



FICHA DE TRABALHO – EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

MATEMÁTICA A – 12.º ANO

"A Matemática pura, é à sua maneira, a poesia das ideias lógicas."
Albert Einstein

GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Seja $[ABC]$ um triângulo rectângulo em B , tal que $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ e $\overline{AC} = c$.

Sabe-se que $\ln c - \ln b = a$. A que é igual a expressão $\ln(bc + c^2) + \ln\left(\frac{c}{b} - 1\right)$?

A $a + \ln a$

B $b + \ln a$

C $a + 2 \ln a$

D $b + 2 \ln a$

2. Seja a um número real tal que $\log_a 4 = 8$.

Qual é o valor de $\log_{4a} \sqrt[4]{64}$?

A $\frac{1}{3}$

B $\frac{1}{2}$

C $\frac{2}{3}$

D $\frac{3}{4}$

3. Sejam a , b e c três números reais tal que $\log_{ab} a + 2 \log_{ab}(bc) - \log_{ab} c = 2$.

Qual é o valor de $\log_a(ac^2)$?

A 2

B 3

C 4

D 5

4. Na figura estão representados, em referencial on. xOy , parte do gráfico da função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = x + \log_3(x^2)$ e um paralelogramo $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico de g e tem abcissa -2 ;
- o ponto C pertence ao gráfico de g e tem abcissa 6.

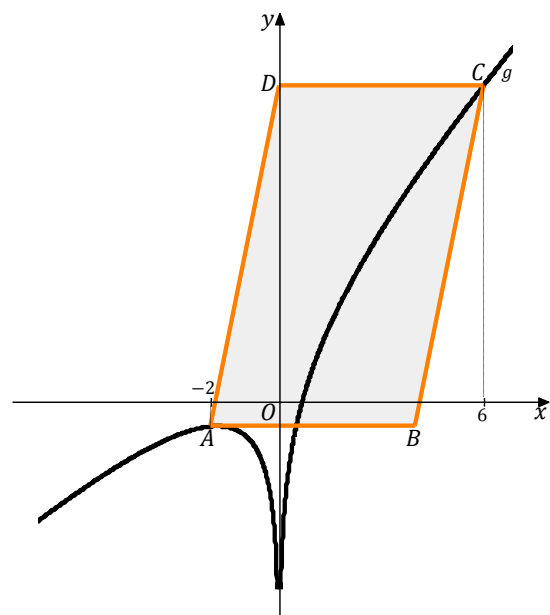
Qual é a área do paralelogramo $[ABCD]$?

A 36

B 48

C 60

D 72



5. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela:

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2^k}$	$\frac{1}{2^k}$	$2^{-\frac{k}{2}}$

(k designa um número real)

Qual é o valor médio da variável aleatória X ?

A 2

B 2,25

C 2,5

D 2,75

6. Para certos valores reais de a a função g , definida por $g(x) = (\log(a - 3) + \log a)^x$ é uma função exponencial estritamente crescente. Então pode-se afirmar que:

A $a \in]5, +\infty[$

B $a \in]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$

C $a \in]3, +\infty[$

D $a \in]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$

7. Sejam x e y dois números reais positivos tais que $4^{\log_{16} y - 2\log_4 x} = 3$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A $y = 3x^2$

B $y = 9x^2$

C $y = 3x^4$

D $y = 9x^4$

8. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função g definida por $g(x) = e^{-x+a} + \log_5(1 - bx)$, com a e b constantes reais.

Sabe-se que:

- o ponto de coordenadas $(-3, 3)$ pertence ao gráfico de g ;
- A recta de equação $x = \frac{1}{8}$ é assíntota vertical do gráfico de g .

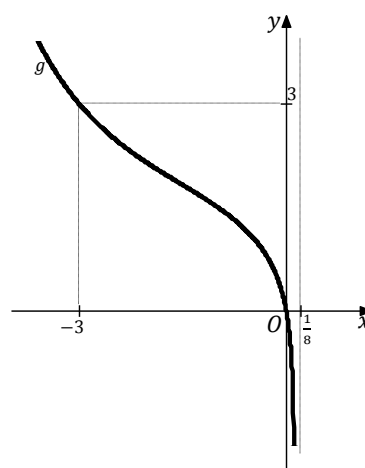
Quais são os valores de a e de b ?

A $a = 3$ e $b = 8$

B $a = -3$ e $b = 8$

C $a = -3$ e $b = -8$

D $a = 3$ e $b = -8$



9. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 16^{ax^2+ax}$, com $a < 0$. Qual é o contradomínio de f ?

A $]0, \frac{1}{2^a}]$

B $[\frac{1}{2^a}, +\infty[$

C $]0, \frac{1}{4^a}]$

D $[\frac{1}{4^a}, +\infty[$

10. Considere as seguintes afirmações:

I. $c = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \Rightarrow c = \ln a - \ln b$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$

II. Se $f(x) = \ln(x^n)$ então $f(\sqrt[n]{ab}) = \frac{f(a)+f(b)}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}^+$

III. $\log_{\sqrt[3]{a}}(\sqrt{x}) = 3 \log_{a^2} x$, com $x \in \mathbb{R}^+$ e $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Quais são as afirmações verdadeiras?

A I e III

B Apenas a II

C Apenas a III

D II e III

GRUPO II – ÍTEMS DE RESPOSTA ABERTA

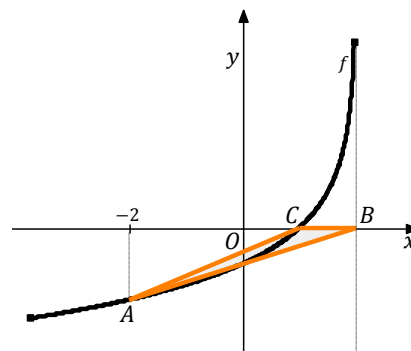
1. Considere a função f , de domínio $]-\infty, 2[$, definida por $f(x) = 1 - \log_3(6 - 3x)$

1.1. Determine o conjunto solução da inequação $f(x) - f(1 - 2x) \geq 1 + \log_3 x$.

1.2. Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f e um triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico de f e tem abcissa -2 ;
- o ponto B pertence ao eixo Ox e à assíntota do gráfico de f ;
- o ponto C pertence ao eixo Ox e ao gráfico de f .



Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é igual a $\log_3 2$.

1.3. Mostre que a função f é injectiva.

1.4. Caracterize a função f^{-1} , função inversa de f .

1.5. Determine o conjunto solução da equação $f^{-1}(x) + 3^{x+1} = 0$.

2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \log_b(ab + 2) + e^{ax+b}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

2.1. Sabendo que $e^{2+\ln(a+b)} = 5e^2$ e que $\log_a(b + 7) = 2$, mostre que $g(x) = 3 + e^{3x+2}$.

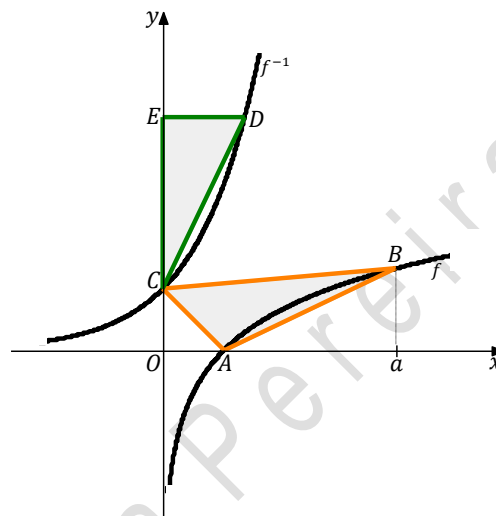
2.2. Determine o conjunto solução da inequação $\frac{e^{2x^2}}{3e^{x^2}+1} < \frac{e^{x^2}}{g(x)}$.

2.3. Mostre que g tem função inversa e caracterize-a.

3. Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln x$, parte do gráfico da função f^{-1} , função inversa de f , o triângulo $[ABC]$ e o triângulo $[CDE]$.

Sabe-se que:

- A é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox ;
- C é o ponto de intersecção do gráfico de f^{-1} com o eixo Oy ;
- o ponto B pertence ao gráfico de f e tem abcissa a ;
- o ponto D pertence ao gráfico de f^{-1} e tem ordenada a ;
- o ponto E pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada que o ponto D ;
- a é um número real maior que 2.



3.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é igual à área do triângulo $[CDE]$ se e só se $\ln a = \frac{a-1}{a-2}$.

3.2. Recorrendo à calculadora gráfica determine as coordenadas do ponto B de modo que a área do triângulo $[ABC]$ é igual à área do triângulo $[CDE]$

Na sua resposta deve:

- escrever a condição que permite resolver o problema.
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema.
- indicar as coordenadas do ponto B , arredondadas às centésimas.

4. Considere a função h , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = a^x + a^{-x}$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

4.1. Considere o triângulo $[ABC]$ de área $\frac{225}{8}$ tal que o ponto A pertence ao gráfico de h e tem abcissa 2, o ponto B é o simétrico de A em relação ao eixo Oy e o ponto C pertence ao gráfico de h e ao eixo Oy .

Mostre que $a = \frac{1}{4} \vee a = 4$.

4.2. Determine o conjunto solução da inequação $2h(x-1) \geq 5$.

4.3. Mostre que $\log_4(2 + h(x)) = \log_2(4^x + 1) - x, \forall x \in \mathbb{R}$.

5. Devido a várias restrições os responsáveis de uma reserva de caça controlam a população de coelhos de modo que ela cresça a uma taxa de 4% a cada quatro meses. Admita que a população de coelhos na reserva num certo instante inicial é de C_0 indivíduos e seja C a função que dá o número de coelhos da reserva, t anos a partir de um certo instante inicial.

5.1. Determine $C\left(\frac{4}{3}\right)$ em função de C_0 .

5.2. Defina a expressão analítica da função C , apresentando-a na forma $C_0 \times a^{bt}$, sendo a e b constantes reais positivas.

5.3. Nas alíneas seguintes considere $a = 1,04$ e $b = 3$.

a) Qual é o aumento, em percentagem, do número de coelhos a cada 27 meses? Apresente o resultado arredondado às unidades.

b) Determine x de modo que $C(t + x) = 3C(t)$. Interprete o resultado no contexto da situação descrita. Apresente o resultado em anos e meses, meses arredondados às unidades.

c) Mostre que $t = \frac{\ln C - \ln C_0}{3 \ln(1,04)}$.

6. O número de utentes, em milhares, de um Centro de Saúde é dado em função do tempo, t , medido em anos, por:

$$N(t) = \frac{3}{1 + ae^{bt}}, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}$$

O instante $t = 0$, corresponde ao início de 2010.

6.1. Sabendo que no final de 2010 o número de utentes do Centro de Saúde era de 801 e que passados dois anos esse número já era de 1642, determine os valores de a e de b . Apresente o valor de a arredondado às unidades e o valor de b arredondado às décimas. Caso faça arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve no mínimo três casas decimais.

Nas alíneas seguintes, considere $a = 5$ e $b = -0,6$.

6.2. Determine $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

6.3. No decorrer de que ano o número de utentes no Centro de Saúde atingiu os 200?

6.4. Um outro Centro de Saúde foi inaugurado no início de 2010. O número de utentes deste centro, em milhares, é dado, em função do tempo, t , medido em anos, por $S(t) = \frac{2,5e^{0,3t}}{1 + e^{0,3t}}$. Ao fim de quanto tempo o número de utentes nos dois centros é igual? Apresente o resultado em anos e meses, meses arredondados às unidades. Caso faça arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve no mínimo três casas decimais.

7. A massa, m , em miligramas, do isótopo radioactivo Zinco-65 (Z_{65}) relaciona-se com tempo, t , medido em anos, através da fórmula:

$$t(m) = -0,965 \ln(m) + a$$

Sendo a uma constantes real.

7.1. Num certo instante inicial foi colocado em repouso uma amostra de 5 miligramas de Z_{65} . Qual é o valor de a ?
Apresente o resultado arredondado às centésimas.

7.2. Mostra que $t\left(\frac{m}{3}\right) - t(m)$ é constante e interpreta o resultado no contexto do problema. Apresente o resultado em anos e meses, meses arredondados às unidades.

7.3. Determine o valor de x tal que $t(xm) = t(m) + 0,6692$. Interprete o resultado no contexto do problema. Apresente o resultado arredondados às decimas.

7.4. Escreva m em função de t . Apresente o resultado na forma Ae^{Bt} . Apresente o valor de B arredondados às milésimas.

7.5. Mostre que $\frac{m(t+2)}{m(t)}$ é constante e interprete o resultado no contexto do problema.

SOLUCIONÁRIO

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. C 2. C 3. B 4. C 5. B 6. A 7. D 8. B 9. A 10. D

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

- 1.1. $\left]0, \frac{1}{3}\right] \cup [1, 2[$ 1.4. $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}; f^{-1}(x) = 2 - \frac{1}{3^x}$ 1.5. $\{-1\}$
- 2.2. $] -2, -1[$ 2.3. $D_{g^{-1}} =]3, +\infty[; g^{-1}(x) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \ln(x - 3)$
- 3.2. $B(a, \ln a)$, com $a \approx 4,24$ e $\ln a \approx 1,45$
- 4.2. $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$
- 5.1. $C\left(\frac{4}{3}\right) = C_0 \times (1,04)^4$ 5.2. $C(t) = C_0 \times (1,04)^{3t}$ 5.3. a) Aproximadamente 30%.
- 5.3. b) $x \approx 9,337$. O número de coelhos na reserva triplica a cada nove anos e quatro meses, aproximadamente ($0,337 \times 12 \approx 4$).
- 6.1. $a \approx 5$ e $b \approx -0,6$
- 6.2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 3$. Com o passar do tempo, o número de utentes do Centro de Saúde tende para 3000.
- 6.3. No decorrer do ano de 2008. 6.4. Passados, aproximadamente, três anos e seis meses.
- 7.1. $a \approx 1,55$ 7.2. A massa de Z_{65} reduz-se $\frac{2}{3}$ ($\approx 66,7\%$) a cada ano e um mês, aproximadamente.
- 7.2. $t\left(\frac{m}{3}\right) - t(m) \approx 1,06$. A massa de Z_{65} reduz-se $\frac{2}{3}$ ($\approx 66,7\%$) a cada ano e um mês, aproximadamente ($0,06 \times 12 \approx 1$).
- 7.3. $x \approx 0,5$. A massa de Z_{65} reduz-se 50% a cada 244 dias, aproximadamente ($0,6692 \times 365 \approx 244$). Ou, a semi-vida do Z_{65} é, aproximadamente, de 244 dias.

7.4. $m(t) = \underbrace{e^{\frac{a}{0,965}}}_A \times e^{-1,036t}$

7.5. $\frac{m(t+2)}{m(t)} \approx 0,126$. A massa de Z65 reduz-se, aproximadamente, 87,4% a cada dois anos ($100\% - 12,6\% = 87,4\%$).

José Carlos da Silva Pereira