



FICHA DE TRABALHO - MATEMÁTICA A - 11.º ANO
SUCESSÕES . PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

"Deus inventou o número natural. O resto é obra do Homem."

Leopold Kronecker

1. Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$.

1.1. Mostre que (u_n) é monótona crescente.

1.2. Mostre que (u_n) é limitada.

1.3. Determine $n \in \mathbb{N}$ de modo que $u_{n+3} - u_n = \frac{5}{6}$.

1.4. Determine quantos termos da sucessão estão compreendidos entre 2,1 e 2,7.

2. Seja (w_n) a sucessão definida por $w_n = -3 + \frac{(-1)^n}{n}$.

2.1. Determine os cinco primeiros termos da sucessão e mostra que (w_n) não é monótona.

2.2. Mostre que existe um $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|w_n| \leq M$. Indica o menor valor possível que se pode atribuir a M .

3. Seja (v_n) a sucessão definida por $v_n = \begin{cases} 5-n & \text{se } n=2 \\ 6-n & \text{se } n \neq 2 \end{cases}$.

3.1. Determine os cinco primeiros termos da sucessão.

3.2. Estuda (v_n) quanto à monotonia.

3.3. A sucessão é limitada? Justifique.

3.4. Verifique se -12 é termo da sucessão.

4. Considere a sucessão (w_n) definida por $w_n = \frac{2n+b}{n+1}$, com $b \in \mathbb{R}$.

4.1. Determine b de modo que a sucessão seja estritamente decrescente.

4.2. Para $b=5$ indique o maior dos minorantes e o menor dos majorantes dos termos da sucessão.

5. Considere a sucessão (a_n) definida por $a_n = \frac{2n-5}{n+1}$.

5.1. Verifique se 1,3 é termo da sucessão e, em caso afirmativo, indica a sua ordem.

5.2. Justifique que $a_{n+1} - a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

5.3. Determine a partir de que ordem $p \in \mathbb{N}$ se verifica a condição $|a_n - 2| < 0,01$. Use este facto para mostrar que a sucessão é limitada.

5.4. Considere a função g , real de variável real, definida por $g(x) = x^2 - 1$. Seja (b_n) a sucessão definida por $b_n = g(a_n)$. Mostre que 0 é termo da sucessão (b_n) .

6. Considere a sucessão (v_n) definida por recorrência da seguinte forma $v_1 = 2 \wedge v_2 = 5 \wedge v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2}$

6.1. Determine os cinco primeiros termos da sucessão.

6.2. Mostre que (v_n) é limitada. Indique o conjunto dos minorantes e o conjunto dos majorantes dos termos da sucessão (v_n) .

6.3. Justifique que (v_n) é convergente e, usando a calculadora, conjecture o valor de $\lim(v_n)$.

7. Seja (y_n) a sucessão definida por $y_n = \frac{n + (-1)^n}{n+1}$.

7.1. Determine os cinco primeiros termos da sucessão e conclui acerca da monotonia de (y_n) .

7.2. Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das seguintes afirmações.

I. $\exists n \in \mathbb{N} : y_n = \frac{8}{9}$

II. $0 \leq y_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

8. Seja (w_n) uma sucessão que satisfaz a condição $w_{n+1} - w_n = -2n^2 + 26n - 84, \forall n \in \mathbb{N}$.

8.1. Mostre que (w_n) é decrescente.

8.2. Sabe-se que a sucessão (w_n) tem três termos consecutivos iguais. Determine as ordens desses termos.

8.3. Determine $p \in \mathbb{N}$ tal que $w_{p+1} - w_p = 2 \times (w_{p+2} - w_{p+1})$.

9. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por $u_n = 1 - 3\sin\left(\frac{n}{6}\pi\right)$ e $v_n = \frac{-n}{n+1}$.

9.1. Determine o valor exacto de $\frac{u_1 + u_2 + u_3}{2v_1}$.

9.2. Estude, quando à monotonia, cada uma das sucessões.

9.3. Indique, no intervalo $]3, 27]$, as soluções da equação $u_n = 4$.

9.4. Verifique se as sucessões são limitadas. Indique, para cada uma delas, caso existam, o conjunto dos minorantes e dos majorantes.

10. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = 2(n+1)^2 - 3 - 2n^2$.

10.1. Mostre que a sucessão (u_n) é uma progressão aritmética. Indique a razão.

10.2. Estude a sucessão quanto à monotonia. Justifique a resposta.

10.3. Mostre que $S_n = 2n^2 + n$.

10.4. Determine a soma dos dez termos consecutivos a partir do quinto, inclusive.

10.5. Justifique que (u_n) é um infinitamente grande positivo.

11. Seja (v_n) a sucessão definida por $v_n = -3 \times \frac{2^{3-2n}}{2^{-n-1}}$.

11.1. Mostre que (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

11.2. Determine a soma dos seis primeiros termos da sucessão.

11.3. Determine a soma de todos os termos entre o quarto e o oitavo, inclusive.

11.4. Seja S_n a soma dos n primeiros termos de (v_n) . Determine n de modo que $64S_n = -3069$.

11.5. Determine a soma de todos os termos de (v_n) .

11.6. Justifique que (v_n) é um infinitésimo.

12. A sucessão de termo geral u_n está definida por recorrência da seguinte forma:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

12.1. Determine os três primeiros termos da sucessão.

12.2. Verifique que (u_n) é uma progressão aritmética, indique a razão e a expressão do seu termo geral.

12.3. Estude (u_n) quanto à monotonia.

12.4. Determine a soma de todos os termos entre o terceiro e o vigésimo primeiro, exclusive.

13. Seja (v_n) a sucessão definida por: $v_1 = -2 \quad \wedge \quad 2v_{n+1} = v_n, \quad n \geq 1.$

13.1. Verifique que (v_n) é uma progressão geométrica e indique a razão.

13.2. Mostre que a expressão do termo geral é $v_n = -2^{2-n}.$

13.3. Classifique a sucessão quanto à monotonia.

13.4. Calcule a soma dos oito primeiros termos.

13.5. Determine o valor de $\lim (v_n).$

14. De uma progressão aritmética (u_n) de razão r , sabe-se que $u_7 = 21$ e $u_{16} = 9.$

14.1. Determine r e u_{20} e mostra que $u_n = \frac{91-4n}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

14.2. Justifique que (u_n) é um infinitamente grande negativo.

14.3. Calcule a soma dos treze termos consecutivos, a partir do décimo, inclusive.

14.4. Seja S_n a soma dos n primeiros termos de $(u_n).$ Determine n de modo que $S_n = 325.$

15. Seja (a_n) uma progressão geométrica de razão positiva tal que $a_1 = 0,5 \quad \wedge \quad 81 \times a_{10} = 16 \times a_6.$

15.1. Determine uma expressão do termo geral.

15.2. Verifique se (a_n) é monótona.

15.3. Mostre que (a_n) é um infinitésimo.

16. Dada a sucessão (u_n) tal que $u_1 = 2 \wedge 2u_{n+1} = u_n + 1, n \geq 1$, prove que a sucessão (w_n) , de termo geral $w_n = u_n - 1$, é uma progressão geométrica de razão 2^{-1} .

17. Seja (u_n) uma progressão aritmética de razão r , tal que $u_3 + u_8 = 71 \wedge r - 2 \times u_1 = -1$.

Determine a expressão do seu termo geral.

18. Seja (z_n) uma progressão geométrica tal que $z_3 = \frac{1}{3}$ e $z_6 = \frac{8}{81}$.

18.1. Determine z_4 .

18.2. Mostre que a razão da progressão é $\frac{2}{3}$ e escreva uma expressão do seu termo geral.

18.3. Calcule $z_5 + z_6 + \dots + z_{11}$. (Apresente o resultado arredondado às centésimas)

19. Considera a progressão geométrica (u_n) de razão $\frac{1}{2}$. A soma dos cinco primeiros termos da sucessão é 217.

19.1. Calcule u_1 e u_8 .

19.2. Justifique que (u_n) é decrescente.

19.3. Escreva uma expressão do termo geral de (u_n) .

20. Considera a sucessão (x_n) definida por $x_n = 8 \times 3^{1-n}$.

20.1. Mostre que (x_n) é uma progressão geométrica. Indica a razão.

20.2. Mostre que (x_n) é limitada. Indique um majorante e um minorante do conjunto dos termos da sucessão.

20.3. Determine a soma de todos os termos da sucessão (x_n) .

21. De uma progressão geométrica (u_n) , sabe-se que $u_2 = 384$ e $u_4 = 24$. Determine uma expressão do termo geral da progressão. O problema tem solução única?

22. Determine o termo geral de uma progressão aritmética (b_n) , sabendo que $b_1 = -1$ e que a soma, S_n , dos n primeiros é dada por $n^2 - 2n$.

23. Seja (c_n) uma progressão geométrica, de termos positivos, tal que $c_3 = 8$ e $c_5 = \frac{8}{9}$. Determine uma expressão do termo geral de (c_n) .

24. Determine a soma dos dez primeiros termos de uma progressão geométrica (v_n) , sabendo que $v_1 = 3 \times v_2$ e que $v_{10} = 10$.

25. O terceiro, quinto e décimo sétimo termos de uma progressão aritmética são termos consecutivos de uma progressão geométrica. Calcule a razão da progressão geométrica.

26. Considera a sucessão (v_n) definida por $v_n = \begin{cases} a & n = 1 \\ b & n = 2 \\ 2 - 5n & n \geq 3 \end{cases}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

26.1. Determine a e b de modo que (v_n) seja uma progressão aritmética.

26.2. Mostre que $v_{n+4} - v_{n-4} = -40$, $\forall n \geq 4$.

26.3. Determine $v_{10} + v_{11} + \dots + v_{31}$.

26.4. Seja (w_n) uma sucessão que verifica a condição $w_{n+1} + w_n = 0 \wedge w_2 = 2 \times v_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Mostre que (w_n) é uma progressão geométrica. Indique a razão.

b) Mostre que (w_n) não é monótona, mas é limitada. Indique o conjunto dos minorantes e dos majorantes dos termos da sucessão.

c) Seja S_n a soma dos n primeiros termos de (w_n) . Mostre que $S_n = \begin{cases} -6 & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$.

d) Calcule $w_{1007} + w_{1008} + \dots + w_{2007}$.

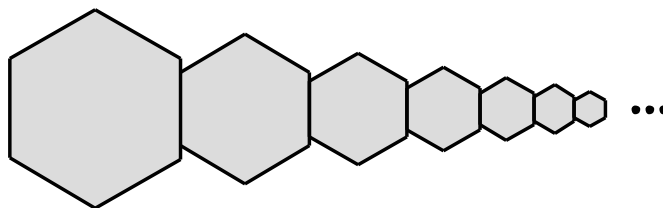
27. Considera a sucessão (u_n) definida por recorrência por $u_1 = 6 \wedge u_n = \frac{u_{n-1}}{3}$, $n \geq 2$.

27.1. Mostre que (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$. Escreva a expressão do seu termo geral.

27.2. Justifique que $\frac{u_{n+4}}{u_n} = 3^{-4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

27.3. Calcule a soma dos cinco termos consecutivos da sucessão a partir do terceiro, inclusive.

28. Considere a seguinte figura:



Na figura estão representados uma sucessão hexágonos regulares, em que a medida do comprimento do lado de cada hexágono é 75% da medida do comprimento do lado do hexágono anterior. A área do primeiro hexágono é de 64 cm^2 .

28.1. Determine a área do terceiro hexágono.

28.2. Seja (A_n) a sucessão que dá a área do n -ésimo hexágono. Escreva uma expressão do termo geral de (A_n) .

28.3. Calcule a área dos sete primeiros hexágonos. (Apresenta o resultado em cm^2 , arredondado às centésimas)

28.4. Determine a soma das áreas de todos os hexágonos da sucessão.

29. A espiral da figura é constituída por 28 segmentos de recta. O comprimento de cada segmento é 90% do comprimento do segmento anterior. O segmento maior mede 4,5 cm.

29.1. Determine o comprimento do sétimo segmento de recta.

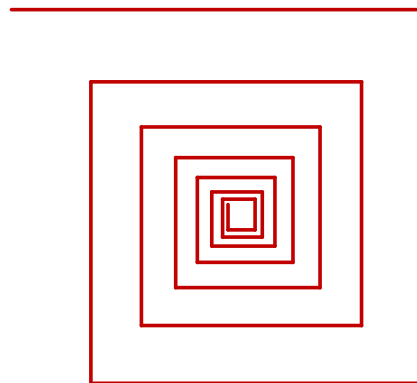
29.2. Determine o comprimento total desta espiral.

(Apresente o resultado aproximado às centésimas)

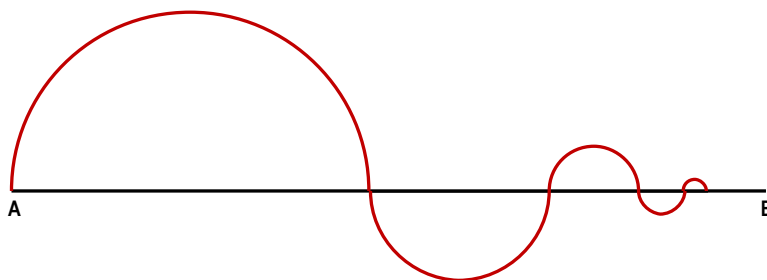
29.3. Considere agora que a espiral se prolonga infinitamente, ou seja, que se continua a construir segmentos de recta, infinitamente, seguindo a mesma regra.

a) Seja (c_n) a sucessão que dá o comprimento do n -ésimo segmento. Escreva uma expressão do termo geral de (c_n) .

b) Determine o comprimento de todos os segmentos que constituem a espiral.



30. Considere a seguinte curva:



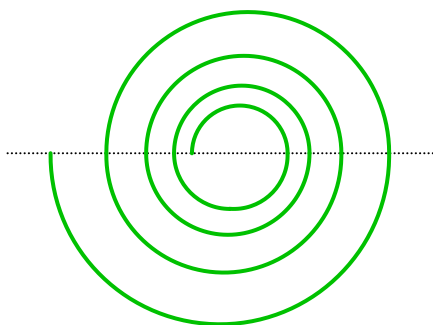
Esta curva é formada por uma sucessão de arcos que são semicircunferências alternadamente acima e abaixo da recta AB , sendo o raio de cada uma delas metade do anterior. O raio do primeiro arco é 1. Seja (u_n) a sucessão que dá o comprimento do n -ésimo arco e S_n o comprimento total dos n primeiros arcos.

30.1. Determine uma expressão do termo geral de (u_n) .

30.2. Determine o comprimento total dos dez primeiros arcos.

30.3. Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. Interprete o resultado no contexto do problema.

31. A espiral da figura é formada por uma sucessão de semicircunferências em que o raio da menor é de 1 metro. O comprimento do raio de cada uma das semicircunferências seguintes é $\frac{6}{5}$ do comprimento do raio da semicircunferência anterior.

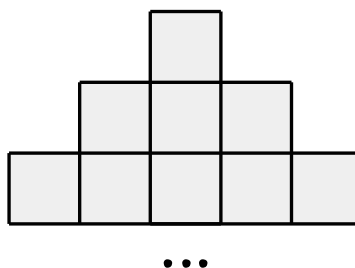


31.1. Determine o comprimento da sexta semicircunferência.

31.2. Seja (p_n) a sucessão que dá o comprimento da n -ésima semicircunferência. Determine uma expressão do termo geral da sucessão.

31.3. Considere uma espiral formada por 20 semicircunferências. Calcule o comprimento total dessa espiral. (Apresenta o resultado aproximado às centésimas)

32. Num hipermercado pretende-se fazer a promoção de um determinado produto colocando uma pilha de cwm caixas desse produto, de modo que cada linha tenha menos duas caixas do que a anterior. A pilha termina com apenas uma caixa, como sugere a figura. Cada caixa tem a forma de um cubo de aresta 12 cm.



32.1. Calcule o número de caixas que deve ter a base da pilha.

32.2. Quantas caixas tem a quarta linha a contar da base?

32.3. Determine a altura da pilha.

33. Um certo escritor publica um livro de dois em dois anos. Quando publicou o seu sétimo livro, a soma dos anos em que os livros foram publicados era 13 804. Em que ano foi publicado o seu primeiro livro.

34. Num triângulo rectângulo de perímetro $2p$, as medidas do comprimento dos lados estão em progressão aritmética. Determine, em função de p , essas medidas.

35. O Francisco fez um depósito de 1200€, à taxa anual de 3,5%, invariável ao longo do tempo.

35.1. Determine quanto dinheiro terá o Francisco no banco ao fim de três anos.

35.2. Escreva a expressão que traduz a quantia de dinheiro que o Francisco terá no ao fim de n anos.

36. A Maria foi estudar para Lisboa onde alugou um apartamento T0 por 200€ por mês, com a condição da renda aumentar 5% ao ano. Sabendo que vai ter de ocupar o referido apartamento durante seis anos, calcule:

36.1. Quanto vai pagar por mês no sexto ano?

36.2. Quanto vai gastar no aluguer de referido apartamento durante os seis anos?

37. O António é um piloto de avião com 120 horas de voo. Vai assinar um contrato com uma nova empresa em que se estabelece que por semana vai voar, exactamente, 30 horas. Seja (v_n) a sucessão que dá o número de horas de voo do António, no início da n -ésima semana do novo emprego.

37.1. Mostre que $v_n = 90 + 30n$.

37.2. Determine o número de horas de voo do António no final da décima quinta semana no novo emprego.

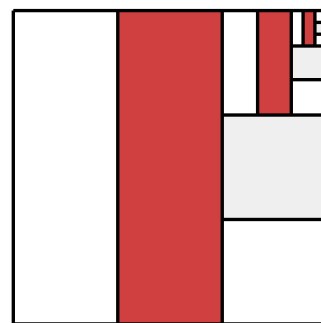
37.3. Verifique analiticamente se 400 é termo da sucessão.

37.4. Estude a monotonia da sucessão (v_n) .

38. Considera a seguinte figura que foi construída a partir de um quadrado de lado 1.

Sabe-se que:

- nas “gerações” ímpares (polígonos a encarnado), dividimos o menor quadrado, situado no canto superior esquerdo em três rectângulos iguais.
- nas “gerações” pares (polígonos a cinzento), dividimos o menor rectângulo, situado no canto superior esquerdo em três quadrados iguais.



Seja (u_n) a sucessão que dá a área do polígono construído na geração n .

38.1. Mostre que $u_n = \frac{1}{3^n}$.

38.2. Determina o termo de ordem 10 da sucessão de áreas.

38.3. Recorrendo à calculadora, verifica se 81^{-1} é termo da sucessão.

38.4. Estude, analiticamente, a monotonia da sucessão.

38.5. Determine a área total dos cinco primeiros polígonos. (Apresenta o resultado arredondado às milésimas)

38.6. Determine a área total de todos os polígonos da sucessão.

39. A Matilde resolveu fazer uma poupança. Ao fim de uma semana juntou 3 euros e comprometeu-se a acrescentar à poupança, a cada semana que passasse, o dobro da quantia que tivesse juntado na semana anterior.

39.1. Determine quanto dinheiro deverá a Matilde juntar ao fim de cinco semanas.

39.2. Seja (u_n) a sucessão que dá a quantia que a Mariana acrescenta na n -ésima semana. Escreva a expressão do termo geral de (u_n) .

39.3. Quanto dinheiro terá acumulado ao fim de quinze semanas?

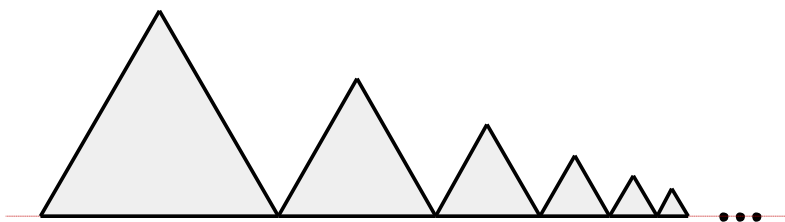
40. Numa festa de aldeia, foi montado um palco para a realização de um espectáculo. Em frente deste, colocou-se uma plateia, com um total de 465 cadeiras, dispostas em filas. Em cada fila, as cadeiras foram encostadas umas às outras, sem intervalos entre elas. A primeira fila tem 10 cadeiras e a última fila tem 52 cadeiras.

A segunda fila tem mais k cadeiras do que a primeira. A terceira tem também mais k cadeiras do que a segunda, e assim sucessivamente. Cada fila tem, portanto, mais k cadeiras do que a anterior.

40.1. Mostre que a plateia tem quinze filas.

40.2. Determine o valor de k .

41. Na figura está representada uma sucessão de triângulos equiláteros. O comprimento do lado de cada triângulo é $\frac{2}{3}$ do comprimento do lado do triângulo anterior. O comprimento do lado do primeiro triângulo é 1 cm.



Seja (u_n) a sucessão que dá a área do n -ésimo triângulo.

41.1. Escreva uma expressão do termo geral de (u_n) .

41.2. Calcule a soma de todas as áreas dos triângulos.

42. Seja Q_1 um quadrado de lado a , Q_2 o quadrado cujos vértices são os pontos médios dos lados de Q_1 , Q_3 o quadrado cujos vértices são os pontos médios dos lados de Q_2 , ..., Q_n o quadrado cujos vértices são os pontos médios dos lados de Q_{n-1} .

42.1. Relativamente a Q_n , escreva uma expressão que defina, a sucessão das medidas dos lados de Q_n , outra expressão que defina a sucessão dos perímetros e outra expressão que defina a sucessão das áreas.

42.2. Determine a expressão que dá a soma das áreas dos quadrados $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$.

Nota: a maioria dos itens não são originais meus, foram retirados de alguns manuais e auxiliares escolares: Infinito – AREAL, Preparar os Testes de Avaliação, Matemática 11.º ano – AREAL; Matemática 11.º Ano – LISBOA EDITORA.

SOLUCIONÁRIO

1.3. $n = 2$

1.4. 11 termos

2.1. $w_1 = -4$; $w_2 = -\frac{5}{2}$; $w_3 = -\frac{10}{3}$; $w_4 = -\frac{11}{4}$; $w_5 = -\frac{16}{5}$

2.2. $M = 4$

3.1. $v_1 = 5$; $v_2 = 3$; $v_3 = 3$; $v_4 = 2$; $v_5 = 1$

3.2. Monótona decrescente

3.3. Não, $v_n \rightarrow -\infty$

3.4. $v_{18} = -12$

4.1. $b \in]2, +\infty[$

4.2. Menor dos Majorantes: $\frac{7}{2}$; Maior dos Minorantes: 2

5.1. $a_9 = 1,3$

5.3. $n = 700$

6.1. $v_1 = 2$; $v_2 = 5$; $v_3 = \frac{7}{2}$; $v_4 = \frac{17}{4}$; $v_5 = \frac{31}{8}$

6.2. $2 \leq v_n \leq 5, \forall n \in \mathbb{N}$; Conjunto dos Majorantes: $[5, +\infty[$; Conjunto dos Minorantes: $] -\infty, 2]$

6.3. $\lim (v_n) = 4$

7.1. $y_1 = 0$; $y_2 = 1$; $y_3 = \frac{1}{2}$; $y_4 = 1$; $y_5 = \frac{2}{3}$

7.2. I. Verdadeira II. Verdadeira

8.2. Termos de ordem 6, 7 e 8

8.3. $p = 3 \vee p = 6$

9.1. $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}$

9.2. (u_n) não é monótona; (v_n) é monótona decrescente

9.3. $n = 9 \vee n = 27$

9.4. $-2 \leq u_n \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}$; Conjunto dos Majorantes: $[4, +\infty[$; Conjunto dos Minorantes: $] -\infty, -2]$.

$-1 < v_n \leq -\frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$; Conjunto dos Majorantes: $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$; Conjunto dos Minorantes: $] -\infty, -1]$.

10.1. $r = 4$

10.2. Monótona crescente

10.4. 370

- 11.2. $-\frac{189}{4}$ 11.3. $-\frac{93}{16}$ 11.4. $n = 10$ 11.5. -48
- 12.1. $u_1 = 1; u_2 = 6; u_3 = 11$ 12.2. $r = 5; u_n = 5n - 4$ 12.3. Monótona crescente 12.4. 952
- 13.1. $r = \frac{1}{2}$ 13.3. Monótona crescente 13.4. $-\frac{255}{64}$ 13.5. 0
- 14.1. $r = -\frac{4}{3}; u_{20} = \frac{11}{3}$ 14.3. 117 14.4. $n = 25$
- 15.1. $a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ 15.2. Monótona decrescente
17. $u_n = 7n - 3$
- 18.1. $z_4 = \frac{2}{9}$ 18.2. $z_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$ 18.3. $\approx 0,42$
- 19.1. $u_1 = 112; u_8 = \frac{7}{8}$ 19.3. $u_n = 112 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
- 20.1. $r = \frac{1}{3}$ 20.2. $0 < v_n \leq 8, \forall n \in \mathbb{N}$. Maj.: 8; Min.: 0 (Por exemplo) 20.3. 12
21. $u_n = \frac{3}{2} \times 4^n$ ou $u_n = \frac{3}{2} \times (-4)^n$ 22. $b_n = 2n - 3$ 23. $c_n = 8 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$
24. 295240 25. $r = 6$
- 26.1. $a = -3 \wedge b = -8$ 26.3. -2211 26.4. a) $r = -1$
- 26.4. b) $-6 \leq v_n \leq 6, \forall n \in \mathbb{N}$. Conjunto dos Majorantes: $[6, +\infty[$; Conjunto dos Minorantes: $] -\infty, -6]$ 26.4. d) -6
- 27.1. $u_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 27.3. $\frac{242}{243}$
- 28.1. $20,25 \text{ cm}^2$ 28.2. $A_n = 64 \times \left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}$ 28.3. $\approx 143,68 \text{ cm}^2$ 28.4. $\frac{1024}{7} \text{ cm}^2$
- 29.1. $4,5 \times 0,9^6 \approx 2,39 \text{ cm}$ 29.2. $\approx 42,64 \text{ cm}$ 29.3. a) $c_n = 4,5 \times 0,9^{n-1}$ 29.3. b) 45 cm
- 30.1. $u_n = 2\pi \times 2^{-n}$ 30.2. $\frac{1023}{512} \pi \text{ cm}$ 30.3. 2π ; Comprimento total da curva.
- 31.1. $2,48832\pi \text{ m}$ 31.2. $p_n = \pi \times \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}$ 31.3. $\approx 586,5 \text{ m}$
- 32.1. 19 caixas 32.2. 13 caixas 32.3. 1,2 m
33. 1966 34. $\frac{p}{2}; \frac{2p}{3}; \frac{5p}{6}$
- 35.1. 1330,46€ 35.2. $1200 \times 1,035^n$
- 36.1. 255,26€ 36.2. 16 324,59€
- 37.2. 570 horas 37.3. 400 não é termo de (v_n) 37.4. Monótona crescente
- 38.2. $u_{10} = \frac{1}{3^{10}}$ 38.4. Monótona decrescente 38.5. 0,498 38.6. $\frac{1}{2}$

39.1. 48 €

39.2. $u_n = 3 \times 2^{n-1}$

39.3. 98 301 €

40.2. $k = 3$

41.1. $u_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}$

41.2. $\frac{9\sqrt{3}}{20}$

42.1. $L_n = a \times 2^{\frac{1-n}{2}} ; P_n = a \times 2^{\frac{5-n}{2}} ; A_n = a^2 \times 2^{1-n}$

42.2. $S_n = (1 - 2^{-n}) \times 2a^2$