



MINI-FICHA DE TRABALHO – LIMITES – PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

MATEMÁTICA A – 12.º ANO

“Em relação à Matemática não houve, até hoje, quem lastimasse o tempo empregue no seu estudo.”

Benjamim Franklin

1. Seja (u_n) uma sucessão arbitrária de elementos pertencentes ao domínio de g tal que $u_n \rightarrow -\infty$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \lim g(u_n) &= \lim \frac{\ln((u_n)^4)}{-e^{2+u_n} - 2} = \frac{\lim \ln((u_n)^4)}{\lim(-e^{2+u_n} - 2)} = \frac{\ln(\lim(u_n)^4)}{\lim(-e^{2+u_n}) - \lim 2} = \frac{\ln((\lim u_n)^4)}{(-e^{\lim(2+u_n)}) - 2} = \frac{\ln(-\infty)^4}{-e^{2+\lim(u_n)} - 2} = \\ &= \frac{\ln(+\infty)}{-e^{2-\infty} - 2} = \frac{+\infty}{0 - 2} = \frac{+\infty}{-2} = -\infty \end{aligned}$$

Logo, pela definição de limite segundo Heine, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(u_n) = -\infty$.

2.

$$2.1. \text{ Tem-se que } \lim(u_n) = \lim \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^n = \lim \left(\frac{\cancel{n} \left(1 + \frac{3}{n} \right)}{\cancel{n} \left(1 + \frac{5}{n} \right)} \right)^n = \lim \frac{\left(1 + \frac{3}{n} \right)^n}{\left(1 + \frac{5}{n} \right)^n} = \frac{\lim \left(1 + \frac{3}{n} \right)^n}{\lim \left(1 + \frac{5}{n} \right)^n} = \frac{e^3}{e^5} = e^{3-5} = e^{-2}.$$

Assim, pela definição de limite segundo Heine:

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow e^{-2}} f(x) = \lim_{e^{-2} > 0, x \rightarrow e^{-2}} (1 + \ln x) = 1 + \ln(e^{-2}) = 1 + (-2) = -1$$

2.2.

▪ (w_n) é uma progressão geométrica. Se r for a razão da progressão, então:

$$w_5 = r^3 \times w_2 \Leftrightarrow \frac{w_5}{w_2} = r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{243}{9} \Leftrightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow r = 3$$

Logo, $w_n = w_2 \times r^{n-2} = 9 \times 3^{n-2} = \cancel{9} \times \frac{3^n}{\cancel{3^2}} = 3^n$. Assim, $v_n = \frac{w_n}{n^7} = \frac{3^n}{n^7}$ e portanto:

$$\lim \left(-\frac{1}{v_n} \right) = \lim \left(-\frac{1}{\frac{3^n}{n^7}} \right) = -\frac{1}{\lim \frac{3^n}{n^7}} = -\frac{1}{+\infty} = 0^-$$

Pela definição de limite segundo Heine, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(-\frac{1}{v_n}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{-2}{3} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} = -\frac{2}{3} \times 1 = -\frac{2}{3}$$

Se $x \rightarrow 0^-$ então $-2x \rightarrow 0^+$ (limite notável)

▪ Por outro lado, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = 1 + \ln(0^+) = 1 + (-\infty) = -\infty$

∴ Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2.3. Tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(3x-2)-1}{x^4-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{1} + \ln(3x-2) - \cancel{1}}{x^4-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(3x-2)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(3x-2)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln(3x-2)}{(x-1)} \times \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(3x-2)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(3x-2)}{x-1} \times \frac{1}{(1+1)(1^2+1)} = \frac{1}{4} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(3(y+1)-2)}{y} = \\ &= 3 \times \frac{1}{4} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(3y+1)}{3y} = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Se $y \rightarrow 0$ então $3y \rightarrow 0$ (limite notável)

i) Mudança de variável: Se $x \rightarrow 1$ então $x-1 \rightarrow 0$ Seja $y = x-1 \Leftrightarrow x = y+1, y \rightarrow 0$.

3. Tem-se que:

$$\begin{aligned} \lim x_n &= \lim \left(2 - \frac{n+1}{n+2} \right)^{2n} = \lim \left(\frac{2n+4-n-1}{n+2} \right)^{2n} = \lim \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{2n} = \lim \left(\left(\frac{n+3}{n+2} \right)^n \right)^2 = \left(\lim \left(\frac{\cancel{n} \left(1 + \frac{3}{n} \right)}{\cancel{n} \left(1 + \frac{2}{n} \right)} \right)^n \right)^2 = \\ &= \left(\lim \frac{\left(1 + \frac{3}{n} \right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n} \right)^n} \right)^2 = \left(\frac{\lim \left(1 + \frac{3}{n} \right)^n}{\lim \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n} \right)^2 = \left(\frac{e^3}{e^2} \right)^2 = (e^{3-2})^2 = e^2 \end{aligned}$$

Assim, pela definição de limite segundo Heine, $\lim_{x \rightarrow e^2} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow e^2} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^2} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\ln(e^2)} = \frac{1}{2}$.

Resposta: **C**

4. Tem-se que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 3 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = -3$. Portanto a sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão -3 . Logo, $u_n = u_1 + (n-1) \times (-3) = 1 - 3(n-1) = 1 - 3n + 3 = -3n + 4$. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2 + 2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n + 4}{n^2 + 2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3}{n} = \frac{-3}{+\infty} = 0^-$$

Pela definição de limite segundo Heine conclui-se que $\lim_{x \rightarrow 0^-} g\left(\frac{u_n}{n^2 + 2n}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ e portanto $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty$.

Dos gráficos apresentados o único cuja função tende para $+\infty$ quando x tende para zero, por valores inferiores a zero, é o gráfico da opção **D**.

Resposta: **D**

5.

$$\begin{aligned} 5.1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^5 - 16x^3 + x^2 - 16}{x^3 - 4x^2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^5 - 16x^3 + x^2 - 16}{x^2(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x^4 + 4x^3 + x + 4)}{x^2(x-4)} = \\ &= \frac{4^4 + 4 \times 4^3 + 4 + 4}{4^2} = \frac{65}{2} \end{aligned}$$

i) Utilizando a regra de Ruffini podemos decompor o polinómio $x^5 - 16x^3 + x^2 - 16$:

	1	0	-16	1	0	-16
4		4	16	0	4	16
	1	4	0	1	4	0

Logo, $x^5 - 16x^3 + x^2 - 16 = (x-4)(x^4 + 4x^3 + x + 4)$

$$\begin{aligned} 5.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} + x)(\sqrt{x^2 - x + 1} - x)}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{-1+\frac{1}{-\infty}}{-\left(\sqrt{1-\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{+\infty}}+1\right)} = \\
 &= \frac{-1-0}{-(\sqrt{1+0+0}+1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

i) $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Como $x \rightarrow -\infty$ pode assumir-se que x é negativo, logo $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

$$\begin{aligned}
 5.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{4x-3}}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{0}{0}\right) (x - \sqrt{4x-3})(x + \sqrt{4x-3})}{(x^2 - 1)(x + \sqrt{4x-3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (\sqrt{4x-3})^2}{(x^2 - 1)(x + \sqrt{4x-3})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{(x^2 - 1)(x + \sqrt{4x-3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{(x-1)}(x+1)(x + \sqrt{4x-3})} = \frac{1-3}{(1+1)(1 + \sqrt{4 \times 1 - 3})} = \\
 &= \frac{-2}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

i) Tem-se que $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$. Logo, $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

6. Tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \lim \left(\frac{2n^3 - \ln(n^2)}{n^3} - x_n \right) &= \lim \left(\frac{\cancel{2n^3} - \frac{2\ln(n)}{\cancel{n^3}}}{\cancel{n^3}} - x_n \right) = \lim \left(2 - \frac{2\ln(n)}{n} \times \frac{2}{n^2} - x_n \right) = 2 - 0 \times \frac{1}{+\infty} - \lim(x_n) = \\
 &= 2 - 0 \times 0 - \lim(x_n) = 2 - \lim(x_n)
 \end{aligned}$$

Como $x_n \rightarrow 3$ e $x_n > 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, vem $\lim(x_n) = 3^+$ e portanto $2 - \lim(x_n) = -1^-$

Assim, pela definição de limite segundo Heine, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f\left(\frac{2n^3 - \ln(n^2)}{n^3} - x_n\right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

Resposta: **A**

7.

$$\begin{aligned}
 7.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{3x}} - 1}{2e^{-5x+1} - 2e} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{0}{0}\right) (e^{3x})^{\frac{1}{2}} - 1}{2e^{-5x} \times e - 2e} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{3x}{2}} - 1}{2e(e^{-5x} - 1)} = \frac{1}{2e} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{3x}{2}} - 1}{e^{-5x} - 1} = \frac{1}{2e} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{\frac{3x}{2}} - 1}{\frac{3x}{2}}}{\frac{e^{-5x} - 1}{-5x}} = \\
 &= \frac{1}{2e} \times \frac{\frac{3}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{3x}{2}} - 1}{\frac{3x}}{-5x}}{\frac{e^{-5x} - 1}{-5x}} = \frac{1}{2e} \times \frac{\frac{3}{2} \times 1}{-5 \times 1} = \frac{1}{2e} \times \frac{3}{-10} = -\frac{3}{20e}
 \end{aligned}$$

Se $x \rightarrow 0$ então $-5x \rightarrow 0$ e $\frac{3x}{2} \rightarrow 0$ (limites notáveis)

$$\begin{aligned}
 7.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7 \times (1,01)^{3x+4}) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} ((-y)^7 \times (1,01)^{-3y+4}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y^7 \times (1,01)^{-3y} \times (1,01)^4) = \\
 &= -(1,01)^4 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^7}{(1,01)^{3y}} = -(1,01)^4 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^7}{\left((1,01)^3\right)^y} = -(1,01)^4 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^7}{(1,0303)^y} = \\
 &= -(1,01)^4 \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

ii)

i) Mudança de variável: Se $x \rightarrow -\infty$ então $-x \rightarrow +\infty$ Seja $y = -x \Leftrightarrow x = -y$, $y \rightarrow +\infty$.

ii) Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$ (limite notável), então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$, com $a > 1$ e $p \in \mathbb{R}$ e $(1,01)^3 = 1,0303 > 1$

$$7.3. \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 \times 3^{\frac{4}{x^2}})^{(\infty \times 0)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{y}} \right)^3 \times 3^{4y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(\sqrt{y})^3} \times (3^4)^y \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{81^y}{\left(\frac{1}{y^2}\right)^3} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{81^y}{\frac{1}{y^6}} = +\infty$$

limite notável

i) Mudança de variável: Se $x \rightarrow 0^+$ então $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$ Seja $y = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{y}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{y}}$, $y \rightarrow +\infty$ ($x > 0$ pois $x \rightarrow 0^+$).

$$\begin{aligned}
 7.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3 + x + 1)}{x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(x^3 \left(1 + \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right)\right)}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3)}{x^2 + x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln x}{x(x+1)} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{(+\infty)^2} + \frac{1}{(+\infty)^3}\right)}{(+\infty)^2 + \infty} =
 \end{aligned}$$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} + \frac{\ln(1+0+0)}{+\infty} = 3 \times 0 \times \frac{1}{+\infty} + \frac{\ln(1)}{+\infty} = 3 \times 0 \times 0 + \frac{0}{+\infty} = 0 + 0 = 0$$

$$\begin{aligned} 7.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{\ln(7x - 6)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{\ln(7x - 6)} \stackrel{i)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 3)}{\ln(7x - 6)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln(7x - 6)} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 3) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln(7x - 6)} \times (1^2 + 1 + 3) = \\ &= 5 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(7(y+1) - 6)} = 5 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(7y + 7 - 6)} = \frac{5}{7} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{7y}{\ln(7y + 1)} \stackrel{iii)}{=} \frac{5}{7} \times 1 = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

i) Utilizando a regra de Ruffini podemos decompor o polinómio $x^3 + 2x - 3$:

1	0	2	-3
1	1	1	3
1	1	3	0

Logo, $x^3 + 2x - 3 = (x-1)(x^2 + 1 + 3)$

ii) Mudança de variável: Se $x \rightarrow 1$ então $x-1 \rightarrow 0$ Seja $y = x-1 \Leftrightarrow x = y+1, y \rightarrow 0$.

iii) Se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ (limite notável), então $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1$. Se $y \rightarrow 0$ então $7y \rightarrow 0$.

$$7.6. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\ln(x+4)}{3e^{2x+8} - 3e^2} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\ln(x+4)}{3e^{2x+6+2} - 3e^2} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\ln(x+4)}{3e^{2x+6} \times e^2 - 3e^2} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\ln(x+4)}{3e^2(e^{2(x+3)} - 1)} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3e^2} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y-3+4)}{e^{2y} - 1} = \frac{1}{3e^2} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(y+1)}{y}}{\frac{e^{2y} - 1}{y}} = \frac{1}{3e^2} \times \frac{\overbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y}}^{\text{limite notável}}}{2 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{2y} - 1}{2y}} = \frac{1}{3e^2} \times \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{6e^2} \\ &\quad \text{Se } y \rightarrow 0 \text{ então } 2y \rightarrow 0 \text{ (limite notável)} \end{aligned}$$

i) Mudança de variável: Se $x \rightarrow -3$ então $x+3 \rightarrow 0$ Seja $y = x+3 \Leftrightarrow x = y-3, y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
 7.7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x^2 - x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 + 1 - 1 - 3)}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 4 + 1)}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\ln(x^2 - 4 + 1)}{x^2 - 4} \times \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 4 + 1)}{x^2 - 4} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 4 + 1)}{x^2 - 4} \times \frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = \\
 &= \frac{4}{3} \times 1 = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

i) Tem-se que $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$. Logo, $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$.

ii) Mudança de variável: Se $x \rightarrow 2$ então $x^2 - 4 \rightarrow 0$ Seja $y = x^2 - 4$, $y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
 7.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+3)e^x - \ln 3}{e^{-x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+3)e^x - e^x \ln 3 + e^x \ln 3 - \ln 3}{e^{-x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^3 (\ln(x+3) - \ln 3) + \ln 3 (e^x - 1)}{e^{-x} - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \ln\left(\frac{x+3}{3}\right)}{e^{-x} - 1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 3 (e^x - 1)}{e^{-x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x}{3} + 1\right)}{e^{-x} - 1} + \ln 3 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{-x} - 1} = \\
 &= e^0 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln\left(\frac{x}{3} + 1\right)}{\frac{x}{3}}}{\frac{e^{-x} - 1}{x}} + \ln 3 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{1 - e^{-x}}{x}} = 1 \times \frac{\frac{1}{3} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x}{3} + 1\right)}{\frac{x}{3}}}{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x}} + \ln 3 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{1 - e^{-x}}{x}} = \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \times 1}{-1} + \ln 3 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)e^x}{-(e^x - 1)} = -\frac{1}{3} + \ln 3 \times \frac{e^0}{-1} = -\frac{1}{3} - \ln 3
 \end{aligned}$$

Se $x \rightarrow 0$ então $\frac{x}{3} \rightarrow 0$ e $-x \rightarrow 0$ (limites notáveis)