limite notável}}} = - \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \ln(3)} \frac{-e^{2x} + 9}{x - \ln(3)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-e^{2(\ln(3) + y)} + 9}{y} =$$

Mudança de variável:

$$x - \ln(3) = y \Leftrightarrow x = \ln(3) + y$$

Se $x \rightarrow \ln(3)$, então $y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-e^{2 \ln(3) + 2y} + 9}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-e^{\ln(3^2) + 2y} + 9}{y} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-e^{\ln(9)} \times e^{2y} + 9}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-9e^{2y} + 9}{y} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-9(e^{2y} - 1)}{y} = -9 \times \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2y} - 1}{2y} \times 2 \right) = \\
&= -18 \times \underbrace{\lim_{2y \rightarrow 0} \frac{e^{2y} - 1}{2y}}_{\text{limite notável}} = -18 \times 1 = -18
\end{aligned}$$

d) Seja $f(x) = xe^x$.

$$\text{Então, } f'(x) = x'e^x + x \times (e^x)' = e^x + xe^x = e^x(x+1).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xe^x - 2e^2}{x - 2} = f'(2) = e^2(2+1) = 3e^2$$

e) Seja $f(x) = xe^x$.

$$\text{Então, } f'(x) = x'e^x + x \times (e^x)' = e^x + xe^x = e^x(x+1).$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{xe^x - 3e^3}{x - 3} = f'(3) = e^3(3+1) = 4e^3$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x^2 + 2x + 4) - \ln(x + 4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln\left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x + 4}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln\left(\frac{x^2 + x}{x + 4} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln\left(\frac{x^2 + x}{x + 4} + 1\right)}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln\left(\frac{x^2 + x}{x + 4} + 1\right)}{\frac{x^2 + x}{x + 4}} \times \frac{x + 1}{x + 4}} =$$

$$= \frac{1}{\ln\left(\frac{x^2+x}{x+4} + 1\right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2+x}{x+4}}{\ln\left(\frac{x^2+x}{x+4} + 1\right)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x+4}$$

Mudança de variável:

$$y = \frac{x^2+x}{x+4}$$

Se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(y+1)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4}{x+1} =$$

Mudança de variável:

$$z = \ln(y+1) \Leftrightarrow y+1 = e^z \Leftrightarrow y = e^z - 1$$

Se $y \rightarrow 0$, então $z \rightarrow 0$.

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4}{x+1} = 1 \times 4 = 4$$

89.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + \operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x \times x}\right) =$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\cos x} =$$

$$= 1 + 1 \times \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x+1)e^{-x}] = (0+1)e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \text{ ou seja, não existe } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

f não é contínua em $x = 0$.

b) Em $\mathbb{R}^+$, $f(x) = (x+1)e^{-x}$

$$\text{Assim, } f'(x) = (x+1)'e^{-x} + (x+1)(e^{-x})' =$$

$$= e^{-x} + (x+1) \times (-1) \times (e^{-x}) =$$

$$= e^{-x} (\cancel{x} - x - \cancel{1}) =$$

$$= -xe^{-x}$$

Como $e^{-x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $-x < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, então $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, logo f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$.

c) Seja $y = mx + b$ a equação reduzida da reta pretendida.

$$m = f'(-\pi)$$

$$\text{Em } \mathbb{R}^-, f'(x) = \frac{(x + \operatorname{tg} x)' \times x - (x + \operatorname{tg} x) \times x'}{x^2} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \times x - x - \operatorname{tg} x}{x^2} =$$

$$= \frac{\cancel{x} + \frac{x}{\cos^2 x} - \cancel{x} - \operatorname{tg} x}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{x \times \cos^2(x)} - \frac{\operatorname{tg} x}{x^2}$$

$$f'(-\pi) = \frac{1}{-\pi \times (-1)^2} - \frac{0}{(-\pi)^2} = -\frac{1}{\pi}$$

$$\text{Assim, } y = -\frac{1}{\pi}x + b.$$

• Cálculo de b :

$$f(-\pi) = \frac{-\pi + \operatorname{tg}(-\pi)}{-\pi} = 1$$

Como $(-\pi, 1)$ pertence à reta tangente, vem que:

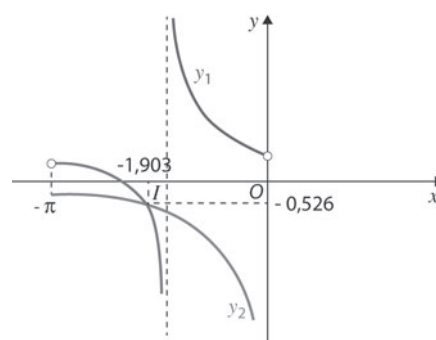
$$1 = -\frac{1}{\pi} \times (-\pi) + b \Leftrightarrow 1 = 1 + b \Leftrightarrow b = 0$$

Assim, $y = -\frac{1}{\pi}x$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $-\pi$.

$$\text{d) Em }]-\pi, 0[, f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x + \operatorname{tg} x}{x} = \frac{1}{x}$$

$$y_1 = \frac{x + \operatorname{tg} x}{x}$$

$$y_2 = \frac{1}{x}$$



As coordenadas do ponto I , com aproximação às milésimas, são $(-1,903; -0,526)$.

90.

a) $D_f = \mathbb{R}$

Assíntotas verticais:

Não há assíntotas verticais ao gráfico de f , visto a função f ser contínua de domínio $\mathbb{R}$ (produto de funções contínuas).

Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Como $m \notin \mathbb{R}$, não existem assíntotas não verticais ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \times e^x)^{(\infty \times 0)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} =$$

Mudança de variável:

$$-x = y \Leftrightarrow x = -y$$

Se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y}{e^y} = -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$.

b) $D_g = \mathbb{R}$

Assíntotas verticais:

Não há assíntotas verticais ao gráfico de g , visto a função g ser contínua em $\mathbb{R}$ (soma de funções contínuas: $x \mapsto \frac{e^x}{2}$ e $x \mapsto \frac{e^{-x}}{2}$).

• **Assíntotas não verticais:**

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{2x} = \\ = \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} + \frac{0}{+\infty} = \frac{1}{2} \times (+\infty) + 0 = +\infty$$

limite notável

Como $m \notin \mathbb{R}$, não existem assíntotas não verticais ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{2x} =$$

Mudança de variável:

$$-x = y \Leftrightarrow x = -y$$

Se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$= \frac{e^{-\infty}}{-\infty} + \frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{-y} = \\ = \frac{0}{-\infty} - \frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = 0 - \frac{1}{2} \times (+\infty) = -\infty$$

limite notável

Como $m \notin \mathbb{R}$, também não existem assíntotas não verticais ao gráfico de g quando $x \rightarrow -\infty$.

91.

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1 + x}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{2x} - 1}{x} + \frac{x}{x} \right) = \\ = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2 \right) + \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 =$

Mudança de variável:

$$2x = y$$

Se $x \rightarrow 0^-$, então $y \rightarrow 0^-$.

$$= 2 \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y} + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

limite notável

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x - 2 \ln(x)) = 0 - 2 \ln(0) = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico da função f .

Não existem mais assíntotas verticais, visto a função ser contínua no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• **Assíntotas não verticais:**

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2 \ln(x)}{x} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{x} - \frac{2 \ln(x)}{x} \right) = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 3 - 2 \times 0 = 3$$

limite notável

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 2 \ln(x) - 3x) = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 \ln(x)) = -\infty$$

Como $b \notin \mathbb{R}$, não existem assíntotas não verticais ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1 + x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{2x} - 1}{x^2} + \frac{x}{x^2} \right) = \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{2x} - 1}{x^2} \right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{0 - 1}{+\infty} + 0 = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{2x} - 1 + x}{x} \right) \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = \\ = \frac{e^{-\infty} - 1}{-\infty} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = \\ = \frac{-1}{-\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

b) Seja g a função definida por $g(x) = f(x) + x$.

• A função g é contínua em $[-2, -1]$, visto ser a soma de funções contínuas: f no intervalo $[-2, -1]$ encontra-se definida pelo quociente entre funções contínuas $\left(x \mapsto \frac{e^{2x} - 1 + x}{x} \right)$ e $x \mapsto x$ é a função identidade e, portanto, também contínua.

$$\bullet g(-2) = f(-2) + (-2) = \frac{e^{-4} - 1 - 2}{-2} - 2 \approx -0,509$$

$$g(-1) = f(-1) + (-1) = \frac{e^{-2} - 1 - 1}{-1} - 1 \approx 0,865$$

Isto é, $g(-2) \times g(-1) < 0$.

Pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy conclui-se que:

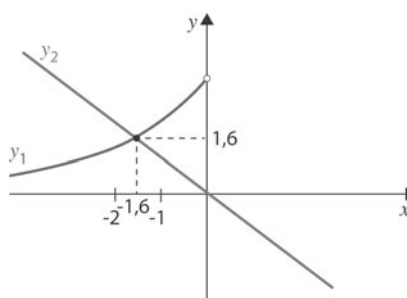
$$\exists c \in]-2, -1[: g(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]-2, -1[: f(c) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]-2, -1[: f(c) = -c$$

c) $y_1 = \frac{e^{2x} - 1 + x}{x}$ se $x < 0$

$$y_2 = -x$$



Assim, $x \approx -1,6$.

92.

$$a) D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{2+x} > 0 \right\} =]-2, 1[$$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$1-x$	+	+	+	0	-
$2+x$	-	0	+	+	+
$\frac{1-x}{2+x}$	-	n.d.	+	0	-

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

b) Função f :**Assíntotas verticais:**

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \log \left(\frac{1-x}{2+x} \right) = \log \left(\frac{3}{0^+} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \log \left(\frac{1-x}{2+x} \right) = \log \left(\frac{0^+}{3} \right) = -\infty$$

As retas de equação $x = -2$ e $x = 1$ são assíntotas verticais ao gráfico de f .

Não existem mais assíntotas verticais, visto a função ser contínua no seu domínio.

Assíntotas não verticais:

Como o domínio da função é limitado, $] -2, 1[$, não existem assíntotas não verticais ao seu gráfico.

Função g :**Assíntotas verticais:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^{\frac{1}{x}} - 4 \right) = e^{-\infty} - 4 = 0 - 4 = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}} - 4 \right) = e^{+\infty} - 4 = +\infty - 4 = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

Não há mais assíntotas verticais, visto a função ser contínua no seu domínio.

Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 4}{x} = \frac{e^0 - 4}{+\infty} = \frac{-3}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - 4 \right) = e^0 - 4 = -3$$

A reta de equação $y = -3$ é assíntota horizontal ao gráfico de g , quando $x \rightarrow +\infty$, e, como se verifica que os cálculos são idênticos, quando $x \rightarrow -\infty$, tem-se que a reta de equação $y = -3$ também é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \rightarrow -\infty$.

c) h é uma função contínua em $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$, visto tratar-se da soma de duas funções contínuas neste intervalo (função f e função g).

$$\bullet h \left(\frac{1}{2} \right) = f \left(\frac{1}{2} \right) + g \left(\frac{1}{2} \right) \approx 2,690$$

$$h \left(\frac{3}{4} \right) = f \left(\frac{3}{4} \right) + g \left(\frac{3}{4} \right) \approx -1,248$$

$$\text{Ou seja, } h \left(\frac{1}{2} \right) \times h \left(\frac{3}{4} \right) < 0.$$

Pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, pode concluir-se que $\exists c \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right[: h(c) = 0$.

93.

$$a) I \geq 100 \Leftrightarrow 170 + 10 \log(P) \geq 100$$

$$\Leftrightarrow 10 \log(P) \geq -70$$

$$\Leftrightarrow \log(P) \geq -7$$

$$\Leftrightarrow P \geq 10^{-7}$$

Devem ser utilizados meios de proteção auditiva a partir de um valor de potência superior ou igual a 10^{-7} .

$$b) I = 170 + 10 \log(P) \Leftrightarrow I - 170 = 10 \log(P)$$

$$\Leftrightarrow 0,1 I - 17 = \log(P)$$

$$\Leftrightarrow P = 10^{0,1 I - 17}$$

Seja I a intensidade de som de potência P . Então, $\frac{I}{2}$ é a intensidade do som de potência P_1 .

Temos, então:

$$\frac{P}{(P_1)^2} = \frac{10^{0,1 I - 17}}{(10^{0,1 \times \frac{I}{2} - 17})^2} = \frac{10^{0,1 I - 17}}{10^{0,1 I - 34}} = 10^{0,3 I - 17 - 0,1 I + 34} = 10^{0,2 I + 17}$$

$$c) I = 170 + 10 \log(P)$$

Seja I a intensidade do som de potência P . Seja I_1 a intensidade do som de potência $10^3 \times P$. Então:

$$\begin{aligned} I_1 - I &= 170 + 10 \log(10^3 \times P) - (170 + 10 \log(P)) = \\ &= 170 + 10 [\log(10^3) + \log(P)] - 170 - 10 \log(P) = \\ &= 170 + 10 (3 + \log(P)) - 170 - 10 \log(P) = \\ &= 30 + 10 \log(P) - 10 \log(P) = 30 \end{aligned}$$

Provamos, assim, que quando a potência cresce em progressão geométrica de razão 10^3 a intensidade cresce em progressão aritmética de razão 30.

d)

$$\begin{aligned} i) \lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{I(P)}{P} &= \lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{170 + 10 \log(P)}{P} = \\ &= \lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{170}{P} + 10 \times \underbrace{\lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{\log(P)}{P}}_{\text{limite notável}} = \\ &= 0 + 10 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow +\infty} [I(P) - 0] &= \lim_{P \rightarrow +\infty} [170 + 10 \log(P)] = \\ &= 170 + 10 \times (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

Como o valor obtido não é um número real, concluímos que o gráfico de I não admite assíntotas não verticais.

$$ii) I'(P) = 10 \times \frac{1}{P} = \frac{10}{P}$$

$$I'''(P) = \frac{-10 \times P'}{P^2} = -\frac{10}{P^2}$$

$$\begin{aligned} I'(P) = I''(P) &\Leftrightarrow \frac{10}{P} = -\frac{10}{P^2} \Leftrightarrow \frac{10}{P} + \frac{10}{P^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{10P}{P^2} + \frac{10}{P^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{10P+10}{P^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 10P+10 = 0 \wedge P^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{P=-1}_{\text{condição impossível, dado que } P > 0} \wedge P \neq 0 \end{aligned}$$

condição impossível, dado que $P > 0$.

Logo, não há um valor P_0 tal que $I'(P_0) = I''(P_0)$.

94.

- a) • Em $]0, +\infty[$, g é contínua, por se tratar do produto entre duas funções contínuas: uma que é uma função afim e a outra que é uma função logarítmica.
• Em $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

Mudança de variável:

$$\frac{1}{x} = y$$

Se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$= \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y}}_{\text{limite notável}} = -0 = 0$$

$$g(0) = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$, concluímos que g é contínua à direita em $x = 0$, logo g é contínua em $\mathbb{R}_0^+$.

b) **Assíntotas verticais:**

Dado que g é contínua em $\mathbb{R}_0^+$ o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

Assíntota não vertical

$$(y = mx + b, m \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$$

$$(x \rightarrow +\infty)$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Como o valor obtido não é um número real, concluímos que o gráfico de g não admite assíntota não vertical.

Logo, o gráfico de g não tem assíntotas.

c) • Em $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= x' \ln(x) + x (\ln(x))' = \\ &= \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 \end{aligned}$$

• Em $x = 0$:

$$\begin{aligned} g'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

Logo, g não é derivável em $x = 0$.

$$g'(x) = 1 + \ln(x) \quad D_{g'} = \mathbb{R}^+$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = 0 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = -1 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \wedge x > 0$$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
Sinal de g'	n.d.	-	0	+
Variação de g	Máx. 0	$\searrow$	Mín. $-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

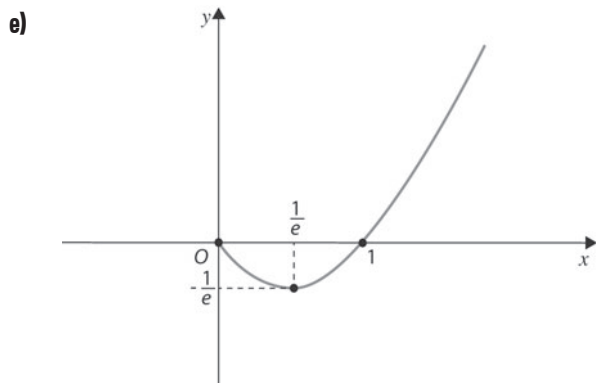
$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$

g é estritamente decrescente em $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ e estritamente crescente em $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$; 0 é máximo relativo para $x = 0$ e $-\frac{1}{e}$ é mínimo absoluto para $x = \frac{1}{e}$.

$$d) g'(x) = \ln(x) + 1 \quad D_{g'} = \mathbb{R}^+$$

$$g''(x) = \frac{1}{x} \quad D_{g''} = \mathbb{R}^+$$

$\frac{1}{x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$, logo $g''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$, o que nos leva a concluir que o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}^+$ e não tem pontos de inflexão.



Em $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow x \ln(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee \ln(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\notin \mathbb{R}^+} \vee x = 1 \end{aligned}$$

95.

$$a) P(t) = \frac{100}{1 + Ae^{-\frac{4t}{5}}}$$

$$P'(t) = \frac{-100 \times \left(1 + Ae^{-\frac{4t}{5}}\right)'}{\left(1 + Ae^{-\frac{4t}{5}}\right)^2} =$$

$$= \frac{-100 \times \left(-\frac{4}{5}\right) \times Ae^{-\frac{4t}{5}}}{\left(1 + Ae^{-\frac{4t}{5}}\right)^2} =$$

$$= \frac{80Ae^{-\frac{4t}{5}}}{\left(1 + Ae^{-\frac{4t}{5}}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{125} P(t) (100 - P(t)) =$$

$$= \frac{1}{125} \times \frac{100}{1 + Ae^{-\frac{4t}{5}}} \left(100 - \frac{100}{1 + Ae^{-\frac{4t}{5}}}\right) =$$

$$= \frac{0,8}{1 + Ae^{-\frac{4t}{5}}} \times \frac{100 \left(1 + Ae^{-\frac{4t}{5}}\right) - 100}{1 + Ae^{-\frac{4t}{5}}} =$$

$$= \frac{0,8 \times (100 + 100Ae^{-\frac{4t}{5}} - 100)}{\left(1 + Ae^{-\frac{4t}{5}}\right)^2} =$$

$$= \frac{0,8 \times 100Ae^{-\frac{4t}{5}}}{\left(1 + Ae^{-\frac{4t}{5}}\right)^2} = \frac{80Ae^{-\frac{4t}{5}}}{\left(1 + Ae^{-\frac{4t}{5}}\right)^2}$$

$$\text{Assim, } P'(t) = \frac{1}{125} P(t) (100 - P(t)).$$

b) $P(0) = P_0 \Leftrightarrow \frac{100}{1 + Ae^0} = P_0$

$$\Leftrightarrow 1 + A = \frac{100}{P_0}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{100}{P_0} - 1$$

c) Se $P(0) = 100$, então:

$$A = 0 \text{ e } P = \frac{100}{1 + 0} \Leftrightarrow P(t) = 100$$

O número de ursos nessa reserva natural, a partir do dia 1 de janeiro de 1990, é sempre constante e igual a 100.

d) Se $P_0 = 10$, então $A = 9$.

$$P''(t) = \frac{1}{125} (P'(t) (100 - P(t)) + P(t) \times (-P'(t))) =$$

$$= \frac{1}{125} (100 P'(t) - 2P(t) P'(t)) =$$

$$= \frac{1}{125} \times P'(t) (100 - 2P(t))$$

$$P''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{125} \times P'(t) (100 - 2P(t)) = 0$$

$$\Leftrightarrow P'(t) = 0 \vee P(t) = 50$$

$$\Leftrightarrow \frac{80 \times 9e^{-\frac{4t}{5}}}{\left(1 + 9e^{-\frac{4t}{5}}\right)^2} \vee \frac{100}{1 + 9e^{-\frac{4t}{5}}} = 50$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{80 \times 9e^{-\frac{4t}{5}} = 0}_{\text{condição impossível}} \vee 1 + 9e^{-\frac{4t}{5}} = 2$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{4t}{5}} = \frac{1}{9}$$

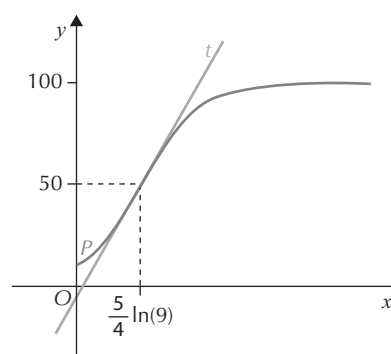
$$\Leftrightarrow -\frac{4t}{5} = \ln\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5} t = \ln(9)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5}{4} \ln(9)$$

x	0		$\frac{5}{4} \ln(9)$	$+\infty$
Sinal de P''		+	0	-
Variação de P'		$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Logo, $t_1 = \frac{5}{4} \ln(9)$.



96. Segundo o modelo de Newton de aquecimento/arrefecimento, a temperatura, T , num determinado instante t é dada por

$T(t) = T_0 e^{-k(t-t_0)} + T_a (1 - e^{-k(t-t_0)})$, onde T_0 representa a temperatura no instante t_0 , T_a representa a temperatura ambiente e k é uma constante.

Tem-se que:

$$T(0) = 100$$

$$T_a = 25$$

$$T(2) = 80$$

Então:

$$T(2) = 80 \Leftrightarrow 100e^{-k(2-0)} + 25(1 - e^{-k(2-0)}) = 80$$

$$\Leftrightarrow 100e^{-2k} + 25 - 25e^{-2k} = 80$$

$$\Leftrightarrow 75e^{-2k} = 55$$

$$\Leftrightarrow e^{-2k} = \frac{55}{75}$$

$$\Leftrightarrow -2k = \ln\left(\frac{55}{75}\right)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{55}{75}\right)}{-2}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{15}{11}\right)$$

Logo,

$$T(t) = 50$$

$$\Leftrightarrow 100e^{-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{15}{11}\right)(t-0)} + 25\left(1 - e^{-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{15}{11}\right)(t-0)}\right) = 50$$

$$\Leftrightarrow 100e^{-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{15}{11}\right)t} + 25 - 25e^{-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{15}{11}\right)t} = 50$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 75e^{-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{15}{11}\right)t} &= 25 \\ \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{15}{11}\right)t} &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{15}{11}\right)t &= \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\ \Leftrightarrow t &= \frac{-\ln(3)}{-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{15}{11}\right)} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{2 \ln(3)}{\ln\left(\frac{15}{11}\right)} \end{aligned}$$

Assim, $t \approx 7,804$.

Cálculo auxiliar

$$0,084 \times 60 = 5,04$$

A temperatura será 50 °C ao fim de 7 minutos e 5 segundos.

Teste Final

Páginas 120 a 123

Grupo I

1. Opção (B)

O número de casos possíveis é ${}^{28}C_6$.

O número de casos favoráveis é $7 \times {}^{21}C_5$, pois 7 é o número de maneiras diferentes de escolher um de entre os 7 alunos que fez o trabalho de casa; e por cada uma destas maneiras existem ${}^{21}C_5$ maneiras distintas de escolher 5 de entre os 21 que não fizeram os trabalhos de casa.

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{7 \times {}^{21}C_5}{{}^{28}C_6}$.

2. Opção (D)

$$A(0, g(0))$$

$$g(0) = e^{0,5 \times 0} = e^0 = 1$$

Logo, $A(0, 1)$.

$$C(x_C, 1)$$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow -1 + 2 \ln(x) = 1 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln(x) = 2 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = 1 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = e \wedge x > 0$$

Logo, $C(e, 1)$.

$$B(x_B, 0)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + 2 \ln(x) = 0 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln(x) = 1 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{e} \wedge x > 0$$

Logo, $B(\sqrt{e}, 0)$.

Assim:

$$A_{[OACB]} = \frac{\overline{OB} + \overline{AC}}{2} \times \overline{OA} = \frac{\sqrt{e} + e}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{e} + e}{2}$$

3. Opção (D)

$$g'(x) = \cos x$$

$$g'(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \underbrace{\cos x = \sqrt{3}}_{\text{condição impossível}}$$

Logo não é possível existir uma reta tangente ao gráfico de g cujo declive seja $\sqrt{3}$.

Como o maior valor que o seno toma é 1, não pode existir uma reta tangente ao gráfico de g cujos pontos tenham ordenada e .

$$g'(x) = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$g(2k\pi) = 0, k \in \mathbb{Z}$$

$0 = 2k\pi + b \Leftrightarrow b = -2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, em particular, $b = 0$ se $k = 0$.

Assim, a reta de equação $y = x$ pode definir uma reta tangente ao gráfico de g .

4. Opção (B)

$$\begin{aligned} \log_a\left(\sqrt{\ln(\sqrt[3]{e})}\right) &= \frac{1}{2} \log_a(\ln \sqrt[3]{e}) = \\ &= \frac{1}{2} \log_a\left(\ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2} \log_a\left(\frac{1}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \times (-1) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

5. Opção (A)

$$(f \circ g)'(4) = f'(g(4)) \times g'(4) =$$

$$= f'(2) \times \frac{1}{4 \ln(2)} =$$

$$= \frac{\ln(2)}{\ln(2^4)} = \frac{\ln(2)}{\ln(16)}$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet g(4) = \log_2(4) = 2$$

$$\bullet g'(x) = \frac{1}{x \ln(2)}$$

$$\bullet g'(4) = \frac{1}{4 \times \ln(2)}$$

1.

1.1. O número de maneiras de escolher, ao acaso, 6 dos 9 óleos é dado por 9C_6 .

Há duas formas de escolher os restantes 6 quadros de forma que o número de serigrafias seja superior ao número de aguarelas: pode escolher-se 5 serigrafias e 1 aguarela ou 4 serigrafias e 2 aguarelas. O número de maneiras de escolher ao acaso 5 serigrafias e 1 aguarela é dado por ${}^7C_5 \times {}^4C_1$. O número de maneiras de escolher ao acaso 6 serigrafias e 2 aguarelas é dado por ${}^7C_4 \times {}^4C_2$.

Assim, o número de escolhas possíveis é dado por ${}^9C_6 \times ({}^7C_5 \times {}^4C_1 + {}^7C_4 \times {}^4C_2) = 24\,696$.

1.2. O número de casos possíveis é $12!$.

O número de casos favoráveis é $(5! \times 4! \times 3!) \times 3!$.

Assim, a probabilidade pedida é:

$$\frac{(5! \times 4! \times 3!) \times 3!}{12!} = \frac{1}{4620}$$

2.

$$\begin{aligned} 2.1. f(x) &= \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \\ &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) \\ &\quad \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = \\ &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x - \right. \\ &\quad \left. - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x\right) \\ &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x + \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x\right) = \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x \times 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x = \\ &= 2\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \times 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \\ &= 2\sin x \cos x = \\ &= \sin(2x) \end{aligned}$$

$$2.2. \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Assim:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(u_n) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x) = \sin 0 = 0$$

$$\begin{aligned} 2.3. f'(x) &= (\sin(2x))' = 2\cos(2x) \\ f''(x) &= (2\cos(2x))' = -4\sin(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) + f'(x) + 4f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -4\sin(2x) + 2\cos(2x) + 4\sin(2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\cos(2x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in \left]-\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } x = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } x = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{Se } k = 2, \text{ então } x = \frac{5\pi}{4}.$$

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } x = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Se } k = -2, \text{ então } x = -\frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{C.S.} = \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$$

2.4.

a) A função g é contínua em $]-\infty, 0[$, por se tratar, neste intervalo, do quociente entre duas funções contínuas.

A função g é contínua em $]0, +\infty[$, por se tratar, neste intervalo, da soma de duas funções contínuas.

Para que g seja contínua em $\mathbb{R}$, falta assegurar que g é contínua em $x = 0$, ou seja, que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0).$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{x+1} - e}{x} + k\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e(e^x - 1)}{x} + k = \\ &= e \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} + k = \\ &= e \times 1 + k = \\ &= e + k = g(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(2x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(2x)}{2x} \times 1 = \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$y = 2x$$

Se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0^-$.

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin y}{y} \times 2 = \\ &= 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

Então:

$$e + k = 2 \Leftrightarrow k = 2 - e$$

- b)** Se $k = 2 - e$, então g é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{x+1} - e}{x^2} + \frac{2 - e}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{2 - e}{x} \right) = \\ &= e \times (+\infty - 0 + 0) = +\infty \end{aligned}$$

O gráfico de g não admite assíntota não vertical quando $x \rightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2} = 0, \text{ pois } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

e a função seno é limitada.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2} = 0, \text{ pois } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

e a função seno é limitada.

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \rightarrow -\infty$.

3.

3.1. $D_f = \mathbb{R}$

$$A(x, 0), x \in D_f$$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 3 - e^{x-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{x-1} = 3 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = \ln(3) \\ &\Leftrightarrow x = 1 + \ln(3) \end{aligned}$$

Logo, $A(1 + \ln(3), 0)$.

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x + 4 > 0\} =]-4, +\infty[.$$

$$B(x, 0), x \in D_g$$

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow \log(x + 4) + 1 = 0 \wedge x \in D_g \\ &\Leftrightarrow \log(x + 4) = -1 \wedge x \in D_g \\ &\Leftrightarrow x + 4 = 10^{-1} \wedge x \in D_g \\ &\Leftrightarrow x = -4 + \frac{1}{10} \wedge x \in D_g \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{39}{10} \wedge x \in D_g \end{aligned}$$

Logo, $B\left(-\frac{39}{10}, 0\right)$.

3.2. $f'(x) = (3 - e^{x-1})' = -e^{x-1}$

$$f'(x) < 0, \forall x \in D_f$$

A função f é estritamente decrescente em todo o seu domínio.

$$g'(x) = (\log(x + 4) + 1)' = \frac{1}{(x + 4) \ln(10)}$$

$$g'(x) > 0, \forall x \in D_g$$

A função g é estritamente crescente em todo o seu domínio.

- 3.3.** Pretende-se mostrar que a equação $f(x) = g(x)$ tem uma única solução no intervalo $]0, 2[$.

Seja h a função definida em $] -4, +\infty[$ por

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

A função h é contínua em $] -4, +\infty[$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas neste intervalo, em particular, h é contínua em $[0, 2]$.

$$\begin{aligned} h(0) &= f(0) - g(0) = \\ &= 3 - e^{-1} - \log(4) - 1 = \\ &= 2 - \frac{1}{e} - \log(4) > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(2) &= f(2) - g(2) = \\ &= 3 - e^1 - \log(6) - 1 = \\ &= 2 - e - \log(6) < 0 \end{aligned}$$

Logo, $h(2) < 0 < h(0)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$$\exists c \in]0, 2[: h(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]0, 2[: f(c) - g(c) = 0$$

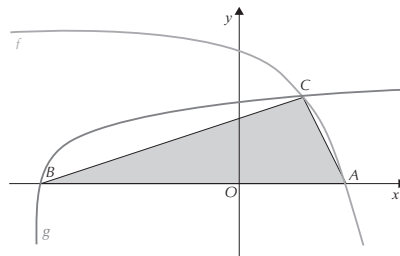
$$\Leftrightarrow \exists c \in]0, 2[: f(c) = g(c)$$

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = -e^{x-1} - \frac{1}{(x + 4) \ln(10)}$$

$h'(x) < 0, \forall x \in] -4, +\infty[$, logo h é estritamente decrescente.

Assim, o zero de h , cuja existência se provou acima, é único e, portanto, é única a solução da equação $f(x) = g(x)$, ou seja, existe um único ponto C nas condições do enunciado.

3.4.



$$A(2,1; 0)$$

$$B(-3,9; 0)$$

$$C(-1,2; 1,7)$$

$$A_{[ABC]} = \frac{(2,1 - (-3,9)) \times 1,7}{2} = 5,1 \text{ u. a.}$$

4.

4.1. $P(t) = \frac{4e^{\frac{1}{2}t}}{2 + 2e^{\frac{1}{2}t}}$

$$P(t) = 1,5 \Leftrightarrow \frac{4e^{\frac{1}{2}t}}{2 + 2e^{\frac{1}{2}t}} = 1,5$$

$$\Leftrightarrow 4e^{\frac{1}{2}t} = 3 + 3e^{\frac{1}{2}t} \wedge \underbrace{2 + 2e^{\frac{1}{2}t} \neq 0}_{\text{condição universal}}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}t} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}t = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow t = 2 \ln(3)$$

Logo, $t \approx 2,197$.

Cálculo auxiliar

$$0,197 \times 12 = 2,364$$

O número de peixes atingiu os 1500 em março de 1996.

$$\begin{aligned} 4.2. P(1) = 0,5 &\Leftrightarrow \frac{4e^k}{2 + pe^k} = 0,5 \\ &\Leftrightarrow 4e^k = 1 + 0,5pe^k \wedge \underbrace{2 + pe^k \neq 0}_{\text{condição universal, visto que } p > 0.} \\ &\Leftrightarrow 4e^k - 0,5pe^k = 1 \\ &\Leftrightarrow e^k(4 - 0,5p) = 1 \\ &\Leftrightarrow e^k = \frac{1}{4 - 0,5p} \\ &\Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{1}{4 - 0,5p}\right) \\ &\Leftrightarrow k = -\ln(4 - 0,5p) \end{aligned}$$

Tema VI - Primitivas e Cálculo Integral

Unidade 1 - Noção de primitiva

Páginas 126 a 135

1. $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ é uma primitiva da função definida por $f(x) = x^3$, pois $F'(x) = \frac{1}{4} \times 4x^3 = x^3 = f(x)$.

$G(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2$ é uma primitiva da função definida por $f(x) = x^3$, pois $G'(x) = \frac{1}{4} \times 4x^3 + 0 = x^3 = f(x)$.

2. Se $F - G = 7$, então $F' - G' = 0$.

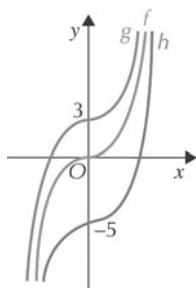
Então:

$$F'(x) - G'(x) = 0 \Leftrightarrow G'(x) = F'(x) \Leftrightarrow G'(x) = x^3$$

3. $F(x) = x^3$ é uma primitiva da função definida por $f(x) = 3x^2$, pois $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.

$G(x) = x^3 + \pi$ é uma primitiva da função definida por $f(x) = 3x^2$, pois $G'(x) = 3x^2 + 0 = 3x^2 = f(x)$.

$H(x) = x^3 - 5$ é uma primitiva da função definida por $f(x) = 3x^2$, pois $H'(x) = 3x^2 + 0 = 3x^2 = f(x)$.



4.

$$\begin{aligned} \text{a)} \int (3x^2 + 1) dx &= 3 \int x^2 dx + \int 1 dx = \\ &= 3 \times \frac{x^{2+1}}{2+1} + x + c = \\ &= \frac{3x^3}{3} + x + c = \\ &= x^3 + x + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} F(2) = 7 &\Leftrightarrow 2^3 + 2 + c = 7 \\ &\Leftrightarrow 10 + c = 7 \\ &\Leftrightarrow c = -3 \end{aligned}$$

Logo, $F(x) = x^3 + x - 3$.

5.

$$\text{a)} \int 2 dx = 2x + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{b)} \int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{c)} \int 4x^3 dx = 4 \int x^3 dx = 4 \frac{x^4}{4} + c = x^4 + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{d)} \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{e)} \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{f)} \int (x^2 + x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{g)} \int (3e^x + 1) dx = 3e^x + x + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{h)} \int (2 \cos x + 5) dx = 2 \sin x + 5x + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \int \left(\frac{1}{x} - 4x^{11} + \sin x \right) dx &= \ln(|x|) - 4 \frac{x^{12}}{12} - \cos x + c = \\ &= \ln(|x|) - \frac{x^{12}}{3} - \cos x + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \int (x + 3)^2 dx &= \int (x^2 + 6x + 9) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 6 \frac{x^2}{2} + 9x + c = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 9x + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{k)} \int \left(\frac{4}{x} + \frac{e^x}{2} - 3 \right) dx = 4 \ln(|x|) + \frac{e^x}{2} - 3x + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{l)} \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 4\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{m)} \int x \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$$

6.

$$\begin{aligned} \text{a)} \int (5x - 2)^3 dx &= \frac{1}{5} \int 5(5x - 2)^3 dx = \frac{1}{5} \frac{(5x - 2)^4}{4} + c = \\ &= \frac{(5x - 2)^4}{20} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$(5x - 2)' = 5$$

$$\text{b) } \int x e^{x^2+5} dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2+5} dx = \frac{1}{2} e^{x^2+5} + c, c \in \mathbb{R}$$

Cálculo auxiliar

$$(x^2 + 2)' = 2x$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \cos(4x + 3) dx &= \frac{1}{4} \int 4 \cos(4x + 3) dx = \\ &= \frac{1}{4} \sin(4x + 3) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$(4x + 3)' = 4$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int \cos x \sin x dx &= - \int \cos x (-\sin x) dx = \\ &= - \frac{\cos^2 x}{2} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\text{e) } \int \cos x \sin^4 x dx = \frac{\sin^5 x}{5} + c, c \in \mathbb{R}$$

Cálculo auxiliar

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2 \cos(2x)}{\sin(2x)} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln |\sin(2x)| + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$(\sin(2x))' = 2 \cos(2x)$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \int \frac{2x^2 - 2}{x^3 - 3x} dx &= 2 \int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x} dx = \frac{2}{3} \int \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x} dx = \\ &= \frac{2}{3} \ln |x^3 - 3x| + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$(x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \int \frac{4x - 10}{x^2 - 5x + 16} dx &= 2 \int \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6} dx = \\ &= 2 \ln |x^2 - 5x + 6| + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$(x^2 - 5x + 6)' = 2x - 5$$

$$\text{i) } \int \cos(e^x) e^x dx = \sin(e^x) + c, c \in \mathbb{R}$$

7.

$$\text{a) } \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{(x^2+2x+1)^{-2+1}}{-2+1} + c =$$

$$= -\frac{1}{x^2+x+1} + c, c \in \mathbb{R}$$

Cálculo auxiliar

$$(x^2 + x + 1)' = 2x + 1$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{x-1} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int x^2 \sqrt{1+x^3} dx &= \frac{1}{3} \int 3x^2 (1+x^3)^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{3} \frac{(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \\ &= \frac{2 \sqrt{(1+x^3)^3}}{9} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$(1+x^3)' = 3x^2$$

$$\text{d) } \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln |e^x + 1| + x = \ln(e^x + 1) + c, c \in \mathbb{R}$$

Cálculo auxiliar

$$(e^x + 1)' = e^x$$

$$\text{e) } \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{(\ln(x))^2}{2} + c = \frac{1}{2} (\ln(x))^2 + c, c \in \mathbb{R}$$

8.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int (e^x - e^{-x})^2 dx &= \int (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) dx = \\ &= \int e^{2x} dx - \int 2 dx + \int e^{-2x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx - \int 2 dx - \frac{1}{2} \int (-2)e^{-2x} dx = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} + c = \\ &= \frac{1}{2} (e^{2x} - e^{-2x}) - 2x + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = \\ &= -2 \cos(\sqrt{x}) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

9.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2x-6}{x(x-2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} \Leftrightarrow \frac{2x-6}{x(x-2)} = \frac{A(x-2) + Bx}{x(x-2)} \\ &\Leftrightarrow \frac{2x-6}{x(x-2)} = \frac{-2A + (A+B)x}{x(x-2)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2A = -6 \\ A+B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \int \frac{2x-6}{x(x-2)} dx &= \int \left(\frac{3}{x} + \frac{-1}{x-2} \right) dx = \\
 &= 3 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-2} dx = \\
 &= 3 \ln |x| - \ln |x-2| + c, c \in \mathbb{R} \\
 F(3) &= \ln(54) \Leftrightarrow 3 \ln(3) - \ln(1) + c = \ln(54) \\
 &\Leftrightarrow \ln(27) + c = \ln(54) \\
 &\Leftrightarrow c = \ln(54) - \ln(27) \\
 &\Leftrightarrow c = \ln(2) \\
 F(x) &= 3 \ln |x| - \ln |x-2| + \ln(2)
 \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \int \frac{2x+1}{x-1} dx &= \int \left(2 + \frac{3}{x-1} \right) dx = \\
 &= \int 2 dx + 3 \int \frac{1}{x-1} dx = \\
 &= 2x + 3 \ln |x-1| + c, c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l}
 2x+1 & x-1 \\
 \hline
 -2x+2 & 2 \\
 \hline
 3 &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \int \frac{x^3}{x^2+x} dx &= \int \frac{x^2}{x+1} dx = \\
 &= \int \left(x-1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \\
 &= \int x dx - \int 1 dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} - x + \ln |x+1| + c, c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 & x+1 \\
 \hline
 -x^2-x & x-1 \\
 \hline
 -x & \\
 \hline
 x+1 & \\
 \hline
 1 &
 \end{array}$$

11.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \int a(t) dt &= \int (12t-6) dt = \\
 &= 12 \frac{t^2}{2} - 6t + c = \\
 &= 6t^2 - 6t + c, c \in \mathbb{R} \\
 v(0) &= 2 \Leftrightarrow 6 \times 0^2 - 6 \times 0 + c = 2 \Leftrightarrow c = 2 \\
 v(t) &= 6t^2 - 6t + 2 \\
 \text{b)} \int v(t) dt &= \int (6t^2 - 6t + 2) dt = \\
 &= \frac{6t^3}{3} - \frac{6t^2}{2} + 2t + c = \\
 &= 2t^3 - 3t^2 + 2t + c, c \in \mathbb{R} \\
 p(0) &= 3 \Leftrightarrow 2 \times 0^3 - 3 \times 0^2 + 2 \times 0 + c = 3 \Leftrightarrow c = 3 \\
 p(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 2t + 3
 \end{aligned}$$

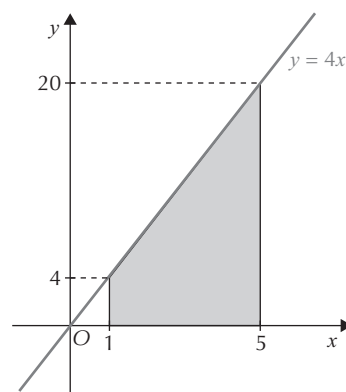
$$\begin{aligned}
 12. \int T(t) dt &= \int 7e^{-0,35t} dt = \\
 &= \frac{7}{-0,35} \int (-0,35e^{-0,35t}) dt = \\
 &= -20e^{-0,35t} + c, c \in \mathbb{R} \\
 D(0) &= -4 \Leftrightarrow -20e^0 + c = -4 \\
 &\Leftrightarrow -20 + c = -4 \\
 &\Leftrightarrow c = 16 \\
 D(t) &= -20e^{-0,35t} + 16 \\
 D(2) &= -20e^{-0,35 \times 2} + 16 \approx 6,1^\circ\text{C}
 \end{aligned}$$

Unidade 2 - Cálculo integral

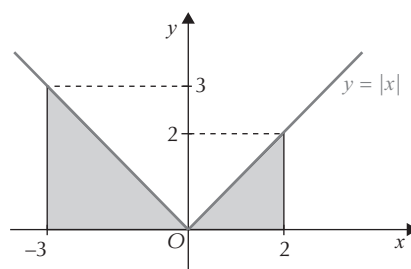
Páginas 136 a 149

13.

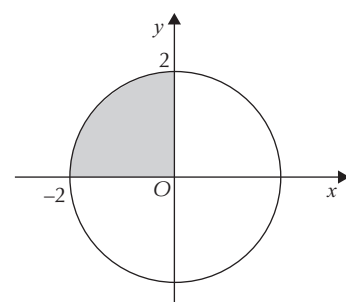
$$\text{a)} \int_1^5 4x dx = \frac{20+4}{2} \times 4 = 12 \times 4 = 48$$



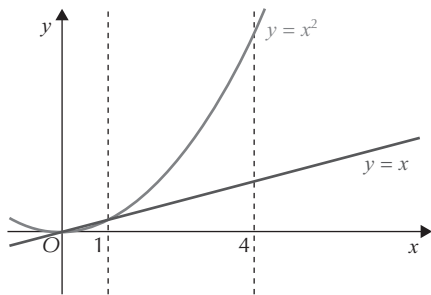
$$\text{b)} \int_{-3}^2 |x| dx = \frac{3 \times 3}{2} + \frac{2 \times 2}{2} = \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}$$



$$\text{c)} \int_{-2}^0 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\pi \times 2^2}{4} = \pi$$



14. No intervalo $[1, 4]$ tem-se que $x \leq x^2$.



Assim, pela propriedade da monotonia do integral definido, tem-se que $\int_1^4 x \, dx \leq \int_1^4 x^2 \, dx$.

15.

$$\text{a)} \int_{-2}^5 (3f(x) + 2g(x)) \, dx = 3 \int_{-2}^5 f(x) \, dx + 2 \int_{-2}^5 g(x) \, dx = 3 \times 2 + 2 \times 10 = 26$$

$$\text{b)} \int_{-2}^5 (f(x) - g(x)) \, dx = \int_{-2}^5 f(x) \, dx - \int_{-2}^5 g(x) \, dx = 2 - 10 = -8$$

c) Com base nos dados do enunciado não é possível determinar o valor de $\int_4^5 f(x) \, dx$.

$$\text{d)} \int_{-5}^2 g(x) \, dx = - \int_{-2}^5 g(x) \, dx = -10$$

$$\text{e)} \int_{-1}^6 f(x-1) \, dx = \int_{-2}^5 f(x) \, dx = 2$$

$$\text{f)} \int_{-5}^2 g(-x) \, dx = \int_{-2}^5 g(x) \, dx = 10$$

$$16. \left[\frac{1}{x} \right]_{-3}^2 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned} 17. \left[\frac{\ln(x)}{kx-1} \right]_1^e &= 1 \Leftrightarrow \frac{\ln(e)}{ek-1} - \frac{\ln(1)}{k-1} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{ek-1} = 1 \\ &\Leftrightarrow ek-1 = 1 \\ &\Leftrightarrow ek = 2 \\ &\Leftrightarrow k = \frac{2}{e} \end{aligned}$$

18.

$$\text{a)} \int_{-1}^2 (t^4 + 1) \, dt = \left[\frac{t^5}{5} + t \right]_{-1}^2 = \frac{32}{5} + 2 - \frac{1}{5} - 1 = \frac{48}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \int_{-1}^1 (t-1)(3-t) \, dt &= \int_{-1}^1 (3t - t^2 - 3 + t) \, dt = \\ &= \int_{-1}^1 (4t - t^2 - 3) \, dt = \\ &= \left[2t^2 - \frac{t^3}{3} - 3t \right]_{-1}^1 = \\ &= \left(2 - \frac{1}{3} - 3 \right) - \left(2 + \frac{1}{3} + 3 \right) = \\ &= -\frac{20}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \int_0^{\ln(3)} e^{-t} \, dt &= \left[-e^{-t} \right]_0^{\ln(3)} = \\ &= -e^{-\ln(3)} - (-2^0) = \\ &= -e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} + 1 = \\ &= -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} (e^t - e^{-t}) \, dt &= \left[e^t + e^{-t} \right]_{-\ln(2)}^{\ln(2)} = \\ &= (e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}) - (e^{-\ln(2)} + e^{\ln(2)}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \int_{-2}^0 2e^{1-2t} \, dt &= \left[-e^{1-2t} \right]_{-2}^0 = \\ &= -e^1 - (-e^5) = \\ &= e^5 - e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin(2t) \, dt &= -\frac{1}{2} \left[\cos(2t) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{12}} (\cos(2t)) \, dt &= \frac{1}{2} \left[\sin(2t) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{12}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin(-\pi) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{h)} \int_2^4 \frac{1}{t} \, dt = \left[\ln(|t|) \right]_2^4 = \ln(4) - \ln(2) = \ln(2)$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3t}} \, dt &= \frac{1}{3} \int_0^3 (3t)^{-\frac{1}{2}} \, dt = \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{(3t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^3 = \\ &= \frac{2}{3} \left[\sqrt{3t} \right]_0^3 = \\ &= \frac{2}{3} (\sqrt{9} - \sqrt{0}) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \int_1^2 \frac{t^2+1}{t^3+3t+1} \, dt &= \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{3t^2+3}{t^3+3t+1} \, dt = \\ &= \frac{1}{3} \left[\ln|t^3+3t+1| \right]_1^2 = \\ &= \frac{1}{3} (\ln(8+6+1) - \ln(1+3+1)) = \\ &= \frac{1}{3} (\ln(15) - \ln(5)) = \\ &= \frac{1}{3} \ln(3) = \ln(\sqrt[3]{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k)} \int_{-1}^2 |-t+1| \, dt &= \int_{-1}^1 (-t+1) \, dt + \int_1^2 (t-1) \, dt = \\ &= \left[-\frac{t^2}{2} + t \right]_{-1}^1 + \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_1^2 = \end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 1\right) - \left(-\frac{1}{2} - 1\right) + 2 - 2 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{5}{2}$$

Cálculo auxiliar

$$|-t+1| = \begin{cases} -t+1 & \text{se } -t+1 \geq 0 \\ t-1 & \text{se } -t+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -t+1 & \text{se } t \leq 1 \\ t-1 & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{I)} \int_0^3 |t^2 - 3t + 2| dt &= \int_0^1 (t^2 - 3t + 2) dt + \int_1^2 (-t^2 + 3t - 2) dt + \int_2^3 (t^2 - 3t + 2) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t \right]_0^1 + \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} - 2t \right]_1^2 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t \right]_2^3 \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) - 0 + \left(-\frac{8}{3} + 6 - 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 \right) + \left(9 - \frac{27}{2} + 6 \right) - \left(\frac{8}{3} - 6 + 4 \right) = \frac{11}{6} \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \bullet |t^2 - 3t + 2| &= \begin{cases} t^2 - 3t + 2 & \text{se } t^2 - 3t + 2 \geq 0 \\ -t^2 + 3t - 2 & \text{se } t^2 - 3t + 2 < 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} t^2 - 3t + 2 & \text{se } t \leq 1 \vee t \geq 2 \\ -t^2 + 3t - 2 & \text{se } 1 < t < 2 \end{cases} \\ \bullet t^2 - 3t + 2 = 0 &\Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow t = 2 \vee t = 1 \end{aligned}$$


19.

a) $f(x) = \sin x + e^x$

$$F_0(x) = \int_0^x (\sin t + e^t) dt$$

Pelo teorema Fundamental do Cálculo,

$$F_0'(x) = f(x) = \sin x + e^x.$$

b) $f(x) = \sqrt{e^x + 1}$

$$F_0(x) = \int_0^x \sqrt{e^t + 1} dt$$

Pelo teorema Fundamental do Cálculo,

$$F_0'(x) = f(x) = \sqrt{e^x + 1}.$$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

$$F_0(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Pelo teorema Fundamental do Cálculo,

$$F_0'(x) = f(x) = e^{-x^2}.$$

Além disso:

$$F_0(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \Leftrightarrow F_0(e^x - x - 1) = \int_0^{e^x - x - 1} e^{-t^2} dt.$$

Logo:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{e^x - x - 1} e^{-t^2} dt \right)' &= (F_0(e^x - x - 1))' = \\ &= F_0'(e^x - x - 1) \times (e^x - x - 1)' = \\ &= f(e^x - x - 1) \times (e^x - 1) = \\ &= e^{-(e^x - x - 1)^2} (e^x - 1) \end{aligned}$$

d) $f(x) = 2x$

$$F_0(x) = \int_0^x 2t dt$$

Pelo teorema Fundamental do Cálculo,

$$F_0'(x) = f(x) = 2x.$$

$$\text{Além disso, } F_0(x) = \int_0^x 2t dt \Leftrightarrow -F_0(x) = \int_x^0 2t dt.$$

$$\text{Logo, } \left(\int_x^0 2t dt \right)' = (-F_0(x))' = -2x.$$

e) $f(x) = \cos x$

$$F_0(x) = \int_0^x \cos t dt$$

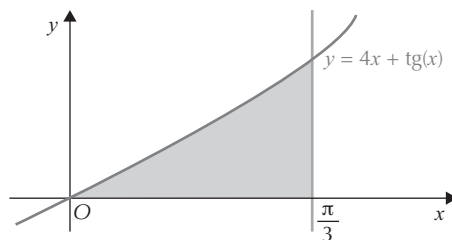
Pelo teorema Fundamental do Cálculo,

$$F_0'(x) = f(x) = \cos x.$$

$$\text{Além disso, } F_0(x) = \int_0^x \cos t dt \Leftrightarrow F_0(x^3) = \int_0^{x^3} \cos t dt.$$

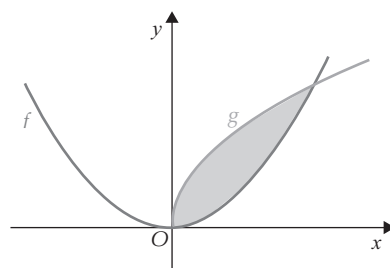
$$\begin{aligned} \text{Logo, } \left(\int_0^{x^3} \cos t dt \right)' &= (F_0(x^3))' = F_0'(x^3) \times (x^3)' = \\ &= f(x^3) \times 3x^2 = \cos(x^3) \times 3x^2 = \\ &= 3x^2 \cos(x^3). \end{aligned}$$

20.



$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} (4x + \operatorname{tg} x) dx &= \int_0^{\pi/3} 4x dx - \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \\ &= \left[2x^2 \right]_0^{\pi/3} - \left[\ln |\cos x| \right]_0^{\pi/3} = \\ &= \left(2 \times \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 - 2 \times 0^2 \right) - \left(\ln \left| \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \right| - \ln |\cos 0| \right) = \\ &= 2 \times \frac{\pi^2}{9} - \ln \left(\frac{1}{2} \right) + \ln(1) = \\ &= \frac{2\pi^2}{9} + \ln(2) \end{aligned}$$

21.



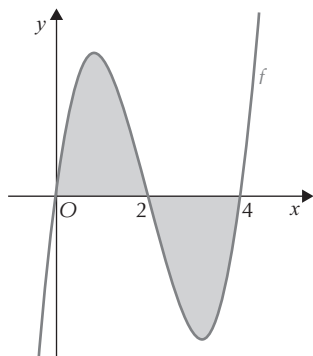
$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 = \sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow x^4 = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^4 - x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x^3 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x &= 1 \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

22.



$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx + \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 8x) dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x \right]_0^2 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2 \right]_2^4 = \\ &= (4 - 16 + 16) - 0 + (-64 + 128 - 64) - \\ &\quad - (-4 + 16 - 16) = 8 \end{aligned}$$

23. $A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{7}{2} \right) dx =$

$$\begin{aligned} &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(-\frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{7}{2} \right) dx = \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} 2 dx = \left[2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} = \frac{8\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 2\pi \end{aligned}$$

Aprende Fazendo

Páginas 154 a 158

1. Opção (D)

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$$

(relação de Chasles)

2. Opção (D)

$$A = \int_a^b (-f(x)) dx + \int_b^c f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

3. Opção (D)

$$\begin{aligned} \int \sin(3x) dx &= -\frac{1}{3} \int -3 \sin(3x) dx = \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4. Opção (B)

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 g(x) dx &= \int_{-2}^4 (f(x) + 1) dx = \\ &= \int_{-2}^4 f(x) dx + \int_{-2}^4 1 dx = \\ &= 3 + \left[x \right]_{-2}^4 = \\ &= 3 + 4 - (-2) = 9 \end{aligned}$$

5. Opção (C)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\cos x| dx &= \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x) dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x dx = \\ &= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \left[\sin x \right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \\ &\quad + \sin(2\pi) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \\ &= 1 - 0 + 1 + 1 + 0 + 1 = 4 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} |\cos x| &= \begin{cases} \cos x & \text{se } \cos x \geq 0 \\ -\cos x & \text{se } \cos x < 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \cos x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ -\cos x & \text{se } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases} \end{aligned}$$

6. Opção (B)

$$f(x) = \ln(x)$$

$$F_1(x) = \int_1^x \ln(t) dt$$

Pelo teorema Fundamental do Cálculo,

$$F'_1(x) = f(x) = \ln(x).$$

$$\text{Além disso, } F_1(x^2) = \int_1^{x^2} \ln(t) dt = F(x).$$

Então:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\int_1^{x^2} \ln(t) dt \right)' = \\ &= (F_1(x^2))' = \\ &= F'(x^2) \times (x^2)' = \\ &= \ln(x^2) \times 2x = \\ &= 2x \ln(x^2) \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } F'(e) = 2e \ln(e^2) = 2e \times 2 = 4e.$$

7. Opção (D)

$$\begin{aligned} (g \circ F)' \left(\frac{\pi}{4} \right) &= g' \left(F \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \times F' \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ F \left(\frac{\pi}{4} \right) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 t dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt = \end{aligned}$$

$$= \left[\operatorname{tg} t - t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) - \frac{\pi}{4} - (\operatorname{tg} 0 - 0) =$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$g(x) = x^2$$

$$g'(x) = 2x$$

$$\text{Logo, } g' \left(F \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) = g' \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

$$f(x) = \operatorname{tg}^2 x$$

$$F_0(x) = \int_0^x \operatorname{tg}^2 t \, dt$$

Pelo teorema Fundamental do Cálculo,

$$F'_0(x) = f(x) = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$\text{Então, } F'(x) = f(x) = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$\text{Logo, } F \left(\frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1.$$

$$\text{Assim: } (g \circ F)' \left(\frac{\pi}{4} \right) = g' \left(F \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \times F' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \\ = \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \times 1 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

8.

$$\text{a) } \int 3x^2 \, dx = 3 \frac{x^3}{3} + c = x^3 + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } \int \sin x \, dx = -\cos x + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) } \int (2 \sin x + 3 \cos x) \, dx = \\ = 2 \int \sin x \, dx + 3 \int \cos x \, dx = \\ = -2 \cos x + 3 \sin x + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{d) } \int (x^3 + x^2 + 1) \, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{e) } \int e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} \int 3e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} e^{3x} + c = \frac{e^{3x}}{3} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{f) } \int 2xe^{x^2} \, dx = e^{x^2} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{g) } \int \frac{x}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{h) } \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{i) } \int x^3(x^4+1)^8 \, dx = \frac{1}{4} \int 4x^3(x^4+1)^8 \, dx = \\ = \frac{1}{4} \frac{(x^4+1)^9}{9} + c = \\ = \frac{(x^4+1)^9}{36} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{j) } \int \sqrt{x+1} \, dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \\ = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{k) } \int \sin x \cos^2 x \, dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{l) } \int \tan x \, dx = \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + c, c \in \mathbb{R}$$

9.

$$\text{a) } \int f(x) \, dx = \int 5x^2 \, dx = \frac{5x^3}{3} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$F(1) = 4 \Leftrightarrow \frac{5}{3} + c = 4 \Leftrightarrow c = 4 - \frac{5}{3} \Leftrightarrow c = \frac{7}{3}$$

$$\text{Logo, } F(x) = \frac{5x^3}{3} + \frac{7}{3}.$$

$$\text{b) } \int f(x) \, dx = \int 2 \cos(3x) \, dx =$$

$$= \frac{2}{3} \int 3 \cos(3x) \, dx =$$

$$= \frac{2}{3} \sin(3x) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$F \left(\frac{\pi}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) + c = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} + c = 1$$

$$\Leftrightarrow c = 1 - \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$$

$$\text{Logo, } F(x) = \frac{2}{3} \sin(3x) + \frac{1}{3}.$$

$$\text{c) } \int f(x) \, dx = \int (3x^2 + 3x) \, dx = x^3 + \frac{3x^2}{2} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$F(-1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 + \frac{3}{2} + c = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{Logo, } F(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2}.$$

$$\text{d) } \int f(x) \, dx = \int \frac{x}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$F(2) = \ln(5) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(5) + c = \ln(5)$$

$$\Leftrightarrow c = \ln(5) - \frac{1}{2} \ln(5)$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{2} \ln(5)$$

$$\Leftrightarrow c = \ln(\sqrt{5})$$

$$\text{Logo, } F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln(\sqrt{5}).$$

10.

$$\text{a) } \int f(x) \, dx = \int e^{7x} \, dx = \frac{1}{7} \int 7e^{7x} \, dx = \frac{e^{7x}}{7} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } \int g(x) \, dx = \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx =$$

$$= -2 \int \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} \right) dx =$$

$$= -2 \cos(\sqrt{x}) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) } \int h(x) \, dx = \int \sqrt{2x+7} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int 2(2x+7)^{\frac{1}{2}} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(2x+7)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= \frac{1}{3} (2x+7)^{\frac{3}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$d) \int j(x) dx = \int 8x(4x^2 - 3)^5 dx = \frac{(4x^2 - 3)^6}{6} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$e) \int k(x) dx = \int x^3 e^{x^4+2} dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int 4x^3 e^{x^4+2} dx =$$

$$= \frac{1}{4} e^{x^4+2} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$f) \int l(x) dx = \int \frac{x}{x-1} dx =$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) dx =$$

$$= x + \ln |x-1| + c, c \in \mathbb{R}$$

Cálculo auxiliar

x	$\frac{x-1}{1}$
$-x+1$	1
1	

$$g) \int m(x) dx = \int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx = \frac{(\ln(x))^3}{3} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$11. M(t) = \int M'(t) dt =$$

$$= \int (0,4t - 0,005t^2) dt =$$

$$= 0,4 \frac{t^2}{2} - 0,005 \frac{t^3}{3} + c =$$

$$= 0,2t^2 - \frac{0,005}{3} t^3 + c, c \in \mathbb{R}$$

$$M(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

$$M(10) = 0,2 \times 10^2 - \frac{0,005}{3} \times 10^3 \approx 18 \text{ itens}$$

12.

$$a) \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^2 = \frac{8}{3} - 8 - \frac{8}{3} + 8 = -\frac{32}{3}$$

$$b) \int_0^4 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx = \int_0^4 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right]_0^4 =$$

$$= \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} \right]_0^4 =$$

$$= \frac{2}{3} \times 8 + \frac{3}{4} \sqrt[3]{4^4} - 0 =$$

$$= \frac{16}{3} + 3\sqrt[3]{4}$$

$$c) \int_1^5 (3 + 2x^2) dx = \left[3x + \frac{2x^3}{3} \right]_1^5 =$$

$$= 15 + \frac{250}{3} - 3 - \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{284}{3}$$

$$d) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \left[\operatorname{tg} x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} \right) =$$

$$= \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$e) \int_1^5 e^x dx = \left[e^x \right]_1^5 = e^5 - e$$

$$f) \int_1^2 (2x-1)^4 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(2x-1)^5}{5} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3^5}{5} - \frac{1}{5} \right) = \frac{121}{5}$$

$$g) \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \operatorname{sen}(2x) dx = -\frac{1}{2} \left[\cos(2x) \right]_0^{\frac{5\pi}{6}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{3} \right) - \cos 0 \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$h) \int_1^2 \frac{2x+2}{(x^2+2x+4)^2} dx = \left[\frac{(x^2+2x+4)^{-1}}{-1} \right]_1^2 =$$

$$= \left[-\frac{1}{x^2+2x+4} \right]_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{12} + \frac{1}{7} =$$

$$= \frac{5}{84}$$

$$13. f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$$

$$F_0(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2) dt$$

Pelo teorema Fundamental do Cálculo,

$$F_0'(x) = f(x) = \operatorname{sen}(x^2).$$

14.

$$a) \int e^{\operatorname{sen} x} \cos x dx = e^{\operatorname{sen} x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$b) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 (x^3+1)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(x^3+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$$

$$= \frac{2}{3} (x^3+1)^{\frac{1}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$c) \int \frac{\sqrt{1+\ln(x)}}{x} dx = \frac{(1+\ln(x))^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= \frac{2}{3} (1+\ln(x))^{\frac{3}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \int x (3x^2 + 1)^3 dx &= \frac{1}{6} \int 6x (3x^2 + 1)^3 dx = \\ &= \frac{1}{6} \frac{(3x^2 + 1)^4}{4} + c = \\ &= \frac{1}{24} (3x^2 + 1)^4 + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \int \frac{4x}{2x^2 + 3} dx &= \ln |2x^2 + 3| + c = \\ &= \ln (2x^2 + 3) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{f)} \int (x^2 + 1)^2 2x dx = \frac{(x^2 + 1)^3}{3} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \int 5\sqrt{5x+1} dx &= \frac{(5x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \\ &= \frac{2}{3} (5x+1)^{\frac{3}{2}} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \int \sqrt{2x-1} dx &= \frac{1}{2} \int 2\sqrt{2x-1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \\ &= \frac{1}{3} (2x-1)^{\frac{3}{2}} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{i)} \int 3(3x-1)^4 dx = \frac{(3x-1)^5}{5} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{j)} \int (2x+1)(x^2+x) dx = \frac{(x^2+x)^2}{2} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{k)} \int 3x^2 \sqrt{x^3-2} dx &= \frac{(x^3-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \\ &= \frac{2}{3} (x^3-2)^{\frac{3}{2}} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l)} \int \frac{-4x}{(1-2x^2)^2} dx &= \frac{(1-2x^2)^{-1}}{-1} + c = \\ &= -\frac{1}{1-2x^2} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{m)} \int (5x^2 + 1)^2 10x dx = \frac{(5x^2 + 1)^3}{3} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{n)} \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \\ &= \sqrt{x^2+1} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{o)} \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx &= \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{p)} \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{(\ln(x))^2}{2} + c = \frac{\ln^2(x)}{2} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} 15. \int 0,51e^{-0,03t} dt &= \frac{0,51}{-0,03} e^{-0,03t} + c = \\ &= -17e^{-0,03t} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$C(0) = 500 \Leftrightarrow -17e^0 + c = 500 \Leftrightarrow c = 517$$

$$\text{Logo, } C(t) = -17e^{-0,03t} + 517.$$

$$\text{Assim, } C(10) = -17e^{-0,03 \times 10} + 517 \approx 504 \text{ indivíduos.}$$

16.

$$\begin{aligned} \text{a)} \frac{1}{x^3 + x^2 - 2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^3 + x^2 - 2x} &= \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x^3 + x^2 - 2x} = \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^3 + x^2 - 2x} &= \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 - Cx}{x^3 + x^2 - 2x} = \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^3 + x^2 - 2x} &= \frac{(A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A}{x^3 + x^2 - 2x} = \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ A+2B-C=0 \\ -2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} + B + C = 0 \\ -\frac{1}{2} + 2B - C = 0 \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{2} - B \\ -\frac{1}{2} + 2B - \frac{1}{2} + B = 0 \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{6} \\ B = \frac{1}{3} \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \int \frac{1}{x^3 + x^2 - 2} dx &= \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{1}{6}}{x+2} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{3} \ln |x-1| + \frac{1}{6} \ln |x+2| + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

17.

$$\begin{aligned} \text{a)} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx &= -\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \\ &= \left[\ln |\cos x| \right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = \\ &= \ln |\cos(\pi)| - \ln \left| \cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right| = \\ &= \ln(1) - \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= -\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= \ln(\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\text{b)} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)} dx = 2\sqrt{3} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)} dx =$$

$$= 2\sqrt{3} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{3} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) =$$

$$= 2\sqrt{3} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = 2\sqrt{3} - 2$$

$$\text{c) } \int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx = \left[-\cos(\ln(x)) \right]_1^{e^\pi} =$$

$$= -\cos(\ln(e^\pi)) + \cos(\ln(1)) = -\cos \pi + \cos 0 =$$

$$= -(-1) + 1 = 2$$

Cálculo auxiliar

$$\int \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx =$$

Mudança de variável:

$$t = \ln(x)$$

$$dt = \frac{1}{x} dx$$

$$= \int \sin t dt =$$

$$= -\cos t + c =$$

$$= -\cos(\ln(x)) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{d) } \int_0^1 \frac{2x^2 - 3x + 5}{2x + 1} dx = \int_0^1 \left(x - 2 + \frac{7}{2x + 1} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{7}{2} \ln |2x + 1| \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 2 + \frac{7}{2} \ln(3) - 0 =$$

$$= \frac{7}{2} \ln(3) - \frac{3}{2}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3x + 5 \quad | \quad 2x + 1 \\ -2x^2 - x \quad \quad \quad x - 2 \\ \hline -4x + 5 \\ 4x + 2 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$18. f(x) = \ln(x) \quad F_1(x) = \int_1^x \ln(t) dt$$

Pelo teorema Fundamental do Cálculo,

$$F_1'(x) = f(x) = \ln(x).$$

$$\text{Além disso, } F_1(x^3) = \int_1^{x^3} \ln(t) dt = F(x).$$

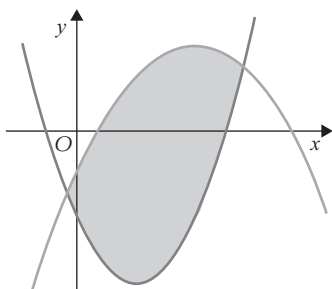
Então:

$$F'(x) = \left(\int_1^{x^3} \ln(t) dt \right)' = (F_1(x^3))' =$$

$$= F'(x^3) \times (x^3)' = \ln(x^3) \times 3x^2 =$$

$$= 3x^2 \ln(x^3)$$

19.



$$x^2 - 3x - 3 = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 6x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{5} \vee x = 2 + \sqrt{5}$$

$$A = \int_{2-\sqrt{5}}^{2+\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2} - (x^2 - 3x - 3) \right) dx =$$

$$= \int_{2-\sqrt{5}}^{2+\sqrt{5}} \left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x + \frac{3}{2} \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{2} + 3x^2 + \frac{3}{2}x \right]_{2-\sqrt{5}}^{2+\sqrt{5}} =$$

$$= -\frac{(2+\sqrt{5})^3}{2} + 3(2+\sqrt{5})^2 + \frac{3}{2}(2+\sqrt{5}) -$$

$$- \frac{(2-\sqrt{5})^3}{2} + 3(2-\sqrt{5})^2 + \frac{3}{2}(2-\sqrt{5}) =$$

$$= -\frac{(9+4\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}{2} + 3(9+4\sqrt{5}) + 3 +$$

$$+ \frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{(9-4\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}{2} + 3(9-4\sqrt{5}) +$$

$$+ 3 - \frac{3}{2}\sqrt{5} =$$

$$= -\frac{18+9\sqrt{5}+8\sqrt{5}+20}{2} + 27 + 12\sqrt{5} + 3 +$$

$$+ \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{18-9\sqrt{5}-8\sqrt{5}+20}{2} - 27 +$$

$$+ 12\sqrt{5} - 3 + \frac{3}{2}\sqrt{5} =$$

$$= -\frac{17\sqrt{5}}{2} + 12\sqrt{5} + \frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{17\sqrt{5}}{2} +$$

$$+ 12\sqrt{5} + \frac{3}{2}\sqrt{5} =$$

$$= -17\sqrt{5} + 24\sqrt{5} + 3\sqrt{5} =$$

$$= 10\sqrt{5}$$

20.

$$\text{a) } \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2x)) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin(2x) \right) + c =$$

$$= \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Cálculo auxiliar

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \int \cos^3 x \, dx &= \int \cos x \cos^2 x \, dx = \\ &= \int \cos x (1 - \sin^2 x) \, dx = \\ &= \int \cos x \, dx - \int \cos x \sin^2 x \, dx = \\ &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \int \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^2 dx = \\ &= \int \frac{1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos(2x) + \frac{1 + \cos(4x)}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(x + \sin(2x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \sin(4x) \right) dx + c = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2}x + \sin(2x) + \frac{1}{8} \sin(4x) \right) dx + c = \\ &= \frac{1}{32} (12x + 8\sin(2x) + \sin(4x)) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \int \frac{\ln(3x)}{x} \, dx &= \int \left(\frac{3}{3x} \ln(3x) \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln^2(3x) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \int \sin x \cos x e^{\cos(2x)} \, dx &= -\frac{1}{4} \int -2 \sin(2x) e^{\cos(2x)} \, dx = \\ &= -\frac{1}{4} e^{\cos(2x)} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

21.

$$\text{a)} V(t) = \frac{1}{5} \sin(5t) + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$V(0) \neq 0 \Leftrightarrow c_1 \neq 0$$

$$P(t) = -\frac{1}{25} \cos(5t) + c_1 t + c_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Então:

- Se $c_1 > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{25} \cos(5t) + c_1 t + c_2 \right) = +\infty$, pois $-\frac{1}{25} \leq -\frac{1}{25} \cos(5t) \leq \frac{1}{25}, \forall t \in \mathbb{R}_0^+$:

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{25} + c_1 t \leq -\frac{1}{25} \cos(5t) + c_1 t \leq \frac{1}{25} + c_1 t, \forall t \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{25} + c_1 t + c_2 \leq V(t) \leq \frac{1}{25} + c_1 t + c_2, \forall t \in \mathbb{R}_0^+;$$

$$\text{e } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{25} + c_1 t + c_2 \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{25} + c_1 t + c_2 \right) = +\infty.$$

- Se $c_1 < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{25} \cos(5t) + c_1 t + c_2 \right) = -\infty$, pois $-\frac{1}{25} \leq -\frac{1}{25} \cos(5t) \leq \frac{1}{25}, \forall t \in \mathbb{R}_0^+$:

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{25} + c_1 t \leq -\frac{1}{25} \cos(5t) + c_1 t \leq \frac{1}{25} + c_1 t, \forall t \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{25} + c_1 t + c_2 \leq V(t) \leq \frac{1}{25} + c_1 t + c_2, \forall t \in \mathbb{R}_0^+;$$

$$\text{e } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{25} + c_1 t + c_2 \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{25} + c_1 t + c_2 \right) = -\infty.$$

Logo, se a velocidade inicial de P não for nula, P atinge pontos arbitrariamente afastados da respectiva posição inicial.

b) Se $V(0) = 0$, então, $c_1 = 0$.

$$\text{Logo, } P(t) = -\frac{1}{25} \cos(5t) + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_0^+, -1 \leq \cos(5t) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{25} \leq -\frac{1}{25} \cos(5t) \leq \frac{1}{25}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{25} + c_2 \leq -\frac{1}{25} \cos(5t) \leq \frac{1}{25} + c_2$$

Logo, P apenas atinge pontos cuja distância à posição inicial varia entre $-\frac{1}{25} + c_2$ e $\frac{1}{25} + c_2$.

Assim, a propriedade da alínea anterior não se mantém se a velocidade inicial de P é nula.

$$\text{c)} \begin{cases} P\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0 \\ P(5\pi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{25} \cos\left(\frac{25\pi}{2}\right) + \frac{5\pi}{2} c_1 + c_2 = 0 \\ -\frac{1}{25} \cos(25\pi) + 5\pi c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{25} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{5\pi}{2} c_1 + c_2 = 0 \\ \frac{1}{25} + 5\pi c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{2} c_1 + c_2 = 0 \\ 5\pi c_1 + c_2 = -\frac{1}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = -\frac{5\pi}{2} c_1 \\ 5\pi c_1 - \frac{5\pi}{2} c_1 = -\frac{1}{25} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{2} c_1 = -\frac{1}{25} \\ c_2 = -\frac{5\pi}{2} \times \left(-\frac{2}{125\pi}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{2}{125\pi} \\ c_2 = \frac{2}{125\pi} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{1}{25} \\ c_1 = -\frac{2}{125\pi} \end{cases}$$

$$\text{Logo, } P(t) = -\frac{1}{25} \cos(5t) - \frac{2}{125\pi} t + \frac{1}{5} e$$

$$V(t) = \frac{1}{5} \sin(5t) - \frac{2}{125\pi}.$$

$$\text{Assim, } P(0) = -\frac{1}{25} \times \cos 0 + \frac{1}{5} = \frac{4}{25} e$$

$$V(0) = \frac{1}{5} \sin 0 - \frac{2}{125\pi} = -\frac{2}{125\pi}.$$

22. $f(x) = \cos x$

$$F_0(x) = \int_0^x \cos t \, dt$$

Pelo teorema Fundamental do Cálculo,

$$F_0'(x) = f(x) = \cos x$$

$$\text{Além disso, } F_0(x^3) = \int_0^{x^3} \cos x \, dx = F(x).$$

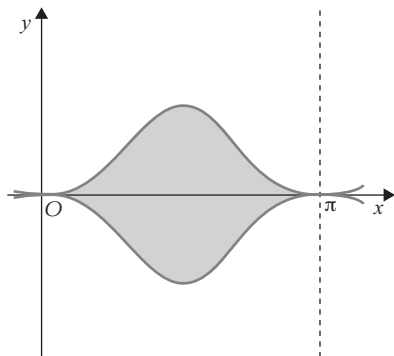
Então:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\int_0^{x^3} \cos t \, dt \right)' = (F_0(x^3))' = \\ &= F'(x^3) \times (x^3)' = \cos(x^3) \times 3x^2 = \\ &= 3x^2 \cos(x^3) \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \left(\int_x^{x^3} \cos t \, dt \right)' &= \left(\int_0^{x^3} \cos t \, dt + \int_x^0 \cos t \, dt \right)' = \\ &= \left(\int_0^{x^3} \cos t \, dt - \int_0^x \cos t \, dt \right)' = 3x^2 \cos(x^3) - \cos x \end{aligned}$$

23.



$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi (\sin^3 x - (-\sin^3 x)) \, dx = \\ &= \int_0^\pi 2 \sin^3 x \, dx = \\ &= 2 \int_0^\pi \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx = \\ &= 2 \int_0^\pi (\sin x - \sin x \cos^2 x) \, dx = \\ &= 2 \left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^\pi = \\ &= 2 \left(-\cos \pi + \frac{\cos^3 \pi}{3} - \left(-\cos 0 + \frac{\cos^3 0}{3} \right) \right) = \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

24. $f(x) = -|x - 2| + 4 =$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} -(x - 2) + 4 & \text{se } x - 2 \geq 0 \\ -(-x + 2) + 4 & \text{se } x - 2 < 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} -x + 6 & \text{se } x \geq 2 \\ x + 2 & \text{se } x < 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$g(x) = -|x - 1| + 2 =$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} -(x - 1) + 2 & \text{se } x - 1 \geq 0 \\ -(-x + 1) + 2 & \text{se } x - 1 < 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} -x + 3 & \text{se } x \geq 1 \\ x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow -|x - 1| + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow |x - 1| = 2 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 2 \vee x - 1 = -2 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow -|x - 2| + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow |x - 2| = 4 \\ &\Leftrightarrow x - 2 = 4 \vee x - 2 = -4 \\ &\Leftrightarrow x = 6 \vee x = -2 \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (x + 2 - (x + 1)) \, dx + \int_1^2 (x + 2 - (-x + 3)) \, dx + \\ &\quad + \int_2^3 (-x + 6 - (-x + 3)) \, dx + \int_3^6 (-x + 6) \, dx = \\ &= \int_0^1 1 \, dx + \int_1^2 (2x - 1) \, dx + \int_2^3 3 \, dx + \int_3^6 (-x + 6) \, dx = \\ &= \left[x \right]_0^1 + \left[x^2 - x \right]_1^2 + \left[3x \right]_2^3 + \left[-\frac{x^2}{2} + 6x \right]_3^6 = \\ &= (1 - 0) + (2 - 0) + (9 - 6) + \\ &\quad + \left(-\frac{36}{2} + 36 - \left(-\frac{9}{2} + 18 \right) \right) = \frac{21}{2} \end{aligned}$$

25. $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} \\ &\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \end{aligned}$$

$f'(x) = -2x - 2$

$f'(-3) = 6 - 2 = 4$

$t_1: y = 4x + b$

$0 = 4 \times (-3) + b = 0 \Leftrightarrow b = 12$

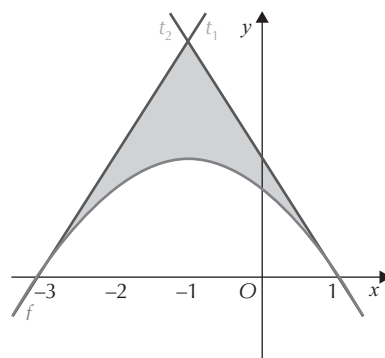
$t_1: y = 4x + 12$

$f'(1) = -2 - 2 = -4$

$t_2: y = -4x + b$

$0 = -4 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 4$

$t_2: y = -4x + 4$



$4x + 12 = -4x + 4 \Leftrightarrow 8x = -8 \Leftrightarrow x = -1$

Assim:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{-1} (4x + 12 - (-x^2 - 2x + 3)) \, dx + \\ &\quad + \int_{-1}^1 (-4x + 4 - (-x^2 - 2x + 3)) \, dx = \\ &= \int_{-3}^{-1} (x^2 + 6x + 9) \, dx + \int_{-1}^1 (x^2 - 2x + 1) \, dx = \\ &= \int_{-3}^{-1} (x + 3)^2 \, dx + \int_{-1}^1 (x - 1)^2 \, dx = \\ &= \left[\frac{(x + 3)^3}{3} \right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{(x - 1)^3}{3} \right]_{-1}^1 = \\ &= \left(\frac{8}{3} - 0 \right) + \left(0 + \frac{8}{3} \right) = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Teste Final

Páginas 160 e 161

Grupo I

1. Opção (B)

$$\begin{aligned}P(\bar{A} \cap B) = 0,5 &\Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0,5 \\&\Leftrightarrow 0,7 - P(A \cap B) = 0,5 \\&\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2 \\P(A \cap \bar{B}) = 0,2 &\Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0,2 \\&\Leftrightarrow P(A) - 0,2 = 0,2 \\&\Leftrightarrow P(A) = 0,4\end{aligned}$$

2. Opção (A)

Por observação da representação gráfica da função f , sabe-se que:

$$\begin{aligned}\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 1^- \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 1^- \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 0^+\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \log [f(x)] &= \log (1^-) = 0^- \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \log [f(x)] &= \log (1^-) = 0^- \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \log [f(x)] &= \log (0^+) = -\infty\end{aligned}$$

A única opção que respeita simultaneamente estas três condições é a opção (A).

3. Opção (D)

A afirmação (I) é falsa; o período positivo mínimo da função f é 2π .

A afirmação (II) é verdadeira:

f é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$, por se tratar da soma de funções contínuas nesse intervalo.

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 3 - 4 \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \\&= 3 - 4 \left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = \\&= 3 - 4 \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\&= 3 - 1 - 3 = -1 \\f\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= 3 - 4 \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \\&= 3 - 4 \left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) = \\&= 3 - 4 \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\&= 3 - 1 + 3 = 5 \\ \text{Logo, } f\left(\frac{\pi}{6}\right) &< 0 < f\left(\frac{5\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$$\exists c \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right[: f(c) = 0.$$

4. Opção (D)

$$\int \cos(5x) dx = \frac{1}{5} \sin(5x) + c, c \in \mathbb{R}$$

5. Opção (B)

$$\begin{aligned}\int b^x dx &= \int e^{\ln(b^x)} dx = \\&= \int e^{x \ln(b)} dx = \\&= \frac{1}{\ln(b)} \int \ln(b) e^{x \ln(b)} dx = \\&= \frac{e^{x \ln(b)}}{\ln(b)} + c = \\&= \frac{b^x}{\ln(b)} + c, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Grupo II

1. Um enunciado possível é o seguinte:

Uma turma de 12.º ano de uma escola tem 24 alunos: 14 raparigas e 10 rapazes. Pretende-se escolher, ao acaso, seis desses alunos para formarem uma comissão de organização do baile de finalistas. Qual é a probabilidade de a comissão ser constituída por alunos do mesmo sexo?

2.

2.1. A função f é contínua em $x = 1$ se

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1). \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= f(1) = 1 \times e^{-1} + 4 = \frac{1}{e} + 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\sin(x-1)}{e^x - e} + 4 \right) = \\&= \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin(x-1)}{x-1} + 4 = \\&= \frac{1}{e} \lim_{x-1 \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x-1)}{x-1} + 4 = \\&= \frac{1}{e} \times 1 + 4 = \frac{1}{e} + 4\end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$, então f é contínua em $x = 1$.

$$\begin{aligned}2.2. m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-x} + 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 4) = 4 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 4x) = \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x} + 4x - 4x) = \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0\end{aligned}$$

A reta de equação $y = 4x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f .

2.3. Se $x \geq 1$, então:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (xe^{-x} + 4x)' = \\ &= e^{-x} + x \times (-e^{-x}) + 4 = \\ &= e^{-x} - xe^{-x} + 4 \\ f'(2) &= e^{-2} - 2e^{-2} + 4 = -e^{-2} + 4 \\ t: y &= (-e^{-2} + 4)x + b \\ f(2) &= 2e^{-2} + 8 \\ 2e^{-2} + 8 &= (-e^{-2} + 4) \times 2 + b \Leftrightarrow b = 4e^{-2} \\ \text{Logo, } t: y &= (4 - e^{-2})x + 4e^{-2}. \end{aligned}$$

2.4. Se $x \in [1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= e^x - 2 \Leftrightarrow e^{-x} + 4 = e^x - 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{e^x} + 6 - e^x = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + 6e^x - e^{2x} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2} \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2} \\ &\Leftrightarrow e^x = 3 + \sqrt{10} \vee \underbrace{e^x = 3 - \sqrt{10}}_{\text{condição impossível}} \\ &\Leftrightarrow x = \ln(3 + \sqrt{10}) \\ \text{C.S.} &= \{\ln(3 + \sqrt{10})\} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 3.1. \int \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} dx &= \int \left(x + 2 + \frac{3}{x + 1} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln |x + 1| + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$x^2 + 3x + 5$	$ x + 1$
$-x^2 - x$	$x + 2$
$2x + 5$	
$-2x - 2$	
3	

$$F(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{0}{2} + 2 \times 0 + 3 \ln(1) + c \Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{Logo, } F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 \ln |x + 1|.$$

$$\begin{aligned} 3.2. \int \frac{1}{1 + e^{-x}} dx &= \int \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} dx = \\ &= \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \\ &= \ln |e^x + 1| + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. x^2 + 1 &= 9 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (9 - x^2 - (x^2 + 1)) dx + \int_2^3 (x^2 + 1 - (9 - x^2)) dx = \\ &= \int_0^2 (-2x^2 + 8) dx + \int_2^3 (2x^2 - 8) dx = \\ &= \left[-\frac{2x^3}{3} + 8x \right]_0^2 + \left[\frac{2x^3}{3} - 8x \right]_2^3 = \\ &= \left(-\frac{16}{3} + 16 - 0 \right) + \left(18 - 24 - \frac{16}{3} + 16 \right) = \\ &= \frac{46}{3} \end{aligned}$$

Tema VII - Números Complexos

Unidade 2 - O corpo dos números complexos

Páginas 166 a 185

1.

a) $\text{Re}(z) = -2$ e $\text{Im}(z) = 3$

b) $\text{Re}(z) = 1$ e $\text{Im}(z) = -1$

c) $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) = 2018$

d) $z = 5i^2 = 5 \times (-1) = -5$
 $\text{Re}(z) = -5$ e $\text{Im}(z) = 0$

e) $z = \frac{1 - \sqrt{8}i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}i}{2} = \frac{1}{2} - \sqrt{2}i$
 $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}$ e $\text{Im}(z) = -\sqrt{2}$

2.

a) $z = k^2 + (p - 1)i$

$$z = 2 + 5i$$

$$k^2 + (p - 1)i = 2 + 5i$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 2 \wedge p - 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow (k = \sqrt{2} \vee k = -\sqrt{2}) \wedge p = 6$$

b) $z = k^2 + (p - 1)i$ é um número real se $\text{Im}(z) = 0$, ou seja, $p - 1 = 0 \Leftrightarrow p = 1$ e k é um qualquer número real.

c) $z = k^2 + (p - 1)i$ é um imaginário se

$$\text{Re}(z) = 0 \wedge \text{Im}(z) \neq 0, \text{ ou seja, } k^2 = 0 \wedge p - 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \wedge p \neq 1$$

3.

a) $z_1 + z_2 = (4 + i) + 5i = 4 + 6i$

b) $z_1 + z_3 = (4 + i) + \left(2 - \frac{1}{2}i\right) = 6 + \frac{1}{2}i$

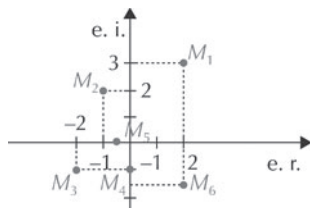
4.

a) $3i \times (2 - 4i) = 6i - 12i^2 = 12 + 6i$

b) $\left(\frac{1}{2} - i\right) \times (2 + 3i) = 1 + \frac{3}{2}i - 2i - 3i^2 =$
 $= 1 + 3 - \frac{1}{2}i =$
 $= 4 - \frac{1}{2}i$

c) $(\sqrt{2} + i)^2 = (\sqrt{2} + i) \times (\sqrt{2} + i) =$
 $= 2 + \sqrt{2}i + \sqrt{2}i + i^2 =$
 $= 1 + 2\sqrt{2}i$

5. Sejam M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 e M_6 os afixos de z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6 , respectivamente.



6.

a) $\bar{z} = -2 - 3i$

b) $\bar{z} = 1 + i$

c) $\bar{z} = -2018i$

d) $z = 5i^2 = -5$, $\log z = -5$.

e) $z = \frac{1}{2} - \sqrt{2}i$, $\log z = \frac{1}{2} + \sqrt{2}i$.

f) $\bar{z} = -10$

7.

a) $z = 2 + 5i$

$\bar{z} = 2 - 5i$

$-z = -2 - 5i$

$-\bar{z} = -2 + 5i$

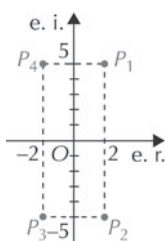
b) Sejam P_1, P_2, P_3 e P_4 os afixos de $z, \bar{z}, -z$ e $-\bar{z}$, respectivamente.

$z = 2 + 5i \hookrightarrow P_1 (2, 5)$

$\bar{z} = 2 - 5i \hookrightarrow P_2 (2, -5)$

$-z = -2 - 5i \hookrightarrow P_3 (-2, -5)$

$-\bar{z} = -2 + 5i \hookrightarrow P_4 (-2, 5)$



c) $[P_1P_2P_3P_4]$ é um retângulo de largura 4 e comprimento 10, logo de área 40.

8.

a) Seja $z = a + bi$.

Para $z + \bar{z} = 2$:

$(a + bi) + (a - bi) = 2$

$\Leftrightarrow 2a = 2$

$\Leftrightarrow a = 1$

Por exemplo, $z = 1 + 7i$.

b) Para $z + \bar{z} = 0$:

$(a + bi) + (a - bi) = 0$

$\Leftrightarrow 2a = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$

Por exemplo, $z = 5i$.

c) Para $z - \bar{z} = 0$:

$(a + bi) - (a - bi) = 0$

$\Leftrightarrow 2bi = 0$

$\Leftrightarrow 2b = 0$

$\Leftrightarrow b = 0$

Por exemplo, $z = 3$.

9.

a) $w = -\frac{1}{2}i^2 + 3i - z =$

$= \frac{1}{2} + 3i - (-1 - \sqrt{2}i) =$

$= \frac{1}{2} - 3i + 1 + \sqrt{2}i =$

$= \frac{3}{2} + (\sqrt{2} - 3)i$

Logo, $\text{Re}(w) = \frac{3}{2}$ e $\text{Im}(w) = \sqrt{2} - 3$.

b) $\overline{2z + 3w} = \overline{2(-1 - \sqrt{2}i) + 3\left(\frac{3}{2} + (\sqrt{2} - 3)i\right)} =$
 $= \overline{-2 - 2\sqrt{2}i + \frac{9}{2} + 3\sqrt{2}i - 9i} =$
 $= \frac{5}{2} + (-9 + \sqrt{2})i =$
 $= \frac{5}{2} - (-9 + \sqrt{2})i = \frac{5}{2} + (9 - \sqrt{2})i$

10. Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$.

Então:

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2} =$

$= (a - bi)(c + di) - (a + bi)(c - di) =$

$= ac + adi - bci - bdi^2 - (ac - adi + bci - bdi^2) =$

$= ac + bd + adi - bci - ac + adi + bci - bd =$

$= 2adi - 2bci =$

$= 2(ad - bc)i =$

$= 2\text{Im}(ac + bd + adi - bci)i =$

$= 2\text{Im}(\overline{z_1} z_2)i$

11.

a) $z = 3 + 4i$

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

b) $z = 1 - i$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

c) $z = 13i$

$$|z| = \sqrt{0^2 + 13^2} = \sqrt{13^2} = 13$$

d) $z = -9i$

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-9)^2} = \sqrt{9^2} = 9$$

e) $z = -12i$

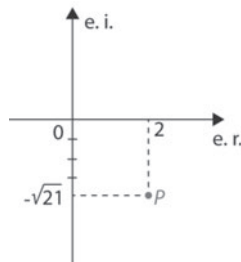
$$|z| = \sqrt{0^2 + (-12)^2} = \sqrt{12^2} = 12$$

12. Seja $z = a + bi$.

$$\begin{cases} |z| = 5 \\ \operatorname{Re}(z) = 2 \\ \operatorname{Im}(z) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \\ a = 2 \\ b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^2 + b^2 = 25 \\ a = 2 \\ b < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \sqrt{21} \\ a = 2 \\ b < 0 \end{cases}$$

Assim, $z = 2 - \sqrt{21}i$.



13. $|z w| = \sqrt{z w \overline{z w}} =$
 $= \sqrt{z w \overline{z} \overline{w}} =$
 $= \sqrt{z \overline{z} w \overline{w}} =$
 $= \sqrt{z \overline{z}} \sqrt{w \overline{w}} =$
 $= |z| |w|$

14.

a) $(\overline{z_1 + z_2})(\overline{z_1 + z_2}) =$

$$= \overline{z_1 + z_2} \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2} + \overline{z_2} \overline{z_1} + \overline{z_1} \overline{z_1} + \overline{z_2} \overline{z_2} =$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2)$$

b) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 =$

$$= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) =$$

$$= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) =$$

$$= z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} =$$

$$= 2 z_1 \overline{z_1} + 2 z_2 \overline{z_2} =$$

$$= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

c) $|z_1 + 1|^2 = 2|z_1|^2$

$$\Leftrightarrow (z_1 + 1)(\overline{z_1 + 1}) = 2 \overline{z_1} z_1$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + 1)(\overline{z_1} + \overline{1}) = 2 \overline{z_1} z_1$$

$$\Leftrightarrow z_1 \overline{z_1} + z_1 + \overline{z_1} + 1 = 2 \overline{z_1} z_1$$

$$\Leftrightarrow \overline{z_1} z_1 - z_1 - \overline{z_1} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{z_1}(z_1 - 1) - (\overline{z_1} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overline{z_1} - 1)(z_1 - 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow (\overline{z_1} - 1)(z_1 - 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow |z_1 - 1|^2 = 2$$

15. $|z - i|^2 = (z - i)(\overline{z - i}) =$

$$= (z - i)(\overline{z} + i) =$$

$$= (z - i)(\overline{z} + i) =$$

$$= z \overline{z} + iz - i \overline{z} - i^2 =$$

$$= |z|^2 + 1 + (z - \overline{z})i =$$

$$= |z|^2 + 1 + 2 \operatorname{Im}(z)i \times i =$$

$$= |z|^2 + 1 - 2 \operatorname{Im}(z)$$

16.

a) $\frac{3i}{2 - 4i} = \frac{3i(2 + 4i)}{(2 - 4i)(2 + 4i)} = \frac{6i + 12i^2}{2^2 - (4i)^2} = \frac{-12 + 6i}{4 + 16} =$
 $= \frac{-12 + 6i}{20} = -\frac{12}{20} + \frac{6}{20}i = -\frac{3}{5} + \frac{3}{10}i$

b) $\frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i - i + i^2}{1^2 - i^2} = \frac{1 - 2i - 1}{1 + 1} = -\frac{2i}{2} = -i$

c) $\frac{\sqrt{3} + i}{2i} = \frac{(\sqrt{3} + i) \times i}{2i \times i} = \frac{\sqrt{3}i + i^2}{2i^2} =$
 $= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{-2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $\frac{1}{5 - i} = \frac{5 + i}{(5 - i)(5 + i)} = \frac{5 + i}{5^2 - i^2} = \frac{5 + i}{26} = \frac{5}{26} + \frac{1}{26}i$

17.

a) $i^{101} = i^1 = i$ 101 $\begin{array}{|l} 4 \\ 1 \end{array}$ 25

b) $i^{2014} = i^2 = -1$ 2014 $\begin{array}{|l} 4 \\ 2 \end{array}$ 503

c) $i^{23} \times (i^5 + 5i^{11}) = i^3 \times (i^2 + 5i^3) = -i(-1 - 5i) =$
 $= i + 5i^2 = -5 + i$

d) $2i^{4n+1} - 3i^{4n+3} + (2i)^8 = 2 \times i^1 - 3i^3 + 256i^8 =$
 $= 2i + 3i + 256 = 256 + 5i$

18. $i^{9n} + i^{-9n} = i^{8n+n} + i^{-8n-n} =$

$$= i^n + i^{-n} =$$

$$= i^n + \frac{1}{i^n} =$$

$$= \frac{i^{2n} + 1}{i^n} =$$

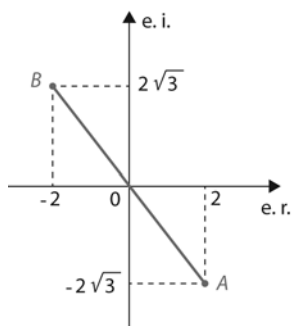
$$= \frac{(i^2)^n + 1}{i^n} =$$

$$= \frac{(-1)^n + 1}{i^n}$$

Como n é ímpar, então, $(-1)^n = -1$, logo

$$\frac{(-1)^n + 1}{i^n} = \frac{-1 + 1}{i^n} = 0.$$

19. Como $i^{50} = i^2 = -1$, tem-se que $z_3 = i^{50} \times z_1 = -z_1$, isto é, z_3 é o simétrico de z_1 e, portanto, o seu afixo, B , será simétrico do afixo de z_1 , A , em relação à origem do referencial. Portanto:



$$|AB| = |z_1| + |z_3| = 4 + 4 = 8$$

Cálculo auxiliar

$$|z_1| = |z_3| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

20.

a) $(2 - 6i)^2 = 4 - 24i + 36i^2 = 4 - 36 - 24i = -32 - 24i$

b) $(1 + i)^5 = {}^5C_0 1^5 i^0 + {}^5C_1 1^4 i^1 + {}^5C_2 1^3 i^2 + {}^5C_3 1^2 i^3 + {}^5C_4 1^1 i^4 + {}^5C_5 1^0 i^5 =$
 $= 1 + 5i + 10i^2 + 10i^3 + 5i^4 + i^5 =$
 $= 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i =$
 $= -4 - 4i$

c) $(1 + i)^{-5} = \frac{1}{(1 + i)^5} = \frac{1}{-4 - 4i} =$
 (pelos cálculos efetuados na alínea anterior)
 $= \frac{-4 + 4i}{(-4 - 4i)(-4 + 4i)} = \frac{-4 + 4i}{(-4)^2 - (4i)^2} =$
 $= \frac{-4 + 4i}{16 + 16} = -\frac{4}{32} + \frac{4}{32}i =$
 $= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}i$

d) $(3 - i)^{-4} = \frac{1}{(3 - i)^4} = \frac{1}{((3 - i)^2)^2} =$
 $= \frac{1}{(9 - 6i + i^2)^2} = \frac{1}{(8 - 6i)^2} =$
 $= \frac{1}{64 - 96i + 36i^2} = \frac{1}{28 - 96i} =$
 $= \frac{28 + 96i}{(28 - 96i)(28 + 96i)} = \frac{28 + 96i}{28^2 - (96i)^2} =$
 $= \frac{28 + 96i}{784 + 9216} = \frac{28}{10\,000} + \frac{96}{10\,000}i =$
 $= \frac{7}{2500} + \frac{6}{625}i$

21.

a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i}{4i} = \frac{(1 + i) \times i}{4i \times i} = \frac{i + i^2}{4i^2} = \frac{-1 + i}{-4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

b) $(z_1)^3 \times z_3 = (1 + i)^3 \times (2 - 3i) =$
 $= (1 + i)^2(1 + i)(2 - 3i) =$
 $= (1 + 2i + i^2)(1 + i)(2 - 3i) =$
 $= 2i \times (1 + i)(2 - 3i) =$
 $= (2i + 2i^2)(2 - 3i) =$
 $= (-2 + 2i)(2 - 3i) =$
 $= -4 + 6i + 4i - 6i^2 =$
 $= -4 + 10i + 6 =$
 $= 2 + 10i$

c) $\frac{\overline{z_2 - z_3}}{i} = \frac{(-4i) - (2 - 3i)}{i} = \frac{-4i - 2 + 3i}{i} =$
 $= \frac{-2 - i}{i} = \frac{(-2 - i) \times i}{i^2} =$
 $= \frac{-2i - i^2}{-1} = \frac{1 - 2i}{-1} =$
 $= -1 + 2i$

d) $z_2 + \frac{\overline{z_3}}{5i^{8n+3}} = 4i + \frac{2 + 3i}{5 \times i^3} = 4i + \frac{2 + 3i}{-5i} =$
 $= 4i + \frac{(2 + 3i) \times i}{-5i \times i} = 4i + \frac{2i + 3i^2}{-5i^2} =$
 $= 4i + \frac{-3 + 2i}{5} = 4i - \frac{3}{5} + \frac{2}{5}i =$
 $= -\frac{3}{5} + \frac{22}{5}i$

e) $z_1 - \frac{i}{z_3} = 1 + i - \frac{i}{2 - 3i} = 1 + i - \frac{i(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} =$
 $= 1 + i - \frac{2i + 3i^2}{2^2 - (3i)^2} = 1 + i - \frac{-3 + 2i}{4 + 9} =$
 $= 1 + i + \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i = \frac{16}{13} + \frac{11}{13}i$

22.

a) $-i + i^2 z = i^4 z + 1 \Leftrightarrow -i - z = z + 1$
 $\Leftrightarrow 2z = -1 - i$
 $\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$$

b) $(3 - i) + (1 + i)z = 5i \Leftrightarrow (1 + i)z = 5i - 3 + i$
 $\Leftrightarrow z = \frac{-3 + 6i}{1 + i}$
 $\Leftrightarrow z = \frac{(-3 + 6i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)}$
 $\Leftrightarrow z = \frac{-3 + 3i + 6i - 6i^2}{1^2 - i^2}$
 $\Leftrightarrow z = \frac{3 + 9i}{1 + 1}$
 $\Leftrightarrow z = \frac{3}{2} + \frac{9}{2}i$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{3}{2} + \frac{9}{2}i \right\}$$

$$c) z - iz = \frac{2-i}{3i} \Leftrightarrow z(1-i) = \frac{2-i}{3i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2-i}{3i(1-i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2-i}{3i-3i^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2-i}{3+3i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(2-i)(3-3i)}{(3+3i)(3-3i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{6-6i-3i+3i^2}{3^2-(3i)^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{6-3-9i}{18}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}i$$

$$C.S. = \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{2}i \right\}$$

23.

$$a) z = \frac{k+i}{k-i} = \frac{(k+i) \times (k+i)}{(k-i)(k+i)} = \frac{k^2 + 2ik + i^2}{k^2 - i^2} =$$

$$= \frac{(k^2-1) + 2ki}{k^2+1} = \frac{k^2-1}{k^2+1} + \frac{2k}{k^2+1}i$$

Para que z seja um número real terá de se verificar $\text{Im}(z) = 0$

Assim:

$$\frac{2k}{k^2+1} = 0 \Leftrightarrow 2k = 0 \wedge \underbrace{k^2+1 \neq 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow k = 0$$

b) Para que z seja um imaginário puro, terá de se verificar $\text{Re}(z) = 0 \wedge \text{Im}(z) \neq 0$.

Assim:

$$\frac{k^2-1}{k^2+1} = 0 \wedge \frac{2k}{k^2+1} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow k^2-1 = 0 \wedge \underbrace{k^2+1 \neq 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}} \wedge 2k \neq 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 1 \wedge k \neq 0$$

$$\Leftrightarrow k = 1 \vee k = -1$$

$$24. \frac{z}{z} = c + di \Leftrightarrow \frac{a+bi}{a-bi} = c + di$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+bi}{a-bi} \times \frac{a+bi}{a+bi} = c + di$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + 2abi + b^2 i^2}{a^2 + b^2} = c + di$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}i = c + di$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = c \wedge \frac{2ab}{a^2 + b^2} = d$$

Então:

$$c^2 + d^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2} \right)^2 =$$

$$= \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} =$$

$$= \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{(a^2 + b^2)^2} =$$

$$= \frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} = 1$$

25.

$$a) \bar{z} + z^{-1} = \bar{z} \left(1 + \frac{z^{-1}}{z} \right) =$$

$$= \bar{z} \left(1 + \frac{1}{z\bar{z}} \right) =$$

$$= \bar{z} \times \frac{z\bar{z} + 1}{z\bar{z}} =$$

$$= \bar{z} \times \frac{|z|^2 + 1}{|z|^2}$$

$$b) \left| \frac{2z}{|z|} - \frac{3i}{\bar{z}} \right| = \left| \frac{2z\bar{z} - 3i|z|^2}{|z|\bar{z}} \right| =$$

$$= \left| \frac{2|z|^2 - 3i|z|^2}{|z|\bar{z}} \right| =$$

$$= \left| \frac{|z|(2-3i)}{\bar{z}} \right| =$$

$$= \frac{|z||2-3i|}{|\bar{z}|} =$$

$$= \frac{|z|\sqrt{2^2 + (-3)^2}}{|z|} =$$

$$= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Unidade 3 - Forma trigonométrica de um número complexo

Páginas 186 a 205

26. $z_1 = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, logo z_1 não é unitário.

$z_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, logo z_2 não é unitário.

$z_3 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$, logo z_3 é unitário.

$z_4 = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1^2} = 1$, logo z_4 é unitário.

$z_5 = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$, logo z_5 é unitário.

$z_6 = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{1} = 1$, logo z_6 é unitário.

$$z_7 = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ logo } z_7 \text{ não é unitário.}$$

27. $\cos(\alpha_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \sin(\alpha_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Por exemplo, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{9\pi}{4}$ são argumentos de z_3 .

$$\cos(\alpha_4) = 0 \wedge \sin(\alpha_4) = 1, \text{ logo}$$

$$\alpha_4 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Por exemplo, $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{3\pi}{2}$ são argumentos de z_4 .

$$\cos(\alpha_5) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \sin(\alpha_5) = -\frac{1}{2}, \text{ logo}$$

$$\alpha_5 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Por exemplo, $\frac{7\pi}{6}$ e $-\frac{5\pi}{6}$ são argumentos de z_5 .

$$\cos(\alpha_6) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \wedge \sin(\alpha_6) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right), \text{ logo}$$

$$\alpha_6 = \frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Por exemplo, $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{11\pi}{5}$ são argumentos de z_6 .

28.

$$\begin{aligned} \text{a) } z_1 \times z_2 &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) i + \\ &\quad + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) i + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) i^2 = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \\ &\quad + \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) i = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{7}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{12\pi}{35}\right) + i \sin\left(\frac{12\pi}{35}\right) \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) i + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) i - \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) i^2}{1} = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \\ &\quad + \left(-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) i = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{7}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{35}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{35}\right) \end{aligned}$$

29. $z_1 = e^{i \frac{\pi}{5}}$

$$z_2 = e^{i \frac{\pi}{7}}$$

$$z_1 z_2 = e^{i \frac{12\pi}{35}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{i \frac{2\pi}{35}}$$

30.

a) $e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1$

b) $e^{i \frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

c) $e^{i \frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$

d) $e^{i\pi} + 1 = \cos \pi + i \sin \pi + 1 = -1 + 1 = 0$

31.

a) $-5 = 5 \times (-1)$

b) $-3i = 3 \times (-i)$

c) $2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}} i\right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

Cálculo auxiliar

$$|2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

d) $3 - 5i = \sqrt{34} \left(\frac{3}{\sqrt{34}} - \frac{5}{\sqrt{34}} i\right) = \sqrt{34} \left(\frac{3\sqrt{34}}{34} - \frac{5\sqrt{34}}{34} i\right)$

Cálculo auxiliar

$$|3 - 5i| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

32.

a) $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) $-3i = 3e^{i(-\frac{\pi}{2})}$

c) $2018 = 2018e^{i0}$

d) $-2019 = 2019e^{i\pi}$

e) $2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) =$
 $= 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) =$
 $= 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

Cálculo auxiliar

$$|2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

33.

a) $|z| = 3 \wedge \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{6}$

$$|w| = 3 \wedge \text{Arg}(w) = \frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$$

z e w são iguais, pois têm módulos iguais e os argumentos diferem de 2π .

b) $|z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \wedge \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$

$$|w| = 2\sqrt{2} \wedge \text{Arg}(w) = \frac{13\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 4\pi$$

z e w são iguais, pois têm módulos iguais e os argumentos diferem de 4π .

c) $|z| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \wedge \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{7}$

$$|w| = 3\sqrt{2} \wedge \text{Arg}(w) = \frac{\pi}{7}$$

z e w não são iguais, pois têm módulos diferentes.

34. $z = re^{i(\theta + \frac{\pi}{3})}$

$$w = 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z = w \Leftrightarrow re^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{2} \wedge \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{2} \wedge \theta = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

35.

a) $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$

$$\text{tg } \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \wedge \theta \in 1.^\circ \text{Q} \Leftrightarrow \text{tg } \theta = \sqrt{3} \wedge \theta \in 1.^\circ \text{Q}$$

Por exemplo, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Assim, $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) $r = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{2 + 6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\text{tg } \theta = \frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{2}} \wedge \theta \in 2.^\circ \text{Q} \Leftrightarrow \text{tg } \theta = -\sqrt{3} \wedge \theta \in 2.^\circ \text{Q}$$

Por exemplo, $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Assim, $-\sqrt{2} + \sqrt{6}i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

c) $r = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\text{tg } \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-3} \wedge \theta \in 3.^\circ \text{Q} \Leftrightarrow \text{tg } \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 3.^\circ \text{Q}$$

Por exemplo, $\theta = \frac{7\pi}{6}$.

Assim, $-3 - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

d) $r = \sqrt{(-\sqrt{12})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$

$$\text{tg } \theta = \frac{2}{-\sqrt{12}} \wedge \theta \in 2.^\circ \text{Q} \Leftrightarrow \text{tg } \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge$$

$$\wedge \theta \in 2.^\circ \text{Q}$$

Por exemplo, $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

Assim, $-\sqrt{12} + 2i = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

e) $r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\text{tg } \theta = \frac{-2}{2} \wedge \theta \in 4.^\circ \text{Q} \Leftrightarrow \text{tg } \theta = -1 \wedge \theta \in 4.^\circ \text{Q}$$

Por exemplo, $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

Assim, $2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$.

f) $3 + i + 3i^2 = 3 + i - 3 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

g) $(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

36.

a) $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) =$
 $= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 1 + i$

c) $4e^{-i\frac{\pi}{6}} = 4 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) =$
 $= 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2\sqrt{3} - 2i$

d) $3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$

e) $8e^{i2018\pi} = 8$

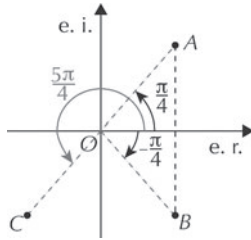
f) $8e^{i2019\pi} = -8$

g) $9e^{i\frac{3\pi}{2}} = -9i$

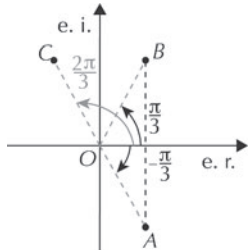
h) $e^{i\frac{7\pi}{4}} = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

37. Sejam A o afixo de z , B o afixo de $\bar{z}$ e C o afixo de $-z$.

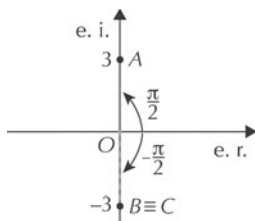
a) $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$
 $\bar{z} = e^{i(-\frac{\pi}{4})}$
 $-z = e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$



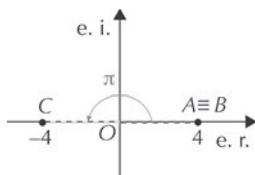
b) $z = 2e^{i(-\frac{\pi}{3})}$
 $\bar{z} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
 $-z = z = 2e^{i(-\frac{\pi}{3}+\pi)} = z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$



c) $z = 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$
 $\bar{z} = 3e^{i(-\frac{\pi}{2})}$
 $-z = 3e^{i(\frac{\pi}{2}+\pi)} = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$



d) $z = 4 = 4e^{i0}$
 $\bar{z} = 4e^{i0}$
 $-z = 4e^{i\pi}$



38.

a) $\cos \theta - i \sin \theta = \overline{\cos \theta + i \sin \theta} = e^{i(-\theta)}$

b) $-\cos \theta - i \sin \theta = -(\cos \theta + i \sin \theta) = -e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)}$

c) $\sin \theta - i \cos \theta = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = e^{i(-\frac{\pi}{2}+\theta)}$

d) $\frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 + \cos \theta - i \sin \theta} = \frac{(1 + \cos \theta + i \sin \theta)(1 + \cos \theta + i \sin \theta)}{(1 + \cos \theta - i \sin \theta)(1 + \cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{(1 + \cos \theta + i \sin \theta)^2}{(1 + \cos \theta)^2 - (i \sin \theta)^2} = \frac{(1 + \cos \theta)^2 + 2(1 + \cos \theta)i \sin \theta + (i \sin \theta)^2}{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} = \frac{(1 + \cos \theta)^2 + 2(1 + \cos \theta) \sin \theta i - \sin^2 \theta}{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{(1 + \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta + 2(1 + \cos \theta) \sin \theta i}{2 + 2 \cos \theta} = \frac{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{2(1 + \cos \theta)} + \frac{2(1 + \cos \theta) \sin \theta i}{2(1 + \cos \theta)} = \frac{\cos^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta}{2(1 + \cos \theta)} + i \sin \theta = \frac{2 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta}{2(1 + \cos \theta)} + i \sin \theta = \frac{2 \cos \theta + (\cos \theta + 1)}{2(1 + \cos \theta)} + i \sin \theta = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$

39.

a) $z_1 \times z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{8}} \times 3e^{i(-\frac{\pi}{4})} = 2 \times 3e^{i(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4})} = 6e^{i(-\frac{\pi}{8})}$

b) $z_1 \times \bar{z}_2 = 2e^{i\frac{\pi}{8}} \times 3e^{i\frac{\pi}{4}} = 2 \times 3e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4})} = 6e^{i\frac{3\pi}{8}}$

c) $z_1 \times z_2 = 3e^{i(-\frac{\pi}{4})} \times 3e^{i(-\frac{\pi}{4})} = 3 \times 3e^{i(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})} = 9e^{i(-\frac{\pi}{2})}$

d) $z_1 \times z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{8}} \times 5i = 2e^{i\frac{\pi}{8}} \times 5e^{i\frac{\pi}{2}} = 10e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2})} = 10e^{i\frac{5\pi}{8}}$

e) $z_1 \times z_2 \times z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{8}} \times 3e^{i(-\frac{\pi}{4})} \times 5e^{i\frac{\pi}{2}} = 6e^{i(-\frac{\pi}{8})} \times 5e^{i\frac{\pi}{2}} = 30e^{i(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2})} = 30e^{i\frac{3\pi}{8}}$

40. $z \times \bar{z} = re^{i\theta} \times re^{i(-\theta)} = r \times re^{i(\theta-\theta)} = r^2 e^{i0} = r^2 = |z|^2$

41.

a) $z = 1 + i$

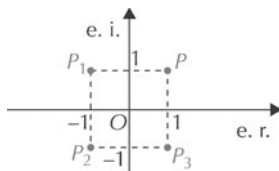
$$iz = i(1 + i) = i + i^2 = -1 + i$$

$$i^2z = i^2(1 + i) = -1 \times (1 + i) = -1 - i$$

$$i^3z = -i(1 + i) = -i - i^2 = 1 - i$$

Sejam P, P_1, P_2 e P_3 os afixos de z, iz, i^2z e i^3z , respectivamente.

$$P(1, 1); P_1(-1, 1); P_2(-1, -1) \text{ e } P_3(1, -1)$$



b) O polígono $[PP_1P_2P_3]$ é um quadrado de lado 2, logo a sua área é 4.

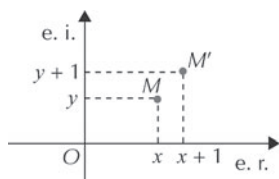
42. Opção (D)

A multiplicação de um número complexo por $-i$ corresponde à rotação centrada na origem do vetor que é a sua imagem vetorial segundo um ângulo de amplitude -90° .

Assim, das opções apresentadas, o afixo de $-iz$ é z_4 .

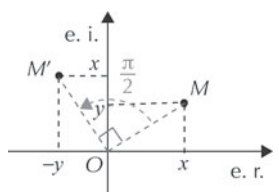
43.

a) $f(x + yi) = x + yi + 1 + i = (x + 1) + (y + 1)i$



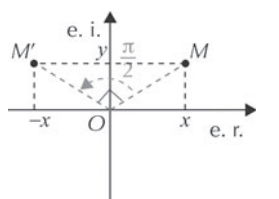
Translação associada ao vetor $\vec{u}(1, 1)$.

b) $f(x + yi) = i(x + yi) = -y^2 + xi$



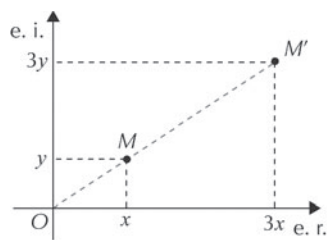
Rotação de centro O e amplitude $\frac{\pi}{2}$.

c) $f(x + yi) = -(x - yi) = -x + yi$



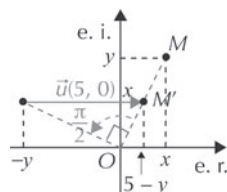
Reflexão axial cujo eixo é o eixo imaginário.

d) $f(x + yi) = 3(x + yi) = 3x + 3yi$



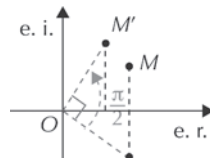
Homotetia de centro O e razão 3.

e) $f(x + yi) = i(x + yi) + 5 = xi - y + 5 = (5 - y) + xi$



Rotação de centro O e amplitude $\frac{\pi}{2}$, composta de uma translação associada ao vetor $\vec{u}(5, 0)$.

f) $f(x + yi) = i(x - yi) = xi + y = y + xi$



Reflexão axial cujo eixo é o eixo real, composta de uma rotação de centro O e amplitude $\frac{\pi}{2}$.

44.

a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{3\pi}{5}}}{e^{i(-\frac{\pi}{10})}} = 2e^{i(\frac{3\pi}{5} + \frac{\pi}{10})} = 2e^{i\frac{7\pi}{10}}$

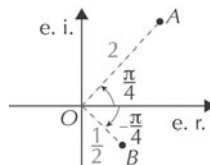
b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{3\pi}{5}}}{e^{i\frac{\pi}{10}}} = 2e^{i(\frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{10})} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

c) $\frac{3}{z_2} = \frac{3e^{i0}}{e^{i(-\frac{\pi}{10})}} = 3e^{i\frac{\pi}{10}}$

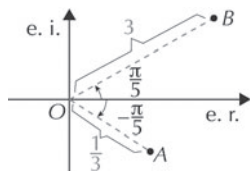
d) $\frac{-6i}{z_2} = \frac{6e^{i(-\frac{\pi}{2})}}{e^{i(-\frac{\pi}{10})}} = 6e^{i(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10})} = 6e^{i(-\frac{2\pi}{5})}$

45. Sejam A o afixo de z e B o afixo do inverso de z .

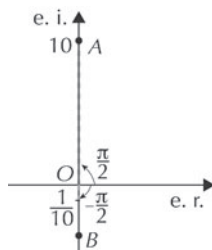
a) $\frac{1}{z} = \frac{e^{i0}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$



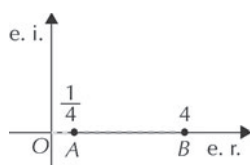
$$b) \frac{1}{z} = \frac{e^{i0}}{\frac{1}{3}e^{i(-\frac{\pi}{5})}} = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$$



$$c) \frac{1}{z} = \frac{e^{i0}}{10e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{10}e^{i(-\frac{\pi}{2})}$$



$$d) \frac{1}{z} = \frac{e^{i0}}{\frac{1}{4}e^{i0}} = 4e^{i0}$$



46.

$$a) \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \right)^3 = \left(e^{i\frac{\pi}{7}} \right)^3 = e^{i\frac{3\pi}{7}}$$

$$b) \left(3e^{i\frac{2\pi}{5}} \right)^5 = 3^5 e^{i\frac{10\pi}{5}} = 243e^{i0}$$

$$c) (-1 - \sqrt{3}i)^4 = \left(2e^{i\frac{4\pi}{3}} \right)^4 = 2^4 e^{i\frac{16\pi}{3}} = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Cálculo auxiliar

$$r = |-1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{3} \quad \theta \wedge \theta \in 3.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Por exemplo, } \theta = \frac{4\pi}{3}.$$

$$d) \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^8 = \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}} \right)^8 = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^8 = e^{i2\pi} = e^{i0}$$

47.

$$a) z_1 \times z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{5}} \times (-1+i) = 2e^{i\frac{\pi}{5}} \times \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{4})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{20}}$$

$$b) \frac{1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(-\frac{3\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(-\frac{3\pi}{4})}$$

$$c) -z_1 = -2e^{i\frac{\pi}{5}} = 2e^{i(\pi + \frac{\pi}{5})} = 2e^{i\frac{6\pi}{5}}$$

$$d) \frac{(z_1)^3}{z_2} = \frac{(2e^{i\frac{\pi}{5}})^3}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{8e^{i\frac{3\pi}{5}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = 4\sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{5} - \frac{3\pi}{4})} = 4\sqrt{2}e^{i(-\frac{3\pi}{20})}$$

$$e) \frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2} = 2e^{i(-\frac{\pi}{5})} \times \frac{1}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = 2e^{i(-\frac{\pi}{5})} \times \frac{1}{2}e^{i(-\frac{3\pi}{4})} = e^{i(-\frac{2\pi}{5})}$$

$$f) (z_1)^5 + z_2 + i^{11} = \left(2e^{i\frac{\pi}{5}} \right)^5 - 1 + i + i^3 = 32e^{i\pi} - 1 + i - i = -32 - 1 = -33 = 33e^{i\pi}$$

48.

$$a) \frac{(3+i)^2}{2-i} - 2 = \frac{9+6i+i^2}{2-i} - 2 = \frac{(8+6i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} - 2 = \frac{16+8i+12i+6i^2}{2^2-i^2} - 2 = \frac{10+20i}{5} - 2 = 2+4i-2 = 4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$b) 3i + \frac{(2-i)^3 - 8i^{43}}{1-i} = 3i + \frac{(2-i)^2(2-i) - 8 \times i^3}{1-i} = 3i + \frac{(4-4i+i^2)(2-i) + 8i}{1-i} = 3i + \frac{(3-4i)(2-i) + 8i}{1-i} = 3i + \frac{6-3i-8i+4i^2+8i}{1-i} = 3i + \frac{2-3i}{1-i} = 3i + \frac{(2-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 3i + \frac{2+2i-3i-3i^2}{1^2-i^2} = 3i + \frac{5-i}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i + 3i = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i = \frac{5\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Cálculo auxiliar

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} \quad \theta \wedge \theta \in 1.^\circ \text{Q}$$

$$\operatorname{tg} \theta = 1 \quad \theta \wedge \theta \in 1.^\circ \text{Q}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\pi}{4}, \text{ por exemplo.}$$

49.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad \frac{\bar{z}}{z+1} &= \frac{2e^{i(-\frac{4\pi}{3})}}{2e^{i\frac{4\pi}{3}}+1} = \\
 &= \frac{2e^{i(-\frac{4\pi}{3})}}{2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) + 1} = \\
 &= \frac{2e^{i(-\frac{4\pi}{3})}}{2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1} = \\
 &= \frac{2e^{i(-\frac{4\pi}{3})}}{-1 - \sqrt{3}i + 1} = \\
 &= \frac{2e^{i(-\frac{4\pi}{3})}}{-\sqrt{3}i} = \\
 &= \frac{2e^{i(-\frac{4\pi}{3})}}{\sqrt{3}e^{i(-\frac{\pi}{2})}} = \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{i\left(-\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)} = \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad w^2 = z &\Leftrightarrow (re^{i\theta})^2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \\
 &\Leftrightarrow r^2 e^{i2\theta} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \\
 &\Leftrightarrow r^2 = 2 \wedge 2\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{r = \sqrt{2}}_{r > 0} \wedge \theta = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{w}{z} = \frac{re^{i\theta}}{2e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \frac{r}{2} e^{i\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)}$$

Para que $\frac{w}{z}$ seja um número real negativo, r tem de ser um número real maior do que 0 e

$$\theta - \frac{4\pi}{3} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{7\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Unidade 4 - Raízes n -ésimas de números complexos

Páginas 206 a 215

50.

a) i é uma raiz quarta de 1, pois $i^4 = 1$.

b) $2 + i$ é uma raiz quadrada de $3 + 4i$, pois

$$(2 + i)^2 = 3 + 4i.$$

$$(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$$

c) $1 + i$ é uma raiz de ordem 8 de 16, pois $(1 + i)^8 = 16$.
 $(1 + i)^8 = ((1 + i)^2)^4 = (1 + 2i + i^2)^4 = (2i)^4 = 2^4 i^4 = 16$

51. As raízes quadradas de $z = 2i$ são os números complexos $w = a + bi$ tais que $w^2 = z$, isto é:

$$(a + bi)^2 = 2i \Leftrightarrow a^2 + 2abi + (bi)^2 = 2i$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2abi + b^2 i^2 = 2i$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = 2i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 \\ ab = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ ab = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -b \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a^2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -b \\ -b^2 = 1 \end{cases}$$

condição impossível em $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = b \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} b = -1 \\ a = -1 \end{cases}$$

As raízes quadradas de $2i$ são os números complexos $1 + i$ e $-1 - i$.

52.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad z^4 = -1 &\Leftrightarrow (re^{i\theta})^4 = e^{i\pi} \\
 &\Leftrightarrow r^4 e^{i4\theta} = e^{i\pi} \\
 &\Leftrightarrow r^4 = 1 \wedge 4\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{r = 1}_{r > 0} \wedge \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

$$\text{Se } k = 2, \text{ então } z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

$$\text{Se } k = 3, \text{ então } z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

$$\text{C.S.} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}} \right\}$$

$$\text{b)} \quad z^5 = 32e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow (re^{i\theta})^5 = 32e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow r^5 e^{i5\theta} = 32e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow r^5 = 32 \wedge 5\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow r = 2 \wedge \theta = \frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{30}}.$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } z_1 = 2e^{i\frac{13\pi}{30}}.$$

Se $k = 2$, então $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Se $k = 3$, então $z_3 = 2e^{i\frac{37\pi}{30}}$.

Se $k = 4$, então $z_4 = 2e^{i\frac{49\pi}{30}}$.

C.S. = $\left\{ 2e^{i\frac{\pi}{30}}, 2e^{i\frac{13\pi}{30}}, 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, 2e^{i\frac{37\pi}{30}}, 2e^{i\frac{49\pi}{30}} \right\}$

c) $z^3 = -2\sqrt{3} + 6i$

Cálculo auxiliar

Seja $w = -2\sqrt{3} + 6i$.

$|w| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{48}$

$\operatorname{tg} \theta = \frac{6}{-2\sqrt{3}} \wedge \theta \in 2.^\circ Q \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3} \wedge \theta \in 2.^\circ Q$

$\theta = \frac{2\pi}{3}$, por exemplo.

$\Leftrightarrow (re^{i\theta})^3 = \sqrt{48}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow r^3e^{i3\theta} = \sqrt{48}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow r^3 = \sqrt{48} \wedge 3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\sqrt{48}} \wedge \theta = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow r = \sqrt[6]{48} \wedge \theta = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$, então $z_0 = \sqrt[6]{48}e^{i\frac{2\pi}{9}}$.

Se $k = 1$, então $z_1 = \sqrt[6]{48}e^{i\frac{8\pi}{9}}$.

Se $k = 2$, então $z_2 = \sqrt[6]{48}e^{i\frac{14\pi}{9}}$.

C.S. = $\left\{ \sqrt[6]{48}e^{i\frac{2\pi}{9}}, \sqrt[6]{48}e^{i\frac{8\pi}{9}}, \sqrt[6]{48}e^{i\frac{14\pi}{9}} \right\}$

53. Opção (B)

Os afixos das raízes índice 4 de w são vértices de um quadrado centrado na origem. Das opções apresentadas apenas a (B) reúne estas condições.

54.

a) $\sqrt{3} - i = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

Cálculo auxiliar

$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} \wedge \theta \in 4.^\circ Q \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 4.^\circ Q$

$\theta = -\frac{\pi}{6}$, por exemplo.

As raízes cúbicas de $2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ são os números complexos z_k tais que:

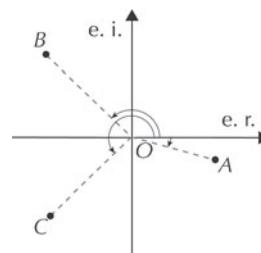
$z_k = \sqrt[3]{2}e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}$

Se $k = 0$, então $z_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{18}\right)}$.

Se $k = 1$, então $z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{11\pi}{18}}$.

Se $k = 2$, então $z_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{23\pi}{18}}$.

Sejam A, B e C os afixos dos números complexos z_0, z_1 e z_2 , respectivamente.



$[ABC]$ é um triângulo equilátero centrado na origem.

b) $-81 = 81e^{i\pi}$

As raízes quartas de $81e^{i\pi}$ são os números complexos z_k tais que:

$z_k = \sqrt[4]{81}e^{i\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$\Leftrightarrow z_k = 3e^{i\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$

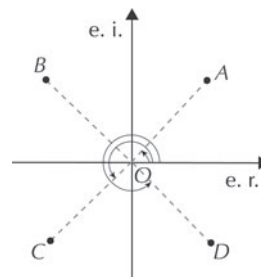
Se $k = 0$, então $z_0 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Se $k = 1$, então $z_1 = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Se $k = 2$, então $z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Se $k = 3$, então $z_3 = 3e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

Sejam A, B, C e D os afixos dos números complexos z_0, z_1, z_2 e z_3 , respectivamente.



$[ABCD]$ é um quadrado centrado na origem.

c) $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

As raízes de ordem 6 de $e^{i\frac{\pi}{2}}$ são os números complexos z_k tais que:

$z_k = \sqrt[6]{1}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$\Leftrightarrow z_k = e^{i\left(\frac{\pi + 4k\pi}{12}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Se $k = 0$, então $z_0 = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Se $k = 1$, então $z_1 = e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

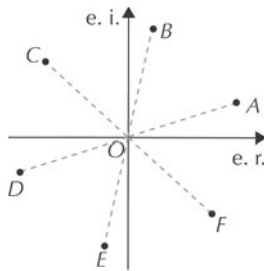
Se $k = 2$, então $z_2 = e^{i\frac{9\pi}{12}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Se $k = 3$, então $z_3 = e^{i\frac{13\pi}{12}}$.

Se $k = 4$, então $z_4 = e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

Se $k = 5$, então $z_5 = e^{i\frac{21\pi}{12}} = e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

Sejam A, B, C, D, E e F os afijos dos números complexos z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 , respectivamente.



$[ABCDEF]$ é um hexágono regular centrado na origem.

55.

$$\begin{aligned} \text{a) } z^6 = 2 &\Leftrightarrow (re^{i\theta})^6 = 2e^{i0} \\ &\Leftrightarrow r^6 e^{i6\theta} = 2e^{i0} \\ &\Leftrightarrow r^6 = 2 \wedge 6\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow r = \sqrt[6]{2} \wedge \theta = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Se $k = 0$, então $z_0 = \sqrt[6]{2}e^{i0}$.

Se $k = 1$, então $z_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Se $k = 2$, então $z_2 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Se $k = 3$, então $z_3 = \sqrt[6]{2}e^{i\pi}$.

Se $k = 4$, então $z_4 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Se $k = 5$, então $z_5 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

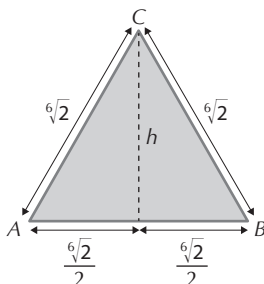
Os afijos de z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 pertencem à circunferência centrada na origem do referencial de raio $\sqrt[6]{2}$, pois z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 têm módulo $\sqrt[6]{2}$.

Os ângulos ao centro formados por cada par da forma z_k, z_{k+1} têm amplitude $\frac{\pi}{3}$, o que significa que

as distâncias entre os afijos z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 são iguais.

Assim, os afijos z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 são vértices de um hexágono regular.

b)



Sejam A e B os afijos de z_0 e z_1 , respectivamente e seja O o centro da circunferência centrada na origem e de raio $\sqrt[6]{2}$, a que pertencem os afijos z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 . Seja h a medida da altura do triângulo $[ABC]$ relativamente à base $[AB]$.

Pelo teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} (\sqrt[6]{2})^2 &= \left(\frac{\sqrt[6]{2}}{2}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = \sqrt[6]{2} - \frac{\sqrt[6]{2}}{4} \\ &\Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{4} \sqrt[6]{2} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } h = \frac{\sqrt{3\sqrt[6]{2}}}{2} = \frac{\sqrt[6]{54}}{2}.$$

$$\text{Assim, } A_{[ABC]} = \frac{\sqrt[6]{2} \times \frac{\sqrt[6]{54}}{2}}{2} = \frac{\sqrt[6]{108}}{4}.$$

Então, a área do polígono formado pelos afijos de z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 é $6 \times \frac{\sqrt[6]{108}}{4} = \frac{3}{2} \sqrt[6]{108}$.

56. Os módulos de qualquer raiz de ordem 6 de w são iguais. Neste caso, $|z| = 3$ e os argumentos das raízes correspondentes a valores de k consecutivos formam uma progressão aritmética de diferença $\frac{2\pi}{n}$. Neste caso, $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Assim, se $z = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$ é uma raiz de ordem 6 de w , então as restantes cinco raízes são:

$$z_1 = 3e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} = 3e^{i\pi}$$

$$z_2 = 3e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)} = 3e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$z_3 = 3e^{i\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} = 3e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

$$z_4 = 3e^{i\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} = 3e^{i2\pi}$$

$$z_5 = 3e^{i\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)} = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$$

57. A, B e C são os afijos dos números complexos z_0, z_1 e z_2 que são raízes cúbicas de um determinado número complexo.

Assim:

$$z_2 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}: \text{ponto } C(0, -3)$$

$$\begin{aligned} z_0 &= 3e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 3e^{i\frac{\pi}{6}} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i; \end{aligned}$$

$$\text{ponto } B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= 3e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 3e^{i\frac{5\pi}{6}} = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \\ &= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i; \end{aligned}$$

$$\text{ponto } A\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

58. Como z_1 e z_2 são duas raízes consecutivas de um certo número complexo, então os seus argumentos diferem de $\frac{2\pi}{n}$.

Assim:

$$\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{6} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n = 6$$

Como $z_1 = 2e^{i(-\frac{\pi}{6})}$ e $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, então as restantes raízes índice 6 de z são:

$$z_3 = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6})} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_4 = 2e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{6})} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_5 = 2e^{i(\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{6})} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

$$z_6 = 2e^{i(\frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{6})} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

59.

a) $z^6 + 2z^3 - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow z^3 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z^3 = 2 \vee z^3 = -4$$

$$\Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = 2e^{i0} \vee r^3 e^{i3\theta} = 4e^{i\pi}$$

$$\Leftrightarrow (r = \sqrt[3]{2} \wedge 3\theta = 2k\pi) \vee (r = \sqrt[3]{2} \wedge 3\theta = \pi + 2k\pi),$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left(r = \sqrt[3]{2} \wedge \theta = \frac{2k\pi}{3}\right) \vee \left(r = \sqrt[3]{2} \wedge \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right),$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, então $z = \sqrt[3]{2}e^{i0} \vee z = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Se $k = 1$, então $z = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} \vee z = \sqrt[3]{2}e^{i\pi}$.

Se $k = 2$, então $z = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{4\pi}{3}} \vee z = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

$$\text{C.S.} = \left\{ \sqrt[3]{2}e^{i0}, \sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}, \sqrt[3]{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}, \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}}, \sqrt[3]{2}e^{i\pi}, \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} \right\}$$

b) $z^3 = i^{14} + i^{15} + i^{16}$

$$\Leftrightarrow z^3 = i^2 + i^3 + i^0$$

$$\Leftrightarrow z^3 = -1 - i + 1$$

$$\Leftrightarrow z^3 = -i$$

$$\Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = e^{i(-\frac{\pi}{2})}$$

$$\Leftrightarrow r^3 = 1 \wedge 3\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow r = 1 \wedge \theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, então $z = e^{i(-\frac{\pi}{6})}$.

Se $k = 1$, então $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Se $k = 2$, então $z = e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

$$\text{C.S.} = \left\{ e^{i(-\frac{\pi}{6})}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{7\pi}{6}} \right\}$$

c) $(1 + i)z^5 = 3i$

$$\Leftrightarrow z^5 = \frac{3i}{1+i}$$

$$\Leftrightarrow z^5 = \frac{3i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}$$

$$\Leftrightarrow z^5 = \frac{3i - 3i^2}{1+1}$$

$$\Leftrightarrow z^5 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

Cálculo auxiliar

$$r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} \wedge \theta \in 1.^\circ \text{Q} \Leftrightarrow \text{tg } \theta = 1 \wedge \theta \in 1.^\circ \text{Q}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \text{ por exemplo.}$$

$$\Leftrightarrow r^5 e^{i5\theta} = \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow r^5 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \wedge 5\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow r^5 = \sqrt[5]{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \wedge \theta = \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, então $z = \sqrt[5]{\frac{3\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{\pi}{20}}$.

Se $k = 1$, então $z = \sqrt[5]{\frac{3\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{9\pi}{20}}$.

Se $k = 2$, então $z = \sqrt[5]{\frac{3\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{17\pi}{20}}$.

Se $k = 3$, então $z = \sqrt[5]{\frac{3\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Se $k = 4$, então $z = \sqrt[5]{\frac{3\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{33\pi}{20}}$.

$$\text{C.S.} = \left\{ \sqrt[5]{\frac{3\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{\pi}{20}}, \sqrt[5]{\frac{3\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{9\pi}{20}}, \sqrt[5]{\frac{3\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{17\pi}{20}}, \sqrt[5]{\frac{3\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{5\pi}{4}}, \sqrt[5]{\frac{3\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{33\pi}{20}} \right\}$$

d) $\bar{z}^3 - 3z = 0$

$$\Leftrightarrow \bar{z}^3 = 3z$$

$$\Leftrightarrow (re^{i(-\theta)})^3 = 3re^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow r^3 e^{i(-3\theta)} = 3re^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow r^3 = 3r \wedge -3\theta = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow r(r^2 - 3) = 0 \wedge -4\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(r = 0 \wedge \theta = \frac{k\pi}{2}\right)}_{\text{se } r = 0, \text{ então } z = 0} \vee \underbrace{\left(r = \sqrt{3} \wedge \theta = \frac{k\pi}{2}\right)}_{r > 0}, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, então $z = \sqrt{3}e^{i0} = \sqrt{3}$.

Se $k = 1$, então $z = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}i$.

Se $k = 2$, então $z = \sqrt{3}e^{i\pi} = -\sqrt{3}$.

Se $k = 3$, então $z = \sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -\sqrt{3}i$.

C.S. = $\{0, \sqrt{3}, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}i\}$

60.

a) $2x^2 + 3x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times 4}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-23}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{23}i}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}i \vee x = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}i$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}i, -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}i \right\}$$

b) $x^3 + 16x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = -16$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{-16}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 4i$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4i \vee x = -4i$$

$$\text{C.S.} = \{0, 4i, -4i\}$$

c) $3x^3 + 2x^2 + x = 0$

$$\Leftrightarrow x(3x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i \vee x = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$$

$$\text{C.S.} = \left\{ 0, -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i, -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i \right\}$$

61.

a) $z^2 + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 = -8$$

$$\Leftrightarrow r^2 e^{i2\theta} = 8e^{i\pi}$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 8 \wedge 2\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{r = 2\sqrt{2}}_{r > 0} \wedge \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, então $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}i$.

Se $k = 1$, então $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2\sqrt{2}i$.

C.S. = $\{2\sqrt{2}i, -2\sqrt{2}i\}$

b) $z^2 - 2z = -4$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2z + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 1 + \sqrt{3}i \vee z = 1 - \sqrt{3}i$$

C.S. = $\{1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i\}$

c) $4z^3 + 13z = -17$

$$\Leftrightarrow 4z^3 + 13z + 17 = 0$$

Cálculo auxiliar

	4	0	13	17
-1		-4	4	-17
	4	-4	17	0

$$\Leftrightarrow z = -1 \vee 4z^2 - 4z + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \vee z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 272}}{8}$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \vee z = \frac{4 \pm 16i}{8}$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \vee z = \frac{1}{2} + 2i \vee z = \frac{1}{2} - 2i$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -1, \frac{1}{2} + 2i, \frac{1}{2} - 2i \right\}$$

62.

a) $2z^2 - 6z + 29 = 0$

$$\Leftrightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 232}}{4}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{6 \pm 14i}{4}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}i \vee z = \frac{3}{2} - \frac{7}{2}i$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{3}{2} + \frac{7}{2}i, \frac{3}{2} - \frac{7}{2}i \right\}$$

b) $z^3 + 2z^2 + 5z = 0$

$$\Leftrightarrow z(z^2 + 2z + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 + 2z + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \frac{-2 \pm 4i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = -1 + 2i \vee z = -1 - 2i$$

C.S. = $\{0, -1 + 2i, -1 - 2i\}$

c) $z^4 - 2z^2 - 15 = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z^2 = 5 \vee z^2 = -3$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{5} \vee z = -\sqrt{5} \vee z = \sqrt{3}i \vee z = -\sqrt{3}i$$

$$\text{C.S.} = \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\}$$

d) $iz^3 - z^2 - 2 = 0$

Cálculo auxiliar

	i	-1	0	-2
i		-1	$-2i$	2
	i	-2	$-2i$	0

$$\Leftrightarrow (z-i)(iz^2 - 2z - 2i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z-i=0 \vee iz^2 - 2z - 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow z=i \vee z = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2i}$$

$$\Leftrightarrow z=i \vee z = \frac{2 \pm 2i}{2i}$$

$$\Leftrightarrow z=i \vee z = \frac{1+i}{i} \vee z = \frac{1-i}{i}$$

$$\Leftrightarrow z=i \vee z=-i-i^2 \vee z=-i+i^2$$

$$\Leftrightarrow z=i \vee z=1-i \vee z=-1-i$$

$$\text{C.S.} = \{i, 1-i, -1-i\}$$

63. $\begin{cases} z+w=2 \\ zw=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+bi+c+di=2 \\ (a+bi)(c+di)=10 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c=2 \\ b+d=0 \\ ac+adi+bc-i-bd=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2-c \\ b=-d \\ ac-bd=10 \\ ad+bc=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-c)c - (-d)d = 10 \\ (2-c)d + (-d)c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c-c^2+d^2=10 \\ 2d-cd-cd=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2d(1-c)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -c^2+2c-10=0 \\ d=0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1+d^2=10 \\ c=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{-2} \\ \text{condição impossível em } \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} d^2=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ d=3 \\ c=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ d=-3 \\ c=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (z=1-3i \wedge w=1+3i)$$

$$\vee (z=1+3i \wedge w=1-3i)$$

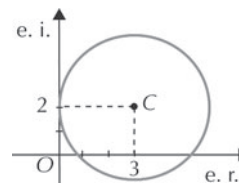
Unidade 5 - Conjuntos de pontos definidos por condições sobre números complexos

Páginas 216 a 224

64.

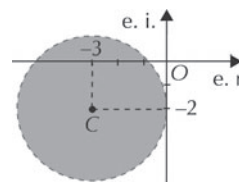
a) $|z-3-2i|=3 \Leftrightarrow |z-(3+2i)|=3$

Representa a circunferência de centro no afixo de $z_1=3+2i$ e raio 3.



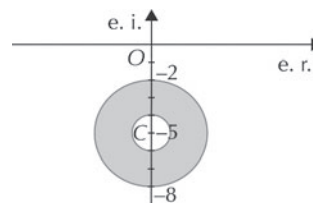
b) $|z+3+2i|<3 \Leftrightarrow |z-(-3-2i)|<3$

Representa o interior do círculo de centro no afixo de $z_1=-3-2i$ e raio 3.



c) $1 \leq |z+5i| \leq 3 \Leftrightarrow |z-(-5i)| \geq 1 \wedge |z-(-5i)| \leq 3$

Representa a interseção do exterior da circunferência (incluindo a fronteira) de centro no afixo de $z_1=-5i$ e raio 1, com o círculo com o mesmo centro e raio 3.



65. $z_1 = 1 + \sqrt{7}i$ raio = 3

$$z_0 = 0$$

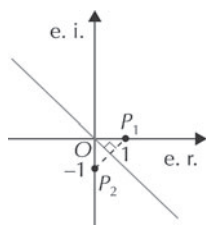
$$\begin{aligned} |z_1 - z_0| &= |1 + \sqrt{7}i - 0| = \\ &= \sqrt{1^2 + (\sqrt{7})^2} = \\ &= \sqrt{1+7} = \\ &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

Como $|z_1 - z_0| < 3$, então o afixo de z_1 encontra-se no interior da circunferência de centro na origem e raio 3.

66.

a) $|z+i|=|z-1| \Leftrightarrow |z-(-i)|=|z-1|$

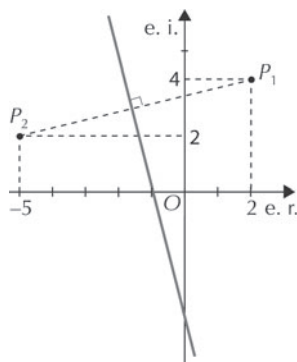
Representa a mediatriz do segmento de reta $[P_1P_2]$ que tem como extremos os afijos de $z_1=-i$ e $z_2=1$.



b) $|z - 2 - 4i| = |z + 5 - 2i|$

$\Leftrightarrow |z - (2 + 4i)| = |z - (-5 + 2i)|$

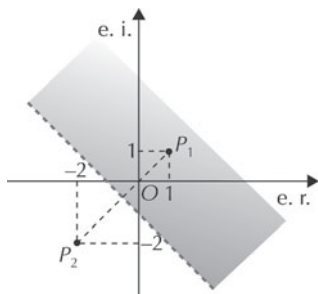
Representa a mediatriz do segmento de reta $[P_1P_2]$ cujos extremos são os afijos de $z_1 = 2 + 4i$ e $z_2 = -5 + 2i$.



c) $|1 + i - z| < |z + 2 + 2i|$

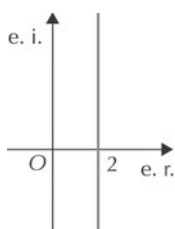
$\Leftrightarrow |z - (1 + i)| < |z - (-2 - 2i)|$

Representa o semiplano aberto definido pela mediatriz de $[P_1P_2]$ e que contém o ponto P_1 , onde P_1 e P_2 são os afijos de $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = -2 - 2i$, respectivamente.

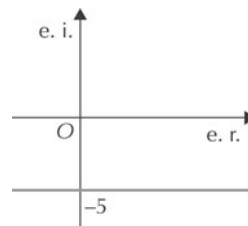


67.

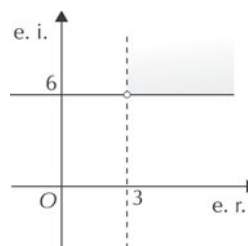
a) $\text{Re}(z) = 2$ representa a reta vertical que passa no ponto das coordenadas (2, 0).



b) $\text{Im}(z) = -5$ representa a reta horizontal que passa no ponto das coordenadas (0, -5).



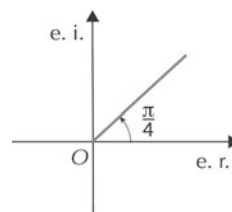
c) $\text{Re}(z) > 3 \wedge \text{Im}(z) \geq 6$



68.

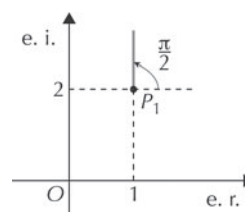
a) $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$

Representa a semirreta com origem em O e que faz um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ rad com o semieixo real positivo.



b) $\text{Arg}(z - 1 - 2i) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \text{Arg}(z - (1 + 2i)) = \frac{\pi}{2}$

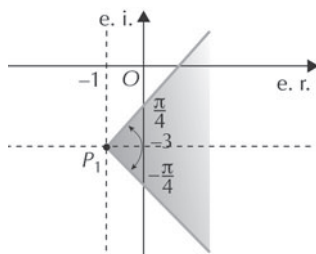
Representa a semirreta com origem no afixo de $z_1 = 1 + 2i$ e que faz um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ rad com o semieixo real positivo.



c) $-\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z + 1 + 3i) \leq \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z - (-1 - 3i)) \leq \frac{\pi}{4}$

Representa o ângulo do vértice no afixo de $z_1 = -1 - 3i$ (P_1) cujos lados origem e extremidade são as semirretas de origem em P_1 e que fazem um ângulo de $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$ rad, respectivamente, com o semieixo real positivo.

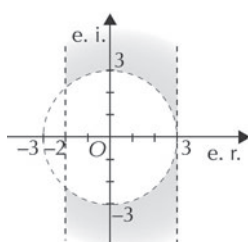


69.

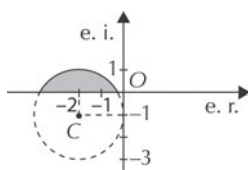
a) $-2 < \operatorname{Re}(z) < 3 \wedge \left| \frac{1}{z} \right| < \frac{1}{3}$

Cálculo auxiliar

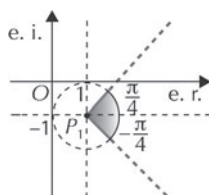
$$\left| \frac{1}{z} \right| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow |z| > 3$$



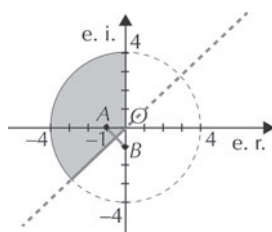
b) $|z + 2 + i| \wedge \operatorname{Im}(z) \geq 0$



c) $-\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z - 1 + i) \leq \frac{\pi}{4} \wedge |z - 1 + i| \leq 1$



70. $|z| \leq 4 \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 0 \wedge |z + 1| \leq |z + i|$



Observe-se que o conjunto de pontos que a condição em variável complexa $|z + 1| = |z + i|$ corresponde, em $\mathbb{R}^2$, à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Assim, a área a sombreado é $\frac{3}{8}$ da área do círculo de centro na origem e raio 4:

$$A = \frac{3}{8} \times \pi \times 4^2 = 6\pi$$

71.

a) $|z - (3 - 3i)| \leq 2 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq 0$

b) $\left| z - \left(\frac{7}{2} + 3i \right) \right| = 3 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg} \left(z - \left(\frac{7}{2} + 3i \right) \right) \leq \pi$

c) $0 \leq \operatorname{Arg}(z - (2 - 4i)) \leq \frac{\pi}{5} \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 6$

d) $1 \leq |z - i| \leq 2 \wedge 1 \leq |z + i| \leq 2$

72. $\left| \frac{z-1-i}{z+1+i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z - (1 + i)| = |z - (-1 - i)|$

Representa a mediatriz do segmento de reta $[AB]$, onde A é o afixo de $1 + i$ e B é o afixo de $-1 - i$.

73. $2|z - 1| = |z + 2|$

Sendo $z = x + yi$:

$$2|(x + yi) - 1| = |(x + yi) + 2|$$

$$\Leftrightarrow 2|(x - 1) + yi| = |(x + 2) + yi|$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{(x - 1)^2 + y^2})^2 = (\sqrt{(x + 2)^2 + y^2})^2$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - 2x + 1 + y^2) = x^2 + 4x + 4 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 = x^2 + 4x + 4 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 12x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2^2 + y^2 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 4$$

Representa uma circunferência de centro no ponto de coordenadas $(2, 0)$ e raio 2.

74.

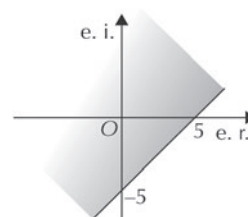
a) $\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) \leq 5$

Sendo $z = x + yi$:

$$\operatorname{Re}(x + yi) - \operatorname{Im}(x + yi) \leq 5 \Leftrightarrow x - y \leq 5$$

$$\Leftrightarrow -y \leq -x + 5$$

$$\Leftrightarrow y \geq x - 5$$



b) $z \times \bar{z} \leq 4 \operatorname{Re}(z)$

Sendo $z = x + yi$:

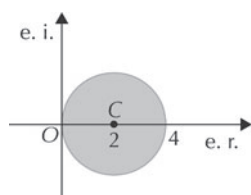
$$(x + yi) \times (x - yi) \leq 4 \operatorname{Re}(x + yi)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (yi)^2 \leq 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2^2 + y^2 \leq 2^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 \leq 4$$



c) $z \times \bar{z} = -z - \bar{z}$

Seja $z = x + yi$:

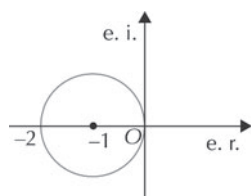
$$(x + yi) \times (x - yi) = -(x + yi) - (x - yi)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (yi)^2 = -x - yi - x + yi$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = -2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 1$$



d) $\text{Im} \left(\frac{1}{z + 2} \right) \geq 1$

Seja $z = x + yi$:

$$\text{Im} \left(\frac{1}{x + yi + 2} \right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \text{Im} \left(\frac{1}{(x + 2) + yi} \right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \text{Im} \left(\frac{(x + 2) - yi}{((x + 2) + yi)((x + 2) - yi)} \right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \text{Im} \left(\frac{(x + 2) - yi}{(x + 2)^2 - (yi)^2} \right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \text{Im} \left(\frac{x + 2}{(x + 2)^2 + y^2} - \frac{y}{(x + 2)^2 + y^2} i \right) \geq 1$$

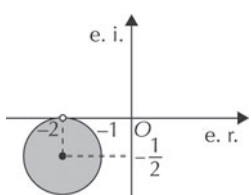
$$\Leftrightarrow -\frac{y}{(x + 2)^2 + y^2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -y \geq (x + 2)^2 + y^2 \wedge (x, y) \neq (-2, 0)$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 + y \leq 0 \wedge (x, y) \neq (-2, 0)$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 + y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \wedge (x, y) \neq (-2, 0)$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$



Aprende Fazendo

Páginas 234 a 242

1. Opção (B)

Tem-se que:

$$i^3 = -i$$

$$i^6 = i^2 = -1$$

$$e^{i \frac{\pi}{2}} = i$$

$$e^{i \frac{3\pi}{2}} = -i$$

Assim, o número complexo $i^6 = -1$ não é um imaginário puro, mas sim um número real.

2. Opção (B)

$$z = \sqrt{3}i^{18} + i^{27} = \sqrt{3}i^2 + i^3 = -\sqrt{3} - i$$

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

3. Opção (A)

Se $\text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{7}$, então $\text{Arg}(\bar{z}) = -\left(-\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$.

4. Opção (D)

$$i^2 = -1 \text{ e } (-1)^2 = 1$$

$$(-i)^2 = -1 \text{ e } 1^2 = 1$$

$$(2 + 2i)^2 = 4 + 8i + 4i^2 = 8i$$

$$(2 - 2i)^2 = 4 - 8i + 4i^2 = -8i$$

$$(-2 + 2i)^2 = 4 - 8i + 4i^2 = -8i \text{ e } (2 - 2i)^2 = -8i$$

Logo, $-2 + 2i$ e $2 - 2i$ são raízes quadradas do mesmo número complexo.

5. Opção (A)

$|z + 2| = 3$ define uma circunferência no plano complexo de centro no afixo de $z_1 = -2$ e raio 3.

6. Opção (B)

Seja $z = a + bi$, com $b \neq 0$. Então:

$$\overline{z - 1} = \overline{(a + bi) - 1} = \overline{(a - 1) + bi} =$$

$$= (a - 1) - bi =$$

$$= (a - bi) - 1 =$$

$$= \bar{z} - 1$$

7. Opção (B)

$$z^7 = (bi)^7 = b^7 i^7 = b^7 \times (-i) = -b^2 i$$

Como $b < 0$, então $-b^2 > 0$. Logo, o afixo de z^7 encontra-se na parte positiva do eixo imaginário.

8. Opção (A)

Seja $z = x + yi$

$$\begin{aligned} z - \bar{z} = 0 &\Leftrightarrow (x + yi) - (x - yi) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2yi = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

Condição que define o eixo real

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(x + yi) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\Leftrightarrow |x + yi| = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z + \bar{z} = 0 &\Leftrightarrow (x + yi) + (x - yi) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

9. Opção (A)

Seja $w = x + yi$ um número complexo não nulo.

$$\frac{w \times \bar{w}}{2} = \frac{(x + yi) \times (x - yi)}{2} = \frac{x^2 + y^2}{2} \in \mathbb{R}^+.$$

Logo, o afixo de $\frac{w \times \bar{w}}{2}$ encontra-se na parte positiva do eixo real.

10. Opção (A)

Seja $z = re^{i\theta}$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Então, $2z = 2re^{i\theta}$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

11. Opção (B)

$$\begin{aligned} \frac{i}{i} &= i - i \\ &\Leftrightarrow 1 = 0, \text{ que é uma proposição falsa.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{|i|} &= i \\ &\Leftrightarrow \frac{i}{1} = i, \text{ que é uma proposição verdadeira.} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Arg}(i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = 0, \text{ que é uma proposição falsa.}$$

$$i^2 = i$$

$$\Leftrightarrow -1 = i, \text{ que é uma proposição falsa.}$$

12. Opção (D)

Seja $z = re^{i\theta}$. Então, $2z = 2re^{i\theta}$. Logo, $\operatorname{Arg}(2z) = \theta$.

13. Opção (B)

A região a sombreado contém os pontos do plano complexo que pertencem à interseção dos dois círculos representados e cujo coeficiente da parte imaginária é negativo ou nulo.

$$|z| \leq 1 \wedge |z - 1| \leq 1 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 0$$

14. Opção (C)

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{a + bi}{1 + i} = \frac{(a + bi)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{a - ai + bi - bi^2}{1^2 - i^2} = \\ &= \frac{a + b + (-a + b)i}{2} = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2}i \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{a + b}{2} \text{ e } \operatorname{Im}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{b - a}{2}.$$

$$\begin{aligned} z \times w &= (a + bi)(1 + i) = a + ai + bi + bi^2 = \\ &= (a - b) + (a + b)i \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \operatorname{Im}(z \times w) = a + b.$$

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$\text{Assim, } \operatorname{Re}(z^2) = a^2 - b^2.$$

15. Opção (B)

$$\begin{aligned} w^n + \frac{1}{w^n} &= \\ &= (e^{i\theta})^n + \frac{1}{(e^{i\theta})^n} = \\ &= e^{in\theta} + \frac{1}{e^{in\theta}} = \\ &= e^{in\theta} + e^{i(-n\theta)} = \\ &= \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) + \cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta) = \\ &= \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) + \cos(n\theta) - i \operatorname{sen}(n\theta) = \\ &= 2\cos(n\theta) \end{aligned}$$

16. Opção (B)

Como w tem o seu afixo na parte negativa do eixo imaginário, então w é do tipo $w = re^{i(-\frac{\pi}{2})}$. Logo, as raízes cúbicas de w são os valores w_k tais que:

$$w_k = \sqrt[3]{r} e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}, k \in \{0, 1, 2\}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } w_0 = \sqrt[3]{r} e^{i(-\frac{\pi}{6})}.$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } w_1 = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{Se } k = 2, \text{ então } w_2 = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{7\pi}{6}}.$$

Observe-se que o afixo de w_1 pertence à parte positiva do eixo imaginário. Logo, das opções apresentadas, apenas a opção (B) satisfaz esta condição.

17.

$$\text{a) } z + w = (1 - 2i) + (4 + 5i) = (1 + 4) + (-2 + 5)i = 5 + 3i$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3z - 2w &= 3(1 - 2i) - 2(4 + 5i) = \\ &= 3 - 6i - 8 - 10i = \\ &= -5 - 16i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } z \times w &= (1 - 2i) \times (4 + 5i) = \\ &= 4 + 5i - 8i - 10i^2 = \\ &= 4 + 10 - 3i = \\ &= 14 - 3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \frac{z}{w} &= \frac{1-2i}{4+5i} = \frac{(1-2i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{4-5i-8i+10i^2}{4^2-(5i)^2} = \\ &= \frac{4-13i-10}{16+25} = \frac{-6-13i}{41} = -\frac{6}{41} - \frac{13}{41}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \frac{1}{z} &= \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)} = \\ &= \frac{1+2i}{1^2-(2i)^2} = \frac{1+2i}{1+4} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} z^2 - \frac{i}{z} &= (1-2i)^2 - \frac{i}{1+2i} = \\ &= 1-4i+4i^2 - \frac{i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \\ &= 1-4i-4 - \frac{i-2i^2}{1^2-(2i)^2} = \\ &= -3-4i - \frac{2+i}{1+4} = \\ &= -3-4i - \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i = \\ &= -\frac{17}{5} - \frac{21}{5}i \end{aligned}$$

18.

$$\text{a)} e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} &= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \\ &= 1 - i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} 2e^{i\frac{5\pi}{3}} &= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \\ &= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \\ &= 1 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} 4e^{i\frac{\pi}{2}} &= 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\ &= 4(0 + i) = \\ &= 4i \end{aligned}$$

$$\text{e)} \sqrt{5}e^{i\pi} = \sqrt{5}(\cos \pi + i \sin \pi) = \sqrt{5}(-1 + 0i) = -\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \frac{1}{6}e^{i\frac{7\pi}{2}} &= \frac{1}{6}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{6}(0 - i) = \\ &= -\frac{1}{6}i \end{aligned}$$

$$\text{g)} e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + 0i = 1$$

19.

$$\text{a)} i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{b)} 1 = e^{i0}$$

$$\text{c)} -\sqrt{11} = \sqrt{11} e^{i\pi}$$

$$\text{d)} -4i = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\text{e)} 1 - i = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

Cálculo auxiliar

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{tg } \theta = -1 \wedge \theta \in 4.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Por exemplo, } \theta = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{f)} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Cálculo auxiliar

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg } \theta = 1 \wedge \theta \in 1.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Por exemplo, } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{g)} 1 - \sqrt{3}i = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

Cálculo auxiliar

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\text{tg } \theta = -\sqrt{3} \wedge \theta \in 4.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Por exemplo, } \theta = -\frac{\pi}{3}.$$

$$\text{h)} -\sqrt{2} - \sqrt{6}i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Cálculo auxiliar

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2} = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{tg } \theta = \sqrt{3} \wedge \theta \in 3.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Por exemplo, } \theta = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{i)} -\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Cálculo auxiliar

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\text{tg } \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 2.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Por exemplo, } \theta = \frac{5\pi}{6}.$$

20.

$$\text{a)} z = 3e^{i\frac{\pi}{7}}$$

$$\frac{1}{z} = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{7}\right)}$$

$$-z = 3e^{i\left(\frac{\pi}{7} + \pi\right)} = 3e^{i\frac{8\pi}{7}}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{7}\right)}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } z &= \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} \\ \bar{z} &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \\ -z &= \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ \frac{1}{z} &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } z &= 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \\ \bar{z} &= 3e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \\ -z &= 3e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)} = 3e^{i\frac{3\pi}{2}} \\ \frac{1}{z} &= \frac{1}{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } z &= (-1-i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \\ \bar{z} &= 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \\ -z &= 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} \\ \frac{1}{z} &= \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned}$$

21.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{z_1 + i^3 + 5}{2-i} &= \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + i^3 + 5}{2-i} = \\ &= \frac{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - i + 5}{2-i} = \\ &= \frac{1+i-i+5}{2-i} = \\ &= \frac{6}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = \\ &= \frac{12+6i}{2^2+1^2} = \\ &= \frac{12}{5} + \frac{6}{5}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } z_1 \times z_2 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = \\ &= 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$|z_2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \theta_2 \in 2.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Por exemplo, } \theta_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

22. $w = -1 = e^{i\pi}$

As raízes cúbicas de w são os valores de w_k tais que:

$$w_k = \sqrt[3]{1}e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}$$

$$\Leftrightarrow w_k = e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } w_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } w_1 = e^{i\pi}.$$

$$\text{Se } k = 2, \text{ então } w_2 = e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

23.

$$\text{a) } z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4+2i}{2} \vee \frac{4-2i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 2+i \vee z = 2-i$$

$$\text{C.S.} = \{2+i, 2-i\}$$

$$\text{b) } z^6 + 64 = 0 \Leftrightarrow z^6 = -64$$

As soluções desta equação são as raízes de ordem 6 do número complexo $-64 = 64e^{i\pi}$, ou seja, os valores z_k tais que:

$$z_k = \sqrt[6]{64}e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\Leftrightarrow z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{Se } k = 2, \text{ então } z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

$$\text{Se } k = 3, \text{ então } z_3 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}.$$

$$\text{Se } k = 4, \text{ então } z_4 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

$$\text{Se } k = 5, \text{ então } z_5 = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}.$$

$$\text{C.S.} = \left\{2e^{i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\frac{\pi}{2}}, 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, 2e^{i\frac{7\pi}{6}}, 2e^{i\frac{3\pi}{2}}, 2e^{i\frac{11\pi}{6}}\right\}$$

$$\text{c) } z^3 + 2z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 = -2$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt{2}i \vee z = -\sqrt{2}i$$

$$\text{C.S.} = \{0, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}$$

24.

$$\text{a) } z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

Cálculo auxiliar

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \wedge \theta \in 4.^\circ \text{Q}$$

$$\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3} \wedge \theta \in 4.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Por exemplo, } \theta = -\frac{\pi}{3}.$$

Se $z = e^{i(-\frac{\pi}{3})}$ é uma raiz cúbica de w , então as restantes serão:

$$z_1 = e^{i(-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ e } z_2 = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\pi}$$

b) Como z é uma raiz cúbica de w , então $z^3 = w$.

$$\text{Assim, } w = \left(e^{i(-\frac{\pi}{3})}\right)^3 = e^{i(-\pi)} = -1.$$

25.

a) $|z - 2| \geq 1 \wedge |z - 2| \leq 2$

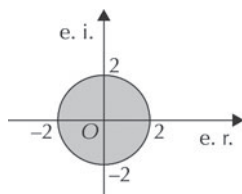
$$\Leftrightarrow 1 \leq |z - 2| \leq 2$$

b) $|z - (-3 + i)| \leq |z - (2 - 2i)|$

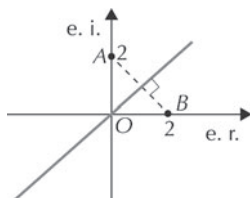
$$\Leftrightarrow |z + 3 - i| \leq |z - 2 + 2i|$$

26.

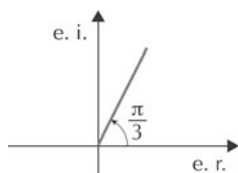
a) $|z| \leq 2$



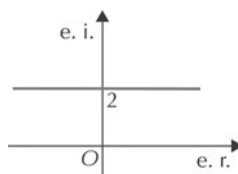
b) $|z - 2i| = |z - 2|$



c) $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$



d) $\operatorname{Im}(z) = 2$



27.

a) $z = \frac{2+12i}{1-3i} = \frac{(2+12i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} =$

$$= \frac{2+6i+12i+36i^2}{1^2-(3i)^2} =$$

$$= \frac{2+18i-36}{1+9} =$$

$$= \frac{-34}{10} + \frac{18}{10}i =$$

$$= -\frac{17}{5} + \frac{9}{5}i$$

$$\operatorname{Re}(z) = -\frac{17}{5} \text{ e } \operatorname{Im}(z) = \frac{9}{5}$$

b) $w = \frac{i}{5-10i} = \frac{i(5+10i)}{(5-10i)(5+10i)} =$

$$= \frac{5i+10i^2}{5^2-(10i)^2} =$$

$$= \frac{-10+5i}{25+100} =$$

$$= -\frac{10}{125} + \frac{5}{125}i =$$

$$= -\frac{2}{25} + \frac{1}{25}i$$

$$\operatorname{Re}(w) = -\frac{2}{25} \text{ e } \operatorname{Im}(w) = \frac{1}{25}$$

c) Seja $z_1 = i^3 z$.

$$i^3 z = i^3 \times \frac{2+12i}{1-3i} =$$

$$= -i \times \left(-\frac{17}{5} + \frac{9}{5}i\right) \text{ (pelos cálculos efetuados na alínea a)} =$$

$$= \frac{17}{5}i - \frac{9}{5}i^2$$

$$= \frac{9}{5} + \frac{17}{5}i$$

$$\operatorname{Re}(i^3 z) = \frac{9}{5} \text{ e } \operatorname{Im}(i^3 z) = \frac{17}{5}$$

28.

a) $z = \sqrt{3} - \sqrt{3}i = \sqrt{6}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$

Cálculo auxiliar

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \wedge \theta \in 4.^\circ \text{Q}$$

$$\operatorname{tg} \theta = -1 \wedge \theta \in 4.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Por exemplo, } \theta = -\frac{\pi}{4}.$$

b) $w = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{i\frac{7\pi}{6}}$

Cálculo auxiliar

$$|w| = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \wedge \alpha \in 3.^\circ \text{Q}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \wedge \alpha \in 3.^\circ \text{Q}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + \pi$$

$$\text{Por exemplo, } \alpha = \frac{7\pi}{6}.$$

$$\text{c) } z \times w = \sqrt{6}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \times e^{i\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{6}e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right)} = \sqrt{6}e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

$$\text{d) } \frac{z}{w} = \frac{\sqrt{6}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}{e^{i\frac{7\pi}{6}}} = \sqrt{6}e^{i\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{6}\right)} = \sqrt{6}e^{i\left(-\frac{17\pi}{12}\right)}$$

$$\text{e) } z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{6}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{\sqrt{6}}{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{f) } z^4 + 1 = \left(\sqrt{6}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^4 + 1 = (\sqrt{6})^4 e^{i\left(-\frac{\pi}{4} \times 4\right)} + 1 = 36e^{i(-\pi)} + 1 = -36 + 1 = -35 = 35e^{i\pi}$$

$$\text{g) } \frac{\bar{w}}{i^{15}} = \frac{e^{i\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}}{i^3} = \frac{e^{i\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}}{-i} = \frac{e^{i\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}}{e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} = e^{i\left(-\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

29.

$$\text{a) } z_1 = -2\sqrt{3} - 2i = 4e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

Cálculo auxiliar

$$|z_1| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-2}{-2\sqrt{3}} \wedge \theta \in 3.^\circ \text{Q}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 3.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Por exemplo, } \theta = \frac{7\pi}{6}.$$

$$\text{Assim, } (z_1)^3 = \left(4e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^3 = 4^3 e^{i\left(3 \times \frac{7\pi}{6}\right)} = 64e^{i\frac{7\pi}{2}}$$

$$\text{b) } z_2 = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1^2+1^2} = \frac{-2i}{2} = -i = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

As raízes quadradas de $z_2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ são os valores de z_k tais que:

$$z_k = \sqrt{1} e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right)}, k \in [0, 1]$$

$$\Leftrightarrow z_k = e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right)}, k \in [0, 1]$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então, } z_0 = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então, } z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} =$$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

$$\text{c) } \frac{z_1}{z_3} = \frac{4e^{i\frac{7\pi}{6}}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}} = 4e^{i\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = 4e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)}$$

Para $\frac{z_1}{z_3}$ ser um imaginário puro:

$$\frac{2\pi}{3} - \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\alpha = \pi - \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -\alpha = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{30. } w = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

As raízes quartas de $w = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ são os valores w_k tais que:

$$w_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\Leftrightarrow w_k = \sqrt[8]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{16} + \frac{2k\pi}{4}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } z_0 = \sqrt[8]{2} e^{i\frac{\pi}{16}}.$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } z_1 = \sqrt[8]{2} e^{i\frac{9\pi}{16}}.$$

$$\text{Se } k = 2, \text{ então } z_2 = \sqrt[8]{2} e^{i\frac{17\pi}{16}}.$$

$$\text{Se } k = 3, \text{ então } z_3 = \sqrt[8]{2} e^{i\frac{25\pi}{16}}.$$

31.

$$\text{a) } z - \frac{i}{z} = 0 \Leftrightarrow z^2 - i = 0 \wedge z \neq 0 \Leftrightarrow z^2 = i \wedge z \neq 0$$

As soluções desta equação são as raízes quadradas do número complexo $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, isto é, os valores de z_k que satisfazem $z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)}, k \in [0, 1]$.

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } z_1 = e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

$$\text{C.S.} = \left\{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}\right\}$$

$$\text{b) } z^3 + (1 + \sqrt{3}i)z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 + 1 + \sqrt{3}i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 = -1 - \sqrt{3}i$$

Cálculo auxiliar

$$w = -1 - \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$|w| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{\sqrt{3}}{-1} \wedge \theta \in 3.^\circ \text{Q}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{3} \wedge \theta \in 3.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Por exemplo, } \theta = \frac{4\pi}{3}.$$

As soluções da equação $z^2 = -1 - \sqrt{3}i$ são as raízes quadradas do número complexo $2e^{i\frac{4\pi}{3}}$, isto é, os números complexos z_k tais que:

$$z_k = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right)}, k \in \{0, 1\}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}, \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} \right\}$$

$$\text{c) } z^3 - iz^2 - z + i = 0$$

Cálculo auxiliar

	1	-i	-1	i
i		i	0	-i
	1	0	-1	0 = r

$$\Leftrightarrow (z-i)(z^2-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = i \vee z^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow z = i \vee z = -1 \vee z = 1$$

$$\text{C.S.} = \{i, -1, 1\}$$

$$\text{d) } z^3 = \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow (re^{i\theta})^3 = re^{i(-\theta)}$$

$$\Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = re^{i(-\theta)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = r \\ 3\theta = -\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(r^2 - 1) = 0 \\ 4\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \vee \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$z = 0$ é uma das soluções

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } z_0 = e^{i0} = 1.$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

$$\text{Se } k = 2, \text{ então } z_2 = e^{i\pi} = -1.$$

$$\text{Se } k = 3, \text{ então } z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.$$

$$\text{C.S.} = \{0, 1, i, -1, -i\}$$

32.

$$\text{a) } z_1 = 4\sqrt{3} + 4i$$

Cálculo auxiliar

$$|z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{4}{4\sqrt{3}} \wedge \theta \in 1.^\circ \text{Q}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 1.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Por exemplo, } \theta = \frac{\pi}{6}.$$

As raízes de ordem 4 do número complexo $8e^{i\frac{\pi}{6}}$ são os valores z_k tais que:

$$z_k = \sqrt[4]{8}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{4}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

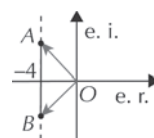
$$\Leftrightarrow z_k = \sqrt[4]{8}e^{i\left(\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } z_0 = \sqrt[4]{8}e^{i\frac{\pi}{24}}.$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } z_1 = \sqrt[4]{8}e^{i\frac{13\pi}{24}}.$$

$$\text{Se } k = 2, \text{ então } z_2 = \sqrt[4]{8}e^{i\frac{25\pi}{24}}.$$

$$\text{Se } k = 3, \text{ então } z_3 = \sqrt[4]{8}e^{i\frac{37\pi}{24}}.$$

b)**i)**

$$\text{ii) Se } A_{\triangle AOB} = 12, \text{ então } \frac{\overline{AB} \times 4}{2} = 12 \Leftrightarrow \overline{AB} = 6.$$

Assim, $A(-4, 3)$ e $B(-4, -3)$. Logo, $z = -4 + 3i$.

33.

a) Se z_1 é solução da equação, então verifica

$$-i \times z_1 = -\bar{z}_1.$$

$$-i \times 16e^{i\frac{3\pi}{4}} = -16e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$\Leftrightarrow e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \times 16e^{i\frac{3\pi}{4}} = 16e^{i\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 16e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)} = 16e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow 16e^{i\frac{\pi}{4}} = 16e^{i\frac{\pi}{4}}, \text{ que é uma proposição verdadeira.}$$

b) As raízes de ordem 4 de $z_1 = 16e^{i\frac{3\pi}{4}}$ são os valores z_k tais que:

$$z_k = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\Leftrightarrow z_k = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Os afixos destas quatro raízes de ordem 4 (A, B, C e D) são vértices de um quadrado de diagonal 4. Assim, sendo l o lado do quadrado, vem que:

$$l^2 + l^2 = 4^2 \Leftrightarrow 2l^2 = 16 \Leftrightarrow l^2 = 8$$

Logo, $A_{[ABCD]} = 8$.

34.

- a) O círculo representado tem centro O e raio 2, visto que $|z| = 2$. Sendo o hexágono regular e centrado na origem, então os seis vértices são os afixos das raízes índice 6 de um certo número complexo e os seus argumentos diferem de $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Assim, uma condição que defina o conjunto de pontos a sombreado é:

$$|z| \leq 2 \wedge \frac{\pi}{5} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{13\pi}{15}$$

Cálculo auxiliar

$$\frac{\pi}{5} + 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{15}$$

- b) Cálculo do raio da circunferência:

$$\begin{aligned} r^2 &= 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow r^2 = 8 \\ &\Leftrightarrow r^2 = \sqrt{8}, r > 0 \\ &\Leftrightarrow r = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$|z| > 2\sqrt{2} \wedge |z - 2| = |z - 2i|$$

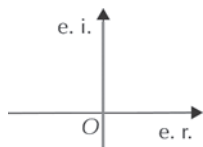
35.

- a) $\bar{z} = -z$

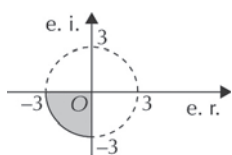
Seja $z = x + yi$. Então:

$$\begin{aligned} x - yi &= -(x + yi) \Leftrightarrow x - yi = -x - yi \\ &\Leftrightarrow 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

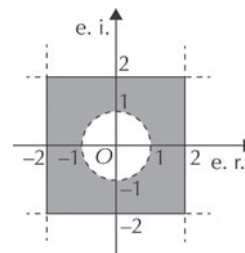
Condição que define todo o eixo imaginário.



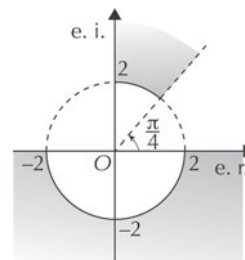
- b) $|z| \leq 3 \wedge \text{Im}(z) \leq 0 \wedge \text{Re}(z) \leq 0$



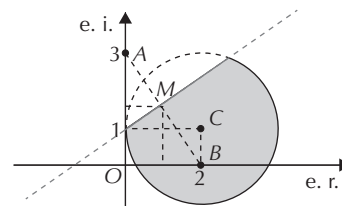
- c) $|\text{Re}(z)| \leq 2 \wedge |\text{Im}(z)| \leq 2 \wedge |z| > 1$
 $\Leftrightarrow -2 \leq \text{Re}(z) \leq 2 \wedge -2 \leq \text{Im}(z) \leq 2 \wedge |z| > 1$



- d) $\left[\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2} \vee \text{Im}(z) \leq 0 \right] \wedge |z| \geq 2$



- e) $|z - 3i| \geq |z - 2| \wedge |z - 2 - i| \leq 2$



36.

$$\begin{aligned} \text{a) } w &= \frac{-1+i}{i^{21}} = \frac{-1+i}{i} = \\ &= \frac{(-1+i) \times (-i)}{i \times (-i)} = \\ &= \frac{i - i^2}{-i^2} = \\ &= \frac{1+i}{1} = \\ &= 1+i = \\ &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$w \neq z_1$, pois $\text{Arg}(w) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e um argumento de z_1 é $\frac{\pi}{5}$.

$w \neq z_2$, pois $|w| = \sqrt{2}$ e $|z_2| = 2$.

- b) Seja $z_2 = 2e^{i\theta}$ e $z_1 = re^{i\frac{\pi}{5}}$
 $z_1 \times z_2 = re^{i\frac{\pi}{5}} \times 2e^{i\theta} = 2re^{i(\theta + \frac{\pi}{5})}$

Para que $z_1 \times z_2$ seja um imaginário puro, tem que acontecer:

$$\text{Arg}(z_1 \times z_2) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim:

$$\theta + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{10} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

37. Seja $z = \sqrt{12} - 2i$.

Cálculo auxiliar

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{12})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{tg } \theta = \frac{-2}{\sqrt{12}} \wedge \theta \in 4.^\circ \text{Q}$$

$$\text{tg } \theta = -\frac{2}{2\sqrt{3}} \wedge \theta \in 4.^\circ \text{Q}$$

$$\text{tg } \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 4.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Por exemplo, } \theta = -\frac{\pi}{6}.$$

$$z = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$z^n = \left(4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^n = 4^n e^{i\left(-\frac{n\pi}{6}\right)}$$

Para z^n ser um número real positivo, então

$$\text{Arg}(z^n) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ ou seja:}$$

$$-n\frac{\pi}{6} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -n\pi = 12k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n = -12k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, n = 0 \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Se } k = 1, n = -12 \notin \mathbb{N}$$

Se $k = -1, n = 12$, 12 é o menor número natural tal que z^n é um número real positivo.

$$\begin{aligned} 38. \frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i} &= \frac{(1 + \sqrt{2} + i)(1 + \sqrt{2} + i)}{(1 + \sqrt{2} - i)(1 + \sqrt{2} + i)} = \\ &= \frac{(1 + \sqrt{2} + i)^2}{(1 + \sqrt{2})^2 - i^2} = \\ &= \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + 2(1 + \sqrt{2})i + i^2}{(1 + \sqrt{2})^2 + 1} = \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 1 + (2 + 2\sqrt{2})i}{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1} = \\ &= \frac{(2\sqrt{2} + 2)(1 + i)}{2\sqrt{2} + 4} = \\ &= \frac{(2\sqrt{2} + 2)(2\sqrt{2} - 4)}{(2\sqrt{2} + 4)(2\sqrt{2} - 4)} (1 + i) = \\ &= \frac{4\sqrt{4} - 8\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 8}{(2\sqrt{2})^2 - 4^2} (1 + i) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-4\sqrt{2}}{4 \times 2 - 16} (1 + i) = \\ &= \frac{-4\sqrt{2}}{-8} (1 + i) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

39.

a) Representação de $\cos \theta - i \sin \theta$ na forma trigonométrica:

$$\cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{i(-\theta)}$$

Representação de $\sin \theta + i \cos \theta$ na forma trigonométrica:

$$\sin \theta + i \cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\sin \theta + i \cos \theta}\right)^9 &= \left(\frac{e^{i(-\theta)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}}\right)^9 = \\ &= \left(e^{i\left(-\theta - \frac{\pi}{2} + \theta\right)}\right)^9 = \\ &= \left(e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^9 = \\ &= e^{i\left(-\frac{9\pi}{2}\right)} = \\ &= \cos\left(-\frac{9\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right) = \\ &= 0 + i \times (-1) = -i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^{2013} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^{2014} &= \\ &= \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2013} - \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2014} = \\ &= e^{i\frac{2013\pi}{4}} - e^{i\frac{2014\pi}{4}} = \\ &= e^{i\frac{5\pi}{4}} - e^{i\frac{3\pi}{2}} = \\ &= \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) - (-i) = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i + i = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)i \end{aligned}$$

40.

a) Sendo P_1 o ponto de coordenadas $(0, 2)$, o número complexo do qual P_1 é afixo é $z_1 = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

As restantes raízes cúbicas são:

$$z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$z_3 = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$$

$$\text{E } \text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2) = -1$$

Assim, uma condição que define o domínio plano

$$\text{é } |z| \leq 2 \wedge \text{Im}(z) \leq -1.$$

b) O lado do quadrado é $\sqrt{2}$. Logo, o raio é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$|z| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z+1) \leq \frac{\pi}{4} \wedge$$

$$\wedge \frac{3\pi}{4} \leq \text{Arg}(z-1) \leq \frac{5\pi}{4}$$

41.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{w^4 + 2}{i^{15}} &= \frac{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}})^4 + 2}{i^3} = \frac{(\sqrt{2})^4 e^{i\frac{4\pi}{3}} + 2}{-i} = \\ &= \frac{4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) + 2}{-i} = \\ &= \frac{4\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{-i} = \\ &= \frac{-2 - 2\sqrt{3}i + 2}{-i} = \frac{-2\sqrt{3}i \times i}{-i \times i} = \\ &= \frac{-2\sqrt{3}i^2}{-i^2} = \frac{2\sqrt{3}}{1} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$2\sqrt{3}$ é um número real, como queríamos demonstrar.

b) Seja $z = -1 + i$.

Cálculo auxiliar

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{1}{-1} \wedge \theta \in 2.^\circ \text{Q}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg } \theta = -1 \wedge \theta \in 2.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Por exemplo, } \theta = \frac{3\pi}{4}.$$

Como $|z| = \sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ é o raio da circunferência representada.

As raízes cúbicas de $w = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ são os valores w_k tais que:

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[3]{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\} \\ \Leftrightarrow w_k &= \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } w_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{9}}.$$

$$\text{Assim, } \text{Arg}(w_0) = \frac{\pi}{9}.$$

Logo, uma condição em $\mathbb{C}$ que defina a região assinalada é

$$|z| \leq \sqrt{2} \wedge \frac{\pi}{9} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{3\pi}{4}$$

42.

$$\text{a) } i^{11} \times z^3 = (z_2 \times \bar{z}_1)^2$$

Cálculo auxiliar

$$|z| = 1 + \sqrt{3}i$$

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{tg } \theta = \sqrt{3} \wedge \theta \in 1.^\circ \text{Q}$$

$$\text{Por exemplo, } \theta = \frac{\pi}{3}.$$

$$\Leftrightarrow i^3 \times z^3 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}} \times 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow -i \times z^3 = \left(4e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z^3 = \frac{\left(4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^2}{-i}$$

$$\Leftrightarrow z^3 = \frac{16e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}{e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}}$$

$$\Leftrightarrow z^3 = 16e^{i\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow z^3 = 16e^{i\frac{\pi}{6}}$$

As soluções da equação são as raízes cúbicas do número complexo $16e^{i\frac{\pi}{6}}$, isto é, os números complexos z_k tais que:

$$z_k = \sqrt[3]{16}e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}$$

$$\Leftrightarrow z_k = \sqrt[3]{16}e^{i\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } z_0 = \sqrt[3]{16}e^{i\frac{\pi}{18}}.$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } z_1 = \sqrt[3]{16}e^{i\frac{13\pi}{18}}.$$

$$\text{Se } k = 2, \text{ então } z_2 = \sqrt[3]{16}e^{i\frac{25\pi}{18}}.$$

$$\text{C.S.} = \left\{\sqrt[3]{16}e^{i\frac{\pi}{18}}, \sqrt[3]{16}e^{i\frac{13\pi}{18}}, \sqrt[3]{16}e^{i\frac{25\pi}{18}}\right\}$$

$$\text{b) } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2n} = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^{2n} = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)}\right)^{2n} = e^{i\left(2n \times \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{n\pi}{3}\right)}$$

Para que $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2n}$ seja um número real positivo, então

$$\text{Arg}\left(\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2n}\right) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ ou seja, } \frac{\pi}{3}n = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n = 6k, k \in \mathbb{Z}.$$

Para $k = 1$, $n = 6$ é o menor valor natural de n que verifica o pretendido.

$$\begin{aligned} \text{c) } w &= a + bi + (1 - 4i + (2i)^2) = \\ &= a + bi + 1 - 4i - 4 = \\ &= (a - 3) + (b - 4)i \end{aligned}$$

Como o afixo de w pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares $\text{Re}(w) = \text{Im}(w)$, ou seja, $a - 3 = b - 4$.

Como $|w| = 5\sqrt{2}$, tem-se que:

$$\sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} a - 3 = b - 4 \\ (a - 3)^2 + (b - 4)^2 = 25 \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 1 \\ (b - 4)^2 + (b - 4)^2 = 50 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 1 \\ 2(b - 4)^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ (b - 4)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 1 \\ b - 4 = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} a = b - 1 \\ b - 4 = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 - 1 \\ b = 9 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -1 - 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 9 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Assim, $z_3 = 8 + 9i \vee z_3 = -2 - i$.

43.

$$\text{a) } \left| \frac{z}{i} \right| < 3 \wedge \text{Arg}(z) = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|z|}{|i|} < 3 \wedge \text{Arg}(z) = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

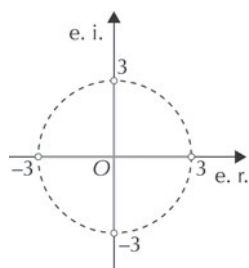
$$\Leftrightarrow |z| < 3 \wedge \text{Arg}(z) = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, $\text{Arg}(z) = 0$.

Se $k = 1$, $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$.

Se $k = 2$, $\text{Arg}(z) = \pi$.

Se $k = 3$, $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{2}$.



$$\text{b) } \text{Im}(z - \bar{z}) > z \times \bar{z} \wedge |z - \bar{z}| = 4$$

Seja $z = x + yi$:

$$\text{Im}((x + yi) - (x - yi)) > (x + yi) \times (x - yi) \wedge$$

$$\wedge |(x + yi) - (x - yi)| = 4$$

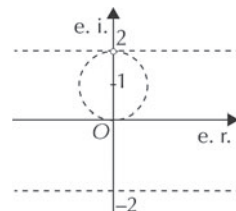
$$\Leftrightarrow \text{Im}(2yi) > x^2 - (yi)^2 \wedge |2yi| = 4$$

$$\Leftrightarrow 2y > x^2 + y^2 \wedge (2y = 4 \vee 2y = -4)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y < 0 \wedge (y = 2 \vee y = -2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 < 1 \wedge (y = 2 \vee y = -2)$$

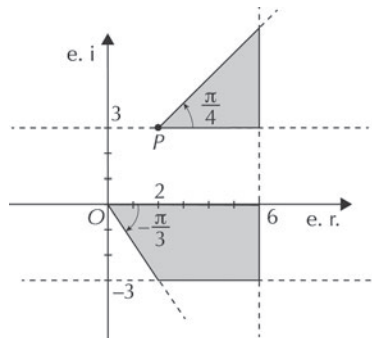
$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 < 1 \wedge (y = 2 \vee y = -2)$$



Não existe nenhum ponto do plano complexo que satisfaça a condição pretendida.

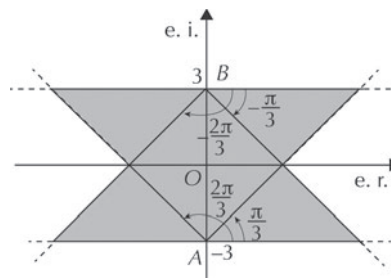
$$\text{c) } \left[0 \leq \text{Arg}(z - 2 - 3i) \leq \frac{\pi}{4} \wedge \text{Re}(z) \leq 6 \right] \vee$$

$$\vee \left[-\frac{\pi}{3} \leq \text{Arg}(z) \leq 0 \wedge \text{Im}(z) \geq -3 \wedge \text{Re}(z) \leq 6 \right]$$



$$\text{d) } \left[\frac{\pi}{3} \leq \text{Arg}(z + 3i) \leq \frac{2\pi}{3} \wedge |z| \leq |z - 6i| \right] \vee$$

$$\vee \left[-\frac{2\pi}{3} \leq \text{Arg}(z - 3i) \leq -\frac{\pi}{3} \wedge |z| \leq |z + 6i| \right]$$



Teste Final

Páginas 244 a 246

Grupo I

1. Opção (B)

O número de maneiras de escolher e sentar de forma ordenada dois dos quatro rapazes para ocupar os lugares dos extremos é dado por 4A_2 . Para cada uma destas maneiras, há $5!$ maneiras de sentar as cinco pessoas restantes nos cinco lugares do meio. Assim, a resposta ao problema é ${}^4A_2 \times 5!$.

2. Opção (B)

$P(A \mid B)$ significa "probabilidade de a soma dos números saídos ser múltiplo de 4 se os números saídos são ambos pares".

Se ambos os números saídos são pares, então temos as seguintes possibilidades: (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (6, 2), (6, 4), (8, 2) e (8, 4). De entre estas, aquelas cuja soma é um múltiplo de 4 são (2, 2), (4, 4), (6, 2) e (8, 4). Assim, a probabilidade pedida é $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

3. Opção (A)

Dado que a reta de equação $y = -2$ é assíntota ao gráfico de f e $D_f = \mathbb{R}^+$, conclui-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$.

Assim:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \\ &= \frac{\ln\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{-2} = \\ &= \frac{\ln(0^+)}{-2} = \frac{-\infty}{-2} = +\infty\end{aligned}$$

4. Opção (A)

$2r e^{i(\theta + \pi)}$ é um número complexo cujo módulo é o dobro do módulo do número complexo $r e^{i\theta}$.

O afixo de $2r e^{i(\theta + \pi)}$ dista da origem do referencial o dobro de $\overline{OA}$. Por outro lado, se θ pertence ao 1.º quadrante, então $\theta + \pi$ pertence ao 3.º quadrante. Assim, B é o único ponto situado no 3.º quadrante cuja distância a O é o dobro da de A .

5. Opção (D)

$|z + 1| \leq 1$ define o círculo de centro $(-1, 0)$ e raio 1. $|z - i| \leq 1 \vee |z + i| \leq 1$ define a união do círculo de centro $(0, 1)$ e raio 1 com o círculo de centro $(0, -1)$ e raio 1.

$|z + 1| \leq 1 \wedge (|z - i| \leq 1 \vee |z + i| \leq 1)$ define a interseção do círculo de centro $(-1, 0)$ e raio 1 com a união dos círculos unitários de centros $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

Grupo II

1. Se o desenvolvimento de $A(x)$ pelo binómio de Newton tem 11 termos, então $n = 10$.

Termo geral:

$$\begin{aligned}& {}^{10}C_p (x\sqrt{x})^{10-p} \left(-\frac{3}{2x}\right)^p = \\ &= {}^{10}C_p \left(-\frac{3}{2}\right)^p \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{10-p} (x^{-1})^p = \\ &= {}^{10}C_p \left(-\frac{3}{2}\right)^p x^{15-\frac{3}{2}p} x^{-p} = \\ &= {}^{10}C_p \left(-\frac{3}{2}\right)^p x^{15-\frac{5}{2}p}\end{aligned}$$

Assim:

$$15 - \frac{5}{2}p = 0 \Leftrightarrow 30 - 5p = 0 \Leftrightarrow p = 6$$

Logo, o termo independente é:

$${}^{10}C_6 \left(-\frac{3}{2}\right)^6 = \frac{76\,545}{32}.$$

2.

$$2.1. P_{[ABC]} = \overline{AC} + \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$A(\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$\text{Assim, } \overline{AC} = 2 \cos \alpha.$$

Seja X a projeção ortogonal do ponto A no eixo Oy .

Então:

$$\overline{AB}^2 = (1 - \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 1 - 2 \sin \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 1 - 2 \sin \alpha + 1$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 2 - 2 \sin \alpha$$

$$\text{Assim, } \overline{AB} = \sqrt{2 - 2 \sin \alpha}.$$

Logo:

$$\begin{aligned}f(\alpha) &= 2 \cos \alpha + \sqrt{2 - 2 \sin \alpha} + \sqrt{2 - 2 \sin \alpha} = \\ &= 2 \cos \alpha + 2\sqrt{2 - 2 \sin \alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2.2. f'(\alpha) &= (2 \cos \alpha + 2\sqrt{2 - 2 \sin \alpha})' = \\ &= -2 \sin \alpha + 2 \times \frac{1}{2} (2 - 2 \sin \alpha)^{-\frac{1}{2}} (2 - 2 \sin \alpha)' = \\ &= -2 \sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \sin \alpha}} \times (-2 \cos \alpha) = \\ &= -2 \sin \alpha - \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \sin \alpha}} \times (-2 \cos \alpha) \\ f'(\alpha) &< 0, \forall \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Logo, } f \text{ é estritamente de-} \\ &\text{crescente no intervalo } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].\end{aligned}$$

2.3. A função f é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, por se tratar da soma de duas funções contínuas neste intervalo.

$$f(0) = 2 \cos 0 + 2\sqrt{2 - 2 \sin 0} = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\sqrt{2 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

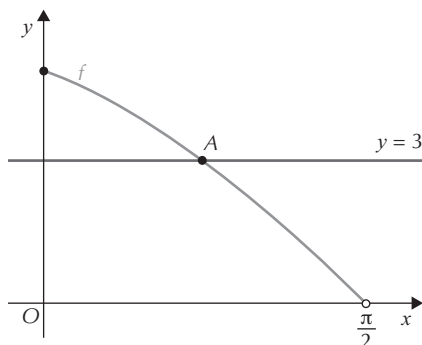
$$\text{Logo, } f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 3 < f(0).$$

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe, pelo menos, um valor em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ para o qual o perímetro do triângulo é 3.

Pela alínea anterior, f é estritamente decrescente no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, em particular, f é estritamente decrescente em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Assim, existe um único valor em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ para o qual o perímetro do triângulo é 3.

2.4. $f(\alpha) = 3 \Leftrightarrow 2 \cos \alpha + 2\sqrt{2 - 2 \sin \alpha} = 3$



$A(0,77; 3)$

O perímetro do triângulo $[ABC]$ é igual a 3 para $\alpha = 0,77$ rad.

3.

3.1. $z^3 - z^2 + 9z - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow (z-1)(z^2+9) = 0$$

$$\Leftrightarrow z-1=0 \vee z^2+9=0$$

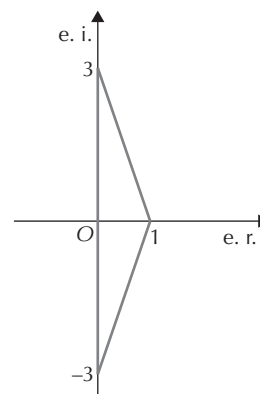
$$\Leftrightarrow z=1 \vee z^2=-9$$

$$\Leftrightarrow z=1 \vee z=3i \vee z=-3i$$

$$\Leftrightarrow z=e^{i0} \vee z=3e^{i\frac{\pi}{2}} \vee z=3e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Cálculo auxiliar

	1	-1	9	-9
1		1	0	9
	1	0	9	0



$$A = \frac{6 \times 1}{2} = 3 \text{ u.a.}$$

$$\begin{aligned} \text{3.2. } |z_1 + z_2|^2 &= \left| 1 + e^{i\frac{\pi}{5}} \right|^2 = \\ &= \left| 1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right|^2 = \\ &= \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right)^2 = \\ &= 1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \\ &= 2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \text{4.1. } \frac{(1+3i)z_1 - i^{49} + i^{100}}{1+4i} &= \frac{(1+3i)(2+i) - i^1 + i^0}{1+4i} = \\ &= \frac{2+i+6i+3i^2 - i + 1}{1+4i} = \\ &= \frac{6i}{1+4i} = \frac{6i(1-4i)}{1+16} = \\ &= \frac{6i-24i^2}{17} = \frac{24}{17} + \frac{6}{17}i \end{aligned}$$

4.2. As raízes de ordem 4 de um número complexo formam um quadrado inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial.

Se z_1 é uma das raízes de ordem 4 de um número complexo z , então as restantes raízes de ordem 4 do mesmo número complexo são:

$$iz_1 = i(2+i) = 2i + i^2 = -1 + 2i$$

$$-z_1 = -(2+i) = -2 - i$$

$$-iz_1 = i(-2-i) = -2i - i^2 = 1 - 2i$$

4.3. $iz_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{n\pi}{10}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{10}\right)}$

Para que iz_2 seja um número real:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{10} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{10} = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n = -5 + 10k, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k=0$, então $n=-5 \notin \mathbb{N}$.

Se $k=1$, então $n=5 \in \mathbb{N}$.

Logo, $n=5$.

