

07.

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

TESTES

Materiais disponíveis em formato fotocopiável e projetável em

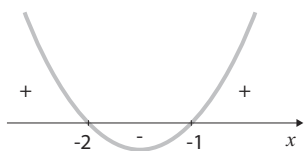
20 AULA DIGITAL
PROFESSOR

Teste Diagnóstico

1. $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 3x < -2\} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 3x + 2 < 0\}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} x^2 + 3x = -2 &\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1 \end{aligned}$$

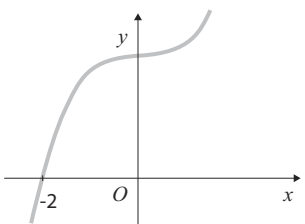


Logo, $A =]-2, -1[$.

$$B = \{x \in \mathbb{R}: x^3 + 8 > 0\}$$

Cálculo auxiliar

$$x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$



Logo, $B =]-2, +\infty[$.

1.1.

1.1.1. $A \cup \bar{B} =]-2, -1[\cup]-\infty, -2] =]-\infty, -1[$

1.1.2. $B \setminus A = B \cap \bar{A} =]-2, +\infty[\cap (]-\infty, -2] \cup [-1, +\infty[) = [-1, +\infty[$

1.2. Opção (D)

Se, por exemplo, $x = -2$, então a proposição $-2 \in \bar{A} \Rightarrow -2 \in B$ é uma proposição falsa (uma vez que se trata de uma implicação em que o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso), logo a proposição $\forall x \in \mathbb{R}, x \in \bar{A} \Rightarrow x \in B$ é falsa.

Observe-se que $A \cap \bar{B} =]-2, -1[\cap]-\infty, -2] = \emptyset$, logo a proposição $\exists x \in \mathbb{R}: x \in A \wedge x \in \bar{B}$ é falsa.

Se, por exemplo, $x = -2$, então a proposição $-2 \in A \vee -2 \in B$ é uma proposição falsa (uma vez que se trata de uma disjunção entre duas proposições falsas), logo a proposição $\forall x \in \mathbb{R}, x \in A \vee x \in B$ é falsa.

A proposição $\exists x \in \mathbb{R}: x \in \bar{A} \wedge x \in B$ é verdadeira, uma vez que $\bar{A} \cap B = (]-\infty, -2] \cup [-1, +\infty[) \cap]-2, +\infty[= [-1, +\infty[$, logo existe pelo menos um valor de x tal que $x \in \bar{A} \wedge x \in B$.

2.

2.1. A probabilidade pedida é igual a $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

2.2. A probabilidade pedida é igual a $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

2.3. Opção (C)

A probabilidade pedida é igual a:

$$\begin{aligned} &\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \\ &= \frac{42}{90} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

3. Opção (B)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{-2(n+1)+4}{(n+1)+1} - \frac{-2n+4}{n+1} = \\ &= \frac{-2n+2}{n+2} - \frac{-2n+4}{n+1} = \\ &= \frac{(-2n+2)(n+1) - (-2n+4)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \\ &= \frac{-2n^2 - 2n + 2n + 2 + 2n^2 + 4n - 4n - 8}{(n+2)(n+1)} = \\ &= \frac{-6}{(n+2)(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, (u_n) é decrescente.

$$\begin{aligned} \lim u_n &= \lim \frac{-2n+4}{n+1} = \\ &= \lim \frac{-2 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \\ &= \frac{-2+0}{1+0} = \\ &= -2 \end{aligned}$$

Logo, (u_n) é convergente, mas não é um infinitésimo.

Como (u_n) é decrescente, então $u_1 = 1$ é um majorante da sucessão. E como, além disso, $\lim u_n = -2$, então -2 é um minorante. Assim, a sucessão (u_n) é limitada.

4. Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| < \delta.$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\left| \frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{2n+2-2n-3}{2(2n+3)} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-1}{4n+6} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4n+6} < \delta$$

$$\Leftrightarrow 4n+6 > \frac{1}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow 4n > \frac{1}{\delta} - 6$$

$$\Leftrightarrow 4n > \frac{1-6\delta}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1-6\delta}{4\delta}$$

Assim, se $n > \frac{1-6\delta}{4\delta}$, então $\left| \frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| < \delta$.

Portanto, se $p > \frac{1-6\delta}{4\delta}$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$,

$\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| < \delta$, ou seja,

que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}$.

5.

5.1. Em $]1, +\infty[$:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 + 2x - 3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+3)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-1)}{x+3} < 0$$

Cálculos auxiliares

Seja $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. Os divisores inteiros de -2 são $-2, -1, 1$ e 2 .

Como $P(1) = 0$, então 1 é raiz de $P(x)$.

1	1	-4	5	-2
		1	-3	2
	1	-3	2	0

Assim, $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$$

Logo, $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)(x-2)(x-1)$.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$$

Logo, $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$.

x	1		2	$+\infty$
$(x-2)(x-1)$	0	-	0	+
$x+3$	+	+	+	+
$\frac{(x-2)(x-1)}{x+3}$	0	-	0	+

Logo, C.S. = $]1, 2[$.

5.2. Para que f seja contínua em $x = 1$, tem de se verificar $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

$$\bullet f(1) = \frac{\sqrt{1+3}}{1-2} + 2 = \frac{2}{-1} + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 + 2x - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-2)(x-1)}{x+3} = \\ &= \frac{-1 \times 0}{4} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\sqrt{x^2+3}}{x-2} + 2 \right) = \\ &= \frac{\sqrt{1+3}}{1-2} + 2 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ existem, e são ambos iguais a $f(1)$, então existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$.

Logo, a função f é contínua em $x = 1$.

$$5.3. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+3}}{x-2} + 2 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2} \right)}}{x-2} \right) + 2 =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{x-2} \right) + 2 =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{x \left(1 - \frac{2}{x} \right)} \right) + 2 =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{1 - \frac{2}{x}} \right) + 2 =$$

$$= \frac{-1}{1} + 2 =$$

$$= 1$$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f .

5.4. Opção (D)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 6] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 6)] = 0$$

Então, a reta de equação $y = x - 6$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f .

Logo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 6) = +\infty$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \text{ então } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} = 1.$$

6.

$$\begin{aligned} 6.1. g'(x) &= \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{0-1}{x^2} = \\ &= 1 - \frac{1}{x^2} = \\ &= \frac{x^2 - 1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Sinal de g'	+	0	-	n.d.	-	0	+
Variação de g	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

g é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-1, 0[$ e em $]0, 1]$.

g tem um máximo relativo para $x = -1$ e um mínimo relativo para $x = 1$.

$$6.2. g'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$g'(2) = \frac{4 - 1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$g(2) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$r: y = \frac{3}{4}x + b$$

$$\left(2, \frac{5}{2}\right) \in r, \text{ logo:}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{3}{4} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 1$$

$$\text{Assim, } r: y = \frac{3}{4}x + 1.$$

7. Opção (A)

$$\widehat{ACB} = 180^\circ - \alpha - 2\alpha = 180^\circ - 3\alpha$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{9}{\sin(2\alpha)} = \frac{\overline{AC}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin(180^\circ - 3\alpha)}$$

Logo:

$$\overline{AC} = \frac{9 \sin \alpha}{\sin(2\alpha)}$$

e:

$$\overline{AB} = \frac{9 \sin(180^\circ - 3\alpha)}{\sin(2\alpha)} =$$

$$= \frac{9 \sin(3\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

$$P_{[ABC]} = 9 + \frac{9 \sin \alpha}{\sin(2\alpha)} + \frac{9 \sin(3\alpha)}{\sin(2\alpha)} =$$

$$= \frac{9 \sin(2\alpha) + 9 \sin \alpha + 9 \sin(3\alpha)}{\sin(2\alpha)} =$$

$$= \frac{9(\sin \alpha + \sin(2\alpha) + \sin(3\alpha))}{\sin(2\alpha)}$$

8.

$$8.1. \overline{OC} = \cos \alpha$$

$$\overline{CB} = 2 - \cos \alpha$$

$$\overline{AC} = \sin \alpha$$

$$A_{[ABC]} = \frac{(2 - \cos \alpha) \sin \alpha}{2} =$$

$$= \frac{2 \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2} =$$

$$= A(\alpha)$$

$$8.2. 1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 1 + 2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$\text{Como } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \text{ então } \cos \theta = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{2}{3}$$

$$\text{Como } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \text{ então } \sin \theta = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Logo:

$$A(\theta) = \frac{2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{6\sqrt{6} - \sqrt{18}}{18} =$$

$$= \frac{6\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{18} = \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6}$$

$$8.3. A(\alpha) = \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha = 3 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha (1 - 2 \cos \alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sin \alpha = 0} \vee 1 - 2 \cos \alpha = 0$$

$$\text{equação impossível em }]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[, \text{ então } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Teste n.º 1

1.

$$1.1. 3! \times 3! \times 3! \times 3! = 1296$$

$$1.2. \text{ A probabilidade pedida é igual a } \frac{1 \times 7}{{}^9C_3} = \frac{1}{12}.$$

2. Opção (B)

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{11}{50} \Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{50}$$

$$\Leftrightarrow 0,37 - P(A \cap B) = \frac{11}{50}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,37 - \frac{11}{50}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,15$$

Então:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= 0,44 + 0,37 - 0,15 = \\ &= 0,66 \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} P[(A \cup \bar{B}) | (A \cup B)] &= \frac{P[(A \cup \bar{B}) \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \\ &= \frac{P[A \cup (\bar{B} \cap B)]}{P(A \cup B)} = \\ &= \frac{P(A \cup \emptyset)}{P(A \cup B)} = \\ &= \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \\ &= \frac{0,44}{0,66} = \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3. Sejam A e B os acontecimentos:

A: "A Alice resolve corretamente o problema."

B: "O Bruno resolve corretamente o problema."

Tem-se que:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{3}{14} \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = \frac{3}{14}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = \frac{3}{14}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{14}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{11}{14}$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{14}$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) = \frac{11}{14} + \frac{2}{7}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{15}{14} - P(B)$$

Por outro lado:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{7} \Leftrightarrow P(A) \times P(B) = \frac{2}{7}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{15}{14} - P(B) \right] \times P(B) = \frac{2}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{14} P(B) - [P(B)]^2 - \frac{2}{7} = 0$$

$$\Leftrightarrow [P(B)]^2 - \frac{15}{14} P(B) + \frac{2}{7} = 0$$

$$\Leftrightarrow 14[P(B)]^2 - 15P(B) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 224}}{28}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{15 \pm 1}{28}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2} \vee P(B) = \frac{4}{7}$$

$$\text{Se } P(B) = \frac{1}{2}, \text{ então } P(A) = \frac{15}{14} - \frac{1}{2} = \frac{4}{7}.$$

$$\text{Se } P(B) = \frac{4}{7}, \text{ então } P(A) = \frac{15}{14} - \frac{4}{7} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Como } P(A) > P(B), \text{ então } P(A) = \frac{4}{7} \text{ e } P(B) = \frac{1}{2}.$$

4. Sejam B e C os acontecimentos:

B: "O aluno vai à Biblioteca pelo menos uma vez por semana."

C: "O aluno usa o computador da Biblioteca."

$$P(B) = \frac{620}{800}$$

$$P(C | B) = \frac{310}{620} \Leftrightarrow \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(B \cap C) = \frac{1}{2} \times \frac{620}{800}$$

$$\Leftrightarrow P(B \cap C) = \frac{310}{800}$$

$$P(\bar{B} \cap C) = \frac{100}{800}$$

Assim:

	C	$\bar{C}$	Total
B	$\frac{310}{800}$	$\frac{310}{800}$	$\frac{620}{800}$
$\bar{B}$	$\frac{100}{800}$	$\frac{80}{800}$	$\frac{180}{800}$
Total	$\frac{410}{800}$	$\frac{390}{800}$	1

Logo:

$$P(\bar{B} | \bar{C}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{\frac{80}{800}}{\frac{390}{800}} = \frac{80}{390} \approx 0,205$$

A probabilidade é igual a 20,5%.

5. Opção (B)

$$2^n = 8192 \Leftrightarrow 2^n = 2^{13} \Leftrightarrow n = 13$$

A linha 13 tem 14 elementos.

Logo, a soma dos sete primeiros elementos dessa linha é $\frac{8192}{2} = 4096$.

6. Opção (D)

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}$$

$$B = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$$

$$A \cup B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$\overline{A \cup B} = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (4, 1), (4, 4)\}$$

$$A \cap B = \{(3, 3)\}$$

$$\overline{A \cap B} = B \mid A = \{(1, 3), (2, 3), (4, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$$

$$A \cap \bar{B} = A \mid B = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 2)\}$$

7. No que respeita à cor, há duas formas diferentes de escolher 10 das 12 bandeiras para colocar numa fila: podem escolher-se quatro bandeiras de uma cor, quatro de uma outra cor e duas da cor restante ou podem escolher-se três bandeiras de uma cor, três de outra cor e quatro da cor restante.

Relativamente ao primeiro caso, há 3C_2 maneiras diferentes de escolher aleatoriamente duas das três cores que se vão usar nas quatro bandeiras; para cada uma destas maneiras, há ${}^{10}C_4$ maneiras de escolher aleatoriamente os lugares na fila para as quatro bandeiras de uma das cores escolhidas; e, para cada uma destas maneiras, há 6C_4 maneiras de escolher aleatoriamente os lugares na fila para as quatro bandeiras da outra cor escolhida, ficando as bandeiras da terceira cor nos lugares que sobram.

No segundo caso, 3C_2 é o número de maneiras de escolher aleatoriamente as duas cores das quais se vão seleccionar três bandeiras; para cada uma destas maneiras, há ${}^{10}C_3$ maneiras de escolher aleatoriamente os lugares na fila para as três bandeiras de uma das cores escolhidas; para cada uma destas maneiras, há 7C_3 maneiras de escolher aleatoriamente os lugares na fila para as três bandeiras da outra cor escolhida, ficando as bandeiras da terceira cor nos lugares que sobram.

Assim, ${}^3C_2 \times {}^{10}C_4 \times {}^6C_4 + {}^3C_2 \times {}^{10}C_3 \times {}^7C_3$ é uma resposta correta ao problema.

8. Opção (B)

O número de casos possíveis é ${}^6C_3 \times {}^5C_2 \times 5!$, que corresponde ao número de maneiras diferentes de escolher aleatoriamente três dos seis livros de Matemática e dois dos cinco livros de Física, colocando-os de seguida, de forma ordenada, na prateleira. O número de casos favoráveis é ${}^6C_3 \times {}^5C_2 \times 3! \times 2! \times 4$, que corresponde ao número de maneiras de escolher três dos seis livros de Matemática e dois dos cinco livros de Física e de colocar de forma ordenada na prateleira os três livros de Matemática, juntos ou não, e os dois livros de Física, juntos, numa das quatro posições existentes entre os livros de Matemática.

$$\begin{aligned} 9. P((A \cup B) \mid \bar{B}) \times (P(B) - 1) + P(\bar{B}) &= \\ &= \frac{P[(A \cup B) \cap \bar{B}]}{P(\bar{B})} \times (-P(\bar{B})) + P(\bar{B}) = \\ &= -\frac{P[(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B})]}{P(\bar{B})} \times P(\bar{B}) + P(\bar{B}) = \\ &= -P[(A \cap \bar{B}) \cup \emptyset] + P(\bar{B}) = \\ &= -P(A \cap \bar{B}) + 1 - P(B) = \\ &= -[P(A) - P(A \cap B)] + 1 - P(B) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = \\ &= 1 - P(A \cup B) = \\ &= P(\bar{A} \cap \bar{B}) \end{aligned}$$

10. Opção (D)

$$P(A \cup B) = P(B) \neq 1$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \neq P(A), \text{ uma vez que } B$$

é um acontecimento possível não certo.

$P(A \cap B) = P(A)$, que não é necessariamente igual a $P(B)$.

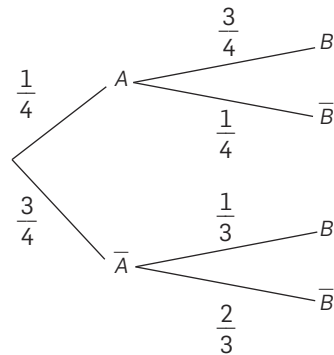
$$\begin{aligned} P(B \mid A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(A)}{P(A)} = 1 \end{aligned}$$

11. Sejam A e B os acontecimentos:

A : "Escolher uma bola do saco."

B : "Sair uma bola amarela."

Então:



$$11.1. P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \frac{3}{16} + \frac{4}{16} = \frac{7}{16}$$

$$11.2. P(\bar{A} | \bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}}{1 - \frac{7}{16}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{16}} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

11.3. A probabilidade pedida é igual a:

$$\begin{aligned} & \frac{{}^2C_1 \times {}^4C_1 + {}^4C_2}{{}^6C_2} = \\ & = \frac{2 \times 4 + \frac{4!}{2!2!}}{\frac{6!}{2!4!}} = \\ & = \frac{8 + \frac{4 \times 3!}{2 \times 2}}{\frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!}} = \\ & = \frac{8 + 6}{15} = \frac{14}{15} \end{aligned}$$

12. Termo geral:

$$\begin{aligned} {}^nC_p (\sqrt{x})^{n-p} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^p &= {}^nC_p \left(x^{\frac{1}{2}} \right)^{n-p} \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)^p = \\ &= {}^nC_p x^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}p} x^{-\frac{1}{2}p} = \\ &= {}^nC_p x^{\frac{n}{2} - p} \end{aligned}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_{n-1} + {}^nC_n &= 22 \Leftrightarrow 1 + n + n + 1 = 22 \\ &\Leftrightarrow 2n = 20 \\ &\Leftrightarrow n = 10 \end{aligned}$$

Então, o termo geral do desenvolvimento é ${}^{10}C_p x^{5-p}$.

Assim:

$$5 - p = 2 \Leftrightarrow p = 3$$

Logo, o coeficiente do termo em x^2 é:

$$\begin{aligned} {}^{10}C_3 &= \frac{10!}{3!7!} = \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = \\ &= 10 \times 3 \times 4 = \\ &= 120 \end{aligned}$$

Teste n.º 2

1. Opção (A)

Há três hipóteses:

• a primeira linha é a linha 4-5-6;

ou:

• a primeira linha é a linha 7-8-9;

ou:

• a primeira linha é a linha - 0 +.

O número de maneiras de obter um código respeitando as duas primeiras hipóteses é o mesmo: $3 \times 3 \times 2 \times 2$.

Assim, a resposta correta é:

$$2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 72$$

2.

$$2.1. \text{ A probabilidade pedida é igual a } 1 - \frac{2! \times 8!}{9!} = \frac{7}{9}.$$

$$2.2. \text{ A probabilidade pedida é igual a } \frac{{}^7C_6}{{}^9C_6} = \frac{1}{12}.$$

3. Opção (B)

$${}^nC_2 = 210 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 210$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} = 210$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 420$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 420 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 1 \times 420}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1681}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 41}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -20 \vee n = 21$$

O maior elemento da linha seguinte é

$${}^{22}C_{11} = 705\,432.$$

4.

4.1. Sejam A e B os acontecimentos:

A : "Viver numa moradia."

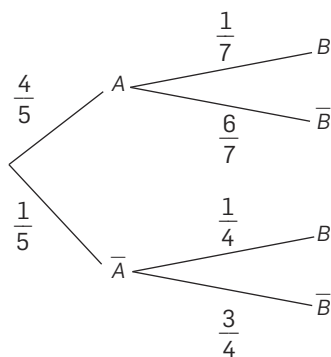
B : "Ter pelo menos um cão."

$$P(A) = 4P(\bar{A})$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Leftrightarrow 4P(\bar{A}) + P(\bar{A}) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{A}) = \frac{1}{5}$$

$$\text{Logo, } P(A) = \frac{4}{5}.$$



$$P(\bar{A} | B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{7}} = \frac{7}{23}$$

$$4.2. P(A) = \frac{4}{5}$$

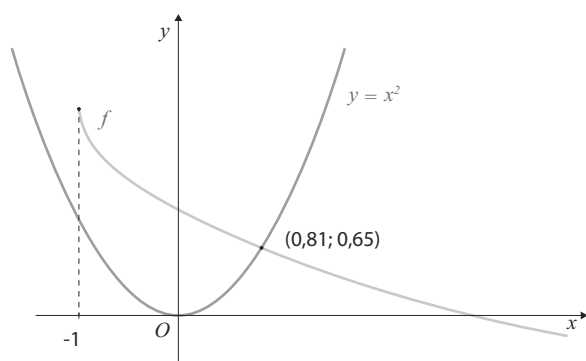
$$P(B) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{23}{140}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{4}{5} \times \frac{23}{140} = \frac{23}{175}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{4}{35}$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

$$5. f(x) = x^2 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x+1} = x^2$$



6. Opção (C)

A afirmação I é falsa.

Se A e B são incompatíveis, então $P(A \cap B) = 0$.

Sendo A e B acontecimentos possíveis, então

$$P(A) \times P(B) \neq 0.$$

Logo, $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ e, portanto, A e B não são acontecimentos independentes.

A afirmação II é verdadeira.

Se A e B são acontecimentos contrários, então $P(A \cap B) = 0$ e $P(A \cup B) = 1$, ou seja, A e B são acontecimentos incompatíveis, já que $P(A \cap B) = 0$.

$$\begin{aligned} 7. P(B | \bar{A}) &= \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{2}{5} \\ &\Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) - \frac{2}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A | B) &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} P(B) \\ &\Leftrightarrow P(B) - \frac{2}{15} = \frac{1}{2} P(B) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} P(B) = \frac{2}{15} \\ &\Leftrightarrow P(B) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

8. Termo geral de $(a + 2x)^6$:

$${}^6C_p a^{6-p} (2x)^p = {}^6C_p a^{6-p} 2^p x^p$$

Para obter o coeficiente do termo de ordem 3, tem-se $p = 3$.

$$\text{Logo, } {}^6C_3 a^3 2^3 = 160a^3.$$

Termo geral de $(2 + ax)^8$:

$${}^8C_p 2^{8-p} (ax)^p = {}^8C_p 2^{8-p} a^p x^p$$

Para obter o coeficiente do termo de ordem 4, tem-se $p = 4$.

$$\text{Logo, } {}^8C_4 a^4 2^4 = 1120a^4.$$

Assim:

$$\begin{aligned} 160a^3 &= 1120a^4 \Leftrightarrow 1120a^4 - 160a^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^3(1120a - 160) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \vee a = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Como $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $a = \frac{1}{7}$.

9. Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = \frac{n+1}{2n+3}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+2}{2n+5} - \frac{n+1}{2n+3} = \\ &= \frac{(n+2)(2n+3) - (n+1)(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)} = \\ &= \frac{2n^2 + 7n + 6 - 2n^2 - 7n - 5}{(2n+5)(2n+3)} = \\ &= \frac{1}{(2n+5)(2n+3)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, (u_n) é uma sucessão monótona crescente e, portanto, $u_1 = \frac{2}{5}$ é um dos seus minorantes.

Por outro lado:

$$\begin{array}{r} n+1 \\ -n-\frac{3}{2} \\ \hline \frac{1}{2} \end{array}$$

Ou seja, $u_n = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+3}$.

Como $\frac{1}{2n+3} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então $u_n < \frac{1}{2}$,

$\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, $\frac{2}{5} \leq u_n < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Então, $\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq (u_n)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ou seja, $\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Como $\lim \left(\frac{2}{5}\right)^n = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, pelo teorema das sucessões encaixadas, vem que $\lim \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n = 0$.

10. Opção (D)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} - x}{x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x}{x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x}{x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1}{1-\frac{2}{x}} = \\ &= \frac{-1-1}{1-0} = \\ &= -2 \end{aligned}$$

Como $\forall x \in \mathbb{R}^-, g(x) < f(x)$, então

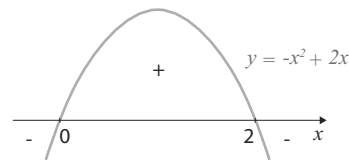
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

11. A função f é contínua em $[-1, 1]$, por se tratar de uma função polinomial.

Como o teorema de Bolzano-Cauchy garante que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]-1, 1[$, então $f(-1) \times f(1) < 0$.

Logo:

$$\begin{aligned} f(-1) \times f(1) &< 0 \Leftrightarrow (-k+1+1)(k-1+1) < 0 \\ &\Leftrightarrow (-k+2)k < 0 \\ &\Leftrightarrow -k^2+2k < 0 \end{aligned}$$



Então, $k \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$.

12. Opção (C)

Uma vez que $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$, então $f(a)$ é um máximo da função f .

13.

13.1. Como f é contínua em $[-2, 0]$, por se tratar de uma função racional contínua neste intervalo, pode concluir-se, pelo teorema de Weierstrass, que a função admite neste intervalo um máximo e um mínimo absolutos.

13.2. Em $\mathbb{R}^+$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$.

$$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + 5)' = 3x^2 - 12x$$

$$f''(x) = (3x^2 - 12x)' = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	0		2	$+\infty$
Sinal de f''	n.d.	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$

Em $\mathbb{R}^+$, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em $]0, 2[$ e tem a concavidade para cima em $]2, +\infty[$; tem um ponto de inflexão para $x = 2$.

Teste n.º 3

1.

1.1. A probabilidade pedida é igual a $\frac{2 \times 3! \times {}^9A_3}{{}^9C_3 \times 6!} = \frac{1}{10}$.

1.2. A probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^{17}A_{10}}{17^{10}} \approx 0,035$.

2. Sejam V e C os acontecimentos:

V : "Ser vacinado."

C : "Ficar curado."

$$P(V) = 0,5$$

$$P(C | V) = 0,68 \Leftrightarrow \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = 0,68$$

$$\Leftrightarrow P(C \cap V) = 0,68 \times 0,5$$

$$\Leftrightarrow P(C \cap V) = 0,34$$

$$P(\bar{V} \cap \bar{C}) = \frac{38}{200} = 0,19$$

	C	$\bar{C}$	Total
V	0,34	0,16	0,5
$\bar{V}$	0,31	0,19	0,5
Total	0,65	0,35	1

$$P(\bar{V} | C) = \frac{P(\bar{V} \cap C)}{P(C)} = \frac{0,31}{0,65} = \frac{31}{65}$$

3. Opção (A)

$${}^nC_3 = 20\,825$$

$$1 + n + {}^nC_2 + {}^nC_3 = 22\,152$$

$$\Leftrightarrow n + {}^nC_2 = 22\,152 - 1 - 20\,825$$

$$\Leftrightarrow {}^{n+1}C_2 = 1326$$

4.

4.1. Opção (B)

$$c(14) = 5 + 2 \sin\left(14 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) \approx 3,82$$

$$c(15) = 5 + 2 \sin\left(15 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) \approx 3,38$$

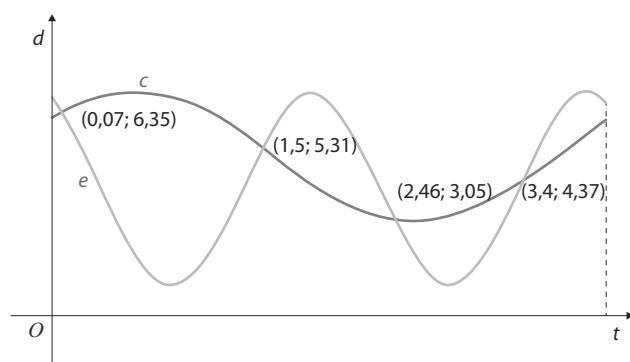
$$c(16) = 5 + 2 \sin\left(16 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) \approx 6,18$$

$$c(17) = 5 + 2 \sin\left(17 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) \approx 6,62$$

$$c(20) = 5 + 2 \sin\left(20 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) \approx 6,18$$

Como a função c é contínua em $[14, 16]$ e $c(14) < 5 < c(16)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $c(t) = 5$ tem, pelo menos, uma solução neste intervalo.

4.2. $c(t) = e(t)$, $t \in [0, 4]$



$$t = 0,07 \vee t = 1,5 \vee t = 2,46 \vee t = 3,4$$

$$5. P(\overline{A \cap \bar{B}}) + P(A | B) + P(\bar{B} | A) =$$

$$= 1 - P(A \cap \bar{B}) + P(A) + \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} =$$

$$= 1 - P(A \cap \bar{B}) + P(A) + \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= 1 - P(A \cap \bar{B}) + P(A) + \frac{P(A) - P(A) \times P(B)}{P(A)} =$$

$$= 1 - P(A \cap \bar{B}) + P(A) + 1 - P(B) =$$

$$= 1 - P(A \cap \bar{B}) + P(A) + P(\bar{B}) =$$

$$= 1 - P(A \cap \bar{B}) =$$

$$= P(\overline{A \cap \bar{B}}) =$$

$$= P(\bar{A} \cap B)$$

6. Opção (C)

Para se poder aplicar o teorema de Weierstrass à função f no intervalo $[0, 2]$, a função f tem de ser contínua nesse intervalo, e, em particular, tem de ser contínua em $x = 1$.

Para que f seja contínua em $x = 1$, tem de se verificar $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

$$\bullet f(1) = k = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^3 + 3x^2 - 4} =$$

$$\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x^2 + 4x + 4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 + 4x + 4} =$$

$$= \frac{1}{9}$$

Cálculo auxiliar

	1	3	0	-4
1		1	4	4
	1	4	4	0

$$\text{Assim, } x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2 + 4x + 4).$$

$$\text{Então, } k = \frac{1}{9}.$$

$$7. g''(x) = \left(\frac{x-1}{x-2} + 2x\right)' =$$

$$= \frac{(x-1)'(x-2) - (x-1)(x-2)'}{(x-2)^2} + 2 =$$

$$= \frac{x-2-x+1}{(x-2)^2} + 2 =$$

$$= \frac{-1}{(x-2)^2} + 2$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 g''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-1}{(x-2)^2} + 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{-1 + 2(x-2)^2}{(x-2)^2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 8x + 7}{(x-2)^2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 7 = 0 \wedge (x-2)^2 \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 56}}{4} \wedge x \neq 2 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{4} \wedge x \neq 2 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{4} \wedge x \neq 2 \\
 &\Leftrightarrow x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} &\in]2, +\infty[\quad 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \notin]2, +\infty[
 \end{aligned}$$

Então:

x	2		$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
Sinal de g''	n.d.	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de g	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]2, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left]2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$; tem um ponto de inflexão de abscissa $2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Opção (B)

$$\begin{aligned}
 f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2(x+1)^2(2x-1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1		0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Sinal de f''	-	0	-	0	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$		$\cap$		$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de f tem um ponto de inflexão de abscissa $\frac{1}{2}$.

9.

$$91. \frac{PQ}{OP} = \sin(\pi - x) \Leftrightarrow \overline{PQ} = 4 \sin x$$

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow \overline{OQ} = -4 \cos x$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{(4 - 4 \cos x) \times 4 \sin x}{2} = \\
 &= \frac{16 \sin x - 16 \sin x \cos x}{2} = \\
 &= 8 \sin x - 8 \sin x \cos x = \\
 &= 8 \sin x - 4 \sin(2x)
 \end{aligned}$$

$$92. A'(x) = (8 \sin x - 4 \sin(2x))' = 8 \cos x - 8 \cos(2x)$$

$$\begin{aligned}
 A'(x) = 0 &\Leftrightarrow 8 \cos x - 8 \cos(2x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \cos x = \cos(2x) \\
 &\Leftrightarrow x = 2x + 2k\pi \vee x = -2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 &\Leftrightarrow -x = 2k\pi \vee 3x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 &\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Como $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, tem-se que $x = \frac{2\pi}{3}$.

x	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de A	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

Assim, a área do triângulo $[APQ]$ é máxima para $x = \frac{2\pi}{3}$.

10. Opção (A)

$$\begin{aligned}
 \sin(2x) \cos(2x) &= \sin(2x) (\cos^2 x - \sin^2 x) = \\
 &= \sin(2x) (1 - \sin^2 x - \sin^2 x) = \\
 &= \sin(2x) (1 - 2 \sin^2 x) = \\
 &= \sin(2x) - \sin(2x) 2 \sin^2 x = \\
 &= \sin(2x) - 2 \sin x \cos x \times 2 \sin^2 x = \\
 &= \sin(2x) - 4 \sin^3 x \cos x
 \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}
 11.1. \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{x - \pi} = - \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} =
 \end{aligned}$$

Consideremos a mudança de variável $\pi - x = y$.

$$x \rightarrow \pi \Rightarrow y \rightarrow 0$$

$$= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = -1$$

Logo, a reta de equação $x = \pi$ não é assíntota vertical ao gráfico de f .

Como f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{\pi\}$, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas, então não pode haver outras assíntotas verticais ao seu gráfico.

$$\begin{aligned}
 11.2. f'(x) &= \left(\frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \pi} \right)' = \\
 &= \frac{-\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \times (x - \pi) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{(x - \pi)^2} = \\
 &= \frac{\cos x \times (x - \pi) - \sin x}{(x - \pi)^2} \\
 f'(0) &= \frac{\cos(0) \times (0 - \pi) - \sin(0)}{(0 - \pi)^2} = \frac{-\pi}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi} \\
 f(0) &= \frac{\cos\left(0 - \frac{\pi}{2}\right)}{0 - \pi} = 0
 \end{aligned}$$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f , no ponto de abscissa 0, é $y = -\frac{1}{\pi}x$.

Teste n.º 4

1. Opção (A)

Números inferiores a 5000: $4 \times 8 \times 7 \times 6 = 1344$

Números entre 5000 e 5800: $1 \times 6 \times 7 \times 6 = 252$

Números entre 5800 e 5840: $1 \times 1 \times 3 \times 6 = 18$

Assim, $1344 + 252 + 18 = 1614$ números.

2. A probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^5C_2 \times {}^8C_2}{{}^{13}C_4} = \frac{56}{143}$.

3.

$$3.1. G(0) = \frac{30}{1 + 2 \times e^0} = \frac{30}{3} = 10$$

No início do ano 2010 havia 10 000 gaivotas.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{30}{1 + 2e^{-0,12t}} = \frac{30}{1 + 2 \times 0} = 30$$

Com o passar dos anos, o número de gaivotas aproxima-se de 30 000.

$$3.2. G(t) = 19 \Leftrightarrow \frac{30}{1 + 2e^{-0,12t}} = 19$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2e^{-0,12t} = \frac{30}{19}$$

$$\Leftrightarrow 2e^{-0,12t} = \frac{11}{19}$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,12t} = \frac{11}{38}$$

$$\Leftrightarrow -0,12t = \ln\left(\frac{11}{38}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{11}{38}\right)}{-0,12}$$

Logo, $t \approx 10,331$.

Durante o ano de 2020, o número de gaivotas atinge os 19 000 elementos.

3.3. Estudemos a monotonia da função G em $[7, 12]$:

$$\begin{aligned}
 G'(t) &= \left(\frac{30}{1 + 2e^{-0,12t}} \right)' = \\
 &= \frac{30' \times (1 + 2e^{-0,12t}) - 30 \times (1 + 2e^{-0,12t})'}{(1 + 2e^{-0,12t})^2} = \\
 &= \frac{0 - 30 \times (2 \times (-0,12) \times e^{-0,12t})}{(1 + 2e^{-0,12t})^2} = \frac{7,2 \times e^{-0,12t}}{(1 + 2e^{-0,12t})^2}
 \end{aligned}$$

Como $G'(t) > 0, \forall t \in [7, 12]$, então conclui-se que G é estritamente crescente neste intervalo.

Pretende-se mostrar que existe, pelo menos, um valor de t no intervalo $]7, 12[$ em que $G(t) = 17,3$. A função G é contínua em $\mathbb{R}_0^+$, por se tratar do quociente entre funções contínuas, em que o denominador não se anula; em particular, G é contínua em $[7, 12]$.

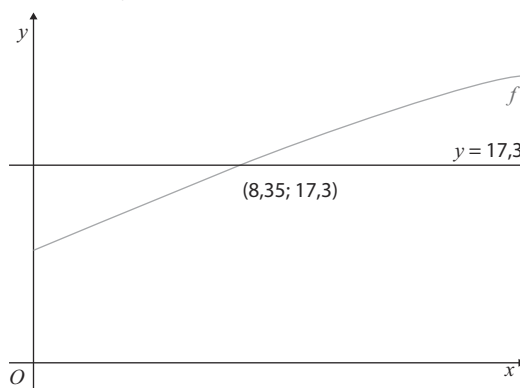
$$G(7) = \frac{30}{1 + 2e^{-0,12 \times 7}} \approx 16,099$$

$$G(12) = \frac{30}{1 + 2e^{-0,12 \times 12}} \approx 20,355$$

$$G(7) < 17,3 < G(12)$$

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe, pelo menos, um valor de t no intervalo $]7, 12[$ em que $G(t) = 17,3$.

Como a função G é estritamente crescente neste intervalo, esse valor de t é único.



$t \approx 8,35$ anos após o início de 2010.

4. Opção (B)

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{8}{17}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{64}{289} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{225}{289}$$

Como α é um ângulo agudo, então

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17}$$

$$\operatorname{tg}^2 \beta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{12}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \beta}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{144}{169}$$

Como β é um ângulo agudo, então

$$\cos \beta = \sqrt{\frac{144}{169}} = \Leftrightarrow \cos \beta = \frac{12}{13}.$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}, \text{ logo } \frac{5}{12} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\frac{12}{13}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{5}{13}.$$

$$\text{Assim, } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \\ = \frac{15}{17} \times \frac{12}{13} - \frac{8}{17} \times \frac{5}{13} = \frac{140}{221}.$$

5.

$$\begin{aligned} 5.1. P(A \cup B \cup C) &= \\ &= P((A \cup B) \cup C) = \\ &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup \\ &\quad \cup (B \cap C)) = \\ &= P(A) + P(B) - 0 + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A) - P(C) + P(A \cup C) - \\ &\quad - P(B) - P(C) + P(B \cup C) + 0 = \\ &= P(A \cup C) - P(C) + P(B \cup C) = \\ &= P(A \cup C) + P(B \cup C) - P(C) \end{aligned}$$

5.2. Tem-se que:

$$P(A) \times P(C) = P(A \cap C)$$

$$P(B) \times P(C) = P(B \cap C)$$

$$P(A \cap B) = 0$$

Usando a igualdade da alínea anterior:

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{11}{12}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup C) - P(C) + P(B \cup C) = \frac{11}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} - P(C) + \frac{3}{4} = \frac{11}{12} \Leftrightarrow P(C) = \frac{1}{2}$$

Assim:

$$\begin{aligned} P(A \cup C) &= \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow P(A) + P(C) - P(A) \times P(C) = \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow P(A) + \frac{1}{2} - P(A) \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

6. Opção (D)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{3x} - 1)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^x \times \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3 = \\ &= 1 \times 1 \times 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 6x^2 + 3x}{x^2 + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 + 6x + 3)}{x(x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x + 3}{x + 1} = \\ &= \frac{3}{1} = \\ &= 3 \end{aligned}$$

Como $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) < h(x) < f(x)$ e

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$, então, pelo teorema das funções encaixadas, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 3$.

7.

7.1. Para que a função f seja contínua em $x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0).$$

$$\bullet f(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{x-1} = \\ &= \frac{0+1}{0-1} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{kx - \operatorname{sen}(2x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(k - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} \right) = \\ &= k - \lim_{2x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \times 2 = \\ &= k - 1 \times 2 = \\ &= k - 2 \end{aligned}$$

Logo:

$$k - 2 = -1 \Leftrightarrow k = 1$$

$$7.2. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x-1} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{-\operatorname{sen}(2x)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Em $]0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned} g(x) &= x \times \frac{-\operatorname{sen}(2x)}{x} + 2 \cos x = \\ &= -\operatorname{sen}(2x) + 2 \cos x \end{aligned}$$

$$g'(x) = -2 \cos(2x) - 2 \operatorname{sen} x$$

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow -2 \cos(2x) - 2 \operatorname{sen} x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) + \operatorname{sen} x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0 \\ &\Leftrightarrow -2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \vee$$

$$\vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Em }]0, 2\pi[: x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{11\pi}{6} \vee x = \frac{7\pi}{6}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
Sinal de g'	n.d.	-	0	-	0	+	0	-	n.d.
Variação de g	n.d.	$\searrow$		$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

$$g\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$g\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

A função g é estritamente decrescente em $\left]0, \frac{7\pi}{6}\right]$

e em $\left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$ e é estritamente crescente em

$\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$, tem um mínimo relativo $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ em

$x = \frac{7\pi}{6}$ e tem um máximo relativo $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ em

$x = \frac{11\pi}{6}$.

8. Opção (D)

$$g(x) = f(x) - e^x = x^2 - a - e^x$$

$$g'(x) = 2x - e^x$$

$$g''(x) = 2 - e^x$$

Assim, o gráfico de g'' obtém-se a partir do gráfico da função exponencial de base e através de uma reflexão de eixo Ox seguida de uma translação segundo o vetor $(0, 2)$.

9. Opção (B)

$$\lim u_n = \lim \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+2} =$$

$$= \lim \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+2} =$$

$$= \lim \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+1} \times \lim \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^1 =$$

$$= e^2 \times 1 =$$

$$= e^2$$

$$\lim g(u_n) = \lim_{x \rightarrow (e^2)^+} g(x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow (e^2)^+} \ln(x - e^2) =$$

$$= \ln(0^+) =$$

$$= -\infty$$

10.

10.1. Em $]2, +\infty[$:

$$f(x) = \log(x^2 - 3x + 2) + \log(x - 2) - \frac{\ln(x - 1)}{\ln(10)} =$$

$$= \log[(x^2 - 3x + 2)(x - 2)] - \log(x - 1) =$$

$$= \log\left(\frac{(x - 2)(x - 1)(x - 2)}{x - 1}\right) =$$

$$= \log(x - 2)^2 =$$

$$= 2 \log(x - 2)$$

10.2. Em $]3, +\infty[$:

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow 2 \log(x - 2) \geq \log(x + 1) + \log(x - 3) =$$

$$\Leftrightarrow \log(x - 2)^2 \geq \log[(x + 1)(x - 3)] =$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq x^2 - 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow -2x \geq -7$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{7}{2}$$

$$\text{Assim, C.S.} =]3, +\infty[\cap \left]-\infty, \frac{7}{2}\right] = \left]3, \frac{7}{2}\right].$$

10.3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \log(x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 3 (\in D_f)$$

O ponto de interseção do gráfico da função f com o eixo Ox é o ponto de coordenadas $(3, 0)$.

$$f'(x) = (2 \log(x - 2))' =$$

$$= \frac{2}{(x - 2) \ln(10)}$$

$$f'(3) = \frac{2}{(3 - 2) \ln(10)} = \frac{2}{\ln(10)}$$

A equação pedida é da forma $y = \frac{2}{\ln(10)}x + b$.

O ponto de coordenadas $(3, 0)$ pertence a esta reta, logo:

$$0 = \frac{2}{\ln(10)} \times 3 + b \Leftrightarrow b = -\frac{6}{\ln(10)}$$

A equação pedida é $y = \frac{2}{\ln(10)}x - \frac{6}{\ln(10)}$.

Teste n.º 5

1. Opção (D)

Termo geral:

$$\begin{aligned} {}^8C_p \left(\frac{\sqrt{y}}{2x} \right)^{8-p} \left(-\frac{2y}{\sqrt{x}} \right)^p &= \\ = {}^8C_p \left(y^{\frac{1}{2}} \right)^{8-p} 2^{-8+p} x^{-8+p} (-2)^p y^p \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)^p &= \\ = {}^8C_p (-1)^p 2^{-8+2p} x^{-8+p} y^4 + \frac{1}{2} p & \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{cases} -8 + \frac{1}{2}p = -4 \\ 4 + \frac{1}{2}p = 8 \end{cases} \Leftrightarrow p = 8$$

Logo:

$$2^k = {}^8C_8 (-1)^8 2^{-8+16} \Leftrightarrow 2^k = 2^8 \\ \Leftrightarrow k = 8$$

2. Sejam H e R os acontecimentos:

H : "Ser homem."

R : "Escolher o menu regular."

$$\begin{aligned} P(H|R) &= \frac{P(H \cap R)}{P(R)} = \\ &= \frac{\frac{26}{50} \times \frac{11}{26}}{\frac{26}{50} \times \frac{11}{26} + \frac{24}{50} \times \frac{15}{24}} = \\ &= \frac{11}{26} \approx 42\% \end{aligned}$$

3.

3.1. Opção (D)

Capital acumulado ao fim de seis meses:

$$4600 + 0,013 \times 4600 = 4659,80 \text{ euros}$$

Capital acumulado ao fim de um ano:

$$4659,80 + 0,013 \times 4659,80 \approx 4720,38 \text{ euros}$$

3.2. $C(t) = 4600(1 + 0,013)^{2t}$

$$C(t) > 6000 \Leftrightarrow 4600(1 + 0,013)^{2t} > 6000$$

$$\Leftrightarrow 1,013^{2t} > \frac{30}{23}$$

$$\Leftrightarrow 2t > \log_{1,013} \left(\frac{30}{23} \right)$$

$$\Leftrightarrow t > \frac{\log_{1,013} \left(\frac{30}{23} \right)}{2}$$

Logo, $t > 10,286$.

É possível obter um capital acumulado superior a 6000 euros ao fim de 11 anos.

4.

4.1. Seja $g(x) = \ln(e^x + e^{-x}) - 3 \ln(x)$. Pretende-se mostrar que a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, tem, pelo menos, um zero no intervalo $]1, 3[$.

A função g é contínua em $\mathbb{R}^+$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas; em particular, g é contínua em $]1, 3[$.

$$g(1) = \ln(e^1 + e^{-1}) - 3 \ln(1) \approx 1,127$$

$$g(3) = \ln(e^3 + e^{-3}) - 3 \ln(3) \approx -0,2933$$

$$g(3) < 0 < g(1)$$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]1, 3[$, ou seja, a equação $f(x) = 3 \ln(x)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]1, 3[$.

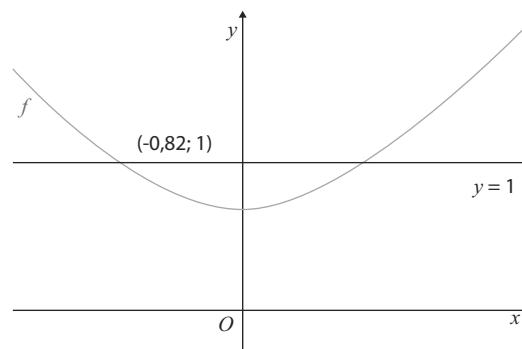
$$4.2. A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times h}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{3h}{2}$$

$$\Leftrightarrow h = 2$$

$$\Leftrightarrow 3 - f(x) = 2$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1, \text{ onde } h \text{ representa a}$$

altura do triângulo $[ABC]$ relativa à base $[AB]$ e x é a abcissa do ponto C .



Assim, o ponto C é o ponto de coordenadas $(-0,82; 1)$.

5. Opção (C)

$$\frac{2 \times {}^{12}C_5 \times {}^7C_3 - 8 \times {}^7C_3}{{}^{16}C_9 \times {}^7C_3} = \frac{2 \times {}^{12}C_5 - 8}{{}^{16}C_9}$$

6.

$$6.1. A_{[ABCD]} = \frac{\overline{CD} + \overline{AB}}{2} \times \overline{EF} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha}{2} \times (1 - \cos \alpha) =$$

$$= (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{sen} \alpha)(1 - \cos \alpha) =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha - \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2} =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$$

$$6.2. A'(\theta) = \frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{2 \cos(2\theta)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \theta} - \cos(2\theta) =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \theta} - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 1 + 5 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{6}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta + \frac{1}{6} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{5}{6}$$

$$\text{Assim, } A'(\theta) = 6 - \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{20}{3}.$$

7. Opção (A)

$$\begin{cases} f(3) = 0 \\ f(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log(9 + 3a + b) = 0 \\ \log(16 + 4a + b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 + 3a + b = 1 \\ 16 + 4a + b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a - 8 \\ 16 + 4a - 3a - 8 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ a = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 13 \\ a = -7 \end{cases}$$

8.

$$8.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} =$$

$$= f'(1) \times \frac{1}{2} =$$

$$= 2^2 \times e^3 \times \frac{1}{2} =$$

$$= 2e^3$$

$$8.2. f''(x) = 2(x+1)e^{2x+1} + (x+1)^2 \times 2e^{2x+1} =$$

$$= e^{2x+1} (2x + 2 + 2x^2 + 4x + 2) =$$

$$= e^{2x+1} (2x^2 + 6x + 4)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x+1} (2x^2 + 6x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{2x+1} = 0}_{\text{equação impossível}} \vee 2x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2$$

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
Sinal de f''	+	0	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2[$ e em $]-1, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]-2, -1[$; tem dois pontos de inflexão de abscissas -2 e -1 .

9. Opção (B)

$$\int f(x) dx = \int ax^n dx = a \int x^n dx = a \frac{x^{n+1}}{n+1} + c =$$

$$= \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$10. r: y = 3x$$

$$s: y = \frac{1}{2}x$$

$$t: y = -2x + 5$$

Abcissa do ponto de interseção das retas r e t :

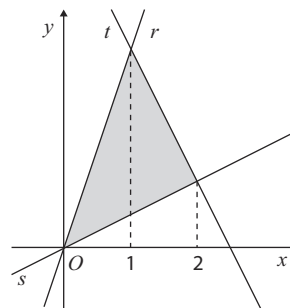
$$3x = -2x + 5 \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$$

Abcissa do ponto de interseção das retas s e t :

$$\frac{1}{2}x = -2x + 5 \Leftrightarrow x = -4x + 10$$

$$\Leftrightarrow 5x = 10$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$



Então:

$$A = \int_0^1 \left(3x - \frac{1}{2}x\right) dx + \int_1^2 \left(-2x + 5 - \frac{1}{2}x\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{5}{2}x\right) dx + \int_1^2 \left(5 - \frac{5}{2}x\right) dx =$$

$$= \left[\frac{5x^2}{4}\right]_0^1 + \left[5x - \frac{5x^2}{4}\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{5}{4} - 0\right) + \left[(10 - 5) - \left(5 - \frac{5}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{5}{4} + \frac{5}{4} =$$

$$= \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned}
 11. \int f'(x) dx &= \int \sin(2x) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int 2 \sin(2x) dx = \\
 &= -\frac{\cos(2x)}{2} + c, c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -2x - 1$ intersesta o eixo O_y no ponto de coordenadas $(0, -1)$.

Então:

$$\begin{aligned}
 f(0) = -1 &\Leftrightarrow -\frac{\cos 0}{2} + c = -1 \\
 &\Leftrightarrow c = -1 + \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -\frac{\cos(2x)}{2} - \frac{1}{2} = \\
 &= -\frac{1 + \cos(2x)}{2}
 \end{aligned}$$

Teste n.º 6

1. Opção (C)

A probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{12}{29} \times \frac{10}{28} + \frac{10}{29} \times \frac{12}{28} = \frac{60}{203}$$

2.

$$21. H(2) = 15,7 \times e^{-\frac{2}{5}} \approx 10,524$$

Dois anos após a compra, o automóvel vale 10 524 euros.

$$22. \frac{H(t+1)}{H(t)} = \frac{15,7 \times e^{-\frac{t+1}{5}}}{15,7 \times e^{-\frac{t}{5}}} = e^{-\frac{t+1}{5} + \frac{t}{5}} = e^{-\frac{1}{5}} \approx 0,82$$

A cada ano que passa, o automóvel desvaloriza, aproximadamente, 18%.

$$23. H'(t) = -\frac{1}{5} \times 15,7e^{-\frac{t}{5}} = -3,14e^{-\frac{t}{5}}$$

$$H'(0) = -3,14e^0 = -3,14$$

Quando a Helena sai com o automóvel do stand, o automóvel está a desvalorizar a uma taxa de 314 euros por ano.

$$24. H(t) = M(t) \Leftrightarrow 15,7e^{-\frac{t}{5}} = 17,2e^{-\frac{t}{4,6}}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{e^{-\frac{t}{5}}}{e^{-\frac{t}{4,6}}} = \frac{17,2}{15,7} \\
 &\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{5} + \frac{t}{4,6}} = \frac{172}{157} \\
 &\Leftrightarrow e^{\frac{0,4t}{23}} = \frac{172}{157}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{2t}{115}} = \frac{172}{157}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2t}{115} = \ln\left(\frac{172}{157}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{115}{2} \ln\left(\frac{172}{157}\right)$$

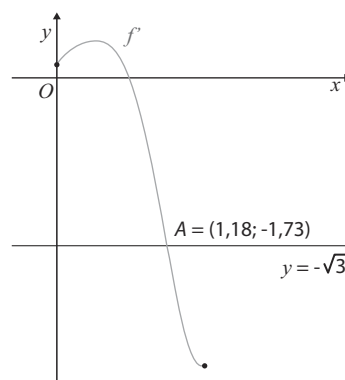
Logo, $t \approx 5,247$.

$$0,247 \times 12 = 2,964$$

Os automóveis têm o mesmo valor após, aproximadamente, 5 anos e 3 meses da sua compra.

$$3. m = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$f'(x) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow -2e^{-2x-2} + 2x \cos(x^2 + 1) = -\sqrt{3}$$



O ponto A tem abcissa 1,18.

4. Opção (A)

$$\begin{aligned}
 z &= i^{2017} + 2i^{2018} - 3i^{2019} + 4i^{2020} = \\
 &= i^1 + 2i^2 - 3i^3 + 4i^0 = \\
 &= i - 2 + 3i + 4 = \\
 &= 2 + 4i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z} &= \frac{1}{2 + 4i} = \frac{1}{2 + 4i} \times \frac{2 - 4i}{2 - 4i} = \\
 &= \frac{2 - 4i}{4 + 16} = \\
 &= \frac{1}{10} - \frac{1}{5}i
 \end{aligned}$$

5. Opção (C)

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
Variação de f'	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$
Sinal de f''	+	0	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-1, 1[$.

6. Assíntotas verticais:

A função f é contínua em todo o seu domínio, exceto, eventualmente, no ponto 0. Portanto, só a reta de equação $x = 0$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2 \operatorname{sen}(3x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} = \\ &= 0 + 2 \lim_{3x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} \times 3 = \\ &= 0 + 2 \times 1 \times 3 = \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-2x+1)}{e^{3x}-1} = \\ &= \lim_{-2x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(-2x+1)}{-2x} \times \lim_{3x \rightarrow 0^-} \frac{3x}{e^{3x}-1} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \\ &= 1 \times 1 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Assim, o gráfico de f não admite assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2 \operatorname{sen}(3x)}{x^2} \right) = \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \operatorname{sen}(3x)}{x^2} = \\ &= 1 + 0 = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

Tem-se que:

$$-1 \leq \operatorname{sen}(3x) \leq 1$$

$$-2 \leq 2 \operatorname{sen}(3x) \leq 2$$

$$-\frac{2}{x^2} \leq \frac{2 \operatorname{sen}(3x)}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0, \text{ então } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \operatorname{sen}(3x)}{x^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2 \operatorname{sen}(3x)}{x} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \operatorname{sen}(3x)}{x} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-2x+1)}{x(e^{3x}-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-2x+1)}{-2x+1} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{3x}-1} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+1}{x} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} \times (-1) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 + \frac{1}{x}\right) = \\ &= 0 \times (-1) \times (-2) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-2x+1)}{e^{3x}-1} = \\ &= \frac{+\infty}{-1} = \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Assim, não existe assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

7.

$$7.1. f(x) \geq f(2x) - 1 \Leftrightarrow \log(x+1) > \log(2x+1) - 1$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x+1 > 0 \wedge 2x+1 > 0\} = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

$$\text{Assim, } \forall x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[:$$

$$\log(x+1) > \log(2x+1) - 1$$

$$\Leftrightarrow \log(x+1) + \log(10) > \log(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \log(10x+10) > \log(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow 10x+10 > 2x+1$$

$$\Leftrightarrow 8x > -9$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{9}{8}$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\cap \left]-\frac{9}{8}, +\infty\right[= \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$

$$7.2. D_h = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R} \wedge g(x) \in]-1, +\infty[\} =$$

$$= \mathbb{R}$$

Cálculo auxiliar

$$g(x) \in]-1, +\infty[\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x > -1$$

Condição universal em $\mathbb{R}$.

$$h(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\operatorname{sen}^2 x) = \log(\operatorname{sen}^2 x + 1)$$

$$h'(x) = \frac{(\operatorname{sen}^2 x + 1)'}{(\operatorname{sen}^2 x + 1) \ln(10)} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{(\operatorname{sen}^2 x + 1) \ln(10)}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{(\operatorname{sen}^2 x + 1) \ln(10)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = 0 \wedge (\sin^2 x + 1) \ln(10) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{R}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
Sinal de h'	0	+	0	-	0	+	0	-	0
Varição de h	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.

A função h é estritamente crescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ e é estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, tem máximos relativos em $x = \frac{\pi}{2}$ e em $x = \frac{3\pi}{2}$ e tem mínimos relativos em $x = 0$, em $x = \pi$ e em $x = 2\pi$.

8. Opção (C)

$$\int_0^k \sin x \, dx = 3 \int_k^\pi \sin x \, dx$$

$$\Leftrightarrow [-\cos x]_0^k = 3[-\cos x]_k^\pi$$

$$\Leftrightarrow -\cos k + 1 = 3(1 + \cos k)$$

$$\Leftrightarrow -4 \cos k = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos k = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $k \in [0, \pi]$, então $k = \frac{2\pi}{3}$.

9. Seja h a função que dá a altura da árvore, em centímetros, em função do número de anos decorridos após ter sido plantada, t .

$$h(t) = \int h'(t) \, dt = \int \frac{20}{\sqrt{t}} \, dt =$$

$$= 20 \int t^{-\frac{1}{2}} \, dt =$$

$$= 20 \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$$

$$= 40\sqrt{t} + c, c \in \mathbb{R}$$

Tem-se que:

$$h(0) = 10 \Leftrightarrow 40 \times \sqrt{0} + c = 10$$

$$\Leftrightarrow c = 10$$

Logo, $h(t) = 40\sqrt{t} + 10$.

Assim, $h(9) = 40\sqrt{9} + 10 = 130$, o que significa que, passados nove anos de ter sido plantada, a árvore mede 130 cm.

10. Opção (D)

As circunferências têm centro no ponto A , que é o afixo de $1 + 2i$.

A circunferência menor é tangente ao eixo imaginário, pelo que o seu raio é 1.

A circunferência maior é tangente ao eixo real, pelo que o seu raio é 2.

Assim, a coroa circular de centro A e raios 1 e 2 é definida, em $\mathbb{C}$, por:

$$1 \leq |z - (1 + 2i)| \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq |z - 1 - 2i| \leq 2$$

A semirreta $\dot{BC}$ tem origem em B e é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, logo uma condição que a define é $\text{Arg}(z - 2i) = \frac{\pi}{4}$.

A semirreta $\dot{BD}$ tem origem em B e é perpendicular à semirreta $\dot{BC}$, logo uma condição que a define é $\text{Arg}(z - 2i) = -\frac{\pi}{4}$.

Então, a condição que define a região sombreada é:

$$1 \leq |z - 1 - 2i| \leq 2 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z - 2i) \leq \frac{\pi}{4}$$

$$11. z_1 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}i}{\frac{\sqrt{6}}{9} e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{\sqrt{6} e^{i\frac{\pi}{4}}}{\frac{\sqrt{6}}{9} e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}} = 9e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

Cálculos auxiliares

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3 + 3} = \sqrt{6}$$

$$z_2 = \left(\sqrt{3} e^{i\frac{3\pi}{16}}\right)^4 = (\sqrt{3})^4 e^{4 \times i\frac{3\pi}{16}} = 9e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Como os afijos dos complexos z_1 e z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular de n lados, com centro na origem do referencial, então:

$$\frac{3\pi}{4} - \frac{7\pi}{12} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n = 12$$

$$12. \frac{2}{1+z} = \frac{2}{1+e^{2i\alpha}} =$$

$$= \frac{2}{1 + \cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)} =$$

$$= \frac{2}{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2i \sin \alpha \cos \alpha} =$$

$$= \frac{2}{2 \cos^2 \alpha + 2i \sin \alpha \cos \alpha} =$$

$$= \frac{1}{\cos \alpha (\cos \alpha + i \sin \alpha)} =$$

$$= \frac{\cos \alpha - i \sin \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= 1 - i \tan \alpha$$

