



FICHA DE TRABALHO – MATEMÁTICA A – 11.º ANO

PRODUTO ESCALAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

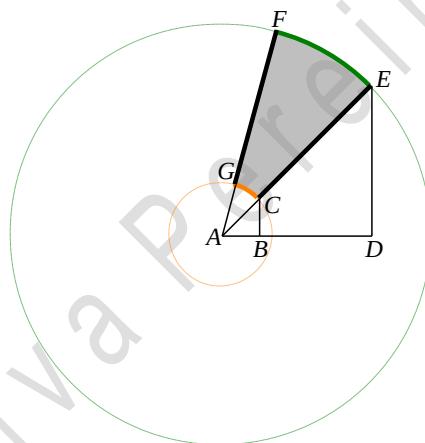
(Compilação de todos os exercícios disponibilizados no site)

“Entre dois espíritos iguais, postos nas mesmas condições, aquele que sabe Geometria é superior ao outro e adquire um vigor especial.”
Blaise Pascal

1. Na figura está representada uma coroa circular com uma parte sombreada.

Sabe-se que:

- a coroa circular está centrada no ponto A ;
- os triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$ são rectângulos e isósceles;
- $\overline{AC} = \sqrt{2}$ e $\overline{AD} = 4$
- a área da região sombreada é $\frac{5\pi}{2}$



Qual é o valor do produto escalar $\overline{AG} \cdot \overline{EC}$?

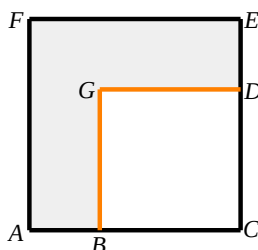
A $-\frac{3}{2}$

B $-3\sqrt{3}$

C $-4\sqrt{3}$

D $4\sqrt{3}$

2. Na figura estão representados os quadrados $[ACEF]$ e $[BCDG]$. Sabe-se que o Ponto D pertence ao lado $[CE]$ de tal modo que $\overline{CD} = 2\overline{DE}$.



Seja a o valor da área do polígono $[ABGDEF]$ e b o valor da área do trapézio $[DEFG]$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A $\overline{AD} \cdot \overline{FC} = a$

B $\overline{AD} \cdot \overline{FC} = b$

C $\overline{AD} \cdot \overline{FC} < a$

D $\overline{AD} \cdot \overline{FC} > a$

3. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vectores não colineares tais que $\|\vec{u} - \vec{v}\| > \|\vec{u} + \vec{v}\|$. O ângulo formado pelos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é:

- A** obtuso. **B** recto. **C** agudo. **D** raso.

4. Considere as rectas r e s definidas por:

$$r: (x, y, z) = (2 - 2k, k, 1 + k), \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s: -2x - 4 = 2z - 6 \quad \wedge \quad y = 2$$

Qual é a amplitude do ângulo formado pelas rectas r e s ?

- A** 30° **B** 45° **C** 60° **D** 150°

Exercício Extra: Mostre que as rectas r e s definem um plano e escreva uma equação que o defina.

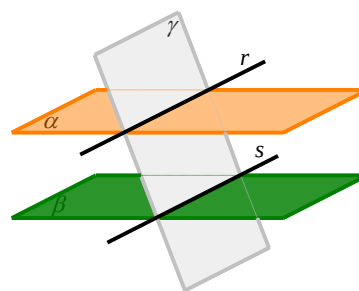
5. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vectores não nulos tais que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{10}$, $\|\vec{u}\| = k$, $\|\vec{v}\| = 2k - 1$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$, com $k \in \mathbb{R}$. Então pode afirmar-se que:

- A** $k = -1 \vee k = \frac{9}{5}$ **B** $k = \frac{9}{5}$ **C** $k = \frac{9}{4}$ **D** $k = 2$

6. Na figura estão representados três planos, α , β e γ , definidos respectivamente por, $a^2x + y + z = ax$, $2x + y = -2 - z$ e $x + a(y + z) = 0$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sabe-se que:

- os planos α e β são estritamente paralelos;
- o plano γ intersecta os planos α e β sobre duas rectas paralelas, r e s (α e γ intersectam-se sobre r e β e γ intersectam-se sobre s);
- γ não é perpendicular nem a α e nem a β .

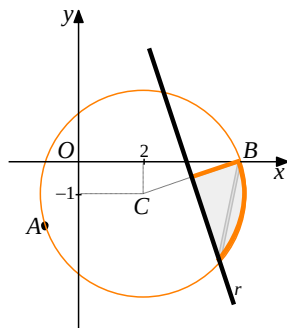


Qual é o valor de a ?

- A** -1 **B** 1 **C** 2 **D** 3

Exercício Extra: Escreva as equações cartesianas da recta s .

7. Na figura estão representadas, num referencial o.n. xOy , uma circunferência centrada no ponto $C(2, -1)$ que contém os pontos $A(-1, -2)$ e B e a recta r , mediatriz do segmento de recta $[CB]$. O ponto B também pertence ao eixo Ox .



7.1. Mostre que as coordenadas do ponto B são $(5, 0)$ e verifique que $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.

7.2. Escreva a equação reduzida da recta r e indique a sua inclinação. (Apresente o resultado em graus, arredondado às décimas)

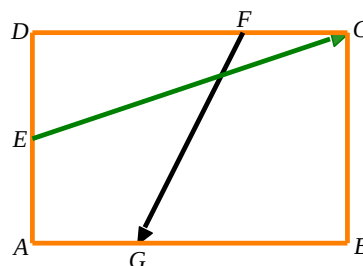
7.3. Sejam P um ponto pertencente à recta r e D o ponto de coordenadas $(-2, 4)$. Determine as coordenadas de P de modo que as rectas DP e BC sejam paralelas.

7.4. Escreva uma condição que defina a região sombreada da figura, incluindo a fronteira, e mostre que a sua área é igual a $5\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

8. Na figura está representado um rectângulo $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- E é o ponto médio do lado $[AD]$;
- $\overline{AD} = \frac{2}{3} \overline{CD}$
- $\overline{CD} = 3\overline{CF}$
- $\overline{AG} = \overline{CF}$



Mostre que $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{FG} = -5\overline{CF}^2$.

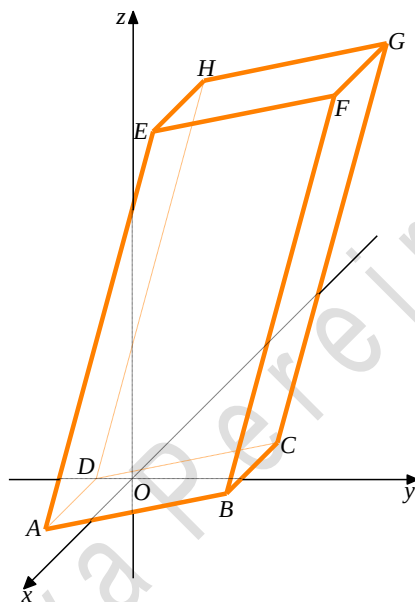
9. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ ou prisma não recto $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- a face $[DCGH]$ está contida no plano yOz ;
- as faces $[ABCD]$ e $[EFGH]$ são rectângulos e são paralelas;
- uma equação do plano ABC é $y - 5z = -1$;
- uma equação vectorial da recta BH é:

$$(x, y, z) = (8, 6, -9) + k(-4, -2, 10), \quad k \in \mathbb{R}$$

- uma condição que define a recta AG é $-\frac{x}{4} = \frac{y-7}{8} = \frac{z-12}{12}$



9.1. Mostre que uma equação do plano DBF é $13x - 11y + 3z = 11$.

9.2. Usando o produto escalar, escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro $[AH]$. (Apresenta a equação na forma $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$, com $a, b, c, r \in \mathbb{R}$)

9.3. Determine o volume do prisma $[ABCDEFGH]$.

Sugestão: Comece por determinar uma condição que defina a recta perpendicular ao plano ABC que contém o ponto G .

9.4. Seja $P(x, y, z)$ um ponto do espaço e considere a condição definida por $(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FB}) = 0$.

- Usando exclusivamente cálculo vectorial, identifique, justificando, o lugar geométrico dos pontos P do espaço que satisfazem a condição dada.
- Escreva uma equação cartesiana do lugar geométrico dos pontos P do espaço que satisfazem a condição dada.

10. Num referencial o.n. xOy considere os pontos $A(-2, -3)$, $B(1, 6)$ e $C(4, 2)$ e a recta r definida por $2x + 3y = 5$.

10.1. Escreva a equação reduzida da recta que contém a altura do triângulo $[ABC]$ em relação ao vértice C . Indique a sua inclinação. Apresente o resultado em graus, arredondado às décimas.

10.2. Seja P um ponto pertencente à recta r . Determine as suas coordenadas de modo que a recta AP seja perpendicular à recta OB .

10.3. Sejam Q o ponto médio do segmento de recta $[AB]$, R o ponto médio do segmento de recta $[AC]$ e $P(x, y)$ um ponto do plano.

Mostre a condição $(\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{RQ}) \cdot (\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{BP}) = 0$ define a mediatriz do segmento de recta $[AC]$ e escreva a sua equação reduzida.

10.4. Considere a recta s definida por $(x, y) = (1 + 2k, -k)$, $k \in \mathbb{R}$ e seja α a amplitude do ângulo formado pelas rectas r e s . Qual é o valor de $\operatorname{tg} \alpha + 13 \operatorname{sen}^2 \alpha$.

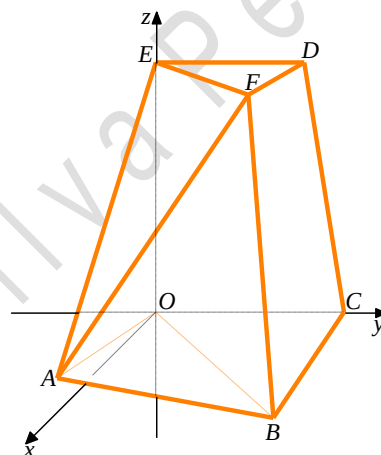
11. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ o sólido $[ABCDEFG]$.

Sabe-se que:

- uma equação do plano ABF é $6x + 2y + z = 34$
- uma equação do plano BCF é $8x + 32y + 5z = 192$
- uma equação vectorial da recta AF é:

$$(x, y, z) = (6 - 3k, 5k - 1, 8k), \quad k \in \mathbb{R}$$

- o ponto A pertence ao plano xOy e o ponto C ao eixo Oy



11.1. Escreva as equações cartesianas da recta BF .

11.2. Sem determinar as coordenadas do ponto F , mostre que $56x + 48y - 9z = 288$ é uma equação do plano ACF .

11.3. Sem usar a recta AF , determine as coordenadas do ponto F .

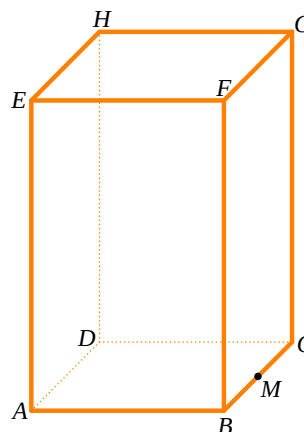
12. Na figura está representado um prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se:

- M é o ponto médio da aresta $[BC]$
- $\overline{AE} = a$

Seja v o volume do prisma.

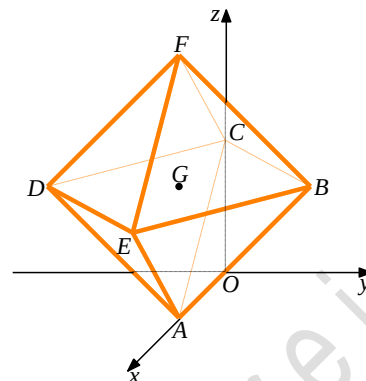
Mostre que $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{DM} = \frac{3v}{4a}$



13. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro.

Sabe-se que:

- o quadrado $[ACFE]$ está contido no plano xOz ;
- o ponto A pertence ao eixo Ox ;
- o ponto C pertence ao eixo Oz ;
- o ponto G é o centro do octaedro;
- os vértices do octaedro pertencem à superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0$



Seja r a recta definida pela condição $\frac{x-2}{3} = \frac{4-z}{4} \wedge y=2$

13.1. Escreva uma equação do plano ABE .

13.2. Determine as coordenadas do ponto de intersecção do plano ABE com a recta r . Caso não tenha feito a alínea anterior, considere que $ABE: x + y - z = 2$.

13.3. Sejam T um ponto pertencente ao eixo Oy com a mesma ordenada de B e Q um ponto que se desloca sobre a recta r . Quais são as coordenadas de Q de modo que o triângulo $[TQF]$ seja rectângulo em Q ?

13.4. Para um certo valor de $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ o ponto P de coordenadas $(2\cos^2 \alpha, \sin \alpha, 2\sin \alpha)$ pertence ao plano ABE . Determina o valor de α e indique os valores numéricos das coordenadas do ponto P . Caso não tenha feito a alínea 13.1., considere que $ABE: x + y - z = 2$.

14. Considere num referencial o.n. $Oxyz$ a superfície esférica de diâmetro $[AB]$, com $A(-1, 0, 3)$ e $B(1, 3, -2)$.

14.1. Usando o produto escalar escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro $[AB]$, apresentando-a na forma $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$, onde (a, b, c) são as coordenadas do centro e r a medida do seu raio.

14.2. Seja β o plano tangente à superfície esférica de diâmetro $[AB]$ no ponto B . Mostre que uma equação do plano β é $2x + 3y - 5z = 21$.

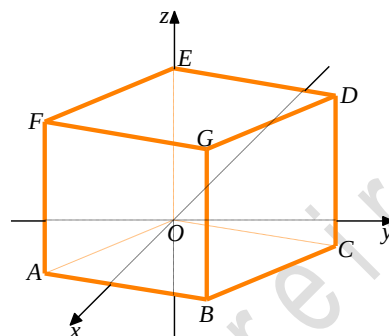
14.3. O plano β intersecta o eixo Oy no ponto C . Escreva uma equação cartesiana do plano ABC .

14.4. Considere o vector $\vec{u}$, definido por $\vec{u} = \overrightarrow{OB} + (k^2, -5-k, 1)$, com $k \in \mathbb{R}$. Quais são os valores de k de modo que os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}$ formem um ângulo obtuso?

15. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma $[ABCDEFGH]$ em que as bases são paralelogramos.

Sabe-se que:

- a base $[OABC]$ está contida no plano xOy ;
- a aresta $[OE]$ está contida no eixo Oz ;
- o ponto A tem ordenada -2
- uma equação do plano ABG é $5x - 2y = 24$
- uma equação da recta CG é $(x, y, z) = (-2, 7, -4) + k(4, -2, 4)$, $k \in \mathbb{R}$



15.1. Escreva uma equação cartesiana do plano ACG .

15.2. Considere um prisma, semelhante ao prisma $[ABCDEFGH]$, em que a medida da sua altura é três meios de $\overline{BG}$. Qual é o seu volume?

SOLUCIONÁRIO

1. B

2. C

3. A

4. A

Exercício Extra: $x + y + z = 3$

5. B

6. C Exercício Extra: $x = -\frac{4}{3} \wedge y = -z + \frac{2}{3}$

7.2 $y = -3x + 10; \approx 108,4^\circ$

7.3 $P\left(\frac{8}{5}, \frac{26}{5}\right)$

7.4 $(x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 10 \wedge y \geq -3x + 10 \wedge y \leq \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

9.2 $(x-2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{73}{2}$

9.3 $V_{[ABCDEFGH]} = 208$

9.4. a) Plano perpendicular a $\overrightarrow{EC}$ que contém o ponto B.

9.4. b) $2x - y + 5z = 9$

10.1. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}; \approx 161,6^\circ$

10.2. $P(10, -5)$ 10.3. $y = -\frac{6}{5}x + \frac{7}{10}$

10.4. $\frac{13}{40}$

11.1. Por exemplo: $x = y - 1 = \frac{32 - z}{8}$

11.3. $F(3, 4, 8)$

13.1. $x + y - z = 2$

13.2. $\left(\frac{20}{7}, 2, \frac{20}{7}\right)$

13.3. $Q(2, 2, 4)$ ou $Q\left(\frac{16}{5}, 2, \frac{12}{5}\right)$

13.4. $\alpha = \frac{7\pi}{6}; \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$

14.1. $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{19}{2}$

14.3. $26x + y + 11z = 7$ 14.4. $k \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$

15.1. $7x + 2y - 6z = 24$

15.2. 324