



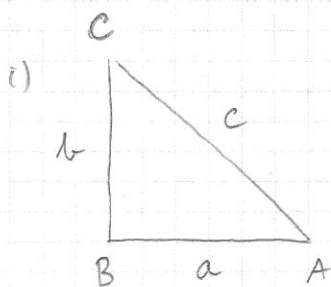
FICHA DE TRABALHO – EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

MATEMÁTICA A – 12.º ANO

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1.



pelo teorema de Pitágoras, tem-se

$$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 = c^2 - b^2$$

ii) $\ln c - \ln b = a \Leftrightarrow \ln\left(\frac{c}{b}\right) = a$

Assim:

$$\ln(bc + c^2) + \ln\left(\frac{c}{b} - 1\right) = \ln(bc + c^2) + \ln\left(\frac{c-b}{b}\right) =$$

$$= \ln\left(c(b+c) \times \frac{c-b}{b}\right) = \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \ln((c+b)(c-b)) =$$

$$= a + \ln(c^2 - b^2) = a + \ln(a^2) = a + 2\ln a$$

Resposta: C

2. Tem-se:

$$\begin{aligned} \log_{4a} \sqrt[4]{64} &= \frac{\log_a \sqrt[4]{4^3}}{\log_a 4a} = \frac{\log_a (4^{3/4})}{\log_a 4 + \log_a a} = \\ &= \frac{\frac{3}{4} \times \log_a 4}{8 + 1} = \frac{\frac{3}{4} \times 8}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Resposta: C

3. Tem-se

$$\log_{ab} a + 2 \log_{ab} (bc) - \log_{ab} c = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{ab} a + \log_{ab} (bc)^2 - \log_{ab} c = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{ab} \left(\frac{ab^2c^2}{c} \right) = 2 \Leftrightarrow \log_{ab} (ab^2c) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ab^2c = (ab)^2 \Leftrightarrow ab^2c = a^2b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{a^2b^2}{ab^2} \Leftrightarrow c = a$$

$\downarrow$
 $ab \neq 0$

$$\text{Logo } \log_a (ac^2) = \log_a (a \times a^2) = \log_a (a^3) = 3$$

Resposta: B

4. Tem-se:

$$A_{[ABCD]} = \text{base} \times \text{altura}$$

$$\text{base} = \overline{DC} = 6$$

$$\begin{aligned} \text{altura} &= f(6) - f(-2) = 6 + \log_3 (6^2) - (-2 + \log_3 (-2)^2) = \\ &= 6 + \log_3 36 + 2 - \log_3 4 = 8 + \log_3 \left(\frac{36}{4} \right) = \\ &= 8 + \log_3 9 = 8 + \log_3 (3^2) = 8 + 2 = 10 \end{aligned}$$

$$\text{Logo } A_{[ABCD]} = 6 \times 10 = 60$$

Resposta: C

5.

i) Tem-se:

$$\frac{1}{2^K} + \frac{1}{2^K} + 2^{-\frac{K}{2}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2^K} + 2^{-K/2} = 1 \Leftrightarrow 2 \times 2^{-K} + 2^{-K/2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \times (2^{-K/2})^2 + 2^{-K/2} - 1 = 0$$

Fazendo $y = 2^{-K/2}$, vem:

$$2y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \vee y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

F.R.

$$\Leftrightarrow \underbrace{2^{-K/2} = -1}_{\text{imp}} \vee 2^{-K/2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{-K/2} = 2^{-1} \Leftrightarrow -\frac{K}{2} = -1 \Leftrightarrow K = 2$$

ii) Se $K=2$ então $\frac{1}{2^K} = \frac{1}{4}$ e $2^{-K/2} = \frac{1}{2}$

Logo:

$$\mu = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} = 2,25$$

Resposta: B

6. A função g é estritamente crescente se

$$\log(a-3) + \log a > 1$$

$$c) D = \left\{ a \in \mathbb{R} : \underbrace{a-3 > 0}_{a > 3} \wedge a > 0 \right\} =]3, +\infty[$$

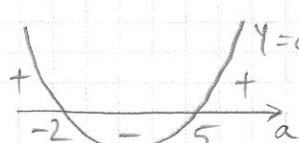
ii) Neste domínio, tem-se:

$$\log(a-3) + \log a > 1 \Leftrightarrow \log(a(a-3)) > \log 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3a > 10 \Leftrightarrow a^2 - 3a - 10 > 0$$

Gráfico auxiliar:

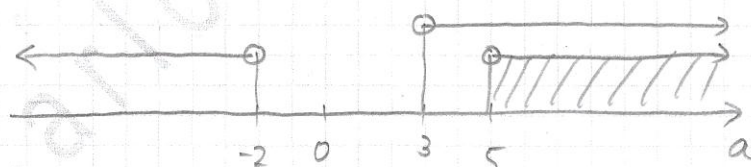
$$a^2 - 3a - 10 = 0 \Leftrightarrow a = -2 \vee a = 5$$



Logo,

$$a^2 - 3a - 10 > 0 \Leftrightarrow a \in]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$$

Fazendo a interseção com o domínio:



$$\therefore a \in]5, +\infty[$$

Resposta: A

7. Tem-se:

$$4 \log_{16} y - 2 \log_4 x = 3 \Leftrightarrow \log_{16} y - 2 \log_4 x = \log_4 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_4 y}{\log_4 16} = \log_4 (x^2) + \log_4 3 \Leftrightarrow \frac{\log_4 y}{2} = \log_4 (3x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_4 y = 2 \log_4 (3x^2) \Leftrightarrow \log_4 y = \log_4 (3x^2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = (3x^2)^2 \Leftrightarrow y = 9x^4$$

Resposta: D

8.

i) A equação da assíntota vertical do gráfico de g é dada por:

$$1 - bx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{b}, \quad b \neq 0$$

$$\text{Logo } \frac{1}{b} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow b = 8$$

ii) Como o ponto de coordenadas $(-3, 3)$ pertence ao gráfico de g , vem:

$$g(-3) = 3 \Leftrightarrow e^{3+a} + \log_5 (1 - 8 \times (-3)) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{3+a} + \log_5 (25) = 3 \Leftrightarrow e^{3+a} + 2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{3+a} = 1 \Leftrightarrow e^{3+a} = e^0 \Leftrightarrow 3+a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -3$$

Resposta: B

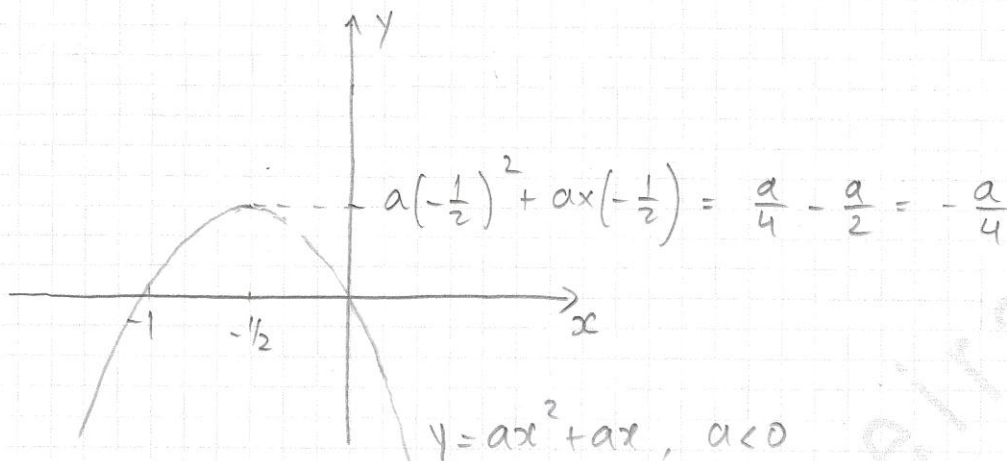
9.

i) Lem-se:

$$ax^2 + ax = 0 \Leftrightarrow ax(x+1) = 0 \Leftrightarrow ax = 0 \vee x+1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$

Assim:



Logo

$$ax^2 + ax \leq -\frac{a}{4} \Leftrightarrow 0 < 16^{ax^2 + ax} \leq 16^{-\frac{a}{4}}$$

Como $16^{-\frac{a}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{a}{4}}} = \frac{1}{(16^{\frac{1}{4}})^a} = \frac{1}{(\sqrt[4]{16})^a} = \frac{1}{2^a}$

Pontanto, $D'_g =]0, \frac{1}{2^a}]$

Resposta: A

10.

I) Falsa, se $a = -2$ e $b = -3$ então $c = \ln\left(\frac{-2}{-3}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

mas c não pode ser $\ln(-2) - \ln(-3)$

II)

$$\bullet f(\sqrt[n]{ab}) = \ln\left(\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n\right) = \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\bullet \frac{f(a) + f(b)}{n} = \frac{\ln(a^n) + \ln(b^n)}{n} = \frac{n \ln a + n \ln b}{n} = \ln a + \ln b$$

 $\therefore$ Verdadeira

$$\text{III. } \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt{x} = \frac{\log_a \sqrt{x}}{\log_a \sqrt[3]{a}} = \frac{\log_a (x^{1/2})}{\log_a (a^{1/3})} = \frac{\frac{1}{2} \log_a x}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \log_a x$$

$$\therefore 3 \log_{a^2} x = 3 \frac{\log_a x}{\log_a (a^2)} = 3 \frac{\log_a x}{2} = \frac{3}{2} \log_a x$$

$\therefore$ Verdadeira

Resposta: D

Grupo II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.1. Tem-se:

$$f(x) - f(1-2x) \geq 1 + \log_3 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \log_3 (6-3x) - x + \log_3 (6-3(1-2x)) \geq 1 + \log_3 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_3 (6-3x) + \log_3 (3+6x) \geq \log_3 3 + \log_3 x$$

$$1) D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \underbrace{6-3x > 0}_{x < 2} \wedge \underbrace{3+6x > 0}_{x > -\frac{1}{2}} \wedge x > 0 \right\} =]0, 2[$$

(i) Neste domínio, tem-se:

$$-\log_3 (6-3x) + \log_3 (3+6x) \geq \log_3 (3x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (3+6x) \geq \log_3 (3x) + \log_3 (6-3x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (3 + 6x) \geq \log_3 (3x(6 - 3x)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 + 6x \geq 18x - 9x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 3 \geq 0$$

Pol. Auxiliar

$$9x^2 - 12x + 3 = 0 \underset{\text{F.R.}}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{3} \vee x = 1$$

Como $y = 9x^2 - 12x + 3$ é uma função quadrática, cujo gráfico tem a concavidade voltada para cima, então

$$9x^2 - 12x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{1}{3}] \cup [1, +\infty[$$

Fazendo a intersecção com o domínio:



$$\therefore \text{C.S.} =]0, \frac{1}{3}] \cup [1, 2[$$

1.2. Tem-se:

$$A_{[ABC]} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$\text{base} = \overline{CB}$$

$$\text{altura} = -f(1-2)$$

i) $D_f =]-\infty, 2[$, logo a recta de equação $x=2$ é A.V. do gráfico de f . Ponto $B(2,0)$

$$ii) f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \log_3(6-3x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = \log_3(6-3x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^1 = 6-3x \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

$\in D_f$

logo $C(1,0)$

Ponto $\overline{CB} = 1$

$$iii) f(-2) = 1 - \log_3(6 - 3(-2)) = 1 - \log_3 12$$

Assim:

$$A_{[ABC]} = \frac{1 \times (-\log_3 12 - 1)}{2} = \frac{\log_3 12 \cdot \log_3 3}{2} =$$

$$= \frac{\log_3 \left(\frac{12}{3}\right)}{2} = \frac{1}{2} \log_3 4 = \log_3 (4^{1/2}) = \log_3 \sqrt{4} = \log_3 2 //$$

1.3. f é injectiva se e só se

$$\forall a, b \in D_f : f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$$

Sejam $a, b \in]-\infty, 2[$: $f(a) = f(b)$, assim:

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow 1 - \log_3(6 - 3a) = 1 - \log_3(6 - 3b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_3(6 - 3a) = \log_3(6 - 3b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(6 - 3a) = \log_3(6 - 3b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 - 3a = 6 - 3b \Leftrightarrow$$

$$a, b \in D_f$$

$$\Leftrightarrow -3a = -3b \Leftrightarrow a = b$$

$\therefore f$ é injetiva, logo tem inversa

1.4.

$$i) f(x) = y \Leftrightarrow 1 - \log_3(6 - 3x) = y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_3(6 - 3x) = y - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(6 - 3x) = 1 - y$$

$$\Leftrightarrow 6 - 3x = 3^{1-y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 - 3^{1-y} = 3x$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{3^{1-y}}{3} = x \Leftrightarrow x = 2 - 3^{1-y-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - \frac{1}{3^y}$$

$$\text{Logo } f^{-1}(x) = 2 - \frac{1}{3^x} \text{ e } D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

1.5. Tem-se:

$$f^{-1}(x) + 3^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{3^x} + 3^{x+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{\times 3^x}{2 \times 3^x - 1 + 3^x \cdot 3^{x+1}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 3^x - 1 + 3^x \cdot 3^x \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \times (3^x)^2 + 2 \times 3^x - 1 = 0$$

Fazendo $y = 3^x$, vem:

$$3y^2 + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow \underset{\text{F.R.}}{y = -1 \vee y = \frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{y=3^x}{\underbrace{3^x = -1 \vee 3^x = \frac{1}{3}}_{\text{Imp.}}}$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3^{-1} \Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{e.s.} = \{-1\}$$

2.1.

$$\text{i) Tem-se } e^{2+\ln(a+b)} = 5e^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^2 \times e^{\ln(a+b)} = 5e^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+b = 5 \Leftrightarrow b = 5-a$$

$$\text{ii) } \log_a(b+7) = 2 \Leftrightarrow b+7 = a^2 \Leftrightarrow \underset{b=5-a}{5-a+7 = a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a^2 - a + 12 = 0 \Leftrightarrow a = -4 \vee a = 3$$

Como $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ então $a = 3$ e portanto $b = 5 - 3 = 2$

Logo, para $a=3$ e $b=2$

$$g(x) = \log_2(3 \times 2 + 2) + e^{3x+2} =$$

$$= \log_2 8 + e^{3x+2} = \log_2(2^3) + e^{3x+2} =$$

$$= 3 + e^{3x+2}$$

2.2.

$$\frac{e^{2x^2}}{3e^{x^2}+1} < \frac{e^{x^2}}{g(x)} \Leftrightarrow \frac{e^{2x^2}}{\underbrace{3e^{x^2}+1}_{>0}} < \frac{e^{x^2}}{\underbrace{3+e^{3x+2}}_{>0}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x^2}(3+e^{3x+2}) < e^{x^2}(3e^{x^2}+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3e^{2x^2} + e^{2x^2} \cdot e^{3x+2} < 3e^{x^2} \cdot e^{x^2} + e^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{3e^{2x^2}} + e^{2x^2+3x+2} < \cancel{3e^{2x^2}} + e^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x^2+3x+2} < e^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+3x+2 < x^2 \Leftrightarrow x^2+3x+2 < 0$$

Polinómio Auxiliar:

$$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=-2$$

Como $y = x^2+3x+2$ é uma função quadrática cujo gráfico tem a concavidade voltada para cima, então:

$$x^2+3x+2 < 0 \Leftrightarrow x \in]-2, -1[$$

$$\therefore \text{C.S.} =]-2, -1[$$

2.3. i) g é invertível se for injetiva.

$$g \text{ é injetiva} \Leftrightarrow \forall a, b \in D_g : g(a) = g(b) \Leftrightarrow a = b$$

Sejam $a, b \in \mathbb{R} : g(a) = g(b)$. Assim:
(D_g)

$$g(a) = g(b) \Leftrightarrow 3 + e^{3a+2} = 3 + e^{3b+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{3a+2} = e^{3b+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3a+2 = 3b+2$$

$$\Leftrightarrow 3a = 3b \Leftrightarrow a = b$$

Logo, g é injetiva e portanto é invertível

$$ii) g(x) = y \Leftrightarrow 3 + e^{3x+2} = y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{3x+2} = y - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x+2 = \ln(y-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = -2 + \ln(y-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \ln(y-3)$$

$$\text{Logo } g^{-1}(x) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \ln(x-3)$$

$$D_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} : x-3 > 0\} =]3, +\infty[$$

3.1.

(i) Seja F o ponto pertencente ao eixo Ox de abscissa a , isto é, $F(a, 0)$

Tem-se $B(a, f(a)) = (a, \ln a)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 \Leftrightarrow x = 1$$

ponto $A(1, 0) \Rightarrow C(0, 1)$ (como $(1, 0)$ é gráfico de f então $(0, 1)$ é gráfico de f^{-1})

Assim:

$$\begin{aligned} A_{[ABC]} &= A_{[OFBC]} - A_{[AFB]} - A_{[OAC]} = \\ &= \frac{\overline{OC} + \overline{FB}}{2} \times \overline{OF} - \frac{\overline{AF} \times \overline{FB}}{2} - \frac{\overline{OA} \times \overline{OC}}{2} = \\ &= \frac{1 + \ln a}{2} \cdot a - \frac{(a-1) \cdot \ln a}{2} - \frac{1 \times 1}{2} = \\ &= \frac{a + a \ln a - a \ln a + \ln a - 1}{2} = \frac{a-1 + \ln a}{2} \end{aligned}$$

(ii) Como $B(a, \ln a)$ é gráfico de f e D é gráfico de f^{-1} e tem ordenada a , então $D(\ln a, a)$ e portanto $E(0, a)$

$$\text{Assim } A_{[CDE]} = \frac{\overline{ED} \times \overline{EC}}{2} = \frac{\ln a \times (a-1)}{2}$$

$$\begin{aligned} A_{[ABC]} &= A_{[CDE]} \Leftrightarrow \frac{a-1 + \ln a}{2} = \frac{(a-1) \ln a}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a-1 + \ln a = a \ln a - \ln a \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a-1 = a \ln a - \ln a - \ln a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a-1 = a \ln a - 2 \ln a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a-1 = \ln a \times (a-2) \Leftrightarrow \ln a = \frac{a-1}{a-2} //$$

$$\downarrow$$

$$a > 2$$

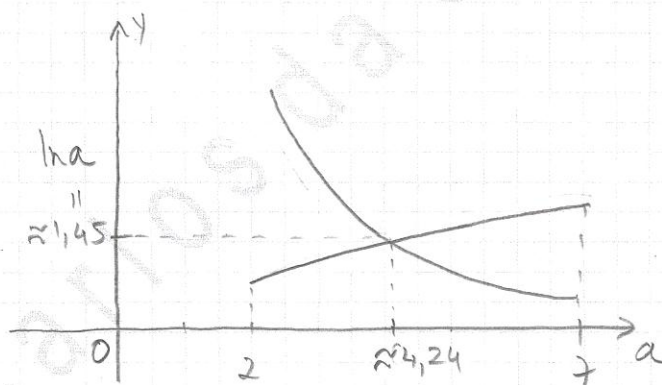
$$\downarrow$$

$$a \neq 2$$

3.2.

$$i) A_{[ABC]} = A_{[CDE]} \Leftrightarrow \ln a = \frac{a-1}{a-2}$$

ii) Definir $y_1 = \ln a$ e $y_2 = \frac{a-1}{a-2}$, na janela de visualização $[2, 7] \times [0, 4]$.

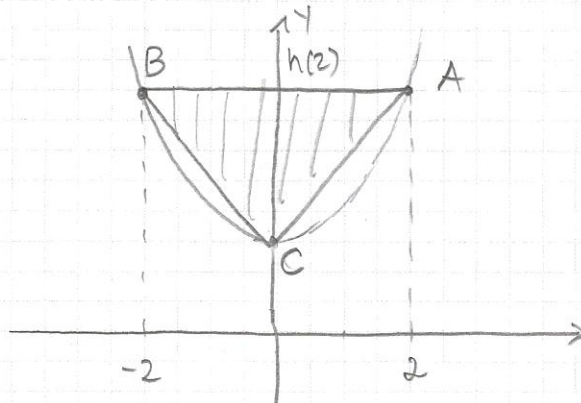


$$\ln a = \frac{a-1}{a-2} \Leftrightarrow a \approx 4,24$$

portanto B (a, ln a) com $a \approx 4,24$ e $\ln a \approx 1,45$

4.

i) h é par, pois $h(-x) = a^{-x} + a^x = h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$



$$h(0) = a^0 + a^0 = 1 + 1 = 2, \text{ logo } C(0, 2)$$

$$h(2) = a^2 + a^{-2}, \text{ logo } A(2, a^2 + a^{-2})$$

$$ii) A_{[ABC]} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\overline{AB} \times (h(2) - 2)}{2} =$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 \times (a^2 + a^{-2} - 2)}{2} = 2(a^2 + a^{-2} - 2)$$

Assim:

$$A_{[ABC]} = \frac{225}{8} \Leftrightarrow 2a^2 + 2a^{-2} - 4 = \frac{225}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16a^2 + 16a^{-2} - 32 = 225 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16a^2 + 16a^{-2} - 257 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16a^4 + 16 - 257a^2 = 0 \Leftrightarrow$$

 $\times a^2$

$$\Leftrightarrow 16(a^2)^2 - 257a^2 + 16 = 0$$

$$\text{Fazendo } y = a^2, \text{ vem } 16y^2 - 257y + 16 = 0 \quad \text{F.R.} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 16 \vee y = \frac{1}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 16 \vee a^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -4 \vee a = 4 \vee a = -\frac{1}{4} \vee a = \frac{1}{4}$$

Como $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, vem $a = \frac{1}{4} \vee a = 4$

OBS: Se $a = 4$, então $h(x) = 4^x + 4^{-x}$

Se $a = \frac{1}{4}$, então $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{4}\right)^{-x} = 4^{-x} + 4^x$

4.2.

$$2h(x-1) \geq 5 \Leftrightarrow 2 \times (4^{x-1} + 4^{1-x}) \geq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 4^x \cdot 4^{-1} + 2 \times 4^1 \cdot 4^{-x} - 5 \geq 0$$

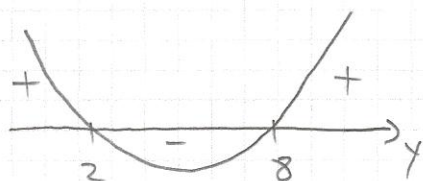
$$\Leftrightarrow \frac{2}{4} \times (4^x)^2 + 8 - 5 \times 4^x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times (4^x)^2 - 5 \times 4^x + 8 \geq 0$$

Fazendo $y = 4^x$, vem: $\frac{1}{2} y^2 - 5y + 8 \geq 0$

C. Auxiliar:

$$\frac{1}{2} y^2 - 5y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \vee y = 8$$



$$\therefore \frac{1}{2} y^2 - 5y + 8 \geq 0$$



$$y \leq 2 \vee y \geq 8$$

Como $y = 4^x$, vem:

$$\begin{aligned} 4^x &\leq 2 \quad \vee \quad 4^x \geq 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2^2)^x &\leq 2 \quad \vee \quad (2^2)^x \geq 2^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^{2x} &\leq 2 \quad \vee \quad 2^{2x} \geq 2^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x &\leq 1 \quad \vee \quad 2x \geq 3 \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{1}{2} \quad \vee \quad x \geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{C.S.} =]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty[$$

4.3. Tem-se:

$$\begin{aligned} \log_4 (2 + h(x)) &= \log_4 (2 + 4^x + 4^{-x}) = \\ &= \log_4 \left(2 + 4^x + \frac{1}{4^x} \right) = \log_4 \left(\frac{2 \times 4^x + (4^x)^2 + 1}{4^x} \right) \\ &= \log_4 ((4^x)^2 + 2 \times 4^x + 1) - \log_4 (4^x) = \\ &= \log_4 (4^x + 1)^2 - x = 2 \log_4 (4^x + 1) - x = \\ &= 2 \times \frac{\log_2 (4^x + 1)}{\log_2 4} - x = \cancel{2} \times \frac{\log_2 (4^x + 1)}{\cancel{2}} - x = \\ &= \log_2 (4^x + 1) - x = \end{aligned}$$

5.1.

• n.º de coelhos ao fim de quatro meses: $C\left(\frac{1}{3}\right) = C_0 + 0,04 \times C_0$
 $= C_0(1 + 0,04) = C_0 \times 1,04$

• n.º de coelhos ao fim de oito meses:

$$C\left(\frac{2}{3}\right) = C_0 \times 1,04 + 0,04 \times 1,04 C_0 =$$

$$= C_0 \times 1,04 \times (1 + 0,04) = C_0 \times 1,04 \times 1,04 = C_0 \times (1,04)^2$$

• n.º de coelhos ao fim de doze meses:

$$C\left(\frac{3}{3}\right) = C(1) = C_0 \times (1,04)^2 + 0,04 \times C_0 \times (1,04)^2 =$$

$$= C_0 \times (1,04)^3$$

• n.º de coelhos ao fim de 16 meses:

$$C\left(1 + \frac{1}{3}\right) = C\left(\frac{4}{3}\right) = C_0 \times (1,04)^3 + 0,04 \times C_0 \times (1,04)^3 =$$

$$= C_0 \times (1,04)^4$$

5.2. Tem-se:

$$C\left(\frac{1}{3}\right) = C_0 \times (1,04) = C_0 \times [(1,04)^3]^{\frac{1}{3}}$$

$$C\left(\frac{2}{3}\right) = C_0 \times (1,04)^2 = C_0 \times [(1,04)^3]^{\frac{2}{3}}$$

$$C(1) = C_0 \times (1,04)^3 = C_0 \times [(1,04)^3]^1$$

$$C\left(\frac{4}{3}\right) = C_0 \times (1,04)^4 = C_0 \times [(1,04)^3]^{\frac{4}{3}}$$

$$\vdots$$

$$C(t) = C_0 \times [(1,04)^3]^t = C_0 \times (1,04)^{3t}$$

5.3.

a) 27 meses são dois anos e três meses, o que corresponde a $t = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

Assim, pretende-se determinar o valor do quociente:

$$\frac{C(t + \frac{9}{4})}{C(t)} = \frac{\cancel{C_0} \times (1,04)^{3(t + \frac{9}{4})}}{\cancel{C_0} \times (1,04)^{3t}} =$$

$$= (1,04)^{3t + 3 \times \frac{9}{4} - 3t} = (1,04)^{6,75} \approx 1,3$$

∴ A cada 27 meses, o n.º de coelhos aumenta, aproximadamente, 30% ($1,3 = 1 + 0,3 = 100\% + 30\%$)

b) Tem-se:

$$C(t+x) = 3C(t) \Leftrightarrow \cancel{C_0} \times (1,04)^{3(t+x)} = 3\cancel{C_0} \times (1,04)^{3t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1,04)^{3t+3x}}{(1,04)^{3t}} = 3 \Leftrightarrow (1,04)^{3t+3x-3t} = 3$$

$$\Leftrightarrow 3x = \log_{1,04} 3 \Leftrightarrow 3x = \frac{\ln 3}{\ln(1,04)} \Leftrightarrow x = \frac{\ln 3}{3 \ln(1,04)} \approx 9,337$$

O n.º de coelhos na reserva triplica a cada nove anos e quatro meses, aproximadamente ($0,337 \times 12 \approx 4$)

c) Tem-se:

$$C = C_0 \times (1,04)^{3t} \Leftrightarrow \frac{C}{C_0} = (1,04)^{3t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3t = \log_{1,04} \left(\frac{C}{C_0} \right) \Leftrightarrow 3t = \frac{\ln \left(\frac{C}{C_0} \right)}{\ln(1,04)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(C) - \ln(C_0)}{3 \ln(1,04)} //$$

6.1.

O final de 2010, corresponde a $t=1$. Assim, tem-se:

$$\begin{cases} N(1) = 0,801 \\ N(3) = 1,642 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{1+ae^b} = 0,801 \\ \frac{3}{1+ae^{3b}} = 1,642 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 0,801 (1+ae^b) \\ 3 = 1,642 (1+ae^{3b}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{0,801} - 1 = ae^b \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ae^b = 2,745 \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{2,745}{e^b} \\ \frac{3}{1,642} - 1 = \frac{2,745}{e^b} \cdot e^{3b} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ 0,827 = 2,745 \cdot e^{3b-b} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ e^{2b} = \frac{0,827}{2,745} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ 2b = \ln\left(\frac{0,827}{2,745}\right) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{2,745}{e^{-0,6}} \approx 5 \\ b = \frac{\ln\left(\frac{0,827}{2,745}\right)}{2} \approx -0,6 \end{array} \right. //$$

6.2.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 + 5e^{-0,6t}} = \frac{3}{1 + 5 \underbrace{e^{-\infty}}_0} = \frac{3}{1 + 5 \times 0} = 3$$

Com o passar do tempo, o nº de utentes no centro de saúde tende para 3000.

6.3.

$$N(t) = 0,2 \Leftrightarrow \frac{3}{1 + 5e^{-0,6t}} = 0,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 = 0,2(1 + 5e^{-0,6t}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{0,2} - 1 = 5e^{-0,6t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14 = 5e^{-0,6t} \Leftrightarrow \frac{14}{5} = e^{-0,6t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,6t = \ln\left(\frac{14}{5}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{14}{5}\right)}{-0,6} \approx -1,716$$

$t = -1 \rightarrow$ início de 2009 e $t = -2 \rightarrow$ início de 2008.

Portanto, o nº de utentes atingiu os 200, durante o ano de 2008.

6.4.

$$N(t) = S(t) \Leftrightarrow \frac{3}{1 + 5e^{-0,6t}} = \frac{2,5e^{0,3t}}{1 + e^{0,3t}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(1 + e^{0,3t}) = 2,5e^{0,3t}(1 + 5e^{-0,6t}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 + 3e^{0,3t} = 2,5e^{0,3t} + 12,5e^{0,3t} \times e^{-0,6t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 + 3e^{0,3t} = 2,5e^{0,3t} + 12,5e^{-0,3t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,5e^{0,3t} - 12,5e^{-0,3t} + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{\times e^{0,3t}}{0,5(e^{0,3t})^2 - 12,5 + 3e^{0,3t}} = 0$$

Fazendo $y = e^{0,3t}$, vem

$$0,5y^2 + 3y - 12,5 = 0 \Leftrightarrow y = 2,831 \vee y = -8,831 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{0,3t} = 2,831 \vee \underbrace{e^{0,3t} = -8,831}_{\text{impossível}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,3t = \ln(2,831) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(2,831)}{0,3} \approx 3,469$$

O nº de utentes nos dois centros é igual, passados três anos e seis meses, aproximadamente ($0,469 \times 12 \approx 6$)

7.1. Tem-se:

$$\begin{aligned} t(5) = 0 &\Leftrightarrow -0,965 \ln(5) + a = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a = 0,965 \ln(5) \Leftrightarrow a \approx 1,55 \end{aligned}$$

7.2.

$$\begin{aligned} t\left(\frac{m}{3}\right) - t(m) &= -0,965 \ln\left(\frac{m}{3}\right) + a + 0,965 \ln(m) - a \\ &= -0,965 \left(\ln\left(\frac{m}{3}\right) - \ln(m) \right) = \\ &= -0,965 \left(\ln(m) - \ln 3 - \ln(m) \right) \\ &= 0,965 \ln 3 \approx 1,06 \end{aligned}$$

A massa de Z65 reduz $\frac{2}{3}$ (para $\frac{1}{3}$) a cada ano e um mês, aproximadamente ($0,06 \times 12 \approx 1$)

7.3. Tem-se:

$$t(xm) = t(m) + 0,6692 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,965 \ln(xm) + a = -0,965 \ln(m) + a + 0,6692 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,965 (\ln x + \ln(m)) = -0,965 \ln(m) + 0,6692 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,965 \ln x - \cancel{0,965 \ln(m)} = -\cancel{0,965 \ln(m)} + 0,6692 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{0,6692}{-0,965} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{0,6692}{0,965}} \approx 0,5$$

A massa de Z_{65} reduz-se 50% (para metade) a cada 244 dias, aproximadamente, ou seja, a semi-vida de Z_{65} é, aproximadamente, 244 dias ($0,6692 \times 365 \approx 244$)

7.4. Tem-se

$$t = -0,965 \ln(m) + a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,965 \ln(m) = a - t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(m) = \frac{a-t}{0,965} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = e^{\frac{a-t}{0,965}} \Leftrightarrow m = e^{\frac{a}{0,965} - \frac{t}{0,965}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = e^{\frac{a}{0,965}} \times e^{-\frac{1}{0,965} t}$$

$$\Leftrightarrow m = \underbrace{e^{\frac{a}{0,965}}}_A e^{-1,036 t}, B \approx 1,036$$

7.5. Tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{m(t+2)}{m(t)} &= \frac{e^{\frac{a}{0,965}} \cdot e^{-1,036(t+2)}}{e^{\frac{a}{0,965}} \cdot e^{-1,036t}} = \\ &= e^{-1,036t - 1,036 \times 2 + 1,036t} = \\ &= e^{-2,072} \approx 0,126\end{aligned}$$

A massa de ^{265}Pu reduz, aproximadamente, 87,4% a cada dois anos ($100\% - 12,6\% = 87,4\%$.)