

2016

Exame 12

Preparação para o

Exame Final Nacional

Matemática A 12.º ano

Maria Augusta Ferreira Neves · Luís Guerreiro

Revisão dos conteúdos com exemplos e questões

Questões tipo exame resolvidas e propostas

Provas-modelo e Provas Oficiais resolvidas

Anexo seleção das questões de exame essenciais

Inclui

- ✓ CD-ROM
- ✓ Apoio online
www.escolavirtual.pt

Resumos dos
conteúdos de
10.º, 11.º e 12.º
anos

 Porto
Editora

Apresentação

Este livro destina-se aos alunos que pretendem fazer exame de Matemática A para concluir o 12.º ano ou aceder ao ensino superior.

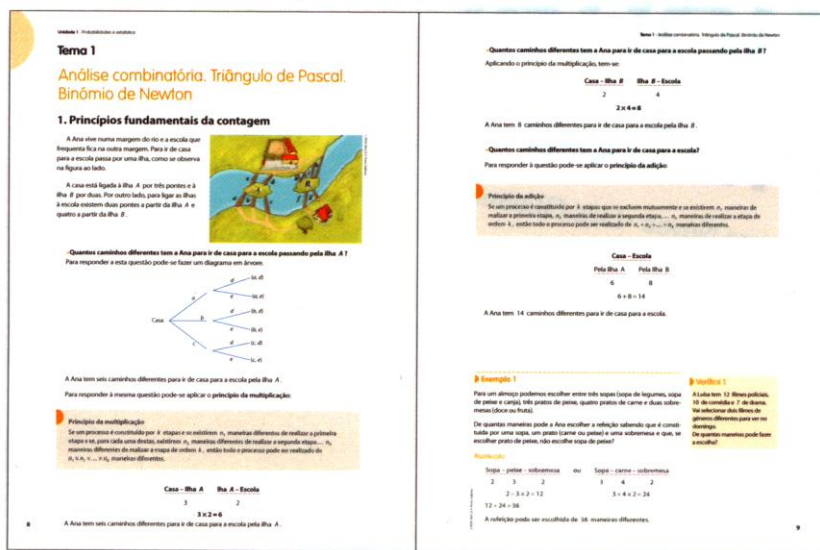
A forma como está estruturado permite:

- fazer uma revisão da teoria e da prática dos conteúdos dos 10.º, 11.º e 12.º anos;
- recordar estratégias e modelos de resolução de problemas;
- avaliar a sua capacidade de resposta a questões novas e idênticas às dos exames nacionais.

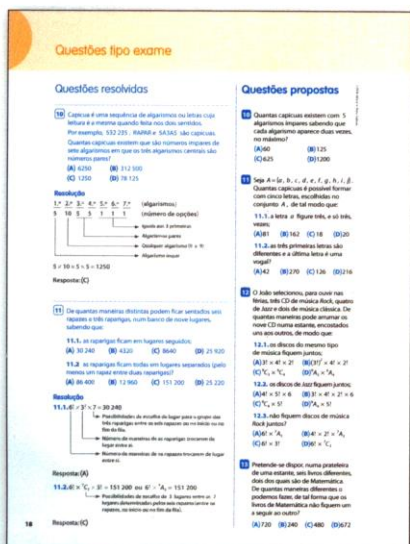
Um livro funcional

A primeira parte do livro está organizada em **4 unidades** que sintetizam os conteúdos dos 10.º, 11.º e 12.º anos contendo:

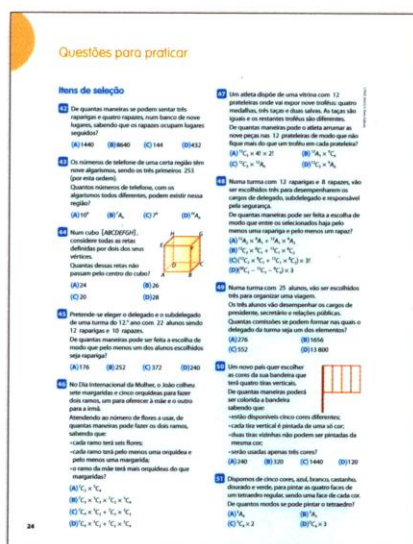
Teoria, Exemplos e Verifica (questões diretas)



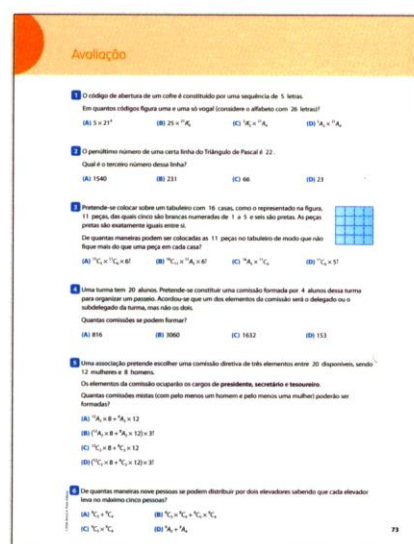
Questões tipo exame



Questões para praticar



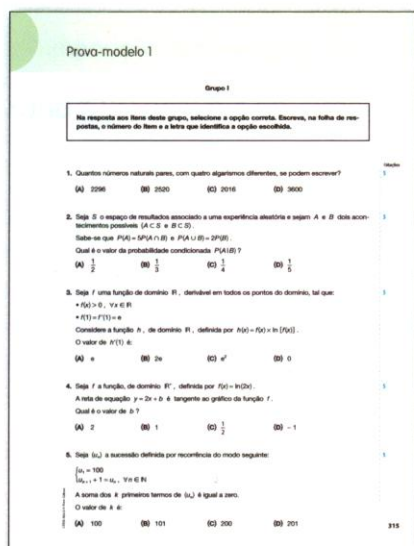
Avaliação



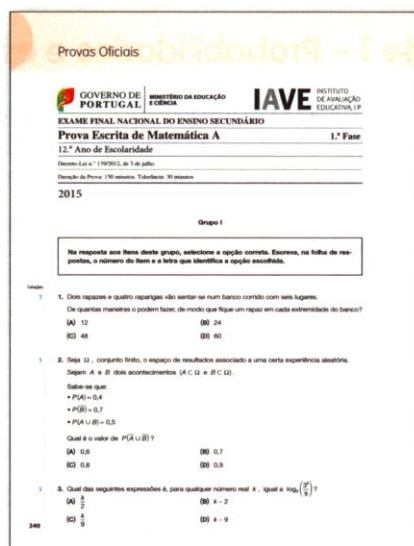
ISBN 978-972-0-46909-0

Contém ainda:

Provas-modelo



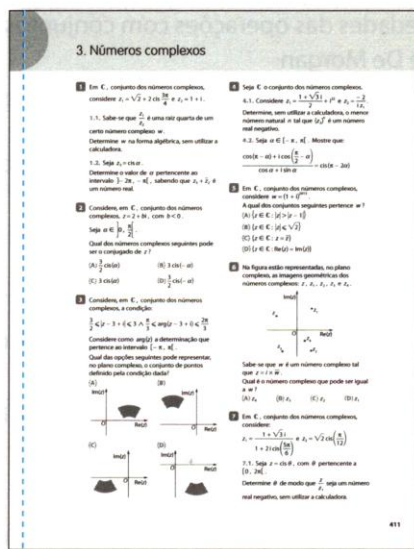
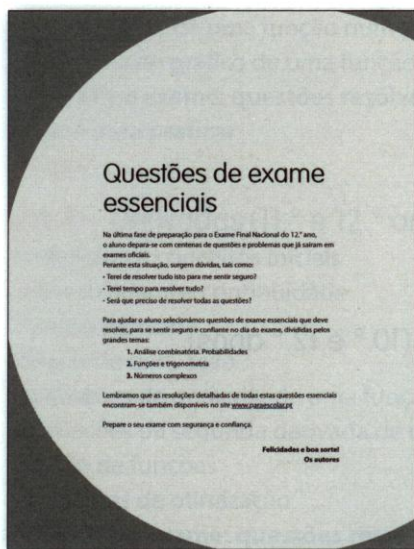
Provas Oficiais



Uma preparação orientada

Como grande novidade este livro inclui um **anexo** com questões de exame essenciais, criteriosamente seleccionadas e organizadas, que:

- focaliza os alunos nos exercícios mais representativos;
- contém as soluções das questões no final de cada tema.



Páginas
destacáveis

Um estudo autónomo

As **resoluções detalhadas** de todas as questões propostas no livro estão disponíveis em www.escolavirtual.pt permitindo o estudo autónomo e organizado do aluno.

Unidade 1 – Probabilidades e estatística

Tema 1 – Análise combinatória. Triângulo de Pascal. Binómio de Newton (12.º ano)

1. Princípios fundamentais da contagem	8
2. Fatorial de um número natural n	10
3. Arranjos	10
4. Combinações	13
5. Triângulo de Pascal	14
6. Binómio de Newton	15
Resumo	16
Questões tipo exame: questões resolvidas e propostas	18
Questões para praticar	24

Tema 2 – Cálculo de probabilidades. Regra de Laplace (12.º ano)

1. Experiência aleatória. Espaço de resultados	28
2. Acontecimentos	28
3. Acontecimentos complementares ou acontecimentos contrários	29
4. Acontecimentos disjuntos, incompatíveis ou mutuamente exclusivos	29
5. Definição frequencista de probabilidade	29
6. Definição clássica de probabilidade ou Regra de Laplace	30
Questões tipo exame: questões resolvidas e propostas	32
Questões para praticar	38

Tema 3 – Axiomas e teoremas de probabilidade. Probabilidade condicionada. Acontecimentos independentes (12.º ano)

1. Operações com conjuntos	42
2. Propriedades das operações com conjuntos	42
3. Leis de De Morgan	43
4. Axiomas de probabilidades	43
5. Alguns teoremas sobre probabilidades	43
6. Probabilidade condicionada (ou probabilidade condicional)	45
7. Acontecimentos independentes	47
Questões tipo exame: questões resolvidas e propostas	48
Questões para praticar	53

Tema 4 – Estatística. Distribuição de probabilidades (10.º e 12.º anos)

1. Estatística	56
2. Distribuição de probabilidades de uma variável aleatória	61
Questões tipo exame: questões resolvidas e propostas	68
Questões para praticar	71
Avaliação	73

Unidade 2 – Funções

Tema 1 – Definições. Diferentes tipos de funções. Operações com funções. Sucessões (10.º e 11.º anos)

1. Definições	87
2. Transformações e simetrias do gráfico de uma função	89
3. Diferentes tipos de funções	89
4. Operações com funções	94

5. Composição de funções	95
6. Função inversa	96
7. Definição de sucessão	97
8. Progressão aritmética	98
9. Progressão geométrica	98
10. Classificação de uma sucessão quanto à convergência	99
11. Soma dos termos de uma progressão geométrica	99
12. Número de Neper	101
Questões tipo exame: questões resolvidas e propostas	102
Questões para praticar	104
Avaliação	106
 Tema 2 – Função exponencial e função logarítmica (12.º ano)	
1. Função exponencial	108
2. Logaritmos	110
3. Função logarítmica	112
Questões tipo exame: questões resolvidas e propostas	118
Questões para praticar	122
Avaliação	126
 Tema 3 – Limites e continuidade (11.º e 12.º anos)	
1. Noção intuitiva de limite	131
2. Definição de limite segundo Heine	132
3. Limites laterais	133
4. Propriedades dos limites	134
5. Cálculo de limites. Indeterminações	137
6. Limites de funções envolvendo exponenciais e logaritmos	141
7. Continuidade de uma função num ponto	145
8. Assíntotas do gráfico de uma função	150
Questões tipo exame: questões resolvidas e propostas	152
Questões para praticar	162
Avaliação	164
 Tema 4 – Derivadas (11.º e 12.º anos)	
1. Definições e conceitos iniciais	169
2. Derivabilidade e continuidade	172
3. Função derivada	173
4. Regras de derivação	174
5. Aplicações da derivada de uma função	180
6. Aplicações da segunda derivada de uma função	185
7. Estudo de funções	188
8. Problemas de otimização	190
Questões tipo exame: questões resolvidas e propostas	192
Questões para praticar	202
Avaliação	206
 Unidade 3 – Trigonometria e números complexos	
Tema 1 – Trigonometria (11.º e 12.º anos)	
1. Radiano	215
2. Funções trigonométricas	215
3. Valores em $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$	216

Índice

4. Equações trigonométricas	217
5. Fórmulas trigonométricas	217
6. Resolução de problemas usando funções trigonométricas	220
7. As funções trigonométricas como modelos de fenómenos reais	222
8. Limites de funções trigonométricas	223
9. Derivadas de funções trigonométricas	225
Questões tipo exame: questões resolvidas e propostas	228
Questões para praticar	235
Avaliação	242
Tema 2 – Números complexos (12.º ano)	
1. Definições	247
2. Representação geométrica de um número complexo	248
3. Operações com números complexos	249
4. Representação trigonométrica de um número complexo.	
Operações com complexos na forma trigonométrica	253
5. Domínios planos e condições em variável complexa	260
Questões tipo exame: questões resolvidas e propostas	266
Questões para praticar	272
Avaliação	276
Unidade 4 – Geometria (10.º e 11.º anos)	
1. Distância entre dois pontos. Lugares geométricos no plano e no espaço	284
2. Vetores livres no plano e no espaço	286
3. Vetores em referenciais cartesianos do plano e do espaço	289
4. Produto escalar de dois vetores	291
5. Retas no plano e no espaço	294
6. Conjuntos de pontos definidos por condições no plano e no espaço	298
7. Equação cartesiana de um plano	300
8. Posição relativa de retas e planos	301
9. Interseção de planos	303
10. Programação linear	305
Questões tipo exame: questões resolvidas e propostas	308
Questões para praticar	311
Avaliação	313
PROVAS-MODELO com sugestão de resolução	
Prova-modelo 1	315
Prova-modelo 2	327
PROVAS OFICIAIS com sugestão de resolução	
Exame Final Nacional de 2015 – 1.ª fase	340
Exame Final Nacional de 2015 – 2.ª fase	352
SOLUÇÕES	367
QUESTÕES DE EXAME ESSENCIAIS	384
(Soluções no final de cada tema)	

1. Probabilidades e estatística

Tema 1

Análise combinatória. Triângulo de Pascal.
Binômio de Newton

Tema 2

Cálculo de probabilidades. Regra de Laplace

Tema 3

Axiomas e teoremas de probabilidade.
Probabilidade condicionada.
Acontecimentos independentes

Tema 4

Estatística. Distribuição de probabilidades

Tema 1

Análise combinatória. Triângulo de Pascal. Binómio de Newton

1. Princípios fundamentais da contagem

A Ana vive numa margem do rio e a escola que frequenta fica na outra margem. Para ir de casa para a escola passa por uma ilha, como se observa na figura ao lado.

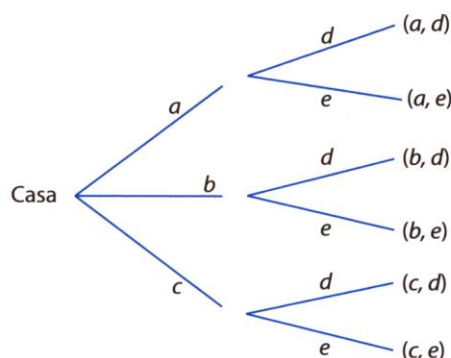
A casa está ligada à ilha A por três pontes e à ilha B por duas. Por outro lado, para ligar as ilhas à escola existem duas pontes a partir da ilha A e quatro a partir da ilha B.



CPEN-MA12 e Porto Editora

- Quantos caminhos diferentes tem a Ana para ir de casa para a escola passando pela ilha A ?

Para responder a esta questão pode-se fazer um diagrama em árvore.



A Ana tem seis caminhos diferentes para ir de casa para a escola pela ilha A.

Para responder à mesma questão pode-se aplicar o **princípio da multiplicação**:

Princípio da multiplicação

Se um processo é constituído por k etapas e se existirem n_1 maneiras diferentes de realizar a primeira etapa e se, para cada uma destas, existirem n_2 maneiras diferentes de realizar a segunda etapa... n_k maneiras diferentes de realizar a etapa de ordem k , então todo o processo pode ser realizado de $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ maneiras diferentes.

Casa – Ilha A

Ilha A – Escola

3

2

$$3 \times 2 = 6$$

A Ana tem seis caminhos diferentes para ir de casa para a escola pela ilha A.

- Quantos caminhos diferentes tem a Ana para ir de casa para a escola passando pela ilha B?

Aplicando o princípio da multiplicação, tem-se:

<u>Casa – Ilha B</u>	<u>Ilha B – Escola</u>
2	4
$2 \times 4 = 8$	

A Ana tem 8 caminhos diferentes para ir de casa para a escola pela ilha B.

- Quantos caminhos diferentes tem a Ana para ir de casa para a escola?

Para responder à questão pode-se aplicar o princípio da adição:

Princípio da adição

Se um processo é constituído por k etapas que se excluem mutuamente e se existirem n_1 maneiras de realizar a primeira etapa, n_2 maneiras de realizar a segunda etapa, ... n_k maneiras de realizar a etapa de ordem k , então todo o processo pode ser realizado de $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ maneiras diferentes.

<u>Casa – Escola</u>	
<u>Pela Ilha A</u>	<u>Pela Ilha B</u>
6	8
$6 + 8 = 14$	

A Ana tem 14 caminhos diferentes para ir de casa para a escola.

Exemplo 1

Para um almoço podemos escolher entre três sopas (sopa de legumes, sopa de peixe e canja), três pratos de peixe, quatro pratos de carne e duas sobremesas (doce ou fruta).

De quantas maneiras pode a Ana escolher a refeição sabendo que é constituída por uma sopa, um prato (carne ou peixe) e uma sobremesa e que, se escolher prato de peixe, não escolhe sopa de peixe?

Resolução

<u>Sopa – peixe – sobremesa</u>			ou	<u>Sopa – carne – sobremesa</u>		
2	3	2		3	4	2
$2 \times 3 \times 2 = 12$				$3 \times 4 \times 2 = 24$		
$12 + 24 = 36$						

A refeição pode ser escolhida de 36 maneiras diferentes.

Verifica 1

A Luísa tem 12 filmes policiais, 10 de comédia e 7 de drama. Vai seleccionar dois filmes de géneros diferentes para ver no domingo. De quantas maneiras pode fazer a escolha?

2. Fatorial de um número natural n

Chama-se **fatorial de um número natural n** e representa-se por $n!$ ao produto dos n primeiros números naturais.

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

Aplicando a definição, vem:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1; \quad 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 4!$$

Por convenção, tem-se:

$$0! = 1$$

5!	120

Exemplo 2

Resolva a equação em x :

$$12(x-1)! + 5x! = (x+1)!$$

Resolução

$$12(x-1)! + 5x! = (x+1)! \Leftrightarrow 12(x-1)! + 5x(x-1)! - (x+1)x(x-1)! = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)! [12 + 5x - (x+1)x] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)! = 0 \vee 12 + 5x - x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = 6 \vee x = -2$$

Como terá de ser $x-1 \geq 0$, $x \geq 0$ e $x+1 \geq 0$, $S = \{6\}$.

Verifica 2

2.1. Resolva a equação:

$$2(x+2)! - 17(x+1)! = 8x!$$

2.2. Calcule.

$$\frac{100! - 99!}{98!}$$

3. Arranjos

Arranjos sem repetição (arranjos simples)

De uma caixa com cinco bolas numeradas de 1 a 5, extraem-se sucessivamente três delas e colocam-se, lado a lado, da esquerda para a direita.

Quantas sequências diferentes é possível obter?

Lugares a preencher $\rightarrow$ 1.º 2.º 3.º

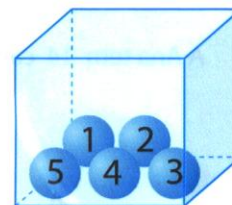
N.º de soluções por lugar $\rightarrow$ 5 4 3

Resposta: $5 \times 4 \times 3 = 60$

O número 60 designa-se por **arranjos sem repetição** de cinco, três a três, ou **arranjos simples** de cinco, três a três, e escreve-se:

$${}^5A_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

De um modo geral:



5P_3	60

Dados n elementos quaisquer, chama-se **arranjos sem repetição de n elementos p a p** a todas as sequências que é possível obter com p elementos escolhidos arbitrariamente entre os n dados.

O número de todas estas sequências designa-se por nA_p (ler: "arranjos de n , p a p ").

$${}^nA_p = n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-p+1) \text{ com } n, p \in \mathbb{N}_0 \text{ e } n \geq p$$

Da definição de fatorial deduz-se que:

$${}^nA_p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo 3 Sentar em fila

De quantas maneiras cinco pessoas se podem sentar numa fila de cadeiras onde existem oito cadeiras disponíveis?



Resolução

Trocando a ordem às pessoas estas ficam sentadas de maneira diferente.

Pretende-se, portanto, escolher ordenadamente cinco lugares entre oito possíveis.

O número de escolhas é dado por:

$${}^8A_5 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \\ = 6720$$

8P_5	6720

Verifica 3

3.1. Na final da prova dos 100 m, em atletismo, participam oito atletas.

De quantas maneiras podem ser atribuídas as três medalhas (ouro, prata e bronze)?

3.2. Uma associação pretende escolher a sua bandeira que será formada por três faixas verticais com três cores diferentes.

Se estão disponíveis seis cores diferentes, quantas bandeiras tricolores é possível obter?

3.3. Um saco contém 10 bolas, numeradas de 0 a 9.

Desse saco retiram-se quatro bolas, uma a uma, colocando-se em fila pela ordem de saída, formando, assim, um número. Quantos números diferentes é possível formar?

Permutações

De quantas maneiras cinco pessoas se podem colocar em fila para tirarem uma fotografia?

Lugares	→	<u>1.º</u>	<u>2.º</u>	<u>3.º</u>	<u>4.º</u>	<u>5.º</u>
N.º de soluções por lugar	→	5	4	3	2	1

Resposta: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$

Como se trata de escolher ordenadamente cinco lugares entre cinco possíveis, a resposta também pode ser dada por:

$${}^5A_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Os arranjos de 5 elementos 5 a 5 também se designam por **permutações** de 5 elementos.

$$P_5 = {}^5A_5 = 5!$$

De um modo geral:



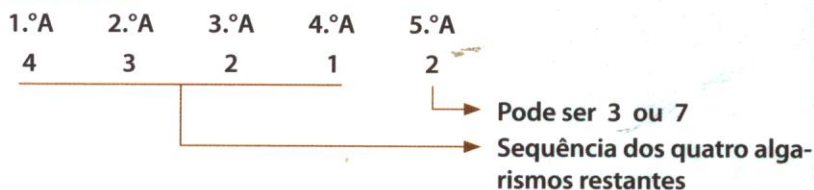
Chama-se **permutações de n elementos** a todas as sequências diferentes que é possível obter com os n elementos.

O número dessas sequências representa-se por P_n (ler: "permutações de n "):

$$P_n = {}^nA_n = n!$$

Exemplo 4 Números

Quantos números ímpares de cinco algarismos diferentes se podem escrever utilizando os algarismos do número 87 643 ?

Resolução

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 48$$

$$\text{Ou, } 4! \times 2 = 48.$$

Logo, existem 48 números nas condições pedidas.

Verifica 4

Seis amigos vão ao cinema tendo comprado bilhetes para seis lugares seguidos. De quantas maneiras os seis amigos podem ocupar os seis lugares?

Arranjos com repetição (arranjos completos)

Um teste tem cinco questões de escolha múltipla. Para cada questão existem quatro alternativas de resposta.

De quantas maneiras pode um aluno dar resposta às cinco questões de escolha múltipla?

Questões:	→ 1. ^a	2. ^a	3. ^a	4. ^a	5. ^a
Possibilidades de resposta	→ 4	4	4	4	4

Existem $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ possibilidades de resposta.

O número 4^5 designa-se por **arranjos com repetição** de quatro, cinco a cinco, e escreve-se:

$${}^4A_5 = 4^5$$

De um modo geral:

Dados n elementos quaisquer, $a_1, a_2, \dots, a_n$ chama-se **arranjos com repetição de n elementos p a p** a todas as sequências de p elementos, sendo estes diferentes ou não, que se podem formar, de modo que as sequências diferem pelos elementos que as compõem ou pela ordem de colocação.

O número total de sequências representa-se por nA_p . E tem-se:

$${}^nA_p = n^p$$

Aos arranjos com repetição também se chama **arranjos completos**.

Exemplo 5 Contar números

Quantos números de cinco algarismos são múltiplos de 5 ?

Resolução

$$9 \times {}^{10}A_3 \times 2 = 9 \times 10^3 \times 2 = 18\,000$$

→ Há duas hipóteses para o algarismo das unidades (0 ou 5).

→ Número de sequências de três algarismos (iguais ou diferentes).

→ Há nove hipóteses para o primeiro algarismo (não pode ser zero).

Existem 18 000 números de cinco algarismos que são múltiplos de 5.

Verifica 5

5.1. Quatro pessoas dirigem-se ao balcão de uma pastelaria para comprar, cada uma delas, um bolo. Havendo seis tipos de bolos diferentes, de quantas maneiras pode ser feita a escolha?

5.2. Quantos números naturais entre 1000 e 100 000 são múltiplos de 5 e têm todos os algarismos ímpares?

4. Combinações

Cinco pontos, A, B, C, D e E , sobre uma circunferência, quantos triângulos definem?

Um triângulo é definido pelos seus vértices. Neste caso, a ordem não interessa. $[ABC]$ e $[CAB]$ designam o mesmo triângulo.

Os cinco pontos definem dez triângulos:

$ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE$ e CDE ,

que correspondem aos subconjuntos de 3 elementos que é possível definir no conjunto de 5 pontos.

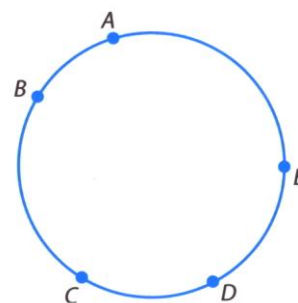
O número de subconjuntos de 3 elementos que é possível definir num conjunto com 5 elementos designa-se por **combinações** de cinco três a três e representa-se por 5C_3 ou $\binom{5}{3}$.

Assim, ${}^5C_3 = 10$.

Repare-se que cada subconjunto de três elementos dá origem a seis sequências, pois $P_3 = 3! = 6$.

$$\text{Então, } {}^5C_3 = \frac{{}^5A_3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10$$

De um modo geral:



5C_3	10

Chama-se **combinações de n , p a p** , nC_p ou $\binom{n}{p}$, ao número de subconjuntos com p elementos que se podem formar num conjunto que tenha n elementos.

$${}^nC_p = \frac{{}^nA_p}{p!} \text{ e como } {}^nA_p = \frac{n!}{(n-p)!}, \quad {}^nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad n, p \in \mathbb{N}_0 \text{ e } n \geq p.$$

Exemplo 6 Constituição do júri

Um júri é composto por quatro membros escolhidos numa lista de quatro homens e seis mulheres. De quantas maneiras pode ser feita a escolha de modo que o júri tenha tantas mulheres como homens?



Resolução

Não é feita qualquer exigência quanto à ordem.

Trata-se de escolher duas mulheres em seis e dois homens em quatro.

A escolha pode ser feita de ${}^6C_2 \times {}^4C_2 = 15 \times 6 = 90$ maneiras diferentes.

Verifica 6

6.1. Considere oito pontos distintos (A, B, C, D, E, F, G e H) sobre uma circunferência.

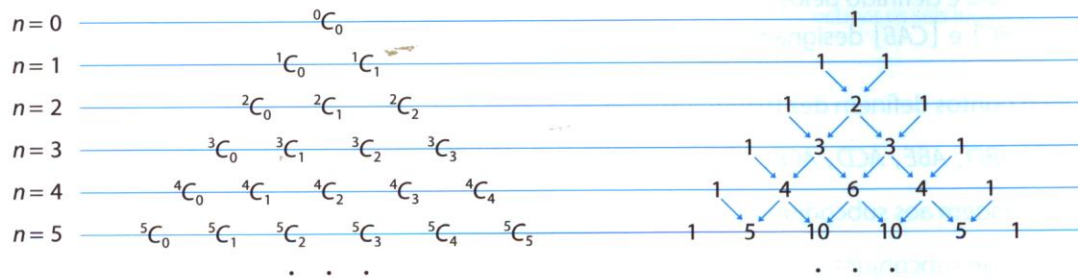
a) Quantos triângulos definem?

b) Em quantos desses triângulos o ponto A é um vértice?

6.2. Uma prova de Matemática é constituída por 12 questões, das quais é necessário responder a oito (e só a oito), sendo quatro obrigatoriamente escolhidas entre as cinco primeiras e as outras quatro entre as restantes. De quantas maneiras pode o aluno fazer a escolha?

5. Triângulo de Pascal

Os elementos que resultam do cálculo dos valores de nC_p ($n, p \in \mathbb{N}_0$ e $n \geq p$) podem ser dispostos em forma de triângulo. Ao esquema resultante chama-se Triângulo de Pascal:



Observando o Triângulo de Pascal notamos de imediato algumas regularidades, das quais se destacam:

1.^a Em cada linha, o primeiro e o último elementos é 1 :

$${}^nC_0 = {}^nC_n = 1$$

2.^a Em cada linha, os termos equidistantes dos extremos são iguais:

$${}^nC_p = {}^nC_{n-p}, \quad n, p \in \mathbb{N}_0 \text{ e } n \geq p$$

Por exemplo, ${}^6C_2 = {}^6C_4$.

3.^a A soma de dois números consecutivos de uma linha é igual ao número colocado abaixo, na linha seguinte:

$${}^nC_p + {}^nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}, \quad n, p \in \mathbb{N}_0 \text{ e } n \geq p$$

4.^a ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots + {}^nC_n = 2^n$

Um conjunto com n elementos tem exatamente 2^n subconjuntos.

Exemplo 7 Triângulo de Pascal

A soma dos três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal é 172.

Qual é o terceiro elemento da linha seguinte?

(A) 153 (B) 171 (C) 19 (D) 969

Resolução

A soma dos três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal é igual à soma dos três primeiros: 1, a e b

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & a & & b & & \dots \\ & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\ 1 & & a+1 & & a+b & & \dots \end{array}$$

Três primeiros elementos Três primeiros elementos da linha seguinte

$$1 + a + b = 172 \Leftrightarrow a + b = 171$$

O terceiro elemento da linha seguinte é 171.

Resposta: (B)

Verifica 7

7.1. O quarto número de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 22 100.

A soma dos quatro primeiros números dessa linha é 23 479. Qual é o terceiro número da linha seguinte?

7.2. Um conjunto tem exatamente 128 subconjuntos. Justifique que este conjunto tem tantos subconjuntos de três elementos como de quatro elementos.

6. Binómio de Newton

Os desenvolvimentos de $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, ..., $(a+b)^n$ podem ser escritos com a ajuda de combinações:

$$\begin{array}{ll} (a+b)^0 & \text{1} \\ (a+b)^1 & \text{1}a + \text{1}b \\ (a+b)^2 & \text{1}a^2 + \text{2}ab + \text{1}b^2 \\ (a+b)^3 & \text{1}a^3 + \text{3}a^2b + \text{3}ab^2 + \text{1}b^3 \\ (a+b)^4 & \text{1}a^4 + \text{4}a^3b + \text{6}a^2b^2 + \text{4}ab^3 + \text{1}b^4 \end{array}$$

Os coeficientes do desenvolvimento são os números do Triângulo de Pascal.

Observemos que:

- os desenvolvimentos são polinómios completos e ordenados em a e b , de expoentes decrescentes relativamente a a e crescentes relativamente a b ;
- o grau dos monómios do desenvolvimento de $(a+b)^n$ é n .

De um modo geral, tem-se:

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}^nC_{n-1} a b^{n-1} + {}^nC_n b^n \quad \text{ou} \quad (a+b)^n = \sum_{p=0}^n {}^nC_p a^{n-p} b^p$$

Esta fórmula é conhecida por fórmula do binómio de Newton.

Observemos que:

- o desenvolvimento de $(a+b)^n$ tem $n+1$ termos;
- o termo de ordem $p+1$ é T_{p+1} , sendo: $T_{p+1} = {}^nC_p a^{n-p} b^p$

Exemplo 8 Desenvolvimento de um binómio

Desenvolva o binómio $(2x+2)^4$.

Resolução

$$\begin{aligned} (2x+2)^4 &= \\ &= {}^4C_0 (2x)^4 \times 2^0 + {}^4C_1 (2x)^3 \times 2^1 + {}^4C_2 (2x)^2 \times 2^2 + {}^4C_3 (2x) \times 2^3 + {}^4C_4 (2x)^0 \times 2^4 = \\ &= 16x^4 + 4 \times 8x^3 \times 2 + 6 \times 4x^2 \times 4 + 4(2x) \times 8 + 1 \times (2x)^0 \times 16 = \\ &= 16x^4 + 64x^3 + 96x^2 + 64x + 16 \end{aligned}$$

Exemplo 9 O termo independente

No desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^6$ determine o termo independente de x .

Resolução

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^6 &= \sum_{p=0}^6 {}^6C_p (\sqrt{x})^{6-p} \times \left(-\frac{2}{x}\right)^p \\ T_{p+1} &= {}^6C_p (\sqrt{x})^{6-p} \times \left(-\frac{2}{x}\right)^p = {}^6C_p \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{6-p} (-2 \times x^{-1})^p = \\ &= {}^6C_p x^{\frac{3-p}{2}} \times (-2)^p \times x^{-p} = {}^6C_p (-2)^p x^{\frac{3-p}{2}-p} \end{aligned}$$

O termo independente de x é o termo em que aparece x^0 .

$$\text{Então: } 3 - \frac{p}{2} - p = 0 \Leftrightarrow 3p = 6 \Leftrightarrow p = 2$$

$$T_{2+1} = {}^6C_2 (-2)^2 x^0 \Leftrightarrow T_3 = 15 \times 4 \Leftrightarrow T_3 = 60$$

O termo independente de x é 60.

Verifica 8

Use a fórmula do binómio de Newton para verificar que:

$$(2 - \sqrt{2})^5 = 232 - 164\sqrt{2}$$

Verifica 9

No desenvolvimento de

$$\left(\frac{2}{x} + x^3\right)^5$$

determine o coeficiente do termo em que aparece x^7 .

Análise combinatória

Numa ornamentação usam-se módulos de 10 lâmpadas e módulos de 4 lâmpadas decorativas. Dispomos de lâmpadas brancas, vermelhas, azuis e amarelas. As lâmpadas apenas se distinguem pela cor.

Quantos módulos diferentes é possível formar (com dez lâmpadas acesas), nos casos seguintes?

1. O módulo tem dez lâmpadas sendo três lâmpadas de cores diferentes (azul, amarela e vermelha) e sete lâmpadas brancas.

Lâmpadas:	Vermelha	Azul	Amarela
N.º de possíveis lugares:	10	9	8

No conjunto dos dez lugares do módulo escolhemos ordenadamente três para as lâmpadas vermelha, azul e amarela. Como as três lâmpadas são de cores diferentes, interessa a ordem da escolha.

Os lugares não escolhidos são ocupados pelas lâmpadas brancas.

O número de possibilidades de escolha é dado por

$${}^{10}A_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

Há 720 possibilidades diferentes.

2. O módulo tem dez lâmpadas e cada uma pode ser de qualquer uma das cores disponíveis.

Posição da lâmpada:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º de escolhas:	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

No conjunto das quatro cores disponíveis pretende-se escolher uma sequência de dez cores, diferentes ou não.

O seu número é dado por ${}^{10}A_4 = 10^4 = 10\,000$

Há 10 000 módulos diferentes.

3. O módulo tem quatro lâmpadas todas diferentes.

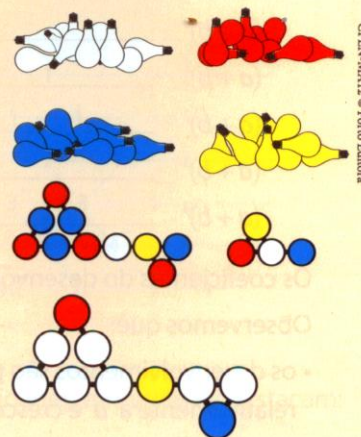
Posição da lâmpada:	1	2	3	4
N.º de escolhas:	4	3	2	1

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$$

Número de sequências de quatro lâmpadas diferentes que é possível definir com os quatro tipos de lâmpadas existentes (as quatro cores disponíveis).

O seu número é dado por $P_4 = 4! = 24$.

Há 24 módulos diferentes.



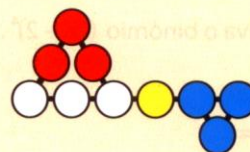
CPEN-MA12 © Porto Editora

Arranjos sem repetição

Número de maneiras de escolher p elementos entre n elementos sabendo que:

- interessa a ordem dos elementos;
- os elementos não podem repetir-se.

$${}^nA_p = n(n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$



Arranjos com repetição

Número de maneiras de escolher p elementos entre n elementos sabendo que:

- interessa a ordem dos elementos;
- os elementos podem repetir-se.

$${}^nA'_p = n^p$$



Permutações de n elementos

Número de sequências de n elementos que é possível definir com os n elementos dados.

$$P_n = {}^nA_n \text{ ou } P_n = n!$$

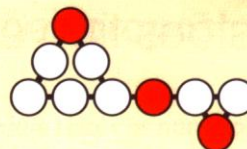
4. O módulo tem dez lâmpadas sendo três lâmpadas vermelhas e sete lâmpadas brancas.

No conjunto dos dez lugares do módulo escolhemos um subconjunto de três para as lâmpadas vermelhas (os lugares não escolhidos são ocupados pelas lâmpadas brancas).

Como as três lâmpadas são da mesma cor, não interessa a ordem da escolha.

O seu número é dado por:

$${}^{10}C_3 = \frac{{}^{10}A_3}{3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$$



Combinações (sem repetição)

Combinações de n elementos p a p , são todos os subconjuntos de p elementos que é possível definir num conjunto com n elementos.

O seu número, nC_p ou $\binom{n}{p}$, é dado por:

$${}^nC_p = \frac{{}^nA_p}{p!} \text{ ou } {}^nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Triângulo de Pascal. Propriedades das combinações

- ${}^nC_0 = {}^nC_n = 1$
- ${}^nC_p = {}^nC_{n-p}$, $n, p \in \mathbb{N}_0$ e $n \geq p$
- ${}^nC_p + {}^nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$, $n, p \in \mathbb{N}_0$ e $n \geq p$
- ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots + {}^nC_n = 2^n$

Um conjunto com n elementos tem exatamente 2^n subconjuntos.

Binómio de Newton

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}^nC_{n-1} a b^{n-1} + {}^nC_n b^n$$

ou

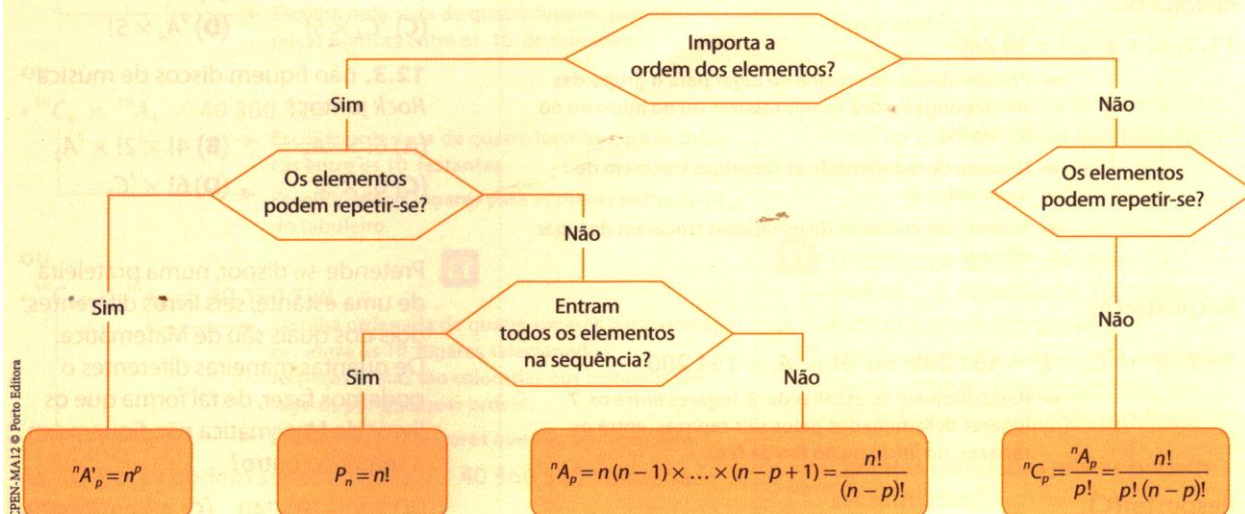
$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n {}^nC_p a^{n-p} b^p$$

O desenvolvimento de $(a+b)^n$ tem $n+1$ termos.

O termo de ordem $p+1$ é T_{p+1} , sendo:

$$T_{p+1} = {}^nC_p a^{n-p} b^p$$

Síntese



Questões resolvidas

- 10** Capicua é uma sequência de algarismos ou letras cuja leitura é a mesma quando feita nos dois sentidos.
Por exemplo, 532 235, RAPAR e 5A3A5 são capicuas.
Quantas capicuas existem que são números ímpares de sete algarismos em que os três algarismos centrais são números pares?
- (A) 6250 (B) 312 500
(C) 1250 (D) 78 125

Resolução

1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	(algarismos)
5	10	5	5	1	1	1	(número de opções)

→ Iguais aos 3 primeiros
 → Algarismos pares
 → Qualquer algarismo (0 a 9)
 → Algarismo ímpar

$$5 \times 10 \times 5 \times 5 = 1250$$

Resposta: (C)

- 11** De quantas maneiras distintas podem ficar sentados seis rapazes e três raparigas, num banco de nove lugares, sabendo que:
- 11.1.** as raparigas ficam em lugares seguidos;
(A) 30 240 (B) 4320 (C) 8640 (D) 25 920
- 11.2.** as raparigas ficam todas em lugares separados (pelo menos um rapaz entre duas raparigas)?
(A) 86 400 (B) 12 960 (C) 151 200 (D) 25 220

Resolução

11.1. $6! \times 3! \times 7 = 30\,240$

- Possibilidades de escolha de lugar para o grupo das três raparigas entre os seis rapazes ou no início ou no fim da fila.
 → Número de maneiras de as raparigas trocarem de lugar entre si.
 → Número de maneiras de os rapazes trocarem de lugar entre si.

Resposta: (A)

11.2. $6! \times {}^7C_3 \times 3! = 151\,200$ ou $6! \times {}^7A_3 = 151\,200$

- Possibilidades de escolha de 3 lugares entre os 7 lugares determinados pelos seis rapazes (entre os rapazes, no início ou no fim da fila).

Resposta: (C)

Questões propostas

- 10** Quantas capicuas existem com 5 algarismos ímpares sabendo que cada algarismo aparece duas vezes, no máximo?
- (A) 60 (B) 125
(C) 625 (D) 1200

- 11** Seja $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$. Quantas capicuas é possível formar com cinco letras, escolhidas no conjunto A , de tal modo que:

11.1. a letra a figure três, e só três, vezes;

(A) 81 (B) 162 (C) 18 (D) 20

11.2. as três primeiras letras são diferentes e a última letra é uma vogal?

(A) 42 (B) 270 (C) 126 (D) 216

- 12** O João selecionou, para ouvir nas férias, três CD de música *Rock*, quatro de *Jazz* e dois de música clássica. De quantas maneiras pode arrumar os nove CD numa estante, encostados uns aos outros, de modo que:

12.1. os discos do mesmo tipo de música fiquem juntos;

(A) $3! \times 4! \times 2!$ (B) $(3!)^2 \times 4! \times 2!$

(C) ${}^9C_3 \times {}^6C_4$ (D) ${}^9A_3 \times {}^6A_4$

12.2. os discos de *Jazz* fiquem juntos;

(A) $4! \times 5! \times 6$ (B) $3! \times 4! \times 2! \times 6$

(C) ${}^9C_4 \times 5!$ (D) ${}^9A_4 \times 5!$

12.3. não fiquem discos de música *Rock* juntos?

(A) $6! \times {}^7A_3$ (B) $4! \times 2! \times {}^7A_3$

(C) $6! \times 3!$ (D) $6! \times {}^7C_3$

- 13** Pretende-se dispor, numa prateleira de uma estante, seis livros diferentes, dois dos quais são de Matemática. De quantas maneiras diferentes o podemos fazer, de tal forma que os livros de Matemática não fiquem um a seguir ao outro?

(A) 720 (B) 240 (C) 480 (D) 672

Questões resolvidas

- 12** Considere todos os números naturais de quatro algarismos diferentes.

Em quantos destes números não aparecem o algarismo 4 nem o algarismo 5?

- (A) $7 \times {}^8A_3$ (B) 8^4 (C) $7 \times {}^7A_3$ (D) 8A_4

Resolução

Dispomos de oito algarismos (todos exceto o 4 e o 5).

Para o 1.º algarismo (o dos milhares) temos sete hipóteses de escolha dado que este tem de ser diferente de 0. Para os restantes temos uma sequência de três algarismos diferentes escolhidos entre sete, a qual pode ser escolhida de 7A_3 maneiras diferentes.

Logo, temos $7 \times {}^7A_3$ possibilidades de escolha.

Resposta: (C)

- 13** Pretende-se colocar sobre um tabuleiro quadrado dividido em 16 quadrados iguais, numerados de 1 a 16, como o representado na figura, 10 peças, das quais quatro são brancas numeradas de 1 a 4 e seis são pretas. As peças pretas são exatamente iguais entre si.

1	2	3	4
●	●	●	●
●	●	11	12
13	14	15	16

De quantas maneiras podem ser colocadas as 10 peças no tabuleiro de modo que não fique mais do que uma peça em cada casa?

Resolução

Raciócinios diferentes podem conduzir a resoluções diferentes igualmente corretas. Nas possíveis respostas que a seguir se apresentam atendeu-se a que, como as peças pretas são indistinguíveis, não interessa a ordem pela qual são colocadas no tabuleiro.

No que respeita às brancas, como são diferentes, interessa a ordem pela qual são colocadas:

$$\bullet {}^{16}A_4 \times {}^{12}C_6 = 40\,360\,320$$

Escolha de seis casas ou lugares para as pretas entre os 12 restantes.

Escolha ordenada de quatro lugares para as peças brancas entre os 16 do tabuleiro.

ou

$$\bullet {}^{16}C_6 \times {}^{10}A_4 = 40\,360\,320$$

Escolha ordenada de quatro lugares para as brancas entre os 10 restantes.

Escolha de seis lugares para as pretas entre os 16 do tabuleiro.

ou

$$\bullet {}^{16}C_{10} \times {}^{10}A_4 = 40\,360\,320$$

Escolha ordenada de quatro lugares para as brancas entre os 10 lugares selecionados.

As peças pretas são colocadas nos restantes seis lugares por qualquer ordem.

Escolha dos 10 lugares que vão ser ocupados.

As 10 peças podem ser colocadas de 40 360 320 maneiras diferentes.

Questões propostas

- 14** Considere todos os números naturais de cinco algarismos diferentes.

Quantos destes números:

14.1. se podem escrever sem usar o algarismo 1 nem o algarismo 2;

- (A) 5880 (B) 6720

- (C) 28 672 (D) 32 768

14.2. são múltiplos de 5?

- (A) 6048 (B) 5712

- (C) 5376 (D) 4704

- 15** Uma caixa tem 10 compartimentos para colocar iogurtes. De quantas maneiras diferentes se podem colocar sete iogurtes nessa caixa, sabendo que três são iogurtes naturais (não se distinguem) e os restantes quatro são de fruta (um de ananás, um de morango, um de maçã e um de alperce)?

- 16** Pretende-se constituir uma lista de cinco pessoas para se candidatar à Direção de uma associação. Os membros da lista serão escolhidos entre os elementos de um grupo de quatro mulheres e seis homens. Sabe-se que um dos homens é advogado.

De quantas maneiras pode ser feita a escolha de forma que:

16.1. a lista seja constituída por dois homens e três mulheres;

16.2. da lista faça parte pelo menos um homem e pelo menos uma mulher;

16.3. a lista tenha pelo menos uma mulher e o advogado também faça parte?

- 17** Uma turma do 12.º ano tem 22 alunos: 12 raparigas e 10 rapazes. Para organizar um passeio, pretende-se constituir uma comissão de três alunos: um presidente, um secretário e um relações públicas.

Quantas comissões mistas podem ser formadas?

Questões resolvidas

- 14** Um anagrama é uma palavra formada pela alteração da ordem das letras de outra palavra. Por exemplo, "ROMA" é um anagrama da palavra "AMOR".

14.1. Quantos são os anagramas da palavra AMOR, com ou sem significado?

14.2. Quantos são os anagramas da palavra BEBERETE, com ou sem significado?

Resolução

14.1. Palavra AMOR

1.ª letra	2.ª letra	3.ª letra	4.ª letra	
4	3	2	1	(possibilidades de escolha)

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Com 4 letras diferentes é possível formar $P_4 = 4! = 24$ sequências diferentes.

Com as letras da palavra AMOR é possível formar 24 palavras diferentes.

14.2. Palavra BEBERETE

Com 8 letras diferentes é possível formar $P_8 = 8!$ sequências diferentes.

As permutações das letras BB (2!) conduzem a resultados iguais, o mesmo acontecendo com as permutações das letras EEEE (4!). Portanto, temos de dividir as 8! permutações por $2! \times 4!$.

Com as letras da palavra BEBERETE é possível formar

$$\frac{8!}{2! \times 4!} = 840 \text{ palavras diferentes.}$$

Este resultado pode ser generalizado da forma seguinte:

PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO

Se entre n objetos dados houver k_1 do tipo 1, k_2 do tipo 2, ..., k_p do tipo p , tal que $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$, então o número de permutações distintas dos n objetos é dado por

$$\frac{n!}{k_1! \times k_2! \times \dots \times k_p!}$$

Outro processo

O número de anagramas da palavra BEBERETE também pode ser dado por:

$${}^8C_4 \times {}^4C_2 \times 2! = 840$$

- Possíveis permutações das letras diferentes R e T.
- Escolha de 2 lugares, entre os 4 restantes para a letra B.
- Escolha de 4 lugares, entre os 8 lugares da sequência, para a letra E.

Questões propostas

- 18** Dispomos de nove bolas, sendo duas amarelas, quatro vermelhas e três de diversas cores, todas diferentes.



As bolas apenas se distinguem pela cor.

De quantas maneiras diferentes é possível dispor as nove bolas numa fila, encostadas umas às outras?

- 19** Um casal tem cinco filhos, sendo três rapazes e duas raparigas. A notação FFMMM representa uma possível ordem do nascimento desses cinco filhos, indicando que o primeiro a nascer foi uma rapariga (F), seguiu-se outra rapariga, e assim sucessivamente.

Neste sentido, quantas ordens diferentes de nascimento dos filhos do casal é possível estabelecer?

- 20** A equipa de andebol da escola do João ganhou o último campeonato interescolas. Para tal, realizou 20 jogos tendo obtido 14 vitórias (V), 4 empates (E) e 2 derrotas (D). Quantas sequências de resultados é possível estabelecer?

- 21** Utilizando os oito algarismos do número 11 122 345, quantos números podem ser formados?

- 22** O número de série de um produto é constituído por três "X", dois "T" três "2" e dois "3".

Quantos códigos diferentes existem nestas condições?

- 23** Um contribuinte recebeu a seguinte senha de identificação de acesso ao portal das Finanças na Internet: 8FR5FY8X85RY. Com as mesmas letras e os mesmos algarismos:

23.1. quantas senhas diferentes é possível definir;

23.2. quantas senhas diferentes, com os números colocados antes das letras e por ordem crescente, é possível definir?

Questões resolvidas

- 15** De quantas maneiras 12 **bolas diferentes** podem ser colocadas em três **caixas diferentes** de modo que cada caixa fique com quatro bolas?

Resolução

1.º processo

$$\frac{12!}{4! \times 4! \times 4!} = 34\,650$$

→ A ordem das bolas dentro de cada caixa não interessa (como se se tratasse de bolas iguais).

2.º processo

$${}^{12}C_4 \times {}^8C_4 \times {}^4C_4 = 34\,650$$

- 16** De quantas maneiras 12 **bolas diferentes** podem ser colocadas em três **caixas iguais** de modo que cada caixa fique com quatro bolas?

Resolução

$$\frac{12!}{4! \times 4! \times 4! \times 3!} = 5775$$

→ Não há distinção entre as 3 caixas. Logo, temos de dividir por 3!.

- 17** De quantas maneiras 12 **bolas diferentes** podem ser colocadas em três **caixas iguais**, de modo que uma das caixas fique com seis bolas e as outras duas caixas fiquem com três bolas cada uma?

Resolução

$$\frac{12!}{6! \times 3! \times 3! \times 2!} = 9240$$

→ As caixas são iguais. Logo, as duas caixas com o mesmo número de bolas não se distinguem.

- 18** De quantas maneiras 12 **bolas diferentes** podem ser colocadas em três **caixas de tamanhos diferentes**, ficando a caixa maior com seis bolas e as outras caixas com três bolas cada uma?

Resolução

$$\frac{12!}{6! \times 3! \times 3!} = 18\,480$$

ou

$${}^{12}C_6 \times {}^6C_3 \times {}^3C_3 = 18\,480$$

Questões propostas

- 24** Num centro comercial, 15 pessoas aguardam por um elevador. Ao mesmo tempo ficam três elevadores disponíveis. De quantas maneiras as 15 pessoas se podem dividir pelos três elevadores, entrando cinco pessoas para cada um?

- 25** Considere um baralho de cartas completo. De quantas maneiras as 52 cartas podem ser repartidas por quatro pessoas de modo que cada uma receba a mesma quantidade de cartas?



- 26** De quantas maneiras um grupo de 15 pessoas pode ser dividido em:
- 26.1.** três grupos de 5 pessoas;
- 26.2.** dois grupos de 6 pessoas e um grupo de três pessoas?

- 27** A avó do João tem sete brinquedos diferentes para repartir pelos seus três netos. De quantas maneiras o pode fazer sabendo que pretende dar três brinquedos ao João, o neto mais novo, e dois brinquedos a cada um dos restantes?

- 28** De quantas maneiras se podem distribuir sete bolas diferentes por três caixas iguais de modo que duas das caixas fiquem exatamente com duas bolas cada?

- 29** O departamento de desenvolvimento de uma empresa é constituído por oito colaboradores, um dos quais é o diretor. De entre estes oito colaboradores pretende-se escolher um grupo para o estudo de determinado projeto. De quantas maneiras pode ser feita a escolha se do grupo fizerem parte:
- 29.1.** quatro colaboradores, sendo um deles o diretor;
- 29.2.** pelo menos dois colaboradores;
- 29.3.** no máximo seis colaboradores?

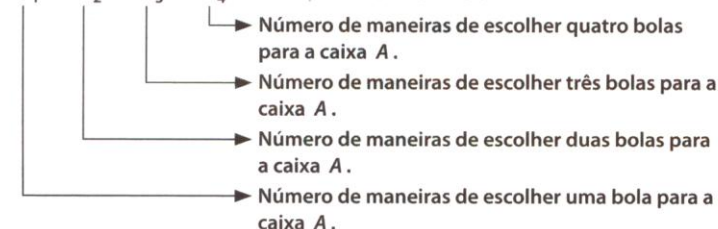
Questões resolvidas

- 19** De quantas maneiras podemos distribuir cinco bolas diferentes por duas caixas diferentes de modo que cada caixa fique com pelo menos uma bola?

Resolução

1.º processo: Escolhidas as bolas para a caixa A ficam determinadas as da caixa B:

$${}^5C_1 + {}^5C_2 + {}^5C_3 + {}^5C_4 = 5 + 10 + 10 + 5 = 30$$



2.º processo

Para cada bola há duas hipóteses: a caixa A ou a caixa B.

$$\begin{array}{ccccc} B1 & B2 & B3 & B4 & B5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

$$2^5 - 2 = 30$$

→ Excluem-se os casos em que as bolas ficam todas na caixa A ou na caixa B.

Repare-se que ${}^5C_0 + {}^5C_1 + {}^5C_2 + {}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5 = 2^5$ é o número de subconjuntos que é possível definir num conjunto com cinco elementos.

$2^5 - 2 = 30$ é o número de subconjuntos que é possível definir num conjunto com cinco elementos, excluindo o conjunto vazio e o próprio conjunto.

- 20** No Triângulo de Pascal existe uma linha com 12 elementos. Seja a o maior número da linha seguinte. Qual é o valor de a ?

(A) ${}^{12}C_6$ (B) ${}^{12}C_7$ (C) ${}^{13}C_6$ (D) ${}^{13}C_7$

Resolução

A linha com 12 elementos é a correspondente a $n = 11$.

A linha seguinte corresponde a $n = 12$.

O maior elemento desta linha é o elemento central, ou seja, o elemento correspondente a $p = \frac{12}{2} = 6$.

Logo, $a = {}^{12}C_6$.

Resposta: (A)

- 21** A soma dos três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal é 81 004. Qual é o terceiro elemento da linha seguinte?

(A) 81 003 (B) 81 407 (C) 80 601 (D) 80 602

Resolução

A soma dos três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal é igual à soma dos três primeiros.

Se 1, n e a são os três primeiros elementos dessa linha, $n + a$ é o terceiro elemento da linha seguinte.

Sabemos que $1 + n + a = 81\,004 \Leftrightarrow n + a = 81\,003$.

Logo, o terceiro elemento da linha seguinte é 81 003.

Resposta: (A)

Questões propostas

- 30** A representação de uma escola numa prova de atletismo vai ser formada por pelo menos dois elementos escolhidos entre oito candidatos.

De quantas maneiras pode ser feita a escolha?

(A) 8C_2 (B) $2^8 - 2$
(C) $2^8 - 1$ (D) $2^8 - 9$

- 31** Considere a linha do Triângulo de Pascal que tem 13 elementos. Qual é o quarto elemento dessa linha?

(A) ${}^{12}C_4$ (B) ${}^{12}C_3$ (C) ${}^{13}C_4$ (D) ${}^{13}C_3$

- 32** O produto dos dois últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal é 55.

Qual é o maior elemento da linha anterior?

(A) ${}^{54}C_{28}$ (B) ${}^{54}C_{27}$ (C) ${}^{56}C_{28}$ (D) ${}^{55}C_{28}$

- 33** A soma dos dois últimos elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 25.

Qual é a soma dos três primeiros elementos da linha anterior?

(A) 277 (B) 326 (C) 301 (D) 276

- 34** O produto dos dois últimos elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 200.

Quantos elementos dessa linha são maiores do que um milhão?

(A) 6 (B) 195 (C) 3 (D) 198

- 35** Considere a linha do Triângulo de Pascal cujos elementos são da forma ${}^{398}C_p$.

Sejam a , b , c e d , respetivamente, os dois primeiros e os dos últimos elementos da linha seguinte.

Qual é o valor da soma $a + b + c + d$?

(A) 399 (B) 800 (C) 798 (D) 400

Questões resolvidas

- 22** Sejam x e y , respetivamente, o segundo e o penúltimo elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal. Sabe-se que $xy = 81$. Qual é a soma de todos os elementos da linha anterior?
- (A) 2^9 (B) 2^8 (C) 9^2 (D) 8^2

Resolução

O segundo e o penúltimo elementos de uma linha do Triângulo de Pascal são iguais. Então, $xy = 81 \Leftrightarrow xx = 81 \Leftrightarrow x^2 = 81$. Como $x \in \mathbb{N}$, $x = 9$.

O segundo elemento da linha em causa é 9. Trata-se da linha dos elementos da forma 9C_p . Os elementos da linha anterior são da forma 8C_p e a sua soma é 2^8 .

Resposta: (B)

- 23** Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $(x+2)^4 = 9x^2 + 32x + 16$.

Resolução

Na equação $(x+2)^4 = 9x^2 + 32x + 16$ comecemos por desenvolver $(x+2)^4$ aplicando a fórmula do binómio de Newton:

$$(x+2)^4 = {}^4C_0 x^4 \times 2^0 + {}^4C_1 x^3 \times 2^1 + {}^4C_2 x^2 \times 2^2 + {}^4C_3 x^1 \times 2^3 + {}^4C_4 x^0 \times 2^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

Substituindo a expressão obtida na equação dada, vem:

$$\begin{aligned} (x+2)^4 &= 9x^2 + 32x + 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = 9x^2 + 32x + 16 \\ &\Leftrightarrow x^4 + 8x^3 + 15x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 8x + 15) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 + 8x + 15 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 15}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -5 \vee x = -3 \end{aligned}$$

- 24** O desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^{20}$ tem um termo da forma kx^5 . Determine k .

Resolução

$$\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^{20} = \sum_{p=0}^{20} {}^{20}C_p \times (\sqrt{x})^{20-p} \left(-\frac{2}{x}\right)^p$$

O termo geral do desenvolvimento é ${}^{20}C_p \times (\sqrt{x})^{20-p} \left(-\frac{2}{x}\right)^p$.

$$\begin{aligned} {}^{20}C_p \times (\sqrt{x})^{20-p} \left(-\frac{2}{x}\right)^p &= {}^{20}C_p \times \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{20-p} \left(-2 \times \frac{1}{x}\right)^p = \\ &= {}^{20}C_p \times x^{10-\frac{p}{2}} \times (-2)^p \times x^{-p} = {}^{20}C_p \times (-2)^p x^{10-\frac{p}{2}-p} = \\ &= {}^{20}C_p \times (-2)^p x^{10-\frac{3p}{2}} = {}^{20}C_p \times (-2)^p x^{10-\frac{5p}{2}} \end{aligned}$$

A expressão obtida é da forma kx^5 se, e só se, $10 - \frac{5p}{2} = 5$.

$$10 - \frac{5p}{2} = 5 \Leftrightarrow 20 - 5p = 10 \Leftrightarrow 5p = 10 \Leftrightarrow p = 2$$

O termo da forma kx^5 é ${}^{20}C_2 \times (-2)^2 x^5 = 760x^5$.

Portanto, $k = 760$.

Questões propostas

- 36** Sejam x e y , respetivamente, o segundo e o penúltimo elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal. Sabe-se que $xy = 121$.

Qual é o terceiro elemento dessa linha?

- (A) 220 (B) 165 (C) 66 (D) 55

- 37** Considere duas linhas consecutivas do Triângulo de Pascal das quais se reproduzem os três primeiros elementos:

$$1 \quad a \quad b \quad \dots$$

$$1 \quad x \quad y \quad \dots$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $1 + a + b = x + y$ e $\frac{a+b}{y} = 1$
 (B) $x - a = 1$ e $a + b = x + y$
 (C) $1 + 2a + b = x + y$ e $\frac{a+b}{y} = 1$
 (D) $a + b = y$ e se $a = {}^nC_1$, então $y = {}^{n+1}C_3$.

- 38** Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação: $(x-2)^4 = 12x^2 - 32x + 16$

- 39** Escreva o número $(2 - \sqrt{2})^5$ na forma $a + b\sqrt{2}$ com a e b números inteiros.

- 40** Relativamente ao desenvolvimento de $\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$ determine, caso exista:

40.1. o termo que não depende da variável x ;

40.2. o termo da forma kx^{15} , com k inteiro.

- 41** Qual das afirmações seguintes é verdadeira, sendo a um número natural?

- (A) $(a^{10} + 1)^7 = a^{70} + 7a^{10} + 1$
 (B) $(a^{10} + 1)^8 = a^{80} + 1$
 (C) $(a^{10} + 1)^9 > a^{90} + 9 \times a^{10} + 1$
 (D) $(a^{10} + 1)^{10} < a^{100} + 1$

Itens de seleção

- 42** De quantas maneiras se podem sentar três raparigas e quatro rapazes, num banco de nove lugares, sabendo que os rapazes ocupam lugares seguidos?

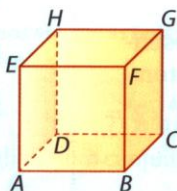
(A) 1440 (B) 8640 (C) 144 (D) 432

- 43** Os números de telefone de uma certa região têm nove algarismos, sendo os três primeiros 253 (por esta ordem).

Quantos números de telefone, com os algarismos todos diferentes, podem existir nessa região?

(A) 10^6 (B) 7A_6 (C) 7^6 (D) ${}^{10}A_6$

- 44** Num cubo $[ABCDEFGH]$, considere todas as retas definidas por dois dos seus vértices. Quantas dessas retas não passam pelo centro do cubo?



(A) 24 (B) 26
(C) 20 (D) 28

- 45** Pretende-se eleger o delegado e o subdelegado de uma turma do 12.º ano com 22 alunos sendo 12 raparigas e 10 rapazes.

De quantas maneiras pode ser feita a escolha de modo que pelo menos um dos alunos escolhidos seja rapariga?

(A) 176 (B) 252 (C) 372 (D) 240

- 46** No Dia Internacional da Mulher, o João colheu sete margaridas e cinco orquídeas para fazer dois ramos, um para oferecer à mãe e o outro para a irmã.

Atendendo ao número de flores a usar, de quantas maneiras pode fazer os dois ramos, sabendo que:

- cada ramo terá seis flores;
- cada ramo terá pelo menos uma orquídea e pelo menos uma margarida;
- o ramo da mãe terá mais orquídeas do que margaridas?

(A) ${}^7C_2 \times {}^5C_4$
(B) ${}^7C_3 \times {}^5C_3 \times {}^7C_2 \times {}^5C_4$
(C) ${}^7C_4 \times {}^5C_2 + {}^7C_3 \times {}^5C_3$
(D) ${}^7C_4 \times {}^5C_2 + {}^7C_2 \times {}^5C_4$

- 47** Um atleta dispõe de uma vitrina com 12 prateleiras onde vai expor nove troféus: quatro medalhas, três taças e duas salvas. As taças são iguais e os restantes troféus são diferentes.

De quantas maneiras pode o atleta arrumar as nove peças nas 12 prateleiras de modo que não fique mais do que um troféu em cada prateleira?

(A) ${}^{12}C_3 \times 4! \times 2!$ (B) ${}^{12}A_3 \times {}^9C_6$
(C) ${}^{12}C_3 \times {}^{12}A_6$ (D) ${}^{12}C_3 \times {}^9A_6$

- 48** Numa turma com 12 raparigas e 8 rapazes, vão ser escolhidos três para desempenharem os cargos de delegado, subdelegado e responsável pela segurança.

De quantas maneiras pode ser feita a escolha de modo que entre os selecionados haja pelo menos uma rapariga e pelo menos um rapaz?

(A) ${}^{12}A_2 \times {}^8A_1 + {}^{12}A_1 \times {}^8A_2$
(B) ${}^{12}C_2 \times {}^8C_1 + {}^{12}C_1 \times {}^8C_2$
(C) $({}^{12}C_2 \times {}^8C_1 + {}^{12}C_1 \times {}^8C_2) \times 3!$
(D) $({}^{20}C_3 - {}^{12}C_3 - {}^8C_3) \times 3$

- 49** Numa turma com 25 alunos, vão ser escolhidos três para organizar uma viagem.

Os três alunos vão desempenhar os cargos de presidente, secretário e relações públicas.

Quantas comissões se podem formar nas quais o delegado da turma seja um dos elementos?

(A) 276 (B) 1656
(C) 552 (D) 13 800

- 50** Um novo país quer escolher as cores da sua bandeira que terá quatro tiras verticais.

De quantas maneiras poderá ser colorida a bandeira sabendo que:

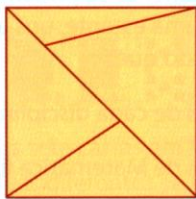
- estão disponíveis cinco cores diferentes;
- cada tira vertical é pintada de uma só cor;
- duas tiras vizinhas não podem ser pintadas da mesma cor;
- serão usadas apenas três cores?

(A) 240 (B) 320 (C) 1440 (D) 120

- 51** Dispomos de cinco cores, azul, branco, castanho, dourado e verde, para pintar as quatro faces de um tetraedro regular, sendo uma face de cada cor. De quantos modos se pode pintar o tetraedro?

(A) 5A_4 (B) 5A_3
(C) ${}^5C_4 \times 2$ (D) ${}^5C_4 \times 3$

- 52** Pretende-se pintar um painel quadrado dividido em quatro triângulos diferentes.



Estão disponíveis seis cores para pintar o painel. Terão de ser respeitadas as seguintes condições:

- o painel terá de ficar completamente pintado;
- cada um dos quatro triângulos é pintado de uma única cor;
- zonas com fronteira comum não podem ser pintadas da mesma cor.

De quantas maneiras pode ser pintado o painel?

- (A) 480 (B) 360 (C) 120 (D) 35

- 53** A soma dos dois últimos elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 20. Qual é a soma dos três primeiros elementos da linha seguinte?

- (A) 121 (B) 151 (C) 181 (D) 211

- 54** Considere os dois primeiros elementos e os dois últimos de uma certa linha do Triângulo de Pascal. O produto destes quatro elementos é igual a 121. Qual é o maior elemento da linha seguinte?

- (A) 62 (B) 252 (C) 924 (D) 792

- 55** O terceiro elemento de uma linha do Triângulo de Pascal é igual a 190. O terceiro elemento da linha seguinte é igual a 210. O segundo elemento da primeira dessas duas linhas é:

- (A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22

- 56** A soma dos dois últimos elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 31. Qual é a soma dos três primeiros elementos dessa linha?

- (A) 436 (B) 497 (C) 466 (D) 435

- 57** Uma linha do Triângulo de Pascal tem 12 elementos. Qual é a soma de todos os elementos dessa linha?

- (A) 1024 (B) 2048
(C) 4096 (D) 8192

- 58** A expressão $\frac{{}^{2015}C_{101} - {}^{2014}C_{101}}{{}^{2014}C_{100}}$ é igual a:

- (A) 0 (B) 1
(C) ${}^{2015}C_{101}$ (D) ${}^{2014}C_{102}$

- 59** De uma linha do Triângulo de Pascal sabe-se que o produto do segundo elemento pelo penúltimo é igual a 169. Qual é o maior elemento da linha seguinte?

- (A) 1287 (B) 1716
(C) 3003 (D) 3432

- 60** $a b c d e f g h i j k$ representa uma linha completa do Triângulo de Pascal, onde todos os elementos estão representados por letras. Considere que os primeiros quatro elementos da linha seguinte são $w x y z$. Qual das seguintes afirmações é falsa?

- (A) $c + d = z$ (B) $a \times b \times j \times k = b^2$
(C) $z = {}^{11}C_3$ (D) $a + b + j + k = 24$

- 61** Relativamente ao desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$ pode afirmar que:

- (A) Tem oito termos.
(B) Os coeficientes dos termos são todos diferentes.
(C) Tem um termo da forma kx^3 , com $k \in \mathbb{Z}$.
(D) Tem um termo independente igual a 70.

- 62** Um dos termos do desenvolvimento $(x + y)^n$ é da forma kx^5y^7 . O valor de k é:

- (A) 792 (B) 21 (C) 462 (D) 12

- 63** Sabe-se que $(1 - \sqrt{3})^5 = a + b\sqrt{3}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$.

Então, os valores de a e b são:

- (A) $a = 76$ e $b = 44$
(B) $a = 76$ e $b = -44$
(C) $a = -76$ e $b = 44$
(D) $a = 76$ e $b = -26$

- 64** Um dos termos do desenvolvimento $(x - y)^{20}$ é:

- (A) $1140x^{17}y^3$ (B) $-1140x^{17}y^3$
(C) $680x^3y^{17}$ (D) $-680x^3y^{17}$

Itens de construção

- 65** Uma prova de exame de Matemática tem oito itens de seleção. Em cada item são indicadas quatro opções de resposta (A, B, C ou D) das quais só uma está correta.

De quantas maneiras pode um estudante responder aos oito itens de seleção:

- 65.1.** sem quaisquer restrições;
- 65.2.** de modo que cinco, e só cinco, respostas estejam corretas;
- 65.3.** admitindo que o estudante sabe a resposta a cinco das questões e decide responder ao acaso às restantes?

- 66** Na figura seguinte está representado um tabuleiro quadrado, dividido em 25 quadrados iguais, numerados de 1 a 25.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Dispomos de 20 peças, 8 brancas e 12 pretas, só distinguíveis pela cor, que pretendemos colocar no tabuleiro, no máximo uma em cada casa.

De quantas maneiras diferentes podemos colocar as 20 peças no tabuleiro:

- 66.1.** sem quaisquer restrições;
- 66.2.** de modo que pelo menos uma das diagonais fique totalmente ocupada com peças brancas;
- 66.3.** de modo que pelo menos uma das diagonais fique totalmente ocupada com peças pretas?

- 67** Seis amigos, quatro raparigas e dois rapazes, vão ao cinema.

De quantas maneiras podem ocupar seis lugares seguidos numa fila, **não** ficando os dois rapazes em lugares consecutivos?

- 68** Seja A o conjunto dos números naturais não superiores a 20.

De quantas maneiras se podem escolher três elementos de A cuja soma seja um número par?

- 69** Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 50\}$.

De quantas maneiras se pode escolher um subconjunto de A com dois elementos não consecutivos?

- 70** Dispomos de quatro livros de Matemática, dois de Física e três de Biologia.

De quantas maneiras se podem arrumar numa prateleira de uma estante, uns ao lado dos outros, de modo que:

- 70.1.** os livros de cada disciplina fiquem juntos;
- 70.2.** os livros de Matemática fiquem juntos;
- 70.3.** os livros de Biologia fiquem todos separados?

- 71** O código de abertura de um cofre é formado por uma sequência de dez algarismos dos quais um é igual a 1, dois são iguais a 2, três são iguais a 3 e quatro são iguais a 4 (por exemplo, 1223334444).

Quantos códigos diferentes satisfazem as condições referidas?

- 72** O balcão de uma gelataria é formado por uma fila de oito compartimentos iguais.



Num certo dia vão ser colocados nos compartimentos gelados de cinco sabores distintos: ananás, limão, morango, baunilha e chocolate.

Três compartimentos serão ocupados com gelado de chocolate e dois com gelado de baunilha. Cada um dos gelados de fruta ocupará um compartimento.

- 72.1.** De quantas maneiras podem ser colocados nos compartimentos os gelados de baunilha e chocolate?

- 72.2.** De quantas maneiras podem os gelados ser distribuídos pelos oito compartimentos?

- 73** De um conjunto de dez pessoas, 6 homens e 4 mulheres, vai ser escolhida uma comissão.

De quantas maneiras pode ser feita a escolha se:

- 73.1.** a comissão for formada por dois elementos, no mínimo;

- 73.2.** a comissão for formada por cinco elementos, sendo pelo menos um do sexo feminino;

- 73.3.** a comissão for formada por três membros, com pelo menos um homem e pelo menos uma mulher e com três cargos diferentes atribuídos aos seus elementos?

- 74** De um baralho de cartas selecionaram-se sete cartas do mesmo naipe: às, rei, dama, valete, oito, nove e dez.



Dispõem-se as sete cartas em fila.

Em quantas filas diferentes se podem dispor as cartas de modo que:

- 74.1.** as três cartas com números fiquem seguidas;
74.2. as três cartas com números fiquem seguidas e dispostas por ordem crescente;
74.3. o rei não fique ao lado da dama;
74.4. não fiquem duas cartas com números seguidas?

- 75** Uma autarquia convidou 15 peritos para discutir e dar sugestões sobre o tema “Medidas para promover a poupança de água”. Para refletirem sobre o tema decidiram, numa primeira fase, dividirem-se em três grupos. De quantas maneiras se podem dividir em três grupos, sendo:

- 75.1.** formados por cinco pessoas cada um;
75.2. um grupo de sete pessoas e dois grupos de quatro;
75.3. um grupo de seis, um de cinco e o outro grupo com quatro pessoas?

- 76** Determine o termo independente do desenvolvimento de:

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10} \times \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$$

- 77** Um dos termos do desenvolvimento de

$$\left(2x^2y - \frac{1}{2}\right)^8$$

é da forma kx^6y^i com $k \in \mathbb{Z}$ e

$i \in \mathbb{N}$.

Determine k e i .

- 78** Considere a palavra ARRAIAL.

78.1. Quantas palavras, com ou sem significado, é possível formar com as sete letras da palavra dada?

78.2. Quantas dessas palavras começam e terminam pela letra A?

78.3. Em quantas dessas palavras não ficam duas letras A seguidas?

- 79** Determine o valor de n que satisfaz as condições:

79.1. ${}^{20}C_{n+1} = {}^{20}C_{4n-1}$

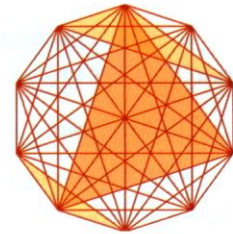
79.2. ${}^{3n}C_2 = 5 \times {}^nA_2 + 3$

- 80** De quantas maneiras 12 livros diferentes podem ser divididos por cinco caixas iguais, ficando duas caixas com três livros cada e as restantes três caixas com dois livros cada?

- 81** De quantas maneiras 12 livros podem ser divididos por cinco estudantes, recebendo o Abel e o Bruno três livros cada e a Carla, a Dora e a Ema dois livros cada uma?

- 82** De quantas maneiras seis bombons indistinguíveis podem ser distribuídos por quatro pessoas de modo que cada pessoa receba pelo menos um bombom?

- 83** Considere um polígono regular com 10 lados (decágono regular).



83.1. Quantas diagonais tem o polígono?

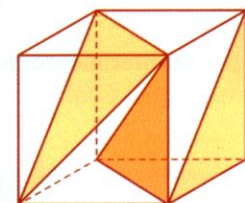
83.2. Quantos triângulos são definidos pelos vértices do polígono?

83.3. Quantos triângulos são definidos pelos vértices do polígono sabendo que um, e um só, dos lados do polígono também é lado do triângulo?

83.4. Quantos triângulos são definidos pelos vértices do polígono sabendo que dois dos lados do polígono também são lados do triângulo?

83.5. Quantos triângulos são definidos pelos vértices do polígono sabendo nenhum lado do polígono é lado de qualquer um dos triângulos?

- 84** Considere os oito vértices de um cubo.



84.1. Quantos triângulos definem?

84.2. Quantos triângulos isósceles, não equiláteros, definem?

84.3. Quantos triângulos definem, sabendo que um dos lados é uma diagonal espacial do cubo?

84.4. Quantos triângulos equiláteros definem?

Tema 2

Cálculo de probabilidades. Regra de Laplace

1. Experiência aleatória. Espaço de resultados

Nas experiências aleatórias, tem-se que:

- conhecemos todos os seus possíveis resultados;
- a experiência pode ser repetida em condições análogas;
- cada vez que é efetuada não se conhece antecipadamente qual dos resultados possíveis vai ocorrer.

Espaço de resultados

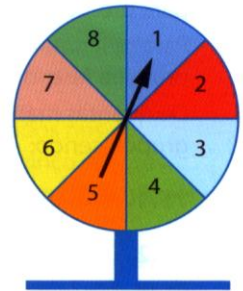
Ao conjunto de todos os resultados possíveis associados à realização de uma experiência aleatória chama-se espaço de resultados ou espaço amostral.

O espaço de resultados ou espaço amostral representa-se, normalmente, por E , S ou Ω .

Por exemplo:

Na experiência aleatória de rodar o ponteiro da roda da sorte representada na figura ao lado:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$



2. Acontecimentos

Acontecimento é um subconjunto do espaço de resultados de uma experiência aleatória.

Acontecimento elementar é o acontecimento que só tem um elemento do espaço amostral.

Acontecimento composto é um acontecimento que tem mais do que um elemento do espaço amostral.

Acontecimento impossível é o acontecimento que corresponde ao conjunto vazio.

Acontecimento certo é o acontecimento que corresponde à totalidade do espaço amostral.

Por exemplo:

Na experiência aleatória que consiste em lançar um dado perfeito, com as faces numeradas de 1 a 6, e anotar o número da face que ficou voltada para cima, tem-se:

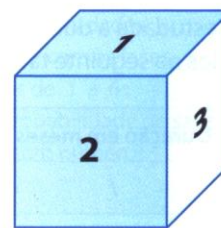
$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

A: "Sair 1". $A = \{1\}$ é um acontecimento elementar.

B: "Sair número primo". $B = \{2, 3, 5\}$ é um acontecimento composto.

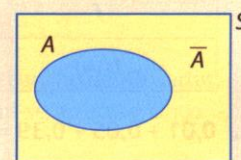
C: "Sair 7". $C = \{\}$ é o acontecimento impossível.

D: "Sair um número inferior a 7". $D = S$ é o acontecimento certo.



3. Acontecimentos complementares ou acontecimentos contrários

Acontecimento complementar ou acontecimento contrário de um acontecimento A é o acontecimento constituído por todos os resultados do espaço de resultados, S , que não estão em A . Este acontecimento representa-se por $\bar{A}$.

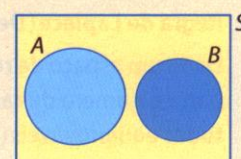


Note-se que $\overline{\bar{A}} = A$.

4. Acontecimentos disjuntos, incompatíveis ou mutuamente exclusivos

Os acontecimentos A e B são dois **acontecimentos disjuntos**, incompatíveis ou mutuamente exclusivos quando $A \cap B$ é o acontecimento impossível.

A e B são acontecimentos incompatíveis $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$



5. Definição frequencista de probabilidade

Probabilidade frequencista (ou empírica)

Seja A um acontecimento associado a uma experiência aleatória, que pode repetir-se, as vezes que quisermos, sempre nas mesmas condições.

Quando o número de realizações desta experiência aleatória aumenta muito (tende para infinito), a frequência relativa do acontecimento A tende a estabilizar em torno de um certo valor. Por outras palavras, a frequência relativa do acontecimento A converge para um valor, que é a probabilidade do acontecimento A .

Exemplo 1 Durabilidade das lâmpadas

Foi estudada a durabilidade, em meses, de 204 lâmpadas e registaram-se os dados na seguinte tabela:

Duração em meses	]0, 2]	]2, 4]	]4, 6]	]6, 8]	]8, 10]	]10, 12]
f	2	10	80	60	50	2

- 1.1. Determine a frequência relativa de cada uma das observações.
- 1.2. Determine a frequência relativa do acontecimento:
"A duração de uma lâmpada é de menos de meio ano".
- 1.3. Se, ao acaso, comprar uma destas lâmpadas, qual é a probabilidade de a mesma durar entre 6 e 8 meses?

Resolução

1.1.

Duração em meses	]0, 2]	]2, 4]	]4, 6]	]6, 8]	]8, 10]	]10, 12]
f	2	10	80	60	50	2
$fr(=)$	0,01	0,05	0,39	0,29	0,25	0,01

1.2. $0,01 + 0,05 + 0,39 = 0,45$. A frequência relativa pedida é 0,45.

1.3. $P = f_r \approx 0,29$

Verifica 1

Lançou-se 6000 vezes um dado cúbico com as faces numeradas de 1 a 6.

Os resultados obtidos constam da seguinte tabela:

Acontecimento	N.º de ocorrências
{1}	960
{2}	540
{3}	1080
{4}	840
{5}	1440
{6}	1140

1.1. Determine a frequência relativa de cada um dos acontecimentos elementares.

1.2. Considere os acontecimentos:

A: "Sair face ímpar";

B: "Sair face múltiplo de 3".

Determine:

a) $P(A)$

b) $P(B)$

c) $P(A \cap B)$

d) $P(A \cup B)$

6. Definição clássica de probabilidade ou regra de Laplace

Regra de Laplace (Definição clássica de probabilidade)

Dado um espaço de resultados S , finito, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis quando estes são todos equiprováveis (o número de casos possíveis é o número de elementos de S).

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favoráveis ao acontecimento } A}{\text{Número de casos possíveis}}$$

Da definição de, probabilidade de um acontecimento A , $P(A)$, deduz-se que:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A) = 0$, se e só se A é o acontecimento impossível;
- $P(S) = 1$, se S é o acontecimento certo;
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Esta propriedade aplica-se na resolução dos problemas em que é mais fácil calcular $P(\bar{A})$ do que $P(A)$.

Exemplo 2 Lançamento de três dados

Lançaram-se três dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6.



Qual é a probabilidade de a soma dos pontos das faces voltadas para cima ser 4?

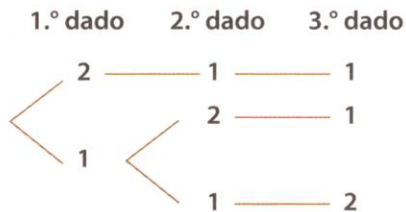
Resolução

Casos possíveis: $6 \times 6 \times 6 = 216$

Casos favoráveis: 3

$((2, 1, 1), (1, 2, 1) \text{ e } (1, 1, 2))$

Logo, $P = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$.

**Verifica 2**

Lançaram-se três dados equilibrados, com as faces numeradas de 1 a 6. Qual é a probabilidade de saírem três faces com números diferentes?

Exemplo 3 Formar uma comissão

Uma turma de uma escola secundária tem 20 alunos, sendo 13 raparigas e 7 rapazes.

O delegado de turma é uma rapariga.

Pretende-se formar uma comissão para organizar um passeio. Acordou-se que a comissão será formada por seis elementos e que um dos elementos será, necessariamente, a delegada de turma.



3.1. Quantas comissões diferentes se podem constituir?

3.2. Se a escolha dos cinco elementos da comissão (para além da delegada) for feita por sorteio, qual é a probabilidade de esta ser formada pelo mesmo número de rapazes e raparigas (apresente o resultado na forma de percentagem arredondado às unidades)?

Resolução

3.1. Como um elemento já está escolhido trata-se de escolher um subconjunto de cinco elementos de um conjunto com 19 elementos:

$${}^{19}C_5 = 11\,628$$

Podem ser constituídas 11 628 comissões diferentes.

3.2. Número de casos possíveis: 11 628

Como o delegado é uma rapariga, o número de casos favoráveis é o número de maneiras de escolher duas raparigas em 12 e três rapazes em 7:

Raparigas	Rapazes	
12	7	← N.º de elementos disponíveis
2	3	← N.º de elementos a escolher

$${}^{12}C_2 \times {}^7C_3 = 2310$$

Logo, a probabilidade pedida é $P = \frac{2310}{11\,628} \approx 20\%$.

Verifica 3

De um baralho de 40 cartas, extraem-se, ao acaso, cinco cartas.

Determine a probabilidade de:

3.1. extrair duas cartas pretas e três cartas vermelhas;

3.2. extrair um, e um só, rei.

(apresente os resultados na forma de percentagem, arredondado às unidades.)

Nota: num baralho de 40 cartas existem 4 reis, 20 cartas pretas e 20 cartas vermelhas.

Questões resolvidas

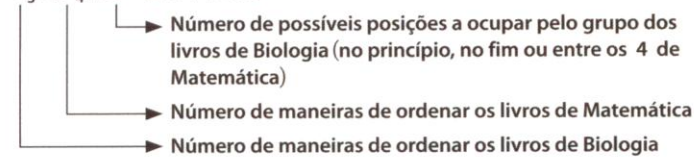
- 4** O João vai colocar na sua estante sete livros diferentes, sendo quatro de Matemática e três de Biologia. Supondo que os livros são colocados uns ao lado dos outros, de forma aleatória, qual é a probabilidade de os livros de Biologia ficarem juntos? (Apresente o resultado na forma de fração irredutível.)

Resolução

Número de casos possíveis: $P_7 = 7!$

Número de casos favoráveis:

$$P_3 \times P_4 \times 5 = 3! \times 4! \times 5$$



$$P = \frac{3! \times 4! \times 5}{7!} = \frac{720}{5040} = \frac{1}{7}$$

- 5** O João acabou de receber um cartão multibanco novo cujo código, gerado ao acaso, é composto por 4 algarismos. O código do cartão anterior do João era 1015. Qual é a probabilidade de o novo código ser constituído exatamente pelos mesmos algarismos (dois algarismos 1, um algarismo 0 e um algarismo 5)?
(A) 0,0002 (B) 0,0024 (C) 0,0012 (D) 0,0001

Resolução

• Número de casos possíveis:

1.º 2.º 3.º 4.º ← Algarismos

10 10 10 10 ← Como os algarismos se podem repetir há 10 hipóteses para cada um

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$$

• Número de casos favoráveis:

Há 4C_2 possibilidades de escolha das posições dos algarismos 1 entre os quatro lugares possíveis.

Os dois algarismos diferentes podem ocupar os restantes dois lugares de $2! = 2$ formas diferentes.

Há, portanto, ${}^4C_2 \times 2 = 12$ casos possíveis.

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{12}{10^4} = 0,0012$.

Resposta: (C)

Questões propostas

- 4** Cinco amigos vão ao cinema e sentam-se ao acaso em cinco lugares seguidos. Dois dos amigos são namorados. Qual é a probabilidade de estes ficarem em lugares consecutivos? (Apresente o resultado na forma de fração irredutível.)

- 5** Num jogo foram distribuídas cinco cartas a cada jogador. A Joana recebeu três reis e dois ternos. A Joana vai, ao acaso, colocar as cinco cartas lado a lado. Qual é a probabilidade de os três reis não ficarem em lugares consecutivos?

- 6** Três casais, os Sousa, os Silva e os Santos, vão ao cinema e sentam-se ao acaso em seis lugares consecutivos. Qual é a probabilidade de os membros de cada casal ficarem juntos?

(A) $\frac{3}{2! \times 2! \times 2!}$ (B) $\frac{(2!)^3 \times 3}{6!}$

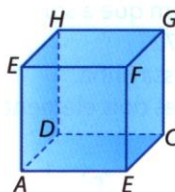
(C) $\frac{(2!)^3 \times 3!}{6!}$ (D) $\frac{1}{(2!)^3 \times 3!}$

- 7** Uma instituição financeira usa um algoritmo para atribuir aleatoriamente o código dos cartões multibanco que emite. Cada código é constituído por uma sequência de quatro algarismos. Qual é a probabilidade de que o próximo código gerado tenha exatamente dois zeros e seja uma capicua?
(A) 0,0018 (B) 0,002
(C) 0,0162 (D) 0,0081

Questões resolvidas

- 6 Escolhem-se aleatoriamente três vértices distintos de um cubo. Qual é a probabilidade de o plano definido por esses três vértices conter uma face do cubo?

(A) $\frac{3}{7}$ (B) $\frac{3}{28}$
(C) $\frac{1}{14}$ (D) $\frac{1}{56}$



Resolução

• Número de casos possíveis: ${}^8C_3 = 56$

• Número de casos favoráveis:

$$6 \times {}^4C_3 = 6 \times 4 = 24$$

Os quatro vértices da mesma face definem o mesmo plano

Número de faces do cubo

Portanto, a probabilidade pedida é $P = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$.

Resposta: (A)

- 7 Um saco contém 15 cartões, numerados de 1 a 15. Ao acaso, retiram-se simultaneamente cinco cartões do saco. Qual é a probabilidade de o menor dos números inscritos nesses cinco cartões ser 9?

(A) $\frac{120}{{}^{15}C_5}$ (B) $\frac{70}{{}^{15}C_5}$ (C) $\frac{35}{{}^{15}C_5}$ (D) $\frac{15}{{}^{15}C_5}$

Resolução

• Número de casos possíveis: ${}^{15}C_5$

• Número de casos favoráveis: Para que o menor dos cinco números seja 9 é necessário que, para além do cartão com o número 9, saiam mais quatro cartões com número superior a 9. Como no saco há seis cartões com número superior a 9, o número de casos favoráveis é ${}^6C_4 = 15$.

A probabilidade pedida é $\frac{15}{{}^{15}C_5}$.

Resposta: (D)

- 8 Num saco estão 20 bolas de igual tamanho, numeradas de 1 a 20. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, quatro bolas do saco. Qual a probabilidade de saírem quatro bolas numeradas com números consecutivos?

(A) $\frac{17}{{}^{20}C_4}$ (B) $\frac{5}{{}^{20}C_4}$ (C) $\frac{{}^{20}C_4}{20!}$ (D) $\frac{4! \times 16!}{20!}$

Resolução

• Número de casos possíveis: ${}^{20}C_4$

• Número de casos favoráveis: 17

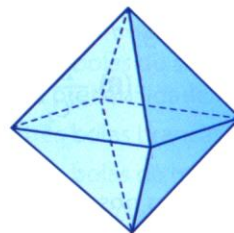
(os 17 subconjuntos $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$, ..., $\{17, 18, 19, 20\}$)

A probabilidade pedida é $\frac{17}{{}^{20}C_4}$.

Resposta: (A)

Questões propostas

- 8 Escolhem-se aleatoriamente três vértices distintos de um octaedro regular.



Qual é a probabilidade de os três pontos escolhidos serem vértices de um triângulo retângulo?

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{5}$

- 9 Um saco tem 12 bolas numeradas de 1 a 12.

Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas dessas 12 bolas e multiplicam-se os respetivos números. Qual é a probabilidade de o produto obtido ser igual a 12?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{22}$ (C) $\frac{1}{11}$ (D) $\frac{1}{24}$

- 10 Um saco tem 12 bolas numeradas de 1 a 12.

Retiram-se, sucessivamente e ao acaso, duas dessas 12 bolas e multiplicam-se os respetivos números.

A primeira bola extraída é reposta no saco antes de se extrair a segunda.

Qual é a probabilidade de o produto obtido ser igual a 12?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{22}$ (C) $\frac{1}{11}$ (D) $\frac{1}{24}$

- 11 Um saco tem 25 bolas numeradas de 1 a 25.

Ao acaso retiram-se simultaneamente três bolas do saco e anotam-se os respetivos números.

Qual é a probabilidade de obter três números consecutivos?

(A) $\frac{25}{{}^{25}C_3}$ (B) $\frac{23}{{}^{25}C_3}$
(C) $\frac{23}{{}^{25}A_3}$ (D) $\frac{{}^{25}C_3}{25A_3}$

Questões resolvidas

- 9 Considere a linha do Triângulo de Pascal em que a soma dos quatro menores elementos é igual a 72. Escolhem-se, ao acaso, dois elementos dessa linha. Qual é a probabilidade de o produto destes dois elementos ser inferior a 35?

(A) $\frac{2}{35C_2}$ (B) $\frac{2}{36C_2}$ (C) $\frac{1}{35C_2}$ (D) $\frac{1}{36C_2}$

Resolução

- Número de casos possíveis: ${}^{36}C_2$
Se a soma dos quatro menores elementos é igual a 72, a soma dos dois primeiros dessa linha é igual a $72 : 2 = 36$. Portanto, o segundo elemento da linha é igual a $36 - 1 = 35$. A linha correspondente a $n = 35$ tem 36 elementos entre os quais são escolhidos dois.
- Número de casos favoráveis: 1
Dos 36 elementos desta linha apenas dois (o primeiro e o último) são inferiores a 35. Portanto, na escolha de dois elementos da linha, há apenas um caso em que o seu produto é inferior a 35.
A probabilidade pedida é $\frac{1}{36C_2}$.

Resposta: (D)

- 10 Uma turma do 12.º ano tem 24 alunos. Escolhendo ao acaso um aluno da turma, a probabilidade de ser uma rapariga é $\frac{3}{8}$. Quantos rapazes tem a turma?

Resolução

Seja n o número de rapazes da turma. Então o número de raparigas da turma é igual a $24 - n$. Logo $\frac{24 - n}{n} = \frac{3}{8}$.
 $\frac{24 - n}{24} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow 24 - n = 9 \Leftrightarrow n = 24 - 9 \Leftrightarrow n = 15$
A turma tem 15 rapazes.

- 11 Num saco estão três bolas amarelas, quatro bolas brancas e oito bolas pretas, indistinguíveis ao tato.

11.1. Extraem-se, ao acaso, quatro bolas do saco. Qual é a probabilidade de:

- a) entre as bolas extraídas haver pelo menos duas bolas amarelas? Apresente o resultado na forma de fração irredutível;
b) as bolas extraídas não serem todas da mesma cor? Apresente o resultado na forma de percentagem, com uma casa decimal.

11.2. Admita agora que as 15 bolas são extraídas sucessivamente e colocadas em fila, umas ao lado das outras. Qual é a probabilidade de as bolas amarelas ficarem seguidas? Apresente o resultado na forma de dízima com aproximação às milésimas.

Questões propostas

- 12 O produto dos quatro menores elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 144.

Escolhem-se ao acaso dois elementos dessa linha. Qual a probabilidade de o produto desses dois elementos ser igual a 12?

(A) $\frac{2}{39}$ (B) $\frac{1}{78}$ (C) $\frac{1}{39}$ (D) $\frac{2}{33}$

- 13 Uma linha do Triângulo de Pascal tem n elementos. Escolhe-se ao acaso um elemento dessa linha.

Qual o valor de n , sabendo que a probabilidade de esse elemento ser superior ao segundo elemento dessa linha é igual a $\frac{6}{7}$?

(A) 6 (B) 7 (C) 27 (D) 28

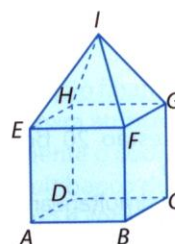
- 14 Dentro de um saco estão 36 bolas brancas e algumas bolas pretas.

Escolhendo ao acaso uma bola desse saco, a probabilidade de ela ser preta é $\frac{1}{3}$.

Quantas bolas pretas estão no saco?

(A) 12 (B) 18 (C) 6 (D) 24

- 15 Na figura está representado um sólido formado pelo cubo $[ABCDEFGH]$ e pela pirâmide $[EFGHI]$.



Escolhem-se, ao acaso, cinco dos nove vértices do sólido.

Qual é a probabilidade de pelo menos quatro dos vértices escolhidos serem da pirâmide?

Questões resolvidas

Resolução

11.1. Amarelas	Outras	Total
3	12	15
2	2	4
3	1	4

a) Número de casos possíveis:

É o número de maneiras de no conjunto das 15 bolas escolher-se um subconjunto de quatro bolas, que é dado por:

$${}^{15}C_4 = 1365$$

Número de casos favoráveis:

$${}^3C_2 {}^{12}C_2 + {}^3C_3 {}^{12}C_1 = 210$$

→ Número de maneiras de escolher três bolas amarelas e uma de outra cor.

→ Número de maneiras de escolher duas bolas amarelas e duas de outra cor.

$$P = \frac{210}{1365} = \frac{2}{13}$$

b) Número de casos possíveis: ${}^{15}C_4 = 1365$

Número de casos favoráveis:

$${}^{15}C_4 - {}^4C_4 - {}^8C_4 = 1294$$

→ Número de maneiras de escolher quatro bolas pretas.

→ Número de maneiras de escolher quatro bolas brancas.

→ Número de casos possíveis.

$$P = \frac{1294}{1365} \approx 94,8\%$$

11.2. Amarelas	Outras	Total
3	12	15

Número de casos possíveis: 15!

Número de casos favoráveis:

$$3! \times 12! \times 13$$

→ Número de maneiras de escolher lugar para o grupo das três bolas amarelas (no início da fila, no fim ou entre as restantes 12 bolas).

→ Número de maneiras de ordenar as 12 bolas de outras cores.

→ Número de maneiras de ordenar as três bolas amarelas.

$$P = \frac{3! \times 12! \times 13}{15!} = \frac{1}{35} \approx 0,029$$

Outro processo

Número de casos possíveis: ${}^{15}C_3 = 455$

(Número de maneiras de escolher a posição das três bolas amarelas na fila de 15 bolas.)

Número de casos favoráveis: 13

(Número de maneiras de escolher lugar para o grupo das três bolas amarelas.)

$$P = \frac{13}{455} = \frac{1}{35} \approx 0,029$$

Questões propostas

16 Um saco tem dez bolas, sendo cinco brancas, três pretas e duas amarelas. As bolas apenas se distinguem pela cor.

Extraem-se simultaneamente e ao acaso três bolas do saco.

Qual é a probabilidade de obter:

16.1. três bolas brancas;

16.2. três bolas da mesma cor;

16.3. tantas bolas brancas como amarelas;

16.4. pelo menos duas bolas pretas?

17 A Alice comprou oito bolbos de gladiolos vermelhos e sete bolbos de gladiolos amarelos. Os quinze bolbos, que são indistinguíveis, foram embalados na mesma caixa. Posteriormente, plantou os bolbos, numa fila e ao acaso, no jardim de sua casa.

Passados três meses, ao observar o belo canteiro com uma fila de oito gladiolos vermelhos e sete amarelos, a Alice observou:

– Que engraçado! Foram plantados ao acaso e na fila não há dois gladiolos amarelos seguidos.

– Mais engraçado, por ser menos provável, seria não haver gladiolos vermelhos seguidos – retorquiu o pai da Alice.

Mostra que o pai da Alice tem razão, calculando as probabilidades dos acontecimentos referidos.

18 Um baralho de cartas completo tem 52 cartas, 13 de cada naipe (paus, espadas, ouros e copas).

No jogo do *King*, cada jogador recebe um conjunto de 13 cartas de um baralho completo (a este conjunto de cartas chama-se “mão”). Qual é a probabilidade (na forma de percentagem com aproximação às décimas) de um jogador receber uma “mão” com:

18.1. sete, e só sete, cartas do naipe de paus;

18.2. sete, e só sete, cartas do mesmo naipe;

18.3. os quatro ases;

18.4. pelo menos uma carta de paus?

Questões resolvidas

- 12** Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas repartidas por 4 naipes (*Espadas, Paus, Ouros e Copas*). Em cada naipe há 13 cartas: um Ás, três figuras (*Rei, Dama e Valete*) e nove cartas numeradas de *Dois a Dez*.

12.1. Utilizando apenas o naipe de espadas, quantas sequências diferentes de 13 cartas é possível formar de modo que:

- as nove cartas numeradas ficam dispostas por ordem crescente de numeração;
- não fiquem duas figuras uma ao lado da outra?

12.2. Retirando ao acaso, sucessivamente e sem reposição, cinco cartas de um baralho completo, qual é a probabilidade de obter pelo menos um Ás?

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

Resolução

12.1. Só existe uma escolha possível para ordenar as cartas numeradas. Entre as nove cartas numeradas, no início ou no fim, existem 10 possibilidades de escolha de lugar para o Ás. Para dispor as figuras temos de escolher ordenadamente três lugares entre os 11 determinados pelas restantes dez cartas (no início, no fim ou nos nove lugares entre as 10 cartas). Esta escolha pode ser feita de ${}^{11}A_3$ maneiras diferentes.

Portanto, o número pedido é $1 \times 10 \times {}^{11}A_3 = 9900$.

12.2.

- Número de casos possíveis: ${}^{52}C_5$
(nas 52 cartas do baralho é escolhido um subconjunto de cinco)

- Número de casos favoráveis:

São casos favoráveis todos os casos possíveis exceto aqueles em que no conjunto das cinco cartas retiradas não há qualquer Ás.

Portanto, o número de casos favoráveis é dado por:

$${}^{52}C_5 - {}^4C_0 \times {}^{48}C_5 = {}^{52}C_5 - {}^{48}C_5$$

(${}^4C_0 \times {}^{48}C_5$ é o número de maneiras de escolher cinco cartas entre as 48 que não são ases.)

$$\text{A probabilidade pedida é } \frac{{}^{52}C_5 - {}^{48}C_5}{{}^{52}C_5} \approx 0,34.$$

- 13** O João esqueceu-se do código de segurança do seu telemóvel. Sabe apenas que é formado por quatro algarismos e que do mesmo faz parte o algarismo 1 seguido do algarismo 8.

A sequência 18 aparece uma única vez como, por exemplo, 0188.

Se o João escrever o código ao acaso qual é a probabilidade de acertar?

(A) $\frac{298}{10^4}$

(B) $\frac{300}{10^4}$

(C) $\frac{1}{300}$

(D) $\frac{1}{298}$

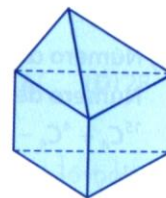
Questões propostas

- 19** O professor de Matemática distribuiu aos seus alunos uma folha com 50 exercícios de probabilidades para que estes fizessem revisões para o teste. Sabe-se que o Rui resolveu 40 desses problemas e que o professor escolheu quatro, ao acaso, para incluir na prova. Sabendo que o Rui foi realizar o teste, determine, na forma de percentagem com aproximação às décimas, a probabilidade de:

19.1. saírem quatro dos exercícios que já tinha resolvido;

19.2. sair pelo menos um dos exercícios que já tinha resolvido.

- 20** Na figura está representado um sólido com sete faces.



Dispomos de cinco cores (azul, bege, dourado, vermelho e preto) para pintar o sólido.

Admita que cada face foi colorida de uma só cor escolhida ao caso.

Determine a probabilidade de:

20.1. três e só três faces ficarem pintadas de vermelho;

20.2. três e só três faces ficarem pintadas da mesma cor e as restantes quatro faces ficarem pintadas de cores diferentes;

20.3. as três faces triangulares ficarem pintadas de azul ou bege e as quatro faces retangulares ficarem pintadas de dourado, vermelho ou preto.

(Apresente os resultados na forma de percentagem com aproximação às décimas.)

- 21** O código de um cofre é constituído por uma sequência de seis algarismos.

O João sabe que desta sequência fazem parte os algarismos 1, 2 e 3, por esta ordem, uma única vez (por exemplo, 012312).

Escolhendo, ao acaso, um destes códigos, qual é a probabilidade de abrir o cofre?

Questões resolvidas

Resolução

- Número de casos possíveis:

A sequência 18 pode aparecer no início, no meio ou no fim do código:

1.º caso	2.º caso	3.º caso
18 _ _	_ 18 _	_ _ 18
10 10	10 10	10 10

Temos, portanto, $10^2 \times 3 = 300$ possíveis códigos em que aparece a sequência 18.

Dado que a sequência 18 só figura uma vez temos de excluir a solução 1818 que aparece nos 1.º e 3.º casos.

Logo, o número de casos possíveis é $300 - 2 = 298$.

- Número de casos favoráveis: 1

A probabilidade pedida é $\frac{1}{298}$.

- 14** O código de acesso a um portal na Internet é uma sequência com três letras e três algarismos (por exemplo, 0X8Y8X).

Qual é a probabilidade de um destes códigos, escolhido ao acaso, ter dois 7 e as letras diferentes colocadas por ordem alfabética (por exemplo, 7CE57X).

Considere o alfabeto com 26 letras.

Resolução

Número de casos possíveis:

$${}^6C_3 \times {}^{26}A_3 \times {}^{10}A_3 = {}^6C_3 \times 26^3 \times 10^3$$

- Número de sequências de três algarismos nos três lugares restantes.
- Número de sequências de três letras nos três lugares escolhidos.
- Número de possibilidades de escolha dos três lugares para as letras entre os seis possíveis.

Número de casos favoráveis:

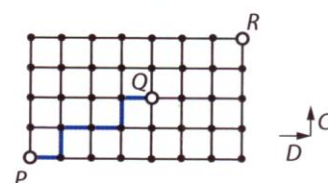
$${}^6C_3 \times {}^{26}C_3 \times {}^3C_2 \times 9$$

- Número de maneiras de escolher o algarismo diferente de 7.
- Número de possibilidades para colocar os 7
- Número de possibilidades de escolha das três letras
- Número de possibilidades de escolha dos três lugares para as letras

$$P = \frac{{}^6C_3 \times {}^{26}C_3 \times {}^3C_2 \times 9}{{}^6C_3 \times 26^3 \times 10^3} \approx 0,4\%$$

Questões propostas

- 22** Considera a figura.



Para definir um trajeto entre dois pontos da figura apenas são permitidos dois movimentos: para a direita (D) ou para cima (C).

Por exemplo, o trajeto assinalado entre os pontos P e Q pode ser definido pela sequência DCDDCD.

22.1. Justifique que existem 6C_2 trajetos entre P e Q.

22.2. Escolhido, ao acaso, um trajeto entre P e R, qual é a probabilidade de passar por Q?

- 23** O número de série de um produto é uma sequência de quatro letras e três algarismos, como, por exemplo, A0P75ZA.

Escolhido um destes códigos ao acaso, qual é a probabilidade, na forma de percentagem arredondada às décimas, de ter os algarismos diferentes por ordem crescente e as letras ocupando lugares seguidos (por exemplo, 0APZA57)?

Considere o alfabeto com 26 letras.

- 24** Seja A o conjunto de todos os números de quatro algarismos diferentes, maiores de 4000, que se podem formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

24.1. Mostre que A tem 120 elementos.

24.2. Escolhem-se, ao acaso, três elementos de A.

- Qual é a probabilidade de pelo menos dois desses elementos serem múltiplos de 5?
- Qual é a probabilidade de esses três números terem os algarismos dispostos por ordem decrescente?

(Apresente os resultados na forma de percentagem com aproximação às décimas.)

Itens de seleção

- 25** Uma certa linha do Triângulo de Pascal é constituída por todos os números da forma nC_p , $n \in \mathbb{N}$.

Escolhendo ao acaso um elemento dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser igual a n ?

- (A) $\frac{2}{n}$ (B) $\frac{1}{n}$
(C) $\frac{1}{n+1}$ (D) $\frac{2}{n+1}$

- 26** Colocaram-se numa urna 10 bolas indistinguíveis ao tato, sendo cinco brancas e cinco pretas. As bolas brancas são exatamente iguais e as bolas pretas são numeradas de 1 a 5. Ao acaso tirou-se uma bola e verificou-se que a sua cor era branca.

Essa bola não foi reposta na urna.

Tirando, ao acaso, outra bola da urna, a probabilidade de sair uma bola com um número ímpar é:

- (A) $\frac{2}{9}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

- 27** De um baralho de cartas completo (52 cartas, 13 de cada naipe) retiram-se 13 cartas, ao acaso.

Qual é a probabilidade de obter sete cartas do mesmo naipe?

- (A) $\frac{{}^{13}C_7 \times {}^{39}C_6}{{}^{52}C_{13}}$ (B) $\frac{4 \times {}^{13}C_7 \times {}^{39}C_6}{{}^{52}C_{13}}$
(C) $\frac{{}^{13}C_7 \times {}^{45}C_6}{{}^{52}C_{13}}$ (D) $\frac{4 \times {}^{13}C_7 \times {}^{45}C_6}{{}^{52}C_{13}}$

- 28** Um camião foi carregado com 40 caixas iguais. Em 25 das caixas foram embalados produtos têxteis cujo transporte estava devidamente autorizado. As restantes caixas continham tabaco de contrabando.

Numa operação policial foram selecionadas quatro caixas, ao acaso, para verificação do conteúdo. Se alguma destas caixas contiver contrabando, o veículo será apreendido.

Qual é a probabilidade de o camião prosseguir a sua viagem?

- (A) $1 - \frac{{}^{15}C_4}{{}^{40}C_4}$ (B) $\frac{15}{40}$
(C) $\frac{{}^{25}C_4}{{}^{40}C_4}$ (D) $\frac{25}{40}$

- 29** O João arruma, ao acaso, na prateleira de uma estante, 13 livros encostados uns aos outros. Entre os 13 livros há três de Matemática. Qual é a probabilidade de os livros de Matemática ocuparem, juntos, a posição central da fila, isto é, com tantos livros antes como depois?

- (A) $\frac{{}^{10}A_3}{13!}$ (B) $\frac{3! \times 5! \times 2}{13!}$
(C) $\frac{3! \times (5!)^2}{13!}$ (D) $\frac{3! \times 10!}{13!}$

- 30** Lançam-se simultaneamente dois dados com as faces numeradas de 1 a 6 e multiplicam-se os dois números saídos.

A probabilidade do acontecimento "o produto dos números saídos é 2" é:

- (A) 0 (B) $\frac{1}{36}$ (C) $\frac{1}{18}$ (D) $\frac{21}{36}$

- 31** Escolhem-se ao acaso dois vértices de um cubo. Qual é a probabilidade de os dois vértices escolhidos serem extremos de uma diagonal de uma face do cubo?

- (A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{1}{14}$
(C) $\frac{3}{14}$ (D) $\frac{3}{7}$

- 32** Numa turma com 10 rapazes e 12 raparigas vão ser escolhidas quatro raparigas para participarem numa peça de teatro. Qual é a probabilidade de a Ana e a Teresa, duas irmãs alunas dessa turma, estarem entre as escolhidas?

- (A) $\frac{{}^{10}C_2}{{}^{12}C_4}$ (B) $\frac{{}^{12}C_2}{{}^{12}C_4}$
(C) $\frac{{}^4C_2 \times {}^8C_2}{{}^{12}C_4}$ (D) $\frac{{}^{10}C_4}{{}^{12}C_4}$

- 33** Temos dois dados equilibrados. Um dado cúbico com as faces numeradas de 0 a 5 e um dado tetraédrico com as faces numeradas de 0 a 3. Lançam-se os dois dados. Considere-se que a face que sai é a face que fica voltada para baixo. Qual é a probabilidade de o produto dos números obtidos nos dois dados ser igual a 0?

- (A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{24}$

- 34** Um saco contém nove cartões, indistinguíveis ao tato, com os números 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19.

Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, três cartões e multiplicam-se os respetivos números. Qual é a probabilidade de o produto obtido ser divisor de 210?

- (A) $\frac{5}{84}$ (B) $\frac{5}{42}$ (C) $\frac{1}{21}$ (D) $\frac{3}{84}$

- 35** O João tem uma caixa com 6 lápis de cores diferentes.

Para pintar o desenho de uma bandeira com duas faixas verticais, escolheu um lápis, ao acaso, e pintou uma das faixas.



Depois de repor na caixa o lápis usado, voltou a escolher uma cor, novamente ao acaso, para pintar a outra faixa da bandeira.

Qual é a probabilidade de a bandeira ficar pintada de uma só cor?

- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{5}$
(C) $\frac{1}{15}$ (D) $\frac{1}{6}$

Itens de construção

- 36** Para pintar um dado cúbico com as faces numeradas (com pintas) de 1 a 6, estão disponíveis dez cores, das quais fazem parte o branco e o amarelo.



Cada face é pintada de uma só cor escolhida, ao acaso, entre as nove cores diferentes do branco. As pintas de cada face são pintadas de branco.

36.1. Não se repetindo as cores, qual é a probabilidade de uma (e apenas uma) das faces ficar pintada de amarelo?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

36.2. Se for possível repetir as cores, qual é a probabilidade de, no final, ficar uma face de cada cor?

Apresente o resultado na forma de percentagem com aproximação às décimas.

- 37** Um saco contém seis cartões, indistinguíveis ao tato, com os números 0, 0, 2, 2, 3, 3.

Retiram-se, sucessivamente e ao acaso, os seis cartões e alinham-se da esquerda para a direita, pela ordem de saída, de maneira a formarem um número como, por exemplo,

3 2 2 0 3 0

Qual é a probabilidade de obter um número maior do que 20 000?

- 38** Um exame de Matemática A tem oito itens de seleção (escolha múltipla). Em cada item são indicadas quatro opções de resposta (A, B, C ou D) das quais só uma está correta.

A sequência das oito respostas corretas às oito perguntas do exame é CBABDAAD.

O Alex, que não se preparou para o exame, respondeu ao acaso aos oito itens tendo escolhido cinco opções A, duas opções B e uma opção C.

Qual é a probabilidade de o Alex:

38.1. ter respondido corretamente a sete perguntas;

38.2. ter respondido corretamente a seis perguntas;

38.3. ter errado todas as respostas?

- 39** A Joana foi passar férias a Londres. Certo dia comprou três postais para enviar às três melhores amigas: a Ana, a Beatriz e a Carla.

A Joana é muito distraída pelo que, depois de escrever os postais com textos personalizados para cada uma das amigas, introduziu-os, ao acaso, em envelopes já endereçados e colocou-os no correio.

Qual é a probabilidade de:

39.1. as três amigas receberem os postais que lhes foram destinados;

39.2. apenas uma das amigas receber o seu postal;

39.3. nenhuma das amigas receber o postal certo?

- 40** Na figura está representado um hexágono regular [ABCDEF].

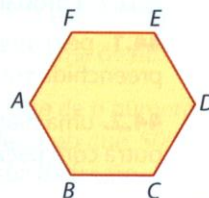
Escolhem-se, ao acaso, dois vértices do hexágono.

Determine a probabilidade de os vértices escolhidos:

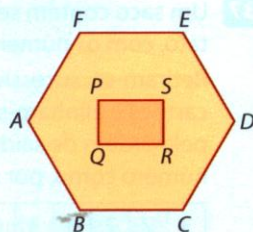
40.1. serem extremos de um lado do hexágono;

40.2. serem extremos de uma diagonal do hexágono;

40.3. definirem uma reta que passe pelo centro da circunferência circunscrita ao hexágono.



- 41** Na figura estão representados um hexágono $[ABCDEF]$ e um retângulo $[PQRS]$.



Sabe-se que os vértices do retângulo são interiores ao hexágono e dos 10 vértices não existem três colineares.

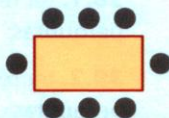
Escolhem-se três dos 10 pontos ao acaso.

Qual é a probabilidade de os três pontos escolhidos serem vértices de um triângulo:

41.1. que tenha um, e um só, lado comum com o retângulo $[PQRS]$;

41.2. com pelo menos um vértice em cada um dos polígonos?

- 42** Quatro homens e quatro mulheres entram num restaurante para jantar e sentam-se ao acaso numa mesa retangular. A mesa tem três lugares em cada um dos lados de maior dimensão e um lugar em cada um dos outros lados, como esquematizado na figura.



Determine a probabilidade de:

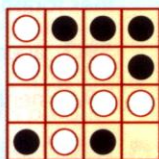
42.1. nenhum homem ficar com uma mulher em lugar contíguo;

42.2. cada mulher ficar à frente de um homem.

- 43** Dentro de um saco temos 16 bolas brancas e algumas bolas pretas, indistinguíveis ao tato. Na extração simultânea e ao acaso de duas dessas bolas, a probabilidade de saírem bolas de cores diferentes é 48%.

Quantas bolas pretas estão no saco?

- 44** Num tabuleiro quadrado, dividido em 16 casas iguais, dispuseram-se, ao acaso, oito peças brancas e seis peças pretas, não ficando mais do que uma peça em cada casa. As peças só se distinguem pela cor.



Qual é a probabilidade de:

44.1. pelo menos uma das diagonais ficar preenchida com peças pretas;

44.2. uma diagonal ficar com peças brancas e outra com peças pretas?

- 45** Escolhem-se, acaso, três vértices de um hexágono regular. Determine a probabilidade de o triângulo definido por esses três pontos:

45.1. ser equilátero;

45.2. ter dois lados comuns com o hexágono.

- 46** Um baralho de cartas completo é dividido em dois grupos: um com os naipes de *ouros* e *copas* (cartas vermelhas) e o outro com os naipes de *espadas* e *paus* (cartas pretas). Cada naipe tem 13 cartas.

Retiram-se, ao acaso e sem reposição, duas cartas de cada grupo.

Qual é a probabilidade de obter uma carta de cada naipe?

Apresente o resultado na forma de percentagem com aproximação às unidades.

- 47** O código de um cartão multibanco é uma sequência de quatro algarismos como, por exemplo, 0039.

47.1. Quantos códigos diferentes existem com um e um só algarismo par?

47.2. O João acabou de receber do seu banco um novo cartão multibanco. Admitindo que o código de qualquer cartão multibanco é atribuído ao acaso, qual é a probabilidade de o código desse cartão ter dois, e só dois, algarismos iguais a 0?

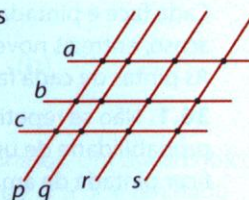
Apresente o resultado na forma de dízima.

- 48** Uma turma do 12.º ano tem 25 alunos: 15 raparigas e 10 rapazes. O delegado de turma é uma rapariga e o subdelegado é um rapaz. Pretende-se constituir uma comissão para organizar um passeio. A comissão deve ser formada por cinco raparigas e três rapazes. Acordou-se que o delegado e o subdelegado fazem parte da comissão.

48.1. Quantas comissões diferentes se podem constituir?

48.2. Admita que os oito membros da comissão, depois de constituída, vão posar para uma fotografia, colocando-se uns ao lado dos outros. Supondo que eles se colocam ao acaso, qual é a probabilidade de não ficarem dois rapazes seguidos?

- 49** Considere dois conjuntos de retas: um com três retas, a , b e c , estritamente paralelas, e o outro com quatro retas, p , q , r e s , também estritamente paralelas.



Qualquer reta do primeiro conjunto intersecta qualquer reta do segundo conjunto num e num só ponto.

Escolhidos, ao acaso, quatro desses pontos de interseção, qual é a probabilidade de que definam um paralelogramo com os lados contidos em quatro das retas dadas?

- 50** Um saco contém quatro bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 4. Retira-se, ao acaso, uma bola do saco e regista-se o respetivo número. De seguida, repõe-se a bola no saco e repete-se a experiência mais duas vezes.

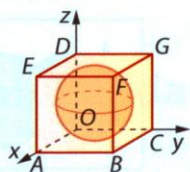
Qual é a probabilidade de o produto dos três números saídos ser igual a 8?

Uma resposta para este problema é $\frac{3! + 1}{4^3}$.

Numa pequena composição explique porquê.

Na sua composição deve fazer referência à Regra de Laplace, explicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis.

- 51** Na figura está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$ de aresta 2.



O vértice O coincide com a origem do referencial.

Os vértices A , C e D pertencem aos semieixos positivos Ox , Oy e Oz .

Está também representada uma superfície esférica tangente a todas as faces do cubo.

- 51.1.** Escolhidos ao acaso dois vértices do cubo, qual é a probabilidade de definirem uma reta:

- tangente à superfície esférica;
- que passa no ponto O ;
- contida no plano de equação $x + y + z = 2$;
- perpendicular ao eixo Oy ?

- 51.2.** Escolhem-se, ao acaso, três vértices do cubo. Qual é a probabilidade de:

- o triângulo cujo vértices são esses três pontos estar contido no plano de equação $x = y$;
- a interseção da superfície esférica com o plano definido por esses três pontos ser uma circunferência de raio igual a 1?

- 52** Considere um tabuleiro com nove casas numeradas de 1 a 9, como o que está representado na figura.

1	2	3
4	5	6
7	8	9



Dispomos de cinco peças brancas e duas peças pretas que apenas se distinguem pela cor. Colocam-se as peças no tabuleiro, ao acaso e não mais do que uma em cada casa.

Determine:

- 52.1.** a probabilidade de as peças pretas ocuparem casas ímpares;

- 52.2.** a probabilidade de as peças brancas ocuparem uma linha e uma coluna;

- 52.3.** a probabilidade de pelo menos uma das diagonais ficar ocupada com peças brancas.

- 53** Numa gaveta estão seis pares de meias, cada par de sua cor. As meias estão todas misturadas e são indistinguíveis ao tato.

Tirando da gaveta duas meias, sem ver e ao acaso, qual é a probabilidade de que sejam do mesmo par?

- 54** Num saco estão 12 bolas, sendo quatro brancas, quatro pretas e quatro vermelhas. As bolas apenas se distinguem pela cor.

- 54.1.** Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas dessas 12 bolas.

Qual é a probabilidade de as bolas serem da mesma cor?

- 54.2.** Extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, as 12 bolas do saco e colocam-se numa fila, encostadas umas às outras.

Determine:

- a probabilidade de as bolas da mesma cor ficarem seguidas;
- a probabilidade de as bolas vermelhas ficarem seguidas;
- a probabilidade de não ficarem bolas vermelhas seguidas;
- a probabilidade de as duas primeiras bolas da fila serem de cores diferentes.

- 55** Seja A o conjunto dos números de quatro algarismos. Escolhe-se ao acaso um elemento de A .

- 55.1.** Determine a probabilidade de o número escolhido ter exatamente dois algarismos iguais a 9. Apresente o resultado na forma de dízima.

- 55.2.** Determine a probabilidade de o número escolhido ser uma capicua maior do que 5000. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

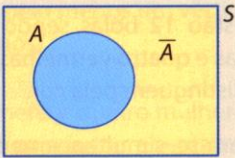
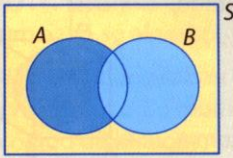
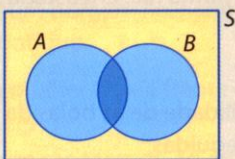
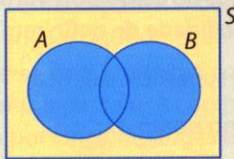
- 55.3.** Determine a probabilidade de o número escolhido ter os algarismos todos diferentes, ser ímpar, com o primeiro algarismo igual a 1 e a soma dos quatro algarismos ser par. Apresente o resultado na forma de dízima com aproximação às centésimas.

Tema 3

Axiomas e teoremas de probabilidade. Probabilidade condicionada. Acontecimentos independentes

1. Operações com conjuntos

Seja S o universo e A e B subconjuntos de S .

Complementar do conjunto A  O complementar de A, que se representa por $\bar{A}$, é o conjunto formado por todos os elementos de S que não pertencem a A. $\bar{A} = \{x \in S : x \notin A\}$	Complementar de B em A  O complementar de B com A, A exceto B ou A menos B, que se representa por $A \setminus B$, é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A e não pertencem a B. $A \setminus B = \{x \in S : x \in A \wedge x \notin B\}$
Interseção de dois conjuntos  A interseção de A com B, que se representa por $A \cap B$, é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a ambos os conjuntos. $A \cap B = \{x \in S : x \in A \wedge x \in B\}$	União de dois conjuntos  A união de A com B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos. $A \cup B = \{x \in S : x \in A \vee x \in B\}$

CPEN-MA12 e Porto Editora

2. Propriedades das operações com conjuntos

Seja S o universo e sejam A , B e C conjuntos nele contidos.

Propriedades	Interseção	União
Comutativa	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Elemento neutro	$A \cap S = A$	$A \cup \emptyset = A$
Elemento absorvente	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup S = S$
Distributivas	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	

3. Leis de De Morgan

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Exemplo 1 Leis de De Morgan

Mostre que: $\overline{A \cup (\overline{A \cup B})} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Resolução

$$\begin{aligned}\overline{A \cup (\overline{A \cup B})} &= \overline{A} \cup (A \cap \overline{B}) = \\ &= (\overline{A} \cup A) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = S \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \\ &= \overline{A} \cup \overline{B} \text{ (c.q.m.)}\end{aligned}$$

Verifica 1

Mostre que:

- 1.1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- 1.2. $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = \overline{A \oplus B}$

4. Axiomas de probabilidades

Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

A cada acontecimento $A \subset S$ faz-se corresponder um número real que se chama **probabilidade de A** e se representa por $P(A)$, tal que:

1. $P(A) \geq 0$, qualquer que seja o acontecimento A
2. $P(S) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, se $A \cap B = \emptyset$

5. Alguns teoremas sobre probabilidades

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(A) \in [0, 1]$
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
4. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ ou $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
7. Se $A \subseteq B$, $P(A) \leq P(B)$

Exemplo 2 Para demonstrar

Sejam S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória e A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Prove que:

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A}) + P(B) - P(A \cap B)$$

Resolução

$$\begin{aligned}P(\overline{A \cap B}) &= P(\overline{A \cup \overline{B}}) = && \text{(Leis de De Morgan)} \\ &= 1 - P(A \cup \overline{B}) = && \text{(Teorema 3)} \\ &= 1 - [P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B})] && \text{(Teorema 5)} \\ &= 1 - P(A) - P(\overline{B}) + P(A \cap \overline{B}) \\ &= P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(A \cap \overline{B}) && \text{(Teorema 3)}\end{aligned}$$

Verifica 2

Sejam S o conjunto de resultados finito associado a uma experiência aleatória e A e B subconjuntos de S .

Sabendo que A e B são equiprováveis e que:

$$P(A \cup B) = 2P(A)$$

prove que os acontecimentos A e B são incompatíveis.

Exemplo 3 Probabilidade da reunião

Seja E o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Tem-se que:

$$P(A) = 0,3 \text{ e } P(B) = 0,5$$

Qual dos números seguintes pode ser o valor de $P(A \cup B)$?

- (A) 0,1 (B) 0,4
(C) 0,6 (D) 0,9

Resolução

Atendendo a que:

$$P(A \cup B) \geq P(B), \forall A, B \subset E, \text{ tem-se que } P(A \cup B) \geq 0,5.$$

Por outro lado, como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \forall A, B \subset E$$

tem-se que:

$$P(A \cup B) = 0,3 + 0,5 - P(A \cap B)$$

Ora, como $P(A \cap B) \geq 0, \forall A, B \subset E$, podemos concluir que:

$$P(A \cup B) \leq 0,8$$

Atendendo a que $0,5 \leq P(A \cup B) \leq 0,8$, o único dos números apresentados que pode ser o valor de $P(A \cup B)$ é 0,6.

Resposta: (C)

Exemplo 4

Uma caixa contém quatro bolas brancas, numeradas de 1 a 4, e n bolas pretas, numeradas de 1 a n .

Retira-se, ao acaso, uma bola dessa caixa.

Sejam A e B os acontecimentos seguintes:

A : "Sair uma bola branca"; B : "Sai uma bola com número par"

$$\text{Sabe-se que } P(\overline{A} \cup \overline{B}) - P(A \cap B) = \frac{2}{3}.$$

Quantas bolas contém a caixa?

Resolução

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 - 2P(A \cap B) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2P(A \cap B) = 1 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2P(A \cap B) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Dado que o acontecimento $A \cap B$ é "Sair uma bola branca com número par", tem-se que $P(A \cap B) = \frac{2}{4+n}$, pois estão na caixa $4+n$ bolas entre as quais duas são brancas numeradas com número par.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{2}{4+n} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 12 = 4+n \Leftrightarrow n = 8$$

Logo, há 12 bolas na caixa, sendo quatro brancas e oito pretas.

Verifica 3

Seja S o conjunto de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos, contidos em S , nenhum deles impossível nem certo.

Sabe-se que $A \subset B$.

Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira.

- (A) $P(A) > P(B)$
(B) $P(A \cap B) = 0$
(C) $P(A \cup B) = 1$
(D) $P(\overline{A}) \geq P(\overline{B})$

Verifica 4

Na figura está representado um dado octaédrico não equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 4 (cada número aparece em duas faces opostas).



Lança-se o dado uma única vez e observa-se o número da face que fica voltada para cima.

Sejam A e B os acontecimentos seguintes:

A : "Sair número par"

B : "Sair número primo"

Sabendo que:

$$P(A) - P(\overline{B}) + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{5}{6}$$

determine a probabilidade de sair o número 1.

6. Probabilidade condicionada (ou probabilidade condicional)

Dos 100 alunos que frequentam o 10.º ano de uma escola, 50 têm Matemática, 25 têm Física e 15 têm Matemática e Física.

No diagrama de Venn ao lado está representada a situação.

$M = \{\text{alunos que têm Matemática}\}$

$F = \{\text{alunos que têm Física}\}$

$C = \{\text{alunos do 10.º ano da escola}\}$

Encontra-se, ao acaso, um dos 100 alunos.

Qual é a probabilidade de o aluno ter Matemática e Física?

Tem-se:

$$P(M \cap F) = \frac{15}{100}$$

Numa sala encontram-se os 25 alunos que têm Física; selecionando, ao acaso, um destes 25 alunos, qual a probabilidade de este ter também Matemática?

Ou seja, qual é a probabilidade de ele ter Matemática sabendo que tem Física?

Para responder à questão aplica-se a definição de probabilidade condicionada que se representa por $P(M|F)$.

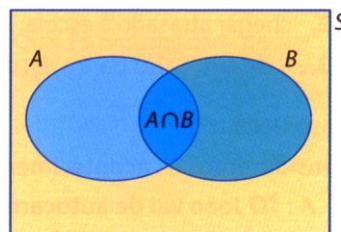
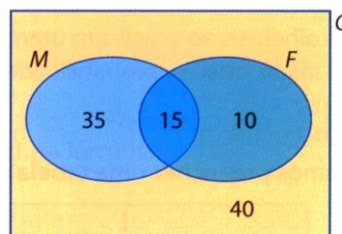
$$P(M|F) = \frac{15}{25} = \frac{\#(M \cap F)}{\#F} = \frac{\frac{\#(M \cap F)}{\#C}}{\frac{\#F}{\#C}} = \frac{P(M \cap F)}{P(F)}$$

De um modo geral, tem-se:

Dados dois acontecimentos A e B , sendo $P(B) \neq 0$, chama-se probabilidade de A , se B , e representa-se por $P(A|B)$, a probabilidade de A se realizar sabendo que B se realizou.

$P(A|B)$ é definida por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$



Probabilidade da interseção de dois acontecimentos

Da relação $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ conclui-se que:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

e

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

Exemplo 5

De acordo com a estatística de uma companhia de termas, a distribuição dos utentes por género e idade é a seguinte:

- 72% dos utentes são mulheres;
- a sexta parte das mulheres têm menos de 45 anos;
- 20% dos utentes são homens com 45 anos ou mais.

Escolheu-se, ao acaso, um utente destas termas. Sabendo que tem 80 anos de idade, qual é a probabilidade de ser mulher?

Resolução

Vamos preencher uma tabela de acordo com os dados do enunciado:

	Menos de 45 anos (A)	45 anos ou mais ($\bar{A}$)	
M	0,08	0,20	0,28
F	0,12	0,60	0,72
	0,20	0,80	1

- $\frac{1}{6} \times 0,72 = 0,12$
- $0,72 - 0,12 = 0,60$
- $1 - 0,72 = 0,28$
- $0,28 - 0,20 = 0,08$

Sendo F o acontecimento "O utente escolhido é do sexo feminino" e A o acontecimento "O utente escolhido tem menos de 45 anos", pretende-se determinar $P(F|\bar{A})$.

$$P(F|\bar{A}) = \frac{P(F \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,60}{0,80} = \frac{3}{4}$$

Exemplo 6 A viagem do João

O João utiliza, por vezes, o autocarro para ir de casa para a escola. Quando não vai de autocarro desloca-se no automóvel do pai.

Sabe-se que usa o autocarro 40% das vezes e que, quando usa este meio de transporte, a probabilidade de chegar atrasado é de 10%. Quando se desloca no carro do pai chega atrasado 20% das vezes.

Determine a probabilidade de o João, num dia útil escolhido ao acaso:

- 6.1. ir de autocarro para a escola e chegar atrasado;
- 6.2. chegar atrasado à escola;
- 6.3. ir de autocarro para a escola, sabendo que chegou atrasado.

Resolução

Consideremos os acontecimentos:

A : "O João vai de autocarro para a escola"

C : "O João vai de automóvel para a escola"

T : "O João chega atrasado à escola"

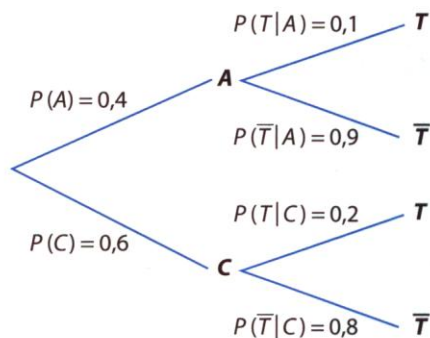
É dado que $P(A) = 0,4$, $P(T|A) = 0,1$ e $P(T|C) = 0,2$.

Partindo destes dados, vamos construir uma árvore de probabilidades.

$$\begin{aligned} 6.1. \quad P(A \cap T) &= P(A) \times P(T|A) \\ &= 0,4 \times 0,1 = 0,04 = 4\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6.2. \quad P(T) &= P(A \cap T) + P(C \cap T) \\ &= 0,04 + 0,6 \times 0,2 = 0,16 = 16\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6.3. \quad P(A|T) &= \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{0,04}{0,16} \\ &= 0,25 = 25\% \end{aligned}$$

**Verifica 5**

Uma escola do ensino básico é frequentada por alunos do 2.º e do 3.º ciclos. Relativamente aos alunos desta escola sabe-se que:

- 48% dos alunos da escola são rapazes;
- no 3.º ciclo, há tantos rapazes como raparigas;
- 30% dos alunos do 2.º ciclo são raparigas.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno desta escola.

Sabendo que o jovem escolhido é um rapaz, qual é a probabilidade de frequentar o 2.º ciclo?

Verifica 6

Considerando os dados do Exemplo 6 determine a probabilidade de o João ter ido de carro para a escola sabendo que foi pontual.



7. Acontecimentos independentes

Dois acontecimentos são independentes quando a realização de um deles não interfere na probabilidade de realização do outro.

Dois acontecimentos A e B são independentes se e só se:

$$P(A|B) = P(A)$$

Se A e B são independentes, então é possível substituir $P(A|B)$ por $P(A)$ na fórmula:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

e obtém-se: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Assim sendo, também se pode definir acontecimentos independentes do seguinte modo:

Dois acontecimentos A e B são independentes se e só se:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Exemplo 7 Os aquários

Têm-se dois aquários: A_1 e A_2 .



Dois peixes vermelhos
Três peixes amarelos



Três peixes vermelhos
Dois peixes amarelos

Tira-se, ao acaso, um peixe de cada aquário.

Qual é a probabilidade de serem ambos vermelhos?

Resolução

Seja $P(A_1)$ a probabilidade de sair peixe vermelho do aquário A_1 e $P(A_2)$ a probabilidade de sair peixe vermelho do aquário A_2 .

Como os acontecimentos são independentes:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

Verifica 7

Lança-se um dado com as faces numeradas de 1 a 6 e uma moeda de 1 euro.



Qual é a probabilidade de sair "euro" e não sair o número 5?

Questões resolvidas

- 8** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).
Sabe-se que $P(A) = 0,3$, $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,9$ e $P(A \cup B) = 0,6$.
Qual é o valor de $P(B)$?
- (A) 0,3 (B) 0,4 (C) 0,5 (D) 0,6

Resolução

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,9 &\Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) = 0,9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = 0,9 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,1 \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ 0,6 &= 0,3 + P(B) - 0,1 \Leftrightarrow P(B) = 0,4 \end{aligned}$$

Resposta: (B)

- 9** Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos incompatíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$).
Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?
- (A) $P(A \cup B) = 0$ (B) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
(C) $P(A \cup B) = 1$ (D) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Resolução

Se A e B são dois acontecimentos incompatíveis então $A \cap B = \emptyset$ pelo que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Resposta: (B)

- 10** Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).
Sabe-se que $P(A) = 0,6$.
Qual dos seguintes acontecimentos pode ter probabilidade superior a 0,6?
- (A) $A \cap B$ (B) $A \cap \overline{B}$ (C) $\overline{A \cup B}$ (D) $A \cup \overline{B}$

Resolução

$$\begin{aligned} &\bullet A \cap B \subseteq A. \text{ Logo, } P(A \cap B) \leq P(A) \text{ ou } P(A \cap B) \leq 0,6. \\ &\bullet A \cap \overline{B} \subseteq A. \text{ Logo } P(A \cap \overline{B}) \leq P(A) \text{ ou } P(A \cap \overline{B}) \leq 0,6. \\ &\bullet P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}); P(\overline{A}) = 1 - 0,6 = 0,4; \overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A} \\ &\text{Logo } P(\overline{A} \cap \overline{B}) \leq P(\overline{A}) \text{ ou } P(\overline{A \cup B}) \leq 0,4. \\ &\text{Logo, } P(\overline{A \cup B}) \leq 0,4. \\ &\bullet A \subseteq A \cup \overline{B}. \text{ Logo, } P(A) \leq P(A \cup \overline{B}) \text{ ou } P(A \cup \overline{B}) \geq 0,6. \end{aligned}$$

Resposta: (D)

Questões propostas

- 8** Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).
Sabe-se que:

- $P(B) = 0,6$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,2$
- $P(A \cap B) = 0,1$

Qual é o valor de $P(\overline{A})$?

- (A) 0,2 (B) 0,3 (C) 0,4 (D) 0,7

- 9** Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).
Sabe-se que $P(A) = 0,3$ e $P(B) = 0,7$.
Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

- (A) A e B são contrários porque $P(A) = 1 - P(B)$.
(B) A e B são incompatíveis porque se $P(A) + P(B) = 1$ então $P(A \cap B) = 0$.
(C) $P(A \cup B) + P(A \cap B) = 1$
(D) O acontecimento $A \cup B$ é certo.

- 10** Uma turma do 12.º ano tem 24 alunos sendo 14 raparigas e 10 rapazes.
Escolhem-se, ao acaso, dois alunos dessa turma.
Sejam A e B os acontecimentos:
 A : "Os alunos são do sexo feminino"
 B : "Os alunos são do sexo masculino"
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?
- (A) A e B são contrários.
(B) A e $\overline{B}$ são contrários.
(C) A e B são incompatíveis mas não contrários.
(D) $P(A) + P(B) \geq 0,5$

Questões resolvidas

- 11** Num grupo de 20 turistas há oito portugueses e 12 espanhóis. Neste grupo há 14 pessoas que falam inglês. Dos turistas que falam inglês seis são portugueses. Escolhe-se, ao acaso, um turista deste grupo. Qual é a probabilidade de este turista não falar inglês, sabendo que é espanhol?

Resolução

Trata-se de calcular a probabilidade de o turista escolhido não falar inglês, considerando que o espaço de resultados é o conjunto dos turistas espanhóis.

	Falam inglês	Não falam inglês	
Portugueses	6	$8 - 6 = 2$	8
Espanhóis	$14 - 6 = 8$	$6 - 2 = 4$	12
	14	$20 - 14 = 6$	20

Temos, assim, que:

- o número de casos possíveis é 12 (número de turistas espanhóis)
- o número de casos favoráveis é 4 (número de turistas espanhóis que não falam inglês)

A probabilidade pedida é $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

- 12** Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que A e B têm probabilidades iguais,

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,8 \text{ e } P(A \cup B) = 0,2.$$

Qual é a probabilidade de se realizar B sabendo que A se realiza?

- (A) 0,2 (B) 0,3 (C) 0,4 (D) 0,5

Resolução

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,8 &\Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) = 0,8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = 0,8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) = 0,2 &\Leftrightarrow 1 - P(\overline{A \cup B}) = 0,2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,8 \end{aligned}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Como $P(A) = P(B)$, temos:

$$\begin{aligned} 0,8 = P(A) + P(A) - 0,2 &\Leftrightarrow 2P(A) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A) = 0,5 \end{aligned}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Resposta: (C)

Questões propostas

- 11** Numa turma do 12.º ano, há alunos que frequentam a disciplina de Geometria Descritiva e os restantes, em alternativa, frequentam Psicologia.

Na tabela seguinte apresenta-se a forma como os alunos desta turma se distribuem, por sexo e quanto à opção referida.

	G. Descritiva	Psicologia
Raparigas	4	10
Rapazes	8	2

Escolhe ao acaso um dos alunos da turma.

Considere os acontecimentos:

A : "O aluno escolhido frequenta Psicologia"

B : "O aluno escolhido é do sexo feminino"

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

- (A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{5}{7}$

- 12** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que $P(A) = P(B) = 0,3$ e $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,2$.

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

- (A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{1}{3}$

- 13** Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que:

$$P(A) = \frac{3}{5}, P(B) = 0,3 \text{ e } P(B|A) = \frac{1}{3}.$$

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{7}{10}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{9}{10}$

Questões resolvidas

- 13** Num saco há apenas bolas brancas e bolas azuis. As bolas brancas são dez.

Ao acaso, extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

Considere os acontecimentos:

A : "A primeira bola extraída é azul"

B : "A segunda extraída é branca"

Sabe-se que $P(B|A) = \frac{5}{7}$.

Quantas bolas azuis havia inicialmente no saco?

Resolução

Bolas azuis: n

Outras bolas: 10

Total de bolas: $10 + n$

$P(B|A)$ designa a probabilidade de a segunda bola extraída ser branca sabendo que a primeira bola extraída é azul.

Logo,

$$P(B|A) = \frac{10}{9+n} \quad (\text{após ser retirada uma bola azul ficaram na caixa } 9+n \text{ bolas sendo } 10 \text{ brancas})$$

$$\text{Se } P(B|A) = \frac{10}{9+n} \text{ e } P(B|A) = \frac{5}{7}, \text{ temos } \frac{10}{9+n} = \frac{5}{7}.$$

$$\frac{10}{9+n} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow 70 = 45 + 5n \Leftrightarrow 5n = 25 \Leftrightarrow n = 5$$

Havia cinco bolas brancas.

- 14** Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A , B e C acontecimentos ($A \subset S$, $B \subset S$, $C \subset S$) com $P(C) \neq 0$.

Mostre que, se $A \cap B = \emptyset$, então:

$$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$$

Resolução

$$P(A \cup B|C) = \frac{P[(A \cup B) \cap C]}{P(C)} = \frac{P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]}{P(C)}$$

$$\begin{aligned} \text{Como } (A \cap C) \cap (B \cap C) &= A \cap C \cap B \cap C = \\ &= (A \cap B) \cap (C \cap C) = \emptyset \cap C = \emptyset, \end{aligned}$$

temos, pelo axioma 3,

$$P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = P(A \cap C) + P(B \cap C)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P(A \cup B|C) &= \frac{P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]}{P(C)} = \\ &= \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \\ &= P(A|C) + P(B|C) \end{aligned}$$

Questões propostas

- 14** Num saco temos bolas de duas cores: amarelas e pretas. As bolas pretas são quatro.

Ao acaso, retiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas desse saco.

Sejam A_1 e A_2 os acontecimentos:

A_1 : "A bola retirada em primeiro lugar é amarela"

A_2 : "A bola retirada em segundo lugar é amarela"

$$\text{Sabe-se que } P(A_2|A_1) = \frac{2}{3}.$$

Quantas bolas amarelas havia inicialmente no saco?

- 15** Um saco tem um certo número de bolas numeradas, indistinguíveis ao tato.

Relativamente à experiência que consiste em extrair, ao acaso, uma bola do saco, considere os acontecimentos seguintes:

A : "A bola extraída tem um número par"

B : "A bola extraída tem um número múltiplo de 3"

C : "A bola extraída tem um número múltiplo de 6"

$$\text{Sabe-se que } P(C) = \frac{1}{6} \text{ e } P(B|A) = \frac{2}{7}.$$

15.1. Determine $P(A)$.

15.2. Se no saco estão 36 bolas, quantas bolas têm um número ímpar?

- 16** Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$) com $P(B) \neq 0$.

Mostre que: $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$

- 17** Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos incompatíveis de probabilidade não nula ($A \subset S$ e $B \subset S$).

O valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$ é igual a:

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{P(A)}{P(B)}$ (D) $P(A)$

Questões resolvidas

- 15** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

15.1. Prove que:

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A) \times P(B|A)$$

15.2. Num determinado clube de futebol da primeira liga portuguesa, dois terços dos jogadores são estrangeiros e três quartos dos jogadores falam inglês. Dos jogadores que falam inglês, a terça parte são portugueses.

- a) Escolhendo, ao acaso, um jogador do clube, qual é a probabilidade de este ser português e falar inglês?
b) Escolhendo, ao acaso um jogador do clube, qual é a probabilidade de ser um estrangeiro que não fala inglês?

Se lhe for útil pode usar a igualdade apresentada em **15.1.** para resolver o problema.

Resolução:

$$\begin{aligned} \mathbf{15.1.} \quad P(\overline{A \cap B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = \\ &= P(\overline{A}) - P(B) + P(A) \times P(B|A) \end{aligned}$$

15.2. Sejam os acontecimentos:

A : "O jogador escolhido fala inglês"

B : "O jogador escolhido é português"

É dado que:

$$P(\overline{B}) = \frac{2}{3}, \quad P(A) = \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad P(B|A) = \frac{1}{3}.$$

- a) Pretende-se determinar $P(A \cap B)$.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

- b) Pretende-se determinar $P(\overline{A \cap B})$

1.º processo (fórmula de **15.1.**)

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A) \times P(B|A)$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{e}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(\overline{A \cap B}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{2}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

Questões propostas

- 18** Dos agregados familiares que vivem numa determinada localidade, sabe-se que:

- a terça parte vive em casa arrendada e os restantes vivem em casa própria;
- 80% têm pelo menos um automóvel;
- a quarta parte dos que têm pelo menos um automóvel vive em casa arrendada.

Nesta localidade escolhe-se, ao acaso, um agregado familiar. Determine a probabilidade de esse agregado familiar:

18.1. não ter automóvel e viver em casa própria;

18.2. não ter automóvel sabendo que vive em casa arrendada.

- 19** Um vírus atacou 40% dos coelhos de uma reserva de caça.

Uma associação de caçadores dispõe de um teste para verificar se um coelho está infetado.

Sabe-se que:

- se o coelho está infetado, a probabilidade de o teste dar positivo é de 95% ;
- se o coelho não está infetado, a probabilidade de o teste dar negativo é de 92% .

Foi aplicado o teste a um coelho desta reserva, escolhido ao acaso. Sabendo que o teste deu positivo, qual é, na forma de percentagem com aproximação às décimas, a probabilidade de o coelho estar infetado?

- 20** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$) com $P(A) \neq 0$.

20.1. Prove que:

$$P(\overline{A \cup B}) - P(A) \times P(\overline{B}|A) = P(\overline{A})$$

20.2. Relativamente à população com mais de 18 anos de um concelho do interior do país sabe-se que:

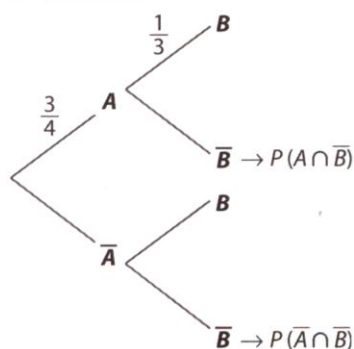
- 60% é do sexo feminino;
- 40% das mulheres não concluíram o ensino básico.

Escolhido, ao acaso, um habitante desse concelho, com mais de 18 anos, qual é a probabilidade de ser do sexo masculino ou de não ter concluído o ensino básico?

Nota: Se desejar pode usar a igualdade apresentada na alínea **20.1.**

Questões resolvidas

2.º processo



$$P(\bar{B}) = \frac{2}{3}$$

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

$$P(B|A) = \frac{1}{3}$$

$$P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$\frac{2}{3} = P(A) \times P(\bar{B}|A) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + P(\bar{A} \cap \bar{B}) \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + P(\bar{A} \cap \bar{B}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = P(\bar{A} \cap \bar{B}) \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{6}$$

16 Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que A e B são acontecimentos independentes tais que:

$$P(A) = \frac{2}{3} \text{ e } P(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

Determine $P(B)$.

Resolução

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

Como A e B são independentes, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Logo, $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A) \times P(B)$.

Substituindo os valores dados, temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times P(B) \Leftrightarrow 3 = 4 - 4 \times P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

17 Mostre que se A e B são acontecimentos independentes associados a uma certa experiência aleatória, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \times P(\bar{A})$$

Sugestão de resolução

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \\ &= P(A) + P(B) \times [1 - P(A)] = \\ &= P(A) + P(B) \times P(\bar{A}) \end{aligned}$$

Se A e B são independentes,
 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Questões propostas

21 Numa escola secundária há duas turmas do curso profissional de multimédia (as turmas A e B). Relativamente a estas duas turmas, sabe-se que:

- 64% dos alunos são rapazes;
- a terça parte das raparigas está na turma A ;
- a turma B tem tantos rapazes como raparigas.

21.1. Escolhe-se ao acaso um aluno do curso profissional de multimédia desta escola.

- Qual é a probabilidade de esse aluno ser um rapaz sabendo que é da turma A ?
- Qual é a probabilidade de esse aluno ser da turma B sabendo que é uma rapariga?

21.2. Sabendo que a turma B tem 12 raparigas, quantos rapazes tem a turma A ?

22 Sejam A e B dois acontecimentos independentes associados a uma certa experiência aleatória.

Sabendo que $P(\bar{A}) = 0,8$ e $P(A \cap B) = 0,1$, determine $P(A \cup B)$.

23 Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que:

$$P(A) = P(\bar{B}) = 0,8 \text{ e } P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,84$$

Averigue se os acontecimentos A e B são independentes.

24 Mostre que se A e B são acontecimentos independentes associados a uma certa experiência aleatória, então:

$$\mathbf{24.1.} \quad P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$$

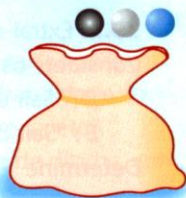
24.2. $\bar{A}$ e $\bar{B}$ também são acontecimentos independentes.

Sugestão: Prove que se A e B são independentes,
 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$.

Questões para praticar

Itens de seleção

- 25** Um saco contém bolas azuis, brancas e pretas indistinguíveis ao tato. As bolas brancas e as bolas pretas são numeradas de 1 a n , sendo n o número total de bolas brancas e pretas.



Tira-se, ao acaso, uma bola do saco.

Sejam os acontecimentos:

A: "A bola retirada é azul"

B: "A bola retirada é branca"

C: "A bola retirada tem um número inscrito"

Qual das afirmações seguintes é **falsa**?

(A) A e C são contrários.

(B) A e B são contrários.

(C) A e B são incompatíveis.

(D) B está contido em C.

- 26** Lança-se um dado com as faces numeradas de 1 a 6.

Considere os acontecimentos:

A: "Sair face ímpar"

B: "Sair face com um número primo"

Qual é o acontecimento **contrário** de $A \cup B$?

(A) Não sair a face 4 nem a face 5.

(B) Sair a face 4 ou a face 6.

(C) Sair a face 2, 4 ou 6.

(D) Sair a face 6.

- 27** Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Tem-se que

$$P(A \cap B) = 0,2; P(A) = 0,5; P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,1.$$

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

- 28** Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que $P(A \cup B) - 4P(A \cap B) = P(A)$.

Qual é o valor de $P(A|B)$?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

- 29** Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B acontecimentos possíveis de S ($A \subset S$ e $B \subset S$) tais que $A \subset B$.

Qual é o valor de $P((A \cap B) \cup \overline{A})$?

(A) 0 (B) 1

(C) $P(B)$ (D) $P(A)$

- 30** Em cada uma das opções seguintes estão representadas quatro figuras. As figuras são quadrados () , retângulos não quadrados () e losangos não quadrados () .

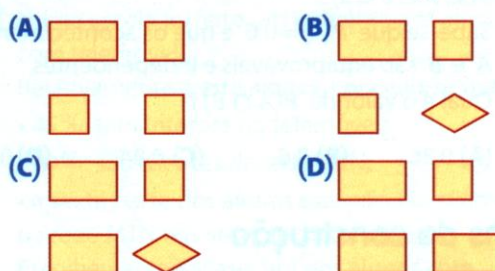
Em cada opção (A, B, C e D) escolhe-se aleatoriamente uma das quatro figuras.

Relativamente a esta experiência considere os acontecimentos:

A: "A figura escolhida é um quadrado"

B: "A figura escolhida é um retângulo"

Em qual das opções se tem $P(A|B) = \frac{1}{3}$?



- 31** Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$) com $P(B) \neq 0$.

Se $A \subset B$, o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$ é igual a:

(A) 0 (B) 1
(C) $\frac{P(A)}{P(B)}$ (D) $P(A)$

- 32** Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$) com $P(A) \neq 0$.

Se $A \subset B$, o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$ é igual a:

(A) 0 (B) 1
(C) $\frac{P(B)}{P(A)}$ (D) $P(A)$

- 33** Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ e $P(A \cup B) = 1$.

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) A e B são compatíveis.
(B) A está contido em B.
(C) $P(B|A) = P(B)$
(D) A e B são contrários.

- 34** Considere:
- uma caixa com quatro bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 4;
 - um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Lança-se o dado e tira-se, ao acaso, uma bola da caixa. Considere os acontecimentos:

A : "Sair par no lançamento do dado"

B : "O produto dos dois números saídos é menor que 5"

Qual é o valor de $P(B|A)$?

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

- 35** Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B acontecimentos possíveis de S ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que $P(A) = 0,6$ e que os acontecimentos A e B são equiprováveis e independentes.

Qual é o valor de $P(\bar{A} \cap \bar{B})$?

- (A) 0,36 (B) 0,6 (C) 0,84 (D) 0,16

Itens de construção

- 36** Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que:

- $P(A \cap B) = 0,1$
- $P(A \cup B) = 0,95$
- $P(A|B) = 0,125$

Prove que $P(\bar{A}) = 3P(A)$.

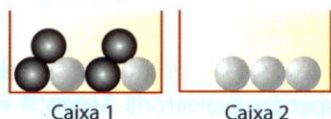
- 37** Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabendo que $P(A \cup B) = 5P(A \cap B)$ e que $P(A) = 2P(B)$, determine o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$.

- 38** A caixa 1 tem quatro bolas pretas e duas bolas brancas.

A caixa 2 tem apenas três bolas brancas.



Considere a experiência que consiste em tirar simultaneamente e ao acaso três bolas da caixa 1 e colocá-las na caixa 2 e, em seguida, tirar, da mesma forma, duas bolas da caixa 2.

Considere os acontecimentos:

A : "As bolas retiradas da caixa 1 têm a mesma cor"

B : "As bolas retiradas da caixa 2 têm a mesma cor"

Determine o valor da probabilidade condicionada $P(\bar{B}|A)$.

- 39** A respeito de um baralho de cartas incompleto sabe-se que:

- a quinta parte das cartas são do naipe de espadas;
- a décima parte das cartas são reis;
- na extração, ao acaso, de uma carta desse baralho, a probabilidade de não sair espadas nem rei é igual a 0,75.

39.1. Mostre que o rei de espadas está entre as cartas do baralho.

39.2. Extraí-se, ao acaso, uma carta deste baralho. Considere os acontecimentos:

R : "Sair um rei"

E : "Sair carta de espadas"

Determine $P(R|E)$.

- 40** A respeito dos alunos de uma turma do 12.º ano, sabe-se que:

- a quinta parte tem bolsa de mérito;
- metade são do sexo feminino;
- a terça parte dos alunos do sexo feminino tem bolsa de mérito.

40.1. Escolheu-se, ao acaso, um aluno da turma e verificou-se que era do sexo masculino.

Determine a probabilidade de esse aluno **não** ter bolsa de mérito.

40.2. Sabendo que apenas um dos alunos do sexo masculino tem bolsa de mérito, determine o número de alunos da turma.

- 41** Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$) tais que $0 < P(A) < 1$ e $0 < P(B) < 1$.

Mostre que:

$$\mathbf{41.1.} \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A) \times P(B|A)$$

$$\mathbf{41.2.} \quad P(B) + P(\bar{A}) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 2P(\bar{A}) + P(A \cup B)$$

$$\mathbf{41.3.} \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) - P(B) + P(A \cup B)$$

$$\mathbf{41.4.} \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) - P(B) + P(A|B) \times P(B)$$

$$\mathbf{41.5.} \quad P(A|B) - P(\bar{B}) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$$

$$\mathbf{41.6.} \quad 1 - P(A|B) \times P(B) - P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A})$$

$$\mathbf{41.7.} \quad P(A) \times [P(B|A) - 1] + P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A})$$

$$\mathbf{41.8.} \quad P((\bar{A} \cap \bar{B})|B) = P(A|B)$$

$$\mathbf{41.9.} \quad \frac{P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(A)} = 1 - P(B|A)$$

$$\mathbf{41.10.} \quad \frac{P(A \cup B)}{P(B)} - P(\bar{A}|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$\mathbf{41.11.} \quad P(B|A) \geq 1 - \frac{1 - P(B)}{P(A)}$$

$$\mathbf{41.12.} \quad P(A \cup B) < P(A|B) \times P(\bar{B}) \Leftrightarrow P(A) + P(B) < P(A|B)$$

- 42** Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas por quatro naipes de 13 cartas cada: espadas, copas, ouros e paus. Cada naipe tem três figuras: rei, dama e valete.



42.1. Retirando, ao acaso, seis cartas de um baralho completo, qual é a probabilidade de, entre elas, haver pelo menos um valete? Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

42.2. De um baralho completo extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas cartas.

Sejam A , B e C os acontecimentos:

A : "A primeira carta retirada é de ouros"

B : "A primeira carta retirada é de copas"

C : "A segunda carta retirada é de paus"

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, indique o valor de $P(C|(A \cup B))$.

Numa pequena composição, com cerca de 10 linhas, explice o raciocínio que efetuou. O valor pedido deverá resultar **apenas** da interpretação do significado de $P(C|(A \cup B))$, no contexto da situação descrita.

- 43** Considere um dado tetraédrico, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 4. No lançamento deste dado o "número que sai" é o número da face que fica voltada para baixo.

Relativamente à experiência aleatória que consiste em lançar três vezes o dado e registar o número que sai em cada lançamento, considere os acontecimentos:

A : "A soma dos números saídos nos três lançamentos é igual a 7"

B : "O produto dos números saídos nos três lançamentos é igual a 12"

Determine o valor de $P(B|A)$.

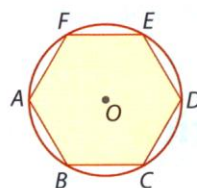
- 44** O Rui joga um jogo que consiste em atirar setas a um alvo.

O Rui dispõe de duas setas para atirar ao alvo e ganha o jogo se acertar em pelo menos um dos dois lançamentos.

Os resultados obtidos em cada lançamento são independentes uns dos outros e a probabilidade de o Rui acertar no alvo, de cada vez que joga uma seta, é p , com $0 < p < 1$.

Mostre que a probabilidade de o Rui ganhar o jogo é $2p - p^2$.

- 45** Na figura está representado o hexágono regular $[ABCDEF]$, inscrito na circunferência de centro O . Escolhem-se, ao acaso, três destes sete pontos.



Considere os acontecimentos:

T : "Os três pontos definem um triângulo"

R : "Os três pontos definem um triângulo retângulo"

Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada $P(R|T)$.

- 46** Numa escola foi feito um inquérito aos alunos com telemóvel.

Relativamente a este alunos, concluiu-se que:

- 45% têm Internet no telemóvel;
 - 40% são clientes da rede MTN;
 - a sexta parte dos alunos que não são clientes da rede MTN têm Internet no telemóvel.
- Escolheu-se, ao acaso, um dos alunos com telemóvel.

Determine a probabilidade de este aluno:

46.1. ter Internet no telemóvel sabendo que é da rede MTN;

46.2. não ser da rede MTN ou ter Internet no telemóvel.

- 47** Um saco contém nove bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9. As bolas numeradas de 1 a 5 são vermelhas e as restantes são azuis.

47.1. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas do saco.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : "As duas bolas retiradas são vermelhas"

B : "As duas bolas retiradas têm números pares"

Verifique se os acontecimentos A e B são independentes.

47.2. Admita agora que se juntaram mais algumas bolas azuis às bolas que estavam inicialmente no saco.

Sabe-se que, na extração simultânea e ao acaso de duas bolas do saco, a probabilidade de serem ambas azuis passou a ser de $\frac{4}{7}$.

Quantas bolas foram introduzidas no saco?

- 48** Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$), com $P(B) \neq 0$. Mostre que $P(\bar{A} \cup \bar{B} | B) = P(\bar{A} | B)$.

Tema 4

Estatística. Distribuição de probabilidades

1. Estatística

Medidas de localização

- Média aritmética ou moda

Média

Chama-se média de um conjunto de dados numéricos ao quociente entre a soma dos respetivos valores e o número total de dados.

A média pode representar-se por $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n}$$

onde k é o número de valores diferentes que surgem na amostra, n_i é a frequência absoluta de x_i e

$$n = \sum_{i=1}^k n_i.$$

- Moda

Moda

Chama-se moda de um conjunto de dados qualitativos/quantitativos discretos à categoria/classe com maior frequência absoluta.

A moda representa-se por M_o .

- Mediana

Determinação da mediana

- Se n é ímpar, a mediana corresponde ao valor central, isto é, ao valor do elemento de ordem $\frac{n+1}{2}$ da sequência ordenada dos dados.
- Se n é par, a mediana corresponde à média aritmética dos dois valores centrais, ou seja, aos valores dos elementos de ordens $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$ da sequência ordenada dos dados.

A mediana pode representar-se por $\tilde{x}$ ou por Me .

• Quartis

Determinação dos quartis de um conjunto com um número par de dados numéricos

Dada a sequência ordenada de um conjunto inicial de n dados numéricos (sendo n par), o primeiro quartil (Q_1) é a mediana do subconjunto de dados de ordem inferior ou igual a $\frac{n}{2}$ e o terceiro quartil (Q_3) é a mediana do subconjunto de dados de ordem superior ou igual a $\frac{n}{2} + 1$.

O segundo quartil (Q_2) é igual à mediana, ou seja, é igual à média dos valores das ordens centrais, $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$ da sequência ordenada do conjunto inicial de dados.

Determinação dos quartis de um conjunto com um número ímpar de dados numéricos

Dada a sequência ordenada de um conjunto inicial de n dados numéricos (sendo n ímpar), o primeiro quartil (Q_1) é a mediana do subconjunto de dados de ordem inferior a $\frac{n+1}{2}$ e o terceiro quartil (Q_3) é a mediana do subconjunto de dados de ordem superior a $\frac{n+1}{2}$.

O segundo quartil (Q_2) é igual à mediana, ou seja, é igual ao termo de ordem $\frac{n+1}{2}$ da sequência ordenada do conjunto inicial de dados.

Medidas de dispersão

• Amplitude

Chama-se **amplitude**, e representa-se por R (*Range*), de um conjunto de dados, $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, à diferença entre o máximo e o mínimo desse conjunto de dados.

• Amplitude interquartis

Amplitude interquartis é a diferença entre o 3.º quartil (Q_3) e o 1.º quartil (Q_1), isto é, igual a $Q_3 - Q_1$.

• Variância

A variância não é geralmente utilizada como medida de dispersão mas é o suporte para o cálculo do desvio-padrão.

Existem duas expressões para representar a variância. Ambas são obtidas a partir da soma dos quadrados dos desvios relativamente à média.

São elas:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Quando se utiliza s^2 ?

Quando $x_1, x_2, \dots, x_n$ representam uma amostra.

Quando se utiliza σ^2 ?

Quando $x_1, x_2, \dots, x_n$ representam a população.

As duas fórmulas dão valores muito próximos quando o número de dados é relativamente grande.

• Desvio-padrão

A interpretação do significado de variância, em situações concretas, levanta problemas. Por exemplo, se estivermos a estudar a altura de um grupo de pessoas em centímetros, a média das alturas ainda se exprime em centímetros, mas a variância exprime-se em centímetros quadrados.

Por isso seria vantajoso ter-se uma medida de dispersão que se exprimisse na mesma unidade de medida em que se exprimem os dados. O **desvio-padrão** é uma das medidas de dispersão que responde a essa exigência.

O desvio-padrão representa-se por s ou σ conforme a variância seja s^2 ou σ^2 e é igual à raiz quadrada positiva da variância. Assim, temos:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad \text{e} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Ou

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n-1} - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2} \quad \text{e} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

Exemplo 1

As tabelas seguintes referem-se ao número de mensagens recebidas, num determinado dia, pelos alunos das turmas 12.º A e 12.º B.

12.º A								
Número de mensagens recebidas		10	11	12	13	14	15	16
N.º de alunos		1	2	4	12	3	2	1

12.º B													
Número de mensagens recebidas		6	7	9	10	11	12	13	15	16	17	18	19
N.º de alunos		1	1	2	3	1	2	6	2	3	1	2	1

Determina as médias e o desvio-padrão para o número de mensagens recebidas por cada uma das turmas.

Verifica 1

O número de caixas de CD vendidas na loja X e Y durante uma semana foi o seguinte.

Loja X

26 16 15 18 26 15 17

Loja Y

10 9 20 10 15 10 38

1.1. Para cada uma das lojas, determine a média de caixas de CD vendidas por dia da semana.

1.2. Determine o desvio-padrão relativo a cada uma das lojas.

Use a fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Resolução

Para determinar as estatísticas pedidas, temos de ir ao *menu estatística* da calculadora e introduzir na **lista 1** os valores de x_i e na **lista 2** os valores de f_i , para cada turma. Os valores obtidos são:

Turma A	Turma B
1-Var Stats $\bar{x}=12.96$ $\Sigma x=324$ $\Sigma x^2=4240$ $Sx=1.306394529$ $\sigma x=1.28$ $n=25$ $\min X=10$ $\downarrow Q1=12$	1-Var Stats $\bar{x}=12.96$ $\Sigma x=324$ $\Sigma x^2=4486$ $Sx=3.45784133$ $\sigma x=3.387978748$ $n=25$ $\min X=6$ $\downarrow Q1=10$

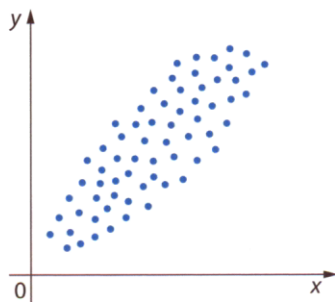
Ou seja,

	Turma A	Turma B
Média ($\bar{x}$)	12,96	12,96
Desvio-padrão (s)	1,31	3,46

Dados bidimensionais

• Coeficiente de correlação linear

Ao observarmos um diagrama de dispersão (figura seguinte), intuitivamente, verifica-se ou não a existência de associação entre duas variáveis em estudo.



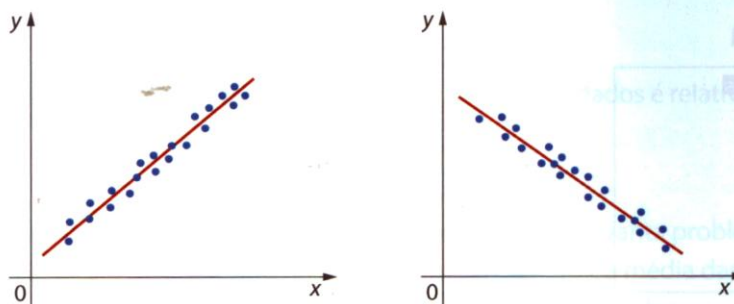
Para quantificar o grau de associação linear entre duas variáveis utiliza-se **uma estatística** a que se dá o nome de **correlação linear** ou **coeficiente de correlação linear**, que se representa por r e é dado pela fórmula:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

Sendo x_i os valores das observações de uma das variáveis, y_i os valores das observações correspondentes da outra variável, $\bar{x}$ é a média das observações de x_i e $\bar{y}$ é a média das observações de y_i .

- **Reta de regressão**

Quando duas variáveis estão fortemente correlacionadas os pontos do diagrama surgem em torno de uma reta.



Há muitas retas que se podem desenhar, mas um dos critérios mais comuns para definir essa reta é o de tornar mínima a soma dos quadrados dos desvios dos pontos em relação à reta.

A essa reta chama-se **reta de regressão** ou reta dos mínimos quadrados.

A reta de regressão pode ser definida por uma equação do tipo $y = ax + b$.

Prova-se que esta reta passa no ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ e que o seu declive, a , está relacionado com o coeficiente de correlação, tendo o mesmo sinal.

Normalmente, utiliza-se a máquina de calcular para obter a equação da reta de regressão.

Exemplo 2

Registaram-se os alongamentos (y_i), em milímetros, de uma mola provocados pela colocação de uma massa (x_i) em gramas.

Os resultados são os seguintes:

x_i	10	20	22	30	33	34	40
y_i	3	6	6,5	8	10	12	13,2

Com a calculadora determina $\bar{x}$, $\bar{y}$, o coeficiente de correlação e a equação da reta de regressão.

Apresenta os resultados com aproximação às centésimas.

Resolução

[illegible]

2-Var Stats

$\bar{x}=27$
 $\Sigma x=189$
 $\Sigma x^2=5729$
 $Sx=10.21436896$
 $\sigma x=9.456668093$
 $n=7$
 $\bar{y}=8.385714286$
 $\Sigma y=58.7$

LinReg
 $y = ax + b$
 $a = .3420127796$
 $b = -.8486307622$
 $r^2 = .9479131426$
 $r = .9736083107$

$$\bar{x} \approx 27; \bar{y} \approx 8,39; r \approx 0,97$$

Reta de regressão: $y = 0,34x - 0,85$

Verifica 2

Representou-se os tempos de prática de desporto (x_i) do Rui e as suas pulsações (y_i).

Tempo (min)	0	5	10	15	20
N.º de pulsações	70	80	100	110	111

Utilize a calculadora para determinar $\bar{x}$, $\bar{y}$, o coeficiente de correlação e a equação da reta de regressão.

2. Distribuição de probabilidades de uma variável aleatória

Variável aleatória

Suponhamos que se lança duas vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

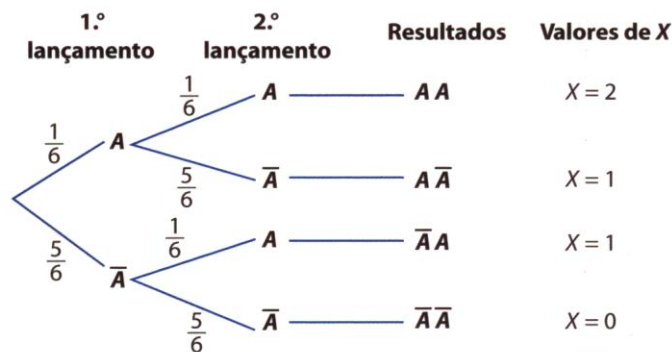
Designando por X o número de vezes que sai a face 6 nos dois lançamentos, dizemos que X é uma **variável aleatória** que toma os valores 0, 1 ou 2.

Definir a **distribuição de probabilidades** da variável aleatória X é definir a função que a cada possível valor de X faz corresponder a respetiva probabilidade.

Seja A o acontecimento "Sair face 6 no lançamento do dado":

$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ e } P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$$

Para determinar as probabilidades de a variável aleatória X assumir os valores 0, 1 ou 2, podemos construir a seguinte árvore de probabilidades:



$$P(X=2) = P\{(AA)\} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(X=1) = P\{(A\bar{A}), (\bar{A}A)\} = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$P(X=0) = P\{(\bar{A}\bar{A})\} = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

A distribuição de probabilidades da variável aleatória X é dada pela tabela:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i) = p_i$	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$

Variável aleatória

Variável aleatória X é uma função que a cada elemento de um espaço de resultados S , associado a uma experiência aleatória, faz corresponder um número real.

$$X: S \rightarrow \mathbb{R}$$

Uma variável aleatória diz-se:

- **discreta** se apenas assume um número finito ou infinito numerável de valores distintos;
- **contínua** se toma todos os valores de um intervalo ou reunião de intervalos.

Geralmente as variáveis aleatórias representam-se por letras maiúsculas.

Distribuição de probabilidades

Chama-se **distribuição de probabilidades** de uma variável aleatória discreta X à aplicação que a cada possível valor x_i da variável X faz corresponder a respetiva probabilidade.

De um modo geral, para suportes finitos, tem-se:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	...	p_n

As probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_n$ devem satisfazer as propriedades:

- $0 \leq p_i \leq 1$
- $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Exemplo 3 Sacos com bolas

Um saco tem cinco bolas, sendo três pretas e duas brancas.

Tira-se do saco, ao acaso, uma amostra de três bolas.

Considere que X designa a variável:

"Número de bolas brancas existentes nessa amostra"

Defina a distribuição de probabilidade da variável X .

Resolução

Os possíveis valores de X são: 0, 1, 2.

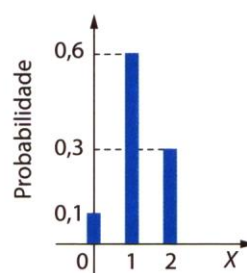
$$P(X=0) = \frac{{}^2C_0 \times {}^3C_3}{{}^5C_3} = \frac{1}{10} \quad (0 \text{ bolas brancas e } 3 \text{ bolas pretas})$$

$$P(X=1) = \frac{{}^2C_1 \times {}^3C_2}{{}^5C_3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad (1 \text{ bola branca e } 2 \text{ bolas pretas})$$

$$P(X=2) = \frac{{}^2C_2 \times {}^3C_1}{{}^5C_3} = \frac{3}{10} \quad (2 \text{ bolas brancas e } 1 \text{ bola preta})$$

A distribuição de probabilidades da variável aleatória X pode ser representada por uma tabela ou por um gráfico de barras:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

**Verifica 3**

Uma caixa contém três bolas brancas e nove bolas pretas. Considere a experiência aleatória que consiste na extração sucessiva, **com reposição** de duas bolas.

Seja Y a variável que representa o número de bolas brancas extraídas.

Represente, através de uma tabela, a distribuição de probabilidade da variável Y .

Valor médio e desvio-padrão de uma variável aleatória

Valor médio de uma variável aleatória X : $x_1, x_2, \dots, x_n$ com probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_n$ é o número real:

$$\mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

O valor médio também se designa por **valor esperado** ou **esperança matemática**.

Desvio-padrão de uma variável aleatória X : $x_1, x_2, \dots, x_n$ com probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_n$ é o número real:

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i}$$

Exemplo 4 Os almoços na cantina

Seja X a variável aleatória que representa o número de vezes, por semana, que determinado indivíduo almoça na cantina da empresa onde trabalha. A distribuição de probabilidade de X é a seguinte:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,10	0,15	0,40	a	b

- 4.1.** Determine a e b sabendo que é tão provável o referido indivíduo não almoçar na cantina durante a semana como almoçar aí quatro vezes.
- 4.2.** Determine o valor médio (μ) e o desvio-padrão (σ) da variável aleatória X .
- 4.3.** Qual é a probabilidade de o número de vezes que, durante uma semana, o indivíduo almoça na cantina pertencer ao intervalo $] \mu - \sigma, \mu + \sigma[$?

Resolução

4.1. $P(X=0)=P(X=4) \Leftrightarrow b=0,10$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \Leftrightarrow p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,10 + 0,15 + 0,40 + a + 0,10 = 1 \Leftrightarrow a = 0,25$$

$$4.2. \mu = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,15 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,25 + 4 \times 0,1 = 2,1$$

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i} = \\ &= \sqrt{2,1^2 \times 0,1 + 1,1^2 \times 0,15 + 0,1^2 \times 0,4 + 0,9^2 \times 0,25 + 1,9^2 \times 0,1} \\ &= \sqrt{1,19} \approx 1,1\end{aligned}$$

[illegible]

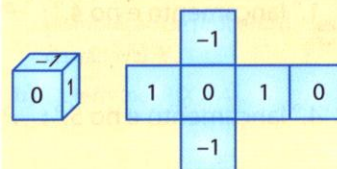
1-Var Stats

$\bar{x}=2.1$
 $\Sigma x=2.1$
 $\Sigma x^2=5.6$
 $Sx=$
 $\sigma x=1.090871211$
 $n=1$
 $\min X=0$
 $\downarrow Q_1=1.5$

$$\begin{aligned} \text{4.3. } P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &= P(2,1 - 1,09 < X < 2,1 + 1,09) \\ &= P(1,01 < X < 3,19) = P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 0,40 + 0,25 = 0,65 \end{aligned}$$

Verifica 4

Na figura estão representados um dado equilibrado e a respetiva planificação.



Lança-se este dado duas vezes.
Seja X a variável aleatória que representa a soma dos números saídos nos dois lançamentos.

- 4.1.** Verifique que a seguinte tabela representa a distribuição de probabilidade da variável X :

x_i	$P(X = x_i)$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{2}{9}$
0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{1}{9}$

- 4.2.** Calcule o valor médio e o desvio-padrão da variável aleatória X (use duas casas decimais).

Distribuição binomial

Lançando cinco vezes um *rapa* equilibrado, qual é a probabilidade de obter “R” duas, e só duas, vezes?



$$S = \{R, T, D, P\}$$

Em cada lançamento tem-se: $P(R) = \frac{1}{4}$, $P(\bar{R}) = \frac{3}{4}$.

Probabilidade de obter R no:

$$\left. \begin{array}{l} 1.^{\circ} \text{ lançamento e no } 2.^{\circ}: P(R\bar{R}\bar{R}\bar{R}\bar{R}) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ 1.^{\circ} \text{ lançamento e no } 3.^{\circ}: P(\bar{R}R\bar{R}\bar{R}\bar{R}) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ 1.^{\circ} \text{ lançamento e no } 4.^{\circ}: P(\bar{R}\bar{R}R\bar{R}\bar{R}) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ \dots \\ 4.^{\circ} \text{ lançamento e no } 5.^{\circ}: P(\bar{R}\bar{R}\bar{R}R\bar{R}) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \end{array} \right\} \text{ Há } {}^5C_2 \text{ possibilidades.}$$

A probabilidade pedida é $P = {}^5C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{135}{512} \approx 0,26$.

135/512	
binompdf(5,1/4,2)	.263671875
	.263671875

Repare-se que:

- esta experiência é constituída por n provas ou observações ($n = 5$);
- as observações são independentes umas das outras;
- em cada observação pode verificar-se um de dois resultados possíveis: sucesso (sair R) ou insucesso (não sair R);
- a probabilidade p de sucesso ($p = \frac{1}{4}$) é constante de prova para prova.

À variável X que representa o número de sucessos nas n provas chama-se variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e p , nota-se por $X \sim B(n, p)$, e tem-se:

$$P(X=k) = {}^nC_k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Exemplo 5 Número de rapazes

Seja X a variável aleatória que representa o número de rapazes nas famílias de quatro filhos.

- 5.1. Defina a distribuição de probabilidades de X (admita que a probabilidade de ser rapaz é igual à de ser rapariga).
 5.2. Calcule o valor médio e o desvio-padrão de X .

Resolução

5.1. A variável aleatória X tem distribuição binominal de parâmetros

$$4 \text{ e } \frac{1}{2}, \text{ ou seja, } X \sim B\left(4, \frac{1}{2}\right).$$

$$P(X=k) = {}^4C_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-k}$$

$$P(X=0) = {}^4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P(X=1) = {}^4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

$$P(X=2) = {}^4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = {}^4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4}$$

$$P(X=4) = {}^4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

$$5.2. \mu = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{16} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i} =$$

$$= \sqrt{(0-2)^2 \times \frac{1}{16} + (1-2)^2 \times \frac{1}{4} + (2-2)^2 \times \frac{3}{8} + (3-2)^2 \times \frac{1}{4} + (4-2)^2 \times \frac{1}{16}}$$

$$= 1$$

Numa distribuição binomial $B(n, p)$ tem-se:

$$\mu = np \text{ e } \sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$

Neste caso:

$$X \sim B\left(4, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mu = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ e } \sigma = \sqrt{4 \times \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{2 \times \frac{1}{2}} = 1$$

Verifica 5

5.1. No lançamento de um dado perfeito considere o acontecimento:

“Sair um número inferior a 3.”

- a) Calcule a probabilidade de, em quatro lançamentos consecutivos, o acontecimento se verificar apenas uma vez.
 b) Qual é a probabilidade de que o acontecimento se verifique pelo menos três vezes nos quatro lançamentos?

5.2. Uma caixa contém quatro bolas brancas e seis bolas pretas, indistinguíveis ao tato.

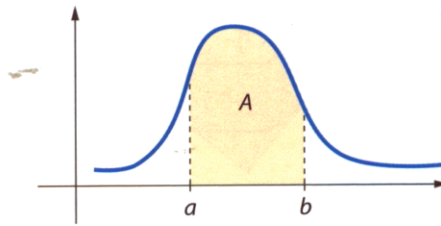
Retiram-se, ao acaso e de uma só vez, três bolas da caixa.

Seja X a variável aleatória “número de bolas pretas que ficam na caixa após a extração”.

- a) Defina por uma tabela a distribuição de probabilidades da variável X .
 b) Determine $P(X > 4)$.

Variáveis contínuas. Distribuição normal

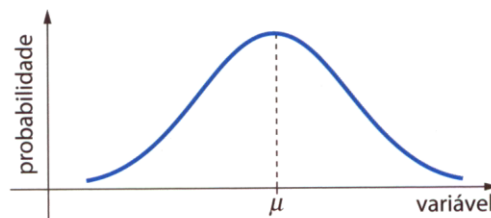
No caso de a variável ser contínua, à representação gráfica de uma distribuição de probabilidade chama-se **curva de distribuição** ou **função densidade de probabilidade**.



A probabilidade correspondente ao intervalo $]a, b[$ é $P(a < X < b) = \text{área } A$.

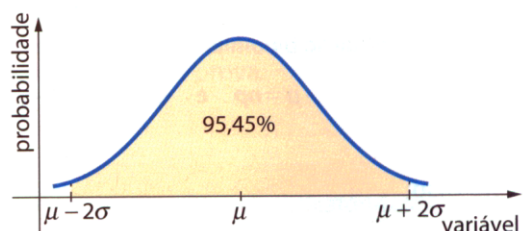
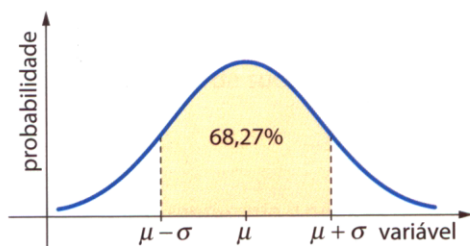
Tem particular interesse o estudo da **curva de Gauss** que representa uma **distribuição normal** de probabilidade.

Distribuição normal



A **distribuição normal** caracteriza-se por:

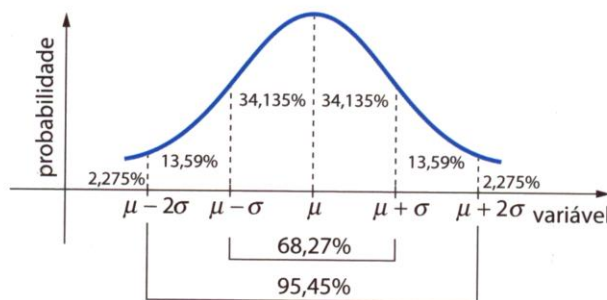
- a curva de distribuição tem a forma de um sino;
- é simétrica relativamente ao valor médio;
- o valor médio corresponde ao valor máximo;
- os valores mais afastados do valor médio têm menor probabilidade;
- quanto maior for o desvio-padrão mais achatada é a curva (é maior a dispersão relativamente ao valor médio);
- uma distribuição normal fica definida pelo valor médio e pelo desvio-padrão;
- se uma variável aleatória X tem distribuição normal de valor médio μ e desvio-padrão σ , escreve-se $X \sim N(\mu, \sigma)$;
- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$
- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$



- $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Atendendo à simetria da curva de Gauss é imediato obter as seguintes probabilidades, se $X \sim N(\mu, \sigma)$:

- $P(X < \mu) = P(X > \mu) = 50\%$
- $P(\mu - \sigma < X < \mu) = P(\mu < X < \mu + \sigma) \approx \frac{0,6827}{2} = 34,135\%$
- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu - \sigma) = P(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx \frac{0,9545 - 0,6827}{2} = 13,59\%$
- $P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma) \approx \frac{1 - 0,9545}{2} = 2,275\%$



Exemplo 6 Deslocação para o trabalho

Uma pessoa tem de se deslocar diariamente para o trabalho.

O tempo, em minutos, gasto diariamente, por essa pessoa, nessas deslocações, segue uma **distribuição normal** $N(45, 15)$.

- 6.1. Num determinado dia, escolhido ao acaso, determine a probabilidade de essa pessoa gastar mais de uma hora em deslocações para o local de trabalho.
- 6.2. Durante uma semana de cinco dias de trabalho, quanto tempo é de esperar que esta pessoa gaste em deslocações para o local de trabalho?
- 6.3. Sabe-se que esta pessoa, durante um ano, se deslocou para o trabalho durante 220 dias e que trabalhou sete horas por dia.

Comente a afirmação:

É de esperar que a referida pessoa, durante um ano, gaste, em deslocações para o trabalho, mais tempo do que o correspondente a 20 dias de trabalho.

Resolução

Seja X a variável tal que $X \sim N(45, 15)$.

- 6.1. $P(X > 60) = P(X > 45 + 15) = P(X > \mu + \sigma) \approx 0,5 - \frac{0,6827}{2} = 15,865\%$
- 6.2. É de esperar que esta pessoa gaste $\mu = 45$ min, diariamente, em deslocações para o local de trabalho. Em cinco dias é de esperar que gaste $5 \times 45 \text{ min} = 225 \text{ min} = 3 \text{ h } 45 \text{ min}$.
- 6.3. Tempo que é de esperar que gaste em deslocações durante 220 dias: $220 \times 45 \text{ min} = 9900 \text{ min} = 165 \text{ horas} \approx 23,6 \text{ dias de trabalho}$.

Logo, a afirmação é verdadeira.

Verifica 6

Admita que, numa certa escola, a variável "Altura dos alunos do 12.º ano de escolaridade" segue uma distribuição aproximadamente normal de valor médio 175 cm e desvio-padrão 10 cm.

- 6.1. Escolhe-se, ao acaso, um aluno do 12.º ano dessa escola. Qual é a probabilidade de a altura desse aluno:

- a) ser superior a 195 cm;
- b) estar compreendida entre 155 cm e 185 cm?

Apresente os resultados em percentagem, com uma casa decimal.

- 6.2. Se a escola tiver 400 alunos no 12.º ano, quantos alunos é de esperar que tenham uma altura inferior a 165 cm?

Questões resolvidas

- 7** O João tem uma lista de quatro números de telefone não identificados. Sabe que um desses números é do telefone da sua amiga Sara mas não sabe qual é.

O João liga para um dos números, escolhido ao acaso. Se não for o telefone da Sara, experimenta outro, escolhido entre os restantes. Vai procedendo deste modo até encontrar o telefone da sua amiga.

Admita que todas as chamadas efetuadas são atendidas.

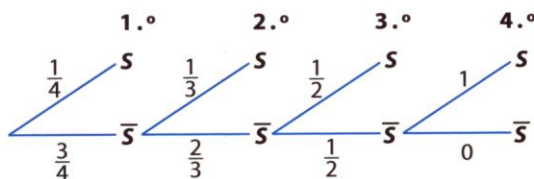
Seja X a variável aleatória "Número de telefonemas efetuados pelo João".

Defina, por uma tabela, a distribuição de probabilidades da variável aleatória X .

Resolução:

Os valores possíveis da variável aleatória X são 1, 2, 3 e 4, conforme o número da Sara seja escolhido em 1.º, 2.º, 3.º ou 4.º lugar.

Para definir a distribuição de probabilidades da variável aleatória X vamos recorrer a um diagrama de probabilidades em árvore, onde S designa "a Sara atende o telefone".



$$P(X=1) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$$

Distribuição de probabilidades da variável aleatória X :

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Questões propostas

- 7** Num jogo de cartas, para decidir quem é o primeiro a dar, procede-se do seguinte modo:

- selecionam-se o ás, o rei, a dama e o valete de um dos naipes;
- baralham-se as quatro cartas e dispõem-se em fila, voltadas para baixo sobre a mesa;
- cada um dos jogadores vira sucessivamente uma das quatro cartas até sair o ás;
- o jogador a quem sai o ás é o primeiro a dar.

Seja X a variável aleatória "número de cartas viradas antes de sair o ás".

Defina, por uma tabela, a distribuição de probabilidades da variável aleatória X .

- 8** Numa caixa estão quatro bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 4.

Extraem-se ao acaso, e em simultâneo, três bolas da caixa.

Seja X a variável aleatória "menor dos números saídos".

Em qual das seguintes opções está a distribuição de probabilidades da variável X ?

(A)

x_i	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

(B)

x_i	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(C)

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(D)

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

Questões resolvidas

- 8 Uma variável aleatória X tem a seguinte distribuição de probabilidade:

x_i	0	a	2
$P(X=x_i)$	$\frac{b}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{b}{8}$

O valor médio desta variável aleatória é igual a 1.

Qual é o valor de a e de b ?

- (A) $a=2$ e $b=1$ (B) $a=1$ e $b=\frac{1}{4}$
 (C) $a=2$ e $b=\frac{1}{8}$ (D) $a=1$ e $b=2$

Resolução

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 P(X=x_i) = 1 \\ \mu = 1 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{8} + \frac{1}{2} + \frac{b}{8} = 1 \\ 0 \times \frac{b}{8} + a \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{b}{8} = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2b}{8} = \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{4} = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 2 \\ \frac{a}{2} + \frac{2}{4} = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 2 \\ \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 2 \\ a = 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Resposta: (D)

- 9 A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte:

x_i	0	2	4	8
$P(X=x_i)$	a	$4a$	$2b$	b

Sabe-se que $P(X > 0) = P(X < 8)$.

Determine o desvio-padrão da variável aleatória X .

Resolução

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} P(X > 0) = P(X < 8) \\ a + 4a + 2b + b = 1 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4a + 2b + b = a + 4a + 2b \\ 5a + 3b = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = a \\ 5a + 3b = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = a \\ 5a + 3a = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow a = \frac{1}{8} \wedge b = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

x_i	0	2	4	8
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$$\mu = 0 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{8} = 3$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{(0-3)^2 \times \frac{1}{8} + (2-3)^2 \times \frac{1}{2} + (4-3)^2 \times \frac{1}{4} + (8-3)^2 \times \frac{1}{8}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{25}{8}} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

Questões propostas

- 9 Considere uma variável aleatória X cuja distribuição de probabilidades é a seguinte:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3k}$	$\frac{2}{3k}$	$\frac{1}{k}$

Qual é o valor de k ?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

- 10 Na tabela seguinte apresenta-se a distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X cujo valor médio é igual a 2.

x_i	0	1	a	5
$P(X=x_i)$	$2b$	$3b$	b	$2b$

Qual é o valor de a ?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6

- 11 A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte:

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2a}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{3a}$

Sabendo que:

$$P(X > 2) = 2 \times P(X = 1),$$

qual é o valor de b ?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

- 12 A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte:

x_i	0	2	4
$P(X=x_i)$	a	$\frac{3}{4}$	a

Determine o desvio-padrão da variável aleatória X .

Questões resolvidas

- 10** Um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6 é lançado quatro vezes.

A probabilidade de que a face com o número 6 saia pelo menos uma vez, é:

(A) $\left(\frac{5}{6}\right)^4$ (B) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$ (C) $1 - \left(\frac{1}{6}\right)^4$ (D) $\left(\frac{1}{6}\right)^4$

Resolução

Seja X a variável aleatória “número de vezes que sai a face com o número 6 nos quatro lançamentos”.

Trata-se de uma variável aleatória com distribuição binomial

de parâmetros $n = 4$ e $p = \frac{1}{6}$, ou seja, $X \sim B\left(4, \frac{1}{6}\right)$.

A variável X pode tomar os valores 0, 1, 2, 3 e 4.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - {}^4C_0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Resposta: (B)

- 11** A massa, em gramas, da canela contida numa embalagem de determinada marca é uma variável aleatória X com distribuição normal, de valor médio 100.

A canela de uma embalagem escolhida ao acaso é pesada.

Considere os acontecimentos:

A: “A massa da canela da embalagem escolhida é inferior a 97 gramas”

B: “A massa da canela da embalagem escolhida é superior a 103 gramas”

Sabe-se que $P(A \cup B) = 0,8$.

Qual é o valor de $P(\bar{A} | \bar{B})$?

Resolução:

$$P(A) = P(X < 97)$$

$$P(B) = P(X > 103)$$

Atendendo à simetria da curva de Gauss relativamente ao valor médio, temos que $P(A) = P(B)$.

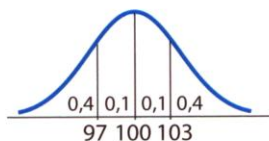
Como $P(A \cup B) = 0,8$ e A e B são incompatíveis, vem:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$0,8 = P(B) + P(B) \iff 2P(B) = 0,8 \iff P(B) = 0,4$$

$$P(\bar{A} | \bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - 0,4} =$$

$$= \frac{1 - 0,8}{0,6} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}$$



Questões propostas

- 13** Efetua-se um único lançamento de um dado tetraédrico, com as faces numeradas de 1 a 4.

Considere que o “número que sai” é o número que está na face que fica voltada para baixo.

O dado não é equilibrado, pelo que os quatro números não têm a mesma probabilidade de sair.

Seja X a variável aleatória “número saído no lançamento efetuado”.

Admita que, para certos valores de a e de b , a tabela de distribuição da variável aleatória X é:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	a	0,2	b	0,3

13.1. Sabendo que $P(X = 1) = 4 P(X = 3)$ mostre que $a = 0,4$ e $b = 0,1$.

13.2. Considere agora que este dado é lançado cinco vezes.

Qual é a probabilidade de, nos cinco lançamentos, sair a face com o número 2 pelo menos quatro vezes? (Apresente o resultado na forma de dízima com quatro casas decimais.)

- 14** Um teste de Matemática tem cinco questões de escolha múltipla. Cada questão de escolha múltipla tem quatro opções de resposta das quais apenas uma está correta. Se um aluno responder ao acaso às cinco questões, qual é a probabilidade de acertar em pelo menos três respostas. Apresente o resultado na forma de percentagem com aproximação às décimas.

- 15** O diâmetro, em milímetros, dos parafusos produzidos por uma determinada máquina é uma variável aleatória X com distribuição normal, de valor médio 5. Escolhe-se, ao acaso, um desses parafusos. Considere os seguintes acontecimentos:
- A: “O diâmetro do parafuso escolhido é superior a 5 mm”
- B: “O diâmetro do parafuso escolhido é inferior a 5,1 mm”
- Sabendo que $P(X < 4,9) = 0,02$, determine $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

Questões para praticar

Itens de seleção

- 16** A tabela de distribuição de uma variável aleatória X é a seguinte:

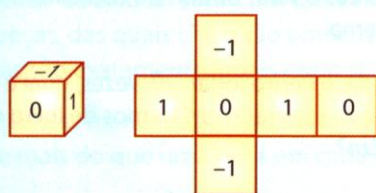
x_i	-2	0	2
$P(X = x_i)$	a	$3b$	b

Sabe-se que $P(X = 0 \vee X = 2) = 0,64$.

Qual é o valor médio de X ?

- (A) -0,4 (B) 1,04 (C) -0,08 (D) 0,08

- 17** Na figura está representado um dado equilibrado e a respetiva planificação.



Lança-se este dado duas vezes.

Seja X a variável aleatória "produto dos números saídos nos dois lançamentos".

Indique o valor de k tal que $P(X = k) = \frac{5}{9}$.

- (A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) 0

- 18** Lança-se duas vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Seja X o número de vezes que sai a face com número superior a 4 nos dois lançamentos.

Qual é a distribuição de probabilidades da variável X ?

(A)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

(B)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$

(C)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(D)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

- 19** Na tabela seguinte apresenta-se a distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X cujo valor médio é igual a 5.

x_i	2	4	8	a
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{8}$

Qual é o valor de a e de b ?

- (A) $a = 12$ e $b = 8$ (B) $a = 12$ e $b = \frac{1}{8}$
(C) $a = 16$ e $b = \frac{1}{8}$ (D) $a = 16$ e $b = 8$

- 20** Lança-se 6 vezes um dado cúbico, não viciado, com as faces numeradas de 1 a 6. Qual é a probabilidade, com aproximação às milésimas, de a face 4 sair pelo menos duas vezes?

- (A) 0,737 (B) 0,201
(C) 0,062 (D) 0,263

- 21** Admita que numa certa escola a altura das alunas do 12.º ano de escolaridade é uma variável aleatória X com distribuição normal, de valor médio 165 cm.

Escolhe-se, ao acaso, uma aluna do 12.º ano dessa escola.

Considere os acontecimentos:

A: "A altura da rapariga escolhida é superior a 165 cm"

B: "A altura da rapariga escolhida é inferior a 175 cm"

Sabe-se que $P(B|A) = 0,7$.

Qual é o valor de $P(X > 175)$?

- (A) 0,35 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,15

- 22** Uma variável aleatória X tem distribuição normal com valor médio 50.

Sabe-se que $P(a < X < b) = 0,62$.

Quais dos seguintes podem ser os valores de a e de b ?

- (A) $a = 50$ e $b = 112$ (B) $a = 40$ e $b = 55$
(C) $a = 8$ e $b = 50$ (D) $a = 55$ e $b = 100$

- 23** Uma variável aleatória X tem distribuição normal.

Sabe-se $P(X < 20) > P(X > 30)$.

Qual dos seguintes pode ser o valor médio da variável aleatória X ?

- (A) 28 (B) 26 (C) 25 (D) 21

Itens de construção

- 24** Uma caixa contém duas bolas brancas e duas bolas pretas indistinguíveis ao tato. As bolas pretas têm inscrito o número 0 e as bolas brancas têm inscrito o número 1. Considere a experiência de tirar, ao acaso, uma bola da caixa. Se a bola for preta termina a experiência; se a bola for branca, tira-se, também ao acaso, uma segunda bola da caixa e termina a experiência. As bolas retiradas não são repostas. Seja X a soma dos números inscritos nas bolas que, no final da experiência, estão dentro da caixa. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X . Apresente as probabilidades na forma de fração.

- 25** Um saco contém três bolas com o número 0, uma bola com o número 1 e duas bolas com o número 2. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas do saco.

25.1. Seja X o produto dos números inscritos nas duas bolas que saíram. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X .

25.2. Considere os acontecimentos:

A : "O produto dos números saídos é igual a 0"

B : "A soma dos números saídos é igual a 2"

Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$.

- 26** Num saco estão sete bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 7.

26.1. Extraem-se ao acaso, uma a uma, cinco bolas do saco. Cada bola extraída é repostada no saco após se observar o número nela inscrito.

- a)** Qual é a probabilidade de, nas cinco extrações, sair, pelo menos quatro vezes, uma bola com um número primo inscrito? (Apresente o resultado na forma de dízima com duas casas decimais.)

- b)** Relativamente a esta experiência aleatória, defina um acontecimento cuja probabilidade seja dada pela expressão:

$$1 - {}^5C_4 \times \left(\frac{4}{7}\right)^4 \times \left(\frac{3}{7}\right) - \left(\frac{4}{7}\right)^5$$

26.2. Admita agora que do saco, com a sua constituição inicial, se escolhe uma bola, ao acaso. Considere a variável aleatória X : "número de divisores do número inscrito na bola escolhida." Construa a tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória X e determine o seu valor médio. Apresente o valor médio na forma de dízima, com aproximação às décimas.

- 27** Numa tómbola de beneficência existe um jogo que consiste no seguinte:

- cada jogada custa 1 euro;
- uma jogada consiste em tirar, ao acaso, uma bola de um saco onde existem quatro bolas pretas, seis bolas brancas e dez bolas vermelhas;
- se sair bola preta recebe 2 euros, se sair bola branca recebe 1 euro e se sair bola vermelha não recebe qualquer quantia.

O Pedro vai efetuar uma jogada.

27.1. Seja X a variável aleatória "quantia ganha pelo Pedro nessa jogada".

Defina, por uma tabela, a distribuição de probabilidades da variável aleatória X .

27.2. Determine o valor médio da variável aleatória X .

Interprete o valor obtido no contexto do problema.

27.3. Se o Pedro jogar 20 vezes, qual é o resultado esperado em termos de lucro ou prejuízo?

- 28** A turma A do 12.º ano é constituída por 15 raparigas e 10 rapazes. A maior parte dos alunos desta turma frequentam a disciplina de Geometria Descritiva. Os restantes, em alternativa, frequentam Psicologia. Considere a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, dois alunos para integrarem uma comissão que representará a turma numa reunião convocada pelo diretor da escola.

28.1. Seja X a variável aleatória "número de rapazes que fazem parte da comissão". Defina, através de uma tabela, a distribuição de probabilidades da variável aleatória X . Apresente as probabilidades na forma de fração irredutível.

28.2. Seja Y a variável aleatória "número de alunos com Geometria Descritiva que integram a comissão".

Sabe-se que $P(Y = 1) = \frac{1}{3}$.

Quantos alunos desta turma frequentam a disciplina de Psicologia?

- 29** Seja X uma variável aleatória de distribuição normal de valor médio μ e desvio-padrão σ .

29.1. Se $P(X < 42) = 15,865\%$ e $\mu = 45$, qual é o valor de σ ?

29.2. Se $P(X < 42) = 15,865\%$ e $\sigma = 3$, qual é o valor de μ ?

- 1 O código de abertura de um cofre é constituído por uma sequência de 5 letras.

Em quantos códigos figura uma e uma só vogal (considere o alfabeto com 26 letras)?

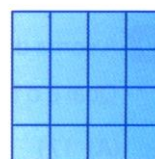
- (A) 5×21^4 (B) $25 \times {}^{21}A_4$ (C) ${}^5A_2 \times {}^{21}A_4$ (D) ${}^5A_2 \times {}^{21}A_4$

- 2 O penúltimo número de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 22.

Qual é o terceiro número dessa linha?

- (A) 1540 (B) 231 (C) 66 (D) 23

- 3 Pretende-se colocar sobre um tabuleiro com 16 casas, como o representado na figura, 11 peças, das quais cinco são brancas numeradas de 1 a 5 e seis são pretas. As peças pretas são exatamente iguais entre si.



De quantas maneiras podem ser colocadas as 11 peças no tabuleiro de modo que não fique mais do que uma peça em cada casa?

- (A) ${}^{11}C_5 \times {}^{11}C_6 \times 6!$ (B) ${}^{16}C_{11} \times {}^{11}A_5 \times 6!$ (C) ${}^{16}A_5 \times {}^{11}C_6$ (D) ${}^{11}C_6 \times 5!$

- 4 Uma turma tem 20 alunos. Pretende-se constituir uma comissão formada por 4 alunos dessa turma para organizar um passeio. Acordou-se que um dos elementos da comissão será o delegado ou o subdelegado da turma, mas não os dois.

Quantas comissões se podem formar?

- (A) 816 (B) 3060 (C) 1632 (D) 153

- 5 Uma associação pretende escolher uma comissão diretiva de três elementos entre 20 disponíveis, sendo 12 mulheres e 8 homens.

Os elementos da comissão ocuparão os cargos de **presidente**, **secretário** e **tesoureiro**.

Quantas comissões mistas (com pelo menos um homem e pelo menos uma mulher) poderão ser formadas?

- (A) ${}^{12}A_2 \times 8 + {}^8A_2 \times 12$
 (B) $({}^{12}A_2 \times 8 + {}^8A_2 \times 12) \times 3!$
 (C) ${}^{12}C_2 \times 8 + {}^8C_2 \times 12$
 (D) $({}^{12}C_2 \times 8 + {}^8C_2 \times 12) \times 3!$

- 6 De quantas maneiras nove pessoas se podem distribuir por dois elevadores sabendo que cada elevador leva no máximo cinco pessoas?

- (A) ${}^9C_5 + {}^9C_4$ (B) ${}^9C_5 \times {}^9C_4 + {}^9C_5 \times {}^9C_4$
 (C) ${}^9C_5 \times {}^9C_4$ (D) ${}^9A_5 + {}^9A_4$

- 7 A Vera esqueceu-se do número de telefone de uma amiga. Sobre esse número lembra-se apenas que:

- tem nove algarismos;
- aparece três vezes o algarismo 2, quatro vezes o algarismo 3 e duas vezes o algarismo 5;
- começa por 253.

Quantos números existem nestas condições?

- (A) 720 (B) 60
(C) 1260 (D) 12



- 8 ${}^{2000}C_{100} + {}^{2000}C_{101}$ é igual a:

- (A) ${}^{2001}C_{100}$ (B) ${}^{2000}C_{201}$ (C) ${}^{4000}C_{201}$ (D) ${}^{2001}C_{101}$

- 9 A soma dos três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal é 211.

Qual é o terceiro elemento da linha seguinte?

- (A) 171 (B) 190 (C) 210 (D) 232

- 10 As faces de uma moeda são **face nacional** e **face europeia**. Lança-se essa moeda quatro vezes consecutivas.

Seja A o acontecimento: "Sai face **nacional** nos quatro lançamentos".

Qual é o acontecimento contrário de A ?

- (A) "Nos quatro lançamentos sai face **nacional** três vezes."
(B) "Sai face **europeia** nos quatro lançamentos."
(C) "Nos quatro lançamentos sai face **europeia** pelo menos uma vez."
(D) "Nos quatro lançamentos sai face **europeia** quando muito uma vez."

- 11 Uma caixa contém 6 bolas brancas e 4 bolas pretas indistinguíveis ao tato.

Tiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

Qual é a probabilidade de saírem bolas da mesma cor?

- (A) $\frac{12}{35}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{2}{15}$ (D) $\frac{7}{15}$

- 12 As retas r e s são paralelas. A , B e C são pontos de r ; D , E e F são pontos de s . Escolhendo três desses seis pontos ao acaso a probabilidade de que definam um triângulo é:

- (A) 0,9 (B) 1 (C) 0 (D) 0,5

- 13 Sejam A , B , C , D , E e F seis pontos sobre uma circunferência. Considere todos os triângulos cujos vértices são três desses seis pontos.

Escolhido um desses triângulos ao acaso, a probabilidade de que tenha um vértice em A é:

- (A) $\frac{{}^6C_3 - 1}{{}^6C_3}$ (B) $\frac{{}^5C_2}{{}^6C_3}$ (C) $\frac{{}^6C_2}{{}^6C_3}$ (D) $\frac{5 \times 4}{{}^6C_3}$

- 14 Considere todos os números da forma ${}^{99}C_p$ que figuram numa certa linha do Triângulo de Pascal. Escolhido um destes números ao acaso, qual é a probabilidade de ele ser 99?

(A) $\frac{1}{50}$ (B) $\frac{1}{100}$ (C) $\frac{2}{99}$ (D) $\frac{1}{99}$

- 15 Numa noite, cinco amigos decidem ir ao cinema juntos. Nessa noite estavam em exibição, na localidade onde residiam, seis filmes diferentes. Cada um dos amigos escolheu ao acaso um desses seis filmes. A probabilidade de que não tenham escolhido todos o mesmo filme é:

(A) $1 - \frac{6}{5^6}$ (B) $1 - \frac{1}{5^6}$ (C) $\frac{6^4 - 1}{6^4}$ (D) $\frac{6!}{6^5}$

- 16 Sejam A e B dois acontecimentos associados a uma mesma experiência aleatória tais que $P(A) = 0,5$ e $P(B) = P(A \cap B) + 0,4$. Indique o valor de $P(A \cup B)$.

(A) 0,9 (B) 0,8 (C) 0,7 (D) 0,6

- 17 Sejam A e B dois acontecimentos associados a uma mesma experiência aleatória tais que $P(A) = 0,7$ e $P(B) = 0,4$.

Pode-se afirmar que:

- (A) A e B são acontecimentos independentes.
 (B) A e B são acontecimentos compatíveis.
 (C) A e B são acontecimentos elementares.
 (D) A e B são acontecimentos contrários.

- 18 A e B são dois acontecimentos independentes associados a uma experiência aleatória tais que $P(A) = 0,3$ e $P(A \cup B) = 0,58$.

O valor de $P(B)$ é:

(A) 0,174 (B) 0,88 (C) 0,40 (D) 0,28

- 19 A e B são dois acontecimentos independentes associados a uma experiência aleatória tais que $P(A) = 0,4$ e $P(B) = 0,6$.

Pode-se afirmar que:

- (A) $A \cup B$ é um acontecimento certo. (B) $P(A|B) = 0,6$
 (C) $P(A \cup B) = 0,76$ (D) $P(A \cap B) = 0$

- 20 As faces de uma moeda equilibrada são **face nacional** e **face europeia**. Essa moeda é lançada 10 vezes. A probabilidade do acontecimento "*A face nacional sai exatamente quatro vezes*" é:

(A) ${}^{10}C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ (B) $\frac{4}{10}$
 (C) $\frac{10}{2^4}$ (D) $\frac{4}{2^{10}}$



- 21** Lança-se quatro vezes consecutivas uma moeda de um euro. No primeiro lançamento sai "face nacional", no segundo sai "face europeia".

Qual a probabilidade de nos quatro lançamentos sair tantas vezes "face nacional" como "face europeia"?

- (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) ${}^4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$ (D) $\frac{1}{2}$

- 22** O treinador de um atleta fez um estudo estatístico dos tempos gastos ultimamente na corrida dos 100 metros por esse atleta e verificou que essa variável segue uma distribuição aproximadamente normal, com valor médio de 10,50 segundos e desvio-padrão de 0,20 segundo.

Este atleta vai participar numa corrida de 100 metros.

22.1. A probabilidade de o atleta fazer um tempo entre 10,30 e 10,90 segundos é, aproximadamente:

- (A) 0,683 (B) 0,136 (C) 0,819 (D) 0,954

22.2. A probabilidade de melhorar o seu recorde pessoal, que é de 10,10 segundos é, aproximadamente:

- (A) 0,977 (B) 0,023 (C) 0,159 (D) 0,954

- 23** Admita que, numa certa escola, a variável "classificação a Matemática obtida pelos alunos do 12.º ano no 1.º período" segue uma distribuição aproximadamente normal de valor médio 11 valores.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno do 12.º ano dessa escola.

Relativamente a esse aluno, qual dos seguintes acontecimentos é mais provável?

- (A) A sua classificação a Matemática, no 1.º período, é superior a 14 valores.
 (B) A sua classificação a Matemática, no 1.º período, é inferior a 14 valores.
 (C) A sua classificação a Matemática, no 1.º período, é inferior a 9 valores.
 (D) A sua classificação a Matemática, no 1.º período, é superior a 9 valores.

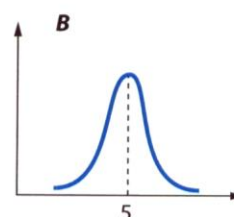
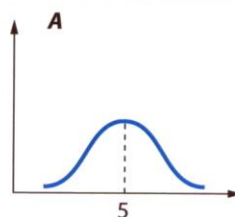
- 24** Lança-se seis vezes um dado com as faces numeradas de um a seis.

Qual é a probabilidade de os números saídos não serem todos iguais?

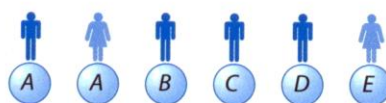
- (A) $\frac{6!}{6^6}$ (B) $1 - \frac{1}{6^5}$ (C) $1 - \frac{6!}{6^6}$ (D) $1 - \frac{1}{6^6}$

- 25** Observe as curvas de Gauss seguintes e indique a afirmação verdadeira.

- (A) $\mu_A = \mu_B \wedge \sigma_A < \sigma_B$
 (B) $\mu_A < \mu_B \wedge \sigma_A > \sigma_B$
 (C) $\mu_A = \mu_B \wedge \sigma_A > \sigma_B$
 (D) $\mu_A < \mu_B \wedge \sigma_A < \sigma_B$



- 26** Para uma autarquia foram eleitas seis pessoas de cinco partidos, isto é, duas do partido A e uma de cada um dos partidos B, C, D e E.



Pretende-se escolher uma comissão de três autarcas sem que nela figurem, simultaneamente, duas pessoas do mesmo partido.

De quantas maneiras se pode formar a comissão?

- 27** Numa estante há sete livros diferentes, três de Matemática e quatro de Física.
De quantas maneiras diferentes é possível arrumar os sete livros numa prateleira:

- 27.1.** ficando juntos os da mesma disciplina;
27.2. ficando juntos os livros de Matemática?

- 28** Uma prova de Matemática é constituída por 12 questões das quais é necessário responder a oito (e só a oito), sendo quatro obrigatoriamente escolhidas entre as cinco primeiras e as outras quatro escolhidas entre as restantes.
Quantas opções tem o aluno?

- 29** Numa turma de 25 alunos, 10 são rapazes e 15 são raparigas. Nessa turma há dois alunos que são irmãos.

Quantas comissões diferentes de seis alunos dessa turma é possível formar:

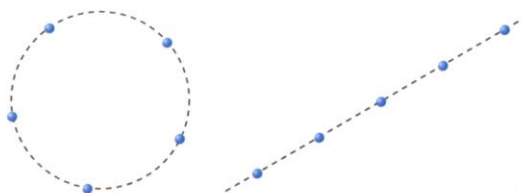
- 29.1.** sem quaisquer restrições;
29.2. com quatro rapazes e duas raparigas;
29.3. fazendo parte da comissão, quando muito, um dos dois irmãos;
29.4. fazendo parte da comissão, simultaneamente, os dois irmãos?

- 30** Quantos triângulos é possível definir com os vértices de um hexágono regular?



- 31** O código de abertura de um cofre é constituído por uma sequência de cinco letras.
Em quantos códigos figura uma e uma só vogal (considere o alfabeto com 26 letras)?

- 32** Considere 10 pontos no plano dos quais cinco e só cinco são colineares.
Quantos triângulos definem?



- 33** O núcleo da maratona de um clube de atletismo tem 10 atletas praticantes desta modalidade. Neste conjunto de 10 atletas há três iniciados que nunca participaram em qualquer prova.

O treinador pretende escolher uma equipa de cinco elementos para participar na maratona de Lisboa.

- 33.1.** Quantos conjuntos diferentes é possível constituir para formar a equipa, sabendo que dela terão de fazer parte pelo menos dois dos iniciados?
33.2. Terminada a prova soube-se que os cinco atletas ficaram classificados entre os 10 primeiros lugares. Partindo apenas desta informação, de quantos modos diferentes pode ser atribuída a classificação aos cinco atletas?



34 Considere o problema:

Utilizando os cinco algarismos do número 12 344 quantos números podem ser formados?

$\frac{P_5}{P_2}$, 5A_3 e ${}^5C_2 \times P_3$ são respostas corretas.

Numa pequena composição explique o raciocínio que conduziu a cada uma das respostas.

35**35.1.** Considere o problema:

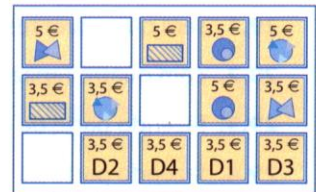
O João e o Pedro colecionam selos. O João tem três selos diferentes que pode trocar. O Pedro tem sete selos, diferentes entre si e diferentes dos selos do João, que também pode trocar. De quantos modos podem o João e o Pedro trocar selos mantendo cada um o número inicial?

${}^3C_1 \times {}^7C_1 + {}^3C_2 \times {}^7C_2 + {}^3C_3 \times {}^7C_3$ e ${}^{10}C_3 - 1$ são respostas corretas.

Numa pequena composição explique o raciocínio que conduziu a cada uma das respostas.

35.2. Depois de efetuada a troca, o Pedro ficou com 12 selos diferentes para arquivar numa capa com 15 divisórias distribuídas por três linhas, como se mostra na figura. Sabe-se que quatro dos 12 selos são referentes ao tema "desporto".

De quantas maneiras diferentes se pode arrumar os selos, sabendo que em cada divisória só pode ficar um selo e que os quatro selos referentes a desporto ficam seguidos numa mesma linha?

**36** Considere o problema:

O João foi a uma livraria e viu quatro livros que gostaria de comprar. De quantos modos pode fazer a escolha sabendo que compra pelo menos um dos quatro livros?

${}^4C_1 + {}^4C_2 + {}^4C_3 + {}^4C_4$ e $2^4 - 1$ são respostas corretas.

Numa pequena composição explique o raciocínio que conduziu a cada uma das respostas.

37 No desenvolvimento do binómio $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$ determine o valor do termo independente de x .

38 No desenvolvimento do binómio $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ determine o termo em x^9 .

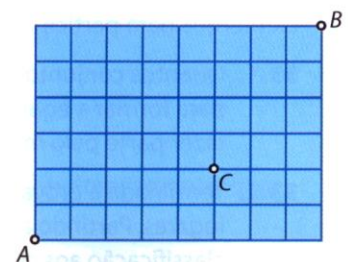
39 No desenvolvimento de $\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$, $x > 0$, determine, se existir, o termo em x^{-2} .

40 No desenvolvimento do binómio $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ determine o termo que é constante.

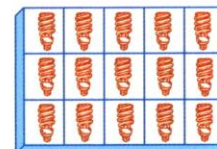
41 Considere o retângulo ao lado.

41.1. Quantos caminhos diferentes (o mais curtos possível e caminhando sobre as linhas) há para ir de A a B?

41.2. Escolhendo um desses caminhos ao acaso, qual é a probabilidade de passar por C?



- 42** Uma caixa tem nove bolas, indistinguíveis ao tato e numeradas de 1 a 9, sendo quatro brancas e cinco pretas. Retiram-se ao acaso três bolas, de uma só vez. Qual é a probabilidade de:
- 42.1.** uma (e uma só) bola ser preta?
- 42.2.** pelo menos duas bolas serem pretas?
- 42.3.** as três bolas terem a mesma cor?
- 42.4.** a soma dos números inscritos nas três bolas ser um número par?
- 43** Um júri é composto por quatro membros escolhidos ao acaso numa lista de quatro homens e seis mulheres. Qual é a probabilidade de o júri:
- 43.1.** ter pelo menos um homem;
- 43.2.** ter representantes dos dois sexos?
- 44** Para certo concurso, os candidatos terão de preparar 60 temas, dos quais quatro, seleccionados ao acaso, sairão na prova. Um candidato apresenta-se à prova tendo preparado apenas $\frac{1}{3}$ dos temas. Qual é a probabilidade de que tenha estudado só três dos temas que saíram? Apresente o resultado em percentagem com aproximação às décimas.
- 45** Num saco estão 10 moedas de igual aspeto exterior e indistinguíveis ao tato. Sabe-se que quatro (e só quatro) das 10 moedas são falsas. Tiram-se quatro dessas moedas ao acaso. Qual é a probabilidade de que pelo menos uma moeda seja falsa?
- 46** Numa caixa estão 15 lâmpadas com igual aspeto exterior. Sabe-se que cinco (e só cinco) dessas lâmpadas são defeituosas.
- 46.1.** Se tirarmos ao acaso quatro lâmpadas da caixa, qual é a probabilidade de pelo menos uma ser defeituosa?
- 46.2.** Dispondo as 15 lâmpadas em fila, por uma ordem qualquer, qual é a probabilidade de que as lâmpadas defeituosas fiquem juntas?
- 47** Lançam-se simultaneamente dois dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6 e multiplicam-se os dois números obtidos. Qual é a probabilidade do acontecimento "O produto dos números saídos é maior do que 20"?
- 48** Sabe-se que, num grupo de 12 professores, oito lecionam Física e sete lecionam Química. Nesse grupo são escolhidos, ao acaso, dois professores. Qual é a probabilidade de os dois professores escolhidos lecionarem a mesma disciplina?
- 49** Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 formaram-se todos os números possíveis maiores do que 1000 e menores que 3000. Escolhido ao acaso um desses números, qual é a probabilidade de ser par e ter os algarismos todos diferentes?



- 50** Numa turma com 12 raparigas e 8 rapazes vão ser escolhidos quatro elementos para formar uma comissão.

Admitindo que os quatro elementos são escolhidos por sorteio, qual é a probabilidade de que da comissão façam parte pelo menos duas raparigas e que seja constituída por alunos dos dois sexos? Apresente o resultado na forma de percentagem arredondado às décimas.

- 51** A Ana recebeu um novo cartão multibanco.

Quando foi efetuar o primeiro pagamento usando o referido cartão não se lembrava do respetivo código. Sabia apenas que era formado por quatro algarismos dos quais faziam parte o zero e o nove, que apareciam uma só vez cada um, não necessariamente por aquela ordem.

Se a Ana tentar escrever o código do seu cartão, qual é a probabilidade de acertar à primeira tentativa?



- 52** O código de um determinado produto é formado por três letras seguidas de três algarismos (por exemplo: BCB040).

52.1. Quantos códigos diferentes se podem formar (considere 26 letras)?

52.2. Escolhido um código ao acaso, qual é a probabilidade de que a primeira letra seja vogal e os algarismos sejam diferentes e estejam por ordem crescente (por exemplo: ACR279)?

- 53** Num concurso foram premiados quatro concorrentes.

A cada um dos quatro premiados será atribuído por sorteio um prémio entre três possíveis. Qual é a probabilidade de que não seja atribuído a todos o mesmo prémio?



- 54** Num saco havia seis bolas sendo quatro brancas e duas amarelas.

Depois de se terem introduzido algumas bolas pretas no referido saco verificou-se que, na extração sucessiva de duas bolas, a probabilidade de pelo menos uma ser branca era de $\frac{2}{3}$.

Quantas bolas pretas foram introduzidas no saco?

- 55** Um saco contém 11 bolas indistinguíveis ao tato, sendo cinco pretas, cinco brancas e uma amarela. Retiram-se duas bolas ao acaso. Qual é a probabilidade de que as bolas retiradas sejam de cor diferente?

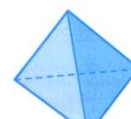
- 56** Num saco há 12 bolas indistinguíveis ao tato, sendo três brancas, quatro pretas e cinco verdes.

Na extração simultânea e ao acaso de duas bolas, qual é a probabilidade de que estas tenham a mesma cor?

- 57** Numa prateleira de uma estante foram arrumados, lado a lado e ao acaso, 15 livros, dos quais cinco são de Matemática.

Qual é a probabilidade de que pelo menos dois livros de Matemática tenham ficado juntos?

- 58** Se escolher ao acaso três vértices de um tetraedro regular, qual é a probabilidade de eles pertencerem todos à mesma face?

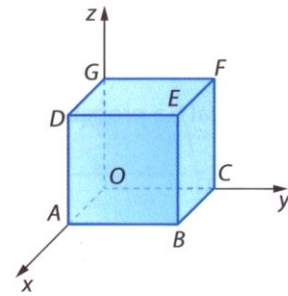


- 59** A aresta do cubo $[OABCDEFG]$ mede quatro unidades.

Considere todas as retas que passam em dois vértices do cubo.

Escolhida uma dessas retas ao acaso, qual é a probabilidade de:

- 59.1.** ser paralela ao plano de equação $z = 2$;
59.2. estar contida no plano de equação $x = y$;
59.3. conter uma diagonal espacial do cubo?



- 60** Num dado viciado com as faces numeradas de 1 a 6, a probabilidade de sair 1 é dupla da de sair qualquer uma das restantes faces.

Relativamente a um lançamento deste dado:

- 60.1.** Verifique que $P(\{1\}) = \frac{2}{7}$ e $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{7}$.

($P(\{a\})$ designa a probabilidade de sair a face com o número a .)

- 60.2.** Considere os acontecimentos:

A: "Sair um número múltiplo de 3"

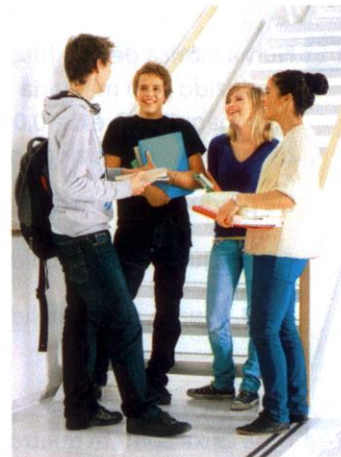
B: "Sair um número par"

- a)** Determine $P(A|B)$.
b) A e B são independentes? Justifique.

- 61** Uma escola é frequentada por 1000 alunos do ensino secundário que se distribuem por três cursos: A, B e C.

Sabe-se que 40% dos alunos são do sexo masculino. Dos alunos do sexo masculino 60% frequentam o curso A, 25% frequentam o curso B e os restantes frequentam o curso C. As alunas distribuem-se da seguinte forma: 45% frequentam o curso A, 35% frequentam o curso B e as restantes frequentam o curso C.

- 61.1.** Um aluno da escola foi escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de ser do sexo feminino, sabendo que frequenta o curso A?
- 61.2.** Na escolha aleatória de um aluno da escola os acontecimentos:
 F: "Ser do sexo feminino"
 C: "Frequentar o curso C"
 são independentes? Justifique.



- 62** Sabe-se que 5% das lâmpadas produzidas na fábrica LUX são defeituosas. Todas as lâmpadas produzidas nesta fábrica são submetidas ao controlo de qualidade. Sabe-se ainda que, no controlo de qualidade, 1% das lâmpadas defeituosas são aprovadas e 3% das lâmpadas sem defeito são reprovadas.

- 62.1.** Escolhida ao acaso uma lâmpada produzida nessa fábrica, qual é a probabilidade de ser defeituosa se foi reprovada pelo controlo de qualidade?

Apresente o resultado na forma de percentagem com uma casa decimal.

- 62.2.** Admita que, no último ano, a fábrica LUX produziu 1 milhão de lâmpadas, tendo enviado para reciclagem todas as lâmpadas reprovadas pelo controlo de qualidade. Quantas lâmpadas é de esperar que esta fábrica tenha enviado para reciclar?

- 63** Um professor tem duas turmas, a A com 10 rapazes e 15 raparigas e a B com 10 rapazes e 20 raparigas. Este professor encontrou na rua uma das suas alunas mas não se lembra de que turma é. Qual é a probabilidade de ser da turma B ?

- 64** Um professor tem duas turmas, a A com 10 rapazes e 15 raparigas e a B com 10 rapazes e 20 raparigas. Este professor resolveu escolher, por sorteio, um aluno para desempenhar determinada tarefa. Para isso, lançou uma moeda ao ar para escolher entre a turma A e a B . Seguidamente, na turma sorteada foi escolhido, também por sorteio, um aluno. Sabendo que, no final, foi escolhida uma aluna, qual é a probabilidade de ser da turma B ?

- 65** Uma caixa contém seis bolas brancas e quatro azuis, indistinguíveis ao tato.

65.1. Se as bolas forem tiradas uma a uma e colocadas numa fila, qual é a probabilidade de as bolas azuis ficarem seguidas?

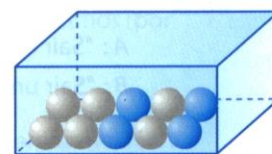
65.2. Tiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

Considere os seguintes acontecimentos:

A_1 : "A bola retirada em primeiro lugar é azul"

B_2 : "A bola retirada em segundo lugar é branca"

Calcule o valor da probabilidade condicionada $P(A_1 | B_2)$.



- 66** Numa fábrica de parafusos existem duas máquinas A e B . Sabe-se que a probabilidade de um parafuso produzido pela máquina A ser defeituoso é 0,003 e a probabilidade de ser defeituoso se for produzido pela máquina B é de 0,005. Nessa fábrica 60% dos parafusos são produzidos pela máquina A , sendo os restantes produzidos pela máquina B .

Da produção de um dia foi escolhido, ao acaso, um parafuso.

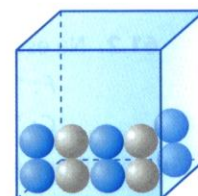
66.1. Qual é a probabilidade de esse parafuso ser defeituoso?

66.2. Qual é a probabilidade de ser produzido pela máquina B , sabendo que é defeituoso?

- 67** Uma caixa contém quatro bolas brancas e seis bolas azuis, indistinguíveis ao tato.

Tiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

Sabendo que saíram bolas de cores diferentes, qual é a probabilidade de que a bola retirada em primeiro lugar seja branca?



- 68** Um saco tem dez bolas, sendo quatro brancas e seis pretas.

As bolas são retiradas do saco uma a uma de forma aleatória e colocadas em fila.

Considere os acontecimentos:

A : "As bolas brancas ficam seguidas no princípio ou no fim da fila"

B : "As bolas pretas ficam seguidas no início da fila"

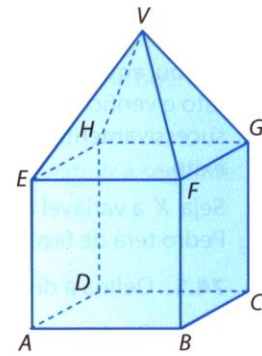
68.1. Determine $P(A)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.



68.2. Indique, justificando, o valor das probabilidades condicionadas $P(A | B)$ e $P(B | A)$.

- 69** A figura representa um sólido $[ABCDEFGHV]$ constituído por um cubo e uma pirâmide. Os vértices E, F, G e H são comuns ao cubo e à pirâmide.



Escolhem-se aleatoriamente três vértices do sólido.

- 69.1.** Qual é a probabilidade de os três vértices escolhidos definirem um plano que contenha uma das seis faces do cubo?

- 69.2.** Considere os acontecimentos:

A : "Os três pontos escolhidos são vértices do cubo"

B : "Os três pontos escolhidos são vértices da pirâmide"

Determine a probabilidade condicionada $P(A|B)$.

- 70** Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos (A e B são, portanto, subconjuntos de S). Prove que:

70.1. $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

70.2. Se $B \subset A$, então $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(B)$.

70.3. Se $B \subset A$, então $P(B) \leq P(A)$.

70.4. Se B é um acontecimento possível, então $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$.

70.5. Se A e B são incompatíveis e possíveis, então $P(A|B) + P(B|A) = 0$.

70.6. Se A e B são independentes, então $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$.

70.7. Se A e B são independentes, então $\bar{A}$ e $\bar{B}$ também são independentes.

- 71** Seja X a variável aleatória que representa o número de vezes que determinado indivíduo vai ao cinema (por semana).

A distribuição de probabilidades de X é a seguinte:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,10	0,45	0,20	a	b

- 71.1.** Determine a e b sabendo que é tão provável o referido indivíduo não ir ao cinema durante a semana como ir quatro vezes.

- 71.2.** Determine o valor médio μ e o desvio-padrão σ (com aproximação às centésimas) desta distribuição.

- 71.3.** Qual é a probabilidade de o número de idas ao cinema pertencer ao intervalo $]\mu - \sigma, \mu + \sigma[$?

- 72** Uma caixa contém seis bolas brancas e quatro bolas pretas, indistinguíveis ao tato.

Tiram-se, ao acaso e de uma só vez, quatro bolas da caixa. Seja X a variável aleatória que representa o número de bolas pretas tiradas na extração das quatro bolas.

- 72.1.** Defina a distribuição de probabilidades de X .

- 72.2.** Calcule o valor médio e o desvio-padrão de X .

- 73** Seja X a variável aleatória que representa o número de raparigas nas famílias de dois filhos.

- 73.1.** Defina a distribuição de probabilidades de X .

(Admita que a probabilidade de ser rapariga é igual à de ser rapaz.)

- 73.2.** Calcule o valor médio e o desvio-padrão de X .

- 74** Quando o Pedro chegou a casa verificou que não havia luz nas escadas.

Pegou, então, no seu porta-chaves, com três chaves indistinguíveis ao tato e verificou que, para abrir a porta, teria de experimentar sucessivamente e ao acaso cada uma das chaves, sem as repetir, até obter êxito.

Seja X a variável aleatória que representa o número de tentativas que o Pedro terá de fazer até abrir a porta.



74.1. Defina a distribuição de probabilidades de X .

74.2 Qual o número esperado de tentativas que o Pedro terá de fazer até encontrar a chave certa?

- 75** Um dado equilibrado é lançado quatro vezes.

Seja X a variável aleatória que representa o número de vezes que, nos quatro lançamentos, sai a face com o número 3.

75.1. Defina a distribuição de probabilidades de X .

75.2. Calcule o valor médio (μ) e o desvio-padrão (σ) de X .

75.3. Determine $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$.



- 76** Numa prova de Matemática a primeira parte é constituída por sete questões de escolha múltipla. Em cada questão há quatro opções para a resposta, das quais apenas uma é correta.

Se um aluno responde ao acaso às sete questões qual é mais provável: acertar apenas a uma ou acertar em duas e só duas respostas? Justifique.

- 77** Num dado não equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, a probabilidade de sair a face com o número 1 é 0,3, tendo as restantes faces igual probabilidade de ocorrer.

77.1. Mostre que, efetuando apenas um lançamento deste dado, a probabilidade de "sair 2" é 0,14.

77.2. Lançando quatro vezes consecutivas o dado referido, qual é a probabilidade de se obter duas e só duas vezes "um número par"?

(Apresente o resultado na forma de percentagem arredondada às unidades.)

- 78** Lança-se dez vezes um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6.

Determine, com aproximação às milésimas, a probabilidade de a face 2 sair, pelo menos, três vezes.



- 79** Um jogador de futebol tem, na marcação de uma grande penalidade, uma probabilidade de êxito de 0,9.

Calcule a probabilidade de, em cinco grandes penalidades consecutivas, marcar exatamente três golos.

- 80** Sabe-se que um determinado medicamento tem uma probabilidade de sucesso de 60%.

Cinco doentes vão ser tratados com esse medicamento.

Seja X a variável aleatória que representa o número de doentes tratados com êxito.

80.1. Defina a distribuição de probabilidade de X (use três casas decimais).

80.2. Calcule o valor médio e o desvio-padrão de X .

- 81** Numa estufa existem 1200 plantas de determinada espécie. Sabe-se que as alturas das plantas dessa espécie seguem uma distribuição aproximadamente normal, com valor médio 80 cm e desvio-padrão 5 cm.

Qual é o número dessas plantas que é previsível terem uma altura inferior a 85 cm?

- 82** Uma caixa contém nove bolas, indistinguíveis ao tato, sendo seis bolas vermelhas e três bolas brancas. Considere a experiência que consiste em retirar bolas da caixa, uma a uma, até que saia uma bola branca. Determine a probabilidade de que sejam extraídas pelo menos quatro bolas da caixa:

- 82.1.** considerando que cada bola extraída é retirada e repostada na caixa antes de se extrair a seguinte;
82.2. considerando que não há reposição das bolas extraídas.

- 83** A Ana e a Beatriz realizaram um teste de seleção para um concurso.

O teste consta de apenas uma questão, escolhida, ao acaso, de uma lista de 20.

Relativamente a estas 20 questões, a Ana está em condições de responder corretamente apenas a 15 e a Beatriz apenas pode dar uma resposta correta a 10.

Sabendo que só foi admitida uma destas duas candidatas, qual é a probabilidade de ter sido a Ana?

- 84** Numa escola com 400 alunos do 12.º ano verificou-se que os seus pesos, em quilogramas, se distribuem segundo uma normal de valor médio 70 e desvio-padrão 5.

- 84.1.** Escolhe-se, ao acaso, um aluno do 12.º ano dessa escola.

Relativamente a esse aluno:

- a)** qual é mais provável, *pesar* mais do que 73 kg ou *pesar* menos do que 68 kg ;
b) qual é a probabilidade de ter um *peso* compreendido entre 65 kg e 80 kg ?

Apresente o resultado em percentagem, com uma casa decimal.

- 84.2.** Quantos alunos do 12.º ano dessa escola é de esperar que *pesem* mais do que 75 kg ?

- 85** Numa caixa estão cinco bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 5.

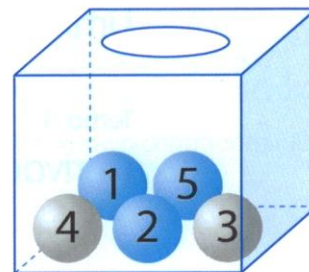
Extraem-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa.

- 85.1.** Seja X a variável aleatória "número de bolas extraídas com número ímpar."

Defina através de uma tabela a distribuição de probabilidade da variável aleatória X . Determine o valor médio e o desvio-padrão dessa variável aleatória.

- 85.2.** Considere a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - x + 2$.

Determine a probabilidade de os números inscritos nas duas bolas extraídas serem abcissas de pontos do gráfico de f em que a ordenada é o dobro da abcissa.



- 86** Numa coelheira há 20 coelhos sendo 5 brancos e 15 pretos. Abre-se a porta da coelheira e deixam-se sair todos os coelhos *um a um*.



Qual é a probabilidade de que saiam, pelo menos, dois coelhos brancos seguidos?

2. Funções

Tema 1

Definições. Diferentes tipos de funções. Operações com funções. Sucessões

Tema 2

Função exponencial e função logarítmica

Tema 3

Limites e continuidade

Tema 4

Derivadas

Tema 1

Definições. Diferentes tipos de funções. Operações com funções. Sucessões

1. Definições

Definição de função

Dados dois conjuntos A e B diz-se que uma correspondência f é uma **função** de A em B se a cada elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B .

Seja f uma função ou aplicação de A para B , escreve-se:

$$f: A \rightarrow B$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

e tem-se:

- ao conjunto A chama-se **domínio da função** e representa-se por D_f ;
- ao conjunto B chama-se **conjunto de chegada** da função;
- a cada elemento de A chama-se **objeto** e a cada objeto corresponde uma **imagem**;
- ao conjunto das imagens chama-se **contradomínio** da função e representa-se por D'_f . É claro que o contradomínio de qualquer função está contido no conjunto de chegada, podendo ser iguais;
- na relação $y = f(x)$, x é a variável independente e y é a variável dependente.

Gráfico de uma função é o conjunto de pontos (x, y) do plano cartesiano em que $x \in D_f$ e $y = f(x)$.

Chama-se **função real de variável real** a uma função em que tanto o domínio como o contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Sentido de variação de uma função

Seja f uma função real de variável real e I um intervalo contido no seu domínio.

A função f é **crescente** em I quando, para todos os reais a e b de I , se $a < b$, então $f(a) \leq f(b)$.

A função f é **decrecente** em I quando, para todos os reais a e b de I , se $a < b$, então $f(a) \geq f(b)$.

A função f é **estritamente crescente** em I quando, para todos os reais a e b de I , se $a < b$, então $f(a) < f(b)$.

A função f é **estritamente decrescente** em I quando, para todos os reais a e b de I , se $a < b$, então $f(a) > f(b)$.

A função f diz-se **monótona** em I se é crescente ou decrescente nesse intervalo.

Máximos e mínimos de uma função

Seja f uma função real de variável real.

Ao maior valor do contradomínio da função f , se existir, chama-se **máximo absoluto**.

$f(a)$ é o **máximo absoluto** de f se, para todo o $x \in D_f$, $f(a) \geq f(x)$.

Ao menor valor do contradomínio da função f , se existir, chama-se **mínimo absoluto**.

$f(b)$ é o **mínimo absoluto** de f se, para todo o $x \in D_f$, $f(b) \leq f(x)$.

$f(a)$ é um **máximo relativo** de f se existir um intervalo I , da forma $I =]\alpha, \beta[$ com $\alpha < a < \beta$, tal que:

$$f(a) \geq f(x), \forall x \in I \cap D_f$$

Ao objeto a chama-se **maximizante**.

$f(a)$ é um **mínimo relativo** de f se existir um intervalo I , da forma $I =]\alpha, \beta[$ com $\alpha < a < \beta$, tal que:

$$f(a) \leq f(x), \forall x \in I \cap D_f$$

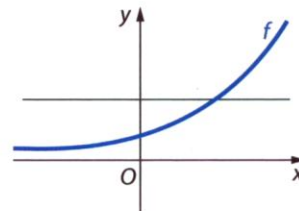
Ao objeto a chama-se **minimizante**.

Função injetiva

Uma função f é injetiva se objetos diferentes têm imagens diferentes.

$f: A \rightarrow B$ é **injetiva** se e só se $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Uma reta paralela ao eixo Ox não pode interseçar o gráfico de uma função injetiva em mais do que um ponto.

**Função par**

Uma função f é **par** se $f(-x) = f(x)$ para todo o $x \in D_f$.

Uma função par tem o gráfico simétrico relativamente ao eixo Oy .

Função ímpar

Uma função f é **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$ para todo o $x \in D_f$.

Uma função ímpar tem o gráfico simétrico relativamente à origem do referencial.

2. Transformações e simetrias do gráfico de uma função

Conhecido o gráfico de uma função f é possível determinar o gráfico de outras funções resultantes das seguintes transformações:

- $y = f(x) + a$ obtém-se do gráfico de f por um deslocamento vertical de a unidades, para cima se $a > 0$ ou para baixo se $a < 0$ (translação associada ao vetor $(0, a)$).
- $y = f(x + a)$ obtém-se do gráfico de f por um deslocamento horizontal de a unidades, para a esquerda, se $a > 0$, ou para a direita, se $a < 0$ (translação associada ao vetor $(-a, 0)$).
- $y = af(x)$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) obtém-se do gráfico de f por uma:
 - expansão na vertical, segundo o fator a , se $a > 1$;
 - contração na vertical, segundo o fator a , se $0 < a < 1$.
- $y = f(ax)$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) obtém-se do gráfico de f por uma:
 - expansão na horizontal, segundo o fator a , se $0 < a < 1$;
 - contração na horizontal, segundo o fator a , se $a > 1$.
- $y = |f(x)|$ obtém-se do gráfico de f mantendo os pontos de ordenada positiva ou nula e transformando os pontos de ordenada negativa por uma reflexão em relação ao eixo Ox .
- $y = -f(x)$ obtém-se do gráfico de f por uma reflexão em relação ao eixo Ox .
- $y = f(-x)$ obtém-se do gráfico de f por uma reflexão em relação ao eixo Oy .

3. Diferentes tipos de funções

Função módulo

Chama-se função módulo à função real de variável real definida por:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Para resolver algebricamente equações e inequações com módulos utilizamos as propriedades:

- $|x| = a \Leftrightarrow x = -a \vee x = a, a > 0$
- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow x > -a \wedge x < a$
- $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$

Função quadrática

Uma **função quadrática** é uma função f definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

a, b, c são números reais.

O domínio de uma função quadrática é o conjunto dos números reais.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Função polinomial

Uma função polinomial f é uma função definida, em $\mathbb{R}$, por:

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, em que $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ e a_0 são números reais, n é um número inteiro não negativo e $a_0 \neq 0$.

O valor de n é o grau da função.

Exemplo 1

Considere o polinómio $A(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2$.

- 1.1. Determine o quociente e o resto da divisão do polinómio $A(x)$ pelo polinómio $B(x) = x^2 - 3x$.
- 1.2. Determine o resto da divisão do polinómio $A(x)$ por $x + 1$.
- 1.3. Justifique que $A(x)$ é divisível por $x - 2$ e determine o respetivo quociente.
- 1.4. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $A(x) \leq 0$.

Resolução

- 1.1. Para determinar o quociente e o resto da divisão do polinómio $A(x)$ pelo polinómio $B(x)$ vamos utilizar o algoritmo da divisão inteira de polinómios.

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 2x^3 \quad -x + 2 \quad | \quad x^2 - 3x \\
 \underline{-x^4 + 3x^3} \quad x^2 + x + 3 \\
 x^3 \quad -x + 2 \\
 \underline{-x^3 + 3x^2} \\
 +3x^2 - x + 2 \\
 \underline{-3x^2 + 9x} \\
 8x + 2
 \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x^2 + x + 3$

Resto: $R(x) = 8x + 2$

- 1.2. Para determinar o resto da divisão do polinómio $A(x)$ por $x + 1$ vamos utilizar o:

Teorema do resto

O resto da divisão de um polinómio $P(x)$ por $(x - \alpha)$ é $P(\alpha)$.

$$A(-1) = (-1)^4 - 2 \times (-1)^3 - (-1) + 2 = 1 + 2 + 1 + 2 = 6$$

Portanto, o resto da divisão do polinómio $A(x)$ por $x + 1 = x - (-1)$ é $A(-1) = 6$.

- 1.3.

Consequência do teorema do resto

Um polinómio $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$ se e só se $P(\alpha) = 0$.

$$A(2) = 2^4 - 2 \times 2^3 - 2 + 2 = 16 - 16 + 0 = 0$$

Logo, como $A(2) = 0$ o polinómio $A(x)$ é divisível por $x - 2$.

Verifica 1

Considere o polinómio:

$$A(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2$$

- 1.1. Determine o quociente e o resto da divisão do polinómio $A(x)$ pelo polinómio $B(x) = x^3 + 2x$.
- 1.2. Determine o resto da divisão do polinómio $A(x)$ por $x + 3$.
- 1.3. Justifique que $A(x)$ é divisível por $x + 3$ e determine o respetivo quociente.
- 1.4. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $A(x) > 0$.

Para determinar o quociente de $A(x)$ por $x - 2$ vamos usar a regra de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\
 2 & & 2 & 0 & 0 & -2 \\
 \hline
 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0
 \end{array}$$

Coeficientes de $A(x)$

Resto

Coeficientes do quociente

O quociente da divisão de $A(x)$ por $x - 2$ é $x^3 - 1$.

Como o resto é 0, temos que $A(x) = (x - 2)(x^3 - 1)$.

- 1.4. Para resolver a inequação $A(x) \leq 0$ vamos decompor o polinómio $A(x)$ num produto de fatores de grau não superior a 2.

Sabemos que $A(x) = (x - 2)(x^3 - 1)$.

Vamos usar novamente a regra de Ruffini, sabendo que 1 é um zero do polinómio $x^3 - 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 1 & & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 1 & 1 & 0
 \end{array}$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\text{Portanto, } A(x) = (x - 2)(x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Recorrendo à fórmula resolvente, determinamos os zeros do polinómio $x^2 + x + 1$.

$$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Como o polinómio $x^2 + x + 1$ não tem zeros e dado que $1 > 0$, podemos concluir que $x^2 + x + 1 > 0$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Na tabela seguinte estudamos o sinal de $A(x)$.

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$x - 2$	-	-	-	0	+
$x - 1$	-	0	+	+	+
$x^2 + x + 1$	+	+	+	+	+
$A(x)$	+	0	-	0	+

Temos, então, $A(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 2]$.

Função racional

Uma **função racional** é uma função real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$$

onde, $n(x)$ e $d(x)$ são polinómios e $d(x)$ é diferente do polinómio nulo.

O domínio, D_f , de uma função racional, f , é o conjunto dos números reais que não anulam o denominador, ou seja,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : d(x) \neq 0\}$$

Exemplo 2

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definida por $f(x) = 1 + \frac{4}{1-x}$.

Determine o conjunto de números reais x tais que $f(x) \geq 5 - x$.

Apresente o resultado na forma de intervalo ou união de intervalos.

Resolução

Em primeiro lugar, vamos dar à inequação $f(x) \geq 5 - x$ a forma $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$.

$$\begin{aligned} f(x) \geq 5 - x &\Leftrightarrow 1 + \frac{4}{1-x} \geq 5 - x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{4}{1-x} - 5 + x \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{1-x} - 4 + x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4 - 4 + 4x + x - x^2}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{5x - x^2}{1-x} \geq 0 \end{aligned}$$

De seguida, determinam-se os zeros do numerador e os zeros do denominador:

$$5x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(5 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$$

$$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Finalmente, recorrendo a uma tabela de sinais, investigamos o sinal de

$$\frac{5x - x^2}{1 - x}.$$

x	$-\infty$	0		1		5	$+\infty$
$5x - x^2$	-	0	+	+	+	0	-
$1 - x$	+	+	+	0	-	-	-
$\frac{5x - x^2}{1 - x}$	-	0	+	n.d.	-	0	+

Temos, portanto, $f(x) \geq 5 - x \Leftrightarrow x \in [0, 1[\cup [5, +\infty[$.

Função irracional

São função irracionais, por exemplo, as funções reais de variável real f e g :

$$f: x \mapsto y = \sqrt[3]{x}$$

$$g: x \mapsto y = \sqrt[4]{x+3}$$

Não são funções irracionais, por exemplo, as funções h e i :

$$h: x \mapsto y = \sqrt{3+x}$$

$$i: x \mapsto y = \frac{x+3}{\sqrt{5}}$$

Nas funções irracionais a variável independente encontra-se no radicando.

Verifica 2

Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações seguintes.

2.1. $\frac{4}{x} - x < 0$

2.2. $\frac{2x+1}{3-x} - 3 < x$

2.3. $\frac{2}{2-x} \geq \frac{x+3}{2x}$

2.4. $\frac{3+x-x^2}{x-1} \leq 1$

Exemplo 3

Considere a função f , de domínio $]-\infty, 6]$, definida por $f(x) = \sqrt{6-x} - x$.

3.1. Determine os zeros de f , caso existam.

3.2. Determine as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico da função f com a reta de equação $y = 2x + 12$.

Resolução

$$\begin{aligned} 3.1. f(x) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{6-x} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{6-x} = x \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\sqrt{6-x})^2 = x^2 \Leftrightarrow 6-x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Dado que não se pode garantir a equivalência entre as equações $\sqrt{6-x} = x$ e $(\sqrt{6-x})^2 = x^2$, é necessário verificar se os valores obtidos são soluções da equação inicial:

Verificação

Se $x = -3$

$$\sqrt{6-(-3)} - (-3) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9} + 3 = 0$$

(Proposição falsa)

-3 não é um zero da função f .

Se $x = 2$

$$\sqrt{6-2} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4} - 2 = 0$$

(Proposição verdadeira)

2 é um zero da função f .

Conjunto dos zeros da função f : $\{2\}$

$$\begin{aligned} 3.2. f(x) = 2x + 12 &\Leftrightarrow \sqrt{6-x} - x = 2x + 12 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{6-x} = 3x + 12 \Rightarrow (\sqrt{6-x})^2 = (3x + 12)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6 - x = 9x^2 + 72x + 144 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9x^2 + 73x + 138 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -\frac{46}{9} \end{aligned}$$

Verificação

Se $x = -3$

$$\sqrt{6-(-3)} - (-3) = 2 \times (-3) + 12 \Leftrightarrow \sqrt{9} + 3 = -6 + 12$$

(Proposição verdadeira)

Se $x = -\frac{46}{9}$

$$\sqrt{6 - \left(-\frac{46}{9}\right)} - \left(-\frac{46}{9}\right) = 2 \times \left(-\frac{46}{9}\right) + 12 \Leftrightarrow \frac{10}{3} + \frac{46}{9} = \frac{16}{9}$$

(Proposição falsa)

-3 é a única solução da equação

$$f(-3) = \sqrt{6-(-3)} - (-3) = 6$$

O ponto de interseção dos dois gráficos tem coordenadas $(-3, 6)$.

Verifica 3

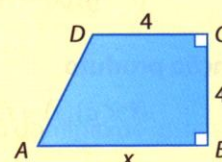
3.1. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

a) $\sqrt{2x-1} = 1 - \sqrt{x-1}$

b) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+5} + 1 = 0$

c) $\sqrt[3]{x^2-36} + 3 = 0$

3.2. Considere o trapézio retângulo $[ABCD]$ da figura seguinte:



Sabe-se que:

• $\overline{BC} = \overline{CD} = 4$

• $\overline{BA} = x$ e $x \geq 4$

a) Mostre que o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é dado, em função de x , por:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 32} + x + 8$$

b) Determine a área do trapézio $[ABCD]$, sabendo que o seu perímetro é igual a 20.

4. Operações com funções

Duas funções f e g , reais de variável real, são iguais se:

$$1. D_f = D_g \quad 2. f(x) = g(x), \forall x \in D_f$$

Função soma

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ e } D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

Função diferença

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \text{ e } D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

Função produto

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \text{ e } D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

Função quociente

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ e } D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$$

$$\text{ou } D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$$

Exemplo 4

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 2x$, e a função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, definida por $g(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

4.1. Determine $(f + g)(1)$.

4.2. Caracterize a função $f \times g$.

4.3. Caracterize a função $\frac{f}{g}$.

Resolução

$$4.1. (f + g)(1) = f(1) + g(1) = 1^2 - 2 + \frac{1}{1^2 - 4} = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$4.2. D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$\begin{aligned} (f \times g)(x) &= f(x) \times g(x) = (x^2 - 2x) \times \frac{x}{x^2 - 4} = \\ &= \frac{x(x - 2)x}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x^2}{x + 2} \end{aligned}$$

$$f \times g: \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2}{x + 2}$$

$$4.3. g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\begin{aligned} D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} = \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 2x}{\frac{x}{x^2 - 4}} \times \frac{x(x - 2)(x^2 - 4)}{x} = (x - 2)(x^2 - 4)$$

$$\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (x - 2)(x^2 - 4)$$

Verifica 4

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$, e a função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$.

4.1. Determine $(f - g)(-1)$.

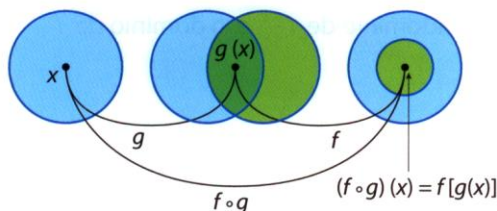
4.2. Defina a função $f \times g$.

4.3. Defina a função $\frac{f}{g}$.

5. Composição de funções

Dadas duas funções, f e g , a composta de f com g escreve-se $f \circ g$ (lê-se: f após g ou composta de f com g) e é definida por:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$



O domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números reais que pertencem ao domínio de g tais que $g(x)$ pertence ao domínio de f .

Simbolicamente

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$$

A composição de duas funções não é comutativa mas é associativa.

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h), \forall f, g \text{ e } h$$

Quando $f \circ g = g \circ f$, f e g dizem-se **funções permutáveis**.

Exemplo 5

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$, definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$, e a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2$.

Caracterize as funções $f \circ g$ e $g \circ f$. As funções f e g são permutáveis?

Resolução

Função $f \circ g$

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \end{aligned}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \frac{1}{\sqrt{x^2}-1} = \frac{1}{|x|-1}$$

$$f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ com } (f \circ g)(x) = \frac{1}{|x|-1}$$

Função $g \circ f$

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \wedge \frac{1}{\sqrt{x}-1} \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x \neq 1\} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)^2 = \frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$g \circ f : \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ com } (g \circ f)(x) = \frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

As funções f e g não são permutáveis porque as funções $f \circ g$ e $g \circ f$ são diferentes.

Verifica 5

Sejam as funções f , g e h , definidas por $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = \frac{x}{2} - 1$ de domínios $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_0^+$ e $\mathbb{R}$, respetivamente.

5.1. Caracterize as funções:

- a) $f \circ g$
- b) $f \circ h$
- c) $h \circ g$

5.2. Indique, entre as dadas, um par de funções permutáveis, caso existam.

6. Função inversa

Sejam f e g duas funções tais que $f[g(x)] = x$, para todo $x \in D_g$ e $g[f(x)] = x$, para todo $x \in D_f$.

Então, a função g é chamada função inversa da função f e representa-se por f^{-1} .

Deste modo, $f(f^{-1}(x)) = x$ e $f^{-1}(f(x)) = x$.

O domínio de f é igual ao contradomínio de f^{-1} e o domínio de f^{-1} é igual ao contradomínio de f .

Exemplo 6

Considere as funções f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definida por $f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}$, g e h de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $g(x) = x^2$ e $h(x) = kx - 1$, ($k \in \mathbb{R}$).

- 6.1. Caracterize a função inversa da função f .
- 6.2. Justifique que a função g não admite inversa, indique uma restrição de g que seja invertível e caracterize a função inversa dessa restrição.
- 6.3. Determine o valor de k sabendo que $h^{-1}(7) = 2$.

Resolução

6.1. $f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}$ e $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Expressão algébrica da correspondência inversa

Para $x \neq 1$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{x-1} = y \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - 2 + y = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - 2x + 2 + xy - y}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - 2x + 2 + xy - y = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow xy - 2x = y - 3 \Leftrightarrow x(y - 2) = y - 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{y-2} \end{aligned}$$

Utilizando x como variável independente, temos $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{x-2}$.

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Portanto, $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x-3}{x-2}$$

- 6.2. A função g não admite inversa porque não é uma função injetiva (neste caso, objetos simétricos têm a mesma imagem).

Por exemplo, a restrição i da função g a $\mathbb{R}_0^+$ é injetiva:

$$\begin{aligned} i: \mathbb{R}_0^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Expressão algébrica da correspondência inversa

$$i(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$

$$i^{-1}(x) = \sqrt{x} \text{ e } D_{i^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$$

$$i^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ com } i^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

6.3. $h^{-1}(7) = 2 \Leftrightarrow 7 = h(2)$

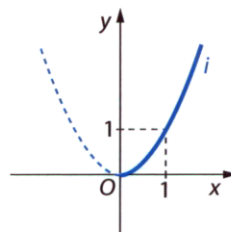
$$h(2) = 7 \Leftrightarrow 2k - 1 = 7 \Leftrightarrow 2k = 8 \Leftrightarrow k = 4$$

Verifica 6

Caracterize a função inversa de cada uma das funções f e g a seguir definidas:

6.1. $f(x) = \frac{x}{x-3}$ de domínio $\mathbb{R} \setminus \{3\}$;

6.2. $g(x) = \sqrt{x-1} - 2$ de domínio $[1, +\infty[$.



7. Definição de sucessão

Definição de sucessão

Uma sucessão de números reais, (a_n) , é uma função, f , em que o domínio é o conjunto dos números naturais e as imagens são números reais.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto a_n$$

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n$$

- $a_1, a_2, \dots, a_n$ são os termos da sucessão;
- n é a ordem do termo;
- $f(n) = a_n$ é o termo geral de sucessão;
- $(f(n))$ ou (a_n) representa a sucessão.

Definição de uma sucessão por recorrência

Definir uma sucessão por recorrência consiste em dar a conhecer o primeiro ou os primeiros termos e o processo pelo qual se pode obter cada um dos termos seguintes através do(s) termo(s) anterior(es).

Por exemplo, seja a sucessão (u_n) definida por recorrência da forma seguinte:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 2 + u_{n-1}, n \geq 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2 + u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Assim, temos que:

$$u_1 = 3; u_2 = 2 + u_1 = 2 + 3 = 5; u_3 = 2 + u_2 = 2 + 5 = 7; \dots$$

Neste caso é fácil verificar que a expressão do termo geral é $u_n = 2n + 1$.

Sucessão monótona

Uma sucessão (u_n) é **monótona decrescente** se cada termo é menor que o anterior.

Uma sucessão (u_n) é **monótona decrescente em sentido lato** se cada termo é menor ou igual ao anterior.

Uma sucessão (u_n) é **monótona crescente** se cada termo é maior que o anterior.

Uma sucessão (u_n) é **monótona crescente em sentido lato** se cada termo é maior ou igual ao anterior.

Sucessão limitada

Uma sucessão é **limitada** quando o conjunto dos seus termos tem um majorante e um minorante, ou seja, o conjunto dos termos da sucessão é limitado.

De um modo geral, uma sucessão (u_n) é limitada se e só se:

$$\exists L, M \in \mathbb{R} : L \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{o símbolo } \exists \text{ lê-se "existe pelo menos um"})$$

8. Progressão aritmética

Definição de progressão aritmética

Uma sucessão (a_n) é uma **progressão aritmética** (p. a.) se existe um número real r tal que:

$$u_{n+1} - u_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se **razão** da progressão aritmética.

Termo geral de uma progressão aritmética

O **termo geral**, u_n , de uma progressão aritmética de razão r é dado por

$$u_n = u_1 + (n - 1) \times r$$

ou
$$u_n = u_k + (n - k) \times r$$

sendo u_k um termo qualquer.

Soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética

Numa progressão aritmética (u_n) , a soma, S_n , dos n primeiros termos é dada por:

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

9. Progressão geométrica

Definição de progressão geométrica

Uma sucessão (a_n) de termos não nulos é uma **progressão geométrica** (p. g.) se existe um número real r , tal que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r, \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{ou} \quad u_{n+1} = u_n \times r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se **razão** da progressão.

Termo geral de uma progressão geométrica

Conhecido o 1.º termo e a razão de uma progressão geométrica (u_n) , podemos conhecer o termo geral.

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

Ou, conhecido um termo qualquer u_k de uma progressão geométrica (u_n) de razão r , o termo geral é:

$$u_n = u_k \times r^{n-k}$$

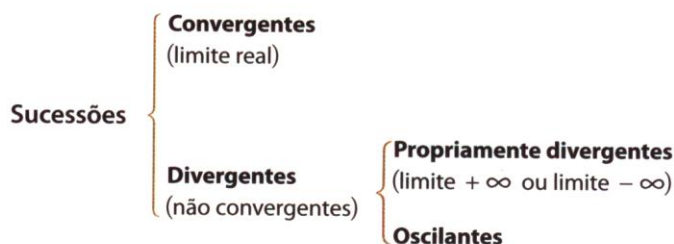
Soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica

A soma, S_n , dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (u_n) de razão r , diferente de 1, é dada por:

$$S_n = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

10. Classificação de uma sucessão quanto à convergência

Quanto à existência e natureza do limite, as sucessões classificam-se da forma seguinte:



11. Soma de todos os termos de uma progressão geométrica

Seja (a_n) uma progressão geométrica de razão r .

(S_n) é convergente se e só se $|r|$ é menor que 1 e, neste caso, a soma de todos os termos da progressão geométrica (a_n) é:

$$S = \lim S_n = \frac{a_1}{1 - r}$$

Exemplo 7

7.1. De uma progressão aritmética (u_n) sabe-se que $u_{16} = 50$ e $u_{25} = 95$.

a) Determine uma expressão do termo geral de (u_n) .

b) Determine $\sum_{n=15}^{25} u_n$.

c) Defina (u_n) por uma fórmula de recorrência.

7.2. De uma progressão geométrica (v_n) sabe-se que:

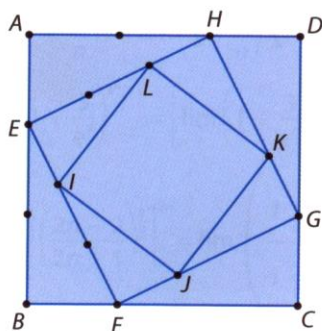
• $v_8 = \frac{1}{2}$ e $v_{12} = \frac{1}{32}$

• (v_n) é monótona.

a) Determine uma expressão do termo geral de (v_n) .

b) Determine $\lim(v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n)$.

7.3. Seja Q_1 o quadrado $[ABCD]$ cuja medida do lado é 27.



O quadrado Q_2 , $[EFGH]$, foi obtido, tal como a figura sugere, dividindo cada um dos lados do quadrado Q_1 em três partes iguais. De um modo geral, cada um dos quadrados Q_n foi obtido a partir do quadrado Q_{n-1} ($n > 2$) repetindo a construção indicada.

Verifica 7

7.1. De uma progressão aritmética (u_n) sabe-se que $u_{25} = -70$ e $u_{45} = -130$.

a) Determine uma expressão do termo geral de (u_n) .

b) Determine $\sum_{n=20}^{50} u_n$.

7.2. Três termos consecutivos de uma progressão aritmética são dados, para um determinado valor de x , por $5x - 10$, x^2 e $5x + 2$.

a) Determine esses três termos.

b) Admitindo que o décimo termo é igual a 22, determine o termo geral da sucessão.

7.3. De uma progressão geométrica (v_n) sabe-se que:

• $v_9 = \frac{1}{9}$ e $v_{12} = \frac{1}{243}$

• $v_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$

a) Determine uma expressão do termo geral de (v_n) .

b) Determine $\lim(v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n)$.

(continua)

Seja b_n a medida do lado do quadrado Q_n . Sabemos, portanto, que $b_1 = 27$.

- Determine b_2 e b_3 .
- Mostre que (b_n) é uma progressão geométrica e indique a respetiva razão.
- Prove que para todo o número natural n , $b_n = 3^{4-n} \times 5^{\frac{n-1}{2}}$.
- Seja (a_n) a sucessão das áreas destes quadrados. Mostre que (a_n) é uma progressão geométrica, indique razão e o termo geral.

Resolução

7.1. a) (u_n) é uma progressão aritmética de razão r ; $u_{16} = 50$ e $u_{25} = 95$

$$u_n = u_k + (n - k) \times r$$

$$u_{25} = u_{16} + (25 - 16) \times r \Leftrightarrow 95 = 50 + 9r \Leftrightarrow 9r = 45 \Leftrightarrow r = 5$$

$$u_n = u_{16} + (n - 16) \times r \Leftrightarrow u_n = 50 + (n - 16) \times 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = 50 + 5n - 80 \Leftrightarrow u_n = 5n - 30$$

$$b) \sum_{n=15}^{25} u_n = u_{15} + u_{16} + \dots + u_{25} = S_{25} - S_{14} = \left| S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n \right.$$

$$= \frac{u_1 + u_{25}}{2} \times 25 - \frac{u_1 + u_{14}}{2} \times 14 =$$

$$= \frac{-25 + 95}{2} \times 25 - \frac{-25 + 40}{2} \times 14 =$$

$$= 35 \times 25 - 7,5 \times 14 = 770$$

Cálculo auxiliar

$$u_n = 5n - 30$$

$$u_1 = 5 \times 1 - 30 = -25$$

$$u_{15} = 5 \times 14 - 30 = 40$$

$$u_{25} = 5 \times 25 - 30 = 95$$

$$c) \begin{cases} u_1 = -25 \\ u_{n+1} = u_n + 5, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

7.2. (v_n) é uma progressão geométrica de razão r ; $v_8 = \frac{1}{2}$ e $v_{12} = \frac{1}{32}$

$$a) v_n = v_k \times r^{n-k}$$

$$v_{12} = v_8 \times r^{12-8} \Leftrightarrow \frac{1}{32} = \frac{1}{2} \times r^4 \Leftrightarrow r^4 = 2 \times \frac{1}{32} \Leftrightarrow r^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2} \vee r = -\frac{1}{2}$$

Como a sucessão é monótona, terá de ser $r > 0$. Logo $r = \frac{1}{2}$.

$$v_n = v_8 \times r^{n-8} \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-8} \Leftrightarrow v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_n = 2^{7-n} \Leftrightarrow v_n = 2^7 \times 2^{-n} \Leftrightarrow v_n = 128 \times 2^{-n}$$

b) Como $|r| < 1$, temos:

$$\lim(v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n) = \lim S_n = \frac{v_1}{1-r} = \frac{128 \times 2^{-1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{64}{\frac{1}{2}} = 128$$

7.3. $b_1 = 27$

$$a) b_2 = \overline{EH} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{AE}^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}b_1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}b_1\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{3} \times 27\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \times 27\right)^2} = \sqrt{18^2 + 9^2} =$$

$$= \sqrt{405} = \sqrt{81 \times 5} = 9\sqrt{5}$$

$$b_3 = \overline{IL} = \sqrt{\overline{EL}^2 + \overline{EI}^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}b_2\right)^2 + \left(\frac{1}{3}b_2\right)^2} =$$

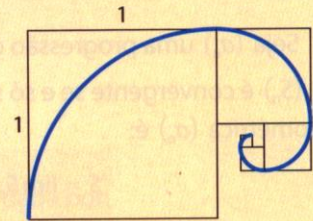
$$= \sqrt{\left(\frac{2}{3} \times 9\sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \times 9\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{180 + 45} = \sqrt{225} = 15$$

Verifica 7

7.4. Os três primeiros termos de uma progressão geométrica são dados, para um determinado valor de x , por $x-5$, $x-1$ e $x+5$.

Determine o termo geral da sucessão.

7.5. Na figura seguinte está representado um quadrado cujo lado mede 1 unidade. Nesse quadrado inscreveu-se um quarto de circunferência com centro num dos vértices e raio igual ao lado.



Cada um dos quartos de circunferência que se construíram a partir do primeiro está inscrito num quadrado de lado igual a metade do lado do quadrado precedente. Dando continuidade a este processo, obteve-se a esteira que se apresenta na mesma figura. Seja (a_n) a sucessão dos comprimentos dos arcos de circunferência que formam esta espiral.

a) Justifique que (a_n) é uma progressão geométrica e determine o comprimento da espiral formada pelos primeiros cinco arcos.

b) Determine o limite do comprimento da espiral constituída por n quartos de circunferência, quando n tende para $+\infty$.

$$\begin{aligned} \text{b) } b_{n+1} &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}b_n\right)^2 + \left(\frac{1}{3}b_n\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}b_n^2 + \frac{1}{9}b_n^2} = \sqrt{\frac{5}{9}b_n^2} \\ &= \sqrt{\frac{5}{9}}\sqrt{b_n^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{b_n^2} \end{aligned}$$

Como $b_n > 0$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, temos que $\sqrt{b_n^2} = b_n$,

peço que $b_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{3}b_n$, donde $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Portanto (b_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } b_n &= b_1 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow b_n = 27 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b_n = 3^3 \times (\sqrt{5})^{n-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b_n = 3^3 \times 3^{-n+1} \times \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b_n = 3^{4-n} \times 5^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned}$$

d) Área de cada quadrado = (lado)²

$$a_n = (b_n)^2 = \left(27 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n-1}\right)^2 = 729 \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$$

Logo, (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{5}{9}$.

12. Número de Neper

A sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é convergente para um número irracional a que se dá o nome de **número de Neper** e que se representa por e .

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718\,28$$

Se $u_n \rightarrow \pm \infty$ e $x \in \mathbb{R}$, então $\lim \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x$

Exemplo 8

Calcule os limites seguintes.

$$\text{8.1. } \lim \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+3} \quad \text{8.2. } \lim \left(1 + \frac{3}{e^n}\right)^{e^{n+1}} \quad \text{8.3. } \lim \left(\sqrt[3]{\frac{2n-2}{2n+1}}\right)^{2n}$$

Resolução

$$\text{8.1. } \lim \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+3} = \lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \times \lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^3 = e^2 \times 1^3 = e^2$$

$$\text{8.2. } \lim \left(1 + \frac{3}{e^n}\right)^{e^{n+1}} = \lim \left(1 + \frac{3}{e^n}\right)^{e^n \times e} = \left[\lim \left(1 + \frac{3}{e^n}\right)^{e^n}\right]^e = (e^3)^e = e^{3e}$$

$$\begin{aligned} \text{8.3. } \lim \left(\sqrt[3]{\frac{2n-2}{2n+1}}\right)^{2n} &= \lim \left[\left(\frac{2n-2}{2n+1}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{2n} = \lim \left(\frac{1 - \frac{2}{2n}}{1 + \frac{1}{2n}}\right)^{\frac{2n}{3}} \\ &= \left[\frac{\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n}\right]^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{e^{-1}}{e^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Verifica 8

Calcule os limites seguintes:

$$\text{8.1. } \lim \left(\frac{3n+2}{3n}\right)^n$$

$$\text{8.2. } \lim \left(\frac{3n-2}{3n+4}\right)^{2n-1}$$

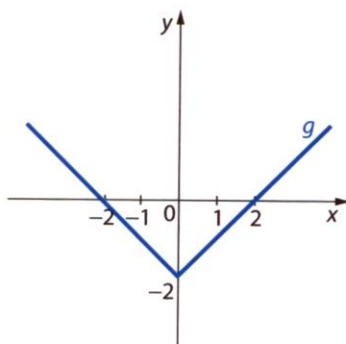
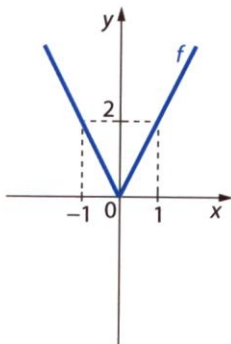
$$\text{8.3. } \lim \left(\frac{2^n-1}{2^n+1}\right)^{2^n+1}$$

$$\text{8.4. } \lim \left[C\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}\right]$$

Questões tipo exame

Questões resolvidas

- 9** Nas figuras seguintes estão representações gráficas de duas funções f e g .



Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

- (A) $g(x) = f(2x) - 2$ (B) $g(x) = 2f(x) - 2$
(C) $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - 2$ (D) $g(x) = \frac{1}{2}f(x) + 2$

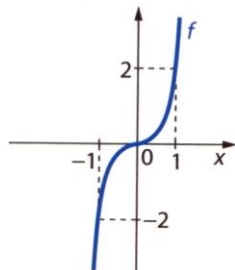
Resolução

O gráfico da função g obtém-se do gráfico da função f por uma dilatação horizontal de coeficiente 2 ($f(x) \rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right)$) seguida de uma translação de vetor $(0, -2)$:

$$\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right) \rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) - 2$$

Resposta: (C)

- 10** Na figura está representada parte do gráfico de uma função f .



Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = |x|$.

Qual é o valor de $(f^{-1} \circ g)(-2)$?

- (A) -1 (B) -2
(C) 1 (D) 2

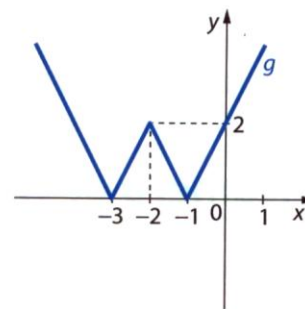
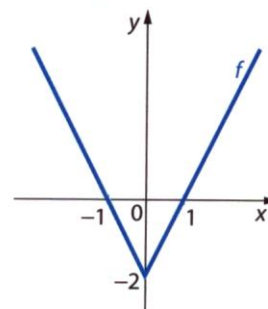
Resolução

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g)(-2) &= f^{-1}(g(-2)) = \\ &= f^{-1}(|-2|) = f^{-1}(2) = 1 \end{aligned}$$

Resposta: (C)

Questões propostas

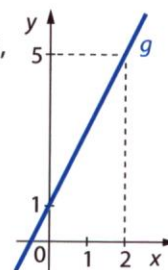
- 9** Nas figuras seguintes estão representações gráficas de duas funções f e g .



Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

- (A) $g(x) = |f(x - 2)|$
(B) $g(x) = f(|x + 2|)$
(C) $g(x) = |f(x + 2)|$
(D) $g(x) = |f(x) - 2|$

- 10** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por $f(x) = \sqrt{x + 2}$ e a função afim g , representada graficamente na figura ao lado.



Indique o valor de $f((g \circ f)(4))$.

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5

- 11** De uma função quadrática f sabe-se que:

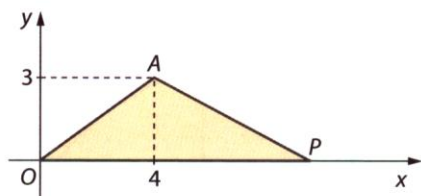
• 2 e 6 são zeros • $f(3) > f(2)$

Qual é o contradomínio de f ?

- (A) $]-\infty, f(4)]$ (B) $]-\infty, f(2)]$
(C) $[f(4), +\infty[$ (D) $[f(6), +\infty[$

Questões resolvidas

- 11** Considere, em referencial o.n. xOy , o ponto $A(4, 3)$. Admita que o ponto P se desloca ao longo do semieixo positivo Ox .



Seja f a função que faz corresponder à abscissa x do ponto P o perímetro do triângulo $[OPA]$.

11.1. Mostre que:

$$f(x) = x + 5 + \sqrt{x^2 - 8x + 25}$$

11.2. Determine a abscissa do ponto P de modo que o perímetro do triângulo $[OPA]$ seja igual a 18.

Resolução

11.1. Perímetro do triângulo $[OPA] = \overline{OA} + \overline{OP} + \overline{AP}$

$$\overline{OA} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\overline{OP} = x$$

$$A(4, 3) \text{ e } P(x, 0)$$

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{(x-4)^2 + (0-3)^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 9} \\ &= \sqrt{x^2 - 8x + 25} \end{aligned}$$

Portanto:

$$f(x) = x + 5 + \sqrt{x^2 - 8x + 25}$$

$$\mathbf{11.2.} \quad f(x) = 18 \Leftrightarrow x + 5 + \sqrt{x^2 - 8x + 25} = 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 8x + 25} = 13 - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x^2 - 8x + 25})^2 = (13 - x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 25 = 169 - 26x + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18x = 144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 8$$

Verificação:

$$8 + 5 + \sqrt{8^2 - 8 \times 8 + 25} = 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13 + \sqrt{25} = 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 = 18 \text{ (proposição verdadeira)}$$

Se o perímetro do triângulo $[OPA]$ é igual a 18, a abscissa do ponto P é igual a 8.

Questões propostas

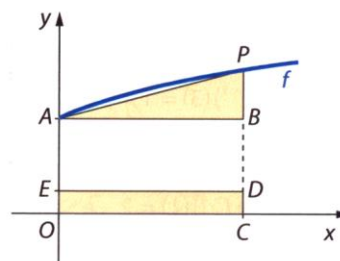
- 12** Considere a função f , de domínio $[-16, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \sqrt{x + 16}$$

12.1. Determine as coordenadas do ponto, ou dos pontos, de interseção do gráfico da função f com a reta de equação:

$$y = \frac{2-x}{7}$$

12.2. No referencial da figura estão representados os pontos A, B, C, D, E e P bem como parte do gráfico da função f .



Sabe-se que:

- o gráfico da função f intersesta o eixo Oy no ponto A ;
- P é um ponto de abscissa positiva que se desloca ao longo do gráfico da função f ;
- os pontos B, C e D têm abscissas iguais à do ponto P ;
- o ponto B tem ordenada igual à do ponto A ;
- $[OCDE]$ é um retângulo em que o ponto E tem coordenadas $(0, 1)$.

Seja g a função que faz corresponder à abscissa x do ponto P a área do triângulo $[ABP]$.

a) Mostre que:

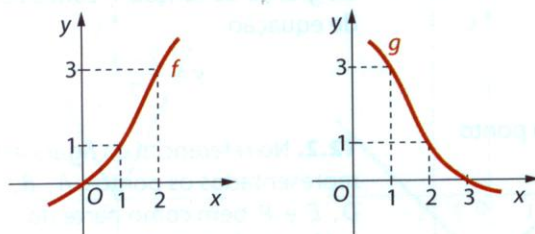
$$g(x) = 0,5x\sqrt{x + 16} - 2x$$

b) Determine a abscissa do ponto P sabendo que o triângulo $[ABP]$ e o retângulo $[OCDE]$ têm a mesma área.

Questões para praticar

Itens de seleção

- 13** Na figura estão representadas parte dos gráficos de duas funções reais de variável real f e g , onde se assinalam as imagens de alguns pontos.

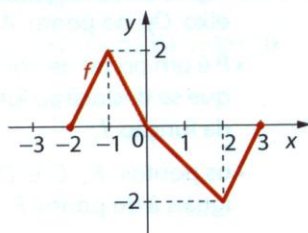


Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) $(f \circ g)(2) = 1$ e $(g \circ f)(2) = 3$
 (B) $(g \circ f^{-1})(3) = 1$ e $(g^{-1} \circ f)(1) = 2$
 (C) $(g + f)(1) = 4$ e $(g \times f)(2) = 4$
 (D) $(g^{-1} \circ f^{-1})(1) = 2$ e $(f \circ g^{-1})(1) = 1$

- 14** Considere as funções f e g tais que:

- a função f está representada graficamente na figura seguinte;



- a função g , de domínio $\mathbb{R}$, é definida por:
 $g(x) = \frac{x}{2} - 3$

Qual é o valor de $(f \circ g)(4) - (g^{-1} \circ f)(2)$?

- (A) -2 (B) -1
 (C) 0 (D) 1

- 15** Considere as funções:

- f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$;
- g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$, definida por:
 $g(x) = \frac{4x}{3 - 2x}$

Qual é o valor do número real a tal que $(g \circ f)(a) = -1$?

- (A) $-\frac{4}{5}$ (B) 5
 (C) 1 (D) 0

- 16** Seja f a função de domínio $]-\infty, 2]$ definida por $f(x) = \sqrt{2-x}$.

Qual é o valor de $f^{-1}(2)$?

- (A) -2
 (B) 0
 (C) 2
 (D) -4

- 17** De uma função quadrática f sabe-se que o contradomínio é o intervalo $]-\infty, f(2)]$.

Qual dos seguintes conjuntos não pode ser o domínio da função g definida por $g(x) = \sqrt{f(x)}$?

- (A) $[-1, 0]$
 (B) $[2, 100]$
 (C) $\mathbb{R}_0^+$
 (D) $\{2\}$

Itens de construção

- 18** Considere as funções reais de variável real:
 $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

definidas por $f(x) = \frac{1}{2-x} - 1$ e $g(x) = \sqrt{x+1}$, respetivamente.

- 18.1.** Determine o conjunto de números reais x tais que $f(x) \geq -2$.

(Apresente o resultado sob a forma de intervalo ou união de intervalos.)

- 18.2.** Caracterize a função $f \circ g$.

- 18.3.** Caracterize a função inversa de g .

- 19** Considere a função f , de domínio $[0, 20]$, definida por $f(x) = \sqrt{20x - x^2}$ e a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 8 - x$.

- 19.1.** Determine os números reais x tais que $f(x) = x$.

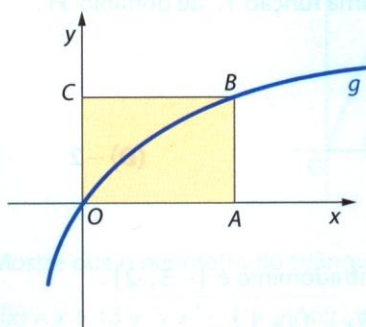
- 19.2.** Determine as coordenadas do(s) ponto(s) de interseção dos gráficos de f e g .

- 19.3.** Caracterize a função $f \circ g$.

- 19.4.** Determine os zeros da função $f \circ g$.

- 20** Considere a função g , definida em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ por $g(x) = \frac{5x}{x+2}$.

No referencial xOy da figura está parte da representação gráfica da função g .



Sabe-se que:

- B é um ponto de abscissa positiva que se desloca ao longo do gráfico da função g ;
- o ponto C pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à de B ;
- o ponto A pertence ao eixo Ox e tem abscissa igual à de B .

Considere que a unidade de medida é o centímetro. Seja P o perímetro do retângulo $[OABC]$ representado na figura.

- 20.1.** Mostre que o perímetro do retângulo $[OABC]$ é dado em função de x , abscissa do ponto B , por $P(x) = \frac{2x^2 + 14x}{x+2}$.
- 20.2.** Determine as coordenadas do ponto B quando o perímetro do retângulo é 12 cm.
- 20.3.** Determine as abscissas do ponto B para as quais o perímetro do retângulo é não superior a 24 cm.
- 20.4.** Determine o perímetro do retângulo de área igual a 81 cm^2 .
- 21** Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, definida por $f(x) = \frac{2x-1}{2-x}$.

- 21.1.** Resolva analiticamente, em $\mathbb{R}$, a condição $f(x) < \frac{4x}{3-x}$.

21.2. Considere, a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida para cada número real k , por $g(x) = kx - 3$.

Determine o valor de k para o qual se tem:

- a) $(f \circ g)(1) = -1$
- b) $g^{-1}(3) = 2$

- 22** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, definida por $f(x) = 1 - \frac{2}{2-x}$.

22.1. Determine o conjunto de números reais x tais que $f(x) \leq 2$.

Apresente o resultado na forma de intervalo ou união de intervalos.

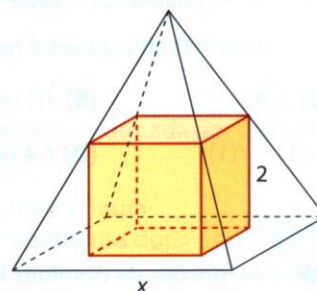
22.2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2$.

Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $(f \circ g)(x) = x$.

22.3. Justifique que a equação $f(x) = f^{-1}(x)$ é equivalente à equação $f(x) = x$.

Resolva as duas equações.

- 23** Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular construída sobre um cubo com 2 cm de aresta.



Sabe-se que:

- uma das faces do cubo está contida na base da pirâmide;
- os vértices da face do cubo paralela à base são pontos das arestas laterais da pirâmide;
- a base da pirâmide tem x cm de lado ($x > 2$).

23.1. Mostre que a altura, h , da pirâmide é dada por:

$$h(x) = \frac{2x}{x-2}$$

23.2. Mostre que o volume, V , da pirâmide é dado por:

$$V(x) = \frac{2x^3}{3x-6}$$

23.3. Determine o volume da pirâmide cuja aresta da base é igual a 6 cm.

23.4. Sabendo que o volume da pirâmide é igual a 36 cm^3 , determine os valores exatos das possíveis medidas da aresta da base.

Sugestão: Tenha em conta a alínea anterior e use a regra de Ruffini.

- 1** Para cada valor real de k , a expressão $f(x) = x^2 - k$ define uma função f , de domínio $\mathbb{R}$.

Seja g a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definida por $g(x) = \frac{2}{x}$.

O valor de k para o qual $(g \circ f)(3) = 2$ é:

- (A) $-\frac{14}{9}$ (B) 8 (C) $\frac{10}{3}$ (D) -2

- 2** De uma função f , de domínio $[-2, 1]$, sabe-se que o contradomínio é $[-3, 2]$.

Qual é o contradomínio da função g definida por $g(x) = 2|f(x-1)| + 1$?

- (A) $[0, 6]$ (B) $[1, 7]$ (C) $[4, 6]$ (D) $[5, 7]$

- 3** De uma função quadrática f sabe-se que o contradomínio é $]-\infty, f(0)]$.

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

- (A) $f(0) > 0$ (B) $f(1) < 0$
(C) $f(-1) < f(1)$ (D) f é uma função par

- 4** Considere as funções de domínio $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 - 3x - 2$ e $g(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$.

4.1. Verifique que 2 é um zero da função f e determine o conjunto de números reais x tais que $f(x) \geq 0$.

4.2. Defina a função h sabendo que $h = \frac{f}{g}$.

4.3. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $h(x) > 0$.

- 5** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, definida por $f(x) = \frac{4}{4-x} - 2$.

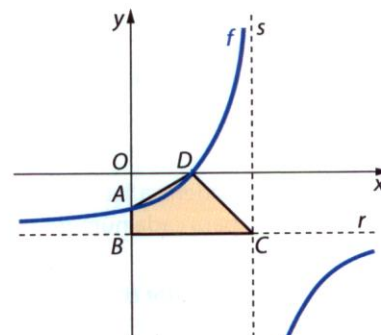
5.1. Determine o conjunto de números reais x tais que $f(x) \geq -4$.

Apresente o resultado na forma de intervalo ou união de intervalos.

5.2. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f .

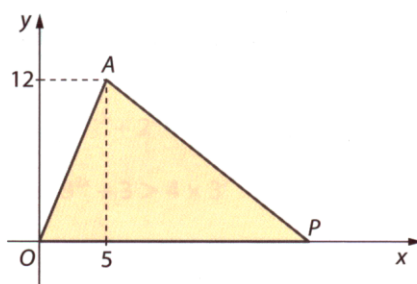
Também estão representados:

- as retas r e s , assíntotas do gráfico de f ;
- o quadrilátero $[ABCD]$;
- A e D são os pontos de interseção do gráfico de f com os eixos coordenados;
- B é o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy ;
- C é o ponto de interseção das retas r e s .



Determine a área do quadrilátero $[ABCD]$.

- 6** Num referencial xOy considere o ponto A de coordenadas $(5, 12)$ e um ponto P que se move sobre o semieixo positivo Ox .



- 6.1.** Mostre que o perímetro do triângulo $[OPA]$, em função da abscissa, x , do ponto P , é dado por:

$$f(x) = x + 13 + \sqrt{x^2 - 10x + 169}, \text{ com } x \in \mathbb{R}^+$$

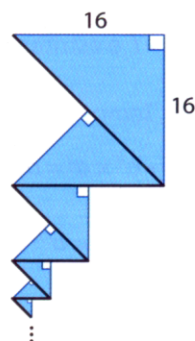
- 6.2.** Determine a área do triângulo $[OPA]$, sabendo que o seu perímetro é igual a 90.

- 6.3.** Determine o perímetro do triângulo $[OPA]$, sabendo que é retângulo em P .

- 6.4.** Resolva a equação $x^2 = 13^2 + (f(x) - x - 13)^2$ e justifique que, para o valor de x encontrado, o triângulo $[OPA]$ é retângulo em A .

- 7** Na figura está representado um triângulo retângulo isósceles cuja medida de cada um dos catetos é igual a 16 unidades.

Os triângulos que se construíram a partir deste obtiveram-se, tal como a figura sugere, tomando para medida dos catetos metade da medida da hipotenusa do triângulo precedente.



- 7.1.** Considere a linha poligonal formada pelas hipotenusas dos triângulos.

Seja (p_n) a sucessão dos comprimentos dos segmentos desta linha poligonal.

Mostre que (p_n) é uma progressão geométrica e determine o comprimento da linha poligonal caso esta tenha oito segmentos.

- 7.2.** Considere a sucessão (a_n) das áreas destes triângulos.

a) Justifique que (a_n) é uma progressão geométrica.

b) Determine o limite, quando n tende para $+\infty$, da soma das áreas dos n triângulos.

- 8** Considere as funções f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 4x - 1$ e g , de domínio $\left]-\infty, \frac{1}{8}\right]$, definida por $g(x) = \sqrt{1 - 8x}$.

- 8.1.** Caracterize as funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

- 8.2.** Resolva a equação $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

- 8.3.** As funções f e g são permutáveis? Justifique.

- 8.4.** Defina a função inversa da função g .

- 8.5.** Determine os números reais x tais que $g^{-1}(x) = f(x - 3)$.

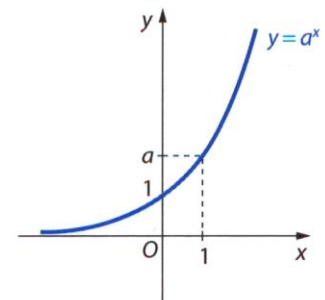
- 9** Sendo $u_n = {}^nC_p$, mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)^n = e^p$.

Tema 2

Função exponencial e função logarítmica

1. Função exponencial

Chama-se **função exponencial** de base $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ à função definida por $f(x) = a^x$.



CPEN-MA12 e Porto Editora

Propriedades da função exponencial de base a ($a > 1$)

Se $a > 1$, a função exponencial f definida por $f(x) = a^x$ tem as **propriedades** seguintes:

- Domínio: $\mathbb{R}$
- Contradomínio: $\mathbb{R}^+$ ($a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)
- $a^0 = 1$
- f é injetiva ($a^x = a^y \iff x = y$)
- f é estritamente crescente ($a^x < a^y \iff x < y$)

Temos ainda:

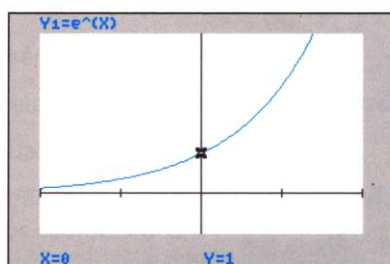
- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Função exponencial de base e

Qualquer número positivo diferente de 1 pode ser utilizado como base de uma função exponencial. Contudo, algumas bases são mais utilizadas do que outras.

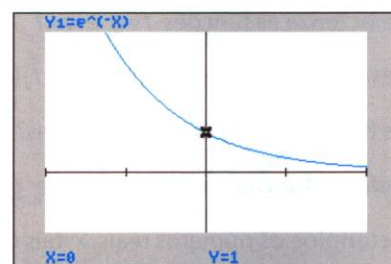
Uma função exponencial importante é aquela que tem como base o número e .

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \approx 2,718\ 28$$



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto e^x$$



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto e^{-x}$$

Exemplo 1 Equações e inequações com exponenciais

Determine, em $\mathbb{R}$, a solução de cada uma das seguintes condições:

1.1. $3^{x+1} = \frac{1}{9}$

1.2. $\frac{1}{2^{x-3}} = \sqrt{8}$

1.3. $2 \times 3^{x+1} + 4 \times 3^{x-1} = 66$

1.4. $2^{x+3} + 2^{2-x} = 33$

1.5. $7^{4-2x} - 49^{x-2} < 0$

1.6. $3^{2x} + 3 > 4 \times 3^x$

Resolução

1.1. $3^{x+1} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x+1} = \frac{1}{3^2} \Leftrightarrow 3^{x+1} = 3^{-2} \Leftrightarrow x+1 = -2 \Leftrightarrow x = -3$

$$1.2. \frac{1}{2^{x-3}} = \sqrt{8} \Leftrightarrow 2^{-(x-3)} = \sqrt{2^3} \Leftrightarrow 2^{-x+3} = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow -x+3 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$1.3. 2 \times 3^{x+1} + 4 \times 3^{x-1} = 66 \Leftrightarrow 2 \times 3^x \times 3^1 + 4 \times 3^x \times 3^{-1} = 66 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{(3)}{6} \times 3^x + \underset{(3)}{4} \times 3^x = \underset{(3)}{66} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 \times 3^x + 4 \times 3^x = 198 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 22 \times 3^x = 198 \Leftrightarrow 3^x = \frac{198}{22} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$1.4. 2^{x+3} + 2^{2-x} = 33 \Leftrightarrow 2^x \times 2^3 + 2^2 \times 2^{-x} = 33 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 \times \underset{(2^x)}{2^x} + 4 \times \underset{(2^x)}{\frac{1}{2^x}} = 33 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 \times 2^{2x} + 4 = 33 \times 2^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 \times (2^x)^2 - 33 \times 2^x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{y=2^x}{8y^2 - 33y + 4 = 0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{33 \pm \sqrt{33^2 - 4 \times 8 \times 4}}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \vee y = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{y=2^x}{2^x = 2^2 \vee 2^x = 2^{-3}} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$$

$$1.5. 7^{4-2x} - 49^{x-2} < 0 \Leftrightarrow 7^{4-2x} < (7^2)^{x-2} \Leftrightarrow 7^{4-2x} < 7^{2x-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2x < 2x - 4 \Leftrightarrow -4x < -8 \Leftrightarrow x > 2$$

$$1.6. 3^{2x} + 3 > 4 \times 3^x \Leftrightarrow (3^x)^2 - 4 \times 3^x + 3 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{y=3^x}{y^2 - 4y + 3 > 0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y < 1 \vee y > 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{y=3^x}{3^x < 3^0 \vee 3^x > 3^1} \Leftrightarrow$$

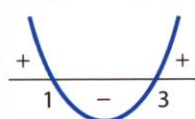
$$\Leftrightarrow x < 0 \vee x > 1 \Leftrightarrow$$

$$x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$y^2 - 4y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow y = 1 \vee y = 3$

**Verifica 1**

Determine, em $\mathbb{R}$, a solução de cada uma das seguintes condições:

1.1. $3^{1-2x} = 3^{2-x}$

1.2. $\frac{1}{\sqrt{2}} = 4^{x-1}$

1.3. $27^{x+1} - 9^{x-1} = 0$

1.4. $4^{x-1} + 3 \times 2^{1+2x} = 50$

1.5. $5^{2x} + 1 = 26 \times 5^{x-1}$

1.6. $3 \times 3^x + 9 \times 3^{-x} - 28 = 0$

1.7. $5^{x-1} < 25$

1.8. $\frac{1}{\sqrt{7}} - 49^{1-x} > 0$

1.9. $2^{x^2-1} < 1$

1.10. $\left(\frac{7}{5}\right)^x > 1$

1.11. $7^x > 5^x$

1.12. $3^{2x} - 4 \times 3^x + 3 > 0$

1.13. $5^{x+1} + 5^{1-x} \leq 26$

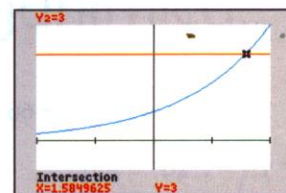
2. Logaritmos

Resolver a equação:

$$2^x = 3$$

é determinar o número x a que é necessário elevar 2 para obter 3 ;
 x é o **logaritmo** de 3 na base 2 .

$$2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$$



CPEN-MA12 e Porto Editora

$$2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3 \Rightarrow x \approx 1,58$$

O **logaritmo** de um número real positivo x , numa base a , é o expoente y a que é necessário elevar a para obter x ($a > 0$ e $a \neq 1$).

$$a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x$$

Assim:

$$\log_{10} 100 = 2, \quad \text{porque } 10^2 = 100 \quad \text{ou} \quad \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$$

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3, \quad \text{porque } 2^{-3} = \frac{1}{8} \quad \text{ou} \quad \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$$

$$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}, \quad \text{porque } 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad \log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\log_{15} 15 = 1, \quad \text{porque } 15^1 = 15 \quad \text{ou} \quad \log_{15} 15 = \log_{15} 15^1 = 1$$

$$\log_7 1 = 0, \quad \text{porque } 7^0 = 1 \quad \text{ou} \quad \log_7 1 = \log_7 7^0 = 0$$

Consequências da definição:

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

Exemplo 2 Equações com logaritmos

Resolva cada uma das seguintes equações.

2.1. $\log_3 x = 2$

2.2. $\log_2 x = -3$

Resolução

2.1. $\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 \Leftrightarrow x = 9$. Logo, a solução é 9.

2.2. $\log_2 x = -3 \Leftrightarrow x = 2^{-3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$. Logo, a solução é $\frac{1}{8}$.

Verifica 2

Resolva cada uma das equações.

2.1. $\log_2 x = 3$

2.2. $\log_{10} x = 0$

2.3. $\log_3 x = -1$

2.4. $\log_5 x = 1$

2.5. $\log_{10} x = 3$

O logaritmo de x , na base **e**, representa-se por $\ln x$.

Se nada for dito em contrário, o logaritmo de x na base **10**, representa-se por $\log x$.

Para calcular o logaritmo de um número na base **e** ou na base **10** é possível usar a calculadora recorrendo às teclas **LN** e **LOG** ou equivalente.

$$\log_{10} x = \log x$$

$$\log_{10} 100 = \log 100 = 2$$

log(100)	2.

$$\log_e x = \ln x$$

$$\log_e e^3 = \ln e^3 = 3$$

ln(e³)	3.

Fórmula da mudança de base

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\log x}{\log a} \quad (x \in \mathbb{R}^+; a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Por exemplo:

$$\log_2 8 = \frac{\ln 8}{\ln 2} \quad \text{ou} \quad \log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2}$$

ln(8)/ln(2)	3.
log(8)/log(2)	3.

Propriedades dos logaritmos

Sejam x e y números reais positivos, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $p \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

- $\log_a (x \times y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^p = p \log_a x$

Casos particulares:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x \quad \text{e} \quad \log \frac{1}{x} = -\log x$$

Exemplo 3 Propriedades dos logaritmos

3.1. Transforme $\frac{1}{2} \log_b u + 3$ no logaritmo de uma expressão.

3.2. Sem recorrer à calculadora, determine o valor de:

a) $\log_3 18 + \log_3 4 - 2 \log_3 8$

b) $\log_5 \left(\frac{2}{5}\right) - \frac{1}{2}(\log_5 64 - \log_5 16)$

c) $\log_2 \frac{16^3 \times \sqrt[3]{64}}{8^5 \times \sqrt{32}}$

3.3. Mostre que $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Verifica 3

3.1. Transforme

$$\frac{1}{3} \log a + 2 \log b - \frac{1}{2} (\log c + 3 \log d)$$

no logaritmo de uma expressão.

Resolução

$$\begin{aligned} 3.1. \quad \frac{1}{2} \log_b u + 3 &= \log_b u^{\frac{1}{2}} + 3 = \\ &= \log_b \sqrt{u} + \log_b b^3 = \log_b (\sqrt{u} \times b^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2. \quad a) \log_3 18 + \log_3 4 - 2 \log_3 8 &= \log_3 (18 \times 4) - 2 \frac{\log_3 8}{\log_3 9} = \\ &= \log_3 72 - 2 \frac{\log_3 8}{2} = \log_3 72 - \log_3 8 = \log_3 \frac{72}{8} = \\ &= \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \log_5 \left(\frac{2}{5} \right) - \frac{1}{2} (\log_5 64 - \log_5 16) &= \log_5 \left(\frac{2}{5} \right) - \frac{1}{2} \log_5 \left(\frac{64}{16} \right) = \\ &= \log_5 2 - \log_5 5 - \log_5 4^{\frac{1}{2}} = \log_5 2 - 1 - \log_5 2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \log_2 \frac{16^3 \times \sqrt[3]{64}}{8^5 \times \sqrt{32}} &= \log_2 (16^3 \times \sqrt[3]{64}) - \log_2 (8^5 \times \sqrt{32}) = \\ &= \log_2 (2^4)^3 + \log_2 (2^6)^{\frac{1}{3}} - [\log_2 (2^3)^5 + \log_2 (2^5)^{\frac{1}{2}}] \\ &= \log_2 2^{12} + \log_2 2^2 - \log_2 2^{15} - \log_2 2^{\frac{5}{2}} = 12 + 2 - 15 - \frac{5}{2} = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$3.3. \log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$$

Verifica 3

3.2. Sem recorrer à calculadora, determine o valor de:

a) $2 \log_4 24 - \log_2 15 + \log_2 5$

b) $\frac{1}{2} \log_4 25 + \log_4 \frac{2}{5} + \log_4 32$

c) $\log_3 \frac{9^5 \times \sqrt[3]{81}}{3\sqrt{27}}$

3.3. Mostre que:

$$\frac{1}{\log_{18} 12} + \frac{1}{\log_8 12} = 2$$

3. Função logarítmica

Chama-se **função logarítmica de base a** à função f definida por $f(x) = \log_a x$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Propriedades da função logarítmica de base a ($a > 1$)

Se $a > 1$, a função f definida por $f(x) = \log_a x$ tem as **propriedades** seguintes:

- Domínio: $\mathbb{R}^+$
(os números negativos e o número zero não têm logaritmo, qualquer que seja a base a)
- Contradomínio: $\mathbb{R}$
- 1 é o único zero de f : $\log_a 1 = 0$
- f é injetiva ($\log_a x = \log_a y \iff x = y$)
- f é estritamente crescente ($\log_a x < \log_a y \iff x < y$)

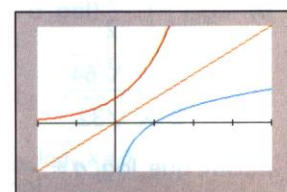
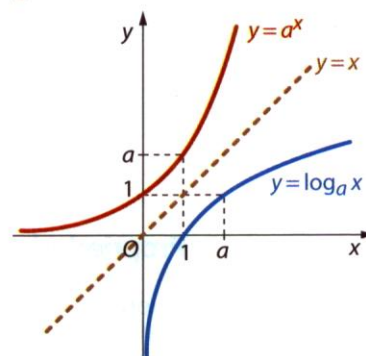
Temos ainda que:

A função logarítmica de base a e a função exponencial de base a são inversas uma da outra:

$$a^x = y \iff x = \log_a y \quad \log_a x = y \iff x = a^y$$

Em particular as funções exponencial e logarítmica de base e são inversas uma da outra:

$$e^x = y \iff x = \ln y \quad \ln x = y \iff x = e^y$$



Exemplo 4 Equações com exponenciais

Resolva as equações.

4.1. $e^{x+2} + 2 = e^x + 2e^2$

4.2. $1000 = 500(1 + 0,1)^x$

4.3. $2e^{6x} + e^{3x} = 1$

4.4. $2t^3e^{-t} = t^3e^{-0,6t}$

Resolução

$$\begin{aligned}
 4.1. \quad e^{x+2} + 2 &= e^x + 2e^2 \Leftrightarrow e^x \times e^2 - e^x = 2e^2 - 2 \\
 &\Leftrightarrow e^x(e^2 - 1) = 2(e^2 - 1) \\
 &\Leftrightarrow e^x = 2 \\
 &\Leftrightarrow x = \ln 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.2. \quad 1000 &= 500(1 + 0,1)^x \Leftrightarrow (1 + 0,1)^x = \frac{1000}{500} \\
 &\Leftrightarrow (1,1)^x = 2 \\
 &\Leftrightarrow x = \log_{1,1} 2 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 1,1} \\
 &\Rightarrow x \approx 7,27
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.3. \quad 2e^{6x} + e^{3x} &= 1 \Leftrightarrow 2(e^{3x})^2 + e^{3x} - 1 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} u = e^{3x} \\
 &\Leftrightarrow 2u^2 + u - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow u = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \\
 &\Leftrightarrow u = \frac{1}{2} \vee u = -1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} u = e^{3x} \\
 &\Leftrightarrow e^{3x} = \frac{1}{2} \vee e^{3x} = -1 \\
 &\Leftrightarrow 3x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{a equação } e^{3x} = -1 \text{ é impossível} \\
 &\Leftrightarrow 3x = -\ln 2 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{-\ln 2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.4. \quad 2t^3e^{-t} &= t^3e^{-0,6t} \Leftrightarrow 2t^3e^{-t} - t^3e^{-0,6t} = 0 \\
 &\Leftrightarrow t^3(2e^{-t} - e^{-0,6t}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow t^3 = 0 \vee 2e^{-t} - e^{-0,6t} = 0 \\
 &\Leftrightarrow t = 0 \vee e^{-t}\left(2 - \frac{e^{-0,6t}}{e^{-t}}\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow t = 0 \vee e^{-t} = 0 \vee 2 - e^{0,4t} = 0 \\
 &\Leftrightarrow t = 0 \vee e^{0,4t} = 2 \\
 &\Leftrightarrow t = 0 \vee 0,4t = \ln 2 \\
 &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{\ln 2}{0,4} \\
 &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{5}{2} \ln 2
 \end{aligned}$$

Verifica 4

Resolva as equações.

4.1. $0,2e^{2-0,3x} - 0,2e^{0,3x-2} = 0$

4.2. $25(1 - 2^{2x}) = 21$

4.3. $\frac{200}{1 + 3e^{-0,3t}} = 100$

4.4. $3e^{-0,2x} + 3e^{0,2x} = 10$

4.5. $e^{x-3} = \frac{11e^{-x} + 2}{e^3}$

Exemplo 5 Equações com logaritmos

Resolva as equações.

5.1. $\ln x^2 = 2 \ln 4$

5.2. $\log_2 \left(\frac{x+2}{x-1} \right) + \log_2 ((x+2)(x+1)) = 2$

Resolução

5.1. $\ln x^2 = 2 \ln 4$

Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\ln x^2 = 2 \ln 4 \Leftrightarrow \ln x^2 = \ln 4^2 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4^2 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4$$

Como 4 e -4 pertencem ao domínio, $\{-4, 4\}$ é o conjunto-solução da condição.

Nota: Onde está o erro na seguinte resolução?

$$\ln x^2 = 2 \ln 4 \Leftrightarrow 2 \ln x = 2 \ln 4 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln 4 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

5.2. $\log_2 \left(\frac{x+2}{x-1} \right) + \log_2 ((x+2)(x+1)) = 2$

Domínio: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0 \wedge \frac{x+2}{x-1} > 0 \wedge (x+2)(x-1) > 0 \right\}$
 $=]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$



$$\log_2 \left(\frac{x+2}{x-1} \right) + \log_2 ((x+2)(x+1)) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{x+2}{\cancel{x-1}} (x+2)(\cancel{x-1}) \right) = 2 \wedge x \in D \stackrel{x \neq 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x+2)^2 = 2 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 2^2 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x+2 = 2 \vee x+2 = -2) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = -4) \wedge x \in D$$

Como $0 \notin D$, a solução é $x = -4$.

Nota: Onde está o erro na seguinte resolução?

$$\log_2 \left(\frac{x+2}{x-1} \right) + \log_2 ((x+2)(x-1)) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x+2) - \log_2 (\cancel{x-1}) + \log_2 (x+2) + \log_2 (\cancel{x-1}) = 2$$

$$\wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_2 (x+2) = 2 \wedge x \in D \Leftrightarrow \log_2 (x+2) = 1 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 2^1 \wedge x \in D \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \text{ (equação impossível)}$$

Verifica 5

Resolva as equações.

5.1. $3x - x \ln x = 0$

5.2. $\frac{1 - \ln(2x)}{x} = 0$

5.3. $\log_2(2x) = 3 - \log_2 \left(1 + \frac{x}{2} \right)$

5.4. $2(\ln x)^2 - \ln x = 1$

Exemplo 6 A carga da bateria

Uma bateria vai perdendo carga mesmo quando não é utilizada.

- 6.1.** Para um dado tipo de bateria, em cada mês de não utilização a carga perdida é de 10%.

Designado por C_0 a carga inicial de uma bateria e por $C(x)$ a carga da bateria após x meses sem utilização, determine $C(1)$, $C(2)$ e $C(3)$ para concluir que $C(x) = C_0(0,9)^x$, $x \geq 0$.

- 6.2.** Quantos meses sem utilização são necessários decorrer para que essa bateria tenha apenas 5% da carga inicial?

Apresente o resultado em meses com aproximação às décimas.

- 6.3.** Determine t tal que $C(x+t) = \frac{1}{2}C(x)$, qualquer que seja x , e interprete o resultado no contexto da situação descrita. Apresente o resultado, em meses, com aproximação às décimas.

Resolução

- 6.1.** Suponhamos que a carga original é C_0 .

Um mês depois a carga será:

$$C_0 - 0,1C_0 = (1 - 0,1)C_0 = 0,9C_0$$

Dois meses depois a carga será:

$$0,9C_0 - 0,1 \times 0,9C_0 = (1 - 0,1) \times 0,9C_0 = 0,9 \times 0,9C_0 = (0,9)^2C_0$$

Três meses depois a carga será:

$$(0,9)^2C_0 - 0,1 \times (0,9)^2C_0 = (1 - 0,1) \times (0,9)^2C_0 = 0,9 \times (0,9)^2C_0 = (0,9)^3C_0$$

x meses depois a carga será $C_0(0,9)^x$.

- 6.2.** Pretende-se determinar x de modo que $C_0(0,9)^x = 0,05C_0$.

$$C_0(0,9)^x = 0,05C_0 \stackrel{C_0 \neq 0}{\Leftrightarrow} (0,9)^x = 0,05$$

$$\Leftrightarrow x = \log_{0,9} 0,05$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 0,05}{\ln 0,9} \Rightarrow x \approx 28,4$$

Se não utilizada, a bateria terá apenas 5% da carga original cerca de 28,4 meses depois de ser fabricada.

$$\mathbf{6.3.} \quad C(x+t) = \frac{1}{2}C(x) \Leftrightarrow \frac{C(x+t)}{C(x)} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{C_0 \times 0,9^{x+t}}{C_0 \times 0,9^x} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0,9^{x+t-x} = 0,5$$

$$\Leftrightarrow 0,9^t = 0,5$$

$$\Leftrightarrow t = \log_{0,9} 0,5$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 0,5}{\ln 0,9} \Rightarrow t \approx 6,6$$

Em cada 6,6 meses a carga de uma bateria não usada reduz-se a metade.

Verifica 6

Foi comprado um terreno prevendo-se que se valorize 5% ao ano.



Se as previsões se concretizarem, quanto tempo terá de decorrer para que o valor do terreno duplique?

Apresente o resultado em anos com aproximação às unidades.

Exemplo 7 O número de árvores de um bosque

O número A de árvores de determinada espécie cresceu num bosque de acordo com a fórmula:

$$A(t) = 100 \times 1,8^{kt}$$

sendo t o número de anos decorridos desde a primeira contagem.



- 7.1.** Decorridos 10 anos após a primeira contagem, verificou-se que, no bosque, existiam 180 árvores dessa espécie.

Verifique que $k = 0,1$.

- 7.2.** Verifique que, para qualquer valor de t , $\frac{A(t+12)}{A(t)}$ é constante.

Determine um valor aproximado dessa constante (arredondado às unidades) e interprete esse valor no contexto da situação descrita.

- 7.3.** Exprima t em função de A e conclua que $t = \frac{\ln A - \ln 100}{0,1 \ln 1,8}$.

Resolução

$$A(t) = 100 \times 1,8^{kt}$$

$$\begin{aligned} \text{7.1. } A(10) = 180 &\Leftrightarrow 100 \times 1,8^{k \times 10} = 180 \\ &\Leftrightarrow 1,8^{10k} = 1,8 \\ &\Leftrightarrow 10k = 1 \\ &\Leftrightarrow k = 0,1 \end{aligned}$$

$$\text{7.2. } A(t) = 100 \times 1,8^{0,1t}$$

$$\frac{A(t+12)}{A(t)} = \frac{100 \times 1,8^{0,1(t+12)}}{100 \times 1,8^{0,1t}} = 1,8^{0,1t + 0,1 \times 12 - 0,1t} = 1,8^{1,2} \approx 2$$

$$\frac{A(t+12)}{A(t)} = 2 \Leftrightarrow A(t+12) = 2A(t)$$

Em cada período de 12 anos o número de árvores duplica.

$$\begin{aligned} \text{7.3. } A &= 100 \times 1,8^{0,1t} \Leftrightarrow 1,8^{0,1t} = \frac{A}{100} \\ &\Leftrightarrow 0,1t = \log_{1,8} \left(\frac{A}{100} \right) \\ &\Leftrightarrow 0,1t = \frac{\ln \left(\frac{A}{100} \right)}{\ln 1,8} \\ &\Leftrightarrow 0,1t = \frac{\ln A - \ln 100}{\ln 1,8} \\ &\Leftrightarrow t = \frac{\ln A - \ln 100}{0,1 \ln 1,8} \end{aligned}$$

Verifica 7

Considere que o peso P (em quilogramas) e o comprimento c (em centímetros) de um animal de determinada espécie, existente num certo habitat, é dado por $P(c) = 0,08 e^{0,12c}$.

- 7.1.** Qual é o comprimento de um animal dessa espécie que pesa 1,5 kg, sabendo que a relação peso-comprimento satisfaz a igualdade referida?

Apresente o resultado em centímetros, arredondado às unidades.

- 7.2.** Verifique que, para qualquer valor de c :

$$\frac{P(c+6)}{P(c)}$$

é constante.

Determine um valor aproximado dessa constante (arredondado às unidades) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

Exemplo 8 O tarifário

Uma empresa de telecomunicações apresentou um novo tarifário para chamadas telefônicas de longa distância em que o custo C , em euros, de uma chamada telefónica com a duração de t minutos é dado por:

$$C(t) = a + b \ln t$$



- 8.1. Sabendo que uma chamada com a duração de 1 min tem um custo de 0,50 € e uma chamada de 15 min custa 3,37 €, determine o valor das constantes a e b , com duas casas decimais.
- 8.2. Um cliente desta empresa efetuou duas chamadas telefónicas com custos determinados por este tarifário. Sabendo que a duração de uma chamada teve o triplo da duração da outra, qual foi a diferença de custos das duas chamadas?

Resolução

$$C(t) = a + b \ln t$$

$$\begin{aligned} 8.1. \quad \begin{cases} C(1) = 0,5 \\ C(15) = 3,37 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b \ln 1 = 0,5 \\ a + b \ln 15 = 3,37 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,5 \\ 0,5 + b \ln 15 = 3,37 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,5 \\ b \ln 15 = 3,37 - 0,5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,5 \\ b = \frac{2,87}{\ln 15} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 0,5 \\ b \approx 1,06 \end{cases} \end{aligned}$$

$$C(t) = 0,5 + 1,06 \ln t$$

$$\begin{aligned} 8.2. \quad C(3t) - C(t) &= [0,5 + 1,06 \ln(3t)] - [0,5 + 1,06 \ln t] \\ &= 0,5 + 1,06 \ln(3t) - 0,5 - 1,06 \ln t \\ &= 1,06 [\ln(3t) - \ln t] \\ &= 1,06 \ln\left(\frac{3t}{t}\right) \\ &= 1,06 \ln 3 \approx 1,16 \end{aligned}$$

A diferença de custos foi de 1,16 €.

Verifica 8

Admita que a altitude h , em quilómetros, de cada lugar da Terra e a pressão atmosférica p , em quilopascal, estão relacionadas pela equação:

$$h(p) = 38,47 - 8,33 \ln(p)$$



- 8.1. Qual é a pressão atmosférica de um lugar situado ao nível do mar?

(Apresente o resultado em quilopascal, com duas casas decimais.)

- 8.2. Verifique que, para qualquer valor de p , a diferença $h(0,75p) - h(p)$ é constante.

Determine um valor aproximado dessa constante (com duas casas decimais) e interprete esse valor no contexto do problema.

Questões tipo exame

Questões resolvidas

- 9** Seja g uma função, de domínio A , definida por $g(x) = \ln(1 - |x|)$.
Qual dos seguintes poderá ser o conjunto A ?
- (A) $]-e+1, e-1[$ (B) $]-1, 1[$
(C) $]0, +\infty[$ (D) $]-\infty, 1[$

Resolução

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - |x| > 0\} =]-1, 1[$$

O conjunto A terá de estar contido ou ser igual a D .

Resposta: (B)

Cálculo auxiliar

$$1 - |x| > 0 \Leftrightarrow |x| < 1$$

$$\Leftrightarrow x > -1 \wedge x < 1$$

$$\Leftrightarrow x \in]-1, 1[$$

- 10** Indique qual das expressões seguintes é, para qualquer número real superior a 1, igual a $a^{3+2\log_a \sqrt{5}}$.
- (A) $5a^3$ (B) $a^3 + 5$ (C) $5a^4$ (D) $a^3 + 5a$

Resolução

$$a^{3+2\log_a \sqrt{5}} = a^3 \times a^{2\log_a \sqrt{5}} = a^3 \times a^{\log_a (\sqrt{5})^2} =$$

$$= a^3 \times a^{\log_a 5} = a^3 \times 5 = 5a^3$$

$$a^{x+y} = a^x \times a^y$$

$$p \log_a x = \log_a x^p$$

Resposta: (A)

- 11** Sejam a , b e c três números reais tais que $\log_b a = c$.
Qual é o valor de $\log_a \left(\frac{a}{b}\right)$?
- (A) $1 - \frac{1}{c}$ (B) c (C) $1 - c$ (D) $\frac{1}{c}$

Resolução

$$\log_a \left(\frac{a}{b}\right) = \log_a a - \log_a b =$$

$$= 1 - \frac{\log_b b}{\log_b a} = 1 - \frac{1}{\log_b a} =$$

$$= 1 - \frac{1}{c}$$

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a}$$

$$\text{porque } \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Resposta: (A)

- 12** Sejam a , b e c números reais positivos e diferentes de 1.
Qual das seguintes igualdades é equivalente a $a^{\ln b} = b^{\ln c}$?
- (A) $a = b$ (B) $a = c$ (C) $b = c$ (D) $ab = c$

Resolução

$$a^{\ln b} = b^{\ln c} \Leftrightarrow \ln a^{\ln b} = \ln b^{\ln c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln b \times \ln a = \ln c \times \ln b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln a = \ln c \Leftrightarrow a = c$$

$$\text{Se } b \neq 1, \ln b \neq 0.$$

Resposta: (C)

Questões propostas

- 9** Seja f a função definida por:
 $f(x) = \log_2(x - x^2)$
Qual dos conjuntos seguintes pode ser o domínio da função f ?
- (A) $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$
(B) $]-1, 0[$
(C) $]0, 1[$
(D) $]-1, 1[$

- 10** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x+k}$, onde k designa um certo número real positivo.

Indique qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico da função f .

- (A) $(-k, 0)$ (B) $(\ln k, e^k)$
(C) $(-\ln k, \frac{e^k}{k})$ (D) $(k, 2e^k)$

- 11** Seja a um número real positivo diferente de 1.

Qual das expressões seguintes é igual a $a^{-2 \times \log_a \sqrt{3}}$?

- (A) $a^{-2} + \sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{a^2}$
(C) -3 (D) $\frac{1}{3}$

- 12** Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real positivo a , igual a $e^{2+\ln a}$?

- (A) $2a$ (B) $2 + a$
(C) $e^2 + a$ (D) $e^2 a$

- 13** Sejam a e b dois números reais positivos.

Qual das seguintes igualdades é equivalente a $2 \ln a = -\ln b$?

- (A) $a^2 = -b$ (B) $2a = -b$
(C) $a^2 = \frac{1}{b}$ (D) $a^2 b = 0$

Questões resolvidas

- 13** Sejam a e b números reais positivos e diferentes de 1.

A expressão $\frac{\log_a b}{\log_a \sqrt{b}}$ é igual a:

- (A) 1 (B) $b\sqrt{b}$ (C) $2\sqrt{b}$ (D) $a\sqrt{b}$

Resolução

$$\log_a b = \frac{\log_a b}{\log_a a^2} = \frac{\log_a b}{2} = \frac{1}{2} \log_a b$$

$$\log_a \sqrt{b} = \log_a b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_a b$$

Logo:

$$\frac{\log_a b}{\log_a \sqrt{b}} = \frac{\frac{1}{2} \log_a b}{\frac{1}{2} \log_a b} = 1$$

Resposta: (A)

- 14** Para um certo número real k , considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = e^{\frac{k}{x}}$.

Sabe-se que o gráfico da função f interseca a reta de equação $y = x + 1$ no ponto de abscissa 2.

Qual é o valor de k ?

- (A) $e^2 \ln 3$ (B) $2e^3$ (C) $\ln 9$ (D) $\ln 8$

Resolução

O ponto da reta de equação $y = x + 1$ que tem abscissa 2 tem ordenada $y = 2 + 1 = 3$. Logo, $f(2) = 3$.

$$\begin{aligned} f(2) = 3 &\Leftrightarrow e^{\frac{k}{2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{k}{2} = \ln 3 \Leftrightarrow k = 2 \ln 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = \ln 3^2 \Leftrightarrow k = \ln 9 \end{aligned}$$

Resposta: (C)

- 15** Sejam a e b dois números reais positivos e diferentes de 1.

A expressão $\frac{a^{\ln b}}{b^{\ln a}}$ é igual a:

- (A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) 1 (D) -1

Resolução

$$\begin{aligned} a^{\ln b} &= a^{\ln(a^{\log_a b})} = a^{\log_a b \times \ln a} = (a^{\log_a b})^{\ln a} = b^{\ln a} \\ &\quad | \quad b = a^{\log_a b} \\ &\quad | \quad \log_a x^p = p \log_a x \end{aligned}$$

Como $a^{\ln b} = b^{\ln a}$, tem-se que $\frac{a^{\ln b}}{b^{\ln a}} = 1$.

Resposta: (A)

Questões propostas

- 14** Sabe-se que $a = e^x$.

Qual das seguintes expressões é igual a $\ln(a^2)$?

- (A) e^{2x} (B) e^{x^2}
(C) $2x$ (D) x^2

- 15** Sejam a e b números reais positivos tais que $\log_2 a = b$.

Qual das expressões seguintes é igual a $\log_4 \left(\frac{a^6}{4} \right)$?

- (A) $6b - 1$ (B) $\frac{3b}{2}$
(C) $3b$ (D) $3b - 1$

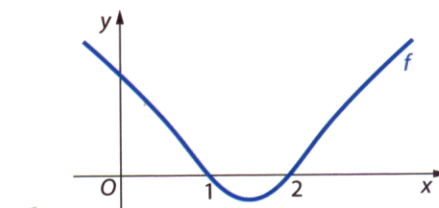
- 16** Para determinado valor de k , considere a função f , de domínio $]-k, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln(x + k)$.

Sabe-se que, num referencial xOy , o gráfico da função f interseca o eixo Ox no ponto de abscissa -2 .

Qual é o valor de k ?

- (A) -3 (B) 3
(C) -1 (D) e^{-2}

- 17** Na figura está representada graficamente uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida para determinados valores de a e b por $f(x) = \ln(ax^2 - bx + b)$.



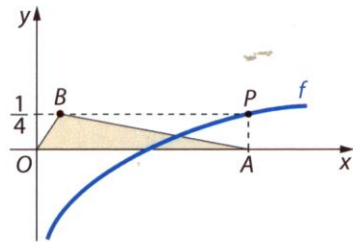
Tal como a figura sugere, o gráfico de f interseca o eixo Ox nos pontos de abscissas 1 e 2.

Qual é o valor de b ?

- (A) -3 (B) 3
(C) -1 (D) 1

Questões resolvidas

- 16** Na figura está parte da representação gráfica da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_{16} x$.



P é o ponto do gráfico de f , que tem de ordenada $\frac{1}{4}$.
 A é o ponto do eixo Ox que tem abcissa igual à de P .
 Qual é a área do triângulo $[OAB]$ sendo O a origem do referencial e B um ponto de ordenada igual à de P .

- (A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{4}$

Resolução

$$f(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \log_{16} x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 16^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x = 2$$

A abcissa de P é 2. Logo, $\overline{OA} = 2$.

Se a base do triângulo $[OAB]$ é $\overline{OA} = 2$, a sua altura é $\frac{1}{4}$, ordenada do ponto B .

$$A_{[OAB]} = \frac{2 \times \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{4}$$

Resposta: (D)

- 17** Sejam as funções f e g , de domínios $]-\infty, 1[$ e $]-2, 2[$, respetivamente, definidas por $f(x) = 1 + \log_2(1-x)$ e $g(x) = \log_4(4-x^2)$.

Determine sob a forma de intervalo real o conjunto-solução da condição $g(x) \geq f(x)$.

Resolução

O domínio da condição é $]-\infty, 1[\cap]-2, 2[=]-2, 1[$.

Para $x \in]-2, 1[$ vem:

$$g(x) \geq f(x) \Leftrightarrow \log_4(4-x^2) \geq 1 + \log_2(1-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(4-x^2)}{\log_2 4} \geq \log_2 2 + \log_2(1-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(4-x^2)}{2} \geq \log_2[2(1-x)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4-x^2) \geq 2 \log_2(2-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4-x^2) \geq \log_2(2-2x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4-x^2 \geq 4-8x+4x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-8x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{8}{5}\right]$$

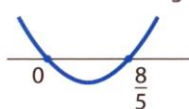
$$\left[0, \frac{8}{5}\right] \cap]-2, 1[= \left[0, 1\right[$$

$$g(x) \geq f(x) \Leftrightarrow x \in \left[0, 1\right[$$

Cálculo auxiliar

$$5x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{8}{5}$$



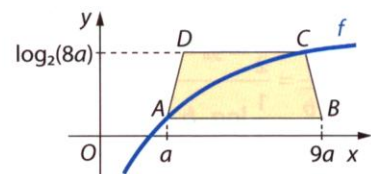
Questões propostas

- 18** Seja a um número real positivo diferente de 1.

A expressão $a^{\ln 3} - 3^{\ln a}$ é igual a:

- (A) $3 - a$ (B) $\frac{3}{a}$
 (C) $\frac{a}{3}$ (D) 0

- 19** Na figura está parte da representação gráfica da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_2 x$.



Na figura também está representado o trapézio isósceles $[ABCD]$ cujas bases, $[AB]$ e $[CD]$, são paralelas ao eixo Ox .

Os pontos A e C pertencem ao gráfico da função f .

As abcissas dos pontos A e B são a e $9a$, respetivamente. O ponto C tem ordenada $\log_2(8a)$.

Qual das expressões seguintes representa a área do trapézio $[ABCD]$?

- (A) $22,5a$
 (B) $21a$
 (C) $7a \times \log_2(7a)$
 (D) $7a(3 + \log_2 a)$

- 20** Considere as funções reais de variável real f e g definidas por $f(x) = \log_3(2x - x^2 + 1)$ e $g(x) = 2 \log_9(7 - x^2) - 1$.

Os domínios de f e de g são os conjuntos de números reais para os quais $f(x)$ e $g(x)$, respetivamente, existem em $\mathbb{R}$.

20.1. Determine o domínio e os zeros de cada uma das funções f e g .

20.2. Determine, sob a forma de intervalo de números reais, o conjunto-solução da condição $g(x) \leq f(x)$.

Questões resolvidas

- 18** Num lago onde não havia peixes, introduziram-se, em determinado momento, alguns peixes de uma espécie que vamos designar por espécie A .

Admita que, t anos depois, o número de peixes existentes no lago é dado aproximadamente por $P_A(t) = \frac{1000}{1 + 19e^{-kt}}$, onde k designa um número real.

18.1. Determine k sabendo que a população de peixes duplicou em cinco anos (apresente o resultado com aproximação às centésimas).

18.2. Admita agora que $k = 0,14$.

Passados cinco anos foram introduzidos no lago alguns peixes de uma nova espécie, a espécie B . Admita que t anos após este instante, o número de peixes desta nova espécie existentes no lago é dado por $P_B(t) = \frac{2200}{1 + 24e^{-0,14t}}$.

Quantos anos passaram para que, no lago, existissem tantos peixes da espécie A como da espécie B ? (Apresente o resultado aproximado às unidades.)

Resolução

$$\mathbf{18.1.} \quad P_A(t) = \frac{1000}{1 + 19e^{-kt}}$$

$$P_A(0) = \frac{1000}{1 + 19e^{-k \times 0}} = \frac{1000}{1 + 19e^0} = \frac{1000}{20} = 50$$

$$\begin{aligned} P_A(5) = 2 \times P_A(0) &\Leftrightarrow \frac{1000}{1 + 19e^{-k \times 5}} = 100 \\ &\Leftrightarrow 1000 = 100(1 + 19e^{-5k}) \\ &\Leftrightarrow 10 = 1 + 19e^{-5k} \Leftrightarrow 19e^{-5k} = 9 \\ &\Leftrightarrow e^{-5k} = \frac{9}{19} \Leftrightarrow -5k = \ln\left(\frac{9}{19}\right) \\ &\Leftrightarrow k = -\frac{1}{5} \ln\left(\frac{9}{19}\right) \Rightarrow k \approx 0,15 \end{aligned}$$

18.2. Quando decorreram t anos após a introdução no lago dos peixes da espécie B , decorreram $t + 5$ anos após a introdução no lago dos peixes da espécie A .

Portanto, temos de resolver a equação $P_B(t) = P_A(t + 5)$.

$$\begin{aligned} P_B(t) = P_A(t + 5) &\Leftrightarrow \frac{2200}{1 + 24e^{-0,14t}} = \frac{1000}{1 + 19e^{-0,14(t+5)}} \\ &\Leftrightarrow 22(1 + 19e^{-0,14(t+5)}) = 10(1 + 24e^{-0,14t}) \\ &\Leftrightarrow 22 + 418e^{-0,14(t+5)} = 10 + 240e^{-0,14t} \\ &\Leftrightarrow 418e^{-0,14t-0,7} - 240e^{-0,14t} = -12 \\ &\Leftrightarrow e^{-0,14t}(418e^{-0,7} - 240) = -12 \\ &\Leftrightarrow e^{-0,14t} = \frac{-12}{418e^{-0,7} - 240} \\ &\Leftrightarrow -0,14t = \ln\left(\frac{-12}{418e^{-0,7} - 240}\right) \\ &\Leftrightarrow t = -\frac{1}{0,14} \ln\left(\frac{-12}{418e^{-0,7} - 240}\right) \Rightarrow t \approx 7 \end{aligned}$$

Decorreram sete anos após a introdução no lago dos peixes da espécie B .

Questões propostas

- 21** Foi feito um estudo de mercado, no início do lançamento de uma campanha publicitária, a um painel de opinião composto por 1000 indivíduos. O número de pessoas P , do referido painel, que adquiriam o produto, t dias após o início da campanha é dado por:

$$P(t) = \frac{400}{1 + 4 \times e^{-0,1t}}$$

21.1. Qual a percentagem de elementos do painel que já compravam o produto no início da campanha?

21.2. A campanha deverá terminar quando o número de pessoas, do painel, que adquirem o produto for superior a 200. Quantos dias deverá demorar a campanha?

- 22** A intensidade da luz solar, x metros abaixo da superfície da água, é dada, numa certa unidade de medida, por $I(x) = a e^{-kx}$, ($x \geq 0$) onde a e k são constantes positivas que dependem das condições em que são efetuadas as medições, nomeadamente da hora e do local.

Num determinado lago e num determinado instante foram efetuadas algumas medições.

22.1. Sabe-se que essas medições permitiram concluir que

$$I(x + 3) = \frac{1}{2} I(x).$$

Interprete este resultado no contexto da situação apresentada e determine o valor de k para esse instante e local. Apresente o resultado com aproximação às centésimas.

22.2. Considere que para esse instante e local se tem $k = 0,23$.

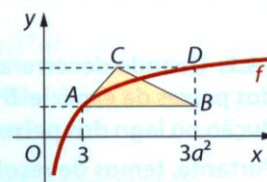
Sabendo que a 3,4 metros de profundidade se registou uma intensidade luminosa de 2745 unidades, determine o valor de a e diga qual é o seu significado.

Apresente o resultado aproximado às unidades.

Itens de seleção

- 23** Considere a função f , de domínio $\left[\frac{1}{8}, \sqrt{2}\right]$, definida por $f(x) = \log_2 x$. Qual é o contradomínio de f ?
- (A) $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ (B) $[-3, -2]$
 (C) $\left[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (D) $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$
- 24** Sejam a , b e c três números reais tais que $a \in]1, +\infty[$, $b \in \mathbb{R}^+$ e $c \in \mathbb{R}^+$. Sabe-se que $\log_a b = c$. Qual das seguintes expressões é equivalente a $\log_a(b \times \sqrt{a^c})$?
- (A) $\frac{3c}{2}$ (B) $\frac{c^2}{2}$
 (C) $c + \frac{1}{2}$ (D) $a^{\frac{3c}{2}}$
- 25** Qual é o valor de $\log_3\left(\sqrt[3]{\frac{a}{9}}\right)$ sabendo que $\log_3 a = \frac{3}{2}$?
- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $-\frac{7}{4}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{6}$
- 26** Considere a função f definida por $f(x) = e^{2+x}$. Sendo k uma constante real positiva, qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico de f ?
- (A) $(\ln k, k + e^2)$ (B) $(\ln k, k^2)$
 (C) $(\ln k, k e^2)$ (D) $(\ln k, 2 + k)$
- 27** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{2x}$. Indique qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico da função f .
- (A) $A(1, 0)$ (B) $B(\ln 2, 4)$
 (C) $C(0, e)$ (D) $D(\ln 5, 10)$
- 28** Dado um número positivo x sabe-se que $\log_2 x = e$. O valor de $\ln x$ é:
- (A) e (B) 2
 (C) $e \ln 2$ (D) 2^e

- 29** Sabe-se que o ponto $P(5, 6)$ pertence ao gráfico da função f definida por $f(x) = a \log_2(x - 1)$. Qual é o valor do número real a ?
- (A) 4 (B) 3 (C) $\frac{3}{2}$ (D) -3
- 30** Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = e^{\log_2 x}$. Indique qual das expressões seguintes também pode definir f .
- (A) x (B) $x^{\ln 2}$ (C) $\frac{1}{x^{\ln 2}}$ (D) $x^{\frac{1}{\ln 2}}$
- 31** Sabe-se que $1 + \log_a x = 3 \log_a y$. Qual das seguintes igualdades é necessariamente verdadeira?
- (A) $x = 3y$ (B) $x = ay^3$
 (C) $x = \left(\frac{y}{a}\right)^3$ (D) $x = \frac{y^3}{a}$
- 32** Sejam as funções f e g , definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por $f(x) = \log_2 x^4$ e $g(x) = 2 + \log_2 x^2$. Em qual das opções seguintes se apresenta o conjunto das abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g ?
- (A) $\{2\}$ (B) $\{-2, 2\}$
 (C) $\{-2, 0, 2\}$ (D) $\{0, 2\}$
- 33** Na figura está representada parte do gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_a x$ (a é um número real superior a 1). Na mesma figura estão também representados o ponto D e o triângulo $[ABC]$. Sabe-se que:
- os pontos A e D pertencem ao gráfico de f e as suas abcissas são 3 e $3a^2$, respetivamente;
 - o ponto B tem ordenada igual à do ponto A e abcissa igual à do ponto D ;
 - o ponto C tem ordenada igual à do ponto D .
- Qual é a área do triângulo $[ABC]$?
- (A) $\frac{(3a^2 - 3) \times a}{2}$ (B) $3a^2 - 3$
 (C) $(3a^2 - 3) \times a$ (D) $a^2 - 1$



- 34** Considere as funções f e g , de domínio $\mathbb{R}^+$, tais que $f(x) = \log_3(x)$ e $g(x) = \log_9(x)$. Qual das seguintes igualdades se verifica para todos os elementos do domínio?

(A) $g(x) = 2f(x)$ (B) $g(x) = -f(x)$
 (C) $f(x) = 2g(x)$ (D) $g(x) = (f(x))^2$

- 35** Sejam a , b e c números reais positivos tais que $b^2 = ac$.

O valor de $\log_a b + \log_a \left(\frac{1}{c}\right)$ é:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}(1 - \log_a c)$
 (C) $1 - \frac{3}{2}\log_a c$ (D) $\frac{1}{2} - \log_a c$

- 36** Seja a o número real tal que $\log_2 a = 4444$.

Qual é o valor de $\log_4 \left(\frac{a}{16}\right)$?

(A) 4442 (B) 2220
 (C) 1111 (D) 4440

- 37** Sejam x um número real maior do que 1.

$\frac{1}{x^{\ln x}}$ é igual a:

(A) x (B) e (C) 1 (D) $\frac{e}{x}$

- 38** Sejam a e x números reais maiores do que 1.

$\frac{\ln a}{x^{\ln x}}$ é igual a:

(A) x (B) e (C) a (D) $\frac{a}{x}$

- 39** Para todo o número real x , $\log_{32} 2^x$ é igual a:

(A) 5 (B) $5x$ (C) $\frac{x}{5}$ (D) $\sqrt[5]{x}$

- 40** Se a é um número real positivo diferente de 1.

$\log_3 [\log_a (\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}})]$ é igual a:

(A) 2 (B) -2
 (C) $\frac{2}{3}\log_3 a$ (D) $\frac{1}{3}\log_3 a$

Itens de construção

- 41** Mostre que, para qualquer número natural n , diferente de 1, $\log_n \left[\log_n \left(\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}} \right) \right] = -4$.

- 42** Sejam a , b e c números reais maiores do que 1. Mostre que $\log_b a \times \log_a c \times \log_c b = 1$.

- 43** Resolva em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

43.1. $\log_3 [\log_8 (\log_2 x)] = -1$

43.2. $\log_2 [\log_4 (\log_{10} x)] = 0$

- 44** Seja f a função definida em $]2, +\infty[$ por $f(x) = \log_3(x-2) + \log_3(x+2) + \log_3(x^2+4) - \frac{1}{x} \log_3 9^x$.

44.1. Mostre que $f(x) = \log_3(x^4 - 16) - 2$, para qualquer $x \in]2, +\infty[$.

44.2. Determine os zeros de f .

- 45** Para determinados números reais a e b maiores do que 1, sejam as funções f e g , de domínios $] -\infty, 2[$ e $] -4, +\infty[$, respetivamente, definidas por $f(x) = \log_a(2-x)$ e $g(x) = \log_b(4+x)$.

Sabendo que os gráficos das funções f e g se intersectam num ponto do eixo Oy , mostre que $b = a^2$.

- 46** O nível N de um som, em decibéis, está relacionado com a sua intensidade I , através da igualdade $N(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$, sendo I medida em watt por metro quadrado e I_0 a intensidade de um som no limiar da audição humana. Considere $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

46.1. Mostre que $N(I) = 120 + 10 \log I$.

46.2. Mostre que $N(2I) - N(I)$ é constante. Apresente o valor da constante arredondado às unidades e interprete-o no contexto da situação em causa.

- 47** Admita que o número de pessoas residentes em Portugal é dado, em milhões, por

$$P(t) = \frac{10,728}{1 + 0,05 \times e^{-0,12t}}$$

sendo t o número de anos decorridos após o final do ano 2000 ($t = 0$ corresponde ao final do ano 2000).

47.1. Em que ano foi atingido em Portugal o número de 10,5 milhões de residentes? Se nos cálculos intermédios proceder a arredondamentos conserve, no mínimo, três casas decimais.

47.2. Em quanto aumentou o número de residentes em Portugal desde o início do ano de 2001 até ao final do ano de 2007? (Apresente o resultado em milhares com aproximação às unidades.)

- 48** Admita que o número de microrganismos existentes em determinada cultura, t horas após um certo instante inicial, é dado, aproximadamente, por $M(t) = ae^{kt}$, ($t \in \mathbb{R}_0^+$) sendo a o número de microrganismos no instante inicial e k uma constante real.

48.1. Sabe-se que, para qualquer valor de t , $\frac{M(t+1)}{M(t)} = 1,6$.

- Interprete este resultado no contexto do problema.
- Mostre que, com duas casas decimais, se tem $k = 0,47$.

48.2. Considere $k = 0,47$.

Sabendo que, 10 horas após o instante inicial, existiam na cultura um milhão de microrganismos, determine o número de microrganismos que existiam no instante inicial.

(Apresente o resultado arredondado às unidades.)

- 49** Para obter o povoamento de coelhos de uma determinada região foram aí libertados, no dia 1 de janeiro de 2014, alguns casais desta espécie. Sabe-se que o número N de coelhos evoluiu de acordo com o modelo $N(t) = ae^{kt}$ sendo t o número de meses decorridos após aquela data. (Considere que 1 mês = 30 dias e admita que este modelo se mantém durante pelo menos um ano.)

49.1. Sabendo que foram libertados 30 coelhos e que antes da data referida não havia coelhos na região, determine o valor de a .

49.2. No dia 30 de agosto de 2014 contaram-se 100 coelhos na região.

Determine o valor de k (apresente o resultado aproximado às centésimas).

49.3. Considere $a = 30$ e $k = 0,15$.

- Determine a taxa de crescimento mensal da população de coelhos.

Apresente o resultado na forma de percentagem com aproximação às unidades.

- Num determinado instante verificou-se que existiam n coelhos na região. Quanto tempo terá de decorrer, depois desse instante, para que o número de coelhos seja cinco vezes maior?

Apresente o resultado em meses com aproximação às unidades.

- 50** Segundo a lei do arrefecimento de Newton, a temperatura T de um objeto t horas após ter sido colocado num local com temperatura ambiente T_a , é dada por

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

T_0 é a temperatura do objeto no instante $t = 0$ e k é uma constante que depende das características térmicas do objeto.

Num determinado dia, para testar alguns estudantes de investigação criminal, um objeto foi deixado num local onde a temperatura ambiente era constante de 22°C .

Às 10 horas desse dia mediu-se a temperatura do objeto verificando-se que era de 30°C . De imediato, o objeto foi movido para uma sala do laboratório onde a temperatura ambiente era constante de 5°C .

50.1. Justifique que, para determinado valor de k , a temperatura do objeto, em graus Celsius, t horas após ter sido colocado nessa sala, pode ser modelada pela equação $T(t) = 5 + 25e^{-kt}$.

50.2. Às 11 horas, após uma hora na sala do laboratório, verificou-se que o objeto estava a uma temperatura de 20°C .

Mostre que, com quatro casas decimais, $k \approx 0,5108$.

50.3. Do mesmo modo, a temperatura do objeto no local onde foi deixado inicialmente, pode ser modelada por uma equação da forma $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$ com $k \approx 0,5108$.

Determine a que horas a temperatura do objeto, nesse local, era 37°C .

(Apresente o resultado em horas e minutos.)

- 51** Em várias regiões do país foi detetada uma doença que afeta os pinheiros, provocando o seu apodrecimento.

Em qualquer uma dessas regiões, o número de pinheiros afetados, em milhares, t anos após o início do ano 2000, é dado, aproximadamente por:

$$P(t) = \frac{21}{p + e^{-kt}}$$

em que k e p são parâmetros reais.

51.1. Admita que, para uma determinada região, se tem $k = 0,5$ e $p = 0,05$.

Determine o ano em que o número de pinheiros afetados, nessa região, atingiu 100 mil.

51.2. Noutra região, mais a norte, verificou-se que, no início do ano de 2001, havia 10 000 pinheiros afetados pela doença.

Determine, para este caso, a relação entre k e p apresentando o resultado na forma:

$$k = -\ln(A + Bp)$$

- 52** Uma empresa realizou uma campanha publicitária para promover a venda de determinado artigo. O número de artigos vendidos por dia, em milhares, após terminar a campanha publicitária é dado por

$$v(t) = 3 \times 2^{-kt}$$

sendo t o número de dias decorridos após o termo da referida campanha.

52.1. Sabendo que 50 dias após o termo da campanha eram vendidos 1500 artigos por dia, verifique que $k = 0,02$.

52.2. Quantos artigos se vendiam por dia, 10 dias após o termo da campanha?

Apresente o resultado arredondado às unidades.

52.3. Verifique que, em percentagem, a variação diária do número de artigos vendidos é constante. Determine o valor dessa constante com aproximação às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos conserve, no mínimo, três casas decimais.

52.4. Quando deve a empresa iniciar uma nova campanha publicitária sabendo que pretende que o número de artigos vendidos não se situe abaixo de 1200.

Apresente o resultado em dias com aproximação às unidades.

52.5. Exprima t em função de v e conclua que

$$t = \frac{50}{\ln 2} (\ln 3 - \ln v).$$

- 53** A magnitude aparente (m) e a magnitude absoluta (M) de uma estrela são grandezas que permitem calcular a distância (d) a que essa estrela se encontra da Terra.

M , m e d , estão relacionadas pela fórmula

$$M - m = 5 - 5 \log d$$

(d é medida em *parsec*, sendo:
1 *parsec* $\approx$ 3,26 anos-luz)

53.1. Sirius é uma estrela com magnitude absoluta $M = 1,45$ e magnitude aparente $m = -1,44$.

Determine, em anos-luz com aproximação às unidades, a distância da Terra a Sirius.

53.2. Determine a que distância se encontra da Terra uma estrela cuja magnitude aparente é igual à magnitude absoluta.

53.3. Prove que, para quaisquer m , M e d , se tem $d = 10^{1 + 0,2(M - m)}$.

- 54** A intensidade de luz, I , medida numa certa unidade, está relacionada com a distância, d , da fonte de luz, em metros, pela relação:

$$2 \ln(d) = k - \ln(I)$$

(k é uma constante que depende das características da fonte de luz.)

Considere duas lâmpadas, com iguais características, que vamos designar por lâmpada A e lâmpada B .

Num determinado ponto verificou-se que a intensidade da luz proveniente da lâmpada B era, na unidade considerada, igual a 0,04.

Sabendo que a distância da lâmpada B a esse ponto é o triplo da distância da lâmpada A , determine, no mesmo ponto e na mesma unidade, a intensidade da luz proveniente da lâmpada A .

- 55** A temperatura T de um objeto, em graus Celsius, t horas após ter sido colocado num local com temperatura ambiente T_a , é dada por

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

T_0 é a temperatura do objeto no instante $t = 0$ e k é uma constante que depende das características térmicas do objeto.

Um peru foi retirado do frigorífico e colocado no forno. O peru estava a 8°C de temperatura e o forno foi pré-aquecido a 180°C . A partir desse instante, a temperatura do forno manteve-se constante.

55.1. Justifique que, para determinado valor de k , a temperatura do peru, em graus Celsius, t horas após ter sido colocado no forno, é modelada pela equação $T(t) = 180 - 172e^{-kt}$.

55.2. O peru foi colocado no forno às 9 horas. Às 10 horas e 45 minutos encontrava-se a uma temperatura de 44°C . A que horas o peru ficou assado sabendo que tal acontece quando atingir a temperatura de 80°C ?

Apresente o resultado em horas e minutos, com os minutos aproximados às unidades.

- 56** Considere as funções f , de domínio $]2, +\infty[$, definida por $f(x) = 4 + 2 \log_2(2x - 4)$ e g definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = 18 + 2^{\frac{x}{2}}$.

56.1. Caracterize a função inversa de f .

56.2. Seja $h = g \circ f$. Determine o domínio de h e mostre que $h(x) = 8x + 2$.

56.3. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $g(x) - g(2x) + 12 > 0$

b) $f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) \leq 16$

- 1** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.
Qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico de f ?
- (A) $\left(e, \ln \frac{1}{2}\right)$ (B) $(e, 1 - \ln 2)$ (C) $(e, e - \ln 2)$ (D) $\left(e, \frac{2}{\ln 2}\right)$
- 2** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 0 \\ \log_2 x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$
Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = f(2\sqrt{n})$.
Indique qual das expressões seguintes define o termo geral de u_n .
- (A) $4n$ (B) $\frac{2 + \log_2 n}{2}$ (C) $2 \log_2 \sqrt{n}$ (D) $\frac{1 + \log_2 n}{2}$
- 3** Sendo k uma constante real positiva e f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{3x}$, qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico de f ?
- (A) $(\ln k, e^3 + k)$ (B) $(\ln k, \sqrt[3]{k})$ (C) $(\ln k, k e^3)$ (D) $(\ln k, k^3)$
- 4** Sejam a e b números reais positivos e $a \neq 1$.
Se $\log_a(ab) = 4$, então o valor de b é:
- (A) 1 (B) a (C) 3 (D) a^3
- 5** Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real x , igual a $e^{x+\ln 2}$?
- (A) $(e^x)^{\ln 2}$ (B) $(\ln 2) e^x$ (C) $2e^x$ (D) e^{2x}
- 6** Sabendo que $\log_{10} x = a$ e $\log_{10} y = b$, $\frac{x}{y}$ é igual a:
- (A) $\log_{10}(a-b)$ (B) 10^{a-b} (C) $10^{\frac{a}{b}}$ (D) $\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$
- 7** Seja $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = e^{\log_3 x}$.
Indique qual das expressões seguintes também pode definir g .
- (A) $3^{\ln x}$ (B) x (C) $x^{1-\ln 3}$ (D) $x^{\frac{1}{\ln 3}}$
- 8** Considere a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, por $f(x) = \ln(x^2)$.
Indique qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico da função f .
- (A) $(3, 2 \ln 3)$ (B) $(3, 2 + \ln 3)$ (C) $(3, \ln 6)$ (D) $(3, 2 \ln 9)$
- 9** Considere a função h definida por $h(x) = \ln(4x^2 + e^2)$.
Indique qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico da função h .
- (A) $(e, 7)$ (B) $(e, 10 \ln e)$ (C) $(e, 10)$ (D) $(e, 2 + \ln 5)$

- 10** Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real $x \in]-3, +\infty[$, igual a $9^{1+\log_3 \sqrt{x+3}}$?
- (A) $9\sqrt{x+3}$ (B) $9+2\log_3 \sqrt{x+3}$ (C) $9x+27$ (D) $9+\frac{1}{2}(x+3)$
- 11** Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ tais que $\log_a \sqrt{ab} = 2$.
Então, $\log_b a$ é igual a:
- (A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$
- 12** Seja f a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \ln(x)$. Então, $f\left(\frac{e}{x}\right) + f(ex)$ é igual a:
- (A) $\ln\left(\frac{e}{x} + ex\right)$ (B) $\ln\left(\frac{e}{x}\right) \times \ln(ex)$ (C) 1 (D) 2
- 13** Sabendo que $e^x = u$ e $e^y = v$, $x - y$ é igual a:
- (A) $e^{\frac{u}{v}}$ (B) $\ln\left(\frac{u}{v}\right)$ (C) $\frac{\ln(u)}{\ln(v)}$ (D) e^{u-v}
- 14** Sabe-se que $g(x) = 2\log_2 x$ e que $a, b \in D_g$.
Então, pode-se afirmar que:
- (A) $\frac{g(a)}{g(b)} = g(a) - g(b)$ (B) $g\left(\frac{a}{b}\right) = g(a) - g(b)$ (C) $g(a-b) = \frac{g(a)}{g(b)}$ (D) $g(a-b) = g\left(\frac{a}{b}\right)$
- 15** Considere a função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_2 \sqrt{2x}$.
Indique qual das expressões seguintes também pode definir f .
- (A) $\frac{1}{2} + \frac{\ln x}{\ln 4}$ (B) $\frac{2 + \log_2 x}{2}$ (C) $\sqrt{2} \log_2 \sqrt{x}$ (D) $\frac{1 + \ln x}{2}$
- 16** Considere a função g definida por $g(x) = e^{x+2}$.
Qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico da função g ?
- (A) $(-2, 0)$ (B) $(1, -2e)$ (C) $(\ln 3, 3e^2)$ (D) $(\ln 3, 5)$
- 17** Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real positivo a , igual a $e^{\frac{\ln a}{2} + 1}$?
- (A) $\sqrt{a} + e$ (B) $\frac{ae}{2}$ (C) $e\sqrt{a}$ (D) $\sqrt{ae}$
- 18** Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto-solução de cada uma das seguintes condições:
- 18.1.** $3^{2x-4} = 9$ **18.2.** $3^{x-x^2} = \frac{1}{3^{2x}}$
- 18.3.** $3^{2x} - 12 \times 3^x = -27$ **18.4.** $e^{0,2t} = 8$
- 18.5.** $\frac{20}{1+2e^{0,3t}} = 10$ **18.6.** $3^{4x+1} - 9^x = 10$
- 18.7.** $\log_2(x-1) = 3 - \log_2(x-3)$ **18.8.** $\log_3(x^2 - 5x + 6) - \log_3(2-x) = 2$
- 18.9.** $\ln(x+1) + \ln\left(\frac{3}{2-x}\right) > 0$ **18.10.** $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 > 0$
- 18.11.** $e^{2x} < 2e^x$ **18.12.** $1 + \ln|x| < 0$

- 19** No início do ano de 2000 ($t = 0$) existiam seis mil aves de determinada espécie. A partir daí o número de aves decresceu, sendo dado, em milhares, por:

$$A(t) = \log_2(a - 7t)$$

onde t é o número de anos decorridos desde aquela data.

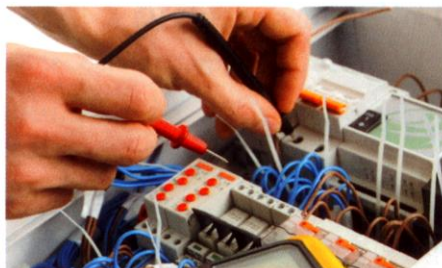
19.1. Verifique que $a = 64$.

19.2. Quantas aves desapareceram durante o ano de 2007?

19.3. Em que ano a espécie foi extinta?

- 20** Numa fábrica de componentes eletrónicos, o número N de peças que um operador de determinada máquina produz por hora depende do número t de dias de experiência. Essa relação é dada por:

$$N(t) = 50 - 35e^{-0,02t}$$



20.1. Qual o número de peças que é de esperar que um operário sem experiência produza por hora?

20.2. Um operário que produza mais de 300 peças num dia recebe prémio de produtividade. Sabendo que, nessa empresa, um dia de trabalho corresponde a sete horas, quantos dias de experiência é de esperar que tenha um operário para começar a receber tal prémio?

- 21** O valor, em milhares de euros, de um determinado equipamento é dado pela relação:

$$V(t) = V_0 e^{kt}$$

em que V_0 é o valor na data da aquisição e t o tempo (em anos) decorrido desde essa data.

21.1. Sabendo que no primeiro ano o equipamento sofreu uma desvalorização de aproximadamente 8%, verifique que, com a aproximação às centésimas, $k = -0,08$. Nas questões seguintes considere $k = -0,08$.

21.2. Quanto tempo terá de decorrer após a aquisição para que o valor desse equipamento fique reduzido a metade? Apresente o resultado em anos com aproximação às unidades.

21.3. Sabendo que, 15 anos após a aquisição, o valor do equipamento é de, aproximadamente, 100 milhares de euros, qual era o valor inicial? Apresente o resultado em milhares de euros com aproximação às unidades.

21.4. Verifique que em cada n anos de utilização este equipamento se desvaloriza cerca de $100(1 - e^{-0,08n})\%$.

- 22** A expressão $M = \frac{2}{3}(\log_{10} E - 11,8)$ relaciona a quantidade aproximada de energia E , em ergs ($1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ joules}$), libertada por um sismo de magnitude M , na escala de Richter.

22.1. Verifique que $E = 10^{11,8 + 1,5M}$.

22.2. Qual a energia libertada pelo sismo de Lisboa de 1755 sabendo que este teve uma magnitude de 8,7 na escala de Richter?

22.3. Verifique que um sismo em que a energia libertada é 10 vezes superior à de outro tem um acréscimo de magnitude de apenas 0,67 (2 c. d.) na escala de Richter.

22.4. Verifique que a uma diferença de magnitude de mais uma unidade na escala de Richter corresponde uma energia libertada cerca de 32 vezes maior.

- 23** O crescimento de uma população é modelado pela função $P(t) = \frac{60}{1 + 5e^{-0,1t}}$, onde t é o tempo em anos e $P(t)$ é a população em milhões.

23.1. Qual era, em milhões, a população inicial?

23.2. Para que a população atinja os 30 milhões, quanto tempo tem de decorrer?
Apresente o resultado em anos com aproximação às unidades.

- 24** Para uma particular substância radioativa, a massa m (em gramas) no tempo t (em anos) é dada por $m = m_0 e^{-0,02t}$, onde m_0 é a massa inicial.

24.1. Para uma massa inicial de 500 gramas, determine a massa residual ao fim de 10 anos.
Apresente o resultado em gramas com aproximação às unidades.

24.2. Determine, em anos com aproximação às décimas, o tempo que terá de decorrer de modo que a massa inicial se reduza a metade.

- 25** Uma pessoa portadora do vírus da gripe visitou uma certa comunidade. Decorridos T dias o número x de pessoas infetadas por aquele vírus é dado por:

$$T(x) = -0,95 \ln\left(\frac{1}{x} - 0,0001\right)$$

25.1. Quantos dias foram necessários para que fossem infetadas 4000 pessoas?

25.2. Passadas duas semanas quantas pessoas foram infetadas?

- 26** Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$.

26.1. Determine o domínio de f .

26.2. Caracterize a função inversa de f .

- 27** Considere as funções reais de variável real definidas por $f(x) = 3 - 2e^{-2x}$ e $g(x) = e^{2x}$.

27.1. Caracterize a função inversa de f .

27.2. Resolva a equação $f(x) = g(x)$.

- 28** Seja f a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \log_3\left(\frac{9}{x}\right) + \log_3 x^2$.

28.1. Mostre que $f(x) = 2 + \log_3 x$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.

28.2. Determine a abcissa do ponto do gráfico de f cuja ordenada é 6.

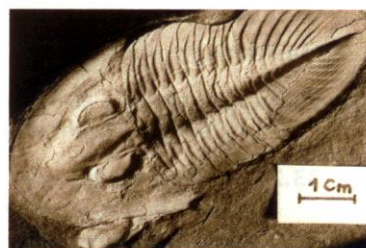
- 29** Cada ser vivo tem uma quantidade constante de carbono-14. Após a sua morte a quantidade de carbono-14 existente nos animais e plantas vai diminuindo com o tempo. A quantidade Q de carbono-14 que resta num fóssil t milhares de anos após a morte de um ser vivo é dada por:

$$Q(t) = c e^{-0,121t}$$

(c é a quantidade de carbono-14 existente à data da morte.)

29.1. Foram encontrados os restos de um esqueleto de um animal. Dado que a descoberta suscitou interesse arqueológico, foram efetuados testes laboratoriais, os quais revelaram que se havia perdido 58% do carbono-14 existente quando vivo. Há quantos anos morreu o animal?

29.2. Em percentagem, qual é a redução de carbono-14 em cada 1000 anos decorridos após a morte do ser vivo? (Apresente o resultado com aproximação às décimas.)



- 30** Em determinada espécie de árvores destinadas à indústria da madeira, o diâmetro médio d do tronco, em centímetros, está relacionado com o número T de anos decorridos após a plantação, através da igualdade $T(d) = -4,6 + 4,3 \log_2 d$.

30.1. Exprima d em função de T .

30.2. Qual é o diâmetro médio das árvores na altura da plantação?
(Apresente o resultado com aproximação às décimas do centímetro.)

30.3. Verifique que, para qualquer valor de d , a diferença $T(2d) - T(d)$ é constante.
Determine essa constante e interprete o seu valor no contexto da situação descrita.

30.4. Admitindo que as árvores são cortadas quando o diâmetro médio do tronco atinge os 25 centímetros, determine o número de anos, com aproximação às unidades, que decorre entre a plantação e o corte das árvores.

- 31** As substâncias radioativas desintegram-se, com o decorrer do tempo, de acordo com a lei $M = A e^{-kt}$, sendo A a quantidade inicial, M a quantidade existente decorrido o tempo t e k uma constante positiva que depende da substância em causa.
Uma amostra de 10 mg de rádio (isótopo ^{226}Ra) desintegra-se segundo a lei:

$$M(t) = 10 e^{-kt}$$

sendo t o tempo expresso em milhares de anos.

31.1. Sabendo que decorridos 400 anos a massa da amostra se reduz a 8,43 mg, verifique que, com três casas decimais, se tem $k = 0,427$.

31.2. Chama-se período de semidesintegração ao tempo necessário para que uma substância radioativa se reduza a metade.
Determine, em anos com aproximação às unidades, o período de semidesintegração do rádio.

- 32** O número N de bicicletas vendidas por um comerciante está relacionado com o montante p , em milhares de euros, gasto em publicidade, por:

$$N(p) = 50 + 100 \ln(10p + 2)$$

32.1. Que quantia terá o comerciante de investir em publicidade para vender 350 bicicletas?
Determine o resultado, em euros, arredondado às unidades.

32.2. Quantas bicicletas serão vendidas se o comerciante nada investir em publicidade? E se investir 3 mil euros? E se gastar 30 mil euros em publicidade?

32.3. Se, sem despesas de publicidade, o comerciante tiver um lucro de 50 € por bicicleta, compensará gastar 3000 € em publicidade? E será que compensa gastar 30 000 €? Justifique as respostas apresentando os cálculos convenientes.

32.4. Considere a expressão $L(p) = 0,05 \times N(p) - p$.

a) Explique o significado da expressão no contexto da situação apresentada.

b) Utilize a calculadora para determinar o montante, em euros, que deve ser investido em publicidade para que o lucro obtido na venda de bicicletas seja máximo. Explique como procedeu apresentando, na sua resposta, o gráfico e outros elementos recolhidos na utilização da calculadora.

- 33** Às 9 horas da manhã de um certo dia foram administrados a um doente dois medicamentos A e B . A concentração de cada um desses medicamentos, em miligramas por mililitro de sangue, t horas após ter sido administrado, é dada por:

$$\text{Medicamento A: } A(t) = 2t e^{-kt} \quad \text{Medicamento B: } B(t) = 4t e^{-0,5t}$$

33.1. Sabendo que, às 10 horas da manhã desse dia, a concentração do medicamento A era de 1,48 mg/ml, verifique que, com uma casa decimal, $k = 0,3$.

33.2. Determine a que horas, depois de os medicamentos terem sido tomados, a concentração do medicamento A foi igual à concentração do medicamento B . Apresente o resultado em horas e minutos, sendo os minutos arredondados às unidades.

Tema 3

Limites e continuidade

1. Noção intuitiva de limite

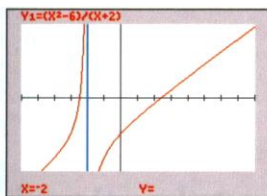
Considere-se a função real de variável real, f , sendo:

$$f: x \mapsto y = \frac{x^2 - 6}{x + 2}$$

O que acontece à variável dependente y quando x se aproxima cada vez mais de 0?

E cada vez mais de -2 ?

Observe o gráfico e as tabelas da função.



X	Y1			
-0.5	-3.076			
-0.4	-3.06			
-0.3	-3.045			
-0.2	-3.03			
-0.1	-3.015			
0	-3			
.01	-2.985			
.02	-2.97			
.03	-2.955			
.04	-2.94			
.05	-2.926			
X=0				

X	Y1			
-2.05	35.95			
-2.04	45.96			
-2.03	62.637			
-2.02	95.98			
-2.01	195.99			
-2	ERROR			
-1.99	-204			
-1.98	-104			
-1.97	-70.64			
-1.96	-53.96			
-1.95	-43.95			
X=-2				

Quando x se aproxima de 0, y aproxima-se de -3 .

Diz-se que o limite de $f(x)$ quando x tende para zero é -3 e escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$$

Quando x se aproxima de -2 o limite de $f(x)$ não existe e escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ não existe.}$$

Assim, o limite de uma função num ponto pode existir ou não.

No exemplo anterior verificou-se que:

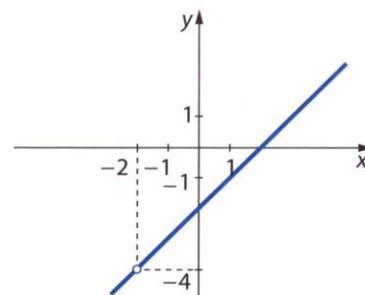
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 6}{x + 2} = -3; \quad f(0) = \frac{0^2 - 6}{0 + 2} = -3$$

Em muitos casos o cálculo do limite de uma função num ponto pode obter-se por concretização da variável independente.

Considere-se agora a função real de variável real:

$$f: x \mapsto y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

Qual é o $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$?



Observando-se o gráfico tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -4$$

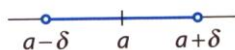
O valor -4 não pode ser obtido por concretização da variável x na expressão da função f , $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$, pois obtém-se o valor $\frac{0}{0}$, que não é um número real.

Este exemplo sugere duas notas importantes:

1. O limite de $f(x)$ quando x se aproxima de c não depende do valor $f(c)$. O limite, se existir, é apenas dependente dos valores de f quando $x \neq c$ e x se aproxima de c .
2. Para calcular o limite de uma função num ponto é importante conhecer técnicas de cálculo de limites, pois nem sempre a simples concretização da variável independente resolve o problema.

2. Definição de limite segundo Heine

Chama-se vizinhança de centro a e raio δ (nota-se por $\mathcal{V}_\delta(a)$) ao intervalo $]a - \delta, a + \delta[$ ($\delta > 0$).



Seja C um subconjunto de $\mathbb{R}$ e a um número real.

Ponto de acumulação

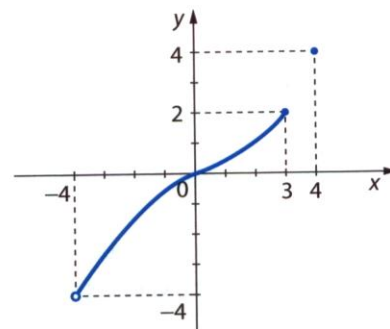
a diz-se **ponto de acumulação** de C se e só se em qualquer vizinhança de a existe pelo menos um elemento de C diferente de a .

Ponto isolado

a diz-se **ponto isolado** de C se pertence a C e não é ponto de acumulação de C .

Considere-se a função f representada graficamente:

- $D_f =]-4, 3] \cup \{4\}$
- 4 é ponto isolado de D_f ;
- 3 é ponto de acumulação de D_f ;
- -4 é ponto de acumulação de D_f ;
- $[-4, 3]$ é o conjunto dos pontos de acumulação de D_f .



Repare-se que um ponto de acumulação de um conjunto pode, ou não, pertencer ao domínio.

As funções que vamos estudar têm por domínio subconjuntos de $\mathbb{R}$ sem pontos isolados.

Assim, o conceito de limite e de continuidade de uma função num ponto diz apenas respeito a pontos de acumulação do domínio.

Em estudos mais avançados estudar-se-á os conceitos de limite e de continuidade de funções que têm no seu domínio pontos isolados.

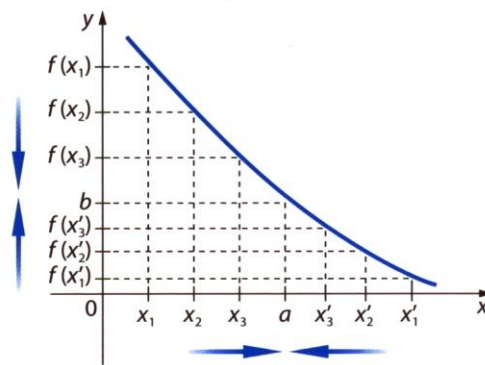
Definição de limite de uma função num ponto (segundo Heine)

Seja f uma função real de variável real e a um ponto de acumulação do domínio de f .

Diz-se que f tende para b quando x tende para a e escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

se e só se a toda a sucessão de valores de x do domínio de f convergente para a , sendo os termos da sucessão todos diferentes de a , corresponde uma sucessão de imagens por f convergente para b .



3. Limites laterais

Consideremos a função f de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 2 \\ x + 2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Por observação do gráfico de f verifica-se que:

- quando x se "aproxima" de 2, por valores inferiores a 2, $f(x)$ aproxima-se de 3.

Escreve-se:

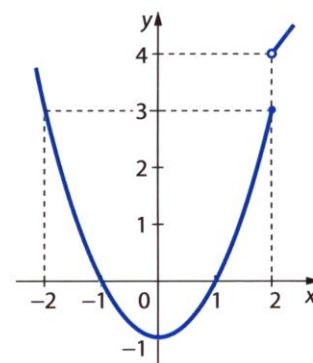
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \quad \leftarrow \text{O limite lateral de } f \text{ à esquerda no ponto 2 é 3.}$$

- quando x se "aproxima" de 2 por valores superiores a 2, $f(x)$ aproxima-se de 4.

Escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \quad \leftarrow \text{O limite lateral de } f \text{ à direita no ponto 2 é 4.}$$

Neste caso, como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, não existe limite de f no ponto 2.



Se existirem os limites laterais de uma função num ponto, o limite da função nesse ponto existe se e só se os limites laterais são iguais.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$$

4. Propriedades dos limites

Dada uma função f , o conhecimento da existência ou não de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, sendo a finito ou infinito, pode ser formalizado aplicando as propriedades que se seguem.

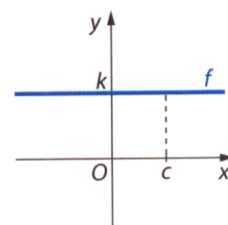
Limite de uma constante

O limite de uma função constante é a própria constante.

$$\text{Se } f(x) = k \ (k \in \mathbb{R}), \text{ então } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = k.$$

Exemplos:

$$\lim_{x \rightarrow 7} 2 = 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \pi = \pi.$$

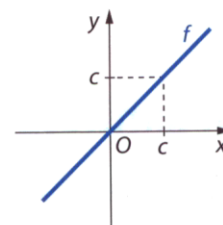


Limite da função identidade

$$\text{Se } f(x) = x, \text{ então } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = c.$$

Exemplos:

$$\lim_{x \rightarrow -3} x = -3 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$



Limite da soma

Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ existem e não são infinitos de sinais contrários, então:

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

Exemplos:

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 3:$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + f(x)) = -\infty - \infty = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + g(x)) = +\infty + \infty = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) + f(x)) = 3 - \infty = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + f(x)) = +\infty - \infty$

Convenção:

$$a \pm \infty = \pm \infty, \text{ exceto } \infty - \infty.$$

Não se pode indicar o resultado.

$\infty - \infty$ é um **símbolo de indeterminação**.

Este caso será estudado mais à frente.

Limite do produto

Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ existem, sem que um deles seja infinito e o outro nulo, então:

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \times \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

Exemplos:

Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = -2$ e $\lim_{x \rightarrow c} i(x) = 0$,

então:

- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \times g(x)] = +\infty \times (-\infty) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \times h(x)] = +\infty \times (-2) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow c} [g(x) \times h(x)] = -\infty \times (-2) = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow c} [i(x) \times f(x)] = 0 \times (+\infty)$ $\leftarrow 0 \times \infty$ também é um **símbolo de indeterminação**. Não se pode indicar o resultado sem estudar o produto das funções em causa.

Convenção:

$$a \times \infty = \infty \text{ se } a \neq 0.$$

Limite do quociente

Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ existem e não são ambos nulos ou ambos infinitos, então:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$$

- Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, então:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty$$

Convenção:

$$\frac{a}{0} = \infty, \text{ se } a \neq 0.$$

Exemplos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x} = \frac{2}{0^-} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

- Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a \in \mathbb{R} (a \neq \pm \infty)$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm \infty$, então:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Convenção:

$$\frac{a}{\infty} = 0, \text{ se } a \neq \infty.$$

Exemplos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{-\infty} = 0.$$

No caso de $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ serem ambos nulos ou ambos infinitos surgem os **símbolos de inde-**

terminação $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ que serão estudados mais à frente.

Limite de uma potência

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Exemplos:

- Se $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]^3 = 2^3 = 8$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$

Limite de uma raiz

Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe (finito ou infinito) então:

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \geq 0, \text{ se } n \text{ é par} \right)$$

Exemplos:

- $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \sqrt{+\infty} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty$

Convenção:

$$\sqrt[n]{\infty} = \infty$$

Síntese das convenções adotadas

	Convenções	Indeterminações
Soma	$a \pm \infty = \pm \infty \quad (a \neq \mp \infty)$	$\infty - \infty$
Produto	$a \times \infty = \infty \quad (a \neq 0)$	$0 \times \infty$
Quociente	$\frac{a}{0} = \infty \quad (a \neq 0)$	$\frac{0}{0}$
	$\frac{a}{\infty} = 0 \quad a \neq \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$
Potência	$\infty^p = \infty \quad (p \in \mathbb{N})$	
Raiz	$\sqrt[p]{\infty} = \infty \quad (p \in \mathbb{N})$	

Da aplicação das propriedades enunciadas resulta que, nas funções polinomiais, funções racionais, funções exponenciais ou nas funções logarítmicas, o limite quando $x \rightarrow a$ é igual à imagem de a . Esta afirmação, como veremos mais tarde, é válida para todas as funções contínuas.

5. Cálculo de limites. Indeterminações

Exemplo 1 Cálculo de limites

Calcule os limites seguintes.

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x+1}{x^2-1}$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^3-2}$$

Resolução

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x+1}{x^2-1} = \frac{4 \times 2 + 1}{2^2 - 1} = \frac{9}{3} = 3$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^3-2} = \sqrt{3^3-2} = \sqrt{25} = 5$$

Exemplo 2 Limites infinitos

Calcule.

$$2.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{1-x}$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{4-x^2}$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2 + \sqrt{x} + 2)$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x + 1)$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x)^3$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2+5}$$

Resolução

$$2.1. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{1-x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{1-x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\text{Não existe } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{1-x}.$$

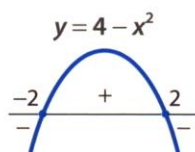
$$\frac{a}{0} = \infty$$

x		1	
1-x	+	0	-

$$2.2. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{4-x^2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\text{Não existe } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{4-x^2}.$$



$$2.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2 + \sqrt{x} + 2) = 4(+\infty)^2 + \sqrt{+\infty} + 2 = +\infty$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x + 1) = (-\infty)^3 - \infty + 1 = -\infty - \infty + 1 = -\infty$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x)^3 = (-(-\infty)^2 - \infty)^3 = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2+5} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

Verifica 1

Calcule os limites seguintes.

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x-1}{x^2+2}$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{3x+4}{7-2x}}$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 1} (x-3)^3$$

Verifica 2

Calcule.

$$2.1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x}{x^2-4}$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + |x|)$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1-x^2}$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x)^3$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^5$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1}$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{2+x}$$

Indeterminação $\infty - \infty$

Exemplo 3 Funções polinomiais

Calcule cada um dos limites seguintes.

$$3.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 - 3x^2 + 1)$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 + x + 1)$$

Resolução

$$\begin{aligned} 3.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 - 3x^2 + 1) &= (\infty - \infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^5 \left(2 - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^5} \right) \right] = \end{aligned}$$

Coloca-se em evidência a potência de x com maior expoente.

$$= +\infty \times (2 - 0 + 0) = +\infty$$

Outro processo consiste na aplicação do seguinte teorema:

O limite de uma função polinomial f , quando $x \rightarrow +\infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$ é igual ao limite do termo de mais alto grau do polinômio $f(x)$.

$$\text{Então } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 - 3x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5) = +\infty.$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2) = +\infty$$

Exemplo 4 Funções irracionais

Calcule.

$$4.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1})$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$$

Resolução

$$\begin{aligned} 4.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) &= (\infty - \infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \end{aligned}$$

Multiplica-se e divide-se a expressão $A - B$ pelo seu conjugado $A + B$.

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x+1})^2}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - (x+1)}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

Verifica 3

Calcule.

$$3.1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^5 - x^4 + 1)$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^5)$$

Verifica 4

Calcule.

$$4.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x + \frac{1}{2}} - \sqrt{2x} \right)$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + 1})$$

Indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$

No caso de esta indeterminação surgir no cálculo do limite de uma função racional quando $x \rightarrow \pm \infty$ pode aplicar-se o seguinte teorema:

Se f é uma função racional definida por $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ então $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m}$, sendo $a_0 x^n$ e $b_0 x^m$ os monómios de grau mais elevado dos polinómios $A(x)$ e $B(x)$, respetivamente.

Exemplo 5 Cálculo de limites de funções racionais

Calcule cada um dos limites seguintes.

5.1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x}{x^2 + 7}$

5.2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 3}{2x^2}$

5.3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{2x + 1}$

Resolução

5.1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x}{x^2 + 7} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2}{x^2} \right) = 5$

5.2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 3}{2x^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{2x} = \frac{5}{+\infty} = 0$

5.3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{2x + 1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x}{2} \right) = -\infty$

Verifica 5

Calcule.

5.1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 + x^2 + 1}{2x + 3}$

5.2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x - x^5}$

5.3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 1}{3x^3 + x}$

5.4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|3x + 1| - x}{x - |x|}$

Indeterminação $\frac{0}{0}$

Quando a indeterminação $\frac{0}{0}$ surge no cálculo do limite de funções racionais resolve-se o problema fatorizando o numerador e o denominador, simplificando a fração.

Exemplo 6 Funções racionais

Calcule cada um dos limites seguintes.

6.1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

6.2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 2x}$

Resolução

6.1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x - 1} = -\frac{1}{2}$

6.2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x(x - 2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x} = \frac{4 + 4 + 4}{2} = 6$

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	0

Verifica 6

Calcule cada um dos limites seguintes.

6.1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 - 9}$

6.2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 2)^3}$

6.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 3x}{x}$

6.4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{(x - 3)^2}$

6.5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^3 - 1}$

Exemplo 7 Outras funções

Calcule.

$$7.1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

$$7.2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2-4|}{x-2}$$

Resolução

$$\begin{aligned} 7.1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x-3)} = \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7.2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2-4|}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|(x-2)(x+2)|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2| |x+2|}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2| |x+2|}{x-2} \end{aligned}$$

$$|a \times b| = |a| \times |b|$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2| |x+2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2) |x+2|}{x-2} = |2+2| = 4$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2| |x+2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2) |x+2|}{x-2} = -|2+2| = -4$$

$$\text{Logo, não existe } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2-4|}{x-2}.$$

Indeterminação $0 \times \infty$

Esta indeterminação transforma-se, normalmente, numa das anteriores.

Exemplo 8 Cálculo de limites

Calcule cada um dos limites seguintes.

$$8.1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt[3]{x} \times \frac{1}{x} \right)$$

$$8.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{2} \times \frac{1}{x^2-1}$$

Resolução

$$8.1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt[3]{x} \times \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$8.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{2} \times \frac{1}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Verifica 7

Calcule cada um dos limites seguintes.

$$7.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}$$

$$7.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{|x-1|}$$

$$7.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{|x|-1}$$

$$7.4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x}-2}{x^2-4}$$

$$7.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{\sqrt{x}-1}$$

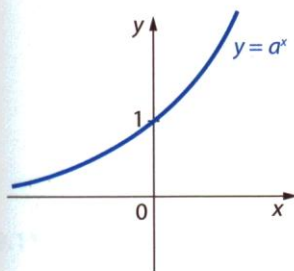
$$7.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

$$7.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$$

$$7.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

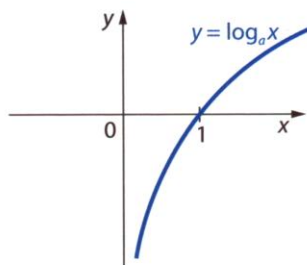
6. Limites de funções envolvendo exponenciais e logaritmos

Para $a > 1$:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

O levantamento de indeterminações em funções que envolvam exponenciais e logaritmos é feito, geralmente, a partir dos limites notáveis seguintes.

Limites notáveis:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Exemplo 9 Cálculo de limites com exponenciais e logaritmos

Calcule cada um dos limites seguintes.

9.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{3x}}{2x}$

9.2. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h+3} - e^3}{h}$

9.3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(2n+1) \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \right]$

9.4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{x+1}$

9.5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x e^x}$

9.6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 e^{\frac{1}{x}} \right)$

9.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)^3}{2x}$

9.8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{\ln(x-2)}$

9.9. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h+2) - \ln(2)}{h}$

9.10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$

9.11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$

9.12. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\ln(x+6)}{x+5}$

9.13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{x}$

9.14. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)$

9.15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(3x+1)}$

9.16. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)e^x - 3e^2}{x-2}$

9.17. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)\ln x - \ln 16}{x-2}$

9.18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+3)}{1 + \sqrt{x}}$

9.19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(2x^2+1)(\ln(x^2+x+1) - \ln(x^2+x)) \right]$

Verifica 9

Calcule.

9.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^x - 3}{2x}$

9.2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{3x-3}$

9.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{8x}}{3x}$

9.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{1 - e^{2x}}$

9.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 3x - 1}{e^{2x} - 1}$

9.6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^3}{x+1}$

9.7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x}$

9.8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$

9.9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$

9.10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right)$

9.11. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right)$

9.12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x}$

(continua)

Resolução

$$9.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{3x}}{2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{3x}(e^{-2x} - 1)}{-2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (-e^{3x}) \times \lim_{-2x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} = -1 \times 1 = -1$$

$$9.2. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h+3} - e^3}{h} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^3(e^h - 1)}{h} =$$

$$= e^3 \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^3 \times 1 = e^3$$

$$9.3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(2n+1) \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \right] \stackrel{(\infty \times 0)}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(2n+1) \times \frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n} \times \lim_{\frac{1}{n} \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \left(n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow 0 \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n} \times 1 = 2 \times 1 = 2$$

$$9.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{x+1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x^2} + 1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{+\infty + 1}{0^+} = +\infty$$

$$9.5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x e^x} \stackrel{(\infty \times 0)}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{(-y) e^{-y}} = \left| \begin{array}{l} \text{Fazendo } y = -x, \text{ vem } x = -y. \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

$$= - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = -\infty$$

$$9.6. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 e^{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{(0 \times \infty)}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{y} \right)^2 e^y \right] = \left| \begin{array}{l} \text{Fazendo } y = \frac{1}{x}, \text{ vem } x = \frac{1}{y}. \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^2} = +\infty$$

$$9.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)^3}{2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln(x+1)}{2x} =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

$$9.8. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{\ln(x-2)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{\ln(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\ln(x-3+1)} \times \lim_{x \rightarrow 3} (x-2) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(y+1)} \times 1 = 1$$

3	1	-5	6
		3	-6
	1	-2	0

$y = x - 3$
 $x \rightarrow 3 \Rightarrow y \rightarrow 0$

$$9.9. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h+2) - \ln(2)}{h} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{h+2}{2}\right)}{h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{h}{2} + 1\right)}{\frac{h}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \quad \left| \begin{array}{l} y = \frac{h}{2} \\ h \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Verifica 9

$$9.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$$

$$9.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2 + 2x}$$

$$9.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+3) - \ln 3}{x}$$

$$9.16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$9.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)^3}{3x}$$

$$9.18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln \sqrt{x}}$$

$$9.19. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x}$$

$$9.20. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x}$$

$$9.21. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$$

$$9.22. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x e^{x-1} - 3e^2}{x-3}$$

$$9.23. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x \ln x - \ln 27}{x-3}$$

$$9.24. \lim_{x \rightarrow +\infty} [x \ln(x+1) - x \ln x]$$

$$9.25. \lim_{x \rightarrow +\infty} [3x^2(\ln(x^2+2) - \ln x^2)]$$

$$9.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x \times \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] \stackrel{(\infty \times 0)}{=} \quad$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \times \frac{1}{x} \times \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \right] =$$

$$\left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$= 2 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 2 \times 1 = 2$$

$$9.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1+1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1$$

$$\left| \begin{array}{l} y = x-1 \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$9.12. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\ln(x+6)}{x+5} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\ln(x+5+1)}{x+5} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1$$

$$\left| \begin{array}{l} y = x+5 \\ x \rightarrow -5 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$9.13. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{\frac{1}{3}y} =$$

$$= 3 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 3 \times 0 = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} y = 3x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}y \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

$$9.14. \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \stackrel{(0 \times (-\infty))}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \ln \frac{1}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y^{-1}}{y} =$$

$$\left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln y}{y} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$$

$$9.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(3x+1)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \frac{2x}{3x} \times \frac{3x}{\ln(3x+1)} \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \times \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{3x}{\ln(3x+1)} =$$

$$= \frac{2}{3} \times 1 \times 1 = \frac{2}{3}$$

$$9.16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)e^x - 3e^2}{x-2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y+2+1)e^{y+2} - 3e^2}{y} =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Fazendo } y = x-2, \\ \text{vem } x = y+2. \\ x \rightarrow 2 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y+3)e^{y+2} - 3e^2}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{ye^{y+2} + 3e^{y+2} - 3e^2}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{ye^{y+2} + 3e^2(e^y - 1)}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{ye^{y+2}}{y} + 3e^2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} e^{y+2} + 3e^2 \times 1 =$$

$$= e^2 + 3e^2 = 4e^2$$

9.17. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2) \ln x - \ln 16}{x-2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

Fazendo $y = x - 2$
vem $x = y + 2$.
 $x \rightarrow 2 \Rightarrow y \rightarrow 0$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y+2+2) \ln(y+2) - \ln 2^4}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y+4) \ln(y+2) - 4 \ln 2}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \ln(y+2) + 4 \ln(y+2) - 4 \ln 2}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \ln(y+2)}{y} + 4 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+2) - \ln 2}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} [\ln(y+2)] + 4 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{y}{2} + 1\right)}{y} = \ln 2 + 4 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{y}{2} + 1\right)}{\frac{y}{2}} =$$

$$= \ln 2 + 2 \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ u = \frac{y}{2}}} \frac{\ln(u+1)}{u} = \ln 2 + 2 \times 1 = \ln 2 + 2$$

9.18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+3)}{1+\sqrt{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y^2+3)}{1+y} =$

Fazendo $y = \sqrt{x}$
temos $x = y^2$.
 $x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left[y^2\left(1+\frac{3}{y^2}\right)\right]}{1+y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y^2 + \ln\left(1+\frac{3}{y^2}\right)}{1+y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln y + \ln\left(1+\frac{3}{y^2}\right)}{1+y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2 \frac{\ln y}{y} + \frac{\ln\left(1+\frac{3}{y^2}\right)}{y}}{\frac{1}{y} + 1} =$$

$$= \frac{2 \times 0 + 0}{0 + 1} = 0$$

Dado que
 $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$

9.19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x^2+1)(\ln(x^2+x+1) - \ln(x^2+x))] \stackrel{(\infty-\infty)}{=}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(2x^2+1) \ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(2x^2+1) \ln\left(\frac{1}{x^2+x} + 1\right) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(2x^2+1) \times \frac{1}{x^2+x} \times \frac{\ln\left(\frac{1}{x^2+x} + 1\right)}{\frac{1}{x^2+x}} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x^2+x} + 1\right)}{\frac{1}{x^2+x}} =$$

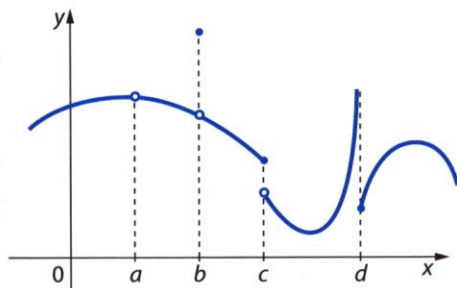
Fazendo $y = \frac{1}{x^2+x}$
 $x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 2 \times 1 = 2$$

7. Continuidade de uma função num ponto

Definição

Considere a função f com a seguinte representação gráfica:



Note-se que:

- a função f não está definida para $x = a$, apesar de a ser um ponto de acumulação do domínio de f ;
- $f(b) \neq \lim_{x \rightarrow b} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ não existe
- $\lim_{x \rightarrow d} f(x)$ não existe

A função f é descontínua em cada um dos pontos b , c e d e contínua em todos os outros pontos do domínio.

Continuidade num ponto

Seja f uma função definida num intervalo aberto $]a, b[$ e seja $c \in]a, b[$.

Então, f é contínua em c se e só se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Exemplo 10 Continuidade de uma função num ponto

Verifique se a função f , a seguir definida, é contínua no ponto 0.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ x^2 + x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Verifica 10

Verifique se a função f , a seguir definida, é contínua no ponto 0.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\ e^{2x} + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Resolução

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{x}}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

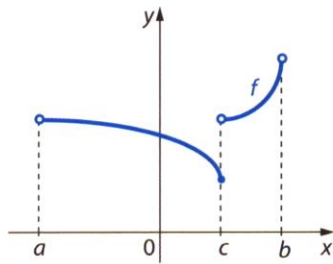
$$\bullet f(0) = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, f é contínua no ponto $x = 0$.

Continuidade lateral

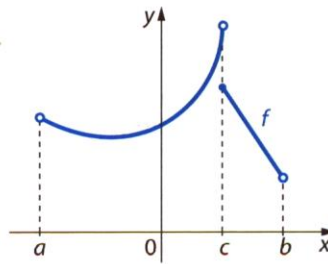
Se uma função não é contínua num ponto do seu domínio é descontínua nesse ponto.

Uma função pode não ser contínua num ponto c , mas, nesse ponto, ser contínua à esquerda ou à direita.



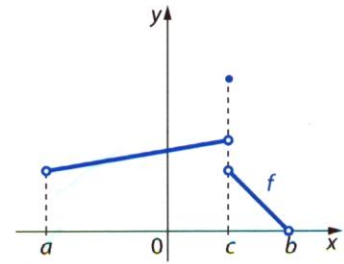
f é contínua à esquerda em c .

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$$



f é contínua à direita em c .

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$



f apresenta uma descontinuidade bilateral em c .

Seja f uma função definida num intervalo $]a, c]$.

f é contínua à esquerda em c se e só se $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$.

Seja f uma função definida num intervalo $[c, b]$.

f é contínua à direita em c se e só se $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$.

Uma função pode ser apenas contínua à esquerda (ou à direita) num ponto e ser contínua nesse ponto. Isso acontece se a função não está definida à direita (ou à esquerda) desse ponto.

Exemplo 11 Continuidade de uma função num ponto

Estude a continuidade lateral da função seguinte no ponto $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} - 2 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\ln(3x+1)}{2x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolução

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x}{2} - 2 \right) = \frac{e^0}{2} - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x} = \frac{3}{2} \times \lim_{3x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{3x} = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Logo, f é descontínua no ponto $x = 0$.

$$f(0) = \frac{e^0}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{3}{2}.$$

Apesar de f ser descontínua no ponto $x = 0$, f é contínua à esquerda naquele ponto, dado que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$.

Verifica 11

Estude a continuidade lateral de f no ponto $x = 0$, sendo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ x^2 + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

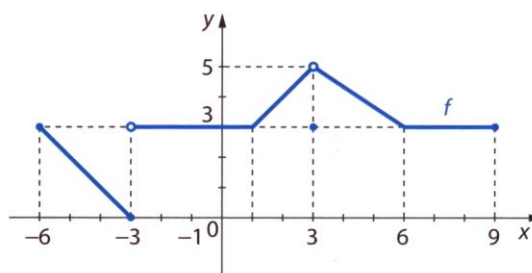
Continuidade de uma função num intervalo

Observemos a representação gráfica da função f de domínio $[-6, 9]$.

A função f é descontínua nos pontos -3 e 3 , mas é contínua em todos os outros pontos do seu domínio.

Não podemos dizer que a função é contínua em $[-6, 0]$, porque f não é contínua em -3 .

Mas, por exemplo, podemos dizer que f é contínua em $]-3, 3[$ e em $[6, 9]$.



Se uma função f é contínua em todos os pontos de um intervalo aberto $]a, b[$, então f é contínua nesse intervalo.

Uma função f é contínua num intervalo fechado $[a, b]$ se f é contínua em $]a, b[$ e f é contínua à direita no ponto a e à esquerda no ponto b .

Se uma função f é contínua em todos os pontos do seu domínio dizemos, simplesmente, que a função f é contínua.

Propriedades das funções contínuas

- A função constante $f(x) = c$ é contínua em $\mathbb{R}$.
- A função identidade $f(x) = x$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Se f e g são funções contínuas em $x = a$, então:

- $f + g$ é contínua em $x = a$
- fg é contínua em $x = a$
- $\frac{f}{g}$ é contínua em $x = a$ (se $g(a) \neq 0$)

Se f é contínua em $x = a$, então:

- f^n ($n \in \mathbb{N}$) é contínua em a
- $\sqrt[n]{f}$ é contínua em a ($n \in \mathbb{N}$ e $f(a) \geq 0$ se n é par)

Se f é contínua em $x = a$ e g é contínua em $f(a)$, então a função $g \circ f$ é contínua em a .

A função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) é contínua.

$$x \mapsto a^x$$

A função logarítmica $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) é contínua.

$$x \mapsto \log_a x$$

Usando as propriedades das funções contínuas, é fácil provar que:

- toda a função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$;
- toda a função racional é contínua em todos os pontos do domínio.

Exemplo 12 Continuidade de uma função

Indique os valores de x para as quais são contínuas as funções reais de variável real definidas por:

12.1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

12.2. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $g(x) = \ln(x^2 + 1)$

12.3. $h: \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ com $h(x) = \frac{x^3 - 3}{x^2 - 4}$

12.4. $i: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ com $i(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Verifica 12

Justifique que a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} + x^2$$

é contínua.

Resolução

12.1. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, pois trata-se de uma função polinomial.

12.2. $D_g = \mathbb{R}$. A função g é contínua por ser a composta de funções contínuas (função polinomial e função logarítmica).

12.3. $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. A função h é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ por ser uma função racional.

12.4. $D_i = \mathbb{R}^+$. A função i é contínua em $\mathbb{R}^+$ por ser definida pela raiz quadrada e quociente de funções contínuas (funções polinomiais).

Teorema de Bolzano-Cauchy ou teorema do valor intermédio

Seja f uma função real de variável real contínua no intervalo fechado $[a, b]$.

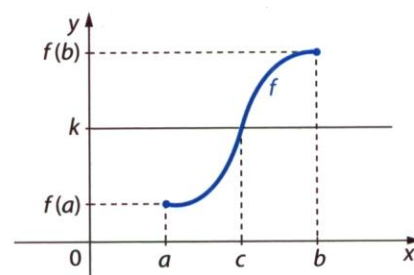
Se k é um número compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo menos um valor c compreendido entre a e b tal que $f(c) = k$.

Se:

$$\begin{cases} f \text{ é contínua em } [a, b] \\ f(a) < k < f(b) \text{ ou } f(b) < k < f(a) \end{cases}$$

então:

existe pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = k$.

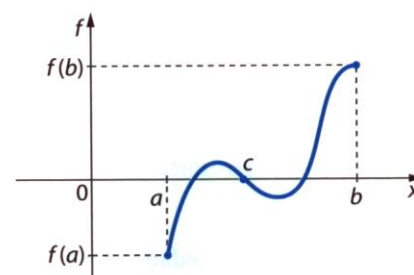
**Corolário**

Se:

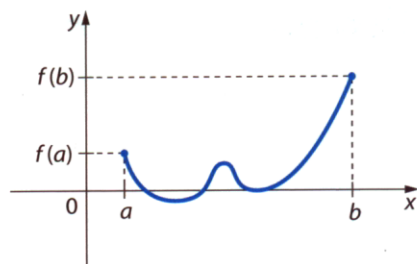
$$\begin{cases} f \text{ é contínua em } [a, b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{cases}$$

então:

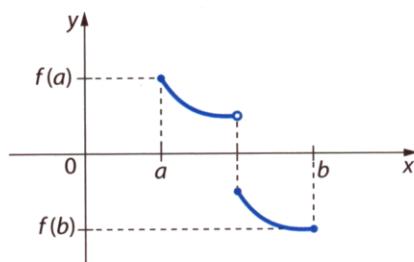
existe pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.



$f(a) \times f(b) < 0$ significa que $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários.



Observe que se $f(a) \times f(b) > 0$, f pode, ou não, ter zeros em $]a, b[$.



Se $f(a) \times f(b) < 0$ e f não tem zeros em $]a, b[$, então f não é contínua em $[a, b]$.

Exemplo 13 Aplicação do Teorema de Bolzano

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + \log_3\left(x^2 + \frac{1}{3}\right)$.

13.1. Prove que f admite pelo menos um zero no intervalo $]0, 1[$.

13.2. Prove que a equação $f(x) = 2$ é possível no intervalo $]1, 2[$.

Resolução

$$f(x) = x + \log_3\left(x^2 + \frac{1}{3}\right); \quad D_f = \mathbb{R}$$

f é contínua por ser definida pela composta e pela soma de funções contínuas (funções polinomiais e função logarítmica).

Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$.

13.1. i) Como f é contínua em $\mathbb{R}$, f é contínua em $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

$$\text{ii) } f(0) = 0 + \log_3\left(0^2 + \frac{1}{3}\right) = \log_3 3^{-1} = -1$$

$$f(1) = 1 + \log_3\left(1^2 + \frac{1}{3}\right) = 1 + \log_3\left(\frac{4}{3}\right) = 1 + \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{\ln(3)} \approx 1,3$$

$$f(0) \times f(1) < 0, \text{ pois } f(0) < 0 \text{ e } f(1) > 0.$$

Logo, de i) e ii), pelo Teorema de Bolzano, podemos concluir que existe pelo menos um ponto x , do intervalo $]0, 1[$, onde $f(x) = 0$.

13.2. i) f é contínua em $[1, 2] \subset \mathbb{R}$.

$$\text{ii) } f(1) \approx 1,3$$

$$f(2) = 2 + \log_3\left(2^2 + \frac{1}{3}\right) = 2 + \log_3 \frac{13}{3} = 2 + \frac{\ln\left(\frac{13}{3}\right)}{\ln 3} \approx 3,3$$

Como f é contínua em $[1, 2]$ e $f(1) < 2 < f(2)$, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe pelo menos um $x \in]1, 2[$ tal que $f(x) = 2$.

Verifica 13

Prove, usando o Teorema de Bolzano, que a equação:

$$e^{-x} = x$$

tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, 1[$.

Sugestão: Faça:

$$e^{-x} = x \iff e^{-x} - x = 0$$

e prove que a função definida por:

$$h(x) = e^{-x} - x$$

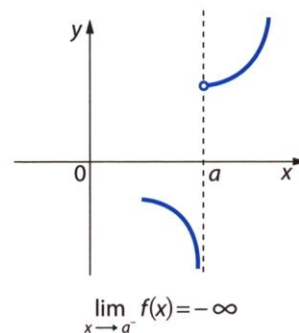
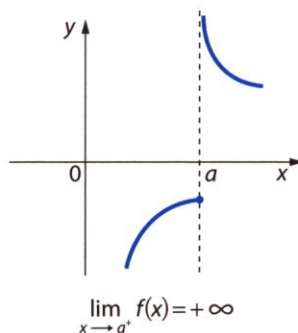
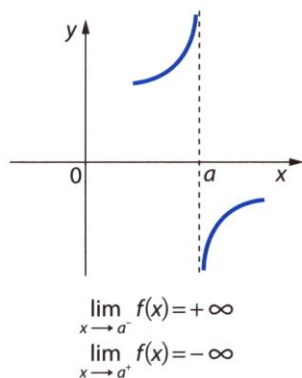
tem pelo menos um zero em $]0, 1[$.

8. Assíntotas do gráfico de uma função

Verticais

A reta de equação $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de uma função f se e só se:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$$



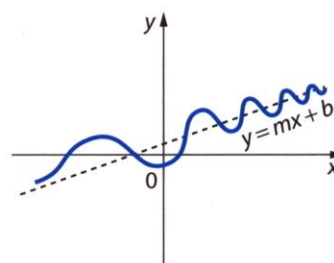
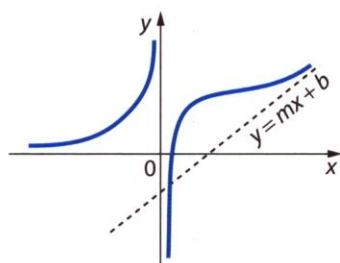
Note que:

- $a \in D_f$ e f é descontínua em a ;

ou

- $a \notin D_f$ e a é ponto de acumulação de D_f .

Não verticais



A reta de equação $y = mx + b$ é uma assíntota do gráfico da função f , quando $x \rightarrow +\infty$ (ou $x \rightarrow -\infty$), se e só se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

sendo

$$\begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) \end{cases}$$

Para que exista assíntota é necessário que existam $m \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ que verifiquem a condição anterior.

No caso de $m = 0$ e $b \in \mathbb{R}$, a assíntota é horizontal. Neste caso, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

Exemplo 14 Assíntotas do gráfico de uma função

Estude, quanto à existência de assíntotas do gráfico, as funções:

14.1. $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$

14.2. $g(x) = \frac{\ln(x)}{2x}$

Resolução

14.1. $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e f é contínua.

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0 \times e^{-\infty} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow y \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} e^y \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de f .

Assíntotas não verticais: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = e^0 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{\frac{1}{x}} - x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right] = \lim_{\frac{1}{x} \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1 \text{ porque } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

Quando $x \rightarrow -\infty$ são obtidos os mesmos resultados.

A reta de equação $y = x + 1$ é uma assíntota do gráfico de f quando $x \rightarrow \pm\infty$.

14.2. $g(x) = \frac{\ln x}{2x}$

$D_g = \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$ e g é contínua.

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{2x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota do gráfico de g .

Assíntotas não verticais:

Apenas poderão existir quando $x \rightarrow +\infty$ pois D_g é limitado inferiormente.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x} = \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{2} \times 0 = 0$,
a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota do gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$.

Verifica 14

14.1. Estude quanto à existência de assíntotas do gráfico cada uma das funções seguintes.

a) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

b) $f(x) = 3x + e^x$

c) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

d) $f(x) = x - 3 \ln x$

e) $f(x) = \frac{2}{1 + 3e^{-0,1x}}$

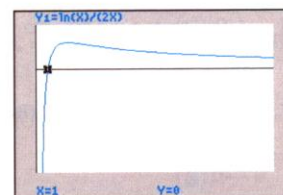
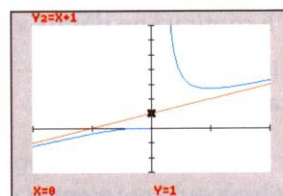
f) $f(x) = \frac{2e^x}{x - 3}$

g) $f(x) = \sqrt{9x^2 - 3x}$

14.2. Estude as seguintes funções quanto à existência de assíntotas não verticais dos respectivos gráficos:

a) $f(x) = \frac{3e^x + x^2}{x + e^x}$

b) $f(x) = x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + 2x$



Questões tipo exame

Questões resolvidas

- 15** Para um certo valor de a , é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{se } x \leq a \\ \frac{ax - a^2 + \ln(x - a + 1)}{x - a} & \text{se } x > a \end{cases}$$

Qual é o valor de a ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Resolução

Se f é contínua em $\mathbb{R}$ então f é contínua no ponto $x = a$. Logo, terá de ser $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} (x + a) = a + a = 2a = f(a)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{ax - a^2 + \ln(x - a + 1)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{ax - a^2}{x - a} + \frac{\ln(x - a + 1)}{x - a} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{a(x - a)}{x - a} + \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(y + 1)}{y} = a + 1$$

Fazendo $y = x - a$,
se $x \rightarrow a^+$,
 $y \rightarrow 0^+$

Como f é contínua no ponto $x = a$, tem-se $2a = a + 1$ pelo que $a = 1$.

Resposta: (A)

- 16** Na figura está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.

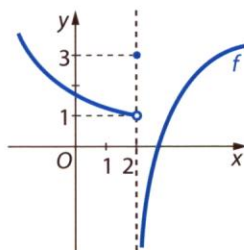
A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota do gráfico da função f .

Seja (x_n) a sucessão de termo

$$\text{geral } x_n = \frac{2e^n - n}{e^n}.$$

Qual é valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) $-\infty$



Resolução

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^n - n}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2e^n}{e^n} - \frac{n}{e^n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n}{e^n} \right) = 2 - 0^+ = 2^-$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Como x_n tende para 2, por valores inferiores a 2,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1.$$

Resposta: (A)

Questões propostas

- 15** Para um certo valor de k , é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}(e^{kx} - 1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

- 16** Para um certo valor de k , é contínua em $\mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{kx+x} - e^x}{x^3 + kx} & \text{se } x < 0 \\ \ln(e^k + kx) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

- 17** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k e^{x-1} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{2 \ln x}{x-1} - k & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(k designa um número real.)

Relativamente à continuidade da função f , no ponto 1, qual das seguintes afirmações é verdadeira para todo o número real k ?

- (A) É contínua à esquerda e descontínua à direita.
(B) É contínua à direita e descontínua à esquerda.
(C) É contínua.
(D) É descontínua à esquerda e à direita.

- 18** Considere a função f definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = 2^{\ln x}$.

Seja (u_n) a sucessão de termo geral

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}.$$

Qual é o valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$?

- (A) -2 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

Questões resolvidas

- 17** Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)^2}{x} & \text{se } x > 0 \\ x + e^{-x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Seja (x_n) uma sucessão de números reais tal que $\lim g(x_n) = 2$.

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral de (x_n) ?

- (A) $2 + e^{-n}$ (B) $2 + \frac{\ln n}{n}$ (C) $\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ (D) $\frac{\ln(en)}{n}$

Resolução

• $\lim(2 + e^{-n}) = 2 + 0 = 2$ e $\lim\left(2 + \frac{\ln n}{n}\right) = 2 + 0 = 2$

$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x+1)^2}{x} = \frac{\ln 9}{2} = \frac{2 \ln 3}{2} = \ln 3 \neq 2$

• $\lim \left[\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \right] = 0^-$ porque $\lim \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 1^-$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + e^{-x}) = 0 + 1 = 1 \neq 2$

• $\lim \frac{\ln(en)}{n} = \lim \frac{\ln e + \ln n}{n} = \lim \left(\frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n} \right) = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln(x+1)}{x} =$
 $= 2 \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 2 \times 1 = 2$

Portanto, se $x_n = \frac{\ln(en)}{n}$, temos $\lim g(x_n) = 2$

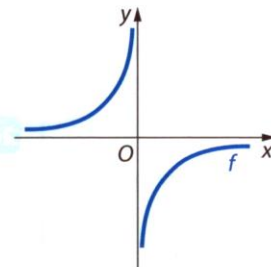
Resposta: (D)

- 18** Na figura está representada graficamente uma função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

As retas de equações $x = 0$ e $y = 0$ são assíntotas do gráfico de f .

Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{e^x - 1}$.

- (A) 0 (B) 1
(C) $-\infty$ (D) $+\infty$



Resolução

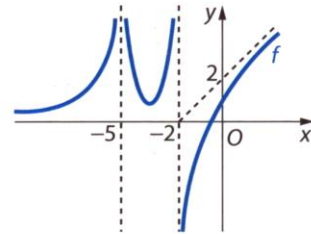
$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - 1) = 0^-$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{e^x - 1} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$

Resposta: (C)

Questões propostas

- 19** Na figura está parte da representação gráfica de uma função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-5, -2\}$.



As retas de equações $x = -2$, $x = -5$, $y = 0$ e $y = x + 1$ são assíntotas do gráfico de f .

19.1. Considere a sucessão de termo geral $x_n = e^{-n} - 2$.

Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

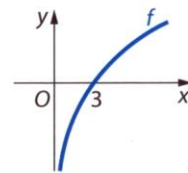
- (A) $+\infty$ (B) $-\infty$
(C) -2 (D) 0

19.2. Seja (u_n) uma sucessão tal que $\lim f(u_n) = +\infty$.

Qual das expressões seguintes não pode ser o termo geral da sucessão (u_n) ?

- (A) $\ln\left(1 + \frac{5}{n}\right)^{-n}$ (B) $\frac{e^n + n}{n^3 + 1}$
(C) $\frac{e^n - 1}{n}$ (D) $1 - \frac{n}{\ln(n)}$

- 20** Na figura está representada graficamente uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$.



A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota do gráfico da função f .

O gráfico da função f intersecta o eixo Ox no ponto de abscissa 3.

Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{f(x+3)}$.

- (A) $-\infty$ (B) $+\infty$ (C) 0 (D) 1

- 21** O valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x}$ é:

- (A) 0 (B) 1
(C) $-\infty$ (D) $+\infty$

Questões resolvidas

- 19** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x e^{-x} - 3e^{-3}}{x - 3} & \text{se } x < 3 \\ (1 - x)e^{-x} & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

19.1. Estude a função f quanto à continuidade.

19.2. Resolva, no intervalo $[3, +\infty[$, a equação $f(x) = e^{-x}$.

Resolução

19.1. No intervalo $]-\infty, 3[$, a função f é contínua por ser definida pela composta, produto, diferença e quociente de funções contínuas (função exponencial e funções polinomiais).

No intervalo $]3, +\infty[$, a função f é contínua por ser definida pela composta e produto de funções contínuas (função exponencial e funções polinomiais).

No ponto 3, f é contínua se, e só se, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x e^{-x} - 3e^{-3}}{x - 3} \stackrel{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{(y+3)e^{-(y+3)} - 3e^{-3}}{(y+3) - 3} \quad \left| \begin{array}{l} y = x - 3 \Leftrightarrow x = y + 3 \\ \text{Se } x \rightarrow 3^-, y \rightarrow 0^- \end{array} \right. \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y e^{-(y+3)} + 3e^{-(y+3)} - 3e^{-3}}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y e^{-(y+3)} + 3e^{-y} e^{-3} - 3e^{-3}}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y e^{-(y+3)} + 3e^{-3}(e^{-y} - 1)}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{y e^{-(y+3)}}{y} + \frac{3e^{-3}(e^{-y} - 1)}{y} \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} e^{-(y+3)} - 3e^{-3} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{-y} - 1}{-y} \\ &\stackrel{x = -y}{=} e^{-3} - 3e^{-3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \\ &= e^{-3} - 3e^{-3} \times 1 = -2e^{-3} \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} [(1-x)e^{-x}] = (1-3)e^{-3} = -2e^{-3}$$

$$\bullet f(3) = (1-3)e^{-3} = -2e^{-3}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$, a função f é contínua no ponto 3.

Portanto, a função f é contínua em $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{19.2.} \quad f(x) = e^{-x} \wedge x \in [3, +\infty[&\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1-x)e^{-x} = e^{-x} \wedge x \in [3, +\infty[\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1-x)e^{-x} - e^{-x} = 0 \wedge x \in [3, +\infty[\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{-x}(1-x-1) = 0 \wedge x \in [3, +\infty[\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{-x} = 0 \vee -x = 0 \wedge x \in [3, +\infty[\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \wedge x \in [3, +\infty[\Leftrightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

A equação é impossível porque $0 \notin [3, +\infty[$.

Questões propostas

- 22** O valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 - e^x}$ é:

- (A) 0 (B) 1
(C) $-\infty$ (D) $+\infty$

- 23** Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x - 3e^{x-2}}{3-x} & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{2 \ln \sqrt{x-1}}{x-2} - x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Averigue se a função h é contínua no ponto 2.

- 24** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(e^{-4x} - 1) & \text{se } x > 0 \\ -4 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x}{\sqrt{4-x}-2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que a função f é contínua em $\mathbb{R}$.

- 25** Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \log_3 \sqrt{12-3x} & \text{se } x \leq 3 \\ \frac{1}{x-3} \ln \left(\frac{x+3}{6} \right) & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Estude a função g quanto à continuidade.

- 26** Considere a função h , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^a}{x - a} & \text{se } x < a \\ 1 & \text{se } x = a \\ \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} & \text{se } x > a \end{cases}$$

(a é um número real não negativo.)

Mostre que a função h é descontínua no ponto a , qualquer que seja o número real não negativo a .

Questões resolvidas

- 20** De uma função f , de domínio $[-1, 1]$ e contínua, sabe-se que:
- f é uma função par;
 - $f(0) = 1$ e $f(1) = -1$
 - f é estritamente crescente no intervalo $[-1, 0]$.
- Quantas soluções tem a equação $f(x) = 0$?
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Resolução

Atendendo a que f é uma função par:

- (i) se f é estritamente crescente no intervalo $[-1, 0]$, então é estritamente decrescente no intervalo $[0, 1]$.
- Logo, f admite, no máximo, um zero em cada um dos intervalos $[-1, 0]$ e $[0, 1]$.

- (ii) $f(-1) = f(1) = -1$

Como a função f é contínua no intervalo $[-1, 0]$, e como $f(-1) < 0$ e $f(0) > 0$, podemos concluir, pelo corolário do Teorema de Bolzano, que no intervalo $]-1, 0[$ existe pelo menos uma solução da equação $f(x) = 0$.

De igual modo, como a função f é contínua no intervalo $[0, 1]$, e como $f(0) > 0$ e $f(1) < 0$, podemos concluir que no intervalo $]0, 1[$ existe pelo menos uma solução da equação $f(x) = 0$.

Portanto, a equação $f(x) = 0$ tem duas, e só duas, soluções.

Resposta: (C)

- 21** Seja f uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}$.
- Qual dos seguintes conjuntos não pode ser o contradomínio de h ?
- (A) $[0, 1]$ (B) $]-1, 1[\setminus \{0\}$
- (C) $]0, +\infty[$ (D) $]0, 1[$

Resolução

Uma função contínua em $\mathbb{R}$, se passar de negativa para positiva, terá de passar em zero (Teorema de Bolzano).

Então, $]-1, 1[\setminus \{0\}$ não pode ser contradomínio de f .

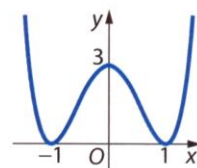
Resposta: (B)

- 22** Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, contínua no intervalo $[2, 4]$.
- Tem-se que $f(2) = \frac{1}{4}$, $f(4) = 4$ e $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.
- Indique qual das expressões seguintes define uma função g , de domínio $\mathbb{R}$, para a qual o Teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $]2, 4[$.
- (A) $g(x) = \sqrt{f(x)} - x$ (B) $g(x) = \sqrt{f(x)} + x$
- (C) $g(x) = f(x) - \log_2 x$ (D) $g(x) = f(x) + \log_2 x$

Questões propostas

- 27** De uma função f , contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:
- f é uma função par;
 - $f(2) = -1$ e $f(4) = -3$
- Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?
- (A) A equação $f(x) = -2$ tem duas, e só duas, soluções.
- (B) A equação $f(x) = -2$ não tem solução no intervalo $[-2, 2]$.
- (C) A equação $f(x) = -2$ tem pelo menos duas soluções.
- (D) A função f não tem zeros.

- 28** Seja f uma função polinomial do quarto grau, cujo gráfico se encontra parcialmente representado na figura.



O mínimo da função f é $0 = f(-1) = f(1)$ e f admite um máximo relativo igual a 3 para $x = 0$.

Seja g a função definida por $g(x) = f(x-1) - 3$.

Qual é o valor de k para o qual a equação $g(x) = k$ tem exatamente três soluções distintas?

- (A) 3 (B) -3
- (C) -1 (D) 0

- 29** De uma função f , contínua, de domínio $[-2, 2]$, sabe-se que $f(-2) = -3$ e $f(2) = 3$.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

- (A) O contradomínio da função f é o intervalo $[-3, 3]$.
- (B) $f(1) > -3$
- (C) A equação $f(x) = x$ tem pelo menos uma solução em $]-2, 2[$.
- (D) $f(0) < f(1)$

Questões resolvidas

Resolução

(A) $g(x) = \sqrt{f(x)} - x$

$$g(2) = \sqrt{f(2)} - 2 = \sqrt{\frac{1}{4}} - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} < 0$$

$$g(4) = \sqrt{f(4)} - 4 = \sqrt{4} - 4 = 2 - 4 = -2 < 0$$

(B) $g(x) = \sqrt{f(x)} + x$

$$g(2) = \sqrt{f(2)} + 2 = \sqrt{\frac{1}{4}} + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} > 0$$

$$g(4) = \sqrt{f(4)} + 4 = \sqrt{4} + 4 = 2 + 4 = 6 > 0$$

(C) $g(x) = f(x) - \log_2 x$

$$g(2) = f(2) - \log_2 2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0$$

$$g(4) = f(4) - \log_2 4 = 4 - 2 = 2 > 0$$

g é uma função contínua em $\mathbb{R}^+$ por ser a diferença de funções contínuas em $\mathbb{R}^+$. Logo, g é contínua em $[2, 4]$.

Como $g(2) < 0$ e $g(4) > 0$, o Teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero de g no intervalo $]2, 4[$.

Resposta: (C)

23 O gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \frac{3 + 2e^{3x}}{e^x + 1}, \text{ tem uma única assíntota.}$$

Qual das condições seguintes é uma equação dessa assíntota?

- (A)
- $y = 0$
- (B)
- $y = 3$
- (C)
- $y = 2$
- (D)
- $y = 1$

Resolução

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + 2e^{3x}}{e^x + 1} = \frac{3 + 2e^{-\infty}}{e^{-\infty} + 1} = \frac{3}{1} = 3$$

A reta da equação $y = 3$ é uma assíntota (horizontal) do gráfico da função f .

Resposta: (B)

24 Considere a função f , de domínio $]-\infty, 4[$, definida por $f(x) = 1 + \log_2(8 - 2x)$.**24.1.** Resolva a inequação $f(x) \leq f(1) - 2$.**24.2.** Mostre que a equação $f(x) = x$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]2, 3[$.

Resolução

24.1. $f(x) \leq f(1) - 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_2(8 - 2x) \leq 1 + \log_2(8 - 2) - 2 \wedge x \in]-\infty, 4[$$

$$\Leftrightarrow \log_2(8 - 2x) \leq \log_2 6 - 2 \wedge x \in]-\infty, 4[$$

$$\Leftrightarrow \log_2(8 - 2x) \leq \log_2 6 - \log_2 4 \wedge x \in]-\infty, 4[$$

$$\Leftrightarrow \log_2(8 - 2x) \leq \log_2(6 : 4) \wedge x \in]-\infty, 4[$$

$$\Leftrightarrow 8 - 2x \leq \frac{3}{2} \wedge x \in]-\infty, 4[\Leftrightarrow$$

Questões propostas

30 Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$, contínua no intervalo $\left[\frac{1}{9}, \frac{1}{4}\right]$.

$$\text{Tem-se que } f\left(\frac{1}{9}\right) = 4 \text{ e } f\left(\frac{1}{4}\right) = 9.$$

Indique qual das expressões seguintes define uma função g , de domínio $\mathbb{R}$, para a qual o Teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $\left[\frac{1}{9}, \frac{1}{4}\right]$.

(A) $g(x) = \sqrt{x} + f(x)$

(B) $g(x) = \sqrt{x} - f(x)$

(C) $g(x) = \frac{1}{x} + f(x)$

(D) $g(x) = \frac{1}{x} - f(x)$

31 Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 2 + 2^x & \text{se } x < 2 \\ x - \log_2\left(\frac{x}{2} + 1\right) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o Teorema de Bolzano permite garantir a existência de pelo menos uma solução da equação $h(x) = 2$?

(A) $] -1, 0[$ (B) $] 0, 1[$

(C) $] 1, 2[$ (D) $] 2, 6[$

32 O gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 e^x$ tem uma única assíntota.

Qual das condições seguintes é uma equação dessa assíntota?

(A) $x = 0$ (B) $y = -1$

(C) $y = 0$ (D) $y = 1$

33 De uma função h , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- h é uma função ímpar;

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) + 3] = 1$

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$?

(A) -2 (B) 2 (C) 3 (D) -3

Questões resolvidas

$$\Leftrightarrow 16 - 4x \leq 3 \wedge x \in]-\infty, 4[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x \geq 13 \wedge x \in]-\infty, 4[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{13}{4} \wedge x \in]-\infty, 4[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{13}{4}, 4[\right.$$

24.2. Seja h a função definida em $]-\infty, 4[$ por $h(x) = f(x) - x$.

A função f é contínua em $]-\infty, 4[$ por ser definida pela composta e soma de funções contínuas (função logarítmica e funções polinomiais).

A função h é contínua em $]-\infty, 4[$ por ser definida pela diferença de funções contínuas (a função f e uma função polinomial).

Logo, h é contínua em $[2, 3]$.

$$h(2) = f(2) - 2 = 1 + \log_2(8 - 2 \times 2) - 2 = \\ = \log_2 4 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$h(3) = f(3) - 3 = 1 + \log_2(8 - 2 \times 3) - 3 = \\ = \log_2 2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

Como a função h é contínua em $[2, 3]$ e como $h(2) > 0$ e $h(3) < 0$, temos, pelo Teorema de Bolzano, que a função h tem pelo menos um zero no intervalo $]2, 3[$.

Ora, como $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ podemos concluir que a equação $f(x) = x$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]2, 3[$.

25 Considere uma função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{5\}$, contínua em todo o seu domínio.

Sabe-se que:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -3 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$$

Em cada uma das opções seguintes, estão escritas duas equações, representando cada uma delas uma reta.

Em qual das opções as duas retas assim definidas são as assíntotas do gráfico da função f ?

(A) $y = x$ e $y = 2$

(B) $y = 2$ e $x = 5$

(C) $y = x$ e $x = 5$

(D) $y = -3$ e $x = 2$

Resolução

Atendendo a que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ e f é contínua em todo o seu domínio:

• se $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -3$, o gráfico de f não tem assíntotas verticais;

• se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, a reta de equação $y = 2$ é uma assíntota do gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$;

• se $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$, a reta de equação $y = x$ é uma assíntota do gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

Resposta: (A)

Questões propostas

34 Considere a função f , de domínio $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$, definida por $f(x) = 2 + \log_2(2x - 1)$.

34.1. Resolva a inequação $f(x) \leq f(4) - 1$.

34.2. Mostre que a equação $f(x) = x^2$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]1, 2[$.

34.3. Existem exatamente quatro pontos do gráfico da função f em que uma das coordenadas é o quadrado da outra.

Determine as coordenadas desses pontos, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico das funções que visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- indicar o valor das coordenadas dos pontos com arredondamento às milésimas.

35 Considere a função h , de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x-1)}{k(x-2)} & \text{se } x > 2 \\ k & \text{se } x = 2 \\ \frac{\sqrt{16x+32}-8}{x-2} + 2k & \text{se } 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

35.1. Determine o número real k para o qual se pode aplicar o Teorema de Bolzano à função h no intervalo $[1, 3]$.

35.2. Considere $k = -1$.

Mostre que a equação $h(x) = -0,6$ é possível no intervalo $]3, 4[$.

36 Considere a função g , de domínio $\left] \frac{10}{13}, +\infty \right[$, definida por:

$$g(x) = 2 \log_2(13x - 10) - \log_2\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$$

Mostre que o gráfico de g intersesta a reta de equação $y = \frac{5x}{2}$ num ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $]1, 2[$.

Questões resolvidas

26 Seja h uma função contínua de domínio $\mathbb{R}_0^+$.

Sabe-se que:

- o gráfico de h tem uma assíntota oblíqua;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2h(x) + 4x + \ln x}{x} = 0$$

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

- (A) $h(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$
 (B) $h(0) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -4$
 (C) $h(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$
 (D) $h(0) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$

Resolução

- Se f é contínua em $\mathbb{R}_0^+$, então é contínua no ponto $x = 0$.

- Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2h(x) + 4x + \ln x}{x} = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2h(x)}{x} + \frac{4x}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2h(x)}{x} + 4 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} + 4 + 0 = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = -4 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = -2 \end{aligned}$$

Portanto, a assíntota oblíqua do gráfico da função h tem declive negativo.

Logo, como o domínio de h é $\mathbb{R}_0^+$ tem-se $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$.

Resposta: (D)

27 Uma certa quantidade de água, inicialmente à temperatura de 10°C , foi aquecida durante 10 minutos, usando uma fonte de calor. Seguidamente foi deixada em repouso, a arrefecer, num local onde a temperatura ambiente é constante.

A temperatura da água, em graus Celsius, t minutos depois de ter sido colocada a aquecer, é dada, para certos valores de A e de B , por:

$$T(t) = \begin{cases} 8t + A & \text{se } 0 \leq t \leq 10 \\ 22 + Be^{-0,05(t-10)} & \text{se } t > 10 \end{cases}$$

27.1. Determine os valores de A e B .

27.2. Determine $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ e interprete o resultado no contexto da situação apresentada.

27.3. Sabendo que a fonte de calor foi desligada às 12 horas, a que horas a temperatura da água atingiu os 27°C (apresente o resultado em horas e minutos com os minutos arredondados às unidades).

Questões propostas

37 De uma função f , de domínio $\mathbb{R}$ sabe-se que:

- f é uma função par;
- para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$;
- a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota do gráfico de f .

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{-x} - e^x}{f(x)}$?

- (A) $+\infty$ (B) $-\infty$ (C) 0 (D) 1

38 Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, contínua e estritamente crescente.

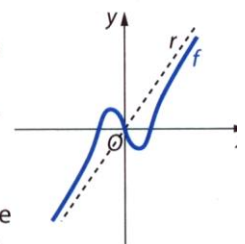
Sabe-se que:

- $f(0) = -1$
- as retas de equações $y = x + 2$ e $y = 2$ são assíntotas do gráfico de f .

Qual é o contradomínio de f ?

- (A) $]-\infty, 2[$ (B) $]2, +\infty[$
 (C) $[-1, +\infty[$ (D) $[-1, 2[$

39 Na figura ao lado está representada parte do gráfico de uma função f , de domínio $\mathbb{R}$.

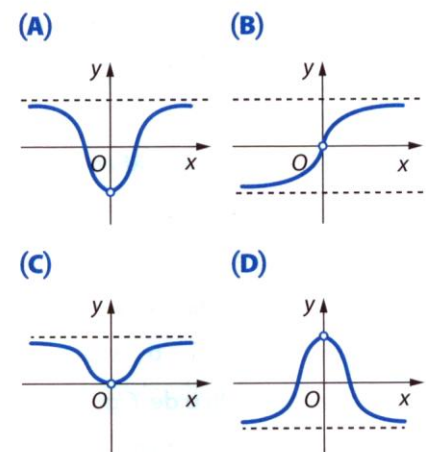


Sabe-se que a função f é ímpar e contínua em todo o seu domínio.

A reta r é a única assíntota do gráfico da função f .

Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função g definida por

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}?$$



Questões resolvidas

Resolução

27.1. Inicialmente, a temperatura da água era de 10°C .

$$T(0) = 10 \Leftrightarrow 8 \times 0 + A = 10 \Leftrightarrow A = 10$$

A temperatura da água varia de forma contínua.

Logo, sendo T uma função contínua, temos:

$$\lim_{t \rightarrow 10^-} T(t) = \lim_{t \rightarrow 10^+} T(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 10^-} T(t) = \lim_{t \rightarrow 10^-} (8t + 10) = 8 \times 10 + 10 = 90$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 10^+} T(t) &= \lim_{t \rightarrow 10^+} (22 + Be^{-0,05(t-10)}) = \\ &= 22 + Be^{-0,05 \times 0} = 22 + B \end{aligned}$$

$$22 + B = 90 \Leftrightarrow B = 90 - 22 \Leftrightarrow B = 68$$

Logo, temos $A = 10$ e $B = 68$.

$$\begin{aligned} \textbf{27.2.} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (22 + 68e^{-0,05(t-10)}) = \\ &= 22 + 68e^{-\infty} = 22 + 68 \times 0 = 22 \end{aligned}$$

Com o decorrer do tempo, a temperatura tende a estabilizar em 22°C . Podemos, portanto, concluir que a temperatura ambiente é igual a 22°C .

$$\begin{aligned} \textbf{27.3.} \quad T(t) = 27 &\Leftrightarrow 22 + 68e^{-0,05(t-10)} = 27 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 68e^{-0,05(t-10)} = 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{-0,05(t-10)} = \frac{5}{68} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -0,05(t-10) = \ln \frac{5}{68} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t-10 = -\frac{1}{0,05} \times \ln \frac{5}{68} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t-20 \times \ln \frac{5}{68} + 10 \Rightarrow t \approx 62,2 \end{aligned}$$

A temperatura da água atingiu os 27°C aproximadamente 62 minutos depois de ter sido colocada a aquecer.

Às 12 horas já tinham decorrido 10 minutos. Como $62 - 10 = 52$, podemos concluir que a água estava a 27°C às 12 horas e 52 minutos.

28 Sejam f e g duas funções, ambas de domínio $\mathbb{R}^+$, sendo $g(x) = ax + b$, com a e b números reais.

Mostre que se o gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua então o gráfico da função $f + g$ também tem uma assíntota oblíqua.

Resolução

Seja $y = mx + \beta$ a equação da assíntota do gráfico da função f .

Sabemos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \beta$.

Seja $h(x) = (f + g)(x) = f(x) + ax + b$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + ax + b}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{ax}{x} + \frac{b}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + a + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = m + a + 0 = m + a \end{aligned}$$

Questões propostas

40 No início de 1995 contaram-se, numa determinada reserva natural, 15 leopardos de uma espécie considerada em perigo de extinção. A partir dessa data foram tomadas medidas de proteção tendo o número de leopardos aumentado continuamente.

Contagens posteriormente efetuadas permitiram concluir que o número aproximado, N , de leopardos existentes nessa reserva, t anos após o início de 1995, é dado, para determinado valor de A , por:

$$N(t) = \frac{A}{1 + 59e^{-0,15t}}$$

40.1. Mostre que $A = 900$.

40.2. Calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ e dê uma possível interpretação do resultado obtido, no contexto do problema.

40.3. Os biólogos responsáveis são da opinião que, quando a população de leopardos atingir as 300 unidades, deixarão de ser necessárias medidas especiais de proteção da espécie. Em que ano tal ocorrerá?

41 Numa determinada ilha, o número, P , de pinguins, t anos após o início de 1980, está relacionado com as constantes N e M (taxa de natalidade e taxa de mortalidade, respetivamente) pela expressão:

$$(N - M)t = -10 + 2,5 \log_{10}(2P)$$

41.1. Se $N = M$, qual é o número de pinguins existentes nessa ilha?

41.2. Mostre que:

$$P(t) = 5000 \times 10^{0,4(N-M)t}$$

41.3. No início de 2005 verificou-se que a população de pinguins era metade da que existia no início de 1980. Determine a taxa de natalidade, sabendo que a taxa de mortalidade é de 7,24. Apresente o resultado aproximado às centésimas.

41.4. Sabendo que $N < M$, calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t)$ e interprete o resultado obtido, no contexto do problema.

Questões resolvidas

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (m+a)x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + ax + b - mx - ax] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(f(x) - mx) + b] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) + b = \beta + b\end{aligned}$$

Portanto, se a reta de equação $y = mx + \beta$ é uma assíntota do gráfico da função f , a reta de equação $y = (m+a)x + \beta + b$ é uma assíntota do gráfico da função $f + g$.

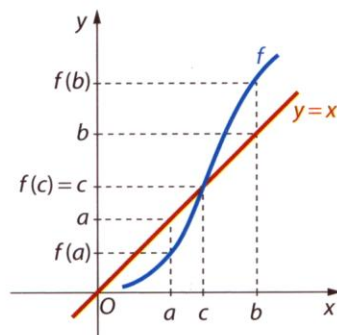
- 29** Seja f uma função contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tal que $f(a) < a < b < f(b)$.

Mostre que o gráfico da função f intersesta a reta de equação $y = x$ em pelo menos num ponto cuja abcissa, c , pertence ao intervalo $[a, b]$.

Resolução

Consideremos a função h definida no domínio de f por $h(x) = f(x) - x$.

- h é contínua em $[a, b]$ por ser definida pela diferença de duas funções contínuas neste intervalo: a função f e a função identidade.



- $h(a) = f(a) - a$
Como $f(a) < a$, temos $f(a) - a < 0$ pelo que $h(a) < 0$.

$$h(b) = f(b) - b$$

Como $b < f(b)$, temos $f(b) - b > 0$ pelo que $h(b) > 0$.

Logo, $h(a) \times h(b) < 0$.

Pelo corolário do Teorema de Bolzano, temos:

$$\begin{cases} h \text{ é contínua em } [a, b] \\ h(a) \times h(b) < 0 \end{cases} \Rightarrow \exists c \in]a, b[: h(c) = 0$$

Como $h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - c = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$, podemos concluir que o gráfico de f intersesta a reta de equação $y = x$ num ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $]a, b[$.

Questões propostas

- 42** Sejam a, b, c e d números reais tais que $a < b < c < d$.

Seja f uma função de domínio $[a, d]$ e contradomínio $[b, c]$.

Mostre que a equação $f(x) = x$ tem pelo menos uma solução.

- 43** Seja g uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que $g(3) > g(2)$.

Prove que a equação:

$$g(x) = \frac{g(2) + g(3)}{2}$$

tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]2, 3[$.

- 44** Considere uma função, de domínio $\mathbb{R}$, contínua e de contradomínio $\mathbb{R}^+$.

Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e $f(a) = 4f(b)$.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 3f(x) - 2f(a)$.

Prove que a função g tem pelo menos um zero em $]a, b[$.

- 45** Sejam f e g duas funções tais que:

- f e g têm domínio $\mathbb{R}^+$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 3x - 1] = 0$
- $g(x) = \frac{f(x) + e^x}{x}$

Mostre que o gráfico da função g não tem assíntotas oblíquas.

- 46** De uma função h , de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a reta de equação

$y = \frac{x+1}{2}$ é uma assíntota do seu gráfico.

Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$g(x) = \frac{h(x) \times \ln x}{x^2}$$

Mostre que o gráfico de g tem uma assíntota horizontal.

Questões resolvidas

- 30** Considere uma função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, relativamente à qual se sabe que:

- $f(x) \neq 0$ para todo o x do domínio de f ;
- a reta de equação $y = x + 5$ é uma assíntota do gráfico.

Considere ainda a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{f(x)}.$$

Prove que a reta de equação $y = x - 6$ é uma assíntota do gráfico da função g .

Resolução

Se a reta de equação $y = x + 5$ é uma assíntota do gráfico da função f , tem-se:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 5$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 - x}{f(x)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x - 1)}{x \times f(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \quad \left| \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \right. \\ &= \frac{1}{1} \times (1 - 0) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x}{f(x)} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - xf(x)}{f(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x - 1 - f(x))}{f(x)} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 1) = \\ &= -1 \times \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) + 1 \right] = \\ &= -(5 + 1) = -6 \quad \left| \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 5 \right. \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = x - 6$ é uma assíntota do gráfico da função g .

Questões propostas

- 47** De uma função h , de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a bissetriz dos quadrantes pares é uma assíntota do seu gráfico.

Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$g(x) = \frac{\ln(e^x + x)}{h(x)}$$

Mostre que o gráfico de g tem uma assíntota horizontal.

- 48** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 1) - 1$$

Mostre que a reta de equação $y = 2x - 1$ é uma assíntota do gráfico da função f .

- 49** Sejam g e h duas funções de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

- a reta de equação $y = -3x + 2$ é uma assíntota do gráfico da função g ;
- $h(x) = \frac{\ln x + xg(x)}{x^2}$

Mostre que o gráfico de h tem uma assíntota horizontal.

- 50** Sejam f e g duas funções tais que
- f e g têm domínio $\mathbb{R}^-$;
 - a reta de equação $y = 2x + 1$ é uma assíntota do gráfico da função f ;
 - $g(x) = f(x) + e^{-x}$

Mostre que o gráfico de g não tem assíntotas oblíquas.

- 51** De uma função h , de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a reta de equação $y = 2x - 1$ é uma assíntota do seu gráfico.

Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$g(x) = \frac{h(x)}{x e^x}$$

Mostre que o gráfico de g tem uma assíntota horizontal.

Questões para praticar

Itens de seleção

- 52** Considere a função g definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por

$$g(x) = \frac{x-1}{e^x - 1}.$$

Indique qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

- (A) 0 (B) 2 (C) $-\infty$ (D) $+\infty$

- 53** Considere a sucessão de termo geral:

$$u_n = \log_2 \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

Indique o valor de $\lim u_n$.

- (A) 0 (B) $-\infty$ (C) 1 (D) $+\infty$

- 54** Seja g a função definida em $] -1, +\infty[$ por $g(x) = x + \log_2(x+1)$.

O Teorema de Bolzano permite-nos afirmar que a equação $g(x) = 4$ tem pelo menos uma solução no intervalo:

- (A) $]0, 1[$ (B) $]1, 2[$
(C) $]2, 3[$ (D) $]3, 4[$

- 55** De uma função h , de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a reta de equação $y = \frac{1-2x}{3}$ é assíntota do seu gráfico.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$?

- (A) $-\frac{2}{3}$ (B) -2 (C) $\frac{1}{3}$ (D) 2

- 56** Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \frac{e^x + 5}{3 + \ln(x^2 + 1)}$$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{n+1}{n^2}$. Indique o valor de $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n)$.

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

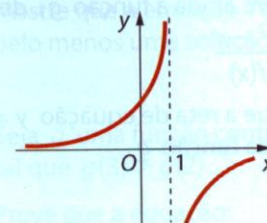
- 57** Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $]1, 4[$, contínua e estritamente crescente.

Seja $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira, relativamente ao valor de a ?

- (A) a pode não ser um número real.
(B) $a - f(0) = 0$
(C) a pode ser igual a 1.
(D) $a + f(0) = 0$

- 58** Na figura seguinte está desenhada parte da representação gráfica de uma função f , cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.



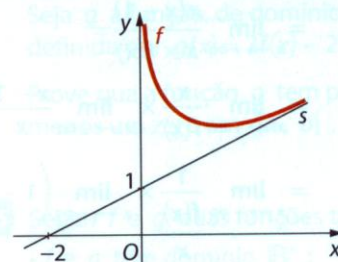
A reta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical do gráfico de f .

Considere a sucessão de termo geral $x_n = 1 - \frac{1}{n^2}$. Seja $u_n = f(x_n)$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $\lim u_n = +\infty$ (B) $\lim u_n = -\infty$
(C) $\lim u_n = 1$ (D) Não existe $\lim u_n$.

- 59** Na figura seguinte está representada graficamente uma função f , de domínio $\mathbb{R}^+$.



A reta s , que contém os pontos $(-2, 0)$ e $(0, 1)$, é assíntota do gráfico de f .

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$
(B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{x}{2} - 1 \right] = 0$
(C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x \right] = 1$
(D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{x}{2} + 1 \right] = 0$

- 60** Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}^-$.

Sabe-se que:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x) - 2x}{x} = 0$

o gráfico de g tem uma assíntota oblíqua.

Qual das condições seguintes pode ser uma equação dessa assíntota?

- (A) $y = x + 2$ (B) $y = 2x$
(C) $y = x - 2$ (D) $y = -2x$

- 61** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{2} & \text{se } x > 1 \\ x^2 + 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Seja (u_n) uma sucessão de números reais, de termos positivos, tal que $\lim f(u_n) = 0$.

Qual das expressões seguintes pode definir o termo geral da sucessão (u_n) ?

- (A) $\frac{2}{n}$ (B) $-\frac{1}{n}$ (C) $1 + \frac{1}{n}$ (D) $1 - \frac{1}{n}$

- 62** Considere duas funções f e g de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que as retas de equações $y = 4x - 1$ e $y = -2x + 1$ são assíntotas dos gráficos das funções f e g , respetivamente.

Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - g(x)}{x}$.

- (A) 6 (B) 2 (C) 0 (D) -2

- 63** De uma função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a reta de equação $y = 3x - 6$ é uma assíntota do seu gráfico.

Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{3x^2}{g(x)} \right)$.

- (A) 2 (B) -2 (C) 18 (D) -18

Itens de construção

- 64** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-2x)}{1-\sqrt{1-x}} & \text{se } x < 0 \\ -5 + \ln k & \text{se } x = 0 \\ \frac{\ln(e^x - x) - 4x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

64.1. Determine o valor de k , de modo que f seja contínua em $\mathbb{R}$.

64.2. Para o valor de k determinado na alínea anterior, estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

64.3. Sejam A e B os pontos do gráfico de f com ordenada $-3,5$ e C um ponto do eixo Ox . Determine a área do triângulo $[ABC]$, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta deve:

- reproduzir o gráfico ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar;
- assinalar os pontos A e B e indicar as suas abcissas (com arredondamento às milésimas);
- apresentar a área do triângulo $[ABC]$ com arredondamento às centésimas.

- 65** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 + x e^x & \text{se } x \leq 0 \\ 5 + x \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

65.1. Estude a função f quanto à continuidade.

65.2. Determine as equações das assíntotas do gráfico da função f .

65.3. Mostre, que o gráfico da função f interseja uma das suas assíntotas num ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $]2, 3[$.

- 66** Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \ln(e^{-x} - x) + 3 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x^2 + \ln x}{x + 2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

66.1. Verifique se g é contínua no ponto 0.

66.2. Estude a função g quanto à existência de assíntotas do gráfico.

- 67** Considere duas funções, f e g , contínuas num intervalo $[a, b]$.

Sabe-se que:

- $f(a) < g(a)$
- $g(b) < f(b)$

Mostre que os gráficos de f e g se intersectam em pelo menos um ponto.

- 68** Seja f uma função ímpar, de domínio $\mathbb{R}$, cujo gráfico admite como assíntota, quando $x \rightarrow +\infty$, a reta de equação $y = 3x + 2$.

Prove que a reta de equação $y = 3x - 2$ também é uma assíntota do gráfico da função f .

- 69** Seja f uma função sem zeros de domínio $\mathbb{R}^+$.

Mostre que se a bissetriz dos quadrantes pares é uma assíntota do gráfico de f então também é assíntota do gráfico da função g definida, em

$$\mathbb{R}^+, \text{ por } g(x) = \frac{x^2}{f(x)}.$$

- 70** Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que $f(3) > f(1)$ e $f(1) = f(5)$.

Prove que existe um número real c no intervalo $]1, 3[$ tal que $f(c) = f(c + 2)$.

Sugestão: Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - f(x + 2)$.

- 1** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 2 \\ x-1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = f\left(2 - \frac{1}{n}\right)$.

Indique qual das expressões seguintes pode definir o termo geral de (u_n) .

- (A) $1 - \frac{1}{n}$ (B) $3 - \frac{1}{n}$ (C) $4 - \frac{1}{n}$ (D) $-\frac{1}{n}$

- 2** Considere a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$.

Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = -\frac{1}{n}$.

Qual é o valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$?

- (A) 0 (B) 1 (C) $-\infty$ (D) $+\infty$

- 3** O valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{e^x - 1}$ é:

- (A) 1 (B) 0 (C) $-\infty$ (D) $+\infty$

- 4** O valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(\frac{1}{x}\right) \right]$ é:

- (A) $-\infty$ (B) $+\infty$ (C) 0 (D) 1

- 5** Seja f uma função real de variável real tal que $f(x) = \frac{1}{e^x x}$.

Quanto ao $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ pode afirmar-se que:

- (A) é $+\infty$; (B) é $-\infty$; (C) é 0; (D) não existe.

- 6** Para um certo valor de k , é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 + 2x}{x} & \text{se } x < 0 \\ k + \ln(1+x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

- 7** Para um certo valor de k , é contínua em $\mathbb{R}$ a função g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} k - e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x}{\ln x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2

- 8 Seja h a função definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = x + \log_2\left(\frac{x^2 + 2}{3}\right)$.

O Teorema de Bolzano permite-nos afirmar que a equação $h(x) = 2$ tem pelo menos uma solução no intervalo:

- (A) $] -2, -1[$ (B) $] -1, 0[$ (C) $] 0, 1[$ (D) $] 1, 2[$

- 9 Seja f uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f(a) = 1$ e $f(b) = 2$.

Então, pode concluir-se que:

- (A) f pode ter, ou não ter, zeros em $]a, b[$;
 (B) f tem zeros em $]a, b[$;
 (C) f não tem zeros em $]a, b[$;
 (D) f tem pelo menos um zero em $]a, b[$ se, e só se, existir um ponto c , em $]a, b[$, tal que $f(c) < 0$.

- 10 De uma função f , contínua e estritamente decrescente no intervalo $[2, 5]$, sabe-se que $f(2) = 9$ e $f(5) = 3$.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

- (A) A equação $f(x) = 6$ pode ter duas soluções no intervalo $]2, 5[$.
 (B) A equação $f(x) = 1$ é impossível no intervalo $]2, 5[$.
 (C) A função f admite pelo menos um zero no intervalo $]2, 5[$.
 (D) O contradomínio de f é o intervalo $[3, 9]$.

- 11 De uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- $f(0) = -1$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

- (A) f tem dois e só dois zeros. (B) f admite pelo menos dois zeros.
 (C) f pode não ter zeros. (D) f tem um número par de zeros.

- 12 Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, contínua e estritamente crescente.

Sabe-se ainda que $f(3) = 0$ e $f(5) = 3$.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

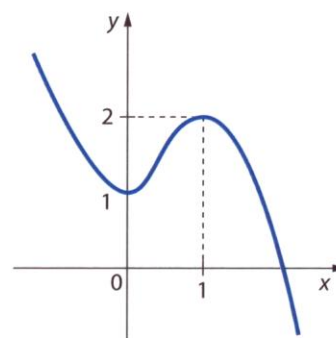
- (A) $f(x) < 0$, qualquer que seja $x \in]-\infty, 3[$.
 (B) A equação $f(x) = 2$ pode ter duas soluções no intervalo $]3, 5[$.
 (C) A equação $f(x) = 2$ admite pelo menos uma solução no intervalo $]0, 3[$.
 (D) O contradomínio de f é $\mathbb{R}$.

- 13 Na figura está parte da representação gráfica de uma função g polinomial do terceiro grau.

A função g admite um mínimo relativo igual a 1 para $x = 0$ e admite um máximo relativo igual a 2 para $x = 1$.

Qual é o conjunto dos valores de b para os quais a equação $g(x) = b$ tem duas e só duas soluções?

- (A) $\{1, 2\}$ (B) $]1, 2[$
 (C) $\mathbb{R} \setminus [1, 2]$ (D) $[1, 2]$



14 Sabendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) + 2x - 1] = 0$ pode afirmar-se que:

- (A) a reta de equação $y = 2x - 1$ é uma assíntota do gráfico de h ;
 (B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = -2$
 (C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$
 (D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$

15 f é uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.

Admita que a bissetriz dos quadrantes pares é uma assíntota do gráfico de f .

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$?

- (A) $+\infty$ (B) 0 (C) 1 (D) -1

16 Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x}{x} = 1$
- o gráfico de f tem uma assíntota não vertical.

Qual das seguintes equações pode definir essa assíntota?

- (A) $y = x$ (B) $y = 2$ (C) $y = -x$ (D) $y = 2x + 1$

17 A respeito de uma função f sabe-se que:

- $D_f = \mathbb{R}^+$
- f é contínua e estritamente crescente;
- $f(2) = 0$
- a reta de equação $y = 1$ é a única assíntota do gráfico de f .

Pode-se afirmar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1)}{1 - f(x)}$ é:

- (A) 1 (B) 0 (C) $+\infty$ (D) $-\infty$

18 Considere que h é uma função par, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Admita que h é negativa e que a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota do seu gráfico.

O valor de $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)}{e^x - 1}$ é:

- (A) 1 (B) 0 (C) $-\infty$ (D) $+\infty$

19 Considere uma função g de domínio $[0, +\infty[$, contínua em todo o seu domínio.

Sabe-se que:

- o gráfico de g tem uma única assíntota;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

O valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ pode ser:

- (A) $+\infty$ (B) -2 (C) 2 (D) 0

20 f é uma função de domínio $\mathbb{R}^+$. Admita que f é negativa e que o eixo Ox é uma assíntota do seu gráfico.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)}$?

- (A) $+\infty$ (B) $-\infty$ (C) 0 (D) 1

21 Calcule cada um dos limites seguintes.

$$21.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x}{x}$$

$$21.2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$21.3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{x-3}$$

$$21.4. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-3x}{1-x^2}$$

$$21.5. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-3x}{1-x^2}$$

$$21.6. \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$21.7. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$21.8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{1-x^2}$$

$$21.9. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x + 1}{x^3}$$

$$21.10. \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(3x)$$

$$21.11. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x e^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$21.12. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\ln(3x)}$$

22 Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, sendo:

$$22.1. f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+8} & \text{se } x \geq 1 \\ -3 + \frac{\ln x}{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$22.2. f(x) = \begin{cases} x + 3\sqrt{x-1} & \text{se } x \geq 1 \\ 1 - (1-x)e^x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

23 Calcule cada um dos limites seguintes.

$$23.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{4x}$$

$$23.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x})$$

$$23.3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x\right)$$

$$23.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(3x)}$$

$$23.5. \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(2x))$$

$$23.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$$

$$23.7. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$$

$$23.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(x+1)}{x}$$

$$23.9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{x+1}$$

$$23.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+3)}{x+1}$$

$$23.11. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - x]$$

24 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{3x-3-\ln x}{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

24.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função f quanto à continuidade.

24.2. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

25 Considere a função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1) + 3x}{2x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas questões seguintes.

25.1. Estude a função f quanto à continuidade no ponto 0.

(No caso de f não ser contínua no ponto 0 deve indicar, justificando, se é contínua à esquerda, ou à direita, nesse ponto.)

25.2. Determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

26 Determinada espécie de árvores é semeada em viveiros sendo transplantada dois anos após o rebentamento. A altura média das árvores desta espécie, em metros, t anos depois do rebentamento, é dada, para um

$$\text{certo valor de } k, \text{ por } h(t) = \begin{cases} 2 - 2^{1-0,5t} & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ 10 - k \times 2^{0,4-0,2t} & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

26.1. Atendendo a que h é uma função contínua, mostre que $k = 9$.

26.2. Quanto tempo decorreu desde o transplante de uma árvore sabendo que a sua altura é de 5,5 metros?

- 27** Sejam f e g funções contínuas em a . Acerca da função $(f+g)$ pode-se concluir que é contínua em a ? Justifique.
- 28** Acerca das funções f e g sabe-se que são ambas descontínuas em a . Pode-se concluir que a função $f+g$ é descontínua em a ? Descreva o seu raciocínio.
- 29** Supondo que f é contínua em a e que g é descontínua em a , pode-se concluir que $f \times g$ é descontínua em a ? Justifique a sua resposta.
- 30** Supondo que f e g são duas funções descontínuas em a , pode-se concluir que a função $f \times g$ é descontínua em a ? Justifique a sua resposta.
- 31** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + e^x & \text{se } x < 0 \\ 1 + \ln(x+1) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- 31.1.** Verifique que f é contínua no ponto $x=0$.
- 31.2.** Justifique, usando o Teorema de Bolzano, que f admite um zero no intervalo $] -2, 0[$.
- 31.3.** Estude f quanto à existência de assíntotas do gráfico.
- 32** Sabe-se que:
- a função f é contínua em $\mathbb{R}$;
 - $f(a) \times f(b) > 0$
- Pode concluir que a função f não tem zeros em $]a, b[$? Justifique a resposta.
- 33** Seja f uma função contínua de domínio $[0, 1]$ e contradomínio $D_f \subset]0, 1[$. Prove que a função h definida por $h(x) = f(x) - x$ tem pelo menos um zero.
- 34** Seja f uma função contínua de domínio $[0, 3]$ e contradomínio $[1, 2]$. Prove que o gráfico da função f intersesta a bissetriz dos quadrantes ímpares em pelo menos um ponto.
- Sugestão:** Recorra ao Teorema de Bolzano.

- 35** Determine as assíntotas do gráfico de cada uma das funções seguintes.

35.1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$

35.2. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = x + 1 + \ln x$

35.3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ x + e^{-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

35.4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$

- 36** De uma função f , de domínio $]0, +\infty[$, sabe-se que a reta de equação $y = 2x + 3$ é uma assíntota do seu gráfico. Considere a função h , de domínio $]0, +\infty[$, definida por $h(x) = \frac{1 - 4f(x)}{x}$. Prove que o gráfico de h admite uma assíntota paralela ao eixo Ox .
- 37** Sejam f e g duas funções reais de variável real, de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que as retas de equações $y = ax + b$ e $y = cx + d$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, são assíntotas dos gráficos de f e g , respetivamente, quando $x \rightarrow +\infty$.

Prove que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{c}$.

Tema 4

Derivadas

1. Definições e conceitos iniciais

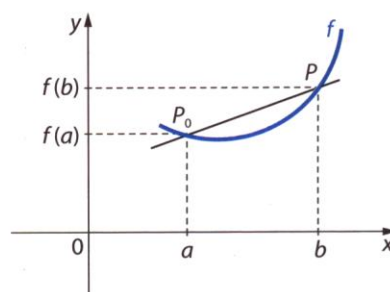
Taxa média de variação

A taxa média de variação de uma função f num intervalo $[a, b]$, contido no domínio de f , é dada por:

$$\text{t. m. } v_{[a, b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometricamente, a taxa média de variação de uma função f num intervalo $[a, b]$ é o valor numérico do declive da reta secante P_0P sendo:

$$P_0 \rightarrow (a, f(a)) \text{ e } P \rightarrow (b, f(b)).$$

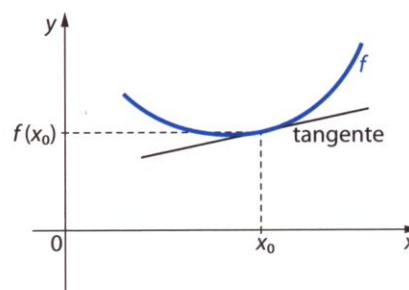


Derivada de uma função num ponto

Chama-se **derivada de uma função f num ponto x_0** , ou **taxa de variação de f em x_0** , e representa-se por $f'(x_0)$ ou $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$ ao limite, quando existir:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ou} \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Geometricamente, $f'(x_0)$ é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$.
- Sendo $s = f(t)$ a equação do movimento de um ponto em função do tempo t :
 - a taxa média de variação do espaço relativamente ao tempo em $[a, b]$ representa a **velocidade média** no intervalo $[a, b]$;
 - a taxa de variação do espaço relativamente ao tempo em a , ou seja, a derivada da função f no ponto a , $f'(a)$, representa a **velocidade instantânea** ou velocidade em a .
- Uma função f diz-se **derivável em $x_0 \in D_f$** se existe $f'(x_0)$.



Exemplo 1 Derivada e declive da tangente

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 + 2e^{x-1}$.

- 1.1. Determine, usando a definição, a derivada de f no ponto $x = 1$.
- 1.2. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

Resolução

1.1. $f(x) = 1 + 2e^{x-1}$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + 2e^{1+h-1}) - (1 + 2e^{1-1})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2e^h - 2}{h} = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

- 1.2. Ponto de tangência:

$$P \curvearrowright (1, 3); \quad f(1) = 1 + 2e^{1-1} = 1 + 2 \times 1 = 3$$

Declive:

$$m = f'(1) = 2$$

Seja $y = mx + b$ uma equação da reta pedida:

$$3 = 2 \times 1 + b \quad (y = 3, m = 2 \text{ e } x = 1)$$

$$b = 1$$

$y = 2x + 1$ é uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

Verifica 1

Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = 3 - \ln x$.

- 1.1. Determine, usando a definição, a derivada de g no ponto $x = 1$.
- 1.2. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1.

Exemplo 2 Velocidade instantânea

A distância, em metros, percorrida por um móvel ao longo de uma linha reta, t segundos depois de partir, é dada pela função:

$$f(t) = 2t^2, \quad 0 \leq t \leq 10$$

- 2.1. Calcule a velocidade média do móvel no intervalo $[1, 5]$.
- 2.2. Calcule, usando a definição de derivada de uma função num ponto, a velocidade instantânea do móvel quando $t = 1$.

Resolução

2.1. $f(t) = 2t^2$

$$\begin{aligned} v_{m[1, 5]} &= t. m. v._{[1, 5]} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{2 \times 25 - 2 \times 1}{4} = \\ &= \frac{50 - 2}{4} = \frac{48}{4} = \\ &= 12 \end{aligned}$$

A velocidade média do móvel no intervalo $[1, 5]$ é de 12 m/s.

$$\begin{aligned} 2.2. \quad v(1) = f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+h)^2 - 2 \times 1^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1 + 2h + h^2) - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4 + 2h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (4 + 2h) = 4 \end{aligned}$$

A velocidade do móvel no instante $t = 1$ é 4 m/s.

Verifica 2

A distância $e(t)$, em metros, percorrida por uma partícula ao fim de t segundos é dada por:

$$e(t) = 3t^2 + t$$

- 2.1. Determine a velocidade média da partícula no intervalo $[1, 5]$.
- 2.2. Determine a velocidade da partícula no instante $t = 2$.

Derivadas laterais

Seja f uma função real de variável real e x_0 um ponto do domínio de f . Diz-se que:

- f é derivável à esquerda no ponto x_0 se existe:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ou} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

a que se chama derivada lateral à esquerda no ponto x_0 e se representa por $f'(x_0^-)$;

- f é derivável à direita no ponto x_0 se existe:

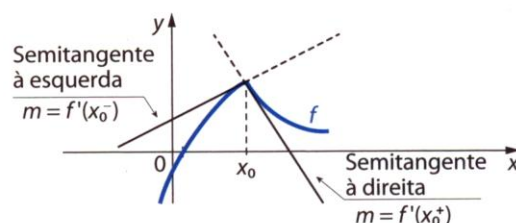
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ou} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

a que se chama derivada lateral à direita no ponto x_0 e se representa por $f'(x_0^+)$;

- existindo e sendo iguais as derivadas laterais de f no ponto x_0 , a função f é derivável nesse ponto e o valor desta derivada é igual ao valor comum das derivadas laterais.

$$f'(x_0) = f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$$

Geometricamente, a derivada à esquerda no ponto x_0 representa o declive da semitangente à esquerda e a derivada à direita no ponto x_0 representa o declive da semitangente à direita no ponto do gráfico de abscissa x_0 .



Exemplo 3 Derivadas laterais

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x} & \text{se } x < 1 \\ 1 + 4 \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Averigue se existe $f'(1)$.

Resolução

$$f(1) = 1 + 4 \ln 1 = 1 + 4 \times 0 = 1$$

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{1-(1+h)} - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{-h} - 1}{h} = - \lim_{-h \rightarrow 0^-} \frac{e^{-h} - 1}{-h} = \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 + 4 \ln(1+h) - 1}{h} = \\ &= 4 \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+h)}{h} = \\ &= 4 \times 1 = 4 \end{aligned}$$

Como $f'(1^-) \neq f'(1^+)$, não existe $f'(1)$.

Verifica 3

3.1. Considere a função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 1 \\ 2 \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Verifique se existe $f'(1)$.

3.2. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por:

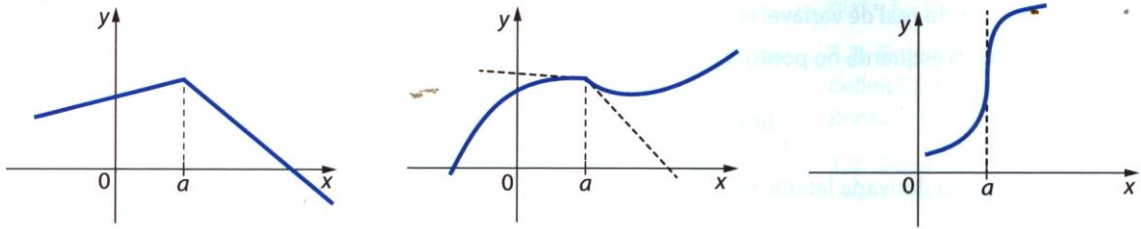
$$f(x) = \begin{cases} x e^{x-1} & \text{se } x \leq 1 \\ \ln(kx) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

a) Determine o valor de k , sabendo que f é uma função contínua.

b) Verifique se, para o valor de k encontrado, existe derivada da função f no ponto 1.

2. Derivabilidade e continuidade

Observe que uma função pode ser contínua num ponto $x = a$ e não ser derivável nesse ponto.



No entanto, é válido o seguinte:

Teorema

Toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto.

Deste teorema também se pode concluir que se uma função é descontínua num ponto, então, necessariamente, não é derivável nesse ponto.

Exemplo 4 Derivabilidade e continuidade

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Verifique que f é contínua, mas não derivável, no ponto $x = 0$.

Resolução

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$f(0) = \sqrt{0} = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, f é contínua em $x = 0$.

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} h = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{h}{h^2}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{h}} = +\infty \end{aligned}$$

Não existe $f'(0)$, porque $f'(0^+)$ não é um número real.

Verifica 4

4.1. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ x+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- Prove que f é derivável no ponto $x = 0$.
- Justifique que f é contínua no ponto $x = 0$.

4.2. Considere a função g definida em $\mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \begin{cases} 3 - \sqrt{1-x} & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-\frac{x}{2}} + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- Mostre que g é uma função contínua no ponto $x = 0$.
- Verifique se existe derivada da função g no ponto 0 .

3. Função derivada

Seja f uma função e D o conjunto dos pontos do seu domínio onde f é derivável.

Chama-se **função derivada** de f à função f' que faz corresponder a cada elemento $x \in D$ o número real $f'(x)$:

$$f': D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f'(x)$$

Para a derivada de uma função f também se usam, entre outras, as notações $\frac{df}{dx}$ e D_f .

Exemplo 5 Definir a função derivada

Considere a função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

5.1. Caracterize f' , função derivada de f , usando a definição de derivada de uma função num ponto.

5.2. Calcule $f'(1)$ e interprete geometricamente o resultado.

Resolução

5.1. $f(x) = x^2$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \leftarrow \text{definição de derivada de } f \text{ no ponto } x = x_0$$

Substituindo x_0 por x , vem:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

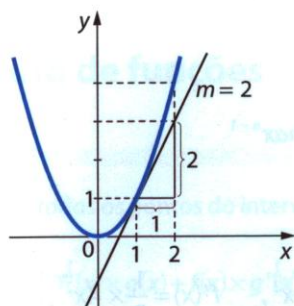
$$f': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 2x$$

5.2. $f'(x) = 2x$

$$f'(1) = 2 \times 1 = 2$$

Geometricamente, dizer que $f'(1) = 2$ significa que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1 tem declive 2.



Verifica 5

Considere a função f , real de variável real, definida por:

$$f(x) = 3x^2$$

5.1. Verifique, usando a definição de derivada, que $f'(x) = 6x$.

5.2. Considere a função g definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = xe^x$. Mostre, usando a definição de derivada de uma função num ponto, que:

$$g'(x) = (x+1)e^x$$

4. Regras de derivação

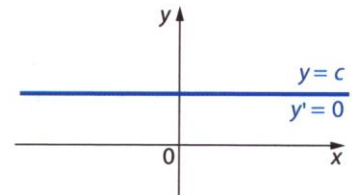
Derivada da função constante

A derivada da função constante é igual a zero.

$$y = c \Rightarrow y' = 0$$

Se $f(x) = c \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$



Derivada da função afim

A derivada da função afim é igual ao declive da reta que representa a função.

$$(ax + b)' = a$$

Se $f(x) = ax + b$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) + b - (ax + b)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{ax} + ah + \cancel{b} - \cancel{ax} - \cancel{b}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a = a \end{aligned}$$

Derivada de uma função quadrática

Se f é uma função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$) então $f'(x) = 2ax + b$.

Se $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x^2 + 2hx + h^2) + bx + bh + c - ax^2 - bx - c}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ahx + ah^2 + bh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2ax + ah + b)}{h} = 2ax + b \end{aligned}$$

Derivada da função $x \rightarrow ax^n, n \in \mathbb{R}$

Para qualquer número real n , tem-se:

$$(ax^n)' = nax^{n-1}$$

Exemplos:

$$f(x) = 2x^5, \quad f'(x) = 2 \times 5x^4 = 10x^4; \quad f(x) = 4x^{\frac{1}{2}}, \quad f'(x) = \frac{1}{2} \times 4x^{\frac{1}{2}-1} = 2x^{-\frac{1}{2}}$$

Derivada da soma de funções

Se duas funções f e g são deriváveis em $]a, b[$, a função $f+g$ é derivável em $]a, b[$, e:

$$(f+g)'(x) = [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

De igual modo:

$$(f-g)'(x) = [f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

Exemplo 6 Derivada de funções polinomiais

Escreva uma expressão da função derivada de f , sendo:

6.1. $f(x) = x + 3$

6.2. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

6.3. $f(x) = -3x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x - 7$

6.4. $f(x) = x^8 - 3x^7 - \sqrt{2}$

Resolução

6.1. $f'(x) = 1$

6.2. $f'(x) = (x^2 - 2x + 1)' = 2x - 2$

6.3. $f'(x) = \left(-3x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - 7\right)' = -9x^2 + x + 3$

6.4. $f'(x) = (x^8 - 3x^7 - \sqrt{2})' = 8x^7 - 21x^6$

Exemplo 7 Derivada de funções irracionais

Escreva uma expressão de função derivada de g , sendo:

$$g(x) = x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Resolução

$$g(x) = x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 3 \times (-2)x^{-2-1} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 6x^{-3} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{6}{x^3} - \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \end{aligned}$$

Verifica 6

Escreva uma expressão da função derivada de:

6.1. $f(x) = -4x^3 + 12x - 1$

6.2. $g(x) = \frac{5x^4}{2} + \frac{x^3}{3}$

Verifica 7

Escreva uma expressão da função derivada de:

7.1. $f(x) = -0,03x^2 - 0,4x + \frac{10}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$

7.2. $f(t) = 2t^3 + \sqrt{t^5}$

7.3. $f(t) = \frac{2}{t^2} - \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$

7.4. $f(s) = \frac{3}{s^2} + \frac{3}{2\sqrt{s}} + 7$

Derivada do produto de funções

Se f e g têm derivada em todos os pontos do intervalo $]a, b[$, $f \times g$ é derivável em $]a, b[$, e:

$$(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Exemplo 8 Derivada do produto de funções

Determine uma expressão de $f'(x)$, sendo:

8.1. $f(x) = (x^4 + 1)\sqrt{x}$

8.2. $f(x) = x(x-2)(x^3+3)$

Resolução

$$\begin{aligned} 8.1. \quad f'(x) &= (x^4 + 1)' \sqrt{x} + (x^4 + 1)(\sqrt{x})' = \\ &= 4x^3 \sqrt{x} + (x^4 + 1)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \\ &= 4x^3 \sqrt{x} + (x^4 + 1) \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \\ &= 4x^3 \sqrt{x} + (x^4 + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

8.2. A regra da derivada do produto pode ser generalizada para três ou mais fatores.

Para o produto de três fatores tem-se:

$$(f \times g \times h)' = f' \times g \times h + f \times g' \times h + f \times g \times h'$$

Logo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x'(x-2)(x^3+3) + x(x-2)'(x^3+3) + x(x-2)(x^3+3)' = \\ &= (x-2)(x^3+3) + x(x^3+3) + x(x-2)3x^2 \end{aligned}$$

Derivada do quociente

Se f e g têm derivada em todos os pontos do intervalo $]a, b[$, e se g não se anula neste intervalo, $\frac{f}{g}$ é derivável em $]a, b[$, sendo:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemplo 9 Derivada do quociente de funções

Escreva uma expressão analítica da derivada da função de f , sendo:

9.1. $f(x) = \frac{1}{x+1}$

9.2. $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

Resolução

$$\begin{aligned} 9.1. \quad f'(x) &= \frac{(1)'(x+1) - 1 \times (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{0-1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9.2. \quad f'(x) &= \frac{(x^2-1)' \times x - (x^2-1) \times x'}{x^2} = \frac{2x \times x - (x^2-1)}{x^2} \\ &= \frac{x^2+1}{x^2} \end{aligned}$$

Verifica 8

Determine uma expressão da derivada de cada uma das funções seguintes:

8.1. $f(x) = (x^3+x)(\sqrt{x}+1)$

8.2. $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)(1-x)$

Verifica 9

Determine uma expressão da derivada de cada uma das funções seguintes.

9.1. $f(x) = \frac{x^2+3}{3x}$

9.2. $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

Derivada da função composta

Seja $f \circ g$ a função composta das funções f e g e $x_0 \in D_{f \circ g}$

Se g é derivável em x_0 e se f é derivável em $g(x_0)$, então $f \circ g$ é derivável em x_0 , e:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'[g(x_0)] \times g'(x_0)$$

Exemplo 10 Derivada da função composta

Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que:

$$f(x) = 3x^2, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Calcule $(f \circ g)'(4)$.

Resolução

$$f'(x) = 3x^2$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$g'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \times g'(x)$$

$$(f \circ g)'(4) = f'(g(4)) \times g'(4)$$

$$= f'(\sqrt{4}) \times \frac{1}{2\sqrt{4}}$$

$$= f'(2) \times \frac{1}{2 \times 2}$$

$$= 3 \times 2^2 \times \frac{1}{4} = 3$$

Verifica 10

A respeito das funções f e g , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que

$$f'(x) = 5x^4 \quad \text{e} \quad g(x) = 3x - 1.$$

Determine $(f \circ g)'(0)$.

Derivada de uma potência

Aplicando a regra da derivada da função composta verifica-se que, sendo u uma função de x :

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} \times u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

Exemplo 11 Derivada de uma potência

Determine $f'(x)$ sendo $f(x) = \left(\frac{2x-1}{3x}\right)^3$.

Resolução

$$f'(x) = \left[\left(\frac{2x-1}{3x}\right)^3\right]' = 3\left(\frac{2x-1}{3x}\right)^2 \left(\frac{2x-1}{3x}\right)' =$$

$$= 3\left(\frac{2x-1}{3x}\right)^2 \times \frac{2(3x) - (2x-1) \times 3}{(3x)^2} =$$

$$= 3 \frac{(2x-1)^2}{(3x)^2} \times \frac{3}{(3x)^2} = \frac{(2x-1)^2}{9x^4}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Verifica 11

Determine uma expressão da derivada de cada uma das funções seguintes.

11.1. $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^5$

11.2. $g(x) = (\sqrt{x} + 1)^4$

11.3. $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$

11.4. $i(x) = (2x + 1)^4 x$

Derivada da função exponencial

Seja $f(x) = e^x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \\ &= e^x \times 1 = e^x \end{aligned}$$

Por aplicação das propriedades operatórias das exponenciais e da regra da derivada da função composta é possível deduzir as restantes regras de derivação com exponenciais.

Assim:

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^x)' = a^x \times \ln a$$

$$(a^u)' = u' \times a^u \times \ln a, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

Exemplo 12 Derivada de funções exponenciais

Calcule uma expressão da derivada de f , sendo:

12.1. $f(x) = e^{3x-1}$

12.2. $f(x) = 2^{-\frac{x}{2}}$

12.3. $f(x) = x^2 e^{-2x}$

Resolução

12.1. $f'(x) = (e^{3x-1})' = (3x-1)' e^{3x-1} = 3e^{3x-1}$

12.2. $f'(x) = (2^{-\frac{x}{2}})' = \left(-\frac{x}{2}\right)' \times 2^{-\frac{x}{2}} \times \ln 2 = -\frac{\ln 2}{2} \times 2^{-\frac{x}{2}}$

12.3. $f'(x) = (x^2 e^{-2x})' = (x^2)' e^{-2x} + x^2 (e^{-2x})' =$
 $= 2x \times e^{-2x} + x^2 \times (-2x)' e^{-2x} =$
 $= 2x e^{-2x} - 2x^2 e^{-2x} =$
 $= (2x - 2x^2) e^{-2x}$

Verifica 12

Determine uma expressão da derivada de cada uma das funções seguintes.

12.1. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

12.2. $g(x) = 2^{x^2+x}$

12.3. $h(x) = x e^{\frac{1}{x}}$

12.4. $i(x) = \frac{1-2x}{e^{2x}}$

Derivada da função logarítmica

Seja $f(x) = \ln x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \ln\left(\frac{h}{x} + 1\right)}{\frac{h}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = \\ &= \frac{1}{x} \times 1 = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\left| y = \frac{h}{x}, h \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \right.$$

Pelas regras operatórias dos logaritmos e pela regra da derivada da composta pode-se concluir:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \times \ln a}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \times \ln a}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

Exemplo 13 Derivada de funções logarítmicas

Calcule uma expressão analítica da derivada de f , sendo:

13.1. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

13.2. $f(x) = \log_2(x + 3)$

13.3. $f(x) = x - 3x \ln(\sqrt[3]{x})$

Resolução

13.1. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

13.2. $f(x) = \log_2(x + 3)$

$$f'(x) = \frac{(x + 3)'}{(x + 3) \ln 2} = \frac{1}{(x + 3) \ln 2}$$

13.3. $f(x) = x - 3x \ln(\sqrt[3]{x})$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x' - [(3x)' \ln \sqrt[3]{x} + 3x(\ln \sqrt[3]{x})'] = \\ &= 1 - 3 \ln \sqrt[3]{x} - 3x \times \frac{(\sqrt[3]{x})'}{\sqrt[3]{x}} = 1 - 3 \ln \sqrt[3]{x} - 3x \times \frac{\left(\frac{1}{x^3}\right)'}{\sqrt[3]{x}} = \\ &= 1 - 3 \ln \sqrt[3]{x} - 3x \times \frac{\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}}{x^{\frac{1}{3}}} = 1 - 3 \ln \sqrt[3]{x} - 3x \times \frac{1}{3} \times x^{-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = \\ &= 1 - 3 \ln \sqrt[3]{x} - x \times x^{-1} = 1 - 3 \ln \sqrt[3]{x} - 1 = \\ &= -3 \ln \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Verifica 13

Determine uma expressão da derivada de cada uma das funções seguintes.

13.1. $f(x) = \ln(\sqrt{x} + x)$

13.2. $g(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)$

13.3. $h(x) = (1 + \ln x)^3$

13.4. $i(x) = x(1 - \ln \sqrt{x})$

Regras de derivação

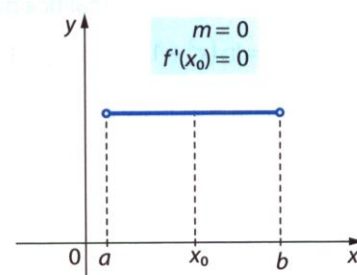
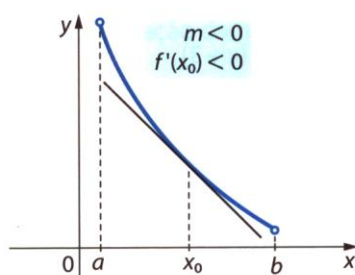
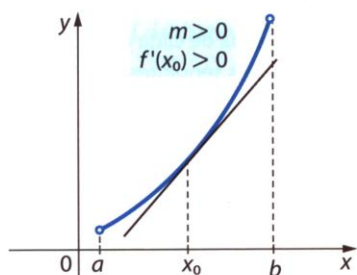
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(u \times v)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- $(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$
- $(f \circ u)'(x) = [f(u(x))]' = u'(x) \times f'(u(x))$
- $(e^u)' = u' e^u$
- $(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
- $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

5. Aplicações da derivada de uma função

Intervalos de monotonia e sinal da derivada de uma função

Seja f uma função real de variável real, derivável em x_0 , e m o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 .

Observemos cada um dos três casos seguintes.



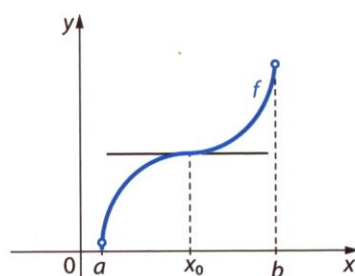
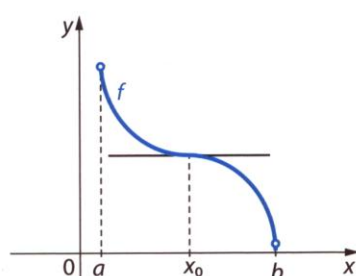
A observação do declive da reta tangente sugere-nos o seguinte:

Teorema

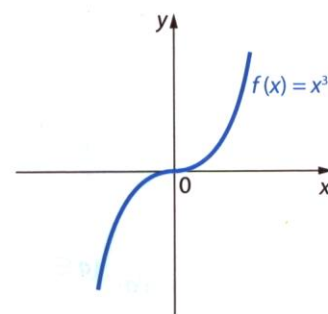
Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$:

- se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$;
- se $f'(x) < 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$;
- se $f'(x) = 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f é constante em $[a, b]$.

Note-se que uma função f pode ter derivada nula num ponto e ser estritamente crescente ou estritamente decrescente num intervalo que contenha esse ponto.



Por exemplo, a função f , definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^3$, tem derivada nula em $x = 0$ e, no entanto, é estritamente crescente em qualquer intervalo que contenha o zero.



Exemplo 14 Intervalos de monotonia

Determine os intervalos de monotonia da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = (1 + \ln x)^2$$

Resolução

Para determinar os intervalos de monotonia vamos aplicar o teorema anteriormente referido.

$$f(x) = (1 + \ln x)^2; D_f = \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(1 + \ln x)(1 + \ln x)' = \\ &= 2(1 + \ln x) \frac{1}{x} = \\ &= \frac{2(1 + \ln x)}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2(1 + \ln x) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = e^{-1} \end{aligned}$$

x	0		e^{-1}	$+\infty$
f'		-	0	+
f		$\searrow$		$\nearrow$

Logo, f é estritamente decrescente em $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ e f é estritamente crescente em $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

Verifica 14

Determine os intervalos de monotonia da função f definida por:

14.1. $f(x) = -4x^3 - 3x^2 + 6x + 1$, em $\mathbb{R}$

14.2. $f(x) = x^2 e^x$, em $\mathbb{R}$

14.3. $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, em $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

14.4. $f(x) = x^2 (2 \ln x - 1)$, em $\mathbb{R}^+$

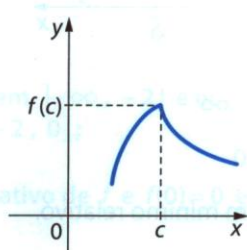
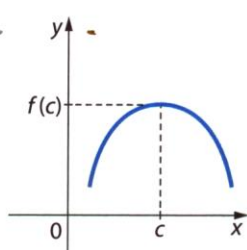
14.5. $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$, em $\mathbb{R}$

Extremos relativos e derivada de uma função

Seja c um ponto do domínio de uma função f tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe e admita-se que f é derivável num intervalo aberto E contendo c , com a possível exceção de poder não ser derivável em c :

1.º caso: f é contínua em c

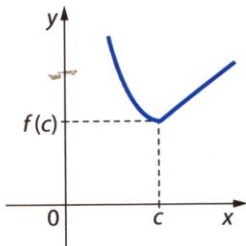
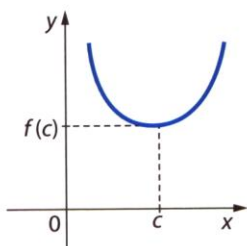
- Se f' muda de positiva para negativa em c , então $f(c)$ é um máximo relativo.



x		c	
f'	+		-
f	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$

↑
Máximo

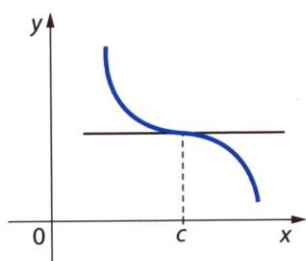
- Se f' muda de negativa para positiva em c , então $f(c)$ é um mínimo relativo.



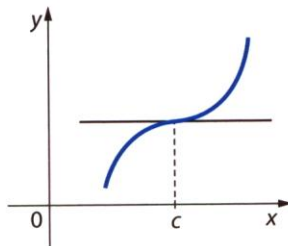
x		c	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$

↑
Mínimo

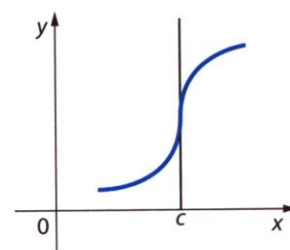
- Se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ para todo o x do intervalo E , exceto para $x=c$, então $f(c)$ não é um extremo relativo de f .



$$f'(c) = 0$$



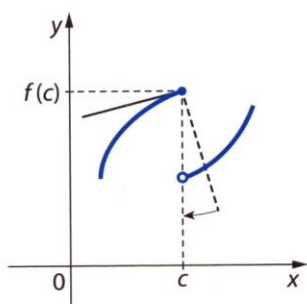
$$f'(c) = 0$$



$$f'(c) \text{ não existe}$$

2.º caso: f é descontínua em c

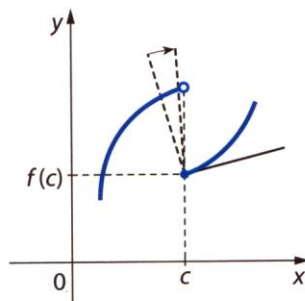
Neste caso, a existência de extremos relativos depende da mudança de sinal das derivadas laterais no ponto c .



$$f'(c^-) > 0$$

$$f'(c^+) = -\infty$$

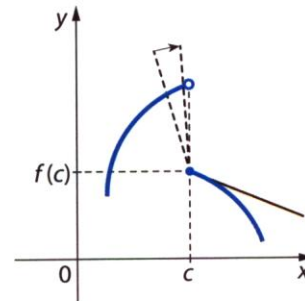
$f(c)$ é um máximo relativo.



$$f'(c^-) = -\infty$$

$$f'(c^+) > 0$$

$f(c)$ é um mínimo relativo.



$$f'(c^-) = -\infty$$

$$f'(c^+) < 0$$

$f(c)$ não é um extremo relativo.

Exemplo 15 Monotonia e extremos relativos

Estude as funções seguintes quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

15.1. $f(x) = \ln(1 - x^2)$

15.2. $f(x) = x^2 e^x$

15.3. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & \text{se } x < 2 \\ (x-3)^2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

Resolução

15.1. $f(x) = \ln(1 - x^2)$; $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 > 0\} =]-1, 1[$

$$f'(x) = \frac{(1 - x^2)'}{1 - x^2} = \frac{-2x}{1 - x^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-2x}{1 - x^2} = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2x = 0 \wedge x \in]-1, 1[\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x	-1		0		1
f'		+	0	-	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Máximo

- f é estritamente crescente em $]-1, 0]$ e estritamente decrescente em $[0, 1[$;
- $f(0) = 0$ é um máximo relativo (e absoluto) de f .

15.2. $f(x) = x^2 e^x$; $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x e^x + x^2 e^x = e^x (x^2 + 2x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x (x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\stackrel{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Máximo

Mínimo

- f é estritamente crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[0, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[-2, 0]$;
- $f(-2) = \frac{4}{e^2}$ é um máximo relativo de f e $f(0) = 0$ é um mínimo relativo de f .

Verifica 15

Estude as funções seguintes quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

15.1. $f(x) = e^x (x^2 - x - 1)$

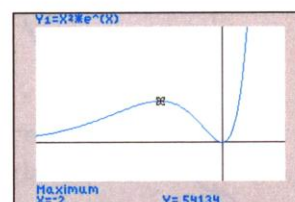
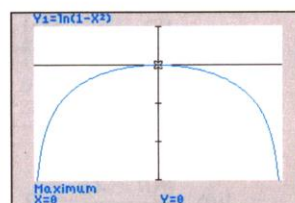
15.2. $f(x) = 1 + \ln(4 - x^2)$

15.3. $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{e^x}$

15.4. $f(x) = 3x^2 - 2x^2 \ln x$

15.5. $f(x) = \frac{1}{2} (\ln x - 2)^2$

15.6. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se } x < 1 \\ \frac{x+1}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$



$$15.3. f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & \text{se } x < 2 \\ (x-3)^2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}; D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - 3) = 8 - 3 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-3)^2 = (2-3)^2 = 1$$

Não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Logo, f é descontínua em $x=2$ e, consequentemente, não derivável neste ponto.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x < 2 \\ 2(x-3)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 = 0 \wedge x < 2) \vee (2(x-3)^2 = 0 \wedge x > 2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

Como f é descontínua em $x=2$ é necessário estudar o sinal das derivadas laterais neste ponto para avaliar a existência de extremo.

$$f'(2^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(2+h)^3 - 3 - 1}{h} = \\ = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

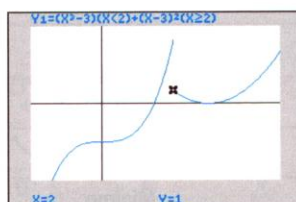
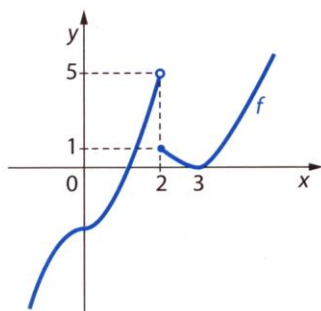
$$f'(2^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(2+h-3)^2 - 1}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 2h + 1 - 1}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(h-2)}{h} = -2$$

As derivadas laterais no ponto 2 não mudam de sinal.

Logo, $f(2)$ não é um extremo.

x	$-\infty$	0		2		3	$+\infty$
$3x^2$	+	0	+				
$2(x-3)$					-	0	+
f'	+	0	+		-	0	+
f	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

Mínimo



- f é estritamente crescente em $]-\infty, 2[$ e em $[3, +\infty[$;
- f é estritamente decrescente em $[2, 3]$;
- $f(3)=0$ é um mínimo relativo.

6. Aplicações da segunda derivada de uma função

Chama-se **segunda derivada** de uma função f (ou derivada de ordem dois) à função derivada de f' .
Nota-se por f'' .

Exemplos:

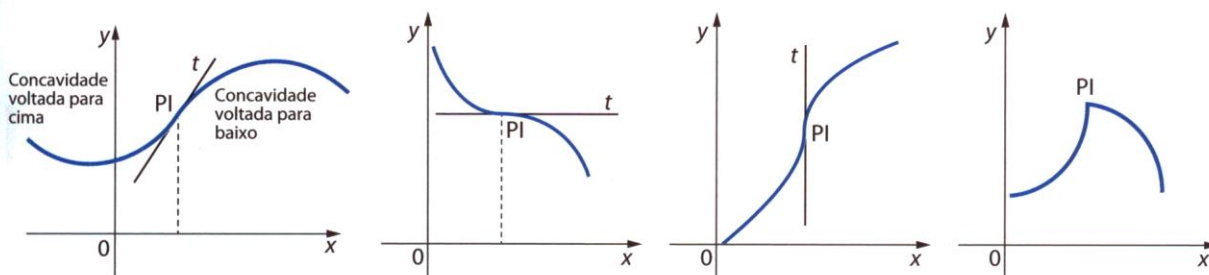
- Se $f(x) = x^3 + x$ vem $f'(x) = 3x^2 + 1$ e $f''(x) = 6x$.
- Se $f(x) = e^{2x} + x^2$ vem $f'(x) = 2e^{2x} + 2x$ e $f''(x) = 4e^{2x} + 2$.

Veremos de seguida algumas aplicações da segunda derivada.

Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de uma função

O ponto $(c, f(c))$ do gráfico de uma função f é um **ponto de inflexão** se são verificadas as seguintes condições:

- f é contínua em c ;
- existe um intervalo aberto $]a, b[$, contendo c , de tal modo que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]a, c[$ e a concavidade voltada para cima em $]c, b[$ ou vice-versa.



Seja f uma função derivável em $E =]a, b[$. O gráfico de f tem:

- a concavidade voltada para cima em E , se f' é crescente em E ;
- a concavidade voltada para baixo em E , se f' é decrescente em E .

A monotonia de uma função f , num intervalo em que f é derivável, está relacionada com o sinal de f' nesse intervalo e, consequentemente, a monotonia de f' está relacionada com o sinal de f'' .

Se a segunda derivada de f , f'' , existe num intervalo aberto $E =]a, b[$, então o gráfico de f :

- tem a concavidade voltada para cima em E , se e só se $f''(x) \geq 0, \forall x \in E$;
- tem a concavidade voltada para baixo em E , se e só se $f''(x) \leq 0, \forall x \in E$.

Exemplo 16 Concavidade do gráfico

Estude as seguintes funções quanto ao sentido da concavidade do gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

16.1. $f(x) = (x^2 - 3x + 4)e^x$

16.2. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x$

Sugestão de resolução

16.1. $f(x) = (x^2 - 3x + 4)e^x$; $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 - 3x + 4)' e^x + (x^2 - 3x + 4)(e^x)' = \\ &= (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x + 4)e^x = \\ &= (2x - 3 + x^2 - 3x + 4)e^x = \\ &= (x^2 - x + 1)e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x^2 - x + 1)' e^x + (x^2 - x + 1)(e^x)' = \\ &= (2x - 1)e^x + (x^2 - x + 1)e^x = \\ &= (2x - 1 + x^2 - x + 1)e^x = \\ &= (x^2 + x)e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow (x^2 + x)e^x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(x + 1)e^x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 1 = 0 \vee e^x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f		$\frac{8}{e}$		4	

• A concavidade do gráfico de f é:

- voltada para cima em $]-\infty, -1]$ e em $[0, +\infty[$;
- voltada para baixo em $[-1, 0]$.

• Pontos de inflexão: $\left(-1, \frac{8}{e}\right)$ e $(0, 4)$.

16.2. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x$; $D_f = \mathbb{R}^+$

$$f'(x) = x - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ a concavidade do gráfico de f é voltada para cima em todo o domínio.

O gráfico de f não tem pontos de inflexão.

Verifica 16

Estude as funções seguintes quanto ao sentido da concavidade do gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

16.1. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x$

16.2. $f(x) = \frac{x+2}{e^{2x}}$

16.3. $f(x) = (-x-1)e^{1-x}$

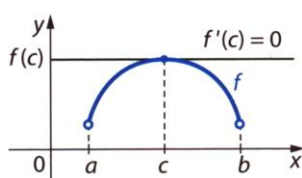
16.4. $f(x) = (x-1)\ln(x-1) - x$

Combinando os sinais de f' e f'' tem-se:

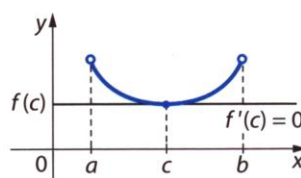
Sinal de f' e de f''	Propriedades de f e do seu gráfico	Forma do gráfico
$f'(x) > 0$ $f''(x) > 0$	f é crescente Concavidade voltada para cima	
$f'(x) > 0$ $f''(x) < 0$	f é crescente Concavidade voltada para baixo	
$f'(x) < 0$ $f''(x) > 0$	f é decrescente Concavidade voltada para cima	
$f'(x) < 0$ $f''(x) < 0$	f é decrescente Concavidade voltada para baixo	

Teste da segunda derivada

Observem-se as seguintes representações gráficas:



$f'(c) = 0$; $f''(c) < 0$;
 $f(c)$ é máximo relativo.



$f'(c) = 0$; $f''(c) > 0$;
 $f(c)$ é mínimo relativo.

Supondo que f é derivável num intervalo aberto $E =]a, b[$ contendo c e $f'(c) = 0$:

- se $f''(c) < 0$, então f tem um máximo relativo em c ;
- se $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo relativo em c .

Exemplo 17 Teste da segunda derivada

Determine os extremos relativos da função f , definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = x^3 - 3x$$

usando o teste da segunda derivada.

Resolução

Tem-se:

$$f(x) = x^3 - 3x; \quad f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

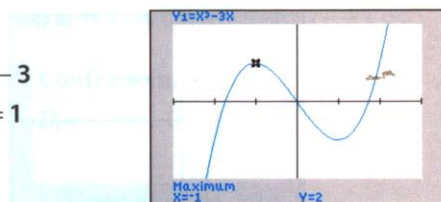
$$f''(x) = 6x$$

$$f''(-1) = -6 < 0$$

$$f(-1) = 2$$

$$f''(1) = 6 > 0$$

$$f(1) = -2$$



Logo, 2 é um máximo relativo de f e -2 é um mínimo relativo de f .

Verifica 17

Determine os extremos relativos da função de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = x - \frac{2}{x} - 3 \ln x$$

usando o teste da segunda derivada.

7. Estudo de funções

O gráfico de uma função é muito útil para visualizar as propriedades dessa função.

A observação do gráfico permite-nos compreender, integrar e sintetizar as informações obtidas no estudo parcelar de aspetos ligados às funções como monotonia, continuidade, assíntotas, etc.

Para representar graficamente uma função, normalmente seguem-se os seguintes passos:

Estudo de uma função

- 1) Obter o gráfico usando a calculadora gráfica.
A imagem obtida vai ajudar a compreender e a dar sentido aos valores que se obtêm analiticamente.
- 2) Determinar o domínio, se não for dado.
- 3) Estudar a continuidade.
- 4) Determinar as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados (zeros e ordenada na origem).
- 5) Estudar as simetrias do gráfico (verificar se a função é par, se é ímpar ou se não é par nem ímpar).
- 6) Estudar a monotonia e determinar os extremos.
- 7) Estudar o sentido da concavidade do gráfico.
- 8) Determinar as equações das assíntotas.
- 9) Confrontar os dados obtidos analiticamente com o gráfico obtido com a calculadora gráfica e indicar o contradomínio.

Exemplo 18 Estudo de uma função

Faça o estudo da função f , definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

No seu estudo, não deixe de contemplar os seguintes pontos:

- Simetrias do gráfico
- Monotonia e extremos
- Concavidades e pontos de inflexão do gráfico
- Assíntotas
- Esboço do gráfico
- Contradomínio

Resolução

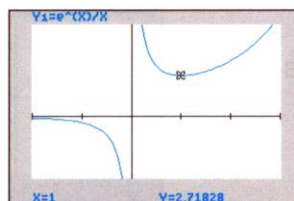
$$f(x) = \frac{e^x}{x}; \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

• Simetrias do gráfico

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x} = -\frac{e^{-x}}{x}$$

Temos que, para algum $x \in D_f$, $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$.

Logo, a função f não é par nem é ímpar.



Verifica 18

Faça o estudo gráfico de cada uma das funções seguintes.

18.1. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

18.2. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

- f é contínua (quociente de funções contínuas)

• Monotonia e extremos

$$f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	-	-	0	+
f			e	

Mínimo

• Concavidade do gráfico e pontos de inflexão

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{[e^x(x-1)]'x^2 - e^x(x-1)(x^2)'}{(x^2)^2} = \\ &= \frac{[e^x(x-1) + e^x]x^2 - e^x(x-1) \times 2x}{x^4} = \\ &= \frac{(xe^x - e^x + e^x)x^2 - xe^x(2x-2)}{x^4} = \frac{xe^x(x^2 - 2x + 2)}{x^4} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \text{ (equação impossível)}$$

Como $x^2 - 2x + 2 > 0$, $\forall x \in D_f$, o sinal de f'' depende do sinal de x^3 .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-	-	+
f			

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$, voltada para cima $]0, +\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

• Assíntotas

Verticais (f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de f .

Não verticais

Quando $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

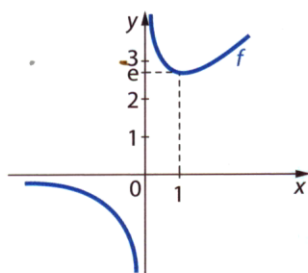
A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota do gráfico de f .

Quando $x \rightarrow +\infty$ ($y = mx + b$):

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

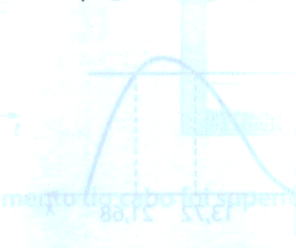
Dado que $m \notin \mathbb{R}$, o gráfico de f não tem assíntota quando $x \rightarrow +\infty$.

• Gráfico:



• Contradomínio:

$$D_f' =]-\infty, 0[\cup [e, +\infty[$$



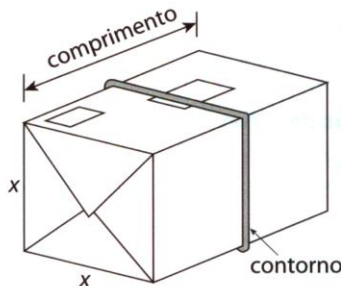
8. Problemas de otimização

Muitas vezes, na resolução de problemas de otimização é necessário encontrar a expressão analítica que define a função a otimizar, tal como se pode verificar no exemplo seguinte.

Exemplo 19 O volume da caixa

Observe a caixa representada na figura ao lado.

A soma do comprimento da caixa com o comprimento da fita que, como é sugerido, faz o contorno é 108 cm.



19.1. Mostre que o volume, $V(x)$, da caixa é dado pela expressão:

$$V(x) = x^2(108 - 4x), \quad x \in]0, 27[.$$

19.2. Sem ajuda da calculadora, determine o valor de x para o qual o volume da caixa é máximo.

19.3. Usando a calculadora gráfica, determine o valor de x de modo que o volume da caixa seja $10\,000\text{ cm}^3 = 10\text{ dm}^3$ (apresente o resultado em centímetros com duas casas decimais).

Resolução

19.1. O volume da caixa é dado pelo produto: $V = x^2 \times y$ sendo y o comprimento da caixa em centímetros.

Por outro lado, tem-se que $y + 4x = 108 \Leftrightarrow y = 108 - 4x$.

Logo, $V(x) = x^2(108 - 4x)$.

Terá de ser $x > 0$ e $y > 0$.

Como:

$$y > 0 \Leftrightarrow 108 - 4x > 0 \Leftrightarrow 4x < 108 \Leftrightarrow x < 27$$

temos que $x \in]0, 27[$.

19.2. $V(x) = x^2(108 - 4x)$

$$\begin{aligned} V'(x) &= 2x(108 - 4x) + x^2(-4) = -4x^2 - 8x^2 + 216x = \\ &= -12x^2 + 216x = 12x(-x + 18) \end{aligned}$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x(-x + 18) = 0 \wedge x \in]0, 27[\Leftrightarrow x = 18$$

x	0		18		27
V'		+	0	-	
V					

Máximo

$V(18)$: máximo do volume

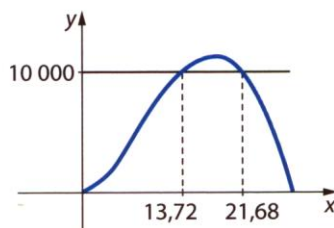
$$V(18) = 18^2(108 - 4 \times 18) = 11\,664$$

O volume máximo é $11\,664\text{ cm}^3$ para $x = 18\text{ cm}$.

19.3. $V(x) = 10\text{ dm}^3$

$$x^2(108 - 4x) = 10\,000\text{ cm}^3$$

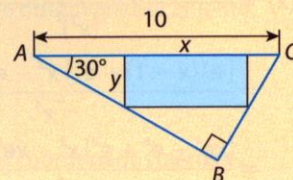
O volume da caixa será 10 dm^3 se $x \approx 13,72\text{ cm}$ ou $x \approx 21,68\text{ cm}$.



Verifica 19

Considera o triângulo $[ABC]$, retângulo em B tal que:

- $\overline{AC} = 10$
- o ângulo BAC tem amplitude 30° .



Pretende-se inscrever neste triângulo um retângulo, de dimensão x e y , conforme sugerido pela figura.

19.1. Verifique que:

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}y + x = 10$$

19.2. Verifique que a área do retângulo é dada por:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(10x - x^2)$$

19.3. Determine as dimensões do retângulo de modo que a sua área seja máxima.

Exemplo 20 O comprimento do cabo

O comprimento C , em metros, de um cabo elástico, sob a ação de uma força de tração a partir do instante $t = 0$, é dado por:

$$C(t) = 10 + t^2 e^{-0,4t} \quad (t \geq 0, \text{ em segundos})$$

- 20.1.** Determine, com aproximação aos centímetros, o comprimento máximo atingido pelo cabo.
- 20.2.** Determine $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ e interprete o resultado obtido.
- 20.3.** Recorrendo à calculadora gráfica determine durante quanto tempo o comprimento do cabo foi superior a 12 m. Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico ou gráficos obtidos, bem como as coordenadas dos pontos cuja determinação for necessária à resolução do problema. Apresente os valores em segundos arredondados às décimas.

Resolução

20.1. $C(t) = 10 + t^2 e^{-0,4t}$

$$C'(t) = 0 + (t^2)' e^{-0,4t} + t^2 (e^{-0,4t})' = 2t e^{-0,4t} - 0,4t^2 e^{-0,4t} = e^{-0,4t} t(2 - 0,4t)$$

$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,4t} t(2 - 0,4t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee 2 - 0,4t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 5$$

t	0		5	$+\infty$
C'	0	+	0	-
C	10	$\nearrow$	13,38	$\searrow$

Mínimo

Máximo

$$C(5) = 10 + 5^2 \times e^{-0,4 \times 5} \approx 13,38 \text{ m} \approx 1338 \text{ cm}$$

O comprimento máximo atingido pelo cabo foi cerca de 13,38 m = 1338 cm.

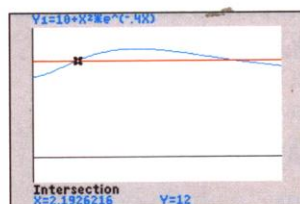
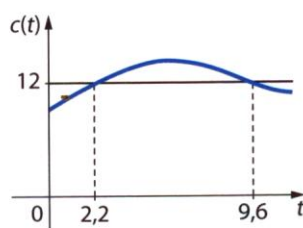
20.2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (10 + t^2 e^{-0,4t}) = 10 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^{0,4t}}$

Fazendo $y = 0,4t$, temos $t = \frac{y}{0,4} \Leftrightarrow t = 2,5y$ e $t \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} 10 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^{0,4t}} &= 10 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(2,5y)^2}{e^y} = 10 + 6,25 \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^2}} = \\ &= 10 + \frac{6,25}{+\infty} = 10 + 0 = 10 \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 10$ significa que, com o decorrer do tempo, o comprimento do cabo tende a retomar o valor inicial de 10 metros.

- 20.3.** Calculando a interseção dos gráficos de $y_1 = C(t)$ com $y_2 = 12$ obtiveram-se os seguintes valores:



$9,6 - 2,2 = 7,4$; o comprimento do cabo foi superior a 12 m durante cerca de 7,4 s.

Verifica 20

As ações de uma sociedade anónima foram colocadas hoje na Bolsa de Valores.

Estudos de mercado preveem que o valor de cada ação, em euros, decorridos t dias, seja dado por:

$$V(t) = 5 + 10 \times \frac{\ln(0,04t + 1)}{0,04t + 1}$$

- 20.1.** Qual é, em euros, o valor de cada ação no instante em que é colocada no mercado?

- 20.2.** Mostre que:

$$V'(t) = \frac{0,4[1 - \ln(0,04t + 1)]}{(0,04t + 1)^2}$$

- 20.3.** Se uma pessoa comprar hoje 1000 ações desta empresa, e admitindo que este modelo se mantém válido, ao fim de quantos dias as deve vender de forma que o lucro obtido seja máximo?

Nota: se nos cálculos intermédios proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Questões resolvidas

- 21** Seja f a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$.
O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $\frac{1}{2}$ é igual a:
- (A) 0 (B) 4 (C) -4 (D) $\frac{1}{4}$

Resolução

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\ln(2x)}{x} \right)' = \frac{(\ln(2x))' \times x - \ln(2x) \times x'}{x^2} = \\ &= \frac{\frac{(2x)'}{2x} \times x - \ln(2x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(2x)}{x^2} \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1 - \ln\left(2 \times \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1 - 0}{\frac{1}{4}} = 4 \end{aligned}$$

Resposta: (B)

- 22** Na figura está representada, em referencial Oxy , parte do gráfico de uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

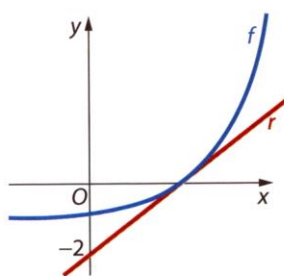
$$f(x) = e^{k(x-1)} - 1$$

(k é um número real não nulo.)

A reta r interseca o eixo Oy no ponto de ordenada -2 e é tangente ao gráfico de f no ponto onde este interseca o eixo Ox .

Qual é o valor de k ?

- (A) 2 (B) 1 (C) -2 (D) -1



Resolução

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{k(x-1)} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{k(x-1)} = 1 \Leftrightarrow e^{k(x-1)} = e^0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Temos então que a reta r passa nos pontos de coordenadas $(0, -2)$ e $(1, 0)$, pelo que o seu declive é $m_r = \frac{0 - (-2)}{1 - 0} = 2$.

$$f'(1) = m_r = 2$$

$$f'(x) = (e^{k(x-1)} - 1)' = (k(x-1))' e^{k(x-1)} = k e^{k(x-1)}$$

$$f'(1) = k e^{k(1-1)} = k e^0 = k$$

$$f'(1) = 2 \Leftrightarrow k = 2$$

Resposta: (A)

Questões propostas

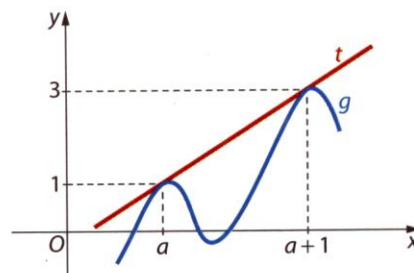
- 21** Seja f uma função derivável em $\mathbb{R}$ tal que:

- $f(0) = 1$
- $f'(x) = 2f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Qual é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0?

- (A) $y = 2x + 1$ (B) $y = 2x - 2$
(C) $y = -2x + 1$ (D) $y = 2x + 2$

- 22** Na figura está uma representação gráfica de uma função g e de uma reta t , tangente ao gráfico de g nos pontos de abscissas a e $a+1$. Sabe-se que $g(a) = 1$ e $g(a+1) = 3$.



O valor de $g'(a)$ é:

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) a
(C) $\frac{a}{2}$ (D) 2

- 23** Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = 2e^{-x}$.

No gráfico da função g existe um ponto onde a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

Qual é a abscissa desse ponto?

- (A) $-\ln 2$ (B) $\ln 2$
(C) 0 (D) $2 \ln 2$

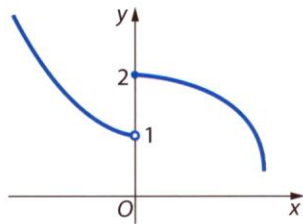
- 24** Considere a função h de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}^+$ tal que $h(1) = 1$ e $h'(1) = 2$.

Se $g(x) = \ln(h(x))$, o valor de $g'(1)$ é:

- (A) 4 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

Questões resolvidas

- 23** Na figura está parte da representação gráfica de uma função f .



Indique o valor de $f'(0^-)$, derivada lateral esquerda de f no ponto 0.

- (A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) $+\infty$

Resolução

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \\ &= \frac{1 - 2}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{aligned}$$

Resposta: (D)

- 24** Sabe-se que a reta de equação $y = x - 2$ é tangente ao gráfico de uma função f , derivável em $\mathbb{R}$, no ponto de abscissa nula.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2}{x}$?

- (A) -2 (B) 0
(C) 1 (D) 2

Resolução

O ponto da reta de equação $y = x - 2$ com abscissa nula tem ordenada $y = 0 - 2 = -2$.

Logo, o ponto de tangência tem coordenadas $(0, -2)$ pelo que $f(0) = -2$.

Assim:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - (-2)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \\ &= f'(0) \end{aligned}$$

Ora, $f'(0)$ é o declive da reta de equação $y = x - 2$.

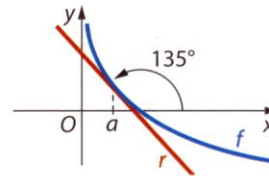
Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2}{x} = 1$.

Resposta: (C)

Questões propostas

- 25** Na figura estão representadas:

- parte do gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 1 - \ln(2x)$;
- uma reta r , tangente ao gráfico de f , no ponto de abscissa a .



Sabendo que a inclinação da reta r é 135° , indique o valor de a .

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 1

- 26** De uma função h , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a segunda derivada é dada por:

$$g''(x) = (e^x - 1)(x - 2)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Seja A o conjunto das abscissas dos pontos de inflexão do gráfico g .

Em qual das seguintes opções está o conjunto A ?

- (A) $\{0\}$ (B) $\{2\}$ (C) $\{0, 2\}$ (D) $\{1\}$

- 27** Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que a sua derivada, f' , é tal que $f'(x) = 4 - x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Relativamente à função f , qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) f é decrescente em $]-\infty, 0]$.
(B) f é decrescente em $[-2, 2]$.
(C) f tem um mínimo para $x = -2$.
(D) f tem um mínimo para $x = 2$.

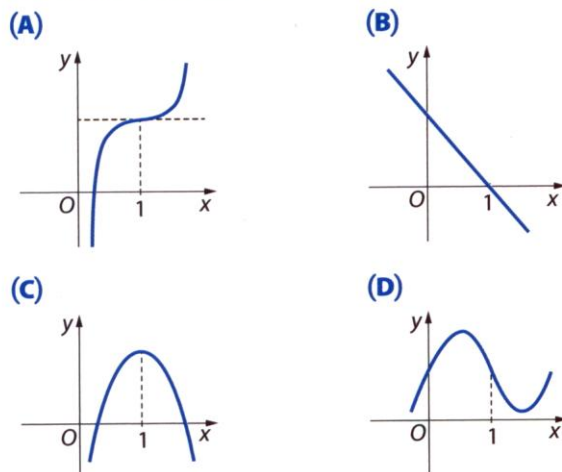
- 28** De uma função f , de domínio $\mathbb{R}^+$ sabe-se que a sua derivada é a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f'(x) = \ln x$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) f é estritamente crescente.
(B) f é estritamente decrescente.
(C) f tem máximo absoluto.
(D) f tem mínimo absoluto.

Questões resolvidas

- 25** Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}$ com primeira e segunda derivadas em todo o domínio. Sabe-se que o gráfico de g tem um ponto de inflexão de abscissa 1. Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da primeira derivada da função g ?



Resolução

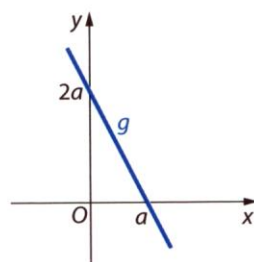
Apenas o gráfico apresentado em (C) pode ser o da primeira derivada de g , isto é, pode ser o gráfico de g' .

A justificação apresenta-se na tabela ao lado onde se relaciona monotonia de g' com o sinal de g'' e o sentido da concavidade do gráfico de g .

x		1	
g'			
g''	+		-
g		P. I.	

Resposta: (C)

- 26** Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^x$ e a um número real positivo. Considere a função g cujo gráfico é a reta representada na figura e a função h tal que $h = f + g$. Qual das seguintes equações define a reta tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa nula?



- (A) $y = -2x + 2a$ (B) $y = -x + 3$
(C) $y = -x + 1 + 2a$ (D) $y = -2x + 2$

Resolução

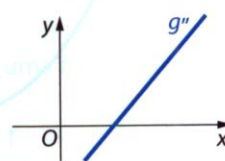
Equação da reta r , gráfico da função g :

A reta r passa nos pontos de coordenadas $(a, 0)$ e $(0, 2a)$.

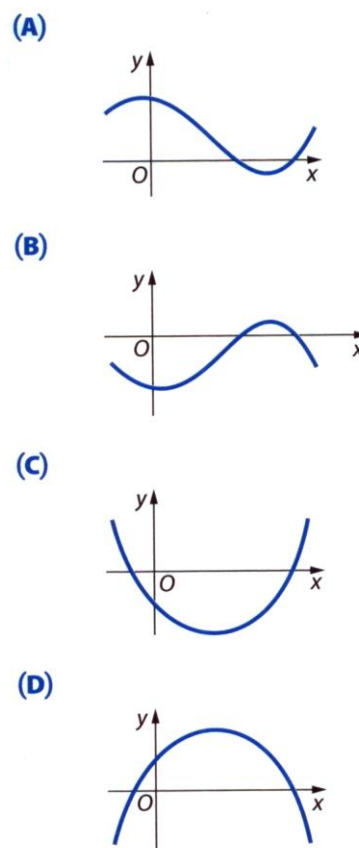
Logo, o seu declive é $m = \frac{2a - 0}{0 - a} = -2$ e a ordenada na origem é igual a $2a$. Portanto, $y = -2x + 2a$ é uma equação que define a reta r pelo que $g(x) = -2x + 2a$.

Questões propostas

- 29** Na figura seguinte está representado o gráfico de g'' , segunda derivada de uma certa função g .



Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função g ?



- 30** Considere uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, tal que a derivada de f é dada por $f'(x) = (x - 5)^4$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A função f tem um extremo relativo para $x = 5$.
(B) A função f tem um extremo relativo para $x = -5$.
(C) O gráfico da função f tem um ponto de inflexão para $x = 5$.
(D) O gráfico da função f tem um ponto de inflexão para $x = -5$.

Questões resolvidas

$$h(x) = f(x) + g(x) \iff h(x) = e^x - 2x + 2a$$

$$h'(x) = (e^x - 2x + 2a)' = e^x - 2$$

Equação reduzida da reta t , tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa 0:

$$\text{Declive: } m = h'(0) = e^0 - 2 = -1$$

$$\text{Ordenada na origem: } b = h(0) = e^0 - 2 \times 0 + 2a = 1 + 2a$$

dado que a reta t passa no ponto de tangência.

$$t: y = -x + 1 + 2a$$

Resposta: (C)

27 Seja f uma função derivável em $\mathbb{R}$. A respeito de f' , derivada de f , sabe-se que:

$$\bullet f'(2) = 0$$

$\bullet f'$ é estritamente decrescente

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) A função f tem um único zero.

(B) A função f tem no máximo dois zeros.

(C) A função f não tem zeros.

$$(D) f(2) > 0$$

Resolução

Se f' é estritamente decrescente e $f'(2) = 0$ então $f'(x) > 0$ para $x < 2$ e $f'(x) < 0$ para $x > 2$:

Na tabela resume-se o sinal da derivada e a consequente variação da função f .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	+	0	-
f	$\nearrow$		$\searrow$

Como f é estritamente crescente em $]-\infty, 2]$ e estritamente decrescente em $[2, +\infty[$, tem, no máximo, um zero em cada um dos intervalos.

Portanto, a função f tem no máximo dois zeros.

Resposta: (B)

28 Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ com primeira e segunda derivadas finitas em todo o domínio.

Na figura encontra-se parte do gráfico de f'' , segunda derivada de f .

Sabe-se ainda que $f'(0) = f(4) = 0$.

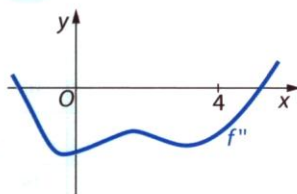
Qual pode ser o valor de $f(1)$?

$$(A) -2$$

$$(B) -1$$

$$(C) 0$$

$$(D) 1$$

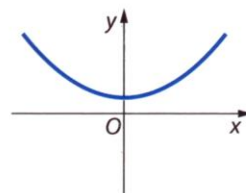


Resolução

Da análise do gráfico de f'' verifica-se que $f''(x) < 0$ em todos os pontos do intervalo $]0, 4[$. Logo, podemos concluir que a função derivada de f , f' , é estritamente decrescente em $[0, 4]$.

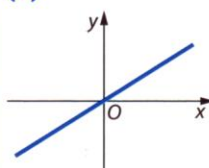
Questões propostas

31 Na figura está uma representação gráfica de g'' , segunda derivada de uma certa função g .

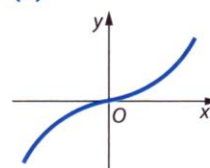


Qual das seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função g ?

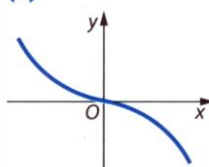
(A)



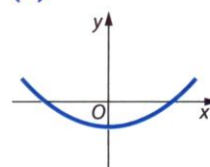
(B)



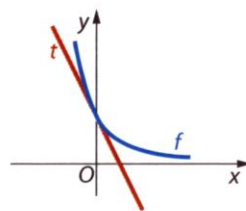
(C)



(D)



32 Na figura está representada parte do gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{kx}$ e a reta t , tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa nula.



Sabe-se que a reta t interseca a bissetriz dos quadrantes pares no ponto de abscissa 1.

Qual é o valor de k ?

$$(A) -2$$

$$(B) -1$$

$$(C) 1$$

$$(D) 2$$

33 De uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua primeira derivada é dada por $f'(x) = e^{x^2-1}$.

Quantos pontos de inflexão tem o gráfico da função f ?

$$(A) 0$$

$$(B) 1$$

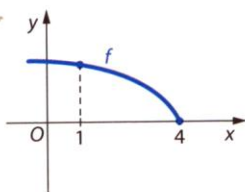
$$(C) 2$$

$$(D) 3$$

Questões resolvidas

Ora, se $f'(0) = 0$ e f' é estritamente decrescente em $[0, 4]$, então $f'(x) < 0$ no intervalo $]0, 4[$ pelo que a função f também é estritamente decrescente em $[0, 4]$.

x	0		4
f''		-	
f'	0	$\searrow$	
f		$\searrow$	0



Se f é estritamente decrescente em $[0, 4]$ e $f(4) = 0$, então terá de ser $f(1) > 0$.

Entre os valores apresentados, apenas $1 > 0$.

Resposta: (D)

- 29** De uma função f , derivável em $\mathbb{R}$, sabe-se que $f(2) = f'(2) = 3$. $(f \circ f)'(2)$ é igual a:
- (A) $3 \times f'(3)$ (B) $3 \times f(3)$ (C) $2f(3)$ (D) $2f'(3)$

Resolução

$$(f \circ f)'(x) = [f(f(x))]' = f'(x) \times f'(f(x))$$

$$(f \circ f)'(2) = f'(2) \times f'(f(2)) = 3 \times f'(3)$$

Resposta: (A)

- 30** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x}$.

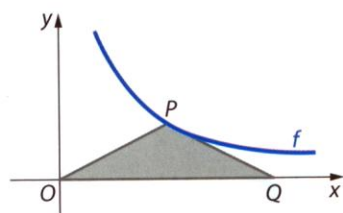
30.1. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa 1.

30.2. Estude a função f quanto:

- a) à monotonia e quanto à existência de extremos relativos;
- b) ao sentido da concavidade do gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

30.3. Na figura estão representados:

- parte do gráfico da função f ;
- um ponto P do gráfico de f e o ponto Q do eixo das abscissas tal que o triângulo $[OQP]$ é isósceles, sendo O a origem do referencial.



Seja A a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, que faz corresponder à abscissa x do ponto P a área do triângulo $[OQP]$.

- a) Mostre que $A(x) = x - \ln x$.
- b) Determine o valor mínimo que a área do triângulo $[OQP]$ pode assumir.

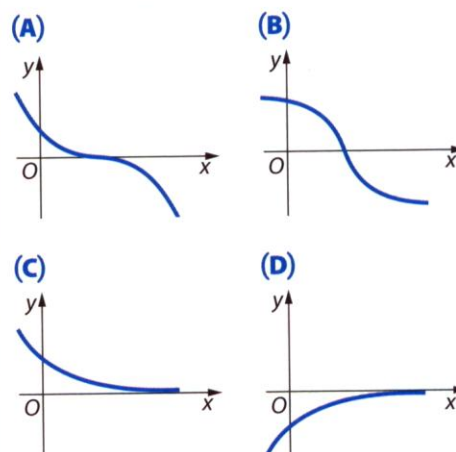
Questões propostas

- 34** Seja f uma função derivável em $\mathbb{R}$. Sabe-se que a reta de equação $y = -2x - 3$ é tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa 1. Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

- (A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$
 (B) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -5$
 (C) $f(2) < f(0)$
 (D) $f(0) > -3$

- 35** De uma função h , de domínio $\mathbb{R}$, com primeira e segunda derivadas finitas em todo o domínio, sabe-se que $h(x) \times h''(x) \leq 0$ para todo o número real x .

Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h ?



- 36** Sejam f e g duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- $f(x) > 0$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$;
- $f'(2) = 2$ e $f(2) = 1$
- $g(x) = f(x) \times \ln[f(x)]$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Qual é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 2?

- (A) $y = 2x$ (B) $y = 2x - 4$
 (C) $y = 4x$ (D) $y = 4x - 8$

Questões resolvidas

Resolução

$$30.1. f'(x) = \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)' = 0 - \frac{(\ln x)' \times x - (\ln x) \times x'}{x^2} =$$

$$= -\frac{1 \times x - \ln x}{x^2} = \frac{-1 + \ln x}{x^2}$$

Ponto de tangência: $(1, 1)$, dado que

$$f(1) = 1 - \frac{\ln 1}{1} = 1 - 0 = 1.$$

$$\text{Declive: } m = f'(1) = \frac{-1 + \ln 1}{1^2} = -1$$

Substituindo em $y = mx + b$, temos:

$$1 = -1 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 2$$

Portanto, $y = -x + 2$ é a equação pedida.

30.2.

$$a) f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1 + \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

x	0		e	$+\infty$
f'		-	0	+
f				

Mínimo

f é estritamente decrescente em $]0, e]$ e estritamente crescente em $[e, +\infty[$.

f tem um mínimo relativo para $x = e$.

$$b) f''(x) = \left(\frac{-1 + \ln x}{x^2}\right)' = \frac{(-1 + \ln x)' x^2 - (-1 + \ln x)(x^2)'}{x^4} =$$

$$= \frac{1 \times x^2 - (-1 + \ln x) \times 2x}{x^4} = \frac{x - (-1 + \ln x) \times 2x}{x^4}$$

$$= \frac{x(1 - 2 + 2 \ln x)}{x^4} = \frac{-1 + 2 \ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1 + 2 \ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow -1 + 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

x	0		$\sqrt{e}$	$+\infty$
f''		+	0	-
f				

P.I.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]0, \sqrt{e}]$ e voltada para baixo em $[\sqrt{e}, +\infty[$. O ponto de abscissa $\sqrt{e}$ é um ponto de inflexão.

30.3. a) Tomando $\overline{OQ} = 2x$ para base do triângulo $[OQP]$, a sua altura é a ordenada do ponto P , ou seja, a altura é

$$f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x}.$$

Questões propostas

37 Considere a função f de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$.

37.1. Estude a função f quanto à monotonia.

37.2. Mostre que o gráfico da função f tem duas assíntotas horizontais.

37.3. Indique, justificando, o contradomínio da função f .

37.4. Seja t a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa nula.

a) Determine uma equação da reta t .

b) Existe um ponto do gráfico da função f , onde a reta tangente é estritamente paralela à reta t . Determine a abscissa desse ponto.

37.5. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

38 Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln\left(1 + e^{\frac{x}{2}}\right) + \frac{x}{4}$.

38.1. Mostre que:

$$f(x) = \ln\left(1 + e^{\frac{x}{2}}\right) - \frac{x}{4}$$

qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

38.2. Mostre que f é uma função par.

38.3. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

38.4. Estude a função f quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

38.5. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2e^{f(x)} - 5$.

Determine os zeros da função g .

Questões resolvidas

Portanto, a área do triângulo $[OQP]$ é

$$A(x) = \frac{2x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)}{2} = x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = x - \ln x$$

b) $A'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

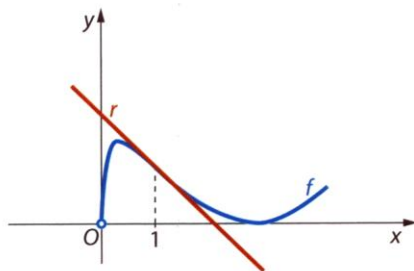
x	0		1	$+\infty$
A'		-	0	+
A		↘		↗

Mínimo

A área é mínima para $x = 1$ pelo que o valor mínimo que a área do triângulo $[OQP]$ pode assumir é $A(1) = 1 - \ln 1 = 1$.

31 Na figura estão representados:

- parte do gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x(\ln x - k)^2$; (k é uma constante real.)
- a reta r , tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.



Sabendo que a função f admite primeira e segunda derivadas finitas em todo o domínio, determine o valor de k .

Resolução

Por observação do gráfico verifica-se que existe um intervalo $]a, b[$ tal que:

- $1 \in]a, b[$
- em $]a, 1[$ a concavidade do gráfico é voltada para baixo (o gráfico está abaixo de r);
- em $]1, b[$ a concavidade do gráfico é voltada para cima (o gráfico está acima de r).

Logo, o ponto do gráfico com abscissa 1 é um ponto de inflexão. Como existe $f''(1)$ terá de ser $f''(1) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= x'(\ln x - k)^2 + x[(\ln x - k)^2]' = \\ &= (\ln x - k)^2 + x \times 2(\ln x - k)(\ln x - k)' = \\ &= (\ln x - k)^2 + 2x(\ln x - k) \times \frac{1}{x} = (\ln x - k)^2 + 2(\ln x - k) \end{aligned}$$

Questões propostas

39 Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 e^{-2x} + 1$.

39.1. Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

39.2. Mostre que o gráfico da função g tem uma única assíntota e escreva uma equação dessa assíntota.

39.3. Seja h a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = \ln \left(\frac{g(x)}{e^{-3x} + e^{-x}} \right)$$

Determine as abscissas dos pontos de interseção do gráfico da função h com a bisetriz dos quadrantes ímpares.

40 Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x - x - 1$.

40.1. Estude a função f quanto à monotonia.

40.2. Justifique que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

40.3. Para que valores de x se tem $\ln(x+1) \leq x$?

40.4. Sabe-se que $\ln x < f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Para determinado valor de k , a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \ln x + k$, intersesta o gráfico da função f num, e num só, ponto cuja abscissa pertence ao intervalo $]0, 1[$.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine o valor de k .

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- indicar o valor pedido com aproximação às milésimas.

Questões resolvidas

$$\begin{aligned} f''(x) &= [(\ln x - k)^2]' + [2(\ln x - k)]' = \\ &= 2(\ln x - k)(\ln x - k)' + 2 \times \frac{1}{x} = \\ &= 2(\ln x - k) \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(\ln x - k) + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(\ln x - k + 1) \end{aligned}$$

$$f''(1) = \frac{2}{1}(\ln 1 - k + 1) = 2(0 - k + 1) = 2 - 2k$$

$$f''(1) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2k = 0 \Leftrightarrow 2k = 2 \Leftrightarrow k = 1$$

32 Considere a função f , definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^{-x} - x$.

32.1. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa 0.

32.2. Justifique que a função f é estritamente decrescente.

32.3. Justifique que a função f admite inversa.

32.4. Mostre que existe um valor de $x \in]0, 1[$ tal que:

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

Resolução

32.1. $f'(x) = (e^{-x} - x)' = -e^{-x} - 1$

Ponto de tangência: $P(0, 1)$ porque $f(0) = e^0 - 0 = 1$

Declive da reta tangente:

$$f'(0) = -e^0 - 1 = -2$$

Equação da reta tangente:

$$y - 1 = -2(x - 0) \Leftrightarrow y = -2x + 1$$

$y = -2x + 1$ é a equação pedida.

32.2. Dado que $-e^{-x} - 1 < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, vem $f'(x) < 0$ em todo o domínio de f .

Portanto, f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$.

32.3. Atendendo a que f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$, f é injetiva. Logo, f tem inversa.

32.4. Os gráficos de f e de f^{-1} são simétricos relativamente à reta de equação $y = x$. Logo, os pontos x tais que $f(x) = x$ satisfazem a condição $f(x) = f^{-1}(x)$.

Seja h a função definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = f(x) - x$.

A função h é contínua por ser a diferença de funções contínuas (uma função polinomial e a função f que, por ser derivável, é contínua).

$$h(0) = f(0) - 0 = 1 > 0$$

$$h(1) = f(1) - 1 = e^{-1} - 1 - 1 = \frac{1}{e} - 2 = \frac{1 - 2e}{e} < 0$$

Como a função h é contínua no intervalo $[0, 1]$, e como $h(0) > 0$ e $h(1) < 0$, podemos concluir, pelo corolário do Teorema de Bolzano, que, no intervalo $]0, 1[$, existe pelo menos uma solução da equação $h(x) = 0$.

Portanto, existe pelo menos um valor de $x \in]0, 1[$ tal que $f(x) = x$ e, consequentemente, $f(x) = f^{-1}(x)$.

Questões propostas

41 Considere a função h , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = 1 + x^3 + \ln x$.

41.1. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função h no ponto de abscissa 1.

41.2. Mostre que a função h é estritamente crescente.

41.3. Justifique que a função h admite inversa.

41.4. Qual é o valor de $h^{-1}(2)$?

41.5. Sabe-se que existe um número real positivo a para o qual se tem $h(a) = h^{-1}(a)$.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine o valor de a .

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- indicar os valores pedidos com aproximação às centésimas.

42 Seja g a função de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln x$.

42.1. Estude a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

42.2. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{\ln x}$.

43 Considere a função f , de domínio $] -1, 1[$ definida por:

$$f(x) = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$$

43.1. Mostre que f é uma função ímpar.

43.2. Mostre que o gráfico da função f tem duas assíntotas.

43.3. Mostre que o gráfico de f tem um ponto de inflexão.

43.4. Seja r a reta de declive máximo tangente ao gráfico de f . Determine a equação reduzida da reta r .

Questões resolvidas

33 Considere a função f , contínua em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x - \ln(2-x) & \text{se } x \leq 1 \\ x + 1 - e^{1-x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

33.1. Averigue se existe $f'(1)$.

33.2. Resolva a equação $f(x) = x$.

Resolução

33.1. Sabemos que $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h) - \ln[2-(1+h)] - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h - \ln(1-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-h)}{h} = \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{-x} = \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Fazendo $x = -h$, vem
 $h = -x$ e se $h \rightarrow 0^-$
então $x \rightarrow 0^+$.

$$\begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h) + 1 - e^{1-(1+h)^2} - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1+h - e^{-2h-h^2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{h(-2-h)} - 1}{h} = \\ &= 1 - \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[(-2-h) \times \frac{e^{h(-2-h)} - 1}{h(-2-h)} \right] = \\ &= 1 - \lim_{h \rightarrow 0^+} (-2-h) \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \\ &= 1 - (-2) \times 1 = 3 \end{aligned}$$

$x = h(-2-h)$
Se $h \rightarrow 0^+$
então $x \rightarrow 0^+$.

Como $f'(1^-) \neq f'(1^+)$, não existe $f'(1)$.

33.2. Se $x \leq 1$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow x - \ln(2-x) = x \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(2-x) = 0 \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2-x = e^0 \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2-x = 1 \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Se $x > 1$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow x + 1 - e^{1-x^2} = x \wedge x > 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - e^{1-x^2} = 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{1-x^2} = 1 \wedge x > 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

Conjunto-solução: $S = \{1\}$

Questões propostas

44 De uma certa função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabe-se que:

- $f(1) = 2$
- a sua derivada, f' , é definida por $f'(x) = -x e^{1-x}$.

44.1. Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

44.2. Poderá concluir-se que f é contínua para $x = 1$? Justifique a sua resposta.

44.3. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

45 Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x e^x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x \ln\left(\frac{x}{2}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

45.1. Mostre que f é contínua mas não derivável no ponto 0.

45.2. Defina a função f' , derivada de f .

45.3. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

46 Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x e^{\frac{1}{2x-2}} & \text{se } x < 1 \\ 2 \ln x - 2x^2 + 7x - 5 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

46.1. Mostre que f é contínua mas não derivável no ponto 1.

46.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

46.3. Estude f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

Questões resolvidas

- 34** Considere, para cada $\alpha \in \mathbb{R}^+$, a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln(e^x + \alpha x) - x$.

Mostre que, qualquer que seja o valor de $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

34.1. o máximo de f é igual a $\ln\left(1 + \frac{\alpha}{e}\right)$;

34.2. o eixo Ox é uma assíntota do gráfico da função f .

Resolução

$$\begin{aligned} \mathbf{34.1.} \quad f'(x) &= [\ln(e^x + \alpha x) - x]' = \frac{(e^x + \alpha x)'}{e^x + \alpha x} - 1 = \\ &= \frac{e^x + \alpha}{e^x + \alpha x} - 1 = \frac{e^x + \alpha - e^x - \alpha x}{e^x + \alpha x} = \\ &= \frac{\alpha(1 - x)}{e^x + \alpha x} \end{aligned}$$

O sinal de f' depende apenas de $1 - x$ dado que α , x e e^x são positivos.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\alpha(1 - x)}{e^x + \alpha x} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

x	0		1	$+\infty$
f'		+	0	-
f				

Máximo

Concluimos que a função f atinge o valor máximo para $x = 1$.

$$\begin{aligned} f(1) &= \ln(e + \alpha) - 1 = \ln(e + \alpha) - \ln e = \\ &= \ln\left(\frac{e + \alpha}{e}\right) = \ln\left(1 + \frac{\alpha}{e}\right) \end{aligned}$$

Logo, o máximo de f é igual a $\ln\left(1 + \frac{\alpha}{e}\right)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{34.2.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + \alpha x) - x] \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + \alpha x) - \ln e^x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^x + \alpha x}{e^x}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \alpha \times \frac{x}{e^x}\right) = \\ &= \ln(1 + \alpha \times 0) = 0 \end{aligned}$$

dado que, se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Portanto, a reta de equação $y = 0$, ou seja, o eixo Ox , é uma assíntota do gráfico da função f .

Questões propostas

- 47** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + xe^{1+x} & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - x - \ln(x+1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

47.1. Verifique se f é contínua no ponto 0.

47.2. Verifique se f é derivável no ponto 0.

47.3. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos.

- 48** Seja f a função, de domínio $]-1, +\infty[$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{\frac{e^4}{x+1}} & \text{se } -1 < x < 0 \\ 2 - \frac{3x}{2} + xe^{-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

48.1. Mostre que f é derivável no ponto $x = 0$.

48.2. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa nula.

48.3. Mostre que o gráfico da função f tem um ponto de inflexão de abscissa 2.

48.4. Mostre que a reta de equação $y = 2 - \frac{3x}{2}$ é uma assíntota do gráfico da função f .

- 49** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x(e^{x-1} - 2) & \text{se } x < 0 \\ \ln(1 + xe^{-x}) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

49.1. Mostre que f é contínua no ponto $x = 0$.

49.2. Averigue se existe $f'(0)$.

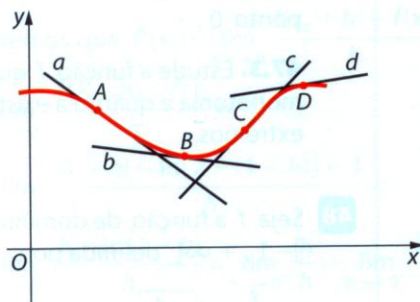
49.3. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos em $[0, +\infty[$.

49.4. Estude o gráfico de f quanto à existência de assíntotas paralelas aos eixos coordenados.

Questões para praticar

Itens de seleção

- 50** Na figura seguinte está a representação gráfica de uma função h e das retas a , b , c e d , tangentes ao gráfico de h nos pontos A , B , C e D , respetivamente.

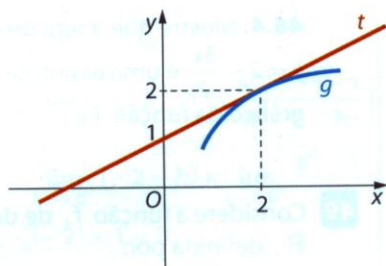


Sabe-se que a função h admite primeira e segunda derivadas em todos os pontos. Em qual dos pontos, A , B , C ou D , se poderá ter $f'(x) < 0$ e $f''(x) = 0$?

- (A) A (B) B (C) C (D) D

- 51** Na figura está representada parte do gráfico de uma função polinomial g bem como parte da reta t , tangente ao gráfico de g no ponto de coordenadas $(2, 2)$.

A reta t interseca o eixo Oy no ponto de ordenada 1.



Qual das expressões seguintes pode definir g' , função derivada de g ?

- (A) $\frac{x}{2} + 1$ (B) $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$
(C) $-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ (D) $\frac{1}{2} - \frac{x}{2}$

- 52** De uma função f , derivável em $\mathbb{R}$, sabe-se que a reta de equação $y = 2x + 1$ é tangente ao seu gráfico no ponto de abscissa 1.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x)]^2 - 3f(x)}{x^2 - x}$?

- (A) 1 (B) 4 (C) 6 (D) 9

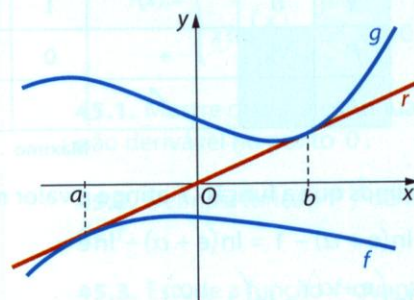
- 53** De uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

- (A) A função f é contínua em $\mathbb{R}$.
(B) O gráfico da função f tem uma assíntota paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.
(C) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
(D) $f'(0) = 0$

- 54** Na figura seguinte estão representados, num referencial o.n. xOy :

- parte dos gráficos de duas funções, f e g , de domínio $\mathbb{R}$;
- uma reta r , tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa a e tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa b .



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) $f'(a) < g'(b)$ (B) $f'(a) - g'(b) = 0$
(C) $f'(a) \times g'(b) < 0$ (D) $f'(a) + g'(b) = 0$

- 55** Na figura estão representados, num referencial xOy :

- parte do gráfico da função h , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

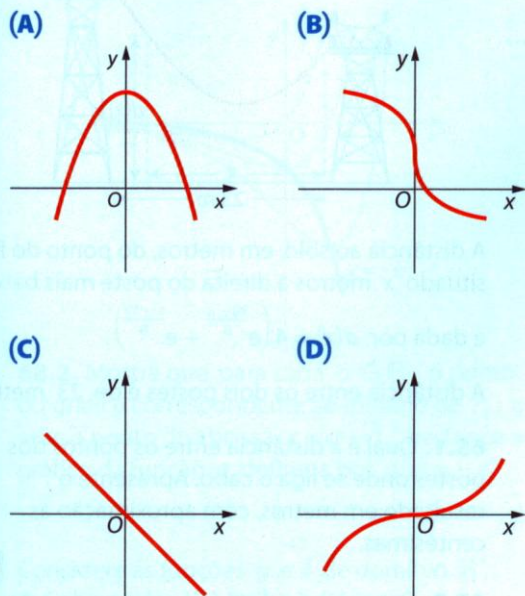
$$h(x) = 1 + 4 \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

- a reta t , tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa 2 e que interseca o eixo Oy no ponto de ordenada b .

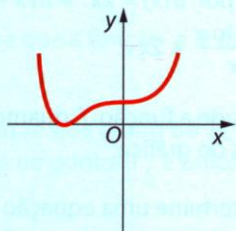
Qual é o valor de b ?

- (A) -4 (B) -3 (C) -2 (D) -1

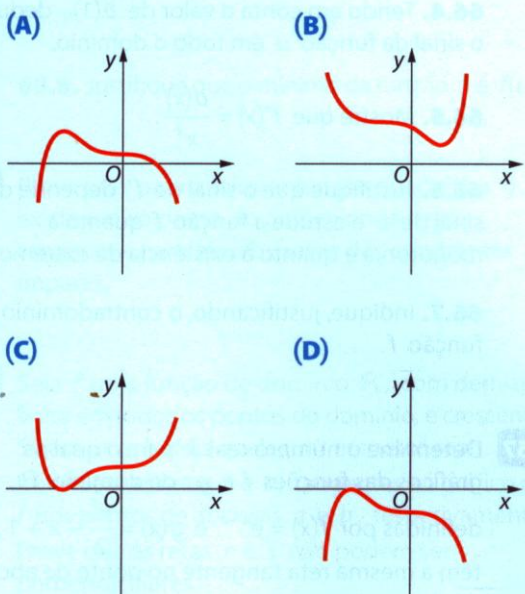
- 56** Seja f uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão de abscissa nula. Em qual das seguintes figuras poderá estar parte do gráfico da derivada de f ?



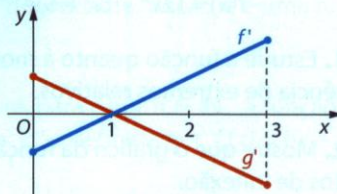
- 57** Na figura está uma representação gráfica de g' , derivada de uma função g .



Em qual das figuras seguintes pode estar uma representação gráfica da função h' , derivada da função h definida por $h(x) = 1 - g(x)$?



- 58** Sejam f e g duas funções deriváveis, de domínio $[0, 3]$. Na figura seguinte estão representadas graficamente as funções f' e g' , derivadas das funções f e g , respetivamente.



Sabe-se que $f(0) = g(0)$ e $f(2) = g(2)$.

O conjunto-solução da condição $f(x) > g(x)$ é:

- (A) $]2, 3[$
 (B) $]2, 3]$
 (C) $]1, 3[$
 (D) $]1, 3]$
- 59** Seja h uma função tal que h'' é uma função quadrática de contradomínio $]-\infty, 1]$. Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?
- (A) A função h tem quatro zeros.
 (B) O gráfico da função h tem a concavidade voltada para baixo.
 (C) O gráfico da função h tem dois pontos de inflexão.
 (D) A função h' , derivada de h , é estritamente decrescente.

- 60** Para um certo número real a e um certo número real b , a reta de equação $y = 6x - 3$ é tangente ao gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a e^{b(x-1)}$, no ponto de abscissa 1. Qual é o valor de b ?

- (A) -3 (B) 2
 (C) 3 (D) 6

- 61** Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do domínio e seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por:

$$g(x) = 2x \times f(e^{2x})$$

Qual é o valor de $g'(0)$?

- (A) 0
 (B) $2f(1)$
 (C) $2f'(1)$
 (D) $2f(1) + 6f'(1)$

Itens de construção

- 62** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = (2x^2 + 6x + 5)e^{-2x}$$

- 62.1.** Estude a função quanto à monotonia e existência de extremos relativos.
- 62.2.** Mostre que o gráfico da função f tem dois pontos de inflexão.
- 62.3.** Justifique que a tangente ao gráfico de f num dos pontos de inflexão é paralela ao eixo Ox .
- 62.4.** Determine uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0.

- 63** Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$g(x) = 4 \ln x + \frac{x^2}{2} - 5x$$

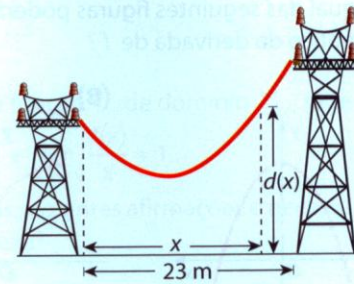
- 63.1.** Estude a função g quanto à existência de assíntotas do gráfico.
- 63.2.** Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.
- 63.3.** Mostre que o gráfico da função g tem um ponto de inflexão e determine uma equação da reta tangente ao gráfico nesse ponto.

- 64** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = e^{2x} - 2x e^{2x}$$

- 64.1.** Estude o gráfico da função g quanto à existência de assíntotas paralelas aos eixos coordenados.
- 64.2.** Mostre que a função g admite um máximo e determine-o.
- 64.3.** Indique, justificando, o contradomínio da função g .
- 64.4.** Determine os zeros da função g .
- 64.5.** Justifique que a função g não tem inversa.
- 64.6.** Estude a função g quanto ao sentido da concavidade do gráfico.
- 64.7.** Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa $-\frac{1}{2}$.

- 65** Um cabo de transporte de energia elétrica encontra-se suspenso entre dois postes.



A distância ao solo, em metros, do ponto do fio situado x metros à direita do poste mais baixo é dada por $d(x) = 4 \left(e^{\frac{10-x}{8}} + e^{\frac{x-10}{8}} \right)$.

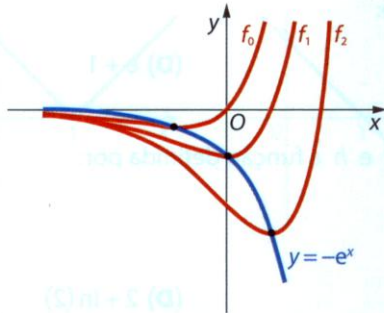
A distância entre os dois postes é de 23 metros.

- 65.1.** Qual é a distância entre os pontos dos postes onde se liga o cabo. Apresente o resultado em metros, com aproximação às centésimas.
- 65.2.** Determine a distância mínima do cabo ao solo.
- 66** Considere as funções u e f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definidas por $u(x) = 2x^2 + \ln x - 2$ e $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x} + 2x$.
- 66.1.** Estude a função f quanto à existência de assíntotas do gráfico.
- 66.2.** Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de u no ponto de abscissa 1.
- 66.3.** Justifique que a função u é estritamente crescente.
- 66.4.** Tendo em conta o valor de $u(1)$, deduza o sinal da função u em todo o domínio.
- 66.5.** Mostre que $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$.
- 66.6.** Justifique que o sinal de f' depende do sinal de u e estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos.
- 66.7.** Indique, justificando, o contradomínio da função f .

- 67** Determine o número real k para o qual os gráficos das funções f e g , de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = e^{x-k}$ e $g(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$, têm a mesma reta tangente no ponto de abscissa $x = k$.

- 68** Considere, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, a função f_α , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f_\alpha(x) = (x - \alpha)e^x$.

68.1. Mostre que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ a função f_α admite um mínimo para $x = \alpha - 1$.



68.2. Mostre que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o ponto do gráfico correspondente ao mínimo de f_α , ou seja, o ponto de abscissa $x = \alpha - 1$, pertence ao gráfico da função g definida por $g(x) = -e^x$.

- 69** Considere as funções g e f de domínio $\mathbb{R}^+$, definidas por: $g(x) = x^2 + \ln(x)$ e $f(x) = x^2 + (\ln x)^2$

69.1. Mostre que a função g admite pelo menos um zero no intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

69.2. Mostre que a função g é estritamente crescente.

69.3. Justifique que o zero de g , cuja existência foi garantida no ponto 1, é único. Designe esse zero por α .

69.4. Justifique que $g(x) > 0$ para qualquer $x \in]\alpha, +\infty[$.

69.5. Mostre que, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$.

69.6. Justifique que o mínimo da função f é $f(\alpha)$.

- 70** Prove que, para qualquer função quadrática g , existe um só ponto do gráfico onde a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

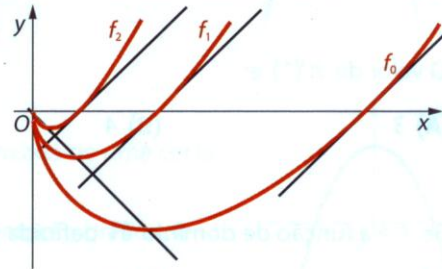
- 71** Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do domínio, e crescente. Sejam a e b dois quaisquer números reais. Considere as retas r e s , tangentes ao gráfico de f nos pontos de abscissas a e b , respetivamente. Prove que as retas r e s não podem ser perpendiculares.

- 72** Seja f uma função ímpar derivável em $\mathbb{R}$. Prove que:

72.1. $f(0) = 0$

72.3. A derivada da função f é uma função par.

- 73** Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f_n(x) = nx + x \ln x$.



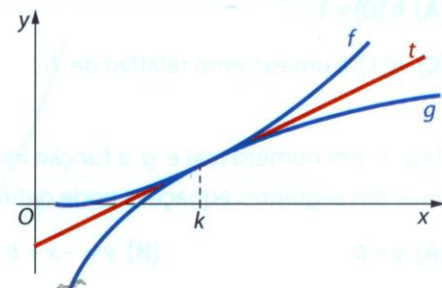
73.1. Mostre que, para cada valor de $n \in \mathbb{N}$, o gráfico de f_n admite um único ponto, Q_n , onde a reta tangente é paralela ao eixo Ox .

73.2. Mostre que esses pontos pertencem todos à bissetriz dos quadrantes pares.

73.3. Mostre que, para cada valor de $n \in \mathbb{N}$, o gráfico de f_n , interseca o eixo Ox num único ponto, R_n , e determine a sua abscissa.

73.4. Mostre que a tangente ao gráfico de f_n no ponto R_n é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, qualquer que seja o valor de $n \in \mathbb{N}$.

- 74** Para cada valor de $n \in \mathbb{N}$ existe um número real não nulo α para o qual os gráficos das funções f e g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definidas por $f(x) = \alpha x^n$ e $g(x) = \ln x$, têm a mesma tangente, t , no ponto de abscissa k .

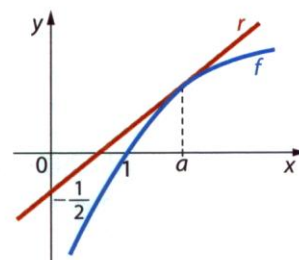


74.1. Mostre que $k^n = \frac{1}{n\alpha}$.

74.2. Mostre que $\alpha = \frac{1}{ne}$.

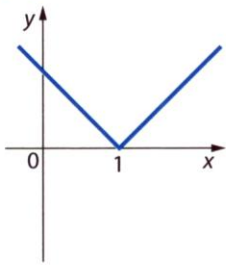
74.3. Determine uma equação reduzida da reta t , se $n = 2$.

- 1** Considere a função h tal que $h(x) = x \ln x$. O valor de $h'(e)$ é:
- (A) e (B) 2 (C) 1 (D) $e + 1$
- 2** Seja f uma função derivável em $\mathbb{R}$ tal que $f(1) = 1$ e $f'(1) = 2$ e h a função definida por:
- $$h(x) = f(x) + \ln(f(x))$$
- O valor de $h'(1)$ é:
- (A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) $2 + \ln(2)$
- 3** Se f é a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + e^x$, então $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$ é:
- (A) 1 (B) 2 (C) $1 + e$ (D) 0
- 4** Para um certo número real a o gráfico da função h definida por $h(x) = x \ln(ax)$ tem, no ponto de abscissa 1 , uma reta tangente com declive 2 .
- O valor de a é:
- (A) e (B) 1 (C) e^2 (D) 0
- 5** Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f''(x) = 0$.
Uma expressão analítica da função f pode ser:
- (A) $-e^x$ (B) e^x (C) e^{-x} (D) $\ln x$
- 6** Sabe-se que h é uma função real de variável real tal que:
- $$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = 0$$
- Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?
- (A) $h'(0) = 1$ (B) h é contínua no ponto $x = 1$.
(C) $h(1)$ é um extremo relativo de h . (D) $h(1) = 0$
- 7** Seja b um número real e g a função real de variável real definida por $g(x) = e^x$.
Qual das seguintes equações pode definir uma reta tangente ao gráfico de g ?
- (A) $y = b$ (B) $y = -x + b$ (C) $y = x + b$ (D) $x = b$
- 8** A figura representa graficamente a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \ln x$.
A reta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa a e passa no ponto de coordenadas $(0, -\frac{1}{2})$.
- O valor de a é:
- (A) $\sqrt{e}$ (B) 2 (C) $\frac{1}{e}$ (D) e

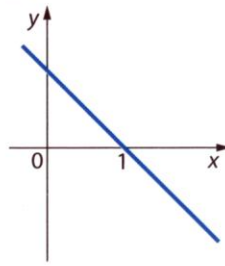


- 9** Sabe-se que h é uma função derivável em $\mathbb{R}$ com um máximo relativo em $x = 1$. Qual das seguintes figuras pode apresentar parte da representação gráfica de h' , função derivada de h ?

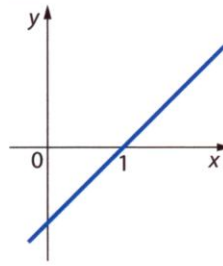
(A)



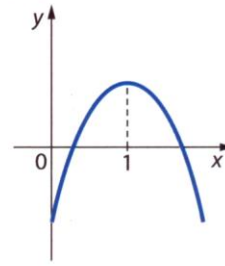
(B)



(C)

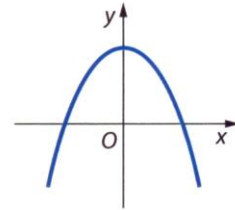


(D)

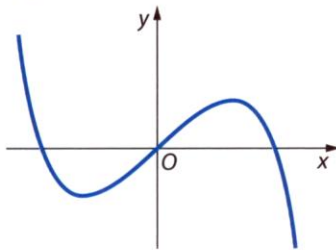


- 10** Na figura ao lado está uma representação gráfica de f' , derivada de uma certa função f , de domínio $\mathbb{R}$.

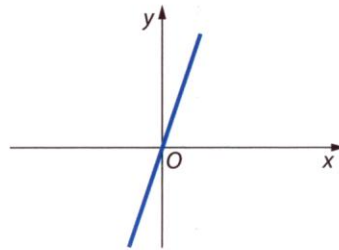
Em qual das figuras seguintes poderá estar parte da representação gráfica da função f ?



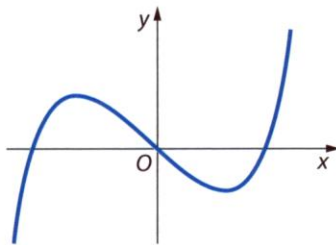
(A)



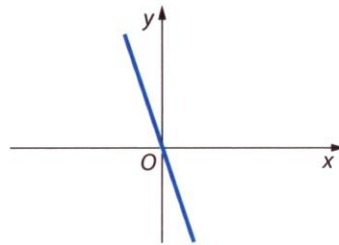
(B)



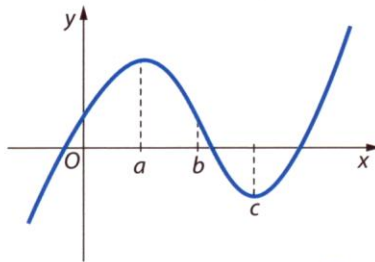
(C)



(D)



- 11** Na figura apresenta-se o gráfico de uma função f , real de variável real, derivável em $\mathbb{R}$.



Sabe-se que:

- $f(a)$ é o único máximo relativo de f ;
- $f(c)$ é o único mínimo relativo de f ;
- $(b, f(b))$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f .

Então, pode afirmar-se que:

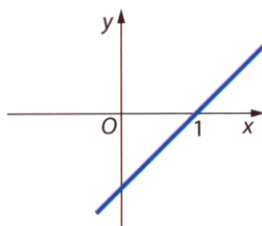
(A) $\forall x \in]-\infty, a[, f'(x)f''(x) > 0$

(B) $\forall x \in]a, b[, f'(x)f''(x) < 0$

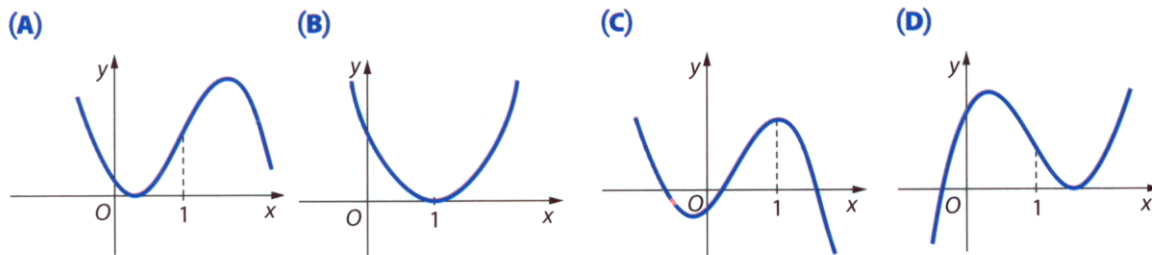
(C) $\forall x \in]b, c[, f'(x)f''(x) < 0$

(D) $\forall x \in]c, +\infty[, f'(x)f''(x) < 0$

- 12** Na figura seguinte está uma representação de f'' , segunda derivada de uma certa função f .



Qual das seguintes figuras pode apresentar parte do gráfico de f ?



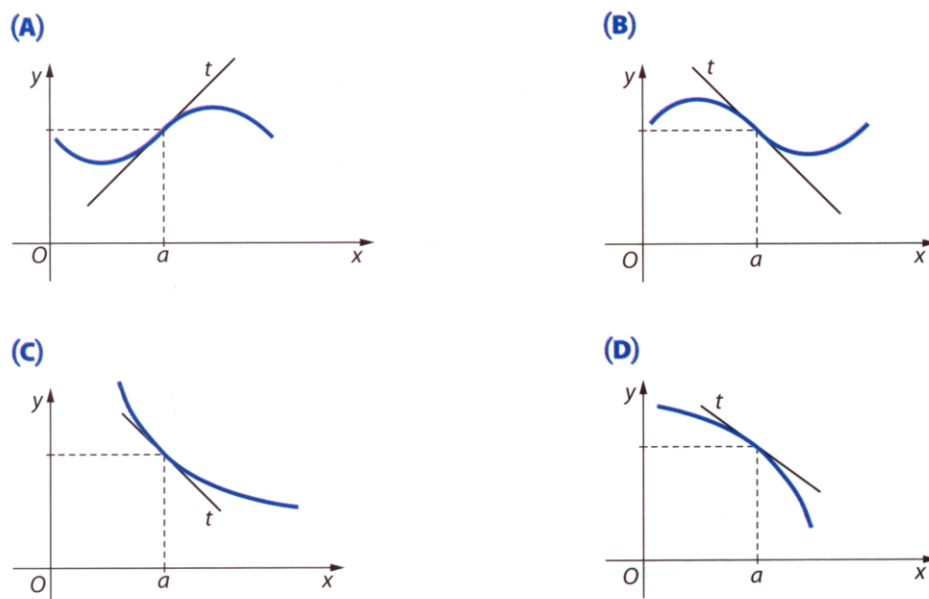
- 13** Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, estritamente crescente.

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

- (A) A função f não pode ter mais do que um zero.
- (B) $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (C) O gráfico de f não tem pontos de inflexão.
- (D) A função f não é par nem ímpar.

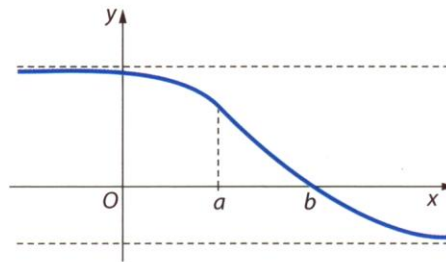
- 14** f é uma função real de variável real que admite primeira e segunda derivadas no ponto a .

Sabendo que $f'(a)f''(a) < 0$, o gráfico da função f pode ser:



Nota: A reta t é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a .

- 15** Na figura está uma representação gráfica de g'' , segunda derivada de uma certa função g , de domínio $\mathbb{R}$.



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) O ponto de abscissa b é um ponto de inflexão do gráfico de g .
 (B) O ponto de abscissa a é um ponto de inflexão do gráfico de g .
 (C) A função g' , derivada da função g , é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.
 (D) No intervalo $[0, a]$ o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo.

- 16** Determine o ponto ou os pontos do gráfico da função f cuja tangente é uma reta horizontal, sendo:

16.1. $f(x) = x^3 - 6x^2$

16.2. $f(x) = x^2 e^x$

16.3. $f(x) = 3 + \ln(4 - x^2)$

16.4. $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$

- 17** Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função f , definida por $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$, no ponto de abscissa $x = 2$.

- 18** A concentração de um certo medicamento, em miligramas por litro de sangue, t horas depois de ser tomado por uma pessoa, é dada pela função:

$$C(t) = \frac{0,3t}{t^2 + 1}$$

Calcule $C'\left(\frac{1}{3}\right)$ e $C'(3)$ e interprete os valores obtidos.

- 19** Dada a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ x^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

19.1. Caracterize a função derivada de f .

19.2. Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

- 20** f e g são funções reais de variável real tais que $f'(x) = 3x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$.
 Calcule $(f \circ g)'(4)$.

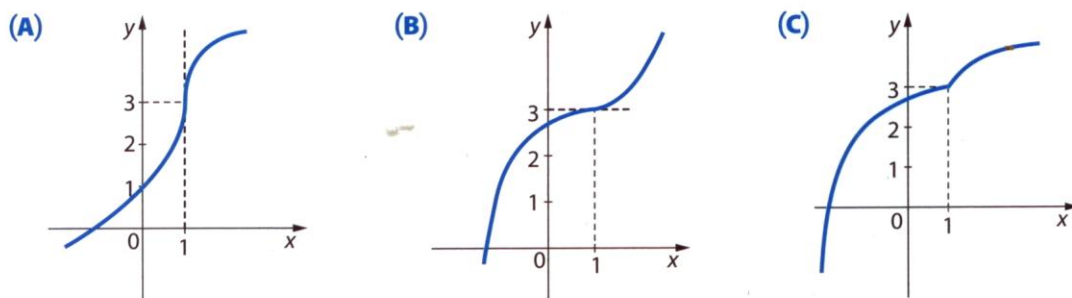
- 21** Calcule, caso exista, recorrendo à definição de derivada de uma função, a derivada de f nos pontos indicados:

21.1. $f(x) = |x^2 - 1|$, no ponto $x = 1$;

21.2. $f(x) = x \ln x$, no ponto $x = 1$.

- 22** Qual dos gráficos seguintes pode representar uma função f que satisfaz as condições:

$$f(1)=3; \quad f''(1)=0 \quad \text{e} \quad f'(x)>0 \quad \text{em} \quad]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[?$$



- 23** Considere a função g , definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = e^x(x^2 - 4x + 5)$.

23.1. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de g , no ponto de abcissa zero.

23.2. Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

- 24** De uma função g , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua derivada g' está definida, também em $\mathbb{R}$, por:

$$g'(x) = (1+x)e^{-x}$$

24.1. Determine o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}$.

24.2. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e determine as abcissas dos pontos de inflexão, caso existam.

- 25** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 2 - x + 2 \ln x$.

25.1. Estude f quanto à existência de assíntotas do gráfico.

25.2. Estude a função f quanto à monotonia e conclua que f tem um único máximo.

- 26** Considere a função f , definida em $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ por $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

26.1. Estude f quanto à existência de assíntotas do gráfico.

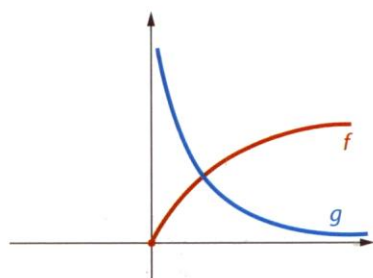
26.2. Verifique que $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.

26.3. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

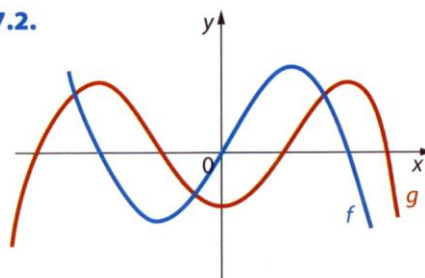
26.4. Recorrendo à sua calculadora, determine as **soluções inteiras** da inequação $f(x) < 4 - \frac{x}{4}$. Explique como procedeu.

- 27** Em cada figura estão representadas graficamente duas funções, f e g . Uma das funções é a função derivada da outra. Indique qual é a função derivada em cada caso.

27.1.



27.2.



- 28** Injetou-se uma substância no sangue de um animal.

Admita que a concentração dessa substância, em miligramas por mililitro de sangue, t horas após ter sido injetada, é dada por:

$$C(t) = \frac{10 \ln(0,8t + 1)}{0,8t + 1} \quad (t \geq 0)$$

- 28.1.** Recorrendo à derivada da função C , determine o instante em que a concentração da substância no sangue do animal foi máxima. Apresente o resultado em horas e minutos.
- 28.2.** Utilize a calculadora para determinar, com aproximação aos minutos, durante quanto tempo a concentração da substância no sangue do animal foi superior a 2 miligramas por mililitro de sangue. Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico obtido bem como as coordenadas dos pontos considerados relevantes.

- 29** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$$

- 29.1.** Estude f quanto à existência de assíntotas do gráfico.

- 29.2.** Mostre que $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]e^{-1}, +\infty[$.

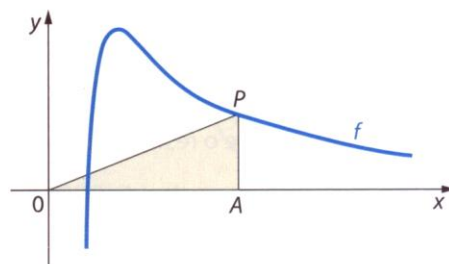
- 29.3.** Na figura está representada, em referencial o.n. xOy , uma parte do gráfico da função f .

Na mesma figura está também representado o triângulo $[OAP]$, retângulo em A .

O ponto O é a origem do referencial e o ponto A , de abscissa $x \in]e^{-1}, +\infty[$, pertence ao eixo Ox .

O ponto P pertence ao gráfico de f .

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, determine a abscissa de P para a qual a área do triângulo é máxima.



- 30** Um estudo sobre audiências televisivas revelou que o número de telespectadores de determinado canal variou, entre as 22 horas e as 24 horas de determinado dia, de acordo com a função:

$$N(t) = 50 + t^2 e^{-0,04t}$$

sendo N o número de telespectadores, em milhares, e t o tempo, em minutos, decorrido após as 22 horas.

- 30.1.** Qual era o número de telespectadores às 22 horas?
- 30.2.** Recorrendo a processos exclusivamente analíticos determine a hora a que o número de telespectadores foi máximo.
- 30.3.** Durante um determinado período de tempo o número de telespectadores ultrapassou os 300 mil. Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o intervalo de tempo (hora inicial e hora final) em que tal facto se verificou (apresente o resultado em horas e minutos e indique, sumariamente, como procedeu).

- 31** Considere as funções reais de variável real, h e f , definidas em $\mathbb{R}^+$ por:

$$h(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x \quad \text{e} \quad f(x) = x - 1 + \frac{2 \ln x}{x}$$

- 31.1.** Estude h quanto à monotonia e conclua que $h(x) \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

- 31.2.** Verifique que $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ e justifique que f é uma função estritamente crescente.

- 31.3.** Determine $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- 31.4.** Mostre que a reta de equação $y = x - 1$ é assíntota do gráfico da função f .

- 31.5.** Mostre que o gráfico representativo da função f tem um ponto em que a reta tangente é paralela à assíntota de equação $y = x - 1$.

- 32** O rendimento anual, R , de uma empresa está relacionado com o investimento, x , em marketing pela seguinte função:

$$R(x) = -0,002x^3 + 1,25x^2 + 2x + 200, \text{ onde } 0 \leq x \leq 500$$

x e R são dados em milhares de euros.

Determine as coordenadas do ponto de inflexão do gráfico de R e discuta o seu significado. (Apresente o resultado com duas casas decimais.)

- 33** Mostre que o gráfico da função f , definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0$$

tem um e um só ponto de inflexão e escreva as suas coordenadas, em função de a , b , c e d .

- 34** A altitude (em metros) de um foguetão, t segundos depois de ser lançado, é dada por:

$$f(t) = -t^3 + 44t^2 + 440t + 2$$

34.1. Determine, com duas casas decimais, as coordenadas do ponto de inflexão da curva representativa do gráfico da função.

34.2. Qual é a velocidade máxima atingida pelo foguetão?

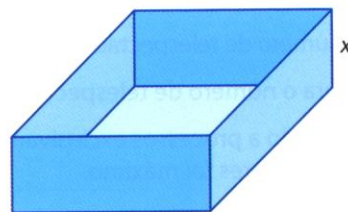
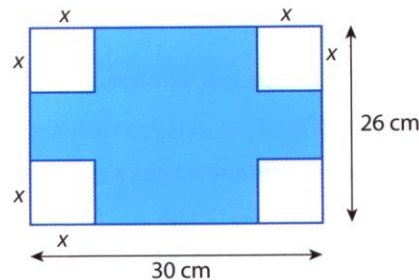
Apresente o resultado, em metros por segundo, com aproximação às centésimas.

34.3. Relacione a velocidade máxima atingida pelo foguetão com o ponto de inflexão do gráfico de f .

- 35** Seja f uma função real de variável real de que $(a, f(a))$ é um ponto de inflexão do gráfico.

A função f' tem necessariamente um extremo relativo para $x = a$? Justifique a resposta.

- 36** Numa cartolina retangular de 30 cm por 26 cm cortam-se quatro cantos quadrados de lado x de modo a construir uma caixa sem tampa.



36.1. Determine x , com duas casas decimais, de modo que o volume da caixa seja máximo.

36.2. Determine o valor exato de x sabendo que $x \neq 2$ e que a caixa tem a mesma capacidade daquela em que $x = 2$.

- 37** Uma empresa pretende embalar sumo de fruta em latas cilíndricas. A quantidade de sumo por lata deve ser igual a 0,36 litro.



Determine, em centímetros e com uma casa decimal, o raio da base da lata cilíndrica de modo a minimizar a quantidade de material usado na construção da lata.

- 38** Considere a função h definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

Verifique que a reta de equação $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ é tangente ao gráfico de h num ponto de inflexão.

- 39** Em 1990 ($t = 0$), a população de castores na vizinhança de determinado lago era constituída por 10 unidades.

O número N , em milhares, de elementos dessa população cresceu, desde então, segundo a lei:

$$N(t) = \frac{k}{1 + 199e^{-0,5t}}$$

sendo t o número de anos decorridos desde aquela data.

39.1. Verifique que $k = 2$.

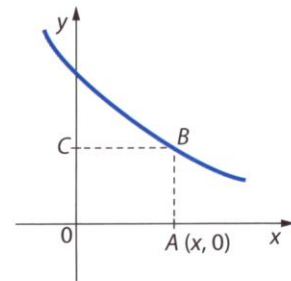
39.2. Em que ano a população de castores atingiu as 1000 unidades?

39.3. Indique um valor aproximado da velocidade de crescimento do número de castores 10 anos após a contagem inicial.

- 40** O vértice B do retângulo $[OABC]$ é um ponto do 1.º quadrante e pertence ao gráfico da função f definida por $f(x) = e^{-x}$.

Os vértices O , A e C pertencem aos eixos coordenados, como se mostra na figura.

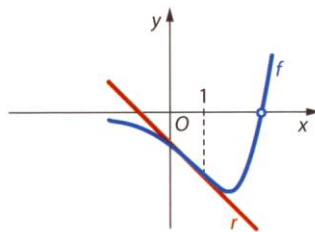
Determine o valor de x (abscissa do ponto A) de modo que a área do retângulo $[OABC]$ seja máxima.



- 41** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = (x + a)e^{bx-1}$ (a e b designam números reais).

Na figura estão representados em referencial xOy :

- parte do gráfico da função f ;
- uma reta r , paralela à bissetriz dos quadrantes pares.



Sabe-se que:

- f admite primeira e segunda derivadas em todo o domínio;
- a reta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

41.1. Determine os valores de a e de b .

41.2. Determine uma equação da reta r (se não resolveu a alínea anterior, considere $a = -3$ e $b = 1$).

- 42** Sejam f e g duas funções, de domínio $\mathbb{R}^+$, tais que:

- $f(x) - g(x) = \ln x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$
- a reta de equação $y = 4x - 2$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1.

Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

3. Trigonometria e números complexos

Tema 1

Trigonometria

Tema 2

Números complexos

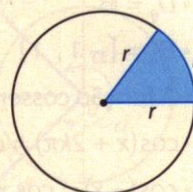
Tema 1

Trigonometria

1. Radiano

Um radiano (rad) é a amplitude de um ângulo que define em qualquer circunferência, com centro no seu vértice, um arco de comprimento igual ao raio.

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \quad \text{ou} \quad \pi \text{ rad} = 180^\circ$$



2. Funções trigonométricas

Função periódica

Uma função f é **periódica** se existe um número real positivo p tal que:

$$\forall x \in D_f, x + p \in D_f \text{ e } f(x + p) = f(x)$$

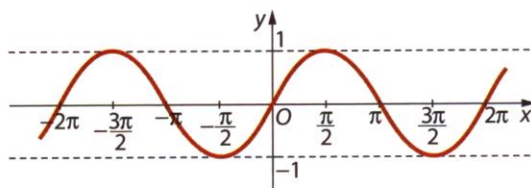
Ao menor valor de p chama-se período positivo mínimo da função.

As funções trigonométricas são funções periódicas.

Função seno

$$x \curvearrowright f(x) = \sin x$$

- Representação gráfica

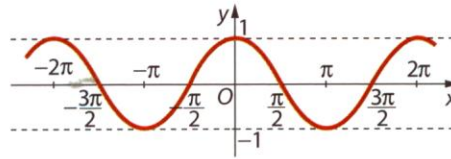


- $D_f = \mathbb{R}$
- $D'_f = [-1, 1]$
- A função seno é contínua em $\mathbb{R}$.
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in D_f$ (A função seno é periódica e 2π é o período positivo mínimo.)
- $\sin(-x) = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (A função seno é uma **função ímpar**.)
- A função seno tem **valor máximo 1** para $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- A função seno tem **valor mínimo -1** para $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- A função seno tem **zeros** para $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Função cosseno

$$x \mapsto g(x) = \cos x$$

- Representação gráfica

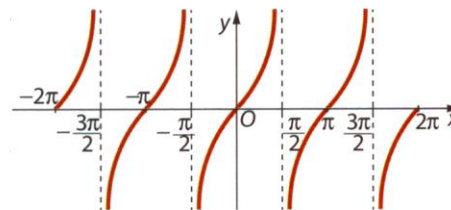


- $D_g = \mathbb{R}$
- $D'_g = [-1, 1]$
- A função cosseno é contínua em $\mathbb{R}$.
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in D_g$ (A função cosseno é periódica e 2π é o período positivo mínimo.)
- $\cos(-x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (A função cosseno é uma **função par**.)
- A função cosseno tem **valor máximo 1** para $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- A função cosseno tem **valor mínimo -1** para $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- A função cosseno tem **zeros** para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Função tangente

$$x \mapsto h(x) = \operatorname{tg} x$$

- Representação gráfica

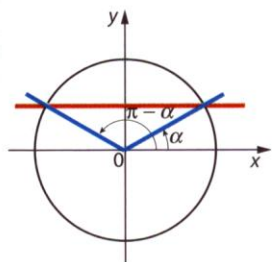


- $D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $D'_h = \mathbb{R}$
- A função tangente é contínua em todo o seu domínio.
- $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$, $k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in D_h$ (A função tangente é periódica e π é o período positivo mínimo.)
- $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\forall x \in D_h$ (A função tangente é uma **função ímpar**.)
- A função tangente tem zeros para $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Valores em $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$

θ em radianos	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

4. Equações trigonométricas



Equações do tipo $\sin x = \sin \alpha$

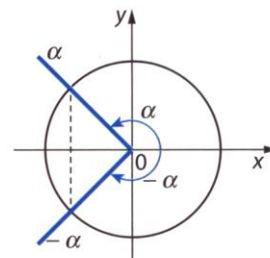
$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Equações do tipo $\cos x = \cos \alpha$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow$$

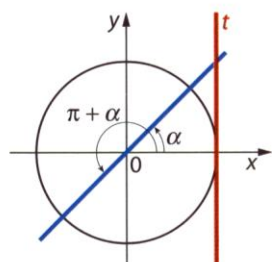
$$\Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



Equações do tipo $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



5. Fórmulas trigonométricas

O quadro seguinte apresenta as fórmulas trigonométricas mais utilizadas.

Fórmulas trigonométricas

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$$\operatorname{tg}(2a) = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

Exemplo 1 Determinação do valor de expressões trigonométricas

1.1. Sem recorrer à calculadora, determine o valor exato de:

$$\sin \frac{7\pi}{6} + \cos \frac{-4\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$$

1.2. Sabendo que $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ e que $\cos(\pi - \alpha) = -\frac{3}{5}$, determine o valor exato de $\sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{tg}(\pi - \alpha)$.

Verifica 1

1.1. Sem recorrer à calculadora, determine o valor exato de:

$$\cos \frac{5\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6}$$

1.2. Sabe-se que:

$$x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

$$\text{e que } \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{4}{5}.$$

Determine o valor exato de:

$$\cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \operatorname{tg}(\pi + x)$$

Sugestão de resolução

$$\begin{aligned}
 1.1. \quad \sin \frac{7\pi}{6} + \cos \frac{-4\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} &= \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) + \cos \frac{4\pi}{3} - \operatorname{tg} \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \\
 &= -\sin \frac{\pi}{6} + \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) - \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \\
 &= -\frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.2. \quad \bullet \cos(\pi - \alpha) &= -\frac{3}{5} \wedge \alpha \in 4.^\circ \text{Q} \Rightarrow -\cos \alpha = -\frac{3}{5} \wedge \alpha \in 4.^\circ \text{Q} \\
 &\Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

Atendendo a que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \alpha + \left(\frac{3}{5} \right)^2 &= 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

Como $\alpha \in 4.^\circ \text{Q}$, tem-se $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

$$\begin{aligned}
 \bullet \sin(\pi + \alpha) + \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) + \operatorname{tg}(\pi - \alpha) &= -\sin \alpha - \sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha = \\
 &= -2 \sin \alpha - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \\
 &= -2 \times \left(-\frac{4}{5} \right) - \frac{-4}{\frac{3}{5}} = \\
 &= \frac{8}{5} + \frac{4}{3} = \frac{44}{15}
 \end{aligned}$$

Exemplo 2 Resolução de equações

Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

2.1. $2 \sin x - 1 = 0$

2.2. $2 \cos^2 x + \cos x = 0$

2.3. $2 \cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

2.4. $\cos(2x) + \cos x = 0$

2.5. $\sin x + \cos x = 0$ em $[0, 2\pi]$

2.6. $\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0$

Sugestão de resolução

$$\begin{aligned}
 2.1. \quad 2 \sin x - 1 &= 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.2. \quad 2 \cos^2 x + \cos x &= 0 \Leftrightarrow \cos x (2 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \cos x = -\frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \\
 &\quad \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Verifica 2

Resolva as equações seguintes.

2.1. $2 \sin x + 1 = 0$

(em $\mathbb{R}$)

2.2. $\sin^2 x - \sin x = 0$

(em $[0, 2\pi]$)

2.3. $\cos^2 x + 2 \sin x = 2$

(em $\mathbb{R}$)

2.4. $\cos(3x) - \cos x = 0$

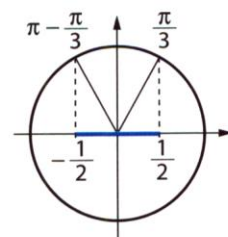
(em $\mathbb{R}$)

2.5. $\cos(2x) + \sin x = 0$

(em $\mathbb{R}$)

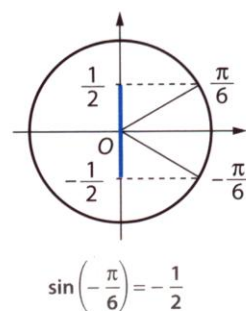
2.6. $\operatorname{tg}^2 x = 1$

(em $]-\pi, \pi[$)

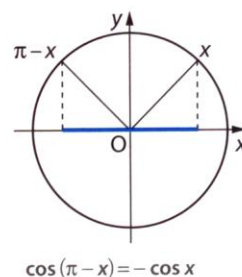


$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 2.3. \quad 2 \cos^2 x + \sin x - 1 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 &= 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\
 \Leftrightarrow 2 - 2 \sin^2 x + \sin x - 1 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 &= 0 \Leftrightarrow y = \sin x \\
 \Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right), k \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 2.4. \quad \cos(2x) + \cos x &= 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\cos x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos(2x) &= \cos(\pi - x) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2x = \pi - x + 2k\pi \vee 2x &= -(\pi - x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \vee 2x &= -\pi + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \vee x &= -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 2.5. \quad \sin x + \cos x &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin x = -\cos x &\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} - x + 2k\pi \vee x &= \pi - \left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee 0 &= -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Soluções no intervalo $[0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}
 0 \leq x \leq 2\pi &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 0 \leq 3\pi + 4k\pi &\leq 8\pi \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -3\pi \leq 4k\pi &\leq 5\pi \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq k &\leq \frac{5}{4} \stackrel{k \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} k = 0 \vee k = 1
 \end{aligned}$$

$$\bullet k = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\bullet k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{Conjunto-solução: } \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 2.6. \quad \sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 &= 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x &= -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

6. Resolução de problemas usando funções trigonométricas

As funções trigonométricas utilizam-se na resolução de muitos problemas em contexto real.

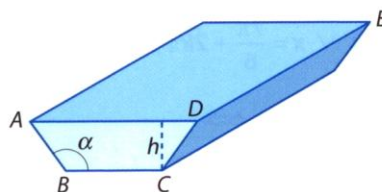
Exemplo 3 A construção do depósito

Pretende-se construir um depósito com a forma de um prisma reto como o apresentado na figura seguinte e que obedeça às seguintes condições:

– A base do prisma é um trapézio $[ABCD]$ em que:

- $\overline{AB} = \overline{CD} = 0,5$ m
- $\overline{BC} = 1$ m
- $\overline{BC} \leq \overline{AD}$
- α é a amplitude (em radianos) do ângulo CBA .

– A altura $\overline{DE}$ do prisma mede 4 m.



3.1. Prove que o volume do depósito é dado, em função de α , por:

$$V(\alpha) = 2 \sin \alpha - 0,5 \sin(2\alpha), \quad \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

3.2. Determine $V\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interprete o resultado obtido referindo a forma do depósito para $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

3.3. Mostre que existe pelo menos um valor de $\alpha \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ para o qual $V(\alpha) = V\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (sugestão: recorre ao Teorema de Bolzano).

3.4. Recorrendo à calculadora gráfica determine a altura h do depósito sabendo que o seu volume é igual a 2 m^3 e que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Apresente o resultado em centímetros, com aproximação às décimas.

Sugestão de resolução

3.1.

• Área do trapézio

O triângulo $[ABM]$ é retângulo em M .

$$\frac{h}{\overline{AB}} = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{h}{0,5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow h = 0,5 \sin \alpha$$

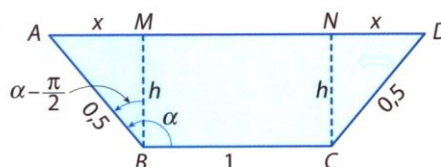
$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{0,5} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow x = -0,5 \cos \alpha$$

$$\overline{AD} = 2x + \overline{MN} = 2(-0,5 \cos \alpha) + 1 = 1 - \cos \alpha$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times h = \frac{1 - \cos \alpha + 1}{2} \times 0,5 \sin \alpha =$$

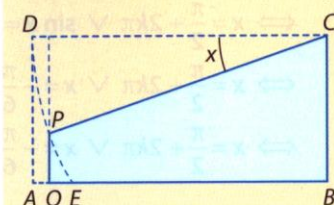
$$= \frac{1}{2}(2 - \cos \alpha) \times 0,5 \sin \alpha = 0,25(2 - \cos \alpha) \sin \alpha$$



$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \times \text{altura} = A_{\text{trapézio}} \times \overline{DE}$$

Verifica 3

Na figura abaixo tem-se:



- $[ABCD]$ é um retângulo.
- $AB = 2$ e $BC = 1$.
- DE é um arco de circunferência de centro em C , sendo E um ponto de $[AB]$.
- O ponto P desloca-se sobre o arco DE e, em consequência, o ponto Q move-se sobre $[AE]$ de tal modo que $[PQ] \perp [AE]$.
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo DCP .

$$\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right)$$

3.1. Mostre que a área do trapézio $[QBCP]$ é dada, em função de x , por:

$$a(x) = 2 \cos x - \sin(2x)$$

3.2. Considere o triângulo $[BCE]$. Prove que a sua área ainda é dada por $a(x)$ para $x = \frac{\pi}{6}$.

3.3. Recorra à calculadora para determinar os valores de x para os quais a área do trapézio $[QBCP]$ é igual à área do triângulo $[ABC]$.

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico ou gráficos obtidos, bem como as coordenadas dos pontos cuja determinação for necessária à resolução do problema. Os valores devem ser arredondados às centésimas.

$$\begin{aligned}
 \bullet V_{\text{prisma}} &= A_{\text{trapézio}} \times \overline{DE} = 0,25 (2 - \cos \alpha) \sin \alpha \times 4 \\
 &= (2 - \cos \alpha) \sin \alpha \\
 &= 2 \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \\
 &= 2 \sin \alpha - \frac{1}{2} \times (2 \sin \alpha \cos \alpha) \\
 &= 2 \sin \alpha - 0,5 \sin (2\alpha)
 \end{aligned}$$

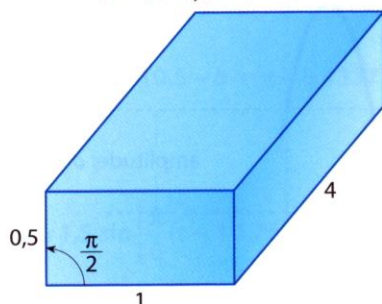
Atendendo a que $\overline{BC} \leq \overline{AD}$, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$.

$$3.2. \quad V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} - 0,5 \sin \left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 1 - 0,5 \sin \pi = 2 - 0 = 2$$

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, o volume do depósito é de 2 m^3 .

Neste caso o depósito tem a forma de um paralelepípedo de dimensões $1; 0,5; 4$, sendo:

$$V = 1 \times 0,5 \times 4 = 2$$



3.3. A função V é contínua no seu domínio, dado que é definida pela composta, produto e diferença de funções contínuas (função seno, função cosseno e funções polinomiais).

Logo, a função V é contínua em $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right] \subset \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$.

$$V\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \sin \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \sin \left(2 \times \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{4} \approx 2,17$$

$$V\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin \left(2 \times \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \approx 1,4$$

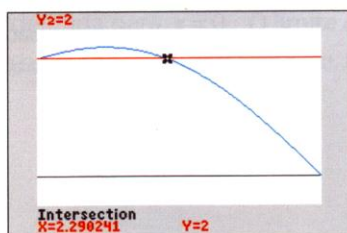
$$\text{Portanto, } V\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 2 < V\left(\frac{5\pi}{6}\right).$$

Pelo Teorema de Bolzano, podemos concluir que existe pelo menos

um valor de α do intervalo $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right]$ para o qual $V(\alpha) = 2$, ou seja, $V(\alpha) = V\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3.4. Calculando a interseção dos gráficos das funções

$Y_1 = 2 \sin x - 0,5 \sin (2x)$ e $Y_2 = 2$, no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ obteve-se $\alpha \approx 2,290 \text{ rad}$.



Como $h = 0,5 \sin \alpha$, temos, para este valor de α :

$$h \approx 0,5 \sin (2,290) \approx 0,376 \text{ m} = 37,6 \text{ cm}$$

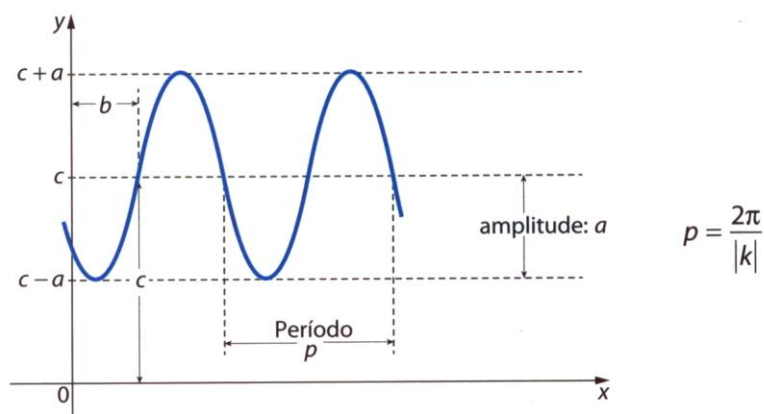
7. As funções trigonométricas como modelos de fenómenos reais

Na vida real encontram-se muitos fenómenos que se podem traduzir por variações periódicas: comprimento do dia ao longo do ano numa determinada localidade, altura das marés ao longo do dia, fases da Lua, receitas em negócios sazonais, etc.

Para modelar estes fenómenos são muitas vezes utilizadas funções do tipo:

$$y = a \sin [k(x - b)] + c$$

cujo gráfico (para a , b , c e k positivos) tem a forma:



A linha que representa o gráfico desta função chama-se **senoide**.

Exemplo 4 A altura da maré

Durante o dia 6 de maio de 2012 um navio encontrou-se atracado no porto de Viana do Castelo.

A distância h de um ponto do casco do navio ao fundo do mar variou com a maré entre um valor mínimo de 10,5 m e um valor máximo de 13,5 m.

Sabe-se que, às 10 horas e 30 minutos, essa distância era de 11,8 m e que a maré estava a subir.

Sabendo que o gráfico de h é aproximadamente sinusoidal, determine uma expressão para h (note que os valores das marés se repetem de 12 em 12 horas, aproximadamente).

Sugestão de resolução

h é do tipo $h(t) = a \sin [k(t - b)] + c$

O mínimo da função é 10,5 m.

O máximo da função é 13,5 m.

O contradomínio de h é $[10,5; 13,5]$.

Podemos, assim, concluir que:

• amplitude: $a = \frac{13,5 - 10,5}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$

• deslocamento vertical: $c = \frac{10,5 + 13,5}{2} = 12$

• período: $p = 12 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{|k|} = 12 \xrightarrow{k > 0} 12k = 2\pi \Leftrightarrow k = \frac{\pi}{6}$

Verifica 4

Segundo dados do Observatório Astronómico de Lisboa, o comprimento do dia (tempo que decorre entre o nascer e o pôr do sol) em determinada cidade portuguesa variou, no ano de 2011, entre um valor mínimo de 9 horas e 25 minutos e um valor máximo de 14 horas e 53 minutos no dia 20 de junho.

Sabendo que a variação do comprimento do dia ao longo dos 365 dias do ano se ajusta aproximadamente a uma curva sinusoidal, determine uma expressão de uma função que modele a situação.

Substituindo em $h(t)$, vem:

$$h(t) = 1,5 \sin \left[\frac{\pi}{6}(t - b) \right] + 12$$

Para determinar o valor de b (deslocamento horizontal) sabemos que $h(10,5) = 11,8$ e que numa vizinhança de 10,5, a função h é crescente (a maré estava a subir).

$$h(10,5) = 11,8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,5 \sin \left[\frac{\pi}{6}(10,5 - b) \right] + 12 = 11,8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,5 \sin \left[\frac{\pi}{6}(10,5 - b) \right] = -0,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \left[\frac{\pi}{6}(10,5 - b) \right] = -\frac{0,2}{1,5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6}(10,5 - b) \approx -0,1337 \vee \frac{\pi}{6}(10,5 - b) \approx \pi + 0,1337 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10,5 - b \approx -0,1337 \times \frac{6}{\pi} \vee 10,5 - b \approx (\pi + 0,1337) \frac{6}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b \approx 10,76 \vee b \approx 4,24$$

• Para $b = 10,76$, $h_1(t) = 1,5 \sin \left[\frac{\pi}{6}(t - 10,76) \right] + 12$.

• Para $b = 4,24$, $h_2(t) = 1,5 \sin \left[\frac{\pi}{6}(t - 4,24) \right] + 12$.

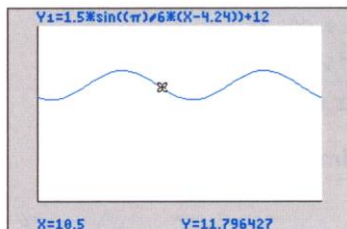
Representando graficamente as duas funções, verifica-se que:

$b = 10,76$



Às 10 h 30 min a maré está a subir.

$b = 4,24$



Às 10 h 30 min a maré está a descer.

Da análise dos gráficos podemos concluir que:

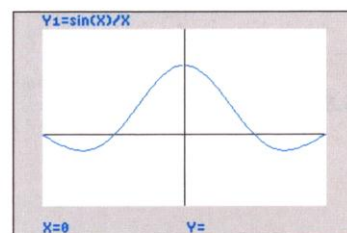
$$h(t) = 1,5 \sin \left[\frac{\pi}{6}(t - 10,76) \right] + 12$$

8. Limites de funções trigonométricas

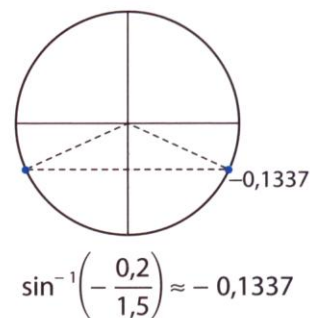
Considere-se a função real de variável real $f: x \mapsto f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

A função não está definida para $x = 0$. O limite da função quando x tende para zero existe e, tal como o gráfico sugere, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Este é mais um **limite notável** a partir do qual é possível levantar algumas indeterminações em limites envolvendo funções trigonométricas.



Exemplo 5 Cálculo de limites

Calcule.

$$5.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$5.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x}$$

$$5.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1}$$

$$5.7. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$$

$$5.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x + \sin(2x)}$$

$$5.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}$$

$$5.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$5.6. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e}{x} \sin(2x) \right]$$

$$5.8. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right]$$

Sugestão de resolução

$$5.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 1 \times 0 = 0$$

$$5.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = 1 \times \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\begin{aligned} 5.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x \cos(2x)} = \\ &= \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos(2x)} = 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{e^x - 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5.6. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e}{x} \sin(2x) \right] &\stackrel{(\infty \times 0)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[2e \frac{\sin(2x)}{2x} \right] = \\ &= 2e \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 2e \times 1 = 2e \end{aligned}$$

$$5.7. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{y} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = -1$$

$$\begin{aligned} 5.8. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right] &\stackrel{(\infty \times 0)}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2\pi \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \right] = \\ &= 2\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} = 2\pi \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \\ &= 2\pi \times 1 = 2\pi \end{aligned}$$

Verifica 5

Calcule.

$$5.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{2x}$$

$$5.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$$

$$5.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(4x)}{x}$$

$$5.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$5.5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi}$$

$$5.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin(2x)}{x}$$

$$5.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3x^2}{\sin x}$$

$$5.8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right]$$

$$\begin{aligned} y = x - \pi &\Leftrightarrow x = \pi + y \\ x \rightarrow \pi &\Rightarrow y \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\pi}{n} \\ n \rightarrow +\infty &\Rightarrow x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$5.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x + \sin(2x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin(2x)}{x}} = \frac{1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}{1 + 2 \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x}} = \frac{1 + 1}{1 + 2} = \frac{2}{3}$$

9. Derivadas das funções trigonométricas

Função seno

Seja $f(x) = \sin x$ e $h \neq 0$. Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \sin h \cos x}{h} = \\ &= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

Já vimos anteriormente que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0$. Logo, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$.

Portanto:

$$f'(x) = \sin x \times 0 + \cos x \times 1 \quad \text{ou} \quad f'(x) = \cos x.$$

Pela regra da derivada da função composta:

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

Função cosseno

Seja $f(x) = \cos x$.

$$f'(x) = (\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right]' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

Logo, se $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$.

Pela regra da derivada da função composta:

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

Função tangente

Seja $f(x) = \operatorname{tg} x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Então, se $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, pelo que:

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

Exemplo 6 Derivadas de funções trigonométricas

Calcule y' , sendo:

6.1. $y = \sin(3x - \pi)$

6.2. $y = \cos(2x) \times \operatorname{tg}(3x)$

Sugestão de resolução

$$\begin{aligned} 6.1. \quad y' &= [\sin(3x - \pi)]' = \\ &= (3x - \pi)' \cos(3x - \pi) = \\ &= 3 \cos(3x - \pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6.2. \quad y' &= [\cos(2x) \times \operatorname{tg}(3x)]' = \\ &= [\cos(2x)]' \operatorname{tg}(3x) + \cos(2x) \times [\operatorname{tg}(3x)]' = \\ &= -(2x)' \sin(2x) \operatorname{tg}(3x) + \cos(2x) \times \frac{(3x)'}{\cos^2(3x)} = \\ &= -2 \sin(2x) \operatorname{tg}(3x) + \frac{3 \cos(2x)}{\cos^2(3x)} \end{aligned}$$

Exemplo 7 Concavidades e a área do triângulo

Considere a função f , de domínio $[0, \pi]$, definida por:

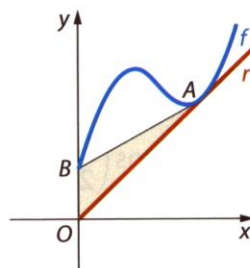
$$f(x) = x + 1 + \sin(2x)$$

7.1. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

7.2. Na figura estão representados:

- o gráfico da função f ;
- a reta r , de equação $y = x$, tangente ao gráfico de f no ponto A ;
- o triângulo $[OAB]$ em que O é a origem do referencial e B é o ponto do gráfico de abscissa nula.

Determine a área do triângulo $[OAB]$.



Sugestão de resolução

7.1. $f(x) = x + 1 + \sin(2x)$

$$f'(x) = 1 + 0 + (2x)' \cos(2x) = 1 + 2 \cos(2x)$$

$$f''(x) = 0 - 2 \times (2x)' \sin(2x) = -4 \sin(2x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4 \sin(2x) = 0 \wedge x \in [0, \pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \wedge x \in [0, \pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, \pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, \pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \pi$$

Verifica 6

Determine uma expressão da derivada de cada uma das funções seguintes.

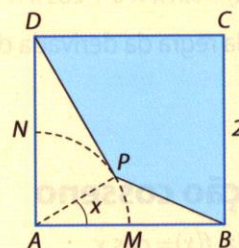
6.1. $f(x) = \sin x - \frac{1}{2} \sin(2x)$

6.2. $h(t) = 5 + 3 \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right)$

6.3. $g(x) = x + \operatorname{tg}(2x)$

Verifica 7

Na figura está representado a sombreado o quadrilátero $[PBCD]$.



Sabe-se que:

- $[ABCD]$ é um quadrado de lado 2;
- M e N são os pontos médios de $[AB]$ e $[AD]$, respetivamente;
- MN é um arco de circunferência de centro A ;
- o ponto P move-se ao longo desse arco;
- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo MAP .

$$\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

7.1. Mostre que a área do polígono $[PBCD]$ é dada, em função de x , por:

$$A(x) = 4 - \sin x - \cos x$$

7.2. Determine $A(0)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

(continua)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f''	0	-	0	+	0
f			PI		

O gráfico da função f tem a concavidade é voltada para baixo em

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e voltada para cima em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

O ponto de abscissa $\frac{\pi}{2}$ é um ponto de inflexão.

7.2. Determinação das coordenadas do ponto A.

A é o ponto do gráfico de f onde a reta de equação $y = x$ é tangente.

Logo, a abscissa de A terá de verificar a condição $f'(x) = 1$.

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow 1 + 2 \cos(2x) = 1 \wedge x \in [0, \pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \wedge 2x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \vee 2x = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\pi}{4} + 1 + \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{\pi}{4} + 1 + 1 = \frac{\pi}{4} + 2 \end{aligned}$$

Como $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq \frac{\pi}{4}$, a reta de equação $y = x$ não é tangente ao

gráfico de f no ponto de abscissa $\frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= \frac{3\pi}{4} + 1 + \sin\left(2 \times \frac{3\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{3\pi}{4} + 1 - 1 = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Como $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$ e $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1$, a reta de equação $y = x$ é

tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $\frac{3\pi}{4}$.

Logo, A tem de coordenadas $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

Considerando o lado $[OB]$ para base do triângulo $[OAB]$, temos

$\overline{OB} = f(0) = 1$ e a sua altura é igual a $\frac{3\pi}{4}$, abscissa do ponto A.

Área do triângulo $[OAB]$:

$$\frac{1 \times \frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

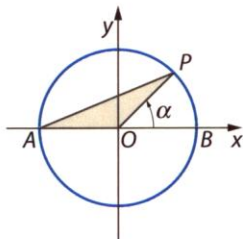
Verifica 7

7.3. Determine o valor de x para o qual a área do polígono $[PBCD]$ é mínima e calcule essa área.

Questões tipo exame

Questões resolvidas

- 8 Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy , o círculo trigonométrico e o triângulo $[OPA]$. Os pontos A e B têm coordenadas $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, respetivamente. P é um ponto da circunferência e α é a amplitude do ângulo BOP , sendo $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[OPA]$, em função de α ?

- (A) $\frac{(1 + \cos \alpha) \times \sin \alpha}{2}$ (B) $\frac{\cos \alpha \times \sin \alpha}{2}$
(C) $\frac{\sin \alpha}{2}$ (D) $\frac{\cos \alpha}{2}$

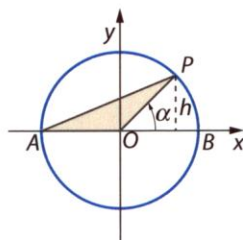
Resolução

$\overline{AO} = 1$

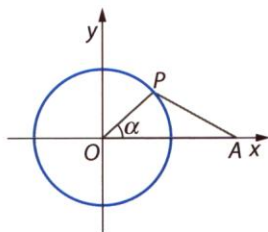
Relativamente à base $[AO]$, a altura do triângulo $[OPA]$ é $h = \sin \alpha$, logo:

$$\text{Área de } [OPA] = \frac{1 \times \sin \alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{2}$$

Resposta: (C)



- 9 Na figura está representado, num referencial o.n. xOy , o círculo trigonométrico e o ponto A de coordenadas $(2, 0)$. Considere que o ponto P se desloca sobre a circunferência. α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP ($\alpha \in [0, 2\pi[$). Qual das expressões seguintes dá o comprimento do segmento de reta $[AP]$?



- (A) $\sqrt{5 - 4 \sin \alpha}$ (B) $\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$
(C) $2 - \cos \alpha + \sin \alpha$ (D) $\sqrt{3 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha}$

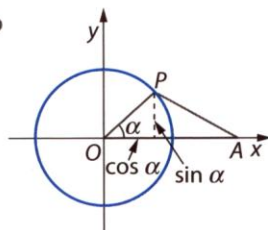
Resolução

Dado que $\overline{OP} = 1$, as coordenadas do ponto P são $(\cos \alpha, \sin \alpha)$.

Como o ponto A tem coordenadas $(2, 0)$, vem:

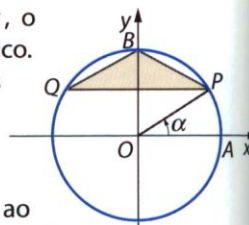
$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{(\cos \alpha - 2)^2 + \sin^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{\cos^2 \alpha - 4 \cos \alpha + 4 + \sin^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 4 - 4 \cos \alpha} = \sqrt{1 + 4 - 4 \cos \alpha} = \\ &= \sqrt{5 - 4 \cos \alpha} \end{aligned}$$

Resposta: (B)



Questões propostas

- 8 Na figura está representado, num referencial o.n. xOy , o círculo trigonométrico. As coordenadas dos pontos A e B são $A(1, 0)$ e $B(0, 1)$. Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco AB , nunca coincidindo com o ponto B . Para cada posição do ponto P , sabe-se que:



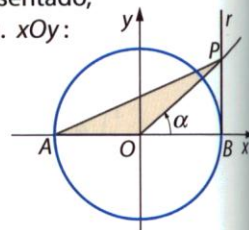
- $[QP]$ é a corda da circunferência paralela ao eixo Ox ;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP .

A área do triângulo $[PQB]$ é igual a:

- (A) $\sin \alpha (1 - \cos \alpha)$
(B) $\frac{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)}{2}$
(C) $\cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha$
(D) $\sin \alpha \cos \alpha$

- 9 Na figura está representado, num referencial o.n. xOy :

- o círculo trigonométrico;
 - os pontos A e B de interseção da circunferência com o eixo Ox ;
 - uma semirreta r , paralela ao eixo Oy , com origem no ponto B ;
 - um ponto P pertencente à semirreta r .
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo BOP .



Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[AOP]$?

- (A) $\frac{\sin(2\alpha)}{2}$
(B) $\frac{\text{tg}(2\alpha)}{2}$
(C) $\frac{\text{tg } \alpha}{2}$
(D) $\text{tg } \alpha$

Questões resolvidas

- 10** Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ de contradomínio $[1, 2]$.

Qual dos seguintes poderá ser o valor de:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \times \sin(3x)}{x}$$

- (A) 0 (B) 2 (C) 5 (D) 7

Resolução

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \times \sin(3x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} =$$

$$= f(0) \times 3 \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} =$$

Como f é uma função contínua em $\mathbb{R}$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

$$= f(0) \times 3 \times 1 = 3f(0)$$

Dado que o contradomínio de f é $[1, 2]$, temos que
 $1 \leq f(0) \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq 3f(0) \leq 6$.

Logo, o único valor possível para o limite apresentado é 5.

Resposta: (C)

- 11** Considere a função f , de domínio $[0, \pi]$, definida por $f(x) = \cos x$.

Existe um número real b para o qual uma das seguintes equações define uma reta tangente ao gráfico de f .

Identifique-a.

(A) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + b$

(B) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + b$

(C) $y = x + b$

(D) $y = \sqrt{2}x + b$

Resolução

$$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$$

$$0 \leq x \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 \leq -\sin x \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 \leq f'(x) \leq 0$$

Portanto, se $y = mx + b$ é uma equação da reta tangente ao gráfico de f num ponto de abscissa a , virá $m = f'(a)$, pelo que $-1 \leq m \leq 0$.

Apenas na opção (A) se apresenta uma reta com declive no intervalo indicado.

Resposta: (A)

Questões propostas

- 10** Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$.

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (x_n) ?

(A) $\frac{1}{n}$ (B) $\pi - \frac{1}{n}$

(C) $1 + \frac{1}{n}$ (D) $\frac{\pi}{n}$

- 11** Considere a função f , de domínio $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, definida por

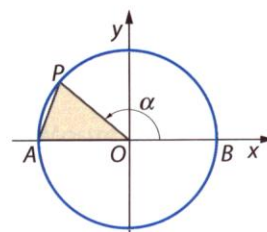
$$f(x) = \operatorname{tg}(2x) - x.$$

Qual é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $\frac{\pi}{8}$?

(A) 3 (B) 1

(C) $2\sqrt{2} - 1$ (D) $\sqrt{2} - 1$

- 12** Na figura está representado, num referencial o.n. xOy , o círculo trigonométrico.



Os pontos A e B têm coordenadas $(-1, 0)$ e $(0, 1)$, respetivamente.

P é o ponto da circunferência tal que a amplitude do ângulo BOP, em radianos, é igual a α .

Qual é o perímetro do triângulo [AOP] se $\alpha = \frac{2\pi}{3}$?

(A) 3

(B) $2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

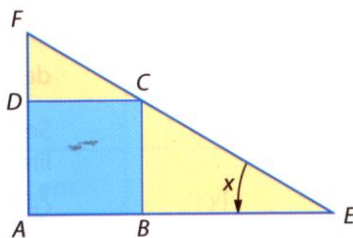
(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Questões resolvidas

12 Na figura:

- $[ABCD]$ é um quadrado de lado 1;
- $[AEF]$ é um triângulo retângulo em que:
 - o ponto B pertence ao lado $[AE]$;
 - o ponto D pertence ao lado $[AF]$;
 - o ponto C pertence ao lado $[EF]$;
- x designa a amplitude do ângulo FEA ($x \in]0, \frac{\pi}{2}[$).



12.1. Mostre que a área do triângulo $[AEF]$ é dada, em função de x , por:

$$A(x) = 1 + \frac{1}{\sin(2x)}$$

12.2. Determine o valor de x para o qual a área do triângulo $[AEF]$ é mínima.

Resolução

$$\frac{BC}{BE} = \tan x \Leftrightarrow \frac{1}{BE} = \tan x \Leftrightarrow BE = \frac{1}{\tan x}$$

$$\widehat{FCD} = \widehat{FEA} = x$$

$$\frac{FD}{DC} = \tan x \Leftrightarrow \frac{FD}{1} = \tan x \Leftrightarrow FD = \tan x$$

$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} = 1 + \frac{1}{\tan x}; \quad \overline{AF} = \overline{AD} + \overline{DF} = 1 + \tan x$$

$$\text{Área do triângulo } [AEF] = \frac{\overline{AE} \times \overline{AF}}{2} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{\tan x}\right)(1 + \tan x)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \tan x + \frac{1}{\tan x} + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 \sin x \cos x} = 1 + \frac{1}{\sin(2x)}$$

$$\text{Portanto, } A(x) = 1 + \frac{1}{\sin(2x)}.$$

$$\mathbf{12.2.} \quad A'(x) = \left(1 + \frac{1}{\sin(2x)}\right)' = \frac{-(\sin(2x))'}{\sin^2(2x)} = \frac{-2 \cos(2x)}{\sin^2(2x)}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2 \cos(2x)}{\sin^2(2x)} = 0 \Leftrightarrow$$

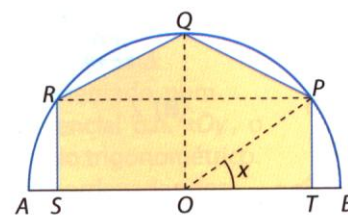
$$\Leftrightarrow -2 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0$$

Como $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $2x \in]0, \pi[$, pelo que:

$$\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Questões propostas

13 Na figura está representada uma semicircunferência de centro O e raio 1.



$[AB]$ é o diâmetro da semicircunferência e $[OQ]$ é um raio perpendicular a $[AB]$.

Considere que o ponto P se desloca sobre o arco BQ .

Os pontos R , S e T acompanham o movimento do ponto P de tal forma que:

- $[RP]$ é uma corda que permanece paralela a $[AB]$;
- S e T são os pontos de $[AB]$ tais que $[PRST]$ é um retângulo;
- para cada posição de P , x é a amplitude, em radianos, do ângulo

$$BOP \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right).$$

13.1. Mostre que a área do pentágono $[PQRST]$ é dada, em função de x , por:

$$a(x) = \frac{\sin(2x)}{2} + \cos x$$

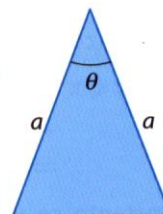
13.2. Determine o valor de x para o qual a área do pentágono $[PQRST]$ é máxima.

13.3. Determine a área do pentágono $[PQRST]$, sabendo que o triângulo $[PQR]$ e o retângulo $[PRST]$ têm áreas iguais.

14 Prove que a área de um triângulo isósceles é dada por:

$$A = \frac{1}{2} a^2 \sin \theta$$

sendo a a medida de cada um dos dois lados iguais e θ a amplitude, em radianos, do ângulo formado por esses lados.



Questões resolvidas

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
A'		-	0	+	
A		$\searrow$		$\nearrow$	

Mínimo

A área do triângulo é mínima para $x = \frac{\pi}{4}$.

13 Na figura está representado, num referencial o.n. xOy , o círculo trigonométrico.

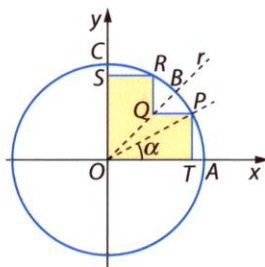
A e C são os pontos de interseção da circunferência com os semieixos positivos Ox e Oy , respetivamente.

O ponto B é o ponto da circunferência que pertence ao primeiro quadrante e à reta r , bissetriz dos quadrantes ímpares.

Considere que o ponto P se desloca ao longo do arco AB , nunca coincidindo com o ponto A nem com o ponto B .

Para cada posição do ponto P , sabe-se que:

- o ponto Q pertence à reta r e tem ordenada igual à de P ;
- o ponto R pertence ao arco BC e tem abcissa igual à de Q ;
- o ponto S pertence ao eixo Oy e $SR \perp OS$;
- o ponto T pertence ao eixo Ox e $PT \perp OT$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP ($\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$).



13.1. Mostre que a área do hexágono $[PQRST]$ é dada, em função de α , por $f(\alpha) = \sin(2\alpha) - \sin^2 \alpha$.

13.2. Mostre que a área do hexágono é máxima para o valor de α tal que $\tan(2\alpha) = 2$.

13.3. Mostre que a área máxima do hexágono é $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

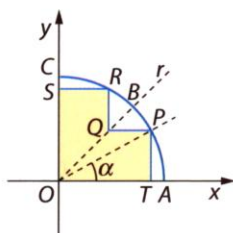
Resolução

13.1. Área do triângulo $[OTP]$:

$$\overline{TP} = \sin \alpha; \overline{OT} = \cos \alpha$$

$$A_1 = A_{[OTP]} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2}$$

Área do triângulo $[OPQ]$:

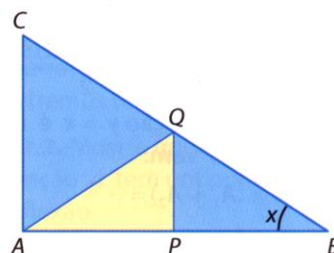


A ordenada de Q é $\cos \alpha$ por ser igual à de P .

A abcissa de Q é igual à ordenada porque o ponto pertence à reta de equação $y = x$.

Questões propostas

15 Na figura:



- o triângulo $[ABC]$ é retângulo em A ;
- o triângulo $[APQ]$ é retângulo em P ;
- $\overline{AQ} = 2$ e $\overline{PQ} = 1$
- $P \in [AB]$ e $Q \in [BC]$
- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo CBA ($x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$).

15.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de x , por:

$$f(x) = \frac{1}{2 \tan x} + \frac{3 \tan x}{2} + \sqrt{3}$$

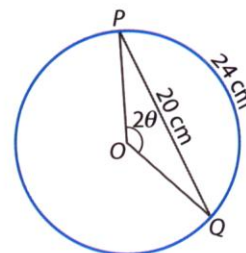
15.2. Mostre que:

$$f'(x) = \frac{4 \sin^2 x - 1}{2 \sin^2 x \cos^2 x}$$

15.3. Mostre que se a área do triângulo $[ABC]$ é mínima, então $\overline{BC} = 4$.

16 Na figura está representada uma circunferência de centro O . Tal como a figura sugere:

- $[PQ]$ é uma corda da circunferência com 20 cm de comprimento;
- o arco QP tem 24 cm de comprimento;
- o ângulo QOP tem uma amplitude de 2θ radianos.



Mostre que:

$$\mathbf{16.1.} \overline{OQ} = \frac{12}{\theta} \quad \mathbf{16.2.} \sin \theta = \frac{5\theta}{6}$$

Questões resolvidas

Logo,

Base do triângulo $[OPQ]$: $\overline{QP} = \cos \alpha - \sin \alpha$

Altura do triângulo $[OPQ]$: $\overline{TP} = \sin \alpha$

$$A_2 = A_{[OPQ]} = \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha) \sin \alpha}{2}$$

Como a reta de equação $y = x$ é um eixo de simetria do hexágono $[PQRSOT]$, vem:

$$A_{[PQRSOT]} = 2 \times (A_1 + A_2) =$$

$$= 2 \times \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2} + \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha) \sin \alpha}{2} \right) =$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha + (\cos \alpha - \sin \alpha) \sin \alpha =$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha =$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha = \sin(2\alpha) - \sin^2 \alpha$$

Portanto, $f(\alpha) = \sin(2\alpha) - \sin^2 \alpha$.

$$13.2. f'(\alpha) = 2 \cos(2\alpha) - 2 \sin \alpha (\sin \alpha)' =$$

$$= 2 \cos(2\alpha) - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cos(2\alpha) - \sin(2\alpha)$$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos(2\alpha) - \sin(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{\cos(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} - \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - \tan(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \tan(2\alpha) = 2$$

Como
 $2\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$
 $\cos(2\alpha) \neq 0$

Logo, f' tem um zero no ponto a tal que $\tan(2a) = 2$.

α	0		a		$\frac{\pi}{4}$
f'		+	0	-	
f					

Máximo

Portanto, a área do hexágono é máxima para o valor de α tal que $\tan(2\alpha) = 2$.

13.3. Trata-se de calcular $f(\alpha) = \sin(2\alpha) - \sin^2 \alpha$, sabendo que $\tan(2a) = 2$.

$$1 + 4 = \frac{1}{\cos^2(2\alpha)} \Leftrightarrow \cos^2(2\alpha) = \frac{1}{5} \quad \left| \begin{array}{l} 1 + \tan^2(2\alpha) = \frac{1}{\cos^2(2\alpha)} \end{array} \right.$$

$$\bullet \cos^2(2\alpha) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 1 - \sin^2(2\alpha) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin^2(2\alpha) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{\sin(2\alpha) > 0}{\Leftrightarrow} \sin(2\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sin(2\alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\bullet \cos^2(2\alpha) = \frac{1}{5} \stackrel{\cos(2\alpha) > 0}{\Leftrightarrow} \cos(2\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin^2 \alpha = -1 + \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}$$

$$f(\alpha) = \sin(2\alpha) - \sin^2 \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10} =$$

$$= \frac{4\sqrt{5} - 5 + \sqrt{5}}{10} = \frac{5\sqrt{5} - 5}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Questões propostas

- 17 Considere a função f , de domínio $[0, 2\pi]$, definida por:
- $$f(x) = 4 \sin x + \cos(2x)$$

17.1. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

17.2. Determine uma equação da reta t , tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa π .

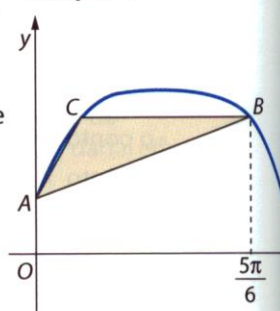
17.3. Mostre que existe uma reta, paralela à reta t , que é tangente ao gráfico da função f num ponto de abscissa pertencente ao intervalo

$$\left] \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3} \right[.$$

17.4. Estude a função f quanto ao sentido da concavidade do gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

17.5. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy , uma parte do gráfico da função f .

Os pontos A , B e C pertencem ao gráfico de f . Sabe-se que B e C têm a mesma ordenada, A pertence ao eixo Oy e B tem ordenada $\frac{5\pi}{6}$.



Determine a área do triângulo.

- 18 Seja g a função de domínio $[0, 4\pi]$, definida por:

$$g(x) = 1 + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

18.1. Sejam r e s as retas tangentes ao gráfico de g nos pontos de abscissas a e b , respetivamente.

Prove que, se $a + b = 2\pi$, então as retas r e s são paralelas.

18.2. Considere a função f , de domínio $[0, 4\pi] \setminus \{2\pi\}$, definida por $f(x) = \frac{1 - \cos x}{g(x)}$.

Estude esta função quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

Questões resolvidas

- 14** Considere a função g , de domínio $[0, \pi]$, definida por $g(x) = x + \cos(2x)$.

14.1. Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

14.2. Em alguns pontos do gráfico de f , a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares. Determine as abscissas desses pontos.

14.3. Estude a função g quanto ao sentido da concavidade do gráfico e quanto à existência dos pontos de inflexão.

Resolução

$$\begin{aligned}
 \mathbf{14.1.} \quad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\pi}{2} + h\right) + \cos\left[2\left(\frac{\pi}{2} + h\right)\right] - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} + h + \cos(\pi + 2h) - \frac{\pi}{2} + 1}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - \cos(2h) + 1}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2h)}{h} = \\
 &= 1 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(2h))(1 + \cos(2h))}{h(1 + \cos(2h))} = \\
 &= 1 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(2h)}{h(1 + \cos(2h))} = \\
 &= 1 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2h)}{h(1 + \cos(2h))} = \\
 &= 1 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(2h)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(2h)}{1 + \cos(2h)} = \\
 &= 1 + 2 \lim_{2h \rightarrow 0} \frac{\sin(2h)}{2h} \times \frac{0}{2} = 1 + 2 \times 1 \times 0 = 1
 \end{aligned}$$

14.2. A bissetriz dos quadrantes ímpares tem declive 1.

$$g'(x) = x' + (\cos(2x))' = 1 - 2 \sin(2x)$$

$$g'(x) = 1 \Leftrightarrow 1 - 2 \sin(2x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0$$

Se $x \in [0, \pi]$, então $2x \in [0, 2\pi]$.

$$\sin(2x) = 0 \wedge 2x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \vee 2x = \pi \vee 2x = 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \pi$$

Questões propostas

- 19** Seja a função g , de domínio $[0, \pi]$, definida por $g(x) = e^{-x} \sin x$.

19.1. Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

19.2. Mostre que o gráfico da função g tem um ponto de inflexão.

19.3. Recorrendo à calculadora gráfica, determine um valor aproximado às centésimas da área do triângulo $[ABC]$, em que:

- A é o ponto do gráfico de f , de abscissa a , em que a reta tangente ao gráfico nesse ponto tem declive igual a a ;
- B é um ponto do eixo Ox ;
- C é o ponto do gráfico de f com ordenada igual à do ponto A .

Na sua resposta deve:

- apresentar a justificação dos processos que levaram à determinação das coordenadas dos pontos;
- reproduzir, num referencial, o gráfico das funções que visualizar na calculadora, devidamente identificados, bem como as coordenadas dos pontos relevantes para determinar o resultado pedido;
- utilizar três casas decimais nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos.

- 20** Considere as funções f e g , definidas em $[0, +\infty[$ por:
 $f(x) = 2x + \cos x$
 $g(x) = \sin x + x^2$

20.1. Mostre que f é estritamente crescente.

20.2. Justifique que $f(x) \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

20.3. Mostre que $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e conclua que a função g também é estritamente crescente.

20.4. Justifique que o contradomínio de g é o intervalo $[0, +\infty[$.

Questões resolvidas

14.3. $g''(x) = (1 - 2 \sin(2x))' = -4 \cos(2x)$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -4 \cos(2x) = 0 \wedge x \in [0, \pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \wedge 2x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \vee 2x = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4}$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
g''		-	0	+	0	-	
g	0						

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ e voltada para cima em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Os pontos de abscissas $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ são pontos de inflexão.

- 15** Considere as funções f e g definidas em $[0, \pi]$, por $f(x) = x + \sin x$ e $g(x) = 1 + e^{x-1}$.

Mostre que a reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa 1 também é tangente a gráfico de f .

Resolução

$$f'(x) = 1 + \cos x \text{ e } g'(x) = e^{x-1}$$

Equação da reta t :

Ponto de tangência:

$$(1, 2) \text{ porque } g(1) = 1 + e^0 = 2$$

Declive:

$$m = f'(1) = e^{1-1} = 1$$

$$t: y - 2 = 1 \times (x - 1) \Leftrightarrow y = x + 1$$

Vamos provar que a reta t também é tangente ao gráfico de f .

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow 1 + \cos x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad x \in [0, \pi]$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ e o ponto } \left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \text{ pertence à reta } t,$$

$$\text{de equação } y = x + 1, \text{ porque } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1.$$

Portanto a reta t é tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa 1 e é tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa $\frac{\pi}{2}$.

Questões propostas

- 21** Seja f a função, de domínio $[0, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \cos(\pi x) & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ (x+2) \ln x - x + 4 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

21.1. Mostre que f é derivável no ponto 1.

21.2. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

21.3. Mostre que f é estritamente crescente no intervalo $[0, 1]$.

21.4. Resolva a equação $f(x) = 6$.

21.5. Estude a função f quanto ao sentido da concavidade do gráfico no intervalo $]1, +\infty[$.

- 22** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por: $f(x) = a(\sin x - \cos x)^2$ (a é uma constante real não nula.)

22.1. Sabendo que:

$$f(x) = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

determine o valor de a .

22.2. Mostre que:

$$f(x) = \frac{1 - \sin(2x)}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

22.3. Sabendo que, para um certo número real θ , se tem $\tan \theta = -\frac{1}{2}$, com $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, determine $f(\theta)$.

- 23** De uma função f , de domínio $[0, \pi]$, sabe-se que:

$$f'(x) = 2(x + \sin x) + \sin(2x)$$

23.1. Estude a função f quanto ao sentido da concavidade e quanto à existência de pontos de inflexão.

23.2. Sabendo que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

$$\text{determine } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{2x - \pi}.$$

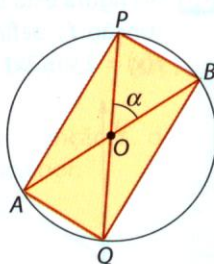
Questões para praticar

Itens de seleção

- 24** Na figura está representado um círculo de centro O e raio 1

Sabe-se que:

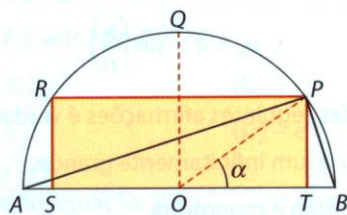
- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência;
- o ponto P move-se sobre o arco BA ;
- para cada posição do ponto P , $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência e α é a amplitude, em radianos, do ângulo BOP ($\alpha \in]0, \pi[$).



A área do quadrilátero $[AQBP]$ é igual a:

- (A) $\sin \alpha$ (B) $2 \sin \alpha$
(C) $2 \cos \alpha$ (D) $\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$

- 25** Na figura está representada uma semicircunferência de centro O e raio 1.



$[AB]$ é o diâmetro da semicircunferência e $[OQ]$ é um raio perpendicular a $[AB]$.

Considere que o ponto P se desloca sobre o arco BQ .

Os pontos R , S e T acompanham o movimento do ponto P de tal forma que:

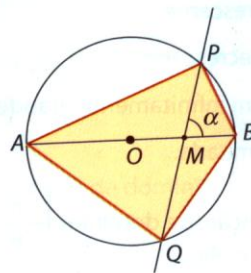
- $[RP]$ é uma corda que permanece paralela a $[AB]$;
- S e T são os pontos de $[AB]$ tais que $[PRST]$ é um retângulo;
- para cada posição de P , α é a amplitude, em radianos, do ângulo BOP ($\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$).

Pretende-se determinar o valor de α para o qual a área do triângulo $[ABP]$ é igual à área do retângulo $[PRST]$.

Qual das equações seguintes traduz este problema?

- (A) $\sin \alpha = \sin(2\alpha)$ (B) $\sin \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$
(C) $\frac{\sin \alpha}{2} = \sin(2\alpha)$ (D) $\frac{\sin \alpha}{2} = 2 \sin(2\alpha)$

- 26** Na figura está representado um círculo de centro O .

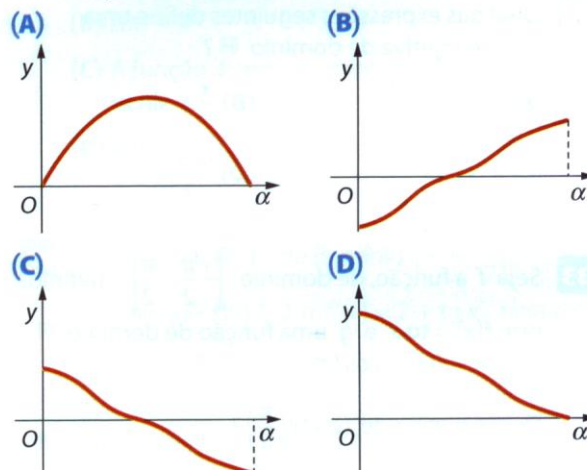


Sabe-se que:

- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência;
- M é o ponto médio de $[OB]$;
- o ponto P move-se sobre o arco BA ;
- para cada posição do ponto P :
 - a reta PM intersecta a circunferência nos pontos P e Q ;
 - α é a amplitude, em radianos, do ângulo BMP ($\alpha \in]0, \pi[$).

Seja f a função que, a cada valor de α pertencente ao intervalo $]0, \pi[$, associa a área, $f(\alpha)$, do quadrilátero $[AQBP]$.

Qual dos seguintes pode ser o gráfico de f' , função derivada de f ?



- 27** Indique a expressão que define uma função ímpar de domínio $\mathbb{R}$.

- (A) $x - \sin(x^2)$ (B) $x^3 + \sin x$
(C) $x^2 + \cos x$ (D) $1 + e^x$

- 28** Uma função f tem domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}_0^+$. Qual das seguintes pode ser a expressão analítica da função f ?

- (A) $e^{\sin x}$ (B) $\ln(x^2 + 1)$
(C) $\sin(e^x)$ (D) $\ln x$

- 29** Considere a sucessão de termo geral:

$$u_n = 1 + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira.

- (A) (u_n) é crescente.
 (B) (u_n) é decrescente.
 (C) (u_n) é um infinitamente grande.
 (D) (u_n) é limitada.

- 30** Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$, definida por $f(x) = \operatorname{tg}(4x)$.

Qual é o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa $-\frac{\pi}{16}$?

- (A) 4
 (B) -4
 (C) 8
 (D) 2

- 31** Acerca de uma função f sabe-se que a derivada, f' , é uma função ímpar de domínio $\mathbb{R}$.

Qual das seguintes expressões pode definir a função f ?

- (A) $\frac{1}{x^2}$
 (B) x^3
 (C) $\sin x$
 (D) $\cos x$

- 32** Qual das expressões seguintes define uma função injetiva de domínio $\mathbb{R}$?

- (A) $x + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
 (B) $\frac{x}{2} + \sin x$
 (C) $x^2 \cos x$
 (D) $\frac{\cos x}{x}$

- 33** Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = \operatorname{tg} x$ e g uma função de domínio $\mathbb{R}$ tal que $g'(x) = \cos(\pi x)$.

Qual é o valor de $(g \circ f)\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

- (A) -2
 (B) $\sqrt{2}$
 (C) 0
 (D) 2

- 34** Considere a função f definida em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ por $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$.

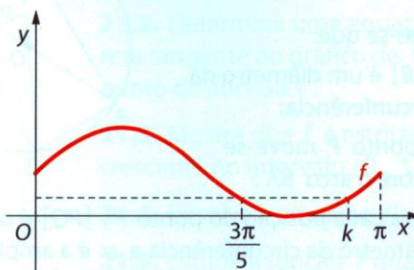
Qual é o valor de $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

- (A) e
 (B) $\sqrt{2}e$
 (C) $\frac{2}{e}$
 (D) $2e$

- 35** Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - 1}{1 - \cos x}$?

- (A) $-\infty$
 (B) $+\infty$
 (C) 0
 (D) 1

- 36** Na figura está uma representação gráfica da função f , definida no intervalo $[0, \pi]$ por $f(x) = 2 \sin(2x) + 2$.



Sabendo que $f(k) = f\left(\frac{3\pi}{5}\right)$, qual é o valor de k ?

- (A) $\frac{7\pi}{10}$
 (B) $\frac{4\pi}{5}$
 (C) $\frac{17\pi}{20}$
 (D) $\frac{9\pi}{10}$

- 37** Considere a sucessão de termo geral:

$$u_n = n \times \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) (u_n) é um infinitamente grande.
 (B) (u_n) não é monótona.
 (C) (u_n) é convergente.
 (D) $u_3 > \pi$

- 38** Uma função real de variável real f é tal que $f'(-x) = f'(x)$ para todo o número real x .

Indique qual das expressões seguintes pode definir a função f .

- (A) $e^{\cos x}$
 (B) $\cos x$
 (C) $e^{\sin x}$
 (D) $\sin x$

- 39** Para um certo valor de k é contínua a função m definida por:

$$m(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x} & \text{se } x < 0 \\ \log_3(x+k) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) 1
 (B) 27
 (C) 9
 (D) 3

- 40 Para um certo número real k a função g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x + \sin x} & \text{se } x < 0 \\ \ln \sqrt{x+k} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}$.

Qual é o valor de k ?

- (A) e^2 (B) e^8 (C) $\sqrt{e}$ (D) 1

- 41 Para um certo número real k a função f , de domínio $]-1, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin(2x)} & \text{se } -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}(x + e^k) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

é contínua em $]-1, +\infty[$.

Qual é o valor de k ?

- (A) 2 (B) $\ln 2$
(C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\ln 2$

- 42 Considere a função f definida em $]0, +\infty[$ por $f(x) = \sin(\ln x)$.

Qual é o valor de $f'(e^\pi)$?

- (A) -1 (B) 0
(C) $-e^{-\pi}$ (D) $-e^\pi$

- 43 A reta de equação $y = x + 2$ é tangente ao gráfico de uma certa função f , de domínio $\mathbb{R}$, no ponto de abscissa nula.

Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = e^x \times f(\sin x)$.

Qual é o valor de $g'(0)$?

- (A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) 3

- 44 Considere a função g definida em $[0, 2\pi]$ por $g(x) = \cos(2x)$.

Sabe-se que as retas r e s são estritamente paralelas e tangentes ao gráfico de g .

A equação $y = -2x + \frac{\pi}{2}$ define a reta r .

Qual é a ordenada do ponto de interseção da reta s com o eixo Oy ?

- (A) $\frac{5\pi}{4}$ (B) $\frac{3\pi}{2}$
(C) $\frac{5\pi}{2}$ (D) $\frac{7\pi}{2}$

- 45 De uma função f sabe-se que $f(x) + f''(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Qual das seguintes **não** pode ser a expressão analítica da função f ?

- (A) $\cos x$
(B) $\sin x$
(C) $\sin x - \cos x$
(D) $\cos(2x)$

- 46 Seja a função g , de domínio $[0, 2\pi]$, definida por $g(x) = \sin x - 2x$.

Qual é o contradomínio de f ?

- (A) $[-4\pi, 0]$
(B) $[0, 4\pi]$
(C) $[0, 2\pi]$
(D) $[-2\pi, 0]$

- 47 Para determinado número real k , seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = k \cos(kx)$$

Sabe-se que $f'(\pi) = 0$ e $f''(\pi) < 0$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em $[0, 2\pi]$.
(B) $f(\pi) < 0$
(C) A função f tem um mínimo relativo para $x = \pi$.
(D) A função f tem um máximo relativo para $x = \pi$.

- 48 De uma função f , de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, sabe-se que $f(0) = 0$ e $f'(x) = 2 + \operatorname{tg} x$, para todo $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $+\infty$

- 49 Seja f a função de domínio $]-\pi, \pi[$ definida por:

$$f(x) = x + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Considere a sucessão de números reais (x_n) tal

$$\text{que } x_n = n \times \ln\left(1 + \frac{\pi}{n}\right).$$

Qual é o valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$?

- (A) 0 (B) 1 (C) $-\infty$ (D) $+\infty$

Itens de construção

- 50** Considere a função f , de domínio $[0, \pi]$, definida por $f(x) = \frac{x + \sin(2x)}{2}$.

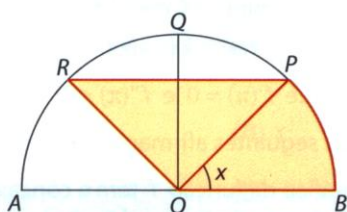
50.1. Determine $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

50.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

50.3. Estude a função f quanto ao sentido da concavidade e quanto à existência de pontos de inflexão do gráfico.

50.4. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $\frac{\pi}{2}$.

50.5. Na figura está representada uma semicircunferência de centro no ponto O e diâmetro $[AB]$ de comprimento igual a 2.



$[OQ]$ é um raio perpendicular a $[AB]$.

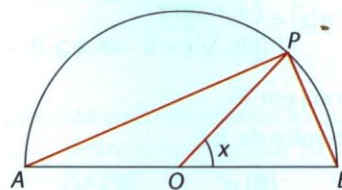
Considere que o ponto P se desloca sobre o arco BQ .

O ponto R acompanha o movimento do ponto P sobre o arco QA de tal forma que a corda $[RP]$ permanece paralela a $[AB]$.

Para cada posição do ponto P , seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BOP ($x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

- a) Mostre que a área da região colorida é dada, em função de x , pela restrição da função f ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- b) Considere o referencial xOy em que as semirretas $\vec{OB}$ e $\vec{OQ}$ são os semieixos positivos Ox e Oy , respetivamente. Nesse referencial, determine as coordenadas do ponto P , sabendo que a região colorida tem área máxima.

- 51** Um ponto P desloca-se sobre a semicircunferência de centro O e diâmetro $[AB]$.



Seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BOP ($x \in]0, \pi[$).

Sabe-se que $\overline{AB} = 2$.

51.1. Mostre que o comprimento do segmento de reta $[AP]$ é dado, em função de x , por:

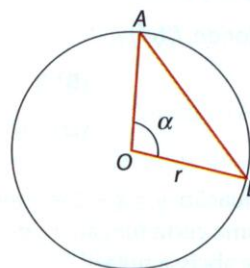
$$f(x) = 2 \cos \frac{x}{2}$$

51.2. Mostre que o comprimento do segmento de reta $[PB]$ é dado, em função de x , por:

$$g(x) = 2 \sin \frac{x}{2}$$

51.3. Mostre que o perímetro do triângulo $[ABP]$ é máximo quando a área é máxima.

- 52** Na figura está representado um círculo de centro O e raio r .



A e B são dois pontos da circunferência tais que $\overline{AB} < 2r$.

Seja α a amplitude em radianos do ângulo BOA ($0 < \alpha < \pi$).

Sabe-se que a área do triângulo $[OBA]$ é igual a metade da área do setor circular BOA .

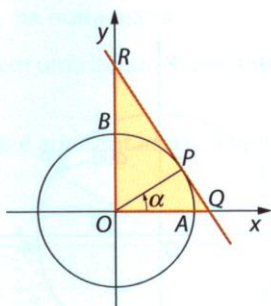
Mostre que $\sin \alpha = \frac{\alpha}{2}$.

- 53** O ecrã de uma sala de cinema tem 9 m de altura e está colocado num plano perpendicular ao plano onde se encontram os espectadores, 3 m acima da linha dos seus olhos.



A que distância do plano do ecrã é máximo o ângulo de visibilidade?

- 54** Na figura está representado, num referencial o.n. xOy , o círculo trigonométrico.



Os pontos A e B são os pontos de interseção da circunferência com os semieixos positivos Ox e Oy , respetivamente.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco AB , nunca coincidindo com o ponto A nem com o ponto B .

Para cada posição do ponto P , sabe-se que:

- a reta r é tangente à circunferência no ponto P ;
- o ponto Q é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox ;
- o ponto R é o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy ;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP ($\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$).

Considere a função f , de domínio $]0, \frac{\pi}{2}[$, definida por $f(x) = \frac{1}{\sin(2x)}$.

54.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do gráfico.

54.2. Mostre que a área do triângulo $[OQR]$ é dada por $f(\alpha)$.

54.3. Determine o valor de α para o qual a área do triângulo $[OQR]$ é mínima.

54.4. Determine o perímetro do triângulo $[OQR]$ de área mínima.

54.5. Para um certo valor de θ pertencente ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$ sabe-se que:

$$4 \operatorname{tg} \theta - \frac{3}{\operatorname{tg}(\theta - \pi)} = -1$$

Determine $f(\theta)$.

54.6. Determine a equação reduzida da reta r quando a abscissa de P é igual a $\frac{3}{5}$.

- 55** Considere as funções f e g , de domínio $[0, \pi]$, definidas por:

$$f(x) = x + \cos x$$

$$g(x) = \sin x$$

55.1. Determine o contradomínio da função f começando por fazer o seu estudo quanto à monotonia e quanto à existência de extremos.

55.2. Determine o contradomínio de g e conclua que $g(x) < f(x)$, qualquer que seja $x \in [0, \pi]$.

55.3. Mostre que:

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

qualquer que seja o número real x .

55.4. Para determinado número real k seja h a função, de domínio $[0, \pi]$, definida por $h(x) = g(x) + k$.

Determine o valor de k , sabendo que os gráficos das funções f e h se intersectam num único ponto.

- 56** Considere as funções f e g , definidas em $\mathbb{R}^+$ por:

$$f(x) = 2x + \cos x$$

$$g(x) = \ln x$$

56.1. Mostre que existe $a \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que as

retas tangentes aos gráficos de f e g , nos pontos de abscissa a , são paralelas.

Sugestão: Considere a função h , definida em $\mathbb{R}^+$ por $h(x) = f'(x) - g'(x)$.

56.2. Tendo em conta o resultado da alínea anterior, justifique que existe um número real k tal que os gráficos das funções f e i , sendo i definida em $\mathbb{R}^+$ por $i(x) = g(x) + k$, têm uma reta tangente comum e, recorrendo à calculadora gráfica, determine o valor de k .

Na sua resposta deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico das funções que visualizar na calculadora devidamente identificados, bem como as coordenadas dos pontos relevantes para determinar o resultado pedido;
- utilizar pelo menos duas casas decimais nos cálculos intermédios;
- apresentar o resultado pedido com aproximação às décimas.

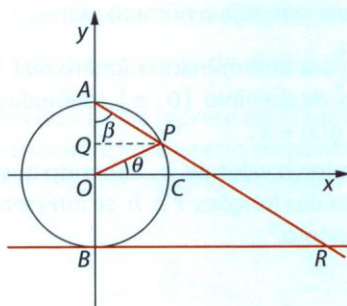
- 57** Considere a função f de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = \frac{2 \cos x}{1 - \sin x}$.

57.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do gráfico.

57.2. Mostre que a função f é estritamente crescente.

57.3. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa nula.

57.4. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy , o círculo trigonométrico.



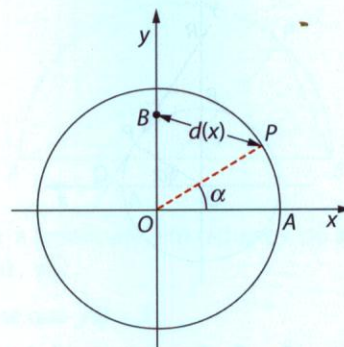
Sabe-se que:

- os pontos A , B e C têm coordenadas $(0, 1)$, $(0, -1)$ e $(1, 0)$, respetivamente;
- o ponto P move-se sobre o arco BA ;
- a reta AP intersesta a reta de equação $y = -1$ no ponto R ;
- o ponto Q pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada que o ponto P ;
- para cada posição do ponto P , θ e β são as amplitudes, em radianos, dos ângulos COP e OAP , respetivamente, sendo:

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ e } \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

- a)** Mostre que o comprimento do segmento $[BR]$, em função de θ , é dado por $f(\theta)$, para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.
Sugestão: Comece por justificar que os triângulos $[QPA]$ e $[BRA]$ são semelhantes.
- b)** Mostre que $\beta = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$.
- c)** Mostre que $\overline{BR} = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.
- d)** Determine o valor de θ para o qual se tem $\overline{BR} = 2\sqrt{3}$.

- 58** Na figura está representado, num referencial o.n. xOy , a circunferência definida pela equação $x^2 + y^2 = 16$.



O ponto A é o ponto de interseção da circunferência com os semieixos positivos Ox .

O ponto B tem coordenadas $(0, 3)$.

Considere que o ponto P , partindo do ponto A , se desloca sobre a circunferência, dando uma volta completa no sentido positivo.

Para cada posição do ponto P , α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP ($\alpha \in [0, 2\pi[$).

Seja d a função que, a cada valor de α , associa a distância, $d(\alpha)$, do ponto P ao ponto B .

58.1. Mostre que $d(\alpha) = \sqrt{25 - 24 \sin \alpha}$.

58.2. Estude a função d quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos. Indique as coordenadas de P nas posições correspondentes aos extremos.

58.3. Determine $\overline{BP}$ sabendo que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $5 \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{5}$.

- 59** Considere a função f , de domínio $[-\pi, \pi]$, definida por $f(x) = \sin x - x \cos x$.

59.1. Mostre que f é uma função ímpar.

59.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

59.3. Indique, justificando, o contradomínio da função f .

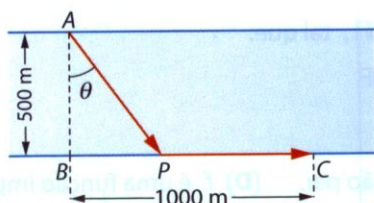
59.4. Considere a função h , definida em $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ por $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.

- a)** Mostre que o gráfico da função h não tem assíntotas.
- b)** Defina, caso exista, um prolongamento da função h a $[-\pi, \pi]$ que seja uma função contínua.

- 60** Um atleta encontra-se na margem de um canal (no ponto A) destinado à prática de desportos náuticos e pretende deslocar-se para um ponto C , na outra margem.

O canal tem uma largura constante de 500 metros.

A situação é apresentada no esquema da figura seguinte.



- B é o ponto da margem oposta a A , sendo $AB \perp BC$.
- O ponto P está entre B e C .
- A distância entre B e C é de 1000 metros.

O atleta vai deslocar-se de barco, em linha reta, a uma velocidade de 4 km/h, do ponto A até ao ponto P .

Seguidamente, vai caminhar até ao ponto C , a uma velocidade de 8 km/h.

A amplitude, em radianos, do ângulo BAP é designada por θ .

Seja T a função que, a cada valor de θ , associa o tempo, $T(\theta)$, em horas, gasto pelo atleta na deslocação de A até C .

60.1. Mostre que:

$$T(\theta) = \frac{2 + 2 \cos \theta - \sin \theta}{16 \cos \theta}$$

60.2. Qual o tempo mínimo que o atleta pode gastar no trajeto?

Apresente o resultado em minutos com aproximação às unidades.

60.3. Se o atleta fez o percurso no tempo mínimo, que distância percorreu a pé?

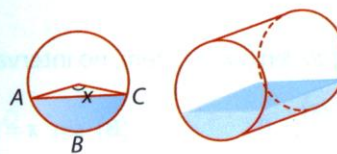
Apresente o resultado em metros com aproximação às unidades.

- 61** Para cada número real a considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = (\cos(ax))^2$.

Sejam f' e f'' a primeira e a segunda derivadas da função f , respetivamente.

Mostre que $f'(x) \times f''(x) = a^3 \sin(4ax)$, para qualquer número real x .

- 62** A figura representa o esquema de um depósito de forma cilíndrica destinado a colocar água no frigorífico.



O cilindro tem 20 cm de altura e 10 cm de raio da base.

O nível de líquido no depósito é representado pelo segmento $[AC]$.

A amplitude, em radianos, do arco ABC é designada por x .

Seja V a função que, a cada valor de x , associa o volume, $V(x)$, em litros, da água existente no depósito.

62.1. Mostre que $V(x) = x - \sin x$.

62.2. Determine, em litros com aproximação às centésimas, o volume de água existente no depósito, se a superfície do líquido tiver a forma de um retângulo com 10 cm de largura.

- 63** Considere a função g , de domínio $]-\pi, \pi[$, definida por $g(x) = \cos x + (\sin x)^2$.

63.1. Mostre que a função derivada de uma função par é uma função ímpar.

63.2. Mostre que se uma função par é derivável no ponto 0, então $f'(0) = 0$.

63.3. Mostre que a função g é uma função par.

63.4. Estude a função g quanto à monotonia no intervalo $]0, \pi[$.

63.5. Indique os extremos relativos de g no intervalo $]-\pi, \pi[$.

63.6. Seja r a reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa $\frac{\pi}{2}$. Determine a equação reduzida da reta r .

63.7. Justifique que a reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa $-\frac{\pi}{2}$ é perpendicular à reta r .

63.8. Seja a função h , de domínio $]-\pi, \pi[$, definida por $h(x) = [g(x)]^3$.

Mostre que $h'(0) = 0$.

- 1 A equação $\sin(2x) = 0$ tem, no intervalo $[-50\pi, 50\pi]$, o mesmo número de soluções que a equação:

(A) $\frac{\sin(2x)}{2} = 0$ (B) $\sin^2 x = 0$ (C) $\sin x = 0$ (D) $2 \sin x = 0$

- 2 Sabe-se que f é uma função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

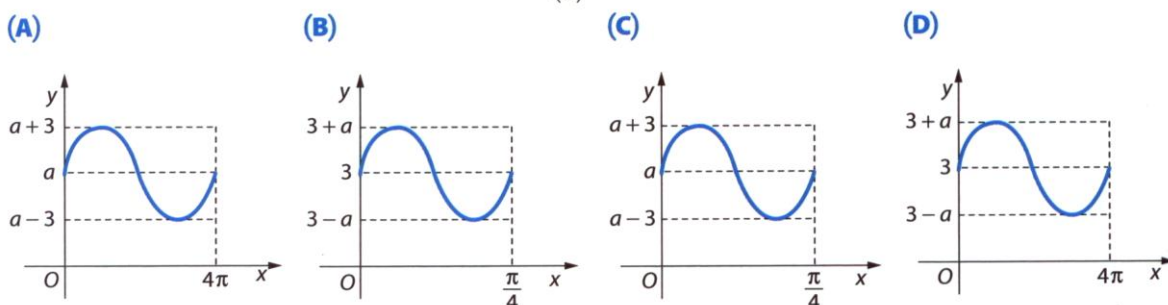
$$f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Então, pode-se afirmar que:

(A) $f(x) = \cos x$ (B) $f(x) = \sin x$ (C) f é uma função par. (D) f é uma função ímpar.

- 3 Qual das seguintes figuras pode representar parte da representação gráfica da função h definida por:

$$h(x) = 3 \times \sin\left(\frac{x}{2}\right) + a, (a \in \mathbb{R}^+)$$



- 4 Considere num referencial o. n. xOy a circunferência de equação:

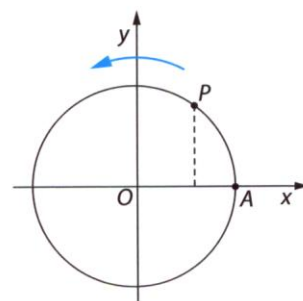
$$x^2 + y^2 = 16$$

Admita que um ponto P se desloca, a uma velocidade constante, sobre a circunferência, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. No instante $t = 0$, o ponto P parte de A , efetuando duas rotações completas em cada segundo.

Seja $a(t)$ a abcissa do ponto P , t segundos após a partida.

Uma expressão de $a(t)$ pode ser:

(A) $4 \cos(t)$ (B) $4 \cos(4\pi t)$ (C) $4 \cos(2\pi t)$ (D) $4 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

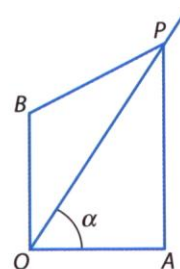


- 5 Relativamente à figura sabe-se que:

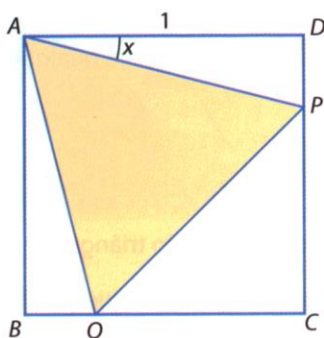
- $[OB] \perp [OA]$
- $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$
- o ponto P desloca-se sobre uma semirreta com origem em A e paralela a OB ;
- α designa a amplitude do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

A área do trapézio $[OAPB]$, em função de α , é:

(A) $\frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{\tan \alpha}\right)$ (B) $\frac{1 + \cos \alpha}{2}$ (C) $\frac{1}{2} \times (1 + \tan \alpha)$ (D) $\frac{1 + \sin \alpha}{2}$



- 6 Mostre que a equação $15 \cos(2x) = 47 \sin(-x) - 16$ pode ser escrita como uma equação do 2.º grau em $\sin x$ e resolva esta equação para $0 \leq x \leq 2\pi$.
- 7 Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$ de lado 1.



O ponto P desloca-se sobre o lado $[CD]$ e o ponto Q desloca-se sobre o lado $[BC]$, de tal forma que se tem sempre $PD = QB$.

Para cada posição do ponto P , x é a amplitude em radianos do ângulo PAD $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$.

- 7.1. Mostre que a área do triângulo $[AQP]$ é dada, em função de x , por:

$$A(x) = \frac{1}{2} \times (1 - \operatorname{tg}^2 x)$$

- 7.2. Determine $A(0)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

- 7.3. Recorra à calculadora para determinar os valores de x para os quais a área do triângulo $[AQP]$ é a quarta parte da área do quadrado $[ABCD]$.

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico ou gráficos obtidos, bem como as coordenadas dos pontos cuja determinação for necessária à resolução do problema. Apresente os valores arredondados às décimas.

- 8 No dia 8 de outubro de 2006, no porto de Aveiro, a maré alta (preia-mar) ocorreu às 3 h 32 min atingindo uma altura de 3,54 m. Na baixa-mar que se seguiu, a altura atingida pelo nível da água foi de 0,33 m. Admitindo que estes valores se repetem de 12 em 12 horas (o que em rigor não é verdade) e que a altura h , em metros, das marés pode ser dada, em função de t , sendo t a hora do dia ($0 \leq t \leq 24$), por uma expressão do tipo:

$$h(t) = a \sin[k(t - b)] + c$$

determine uma expressão da função h que nos dê aquela altura no porto de Aveiro e no dia referido.

- 9 Um barril de petróleo com a forma cilíndrica flutua como se mostra na figura.

O barril tem de base 80 cm de diâmetro e o arco AB tem 90 cm de comprimento. O ângulo AOB tem θ radianos de amplitude.

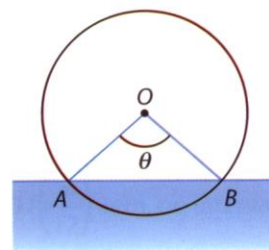
- 9.1. Determine a amplitude do ângulo θ (apresente o resultado em radianos, com duas casas decimais).

- 9.2. Calcule a área do setor AOB (o que tem parte dentro de água).

- 9.3. Determine o comprimento da corda $[AB]$.

- 9.4. Calcule a área do triângulo $[ABO]$.

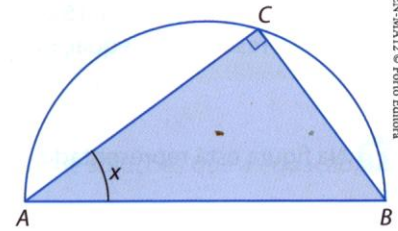
- 9.5. Se o barril tem 1,2 m de comprimento, calcule o volume da parte do barril que está fora de água. Apresente o resultado em metros cúbicos, com três casas decimais.



- 10** A figura representa um semicírculo de diâmetro $[AB]$ e um triângulo $[ABC]$ nele inscrito.

Sabe-se que:

- x é a amplitude do ângulo BAC ;
- $\overline{AB} = 10$



- 10.1.** Prove que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, para qualquer

$$x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[, \text{ por:}$$

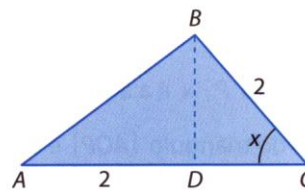
$$A(x) = 25 \sin(2x)$$

- 10.2.** Determine o valor de x para o qual a área do triângulo é máxima.

- 10.3.** Para o valor de x encontrado em **10.2.** classifique, justificando, o triângulo $[ABC]$ quanto aos lados.

- 11** Considere o triângulo $[ABC]$ em que:

- x é a amplitude do ângulo BCA ;
- $[BD]$ é a altura relativa ao vértice B ;
- $\overline{AD} = \overline{BC} = 2$



- 11.1.** Prove que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, para qualquer $x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, por:

$$A(x) = 2 \sin x + \sin(2x)$$

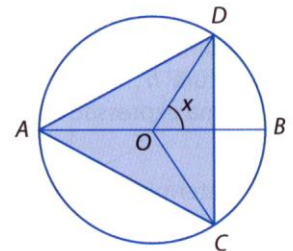
- 11.2.** Determine o valor de x para o qual a área do triângulo é máxima.

- 11.3.** Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A(x)}{x}$.

- 12** Na figura está representada uma circunferência de centro O e raio 1.

Sabe-se que:

- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência;
- a corda $[CD]$ é perpendicular ao diâmetro $[AB]$;
- x designa a amplitude do ângulo BOD .



- 12.1.** Mostre que a área do triângulo $[ACD]$ é dada, em função de x , por:

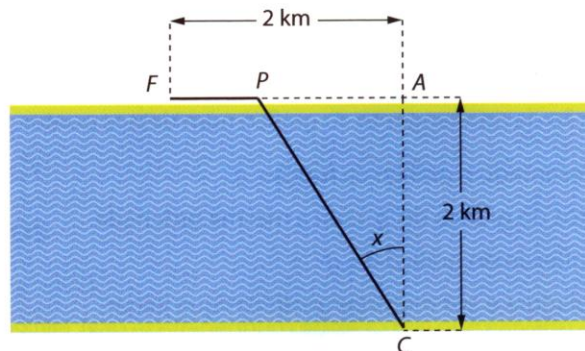
$$A(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin(2x) \quad (x \in]0, \pi])$$

- 12.2.** Determine o valor de x para o qual a área do triângulo é máxima.

- 12.3.** Determine $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Sabe-se que existe um valor de $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ para o qual $A(\alpha) = A\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Recorrendo à calculadora, determine α , com aproximação às décimas.

- 13** Uma central elétrica C e uma fábrica F situam-se em margens opostas de um rio de largura constante. Pretende-se instalar um cabo de alta tensão que ligue a fábrica à central elétrica, de acordo com os dados da figura.



- O cabo, partindo da central C , deve seguir submerso e em linha reta até um determinado ponto P , e daí deve seguir em vala subterrânea, ao longo da margem, até à fábrica F .
- A é o ponto da margem oposta à central mais próximo desta.
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo ACP .
- A distância da fábrica ao ponto A é de 2 km. A distância deste ponto à central é, igualmente, de 2 km.
- O custo de instalação do cabo é de:
 - cabo subterrâneo: 10 mil euros por quilómetro;
 - cabo submerso: 20 mil euros por quilómetro.

13.1. Mostre que o custo da instalação do cabo, em milhares de euros, é dado, em função de x , por:

$$C(x) = 20 + \frac{40 - 20 \sin x}{\cos x} \quad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right] \right)$$

- 13.2.** Calcule $C(0)$ e interprete o resultado obtido referindo o comprimento e o custo do cabo instalado, quer submerso quer subterrâneo.
- 13.3.** Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos determine o valor de x para o qual o custo da instalação do cabo é mínimo.

- 14** Para cada número real k , a expressão

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2 \sin(2x) & \text{se } 0 \leq x \leq k \\ x^2 + 8 \ln\left(\frac{x}{2}\right) & \text{se } x > k \end{cases}$$

define uma função f , de domínio $\mathbb{R}_0^+$.

14.1. Nas alíneas **a)**, **b)** e **c)** considere $k = 1$.

- O gráfico de f admite, no intervalo $[0, 1]$, uma única reta tangente de declive nulo. Determine uma equação dessa reta.
- Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude f , no intervalo $]1, +\infty[$, quanto ao sentido da concavidade do gráfico e à existência de pontos de inflexão.
- Recorrendo ao Teorema de Bolzano mostre que a equação $f(x) = 10 f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ tem, no intervalo $]3, 4[$, pelo menos uma solução.

14.2. Existe um número real positivo k para o qual a função f é contínua em $[0, +\infty[$. Recorrendo às capacidades da sua calculadora, determine um valor aproximado (às décimas) desse número k . Explique como procedeu.

15 Considere a função g , de domínio $[0, \pi]$, definida por $g(x) = x + \sin(2x)$.

15.1. Estude g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

15.2. Verifique que existem dois pontos do gráfico de g onde a reta tangente ao gráfico é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Determine a equação da reta tangente ao gráfico num desses pontos.

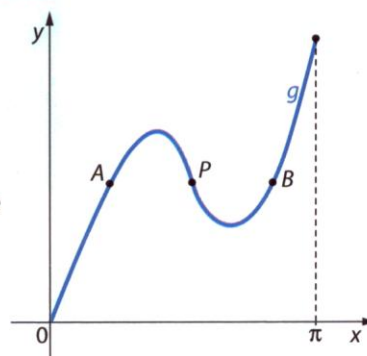
15.3. Na figura está representado o gráfico da função g .

A , P e B são pontos do gráfico de g com a mesma ordenada.

P é um ponto de inflexão do gráfico de g .

Recorrendo à calculadora e aos métodos analíticos que julgar necessários, determine um valor aproximado para a distância de A a B (apresente o resultado arredondado às décimas).

Explique como procedeu apresentando os procedimentos analíticos efetuados, bem como o gráfico, ou gráficos, que usou na resolução do problema.



16 Considere a função real de variável real definida por $f(x) = x + \sin x$.

Prove que, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, a equação $f(x) = a$ tem sempre uma e uma só solução.

17 f e g são funções deriváveis em $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- $f(1) = -2$
- $f'(1) = 4$
- $g(0) = 1$
- $g'(0) = -3$

17.1. Sendo h a função definida por $h(x) = f(x + g(x))$, determine $h'(0)$.

17.2. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

18 Considere a função f de domínio $[0, \pi]$, definida por $f(x) = e^{\frac{\pi}{2} - x} \sin x$.

18.1. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

18.2. Determine a área do trapézio $[ABCD]$ em que:

- C é um ponto de inflexão do gráfico de f ;
- B é o ponto do gráfico de f com ordenada máxima;
- A e B são os pontos do eixo Ox com as mesmas abscissas dos pontos D e C , respetivamente.

19 Considere a função f , de domínio $[-\pi, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \frac{1}{2} \cos(2x) & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \\ k + x \ln(x+1) - x \ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

k é o número real para o qual f é uma função contínua.

19.1. Determine o valor de k .

19.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do gráfico.

19.3. Mostre que f admite um único mínimo no intervalo $[-\pi, 0]$ e determine-o.

Tema 2

Números complexos

1. Definições

Números complexos

Considere-se a equação $x^2 = -1$.

Em $\mathbb{R}$, a equação é impossível. Não existe nenhum número real que elevado ao quadrado seja igual a -1 .

Para que a equação tenha soluções ampliou-se o conjunto dos números reais a um novo conjunto, o **conjunto dos números complexos**, que se representa por $\mathbb{C}$.

Designou-se por i uma das soluções da equação $x^2 = -1$. A este novo número i , tal que $i^2 = -1$, chama-se **unidade imaginária**.

Atendendo a que:

$$(-i)^2 = (-i) \times (-i) = i^2 = -1$$

a equação $x^2 = -1$ tem duas soluções: i e $-i$.

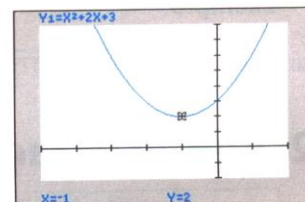
De um modo geral, tem-se, em $\mathbb{C}$:

- i é a unidade imaginária: $i^2 = -1$
- $\sqrt{-1} = \pm i$
- se $a \in \mathbb{R}^+$, $(i\sqrt{a})^2 = i^2 \times (\sqrt{a})^2 = -a$, $(-i\sqrt{a})^2 = (-i)^2 \times (\sqrt{a})^2 = -a$, então $\sqrt{-a} = \pm i\sqrt{a}$.

Em $\mathbb{C}$, todas as equações do 2.º grau são possíveis.

Em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 + 2x + 3 = 0$ é impossível, mas em $\mathbb{C}$ tem duas soluções:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 3 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{-2} \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{2}i \vee x = -1 - \sqrt{2}i\end{aligned}$$



As soluções da equação são os números complexos: $-1 + \sqrt{2}i$ e $-1 - \sqrt{2}i$.

Chama-se **número complexo** a todo o número da forma $a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.

$$\mathbb{C} = \{z: z = a + bi, a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$$

$\mathbb{C}$ é o **conjunto dos números complexos**.

Seja $z = a + bi$ um número complexo.

Tem-se:

- a é a parte real de z e escreve-se $a = \text{Re}(z)$;
- bi é a parte imaginária de z ;
- b é o coeficiente da parte imaginária de z e escreve-se $b = \text{Im}(z)$;
- i é a unidade imaginária.

Imaginário puro

$$z = a + bi \text{ é um imaginário puro} \Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \neq 0$$

Exemplos:

i , $-2i$, $\sqrt{2}i$ são imaginários puros.

Há autores que designam por imaginário puro um número complexo cuja parte real é nula ($a = 0$). Segundo esta definição, o número **zero** é imaginário puro.

Número real

$$z = a + bi \text{ é um número real} \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$$

Todo o número real é um número complexo: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Números complexos conjugados

Dois números complexos dizem-se conjugados quando têm partes reais iguais e partes imaginárias simétricas.

Conjugado do número complexo $z = a + bi$ é o número complexo $\bar{z} = a - bi$.

Exemplos:

$$\begin{array}{ll} z_1 = 2 + 3i & \bar{z}_1 = 2 - 3i \\ z_2 = -3i & \bar{z}_2 = 3i \\ z_3 = 7 & \bar{z}_3 = 7 \end{array}$$

Igualdade de dois números complexos

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Exemplo:

$$x + yi = 3 - 4i \Leftrightarrow x = 3 \text{ e } y = -4$$

2. Representação geométrica de um número complexo

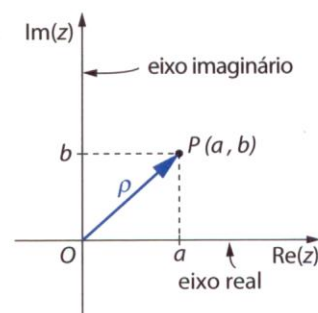
Considere-se, no plano, um referencial o. n. xOy .

A cada número complexo $z = a + bi$ pode associar-se um e um só ponto P de coordenadas (a, b) .

- Ao ponto P chama-se **afixo** ou **imagem geométrica** do número complexo z .
- Ao plano chama-se **plano de Argand** ou **plano complexo**.
- Ao vetor $\overrightarrow{OP}$ chama-se **imagem vetorial** do número complexo z .
- Chama-se **módulo** do número complexo z , e representa-se por $|z|$, à distância do ponto P , imagem de z , à origem do referencial.

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Todo o número real $x + 0i \rightarrow (x, 0)$ tem imagem no eixo Ox que se designa por **eixo real**.
- Todo o número imaginário puro $0 + yi \rightarrow (0, y)$ tem imagem no eixo Oy que se designa por **eixo imaginário**.



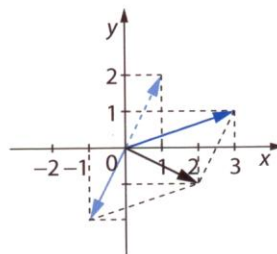
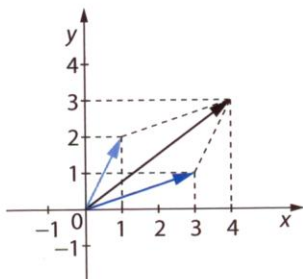
3. Operações com números complexos

Adição e a multiplicação em $\mathbb{C}$ são extensões das operações homónimas em $\mathbb{R}$.

Adição e subtração

$$(2 + i) + (1 + 2i) = 4 + 3i$$

$$(3 + i) - (1 + 2i) = (3 + i) + (-1 - 2i) = 2 - i$$



Multiplicação

$$(2 + i)(3 - 5i) = 6 - 10i + 3i - 5i^2 = 6 - 7i + 5 = 11 - 7i$$

$$i^2 = -1$$

Outro exemplo:

$$\left(1 - \frac{1}{2}i\right)(4 + 6i) = 4 + 6i - 2i - 3i^2 = 4 + 4i + 3 = 7 + 4i$$

O produto de dois números complexos conjugados é sempre um número real.

Seja $z = a + bi$:

$$z \times \bar{z} = (a + bi) \times (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+$$

Aplicaremos esta propriedade na divisão de dois números complexos.

Divisão

Para dividir dois números complexos, multiplicam-se os termos da fração pelo complexo conjugado do denominador.

Exemplos:

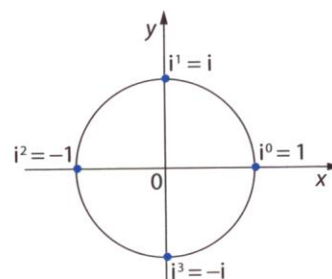
$$\frac{2 + 3i}{1 - i} = \frac{(2 + 3i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 + 2i + 3i - 3}{1 + 1} = \frac{-1 + 5i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\frac{3 - 2i}{4 + 5i} = \frac{(3 - 2i)(4 - 5i)}{(4 + 5i)(4 - 5i)} = \frac{12 - 15i - 8i + 10i^2}{4^2 - (5i)^2} = \frac{12 - 23i - 10}{16 + 25} = \frac{2 - 23i}{41} = \frac{2}{41} - \frac{23}{41}i$$

$(2+3i)/(1-i) \rightarrow \text{Frac}$	$-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$
$(3-2i)/(4+5i) \rightarrow \text{Frac}$	$\frac{2}{41} - \frac{23}{41}i$

Potências de base i e expoente inteiro

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = -i$
$i^4 = 1$	$i^5 = i$	$i^6 = -1$	$i^7 = -i$
...	...	...	...
$i^{4n} = 1$	$i^{4n+1} = i$	$i^{4n+2} = -1$	$i^{4n+3} = -i$



Qualquer potência de base i e expoente inteiro será igual a 1 , i , -1 ou $-i$.

Seja $n \in \mathbb{N}$, $n = 4q + r$ com $q \in \mathbb{N}$ e $r \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \times i^r = (i^4)^q \times i^r = 1^q \times i^r = i^r$$

Logo:

$i^n = i^r$, sendo r o resto da divisão inteira de n por 4.

Exemplos:

$$i^{25} = i^1 = i \quad \begin{array}{r} 25 \div 4 \\ \textcircled{1} \end{array}$$

$$i^{183} = i^3 = -i \quad \begin{array}{r} 183 \div 4 \\ \textcircled{3} \end{array}$$

$$i^{66} = i^2 = -1 \quad \begin{array}{r} 66 \div 4 \\ \textcircled{2} \end{array}$$

$$i^{72} = i^0 = 1 \quad \begin{array}{r} 72 \div 4 \\ \textcircled{0} \end{array}$$

$$i^{-26} = i^{-26+28} = i^2 = -1$$

$$i^{-17} = i^{-17+20} = i^3 = -i$$

Se, numa potência de base i , adicionarmos ao expoente um múltiplo de 4 não alteramos o seu valor.

Raiz quadrada de um número real negativo

Já foi referido anteriormente que:

$$\text{Se } a \in \mathbb{R}^+, \sqrt{-a} = \sqrt{-1 \times a} = \sqrt{-1} \sqrt{a} = \pm i \sqrt{a}$$

Exemplos:

$$\sqrt{-36} = i \sqrt{36} = 6i$$

$$-\sqrt{-7} = -i \sqrt{7}$$

Exemplo 1 Operações em $\mathbb{C}$

Calcule.

1.1. $\frac{(2-4i)(2+3i)}{1+i}$

1.2. $(2i^{13} - i^{48})^2$

Sugestão de resolução

$$\begin{aligned} 1.1. \quad \frac{(2-4i)(2+3i)}{1+i} &= \frac{4+6i-8i-12i^2}{1+i} = \frac{16-2i}{(1+i)(1-i)} = \\ &= \frac{16-2i}{1-i^2} = \frac{16-2i}{1^2 - i^2} = \frac{16-2i}{1-(-1)} = \frac{16-2i}{2} = \\ &= 8-i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2. \quad (2i^{13} - i^{48})^2 &= (2i^1 - i^0)^2 = \\ &= (-1+2i)^2 = \\ &= (-1)^2 - 4i + (2i)^2 = \\ &= 1 - 4i + 4i^2 = 1 - 4i - 4 = \\ &= -3 - 4i \end{aligned}$$

Verifica 1

1.1. $\frac{2-i^{17}}{(3-4i)(1-i)}$

1.2. $\frac{1}{2+i} - \frac{3}{1-2i}$

1.3. $\frac{(1-i)^2}{(1+i)^2} - \frac{1}{i} + \frac{20-15i}{1+2i}$

1.4. $\frac{(1-i^3)^3}{1+i^{31}} + 2 - \frac{(2+2i)^4}{8i^{101}}$

1.5. $\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-\sqrt{3}i} \right)^2$

Exemplo 2 Equações em $\mathbb{C}$

Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações seguintes.

2.1. $x^2 - 2x + 10 = 0$

2.2. $z^2 + 4iz - 13 = 0$

2.3. $z + 2i\bar{z} = 3i$

Sugestão de resolução

$$\begin{aligned} 2.1. \quad x^2 - 2x + 10 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 6i}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 1 + 3i \vee x = 1 - 3i. \end{aligned}$$

As soluções de uma equação do 2.º grau de coeficientes reais são sempre números complexos conjugados.

As soluções são $1 + 3i$ e $1 - 3i$.

$$\begin{aligned} 2.2. \quad z^2 + 4iz - 13 = 0 &\Leftrightarrow z = \frac{-4i \pm \sqrt{(4i)^2 + 52}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-4i \pm \sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-4i \pm 6}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 3 - 2i \vee z = -3 - 2i \end{aligned}$$

As soluções são $3 - 2i$ e $-3 - 2i$.

$$\begin{aligned} 2.3. \quad z + 2i\bar{z} = 3i &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x + yi) + 2i(x - yi) = 3i \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Seja } z = x + yi \\ &\Leftrightarrow x + yi + 2xi - 2yi^2 = 3i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x + 2y) + (2x + y)i = 0 + 3i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -4y + y = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 - i \end{aligned}$$

Exemplo 3 Determinar os zeros de um polinómio

Sabe-se que i é um zero do polinómio complexo:

$$A(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5$$

Aplicando a propriedade:

"Se z_0 é um zero de um polinómio $P(z)$ de coeficientes reais então também $\bar{z}_0$ é um zero de $P(z)$."

determine os outros zeros do polinómio e decompõe-o em fatores do 1.º grau em z .

Verifica 2

Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações.

2.1. $(2 - i)z = 5i$

2.2. $z^2 - 6z + 13 = 0$

2.3. $z^2 - 10zi - 26 = 0$

2.4. $z^3 + z = 0$

2.5. $z^3 - 4z^2 + 5z = 0$

2.6. $2iz = 1 - \bar{z}$

Verifica 3

Considere o polinómio:

$$z^3 - z + 6$$

Determine analiticamente os seus zeros em $\mathbb{C}$, sabendo que um deles é -2 .

Sugestão de resolução

$$A(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5$$

Como $A(z)$ é um polinómio de coeficientes reais, se i é zero do polinómio também $-i$ é zero de $A(z)$. Aplicando a Regra de Ruffini, vem:

	1	-2	6	-2	5
i		i	$-2i-1$	$2+5i$	-5
	1	$-2+i$	$-2i+5$	$5i$	0
$-i$		$-i$	$2i$	$-5i$	
	1	-2	5		0

Então:

$$A(z) = (z-i)(z+i)(z^2-2z+5)$$

Como:

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = 1 - 2i \vee z = 1 + 2i$$

os zeros do polinómio $A(z)$ são:

$$-i, i, 1+2i \text{ e } 1-2i.$$

Cálculo auxiliar

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 1 - 2i \vee z = 1 + 2i$$

Finalmente, vem:

$$A(z) = (z-i)(z+i)(z-1-2i)(z-1+2i)$$

Exemplo 4 Números imaginários puros e números reais

Considere o número complexo $z = \frac{k+i}{2+i}$, $k \in \mathbb{R}$.

Determine k de forma que:

4.1. z seja imaginário puro;

4.2. z seja um número real.

Sugestão de resolução

$$\begin{aligned} z &= \frac{k+i}{2+i} = \frac{(k+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \\ &= \frac{2k - ki + 2i - i^2}{4 - i^2} = \\ &= \frac{(2k+1) + (2-k)i}{5} = \\ &= \frac{2k+1}{5} + \frac{2-k}{5}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.1. \ z \text{ é imaginário puro} &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2k+1}{5} = 0 \wedge \frac{2-k}{5} \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2k+1 = 0 \wedge 2-k \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$4.2. \ z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-k}{5} = 0 \Leftrightarrow k = 2$$

Verifica 4

4.1. Determine $a \in \mathbb{R}$ sabendo que o número complexo $\frac{a+i}{1+i}$ é um imaginário puro.

4.2. Determine $a \in \mathbb{R}$ sabendo que $\frac{2+ai}{1-2i}$ é um imaginário puro.

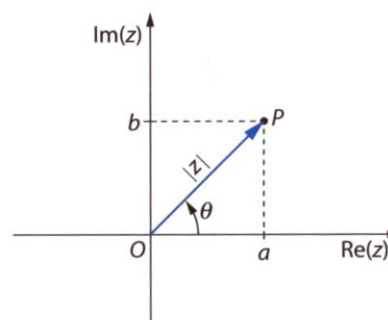
4. Representação trigonométrica de um número complexo. Operações com complexos na forma trigonométrica

Módulo e argumento de um número complexo

Seja $z = a + bi$ um número complexo.

No plano complexo corresponde-lhe o ponto $P \curvearrowright (a, b)$ e o vetor $\vec{v} = (a, b)$.

O vetor $\vec{v}$ tem um determinado comprimento e a sua representação faz um determinado ângulo com a parte positiva do eixo Ox .



Chama-se **módulo** do número complexo $z = a + bi$ e representa-se por $|z|$ ou ρ ao comprimento do vetor $\vec{v} = (a, b)$.

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Chama-se **argumento** do número complexo $z = a + bi$ a qualquer das amplitudes, em radianos, do ângulo que $\overrightarrow{OP}$ faz com a parte positiva do eixo real.

O argumento genérico do número complexo z representa-se por $\arg(z)$.

Seendo θ um argumento de z , também $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ é argumento de z .

Chama-se **argumento principal** (ou simplesmente argumento) ao representante θ do argumento que verifica a condição:

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

Chama-se **argumento positivo mínimo** ao representante θ tal que $0 \leq \theta < 2\pi$.

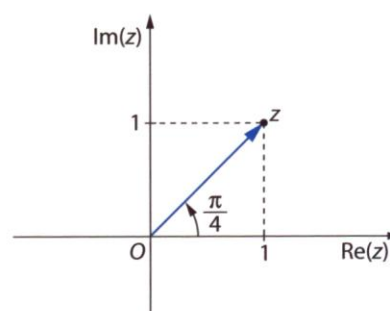
O complexo $0 + 0i$ tem módulo nulo e argumento indeterminado.

Exemplo:

Seja $z = 1 + i$:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4}$$



Forma trigonométrica de um número complexo

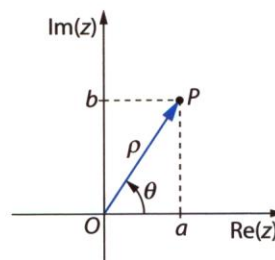
Seja $z \neq 0$ tal que $z = a + bi \rightarrow P(a, b)$.

Observando a figura, vem:

$$\sin \theta = \frac{b}{\rho} \Leftrightarrow b = \rho \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\rho} \Leftrightarrow a = \rho \cos \theta$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}, \text{ se } a \neq 0$$



Se, na expressão $z = a + bi$, substituirmos a e b pelos valores encontrados, vem:

$$z = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta \text{ ou } z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

À representação $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ chama-se **forma trigonométrica** de z .

À representação $z = a + bi$ chama-se **forma algébrica** de z .

A expressão $\cos \theta + i \sin \theta$ representa-se abreviadamente por $\operatorname{cis} \theta$ ou $E(\theta)$.

Assim, $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ ou $z = \rho E(\theta)$ são formas de representar o número complexo z .

Exemplo 5 Representar na forma trigonométrica

Represente na forma trigonométrica.

5.1. $z_1 = 3$

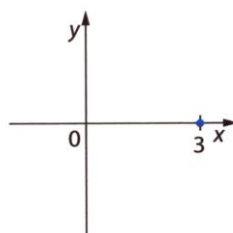
5.2. $z_2 = -2i$

Sugestão de resolução

5.1. $z_1 = 3$

$$|z_1| = 3 \text{ e } \arg(z_1) = 0$$

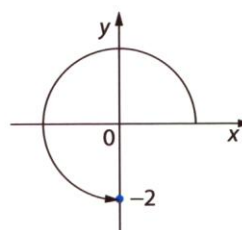
$$z_1 = 3 \operatorname{cis} 0$$



5.2. $z_2 = -2i$

$$|z_2| = 2 \text{ e } \arg(z_2) = \frac{3\pi}{2}$$

$$z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$$



Verifica 5

Escreva na forma trigonométrica.

5.1. $z_1 = -3$

5.2. $z_2 = \sqrt{2}i$

5.3. $z_3 = -2i$

5.4. $z_4 = 1$

5.5. $z_5 = -1$

Exemplo 6 Representar na forma trigonométrica

Represente na forma trigonométrica os números complexos seguintes.

6.1. $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}i$

6.2. $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

6.3. $z_3 = -\sqrt{3} + i$

Sugestão de resolução

6.1. $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}i$

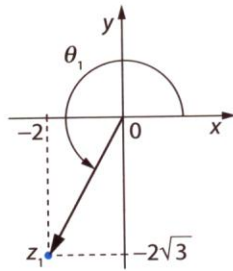
$$|z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

Seja θ_1 um argumento de z_1 :

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \\ \theta_1 \in 3.^\circ \text{Q} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ é um argumento de } z_1.$$

$$z_1 = 4 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$$



6.2. $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

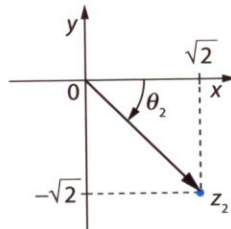
$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

Seja θ_2 um argumento de z_2 :

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 \\ \theta_2 \in 4.^\circ \text{Q} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} \text{ é um argumento de } z_2.$$

$$z_2 = 2 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$



6.3. $z_3 = -\sqrt{3} + i$

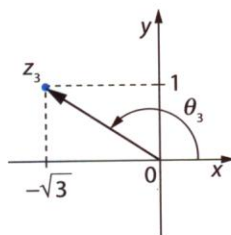
$$|z_3| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

Seja θ_3 um argumento de z_3 :

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \theta_3 = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \theta_3 \in 2.^\circ \text{Q} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ é um argumento de } z_3.$$

$$z_3 = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$$

**Verifica 6**

Escreva na forma trigonométrica:

6.1. $z_1 = 1 + i$

6.2. $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$

6.3. $z_3 = -2 - 2i$

6.4. $z_4 = 3\sqrt{3} - 3i$

6.5. $z_5 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

6.6. $z_6 = -4\sqrt{3} + 4i$

6.7. $z_7 = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$

α	$\operatorname{tg} \alpha$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$

Exemplo 7 Escrever na forma algébrica

Escreva na forma algébrica os números complexos.

7.1. $z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$

7.2. $z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}$

7.3. $z_3 = 3 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$

7.4. $z_4 = 7 \operatorname{cis} \pi$

7.5. $z_5 = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Sugestão de resolução

$$\begin{aligned} 7.1. \quad z_1 &= 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} = 2 \left(\underset{-}{\cos \frac{5\pi}{6}} + \underset{+}{i \sin \frac{5\pi}{6}} \right) = \\ &\quad (2.^\circ \text{Q}) \\ &= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{7.2. } z_2 &= \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \\ &\quad (3.^\circ \text{Q}) \\ &= \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -1 - i \end{aligned}$$

$$\text{7.3. } z_3 = 3 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3} = 3 \left(\underset{+}{\cos \frac{5\pi}{3}} + i \underset{-}{\sin \frac{5\pi}{3}} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

7.4. $z_4 = 7 \operatorname{cis} \pi = 7(\cos \pi + i \sin \pi) = 7(-1 + 0i) = -7$

$$\mathbf{7.5.} \quad z_5 = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - i = -i$$

- **Conjugado na forma trigonométrica**

Forma algébrica:

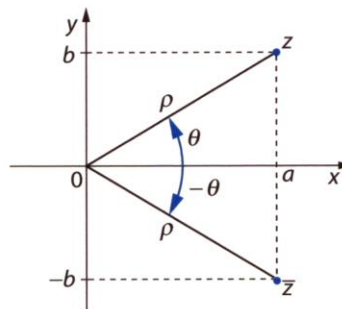
$$z = a + bi$$

$$\bar{z} = a - bi$$

Forma trigonométrica:

$$z = \rho \operatorname{cis} \theta$$

$$\bar{z} = \rho \operatorname{cis}(-\theta)$$



A imagem geométrica do conjugado de z obtém-se da imagem geométrica de z por uma reflexão relativamente ao eixo real.

- **Simétrico na forma trigonométrica**

Forma algébrica:

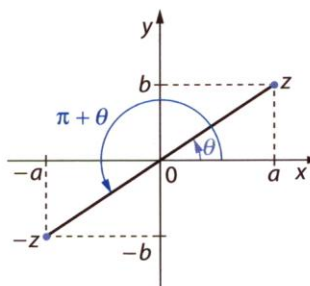
$$z = a + bi$$

$$-z = -a - bi$$

Forma trigonométrica:

$$z = \rho \operatorname{cis} \theta$$

$$-z = \rho \operatorname{cis}(\pi + \theta)$$



A imagem geométrica do simétrico de z obtém-se da imagem geométrica de z por uma rotação de centro na origem e amplitude π radianos.

Verifica 7

Escreva na forma algébrica:

$$7.1. z_1 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

7.2. $z_2 = 4 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$

7.3. $z_3 = 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}$

7.4. $z_4 = 3 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

7.5. $z_5 = 3 \operatorname{cis} 0$

7.6. $z_6 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$

α	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

• Igualdade de números complexos na forma trigonométrica

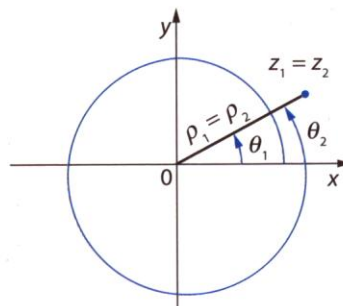
Sejam:

- $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis} \theta_1$
- $z_2 = \rho_2 \operatorname{cis} \theta_2$

$$\rho_1 \operatorname{cis} \theta_1 = \rho_2 \operatorname{cis} \theta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ou

$$\rho_1 \operatorname{cis} \theta_1 = \rho_2 \operatorname{cis} \theta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Dois números complexos são iguais se têm o mesmo módulo e a diferença dos argumentos é um múltiplo inteiro de 2π .

Operações com números complexos na forma trigonométrica

As fórmulas seguintes vão permitir efetuar cálculos com números complexos de uma forma simples. As fórmulas usam-se para a multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Multiplicação

Se $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis} \theta_1$ e $z_2 = \rho_2 \operatorname{cis} \theta_2$, então $z_1 \times z_2 = \rho_1 \times \rho_2 \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2)$.

Potenciação (Fórmula de Moivre)

Sendo $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ e $n \in \mathbb{Z}$, então $z^n = (\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis} (n\theta)$.

Divisão

Se $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis} \theta_1$ e $z_2 = \rho_2 \operatorname{cis} \theta_2 \neq 0$, então $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis} (\theta_1 - \theta_2)$.

Radiciação (Fórmula de Moivre generalizada)

Sendo $z = \rho \operatorname{cis} \theta$, então $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Representação geométrica das raízes de um número complexo

As imagens geométricas das n raízes de índice n de um complexo $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ estão todas sobre uma circunferência de centro na origem do referencial e raio $\sqrt[n]{\rho}$ e dividem a circunferência em n partes iguais.

Exemplo 8 Operações com complexos

Seja $z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$, $z_2 = 5 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$ e $z_3 = 10 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$, calcule:

8.1. $\frac{z_1}{z_2} \times z_3$

8.2. $(z_3)^2$

Sugestão de resolução

$$8.1. \frac{z_1}{z_2} \times z_3 = \frac{2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}}{5 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}} \times 10 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} = \frac{2}{5} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \times 10 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{2}{5} \times 10 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = 4 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{12}$$

$$8.2. (z_3)^2 = \left(10 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \right)^2 = 10^2 \operatorname{cis} \left(2 \times \frac{\pi}{4} \right) = 100 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = 100i$$

Verifica 8

Seja:

$$z_1 = 4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} \text{ e } z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$$

calcule, apresentando o resultado na forma algébrica.

8.1. $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^3$

8.2. $\frac{(z_1)^2 \times (z_2)^3}{64}$

Exemplo 9 Resolver equações

Resolva, em $\mathbb{C}$, cada uma das equações seguintes.

9.1. $z^4 + 16 = 0$

9.2. $(\bar{z})^3 - 4z = 0$

Sugestão de resolução

$$9.1. z^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -16 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{-16} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16} \operatorname{cis} \pi$$

As soluções da equação, z_k , são as raízes de índice 4 de $16 \operatorname{cis} \pi$.

$$z_k = \sqrt[4]{16} \operatorname{cis} \frac{\pi + 2k\pi}{4}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\bullet k=0, z_0 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \quad \bullet k=1, z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$$

$$\bullet k=2, z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4} \quad \bullet k=3, z_3 = 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{As soluções da equação são } \left\{ 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}, 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}, 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}, 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4} \right\}.$$

9.2. $(\bar{z})^3 - 4z = 0$. Seja $z = r \operatorname{cis} \theta$. Então $\bar{z} = r \operatorname{cis} (-\theta)$.

$$(\bar{z})^3 = 4z \Leftrightarrow (r \operatorname{cis} (-\theta))^3 = 4(r \operatorname{cis} \theta) \Leftrightarrow r^3 \operatorname{cis} (-3\theta) = 4r \operatorname{cis} \theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 4r \\ -3\theta = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 - 4r = 0 \\ -4\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r(r^2 - 4) = 0 \\ \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \vee r^2 = 4 \\ \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \vee r = 2 \\ \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ \theta = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

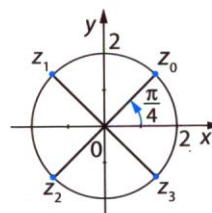
$$\text{Logo, } S = \left\{ 0, 2 \operatorname{cis} 0, 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}, 2 \operatorname{cis} \pi, 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

Verifica 9

Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações.

9.1. $z^6 - 64 = 0$

9.2. $z^4 + z = 0$

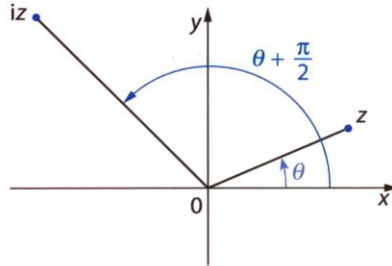


$$\begin{aligned} r=0 &\Rightarrow z=0 \\ k=0 &\Rightarrow \theta=0 \\ k=1 &\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \\ k=2 &\Rightarrow \theta=\pi \\ k=3 &\Rightarrow \theta=\frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

O número i como fator na rotação de 90°

Se $z = \rho \operatorname{cis} \theta$, então:

$$iz = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \times \rho \operatorname{cis} \theta = \rho \operatorname{cis} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

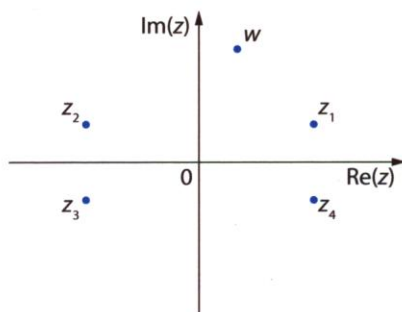


A imagem geométrica de iz , no plano complexo, obtém-se da imagem geométrica de z por uma rotação de 90° com centro na origem.

Exemplo 10 Operações com números complexos

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i a unidade imaginária.

Na figura estão representadas as imagens geométricas de cinco números complexos: w , z_1 , z_2 , z_3 e z_4 .



Qual é o número complexo que pode ser igual a $-\overline{i\omega}$?

Sugestão de resolução

$$i\omega = z_2 \quad (\text{Rotação de } 90^\circ, \text{ com centro na origem, da imagem de } \omega.)$$

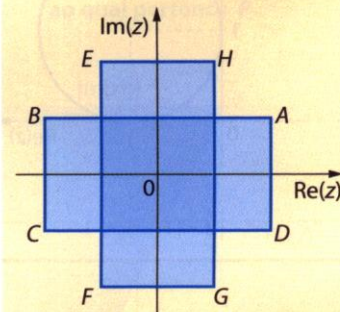
$$\overline{i\omega} = \overline{z_2} = z_3 \quad (\text{A imagem geométrica de } \overline{z} \text{ obtém-se da de } z \text{ por uma reflexão relativamente ao eixo real.})$$

$$-\overline{i\omega} = -z_3 = z_1 \quad (\text{A imagem geométrica de } -z \text{ obtém-se da de } z \text{ por uma rotação de } 180^\circ \text{ em torno da origem do referencial.})$$

Resposta: z_1

Verifica 10

Na figura estão representados, no plano complexo, dois retângulos.



- Os eixos do referencial bissectam os lados do retângulo $[ABCD]$.
- O retângulo $[EFGH]$ foi obtido do retângulo $[ABCD]$ por uma rotação de 90° com centro na origem.
- O ponto A é a imagem, no plano complexo, de um número complexo z .

Exprima, em função de z , os números complexos cujas imagens no plano são os pontos B , C , D , E , F , G e H (por exemplo, se A é a imagem de z , D é a imagem de $\overline{z}$).

5. Domínios planos e condições em variável complexa

Circunferência e círculo

A circunferência caracteriza-se por ser o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo.

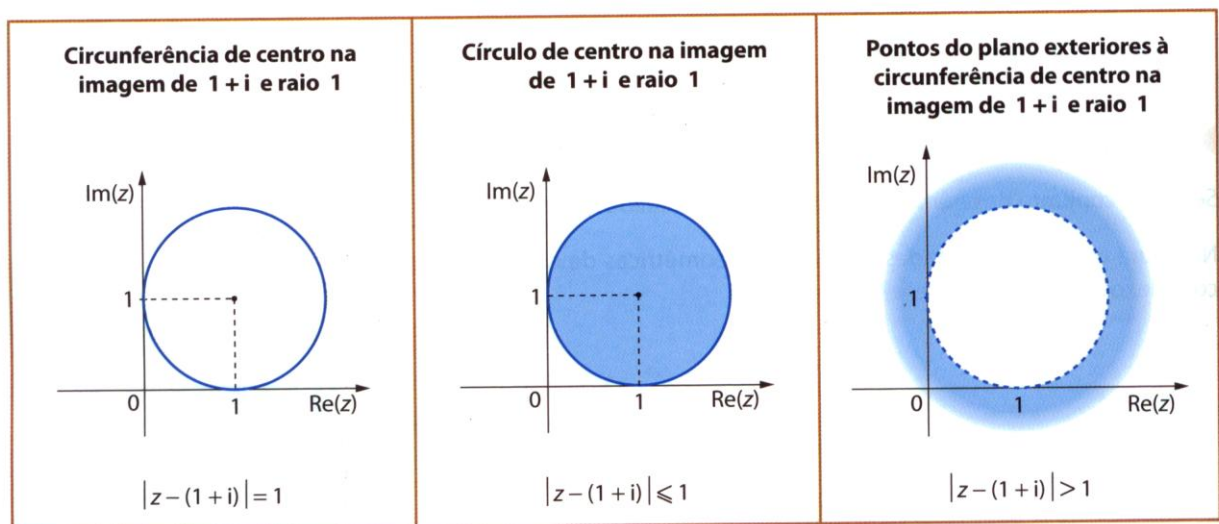
A distância de um ponto qualquer da circunferência a C (centro da circunferência) é igual r (raio).

Escreve-se:

$$\underbrace{|P - C|}_{\text{distância de } P \text{ a } C} = r \text{ ou } \overline{PC} = r$$

No plano complexo consideremos a variável complexa $z = x + yi$.

Vejamos como representar, por uma condição, uma circunferência, um círculo e os pontos exteriores à circunferência.



Para obtermos a equação algébrica da circunferência recorre-se à substituição de z por $x + yi$ e simplifica-se a expressão:

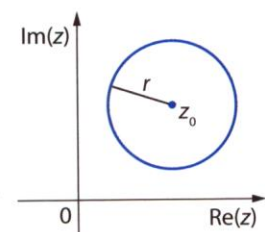
$$\begin{aligned} |z - (1 + i)| = 1 &\Leftrightarrow |x + yi - (1 + i)| = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |(x - 1) + (y - 1)i| = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \end{aligned}$$

Circunferência de centro em $C \rightarrow (1, 1)$ e raio 1.

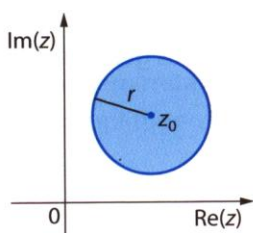
Resumindo:

$$|z - z_0| = r$$

define a circunferência de centro na imagem geométrica de z_0 e raio r .

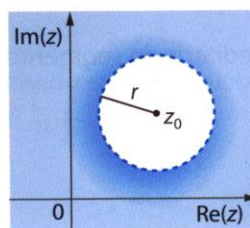


$$|z - z_0| \leq r$$



Círculo fechado de centro na imagem geométrica de z_0 e raio r .

$$|z - z_0| > r$$

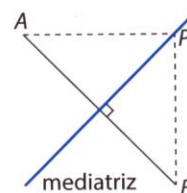


Exterior do círculo de centro na imagem geométrica de z_0 e raio r (excluindo a fronteira).

Mediatriz

A mediatriz de um segmento de reta $[AB]$ caracteriza-se por ser o lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e de B .

$$|P - A| = |P - B|$$



Vejamos como se define por uma condição em $\mathbb{C}$ a mediatriz de um segmento de reta, representada no plano complexo, bem como os semiplanos por ela definidos.

Mediatriz do segmento de reta definido pelas imagens de $z_1 = i$ e $z_2 = 2$ $z - i = z - 2$	Semi-plano definido pela mediatriz do segmento definido por $P \curvearrowright (0, 1)$ e $Q \curvearrowright (2, 0)$ ao qual pertence Q $z - i \geq z - 2$	Semi-plano definido pela mediatriz do segmento definido por $P \curvearrowright (0, 1)$ e $Q \curvearrowright (2, 0)$ ao qual pertence P $z - i \leq z - 2$
---	--	--

Para determinarmos a equação da reta substitui-se z por $x + yi$ e simplifica-se a expressão.

$$\begin{aligned}
 |x + yi - i| &= |x + yi - 2| \Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = |(x - 2) + yi| \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x - 2)^2 + y^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 4x - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow y = 2x - \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

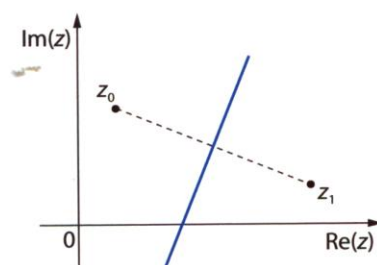
Equação da mediatriz do segmento de reta definido por:

$$P \curvearrowright (0, 1) \text{ e } Q \curvearrowright (2, 0)$$

Resumindo

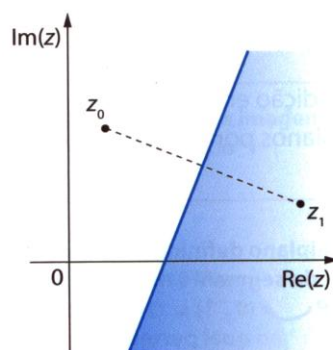
$$|z - z_0| = |z - z_1|$$

define a mediatriz do segmento de reta cujos extremos são as imagens geométricas de z_0 e de z_1 .



$$|z - z_0| \geq |z - z_1|$$

Semi-plano definido pela mediatriz do segmento de reta cujos extremos são as imagens geométricas de z_0 e de z_1 , ao qual pertence a imagem de z_1 .



Exemplo 11 Domínio no plano complexo

Represente no plano complexo o conjunto de pontos definido pela condição seguinte.

$$|z - 1 - i| \leq 1 \wedge |z| \leq |z - 1 - i|$$

Sugestão de resolução

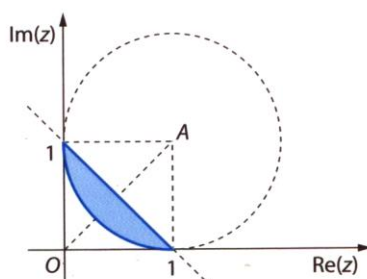
$$|z - 1 - i| \leq 1 \Leftrightarrow |z - (1 + i)| \leq 1$$

Círculo de centro em $A(1, 1)$ e raio 1.

$$|z| \leq |z - 1 - i| \Leftrightarrow |z - (0 + 0i)| \leq |z - (1 + i)|$$

Semi-plano definido pela mediatriz do segmento de reta $[OA]$, sendo O a origem do referencial e $A(1, 1)$, e pela origem.

O conjunto de pontos definido pela condição é a interseção dos dois conjuntos referidos.



Verifica 11

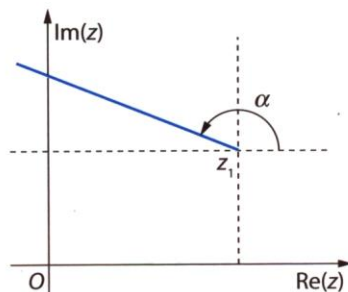
Represente, no plano complexo, o conjunto de pontos definido pela condição:

$$|z| \geq |z - 1 + 2i| \wedge |z - 1 + 2i| \leq 2$$

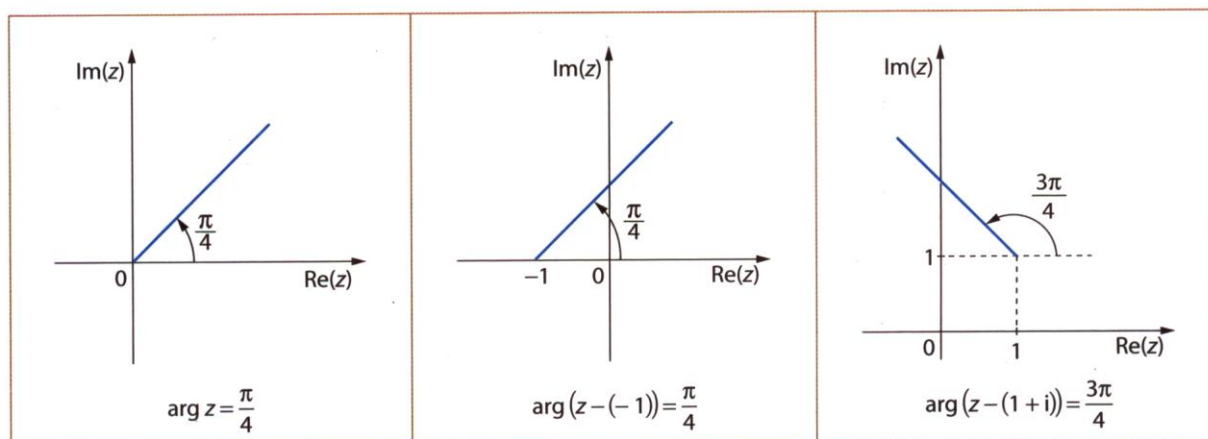
Semirreta

$$\arg(z - z_1) = \alpha$$

representa uma semirreta de origem na imagem de z_1 e formando com o semieixo positivo Ox um ângulo de amplitude α .



Exemplos:



Exemplo 12 Domínio no plano complexo

Represente no plano de Argand o conjunto de pontos definido por:

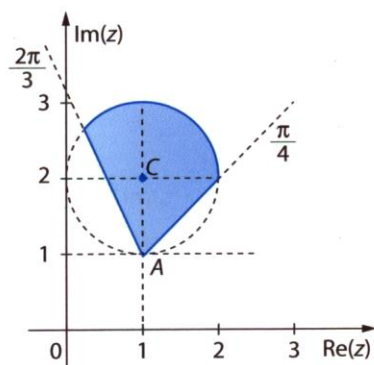
$$\frac{\pi}{4} \leq \arg(z - 1 - i) \leq \frac{2\pi}{3} \wedge |z - 1 - 2i| \leq 1$$

Sugestão de resolução

$$\frac{\pi}{4} \leq \arg(z - 1 - i) \leq \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \arg(z - (1+i)) \leq \frac{2\pi}{3}; A \curvearrowright (1, 1)$$

$$|z - 1 - 2i| \leq 1 \Leftrightarrow |z - (1+2i)| \leq 1$$

$$C \curvearrowright (1, 2); \text{raio: } 1$$



Verifica 12

Represente no plano complexo o conjunto de pontos definido pela condição:

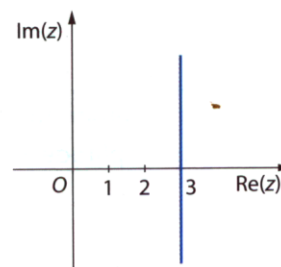
$$\frac{\pi}{4} \leq \arg(z - 2i) \leq \frac{7\pi}{4} \wedge |z - 2i| \leq 2$$

Retas paralelas aos eixos

- **Reta paralela ao eixo Oy** (eixo imaginário)

Exemplo:

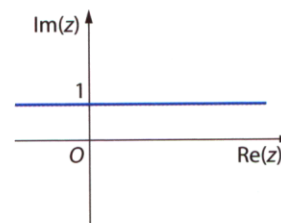
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z - 1 + i) = 2 &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(x + yi - 1 + i) = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}[(x - 1) + (y + 1)i] = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$



- **Reta paralela ao eixo Ox** (eixo real)

Exemplo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(z - 1 + i) = 2 &\Leftrightarrow \operatorname{Im}(x + yi - 1 + i) = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im}[(x - 1) + (y + 1)i] = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y + 1 = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = 1 \end{aligned}$$



Exemplo 13 Representar no plano complexo

Represente no plano complexo os conjuntos de pontos definidos pelas condições.

13.1. $|z - 2i| \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z + 3i) \leq 6$

13.2. $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{i}\right) \geq 1 \vee |z| \leq 2$

Sugestão de resolução

13.1. A condição $|z - 2i| \leq 2$ define um círculo de raio 2 e centro na imagem geométrica de $z_0 = 2i$.

A condição $\operatorname{Im}(z + 3i) \leq 6$ define um semiplano.

Seja $z = x + yi$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(z + 3i) \leq 6 &\Leftrightarrow \operatorname{Im}(x + yi + 3i) \leq 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im}(x + (y + 3)i) \leq 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y + 3 \leq 6 \Leftrightarrow y \leq 3 \end{aligned}$$

O semiplano é definido pela condição $y \leq 3$.

O conjunto de pontos definido pela condição está representado a cor na figura.

13.2. $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{i}\right) \geq 1 \vee |z| \leq 2$

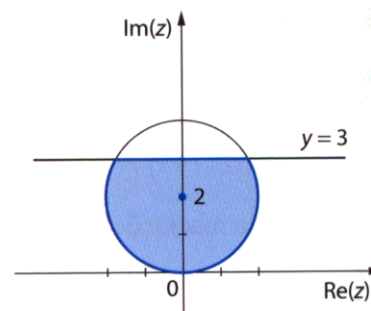
$$\begin{aligned} \bullet \operatorname{Re}\left(\frac{z}{i}\right) \geq 1 &\Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{x + yi}{i}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{(x + yi) \times (-i)}{i \times (-i)}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{-xi + y}{1}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(y - xi) \geq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y \geq 1 \end{aligned}$$

Verifica 13

Represente no plano complexo cada uma das condições seguintes:

13.1. $\operatorname{Re}(z + 2) \leq 3 \vee |z| < 2$

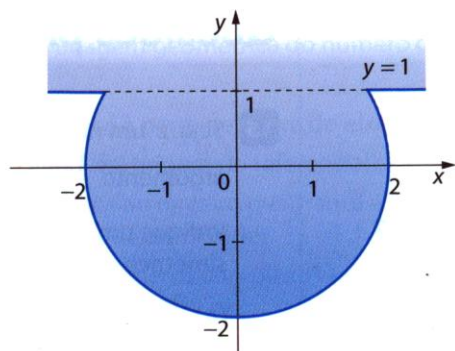
13.2. $-\frac{\pi}{4} \leq \arg(z - 1) \leq \frac{\pi}{4} \wedge \operatorname{Im}(iz - i) \leq 1$



$$|z| \leq 2$$

Círculo de centro $(0, 0)$ e raio 2.

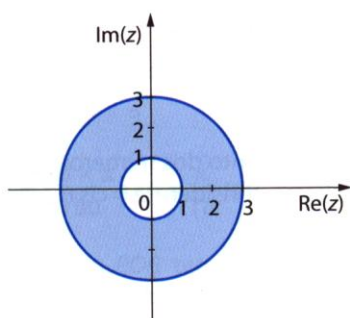
Trata-se da reunião dos dois conjuntos referidos.



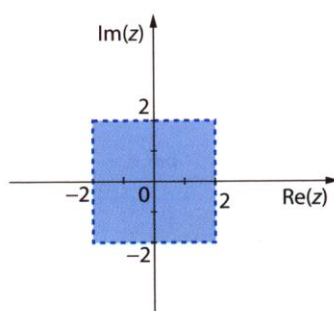
Exemplo 14 Definir uma região do plano por uma condição em $\mathbb{C}$

Defina por uma condição em $\mathbb{C}$ o domínio plano colorido em cada figura.

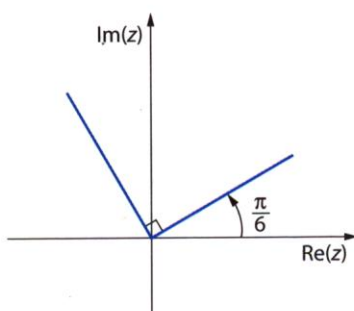
14.1.



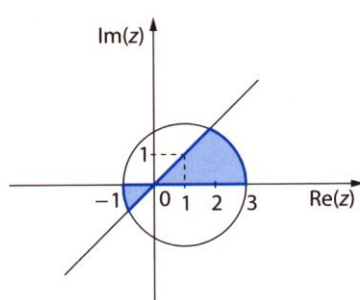
14.2.



14.3.



14.4.



Sugestão de resolução

14.1. $1 \leq |z| \leq 3$

14.2. $-2 < \operatorname{Re}(z) < 2 \wedge -2 < \operatorname{Im}(z) < 2$

14.3. $\arg(z) = \frac{\pi}{6} \vee \arg(z) = \frac{2\pi}{3}$

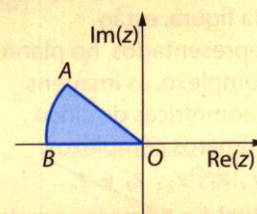
14.4. $|z - 1| \leq 2 \wedge \left(0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4} \vee \pi \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{4} \right)$

Verifica 14

Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a zona sombreada, incluindo a fronteira.

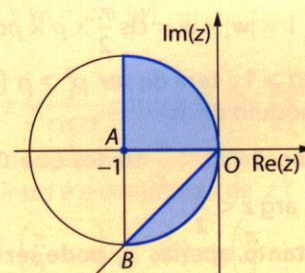
14.1.

- A é o afixo de $\operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$;
- AB é um arco de circunferência com centro na origem do referencial;
- o ponto B pertence ao eixo das abscissas.



14.2.

- A circunferência tem centro em A , afixo de -1 , e passa na origem do referencial;
- o ponto B é o afixo do número complexo $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}$.



Questões tipo exame

Questões resolvidas

- 15** Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{8}$.

Qual poderá ser um argumento do simétrico de z ?

- (A) $\frac{15\pi}{8}$ (B) $-\frac{7\pi}{8}$ (C) $\frac{7\pi}{8}$ (D) $\frac{17\pi}{8}$

Resolução

$$z = r \operatorname{cis} \frac{\pi}{8}$$

$$-z = -r \operatorname{cis} \frac{\pi}{8} = \left. \begin{array}{l} = \operatorname{cis} \pi \times r \operatorname{cis} \frac{\pi}{8} \\ = r \operatorname{cis} \left(\pi + \frac{\pi}{8} \right) \end{array} \right\} -1 = \operatorname{cis} \pi$$

$$= r \operatorname{cis} \left(\pi + \frac{\pi}{8} \right)$$

$$= r \operatorname{cis} \frac{9\pi}{8}$$

$\frac{9\pi}{8}$ é um argumento de $-z$.

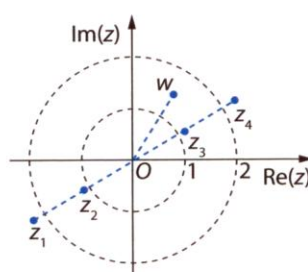
Logo, $\frac{9\pi}{8} - 2\pi = -\frac{7\pi}{8}$ também é um argumento de $-z$.

Resposta: (B)

- 16** Na figura, estão representados, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: w , z_1 , z_2 , z_3 e z_4 .

Qual é o número complexo que pode ser igual a $i \times |w| \times \bar{w}$?

- (A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4



Resolução

Seja $w = \rho \operatorname{cis} \theta$ e $z = i \times |w| \times \bar{w}$.

Observando a representação geométrica de w podemos concluir que $1 < \rho < 2$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$$z = i \times |w| \times \bar{w} = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \times \rho \times \rho \operatorname{cis} (-\theta) = \rho^2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

Se $\rho > 1$, terá de ser $\rho^2 > \rho$ (o módulo de z é maior do que o módulo de w).

Como $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ temos que $0 < \frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\pi}{2}$, ou seja, $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

Portanto, apenas z_4 pode ser igual a $i \times |w| \times \bar{w}$

Resposta: (D)

Questões propostas

- 15** Seja z um número complexo de argumento $\frac{13\pi}{7}$.

Indique um argumento de $-\bar{z}$, simétrico do conjugado de z .

- (A) $\frac{8\pi}{7}$ (B) $\frac{\pi}{7}$
(C) $\frac{6\pi}{7}$ (D) $-\frac{\pi}{7}$

- 16** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 3 \operatorname{cis} \frac{\pi}{7}$. Qual é o valor de $\frac{1}{z^2}$?

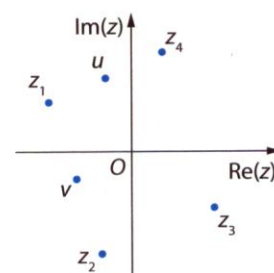
- (A) $\frac{1}{9} \operatorname{cis} \frac{7}{2\pi}$ (B) $\frac{1}{9} \operatorname{cis} \left(-\frac{2\pi}{7} \right)$
(C) $\frac{1}{9} \operatorname{cis} \frac{\pi}{49}$ (D) $\frac{1}{6} \operatorname{cis} \left(\frac{7}{2\pi} \right)$

- 17** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \operatorname{cis} \theta$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$.

Qual dos seguintes números complexos pode ser a representação trigonométrica de iz^2 ?

- (A) $\operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$ (B) $\operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}$
(C) $\operatorname{cis} \frac{7\pi}{4}$ (D) $\operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

- 18** Na figura estão representados, no plano complexo, as imagens geométricas de seis números complexos: u , v , z_1 , z_2 , z_3 e z_4 .



Qual é o número complexo que pode ser igual a $u - v$?

- (A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4

Questões resolvidas

- 17** Considere, no plano complexo, três pontos, P , A e B , tais que:

- o ponto A é a imagem geométrica do número complexo $\sqrt{5} - 2i$;
- o ponto B pertence à parte negativa do eixo imaginário;
- $\overline{OP} = \overline{OA} = \overline{OB}$ (O é a origem do referencial);
- o ponto P pertence ao terceiro quadrante e o ângulo POB tem 10 graus de amplitude.

Qual dos seguintes números complexos tem por imagem o ponto P ?

- (A) $2\sqrt{5} \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$ (B) $2\sqrt{5} \operatorname{cis} \frac{13\pi}{9}$
(C) $3 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$ (D) $3 \operatorname{cis} \frac{13\pi}{9}$

Resolução

A é a imagem do número complexo $z = \sqrt{5} - 2i$.

Seja w o número complexo cuja imagem é P .

$$\overline{OP} = \overline{OB} = \overline{OA} = |z| =$$

$$\sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$$

Logo, $|w| = 3$.

$$x = \frac{10 \times \pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{18} \text{ rad}$$

$$\begin{array}{l} 180^\circ \text{ — } \pi \text{ rad} \\ 10^\circ \text{ — } x \end{array}$$

O ângulo POB tem $\frac{\pi}{18}$ rad de amplitude.

Logo, como $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{18} = \frac{13\pi}{9}$, um argumento de w é $\frac{13\pi}{9}$.

Portanto, $w = 3 \operatorname{cis} \frac{13\pi}{9}$.

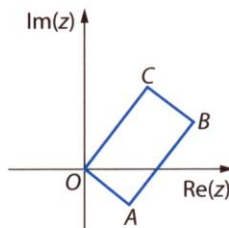
Resposta: (D)

- 18** Na figura estão representados, no plano complexo, os pontos A , B e C .

Sabe-se que $[OABC]$ é um retângulo e que A e C são as imagens geométricas dos números complexos w e z , respetivamente.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

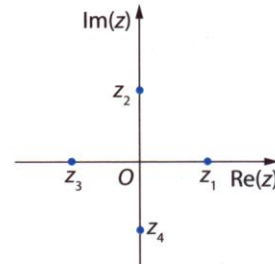
- (A) $z = iw$
(B) $\frac{z}{w}$ é um número real
(C) $|z| = 2|w|$
(D) $|z + w| = |z - w|$



Questões propostas

- 19** Seja w um número complexo diferente de 0, cuja imagem geométrica, no plano complexo, pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

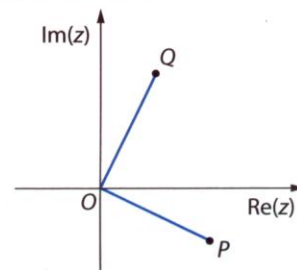
Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos: z_1 , z_2 , z_3 e z_4 .



Qual deles pode ser igual a $w \times (-w)$?

- (A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4

- 20** Na figura estão representados, no plano complexo, os pontos P e Q , imagens geométricas de dois números complexos z e w , respetivamente.



Sabe-se que o triângulo $[OPQ]$ é isósceles e retângulo em O .

Qual das seguintes afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $z^2 - w^2 = 0$
(B) $z^2 + w^2 = 0$
(C) $|z - w| > |z + w|$
(D) $|z + w| = |z| + |w|$

- 21** Seja $z = \frac{i}{\operatorname{cis} \alpha}$ com $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.

Qual dos números complexos seguintes é o conjugado de z ?

- (A) $\operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ (B) $\operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$
(C) $\operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)$ (D) $\operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)$

Questões resolvidas

Resolução

Como $[OC] \perp [OA]$, $z = k \times iw$ com $k > 0$.

Logo,

- $z = iw$ apenas se $k = 1$ (não é dado que $\overline{OA} = \overline{OC}$.)
- $\frac{z}{w} = \frac{k \times iw}{w} = ki \notin \mathbb{R}$
- $|z| = 2|w|$ apenas se $k = 2$ (não é dado que $\overline{OC} = 2\overline{OA}$.)
- $[OABC]$ é um retângulo e A e C são as imagens geométricas dos números complexos w e z .

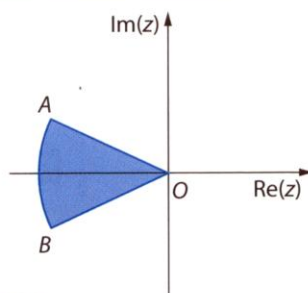
Logo, o ponto B é a imagem geométrica de $w + z$ pelo que $|z + w| = \overline{OB}$ e $|z - w| = \overline{AC}$.

Como as diagonais de um retângulo são iguais, temos que $\overline{OB} = \overline{AC}$.

Portanto, $|z + w| = |z - w|$.

Resposta: (D)

- 19** Relativamente ao setor circular AOB , representado na figura, sabe-se que $[AB]$ é um dos lados do polígono regular cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 7 da unidade.



Qual a área do setor circular AOB ?

- (A) $\frac{2\pi}{7}$ (B) $\frac{\pi}{7}$ (C) $\frac{4\pi}{7}$ (D) $\frac{\pi}{14}$

Resolução

No plano complexo, as imagens geométricas das raízes de índice 7 de um número complexo não nulo são os vértices de um heptágono regular com centro na origem do referencial. Logo, o arco de circunferência compreendido entre dois vértices consecutivos tem amplitude igual a $\frac{2\pi}{7}$ e a área do setor circular correspondente é igual à sétima parte da área do círculo com o mesmo raio.

$$r = \overline{OA} = \sqrt[3]{1} = 1$$

Área do círculo de raio $\overline{OA}$: $\pi \times r^2 = \pi \times 1^2 = \pi$

Área do setor circular $AOB = \frac{\text{Área do círculo de raio } \overline{OA}}{7} = \frac{\pi}{7}$

Resposta: (B)

- 20** Considere, no plano complexo, dois pontos, A e B , imagens geométricas de duas das raízes de índice n de um certo número complexo z .
Sendo O a origem do referencial, sabe-se que a amplitude do ângulo AOB é igual a $\frac{\pi}{5}$.

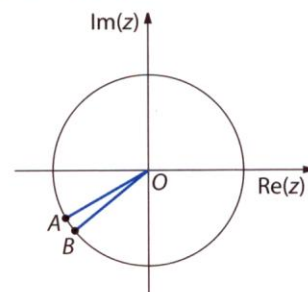
Qual é o menor valor de n ?

- (A) 2 (B) 5 (C) 10 (D) 20

Questões propostas

- 22** Considere o número complexo $z = -\sqrt{3} - i$.

Na figura estão representados, no plano complexo, uma circunferência centrada na origem do referencial. Os pontos A e B pertencem a essa circunferência.



O ponto A é a imagem geométrica de z .

O arco AB tem 10 graus de amplitude.

Qual dos seguintes números complexos tem por imagem o ponto B ?

- (A) $2 \operatorname{cis} \frac{19\pi}{15}$ (B) $2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}$
(C) $2 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{9}$ (D) $2 \operatorname{cis} \frac{43\pi}{36}$

- 23** Seja w um número complexo cuja representação geométrica pertence à parte negativa do eixo imaginário. As representações geométricas das raízes quadradas de w pertencem a uma das retas abaixo indicadas. A qual delas?

- (A) Eixo real
(B) Eixo imaginário
(C) Bissetriz dos quadrantes ímpares
(D) Bissetriz dos quadrantes pares

- 24** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 2 \operatorname{cis} \theta$. Para qual dos seguintes valores de θ é que o número complexo $(iz)^5$ é um número real negativo?

- (A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{\pi}{10}$
(C) $\frac{2\pi}{5}$ (D) $\frac{3\pi}{10}$

Questões resolvidas

Resolução

O polígono, cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice n de um complexo z , é regular, tem n lados e centro na origem do referencial. Assim, o arco de circunferência compreendido entre dois vértices consecutivos tem amplitude igual $\frac{2\pi}{n}$ e a amplitude de um arco de circunferência compreendido entre dois vértices quaisquer é um múltiplo de $\frac{2\pi}{n}$. Logo, neste caso, terá de ser:

$$\frac{\pi}{5} = k \times \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n = 10k, \text{ com } n, k \in \mathbb{N}$$

Portanto, n pode tomar os valores 10, 20, 30, ...

O menor valor de n é 10.

Resposta: (B)

- 21 Considere que os pontos A, B, C e D são as imagens, no plano complexo, das raízes quartas de um número complexo z . Sabe-se que B é a imagem de $-2 + i$. Relativamente aos restantes três pontos, quais são as coordenadas do que está no primeiro quadrante?

(A) (2, 1) (B) (1, 2) (C) (1, 1) (D) (2, 2)

Resolução

$[ABCD]$ é um quadrado de centro na origem do referencial.

Cada vértice pode ser obtido do precedente por uma rotação de 90° em torno da origem, o que corresponde a multiplicar por i o número complexo de que é imagem:

B é a imagem de $-2 + i$.

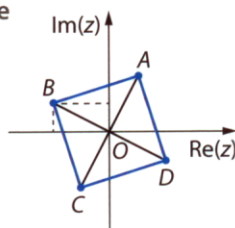
C é a imagem de $(-2 + i) \times i = -1 - 2i$.

D é a imagem de $(-1 - 2i) \times i = 2 - i$.

A é a imagem de $(2 - i) \times i = 1 + 2i$.

Logo, o ponto do primeiro quadrante tem coordenadas (1, 2).

Resposta: (B)



- 22 Qual das seguintes condições não define uma circunferência, no plano complexo?

(A) $|\bar{z} + 1| = |i|$ (B) $|iz + i| - |1 + i| = 0$
(C) $|z - i| + |i| = 0$ (D) $2|z - 1| = |z - 1| + 1$

Resolução

$$\begin{aligned} \bullet |\bar{z} + 1| = |i| &\Leftrightarrow |\bar{z} + \bar{1}| = 1 \Leftrightarrow |\overline{z + 1}| = 1 \\ &\Leftrightarrow |z + 1| = 1 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \bar{1} = 1, |i| = 1 \\ z + w = \bar{z} + \bar{w} \\ |z| = |\bar{z}| \end{array} \right.$$

$$\bullet |iz + i| - |1 + i| = 0 \Leftrightarrow |i(z + 1)| - \sqrt{1 + 1} = 0 \Leftrightarrow |i| \times |z + 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z + 1| = \sqrt{2}$$

$$\bullet |z - i| + |i| = 0 \Leftrightarrow |z - i| + 1 = 0 \Leftrightarrow |z - i| = -1$$

$$\Leftrightarrow |z - i| = -1 \quad (\text{condição impossível})$$

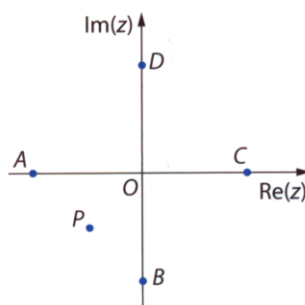
$$\bullet 2|z - 1| = |z - 1| + 1 \Leftrightarrow 2|z - 1| - |z - 1| = 1 \Leftrightarrow |z - 1| = 1$$

A condição $|z - i| + |i| = 0$ é impossível. Cada uma das restantes condições define uma circunferência.

Resposta: (C)

Questões propostas

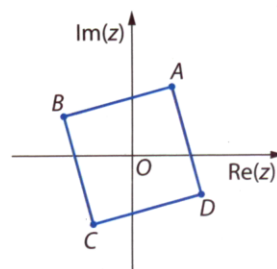
- 25 Na figura estão representados, no plano complexo, cinco pontos: A, B, C, D e P .



Sabendo que o ponto P é a imagem geométrica de um número complexo w , qual dos pontos seguintes pode ser a imagem geométrica do número complexo $i \times (w + \bar{w})$?

(A) A (B) B (C) C (D) D

- 26 Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$ cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice n de um determinado número complexo z .



Sabe-se que:

- o quadrado tem área igual a 2;
- a reta BD faz com o eixo real um ângulo de amplitude $\frac{\pi}{6}$ radianos.

Qual dos seguintes números complexos é igual a z ?

(A) $\text{cis } \frac{\pi}{3}$ (B) $\text{cis } \frac{4\pi}{3}$
(C) $\text{cis } \frac{2\pi}{3}$ (D) $16 \text{ cis } \frac{4\pi}{3}$

- 27 Qual das seguintes condições define um ponto no plano complexo?

(A) $\arg(z) = \pi$ (B) $|z| = 3$
(C) $|z| = |z + i|$ (D) $(z - 1)^2 = 0$

Questões resolvidas

23 Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

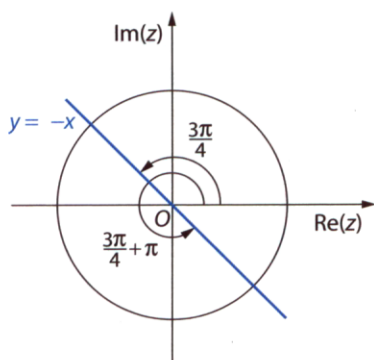
$$z_1 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}.$$

23.1. Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$ para o qual a imagem geométrica do número complexo $(z_1)^n$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

23.2. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 - z_1^2 = 0$.

Resolução

$$\begin{aligned} \mathbf{23.1.} \quad (z_1)^n &= \left(2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}\right)^n = (2\sqrt{2})^n \operatorname{cis} \left(n \times \frac{5\pi}{4}\right) = \\ &= (2\sqrt{2})^n \operatorname{cis} \left(\frac{5n\pi}{4}\right) \end{aligned}$$



A imagem geométrica de $(z_1)^n$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares se e só se

$$\begin{aligned} \frac{5n\pi}{4} &= \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 5n = 3 + 4k, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5n = 3 + 4k, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n = \frac{3 + 4k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

O menor valor de $n \in \mathbb{N}$ que se pode obter da expressão

$$n = \frac{3 + 4k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ é } n = \frac{3 + 4 \times 3}{5} = 3.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{23.2.} \quad z^3 - z_1^2 &= 0 \Leftrightarrow z^3 - \left(2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z^3 = (2\sqrt{2})^2 \operatorname{cis} \left(2 \times \frac{5\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z^3 = 8 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8} \operatorname{cis} \frac{\frac{5\pi}{2} + 2k\pi}{3}, \quad k \in \{0, 1, 2\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi + 4k\pi}{6}, \quad k \in \{0, 1, 2\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} \vee z = 2 \operatorname{cis} \frac{9\pi}{6} \vee z = 2 \operatorname{cis} \frac{13\pi}{6} \end{aligned}$$

Questões propostas

28 Sabe-se que z é um número complexo não nulo cujo quadrado é um imaginário puro.

Então, pode afirmar-se que:

- (A) $\frac{\pi}{4}$ é um argumento de z .
- (B) $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$
- (C) $|\operatorname{Re}(z)| = |\operatorname{Im}(z)|$
- (D) $|z + 1| = |z - i|$

29 Qual das seguintes condições define, no plano complexo, um semiplano?

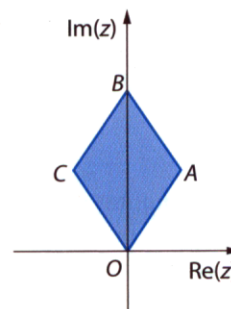
- (A) $|z - i| \leq |3 + 4i|$
- (B) $\left| \frac{1}{z - i} \right| < 1$
- (C) $|z - 1| = |z - 2|$
- (D) $\left| \frac{z - 2}{z} \right| < 1$

30 Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z = \operatorname{cis} \theta \left(\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\right)$$

Na figura está representado, no plano complexo, o losango $[OABC]$.

A é a imagem geométrica de z e B pertence ao eixo imaginário.



30.1. Mostre que C é a imagem geométrica do número complexo $-\bar{z}$.

30.2. Mostre que B é a imagem geométrica do número complexo $2i \sin \theta$.

30.3. Mostre que a área do losango é dada por $\sin(2\theta)$.

30.4. Determine a área do losango, sabendo que $(iz)^3$ é um número real.

Questões resolvidas

24 Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 16 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}.$$

Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

24.1. Mostre que z_1 é solução da equação $iz = -\bar{z}$.

24.2. Determine a área do polígono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quartas de z_1 .

Resolução

24.1. $z_1 = 16 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

Substituindo z por z_1 , na condição $iz = -\bar{z}$ vem:

$$i \left(16 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \right) = -16 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \left(16 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \right) = -16 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow$$

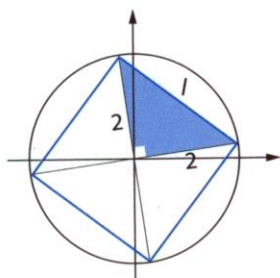
$$\Leftrightarrow 16 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 16 \operatorname{cis} \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} \right) = 16 \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} \right)$$

é uma igualdade verdadeira.

Portanto, z_1 é, de facto, solução da equação $iz = -\bar{z}$.

24.2. As imagens, no plano complexo, das raízes quartas de z_1 são os vértices de um quadrado.



O módulo de qualquer uma das raízes quartas de z_1 é $\sqrt[4]{16} = 2$.

Assim, o quadrado está inscrito numa circunferência de raio 2.

Logo, a sua diagonal mede 4.

Sendo l o lado do quadrado, a sua área é l^2 .

Tem-se então, pelo Teorema de Pitágoras:

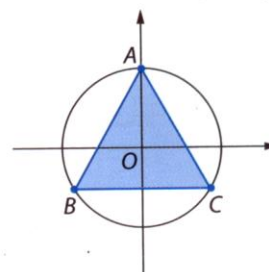
$$l^2 = 2^2 + 2^2$$

$$l^2 = 8$$

A área do quadrado é 8.

Questões propostas

31 Na figura seguinte está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero $[ABC]$, inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial.



O ponto A é a imagem geométrica de $2i$.

31.1. Escreva uma condição em $\mathbb{C}$ que defina a referida circunferência.

31.2. Determine, na forma algébrica, o número complexo w cuja imagem geométrica é o ponto B .

32 De dois números complexos z_1 e z_2 sabe-se que:

- um argumento de z_1 é $\frac{\pi}{6}$;
- o módulo de z_2 é 2.

32.1. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação:

$$\left(2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{19\pi}{12} \right)^2 z^3 = \frac{z_1}{|z_1|}$$

32.2. z_1 e z_2 são duas das raízes cúbicas de um certo número complexo z .

Sabendo que, no plano complexo, a imagem geométrica de z_2 pertence ao segundo quadrante, determine z_2 na forma algébrica.

33 Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 16 \operatorname{cis} \theta$.

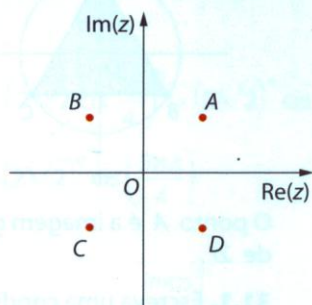
33.1. Seja $[ABCD]$ o polígono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quartas de z_1 .

- Determine o perímetro do polígono $[ABCD]$.
- Defina por uma condição em $\mathbb{C}$, a circunferência inscrita no polígono $[ABCD]$.

33.2. Determine as raízes quartas de z_1 sabendo que $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Itens de seleção

- 34** Seja z um número complexo diferente de 0 , cuja imagem geométrica, no plano complexo, está no primeiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.



Qual dos quatro pontos representados na figura (A, B, C ou D) pode ser a imagem geométrica de z^3 ?

- (A) O ponto A (B) O ponto B
(C) O ponto C (D) O ponto D

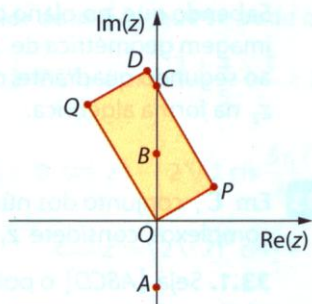
- 35** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos,

considere $z = 2i \operatorname{cis}\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right)$.

Para qual dos valores de θ seguintes podemos afirmar que z é um número real negativo?

- (A) $\frac{7\pi}{12}$ (B) $\frac{13\pi}{12}$ (C) $\frac{17\pi}{12}$ (D) $\frac{25\pi}{12}$

- 36** Na figura estão representados, no plano complexo, os pontos A, B, C, D, O, P e Q.



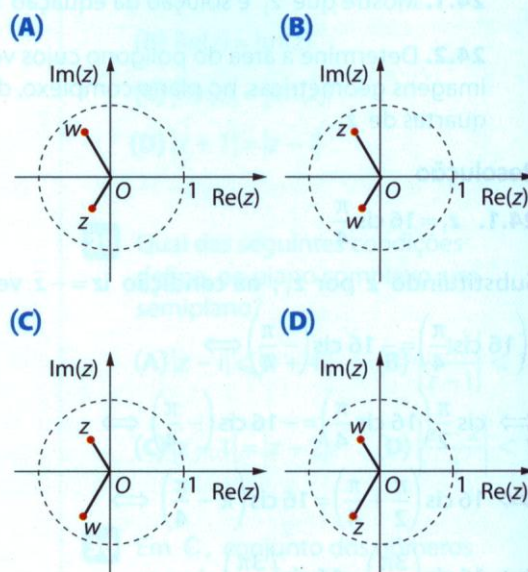
Sabe-se que:

- $[OPDQ]$ é um retângulo, sendo $\overline{OP} = 1$ e $\overline{OQ} = 2$;
- o ponto P é a imagem geométrica do número complexo u ;
- o ponto Q é a imagem geométrica do número complexo $u \times v$.

Qual dos pontos seguintes pode ser a imagem geométrica do número complexo v ?

- (A) A (B) B (C) C (D) D

- 37** Seja w um número complexo e $z = w^2$. Em qual das figuras seguintes podem estar representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de w e z ?



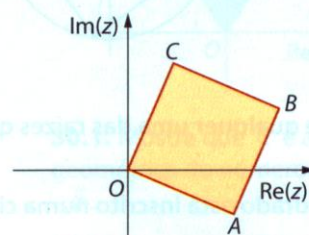
- 38** Seja z um número complexo diferente de 0 , cuja imagem geométrica, no plano complexo, pertence ao terceiro quadrante e à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Sabe-se que z^n , com $n \in \mathbb{N}$, é um número real positivo.

Qual dos seguintes pode ser o valor de n ?

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

- 39** Na figura estão representados, no plano complexo, os pontos A, B e C.



Sabe-se que:

- $[OABC]$ é um quadrado e o ponto O é a origem do referencial;
- o ponto A é a imagem geométrica de um número complexo z .

Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice B?

- (A) $z(1+i)$ (B) $i \times z$ (C) $z + \bar{z}$ (D) $z + 1$

- 40** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos,

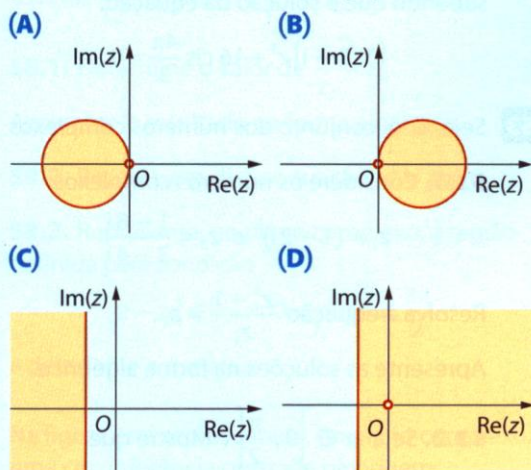
considere $z = \frac{i}{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8} - \theta\right)}$, com $\theta \in \mathbb{R}$.

Para qual dos valores de θ seguintes podemos afirmar que z é um número imaginário puro.

- (A) $\frac{3\pi}{8}$ (B) $\frac{13\pi}{8}$ (C) $\frac{17\pi}{8}$ (D) $\frac{11\pi}{8}$

- 41** Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $\left|1 + \frac{1}{z}\right| \leq 1$.

Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?



Itens de construção

- 42** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = 1 + 2i$.

42.1. Determine $\left(\frac{w-1}{2}\right)^7 \times \frac{10}{1+3i}$ na forma algébrica.

42.2. Averigue se o quadrado de w é, ou não, $4\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4} + 1$.

- 43** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

43.1. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 + 1 = 0$.

43.2. Seja k uma raiz cúbica não real de -1 .

a) Mostre que $k^2 = k - 1$.

b) Calcule $(1 - k)^6$.

- 44** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere o polinómio:

$$P(z) = 2z^4 - 5z^3 + 4z^2 - 5z + 2$$

44.1. Mostre que se w é um zero de $P(z)$ então $\frac{1}{w}$ também é um zero deste polinómio.

44.2. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $P(z) = 0$ sabendo que 2 é uma das soluções.

- 45** Considere o número complexo $z = 1 + \operatorname{cis}(2\alpha)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$.

45.1. Mostre que $z = 2 \cos \alpha \operatorname{cis} \alpha$.

45.2. Escreva z na forma trigonométrica, sabendo que $\alpha = \frac{8\pi}{7}$.

- 46** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$.

46.1. Determine, na forma trigonométrica, o número complexo $\frac{5i^{13}}{1 + 2z_1^2} + i$.

46.2. Para um certo número natural k , a

expressão $\frac{(k + 4i) \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}}{k - i}$ designa um número real.

Determine esse número k .

46.3. Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, tal

que $\left(\frac{i}{z_1}\right)^n = -i$.

- 47** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \operatorname{cis} \alpha$ e $z_2 = \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$.

47.1. Mostre que o número complexo:

$$1 - \frac{\sqrt{3}i}{z_2}$$

é uma raiz cúbica de 1 .

47.2. Determine o valor de α pertencente ao

intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, sabendo que $z_1 + z_2$ é um número real.

47.3. Mostre que o inverso de um número complexo de módulo 1 é igual ao seu conjugado.

- 48** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos,

considere $z_1 = \operatorname{cis} \frac{\pi}{8}$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e $z_3 = \operatorname{cis} \alpha$.

48.1. Calcule $\frac{z_1^{12} + z_2}{(1 - 2i)^3 - 9 \operatorname{cis} \pi}$.

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

48.2. Determina o valor de α , pertencente ao

intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sabendo que a imagem

geométrica do número complexo $z_3 \times z_2$ é um ponto da bissetriz do 2.º quadrante.

48.3. Mostre que $|z_1 + z_2|^2 = 2 + 2 \cos \frac{\pi}{24}$.

49 Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

49.1. Seja n um número natural.

$$\text{Determine } \frac{i^{8n-7} + \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{1 + i \times \left(\operatorname{cis}\frac{7\pi}{6}\right)^3}.$$

Apresente o resultado na forma algébrica.

49.2. Seja $\alpha \in [0, 2\pi[$.

$$\text{Mostre que } \frac{\sin \alpha + i \cos \alpha}{(\cos \alpha - i \sin \alpha)^3} = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)$$

50 Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

50.1. Considere o número complexo $z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$.

a) Determine $\frac{|z_1 + \sqrt{3} - i|}{1 + i}$ apresentando o resultado na forma algébrica.

b) Represente, no plano complexo, o conjunto definido pela condição:

$$|z - z_1| \leq 2 \wedge |z| \geq |z - z_1| \wedge \frac{\pi}{2} \leq \arg(z - z_1) \leq 2\pi$$

50.2. Sejam u e v dois números complexos não nulos e simétricos.

Mostre que u e v não podem ser raízes cúbicas do mesmo número complexo.

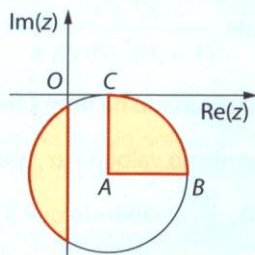
51 Considere os números complexos:

$$z_1 = \frac{4}{-1 - i\sqrt{3}} \text{ e } z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$$

51.1. Calcule $\frac{z_1 + \bar{z}_2}{z_1^3}$ e apresente o resultado na forma trigonométrica.

51.2. Mostre que z_1 e z_2 são raízes de índice 6 do mesmo número complexo e verifique que esse número é real.

51.3. Na figura (diagrama de Argand) A é o centro da circunferência e representa a imagem geométrica de $1 - i\sqrt{3}$.

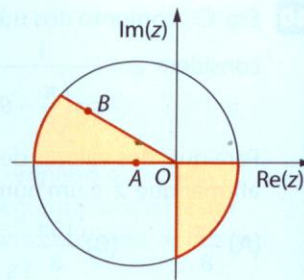


A circunferência é tangente ao eixo real no ponto C .

AB é paralela ao eixo real.

Determine em $\mathbb{C}$ uma condição que defina a região colorida (incluindo a fronteira).

52 A circunferência tem centro em A , afixo -1 e raio 2 . O ponto B é imagem geométrica do número complexo z_1 cujo argumento é $\frac{5\pi}{6}$.



52.1. Defina por uma condição em $\mathbb{C}$ a região colorida, incluindo a fronteira.

52.2. Determine z_1 na forma algébrica, sabendo que é solução da equação:

$$(\sqrt{3} - i)z^3 + 16 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} = 0$$

53 Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

53.1. Considere os números complexos:

$$z_1 = (1 + 2i)^2 \text{ e } z_2 = \frac{1 - 8i}{3 - 4i}$$

Resolva a equação $\frac{z^3 - 1}{z_1} = z_2$.

Apresente as soluções na forma algébrica.

53.2. Seja $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Mostre que:

$$\frac{1 + \operatorname{cis}(2\alpha)}{i \sin \alpha - \cos \alpha} = 2 \cos \alpha \operatorname{cis}(\pi + 2\alpha)$$

54 Considere o número complexo $w = \frac{z}{z + i}$ com $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -i\}$.

Mostre que se w é um número real não nulo, então z é um imaginário puro.

55 Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \text{ e } z_2 = \frac{2}{i^3}.$$

55.1. Verifique que $(z_2 - z_1)^{10} = -1$.

55.2. Resolva a equação $z^2 z_1 = \bar{z}$.

Apresente as soluções na forma algébrica.

55.3. Represente, num diagrama de Argand, o conjunto de pontos definido por:

$$\operatorname{Im}(z) \geq 1 \wedge \frac{5\pi}{4} \leq \arg(z - 3z_1) \leq \frac{7\pi}{4}$$

56 Considere o número complexo:

$$z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}i$$

56.1. Calcule z^2 apresentando o resultado na forma trigonométrica.

56.2. Determine o módulo e um argumento de z .

57 Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

57.1. Considere $w = \frac{(2-i)^4 - 3i^{4n+3}}{1 + 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}}$.

Escreva w na forma trigonométrica.

57.2. Considere $z_1 = \operatorname{cis} \alpha$.

Mostre que a imagem geométrica, no plano complexo, do número complexo $u = z_1 - i \bar{z}_1$, pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

58 Considere em $\mathbb{C}$ os números complexos:

$$z_1 = \operatorname{cis} \frac{\pi}{12}, \quad z_2 = 1 - \sqrt{3}i \quad \text{e} \quad z_3 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \pi$$

58.1. Determine o valor de $\frac{\bar{z}_1}{z_2} \times z_3$.

Apresente o resultado na forma algébrica.

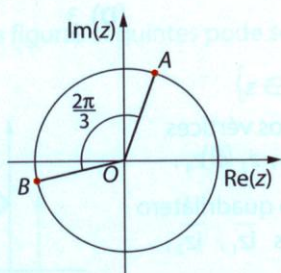
58.2. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 = \bar{z} \times z_2$.

58.3. Represente, no plano complexo, a região definida pela condição

$$|z - z_2| \leq |z_2| \wedge 0 \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$$

e determine a sua área.

59 Na figura está representada, no plano complexo, uma circunferência centrada na origem O do referencial.



Os pontos A e B , imagens geométricas dos números complexos z e w , respetivamente, pertencem a essa circunferência.

Sabe-se que $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{3}$.

Mostre que a imagem geométrica do número complexo $z + w$ também pertence à circunferência.

60 Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Sabe-se que:

- u e v são raízes cúbicas de um número complexo z ;
- a imagem geométrica de u , no plano complexo, é um ponto do terceiro quadrante que pertence a uma circunferência de centro na origem e raio 2;
- $w = -\bar{u}$

Determine z , na forma algébrica.

61 O número complexo $2i$ é uma raiz cúbica de um número complexo z .

61.1. Determine, na forma algébrica, as restantes raízes cúbicas de z .

61.2. Considere o triângulo cujos vértices são as imagens, no plano complexo, das raízes cúbicas de z .

- Determine a sua área.
- Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a parte do triângulo que está contida no terceiro quadrante (eixos não incluídos).

62 Considere os números complexos:

$$w_1 = -1 - i \quad \text{e} \quad w_2 = \operatorname{cis} \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

62.1. Calcule $\frac{w_1^5}{1 + w_1}$ e apresente o resultado na forma algébrica.

62.2. Determine os valores de α que verificam a condição:

$$\overline{w_1 w_2} = \sqrt{2} w_2$$

62.3. Represente no plano de Argand o conjunto definido pela condição:

$$|z| \leq 3 \wedge \left(\frac{3\pi}{4} \leq \arg(z + w_1) \leq \pi \vee \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} w_1 \right)$$

63 Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos,

considere $z_1 = i$, $z_2 = \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$ e $z_3 = \operatorname{cis} \theta$

Sabe-se que z_1 e z_2 são raízes de índice n de um número complexo w .

63.1. Determine o menor valor de n .

63.2. Seja P o perímetro do polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice n do número complexo w .

- Determine o valor mínimo de P .
- Justifique que $P < 2\pi$, qualquer que seja o valor de n .

63.3. Determine o valor de θ pertencente ao intervalo $]-\pi, \pi]$, sabendo que $\frac{z_3}{z_1 - z_2}$ é um número real negativo.

63.4. Represente, no plano complexo, a região definida pela condição:

$$z\bar{z} \geq 1 \wedge z + \bar{z} \geq 0 \wedge z\bar{z} - 2(z + \bar{z}) \leq 3$$

64 Seja w um número complexo não nulo.

Mostre que:

64.1. se w e $\bar{w}$ são raízes de índice n de um mesmo número complexo z , então z é um número real;

64.2. se w e $-w$ são raízes de índice n de um mesmo número complexo z , então n é par.

- 1** Seja z um número complexo de argumento $\frac{6\pi}{5}$.

Qual poderá ser um argumento do número complexo $-\bar{z}$?

- (A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{4\pi}{5}$ (C) $\frac{9\pi}{5}$ (D) $-\frac{4\pi}{5}$

- 2** Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$.

Qual poderá ser um argumento do número complexo $i\bar{z}$?

- (A) $\frac{3\pi}{10}$ (B) $-\frac{\pi}{5}$ (C) $\frac{7\pi}{10}$ (D) $\frac{13\pi}{10}$

- 3** Considere o número complexo $z = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Um argumento de $-\bar{z}$ é:

- (A) $-\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{\pi}{5}$ (C) $\frac{4\pi}{5}$ (D) $\frac{6\pi}{5}$

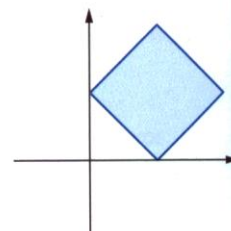
- 4** Considere o número complexo $z = 2 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{6} - i$.

O módulo de z é igual a:

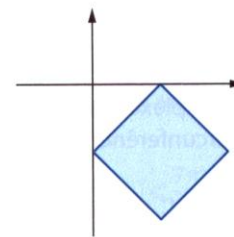
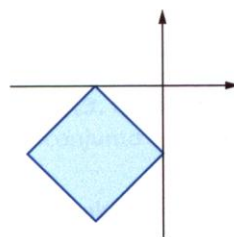
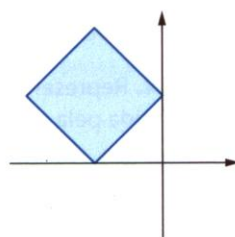
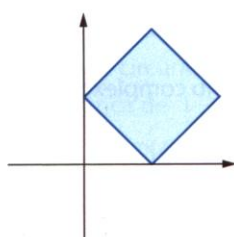
- (A) 1 (B) $\sqrt{7}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) 3

- 5** Na figura está representado, no plano complexo, um quadrado cujos vértices são as imagens geométricas de quatro números complexos: z_1 , z_2 , z_3 e z_4 .

Qual das figuras seguintes pode representar, no plano complexo, o quadrilátero cujos vértices são as imagens geométricas dos números complexos $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, $\bar{z}_3$ e $\bar{z}_4$?



- (A) (B) (C) (D)



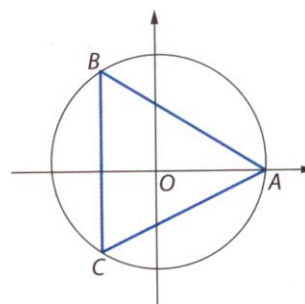
- 6** Sabe-se que u e v são raízes de índice n de um determinado número complexo z .

Então, pode-se afirmar que:

- (A) $\arg(u) = \arg(v)$ (B) $z^n = u$ (C) $|u| = |v|$ (D) $u = -v$

- 7 Na figura está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero $[ABC]$ inscrito numa circunferência de centro na origem. O ponto A é a imagem geométrica do número real 2. Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice B ?

(A) $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$ (B) $2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$ (C) $-1 + \sqrt{3}i$ (D) $-\sqrt{3} + i$

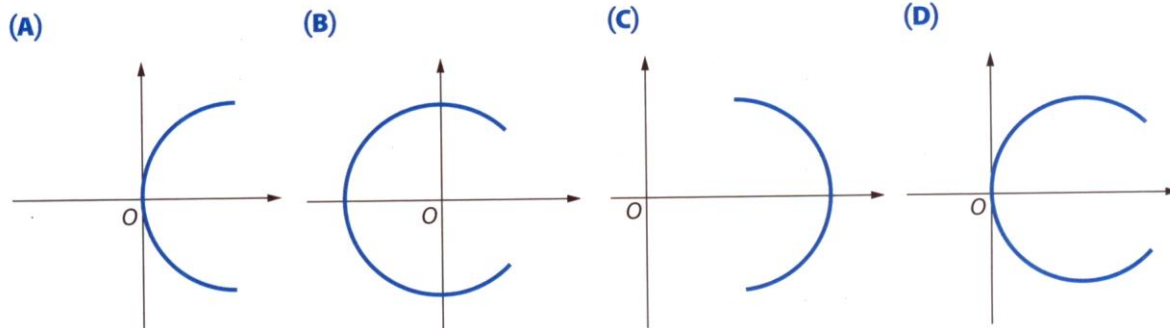


- 8 Sejam z_1 e z_2 duas das raízes de índice n de um número complexo z . Sabe-se que as imagens geométricas de z_1 e z_2 pertencem ao mesmo quadrante (eixos não incluídos). O valor de n pode ser:

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

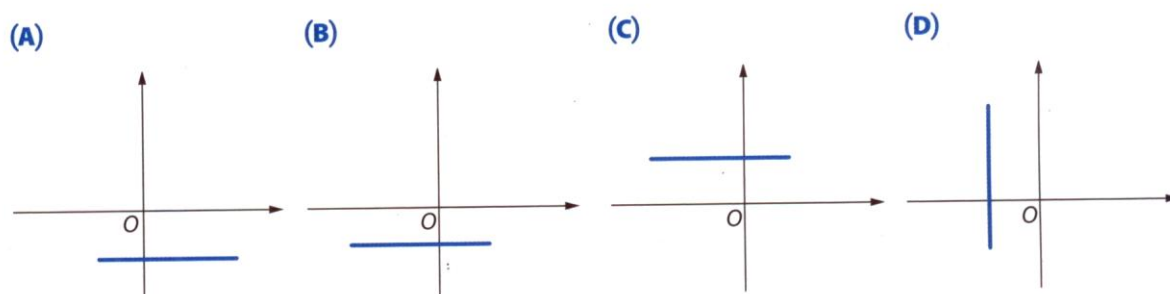
- 9 Qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1 \wedge \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{7\pi}{4} \right\}?$$



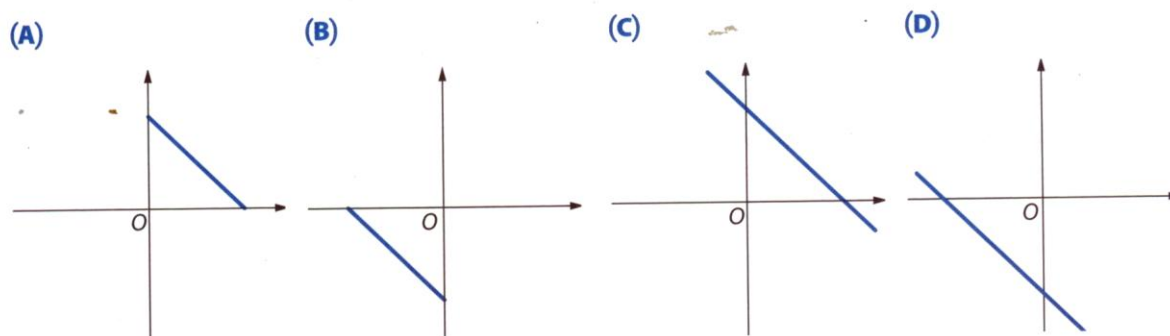
- 10 Qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2 \wedge \operatorname{Re}(iz) = 1 \wedge |z + 1| \geq |z + i| \right\}?$$



- 11 Qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \sqrt{2} \wedge |z| = |z + 1 + i| \right\}$$



- 12** $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos; i a unidade imaginária.

Seja:

$$z = (1 + i)(k + 2i) \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

Determine k de forma que:

12.1. z seja um imaginário puro;

12.2. $z = \bar{z}$

- 13** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i a unidade imaginária.

13.1. Considere o polinómio $P(z) = z^3 + 8$.

Verifique que -2 é um zero de $P(z)$.

Determine analiticamente os restantes zeros de $P(z)$ simplificando-os o mais possível.

13.2. Seja z um número complexo.

Mostre que:

$$\text{se } z = \bar{z}, \text{ então } z \in \mathbb{R}.$$

- 14** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e i a unidade imaginária.

14.1. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 - 4z^2 + 7z = 0$.

Apresente as soluções da forma mais simples possível.

14.2. Mostre que:

$$iz + \frac{\bar{z}}{i} \text{ é um número real, } \forall z \in \mathbb{C}$$

- 15** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

15.1. Verifique que $(-1 + i)^7 = -8(1 + i)$.

15.2. Determine o módulo e o argumento positivo mínimo de $\left(\frac{-1 + i}{1 + i\sqrt{3}}\right)^{10}$.

15.3. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação:

$$z^3 + 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}i$$

- 16** $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos; i é a unidade imaginária.

16.1. Sendo $z_1 = \frac{2}{1 - i^{25}} + \text{cis } \pi$, verifique que z_1 é um imaginário puro.

16.2. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 - 8z + 18 = 0$.

- 17** Considere o número complexo $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

17.1. Exprima na forma algébrica w^{12} .

17.2. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $2z^2 + 3iz + 2 = 0$.

- 18** Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 = \text{cis } \frac{\pi}{3} \bar{z}$.

19 Considere o conjunto dos números complexos.

Seja $z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$, verifique se existe algum $n \in \mathbb{N}$ para o qual z é um imaginário puro.

20 $\mathbb{C}$ é o conjunto dos complexos.

20.1. Sendo $z_1 = \frac{2i}{1-i^{25}} - \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, verifique se z_1 é um número real.

20.2. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 - 8z + 25 = 0$.

20.3. Sendo $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n$, verifique se existe algum $n \in \mathbb{N}$ para o qual z é um imaginário puro.

21 Considere os números complexos:

$$w = 16 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} \text{ e } z_1 = \sqrt{3} - i$$

21.1. Verifique que z_1 é uma das raízes quartas de w e determine as restantes.

21.2. Determine o perímetro do polígono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quartas de w .

22 Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2 + i$.

22.1. Verifique que $(z_1 - i\bar{z}_1)^6$ é um imaginário puro.

22.2. Seja $z_2 = \operatorname{cis} \alpha$ com $\alpha \in \left] \pi, \frac{5\pi}{4} \right]$.

Indique, justificando, em que quadrante se situa a imagem geométrica de $\frac{z_1}{z_2}$.

23 $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos; i a unidade imaginária.

Considere o número complexo $\omega = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

23.1. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação:

$$z^2 - \overline{z} \times \omega = 0$$

23.2. Determine o módulo e o argumento de $\left(\frac{\omega}{2} + 1\right)^3$.

24 Considere os números complexos $z_1 = a - i$ ($a \in \mathbb{R}$); $z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i$ e $z_3 = \frac{8}{-1 + \sqrt{3}i}$.

24.1. Sabendo que z_1 é uma raiz quadrada de um imaginário puro, determine a .

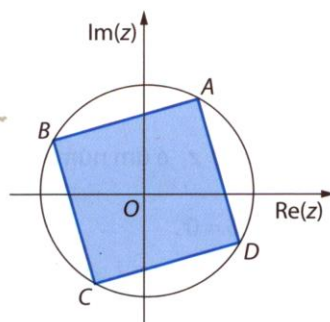
24.2. Calcule $\frac{z_2^2 + (1-i)^8}{(\bar{z}_3)^3}$ e apresente o resultado na forma trigonométrica.

24.3. Verifique que z_2 e z_3 são raízes de índice 6 do mesmo número complexo e verifique que esse número é real.

24.4. Verifique que $z_2^n + (\bar{z}_2)^n = 2^{2n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

24.5. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $\bar{z}z_2 - z^2 = 0$.

- 25** Na figura está representado, no plano complexo, um quadrado $[ABCD]$, inscrito numa circunferência C centrada na origem O do referencial.



O ponto A é a imagem geométrica do número complexo $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$.

25.1. Escreva uma condição em $\mathbb{C}$ que defina a referida circunferência.

25.2. Determine, na forma trigonométrica, o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto D .

25.3. Seja P um ponto da circunferência C .

Sabendo que P é a imagem geométrica de um número complexo w e que S é a imagem geométrica do número complexo $-iw$, determine o perímetro do triângulo $[POS]$.

- 26** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

26.1. Considere no plano complexo os pontos A , B e O , em que:

- A é a imagem geométrica de $z_1 = 2 \operatorname{cis} \alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi]$;
- B é a imagem geométrica de $\sqrt{3}iz_1$;
- O é a origem do referencial.

Determine o perímetro do triângulo $[AOB]$.

26.2. Prove que qualquer que seja o número natural n , o número complexo $(\sqrt{3} + i)^{6n+3}$ é um imaginário puro.

- 27** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 16 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right)$.

27.1. Mostre que $-iz_1 = \overline{z_1}$.

27.2. Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a circunferência inscrita no polígono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quartas de z_1 .

- 28** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - i$.

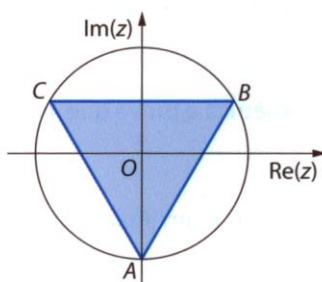
28.1. Justifique que o número complexo $u = \frac{z_1 + i^{35}}{6 + 3i}$ é um imaginário puro.

28.2. Resolva a equação:

$$\operatorname{cis} \frac{\pi}{2} - z_1 z^3 = 1$$

28.3. Defina, através de uma condição em $\mathbb{C}$, a região do plano interior à circunferência que passa na origem do referencial e que tem centro na imagem geométrica de z_1 .

- 29** Na figura está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero $[ABC]$, inscrito numa circunferência C centrada na origem O do referencial. O ponto A é a imagem geométrica de $-3i$.



- 29.1.** Escreva uma condição em $\mathbb{C}$ que defina a referida circunferência.
- 29.2.** Determine, na forma algébrica, o número complexo w cuja imagem geométrica é o ponto B .
- 29.3.** Seja P um ponto da circunferência C . Sabendo que P é a imagem geométrica de um número complexo z_1 e que S é a imagem geométrica do número complexo $2iz_1$, determine a área do triângulo $[POS]$.

- 30** Em $\mathbb{C}$, considere os números complexos $z_1 = \text{cis } \frac{\pi}{2}$ e $z_2 = \frac{2}{i^{23}}$.

- 30.1.** Sem recorrer à calculadora verifique que $(z_2 - z_1)^{10} = -1$.
- 30.2.** Calcule, na forma algébrica, as raízes cúbicas do número complexo z_1 .
- 30.3.** Escreva uma condição em $\mathbb{C}$ que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_2 e que passa na origem do referencial.

- 31** De dois números complexos z_1 e z_2 sabe-se que:

- um argumento de z_1 é $\frac{2\pi}{3}$;
- $z_2 = 3iz_1$

- 31.1.** Calcule $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4 - \left(\frac{z_1}{|z_1|}\right)^3$.

- 31.2.** Sejam A e B as imagens geométricas, no plano complexo, de z_1 e de z_2 , respetivamente. Seja O a origem do referencial.

Sabendo que z_1 é uma raiz cúbica de 8:

- a) determine z_2 na forma algébrica;
- b) determine a área do triângulo $[AOB]$.

- 32** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = 1 - i$.

- 32.1.** Resolva a equação $z \times z_1 = i^{11} + z_1 \times \bar{z}_1$.

- 32.2.** Determine $\frac{z_1^2 + \left(\sqrt{2} \text{cis } \frac{5\pi}{12}\right)^2}{\text{cis } \frac{3\pi}{2}}$ apresentando o resultado na forma algébrica.

- 32.3.** Seja $\omega = 8z_1^2$.

Determine a área do polígono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quartas de ω .

33 $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos; i a unidade imaginária.

Sejam:

$$\omega_1 = \frac{2}{\sqrt{3} - i} + i^{43}, \quad \omega_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \omega_3 = 2 + yi$$

33.1. Represente ω_1 na forma trigonométrica e prove que ω_1^{12} é um número real.

33.2. Mostre que:

Se $\frac{\omega_3}{\omega_2}$ é um número real, então $\omega_2 \omega_3$ é um imaginário puro.

33.3. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação:

$$z^4 + z \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} = 0$$

33.4. Represente graficamente (diagrama de Argand) o conjunto definido pela condição em $\mathbb{C}$:

$$|z - 1| \geq |z + 2| \wedge |z + 3| \geq 2 \wedge |\arg(z + 3)| < \frac{\pi}{4}$$

34 Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e i a unidade imaginária.

Represente graficamente (diagrama de Argand) o conjunto definido pela condição em $\mathbb{C}$:

$$|z - 1 + i| < 1 \wedge |\arg(z + i)| \leq \frac{\pi}{4} \wedge |z - 2 + 2i| > |z|$$

35 Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

35.1. Resolva a equação $i(z^3 - 4) = 4\sqrt{3}$. Apresente as soluções na forma trigonométrica.

35.2. Seja $z = \operatorname{cis} \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.

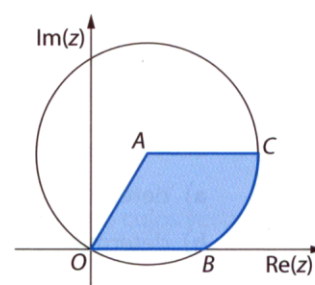
a) Mostre que $|z + 1|^2 = 2 + 2 \cos \theta$.

b) Sabendo que, no plano complexo, a imagem geométrica de z pertence ao primeiro quadrante e que $\operatorname{tg} \theta = \frac{5}{12}$, determine o valor exato de $|z + 1|$.

36 Na figura (diagrama de Argand):

- O é a origem do referencial;
- A é a imagem geométrica de $z_1 = \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$;
- a circunferência tem centro em A e passa em O , B e C ;
- B pertence ao eixo real;
- AC é paralela ao eixo real.

Defina por uma condição em $\mathbb{C}$ a região colorida (incluindo a fronteira).



37 Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - i$.

37.1. Determine o valor de $\frac{z_1^4 - 2i^{19}}{z_1(\bar{z}_1 - 3)}$.

Apresente o resultado na forma algébrica.

37.2. Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações:

a) $z^3 - 4\sqrt{2}z_1 = 0$ Apresente as soluções na forma trigonométrica.

b) $z\bar{z} + \bar{z} = z_1$ Apresente as soluções na forma algébrica.

c) $|z| + z - 4 = 4\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

4. Geometria

1. Distância entre dois pontos. Lugares geométricos no plano e no espaço

Distância entre dois pontos no plano e no espaço

Fórmula da distância entre dois pontos

A distância d entre dois pontos, num referencial cartesiano ortogonal e monométrico (o. m.), é dada por:

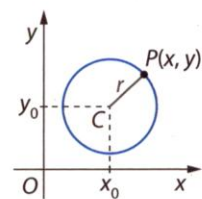
No plano, se $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$, $d = \overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

No espaço, se $A(x_0, y_0, z_0)$ e $B(x_1, y_1, z_1)$, $d = \overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$

Circunferência e círculo

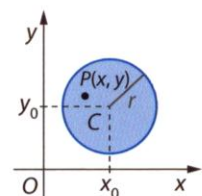
Num referencial o. m. xOy , a circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r é definida pela equação:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



Num referencial o. m. xOy , o círculo de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r é definido pela condição:

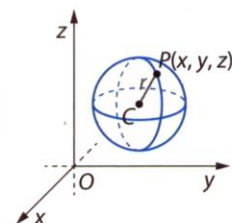
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$



Superfície esférica e esfera

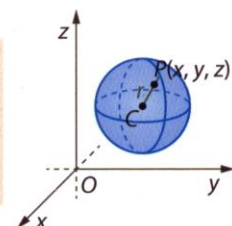
Num referencial o. m. $Oxyz$, a superfície esférica de centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raio r é definida pela equação:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$



Num referencial o. m. $Oxyz$, a esfera de centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raio r é definida pela condição:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2$$

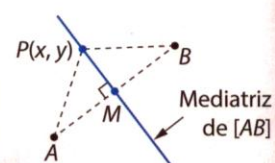


Mediatriz e plano mediador de um segmento de reta

A mediatriz de um segmento de reta $[AB]$, sendo, num referencial o. m. xOy , $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$, é o conjunto de pontos $P(x, y)$ equidistantes de A e de B .

Equação da mediatriz de $[AB]$:

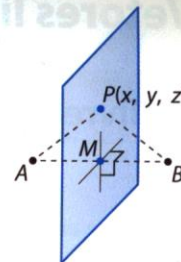
$$\overline{PA} = \overline{PB} \iff \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$



O plano mediador de um segmento de reta $[AB]$, sendo, num referencial o. m. $Oxyz$, $A(x_0, y_0, z_0)$ e $B(x_1, y_1, z_1)$, é o conjunto de pontos $P(x, y, z)$ equidistantes de A e de B .

Equação do plano mediador de $[AB]$:

$$\begin{aligned} \overline{PA} = \overline{PB} &\Leftrightarrow \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \end{aligned}$$



Exemplo 1

Considere um referencial o. m. $Oxyz$ e a condição:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 5 = 0$$

- 1.1. Mostre que, nesse referencial, a condição dada define uma superfície esférica de centro no ponto C de coordenadas $(4, 1, 0)$.
- 1.2. Mostre que o ponto $A(2, 3, -2)$ pertence à superfície esférica.
- 1.3. Seja α o plano mediador do segmento de reta $[AC]$. Mostre que $x - y + z = 0$ é uma equação que define α .
- 1.4. Os pontos R e S pertencem a α e têm ordenada nula. Sabe-se que $\overline{RC} = \overline{SC} = 9$. Determine as coordenadas de R e de S .

Resolução

$$\begin{aligned} 1.1. \quad x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 5 = 0 &\Leftrightarrow (x^2 - 8x) + (y^2 - 2y) + z^2 + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 8x + 16) - 16 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + z^2 + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 12 \end{aligned}$$

Trata-se da superfície esférica de centro $C(4, 1, 0)$ e raio $\sqrt{12}$.

- 1.2. Vamos substituir x por 2, y por 3 e z por -2 :

$$(2 - 4)^2 + (3 - 1)^2 + (-2)^2 = 12 \Leftrightarrow 4 + 4 + 4 = 12 \Leftrightarrow 12 = 12$$

A igualdade obtida é verdadeira. Logo, o ponto A pertence à superfície esférica.

- 1.3. $A(2, 3, -2)$; $C(4, 1, 0)$. Seja $P(x, y, z)$ um ponto de α .

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = (x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 0)^2$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 4z + 4 &= \\ = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 + z^2 & \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4x - 4y + 4z = 0 \Leftrightarrow x - y + z = 0$$

Portanto, $\alpha: x - y + z = 0$

- 1.4. Designemos por P os pontos de α tais que $y = 0$.

Então, $P(x, y, z)$ com $y = 0 \wedge x - y + z = 0 \Leftrightarrow$

$$y = 0 \wedge x - 0 + z = 0 \Leftrightarrow y = 0 \wedge z = -x, \text{ ou seja, } P(x, 0, -x).$$

Pretendemos determinar P tais que $\overline{PC} = 9$.

$$\overline{PC} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 4)^2 + (0 - 1)^2 + (-x - 0)^2} = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + 1 + x^2 = 81$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \vee x = -4$$

Portanto, $R(8, 0, -8)$ e $S(-4, 0, 4)$ ou vice-versa.

Verifica 1

Considere, num referencial o. m. xOy , a circunferência que tem centro no ponto A e que passa pela origem do referencial. Sabe-se que o ponto A tem ordenada igual a 4 e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

- 1.1. Justifique que o ponto A tem abscissa 4.

- 1.2. Determine uma equação da circunferência.

- 1.3. Seja C o ponto da circunferência de ordenada nula e abscissa positiva.

Mostre que a abscissa de C é igual a 8.

- 1.4. Seja r a mediatriz de $[AC]$. Mostre que r pode ser definida pela equação:

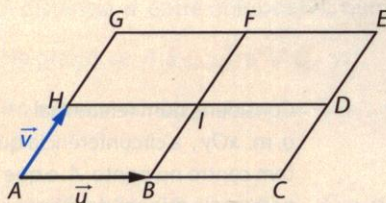
$$y = x - 4$$

- 1.5. Determine as coordenadas do ponto da reta r , com abscissa positiva, cuja distância a A é igual a 20.

2. Vetores livres no plano e no espaço

Vetor livre

Chama-se **vetor livre** ao conjunto de todos os segmentos de reta orientados que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

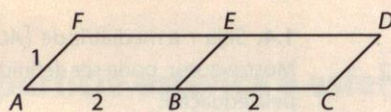


$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HI} = \dots$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{BI} = \dots$$

Norma de um vetor

Chama-se **norma** de um vetor $\vec{u}$ e representa-se por $\|\vec{u}\|$ à medida do comprimento de qualquer segmento de reta que represente o vetor $\vec{u}$.



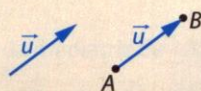
$$\|\overrightarrow{AF}\| = 1; \|\overrightarrow{AB}\| = 2; \|\overrightarrow{AC}\| = 4$$

O vetor de norma igual a 0 chama-se **vetor nulo** e representa-se por $\vec{0}$.

Ao vetor que tem a mesma direção, o mesmo comprimento e sentido contrário ao do vetor $\vec{u}$ chama-se **vetor simétrico** de $\vec{u}$ e representa-se por $-\vec{u}$.

Soma de um ponto com um vetor

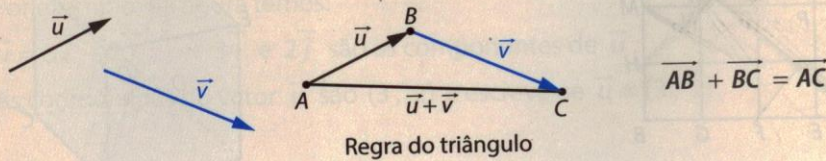
Dados um ponto A e um vetor $\vec{u}$, chama-se **soma** do ponto A com o vetor $\vec{u}$ ao ponto B tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.



$$A + \vec{u} = B \iff \overrightarrow{AB} = \vec{u}$$

Adição de vetores

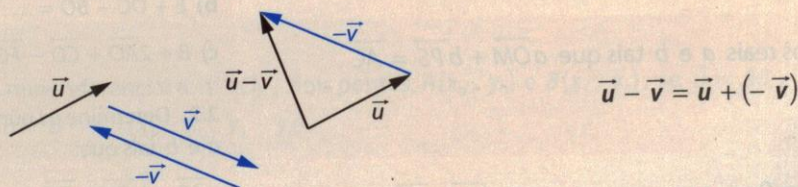
Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, chama-se soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ ao vetor $\vec{u} + \vec{v}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



A adição de vetores é comutativa, associativa, tem elemento neutro (o vetor nulo) e para cada vetor $\vec{u}$ existe o vetor simétrico de $\vec{u}$, $-\vec{u}$, tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$.

Subtração de vetores

Para calcular a diferença entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ calcula-se a soma de $\vec{u}$ com o simétrico de $\vec{v}$.



Multiplicação de um número real por um vetor

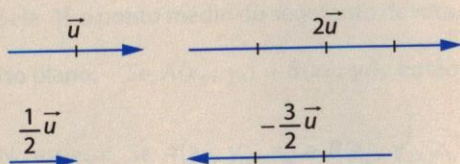
Dado um número real $k \neq 0$ e um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$, o produto de k por $\vec{u}$ é o vetor $k\vec{u}$, que tem:

- a direção de $\vec{u}$;
- norma: $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$;
- o sentido de $\vec{u}$ se $k > 0$ e o sentido de $-\vec{u}$ se $k < 0$.

Se $k = 0$, $k\vec{u} = \vec{0}$.

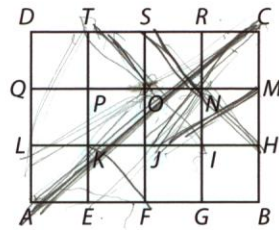
Vetores colineares

Dois vetores não nulos, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, são colineares se, e só se, existe um número real $k \neq 0$ tal que $\vec{v} = k\vec{u}$.
Vetores colineares têm a mesma direção.



Exemplo 2

Na figura, $[ABCD]$ é um retângulo decomposto em 12 quadrados, geometricamente iguais, de lado 1.



2.1. Complete as expressões seguintes usando a designação de um ponto ou de um vetor, de modo a obter afirmações verdadeiras.

- a) $A + \overrightarrow{EN} = \dots$ b) $\dots + 2\overrightarrow{KF} = I$
 c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{TI} + \overrightarrow{CO} = \dots$ d) $\overrightarrow{MJ} - 2\overrightarrow{SN} = \dots$

2.2. Determine:

- a) $\|\overrightarrow{AB}\|$ b) $\|\overrightarrow{BC}\|$ c) $\|\overrightarrow{AC}\|$

2.3. Determine os números reais a e b tais que $a\overrightarrow{OM} + b\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{AC}$.

Resolução

2.1. a) $A + \overrightarrow{EN} = A + \overrightarrow{AO} = O$ ($\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{AO}$)

b) $\dots + 2\overrightarrow{KF} = I \Leftrightarrow T + \overrightarrow{TI} = I$ ($2\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{TI}$)

c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{TI} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{TL}$

d) $\overrightarrow{MJ} - 2\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{MJ} - \overrightarrow{SH} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{HS} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{MD}$

2.2. a) $\|\overrightarrow{AB}\| = 4\|\overrightarrow{AE}\| = 4 \times 1 = 4$

b) $\|\overrightarrow{BC}\| = 3\|\overrightarrow{BH}\| = 3 \times 1 = 3$

c) $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2$ (Teorema de Pitágoras)
 $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 25 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = 5$

2.3. $a\overrightarrow{OM} + b\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}$

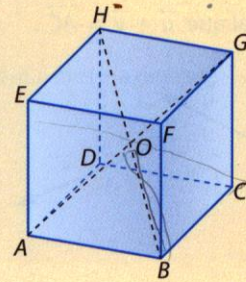
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$ e $\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{EJ} = 3\overrightarrow{PS}$

Portanto, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{PS}$.

Logo, $a = \frac{1}{2}$ e $b = 3$.

Verifica 2

Considere o cubo $[ABCDEFGH]$, representado na figura seguinte.



As diagonais $[AG]$ e $[BH]$ intersectam-se no ponto O .

2.1. Complete as expressões seguintes usando a designação de um ponto ou de um vetor, de modo a obter afirmações verdadeiras.

- a) $\dots + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BG}$
 b) $E + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BO} = \dots$
 c) $B + 2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{FG} = \dots$

2.2. Determine os números reais a e b tais que:

$a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{BG}$

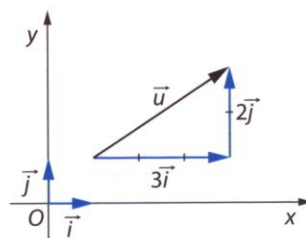
3. Vetores em referenciais cartesianos do plano e do espaço

Dado um referencial o. n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ do plano ou $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ do espaço, qualquer vetor, do plano ou do espaço, pode ser decomposto na soma de múltiplos dos vetores unitários referidos.

Por exemplo, na figura temos:

$$\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}; \quad 3\vec{i} \text{ e } 2\vec{j} \text{ são as componentes de } \vec{u}.$$

As coordenadas do vetor $\vec{u}$ são $(3, 2)$ e escreve-se $\vec{u} = (3, 2)$.



Igualdade de vetores

No plano:

Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, então $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2$.

No espaço:

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, então $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2 \wedge u_3 = v_3$.

Vetor como diferença de dois pontos

Dados, num referencial o. n. xOy , dois pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$, se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, então $\vec{u} = B - A = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$.

Esta relação também é válida no espaço.

Adição de vetores e produto de um número real por um vetor

Num referencial o. n. xOy :

- Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, então $\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$.
- Se $k \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} = (u_1, u_2)$, então $k\vec{u} = k(u_1, u_2) = (ku_1, ku_2)$.

Estas operações definem-se no espaço de forma análoga.

Norma de um vetor

No plano: Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$, então $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

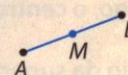
No espaço: Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, então $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

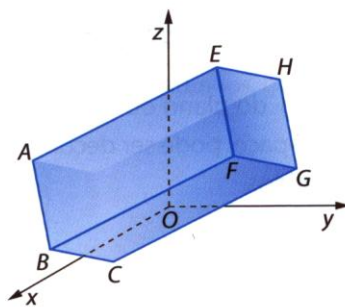
No plano: Se $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$, então $M\left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right)$.

No espaço: Se $A(x_0, y_0, z_0)$ e $B(x_1, y_1, z_1)$, então $M\left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{z_0 + z_1}{2}\right)$.



Exemplo 3

Na figura está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$ (o vértice D não é visível).



Admita que as coordenadas dos pontos A , B , C e E são $(16, -3, 10)$, $(20, 1, 3)$, $(12, 2, -1)$ e $(14, 13, 18)$, respectivamente.

- 3.1.** Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AE}$.
- 3.2.** Prove que as coordenadas do ponto G são $(10, 18, 7)$.
- 3.3.** Determine o volume do prisma.
- 3.4.** Escreva uma equação que defina a superfície esférica de diâmetro $[AE]$.

Resolução

$$\begin{aligned} \mathbf{3.1.} \quad \overrightarrow{AE} &= E - A = (14, 13, 18) - (16, -3, 10) = \\ &= (14 - 16, 13 + 3, 18 - 10) = (-2, 16, 8) \\ \overrightarrow{AE} &= (-2, 16, 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{3.2.} \quad \mathbf{G} &= \mathbf{C} + \overrightarrow{\mathbf{CG}} \\ &= \mathbf{C} + \overrightarrow{\mathbf{AE}} \\ &= (12, 2, -1) + (-2, 16, 8) = \\ &= (12 - 2, 2 + 16, -1 + 8) = (10, 18, 7) \end{aligned}$$

Portanto, G tem coordenadas $(10, 18, 7)$.

$$\begin{aligned} \text{3.3. } \overrightarrow{AB} &= B - A = (20, 1, 3) - (16, -3, 10) = \\ &= (20 - 16, 1 + 3, 3 - 10) = (4, 4, -7) \\ \|\overrightarrow{AB}\| &= \sqrt{4^2 + 4^2 + (-7)^2} = \sqrt{16 + 16 + 49} = \sqrt{81} = 9 \end{aligned}$$

A base do prisma é um quadrado de lado 9.

$$\overrightarrow{AE} = (-2, 16, 8)$$

$$\|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{(-2)^2 + 16^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 256 + 64} = \sqrt{324} = 18$$

A altura do prisma é igual a 18.

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \times \text{altura} = 9 \times 9 \times 18 = 1458 \text{ u.v.}$$

3.4. $A(16, -3, 10); \quad E(14, 13, 18)$

O centro da superfície esférica é M , ponto médio de $[AE]$.

$$M\left(\frac{16+14}{2}, \frac{-3+13}{2}, \frac{10+18}{2}\right)$$

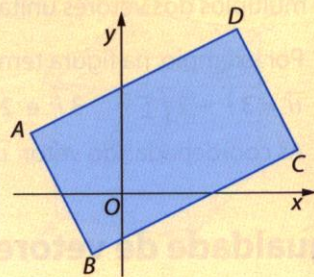
Logo, o centro é $M(15, 5, 14)$.

Raio da superfície esférica: $r = \frac{\|\overrightarrow{AM}\|}{2} = \frac{\|\overrightarrow{AE}\|}{2} = \frac{18}{2} = 9$

Equação da superfície esférica: $(x - 15)^2 + (y - 5)^2 + (z - 14)^2 = 81$

Verifica 3

Na figura está representado, em referencial o. n. xOy , um retângulo $[ABCD]$.



Sabe-se que os pontos A , B e C têm coordenadas $(-3, 2)$, $(-1, -2)$ e $(5, 1)$, respectivamente.

- 3.1.** Determine as coordenadas do ponto D .

3.2. Determine $\left\| \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \right\|$.

3.3. Escreva uma equação que defina a circunferência de diâmetro $[AC]$.

3.4. Justifique que $[BD]$ também é um diâmetro da circunferência.

3.5. Seja P um ponto do eixo Oy .

Determine as coordenadas de P sabendo que:

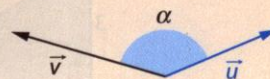
a) $\|\overrightarrow{AP}\| = 5$

b) o triângulo $[ABP]$ é isósceles, sendo o lado $[AB]$ diferente dos outros dois.

4. Produto escalar de dois vetores

Ângulo de dois vetores

Ângulo de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, é o ângulo convexo formado por dois segmentos de reta, seus representantes, com origem no mesmo ponto.



A amplitude do ângulo de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representa-se por $\widehat{\vec{u}\vec{v}}$ ou por $\widehat{\vec{v}\vec{u}}$ e $0^\circ < \widehat{\vec{u}\vec{v}} < 180^\circ$.

Produto escalar de dois vetores

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, do plano ou do espaço, o produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o número real que se representa por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e é dado por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}\vec{v}})$$

Produto escalar expresso nas coordenadas dos vetores

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, definidos pela suas coordenadas num referencial o. n., o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é dado por:

No plano: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1v_1 + u_2v_2$

No espaço: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

Consequências da definição de produto escalar de dois vetores

Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então:

• $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$

• $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

• $\cos(\widehat{\vec{u}\vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$

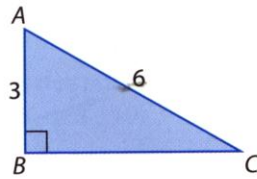
Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriedades do produto escalar de dois vetores:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$, quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

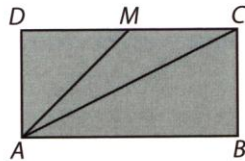
Exemplo 4

- 4.1. Considere o triângulo $[ABC]$, retângulo em B , tal que $\overline{AC} = 6$ e $\overline{AB} = 3$.



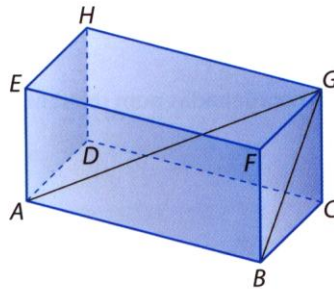
Determine $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- 4.2. Considere o retângulo $[ABCD]$ em que $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ e M é o ponto médio de $[DC]$.



Mostre que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = 3\|\overrightarrow{AD}\|^2$.

- 4.3. Considere o paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$ representado na figura.



- a) Mostre que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \|\overrightarrow{AB}\|^2$.
 b) Sabendo que $[BCGF]$ é um quadrado e que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 9$ e $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = 2$, determine o volume do prisma.

- 4.4. Num referencial o. n. $Oxyz$ considere os vetores:

$$\vec{u} = (2, 1, -3), \vec{v} = (1, 0, 2) \text{ e } \vec{w} = (1, -2, -1).$$

- a) Calcule $(2\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{w})$.
 b) Calcule a amplitude, em graus com aproximação às décimas, do ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$.

- 4.5. Num referencial o. n. xOy considere os vetores

$$\vec{u} = (k - 1, 3) \text{ e } \vec{v} = (-3, 2).$$

Determine k sabendo que:

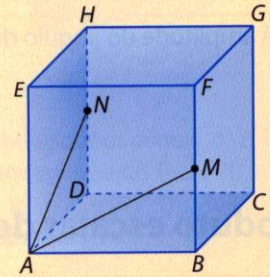
- a) $\|\vec{u}\| = 5$
 b) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares;
 c) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares.

Verifica 4

- 4.1. Considere um triângulo $[ABC]$, equilátero, de lado 2. Determine:

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
 b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

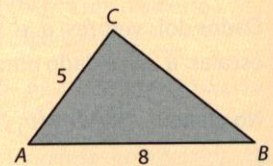
- 4.2. Seja $[ABCDEFGH]$ um cubo de aresta a .



M e N são os pontos médios das arestas $[BF]$ e $[DH]$, respectivamente.

Mostre que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{a^2}{4}$.

- 4.3. $[ABC]$ é um triângulo cuja área é igual a 16.



$\overline{AB} = 8$ e $\overline{AC} = 5$.

- a) Determine $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
 b) Determine, em graus com uma casa decimal, a amplitude do ângulo BAC .

(continua)

Resolução

$$4.1. \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(\widehat{AB \ AC}) = \\ = 3 \times 6 \times \frac{\vec{AB}}{\vec{AC}} = 18 \times \frac{3}{6} = 9$$

$$4.2. \vec{AC} \cdot \vec{AM} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AD} + \vec{DM}) = \\ = \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{DM} + \vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{BC} \cdot \vec{DM} \\ = 0 + (2\vec{DM}) \cdot \vec{DM} + \vec{AD} \cdot \vec{AD} + 0 \\ = 2\|\vec{DM}\|^2 + \|\vec{AD}\|^2 = 2\|\vec{AD}\|^2 + \|\vec{AD}\|^2 = 3\|\vec{AD}\|^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{AB} \perp \vec{AD}, \\ \vec{AB} = 2\vec{DM}, \\ \vec{BC} = \vec{AD} \text{ e} \\ \vec{BC} \perp \vec{DM} \end{array} \right.$$

$$4.3. \text{ a) } \vec{AB} \cdot \vec{AG} = \vec{AB} \cdot (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG}) = \\ = \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AB} \cdot \vec{CG} = \\ = \|\vec{AB}\|^2 + 0 + 0 = \|\vec{AB}\|^2$$

$$\text{b) } \vec{AB} \cdot \vec{AG} = 9 \Leftrightarrow \|\vec{AB}\|^2 = 9 \Leftrightarrow \|\vec{AB}\| = 3 \quad \left| \vec{AB} \cdot \vec{AG} = \|\vec{AB}\|^2 \right.$$

$$\vec{GA} \cdot \vec{GB} = (\vec{GB} + \vec{BA}) \cdot \vec{GB} = \\ = \vec{GB} \cdot \vec{GB} + \vec{BA} \cdot \vec{GB} = \\ = \|\vec{GB}\|^2 + 0 = \|\vec{GB}\|^2$$

$$\vec{GA} \cdot \vec{GB} = 2 \Leftrightarrow \|\vec{GB}\|^2 = 2$$

Área do quadrado $[BCGF] =$

$$= \|\vec{BC}\| \times \|\vec{CG}\| = \|\vec{BC}\| \times \|\vec{BC}\| = \|\vec{BC}\|^2$$

$$\|\vec{BC}\|^2 + \|\vec{CG}\|^2 = \|\vec{GB}\|^2$$

$$2\|\vec{BC}\|^2 = 2 \Leftrightarrow \|\vec{BC}\|^2 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\vec{BC}\| = \|\vec{CG}\| \\ \text{Teorema de} \\ \text{Pitágoras} \\ \|\vec{BC}\| = \|\vec{CG}\| \text{ e} \\ \|\vec{GB}\|^2 = 2 \end{array} \right.$$

Portanto, a área do quadrado $[BCGF] = \|\vec{BC}\|^2 = 1$.

$$V_{\text{prisma}} = \text{área da base} \times \text{altura} = \|\vec{BC}\|^2 \times \|\vec{AB}\| = 1 \times 3 = 3 \text{ u.v.}$$

$$4.4. \text{ a) } (2\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{w}) = [2 \times (1, 0, 2)] \cdot [(2, 1, -3) - (1, -2, -1)] = \\ = (2, 0, 4) \cdot (1, 3, -2) = \\ = 2 \times 1 + 0 \times 3 - 4 \times 2 = -6$$

$$\text{b) } \cos(\widehat{\vec{u} \ \vec{w}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{w}\|} = \frac{(2, 1, -3) \cdot (1, -2, -1)}{\sqrt{4+1+9} \times \sqrt{1+4+1}} \\ = \frac{2-2+3}{\sqrt{14} \times 6} = \frac{3}{\sqrt{84}}$$

$$\text{Se } \cos(\widehat{\vec{u} \ \vec{w}}) = \frac{3}{\sqrt{84}}, \text{ então } \widehat{\vec{u} \ \vec{w}} \approx 70,9^\circ.$$

Verifica 4

4.4. Num referencial o. n. xOy considere os vetores:

$$\vec{u} = (-1, 2), \vec{v} = (2, -3) \text{ e } \vec{w} = (-1, -1).$$

a) Calcule $(2\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{w})$.

b) Calcule a amplitude, em graus com aproximação às décimas, do ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$.

4.5. Num referencial o. n. $Oxyz$ considere os vetores:

$$\vec{u} = (-2k, k, 2) \text{ e }$$

$$\vec{v} = (-8, 4, 1).$$

Determine k sabendo que:

a) $\|\vec{u}\| = \|2\vec{v}\|$

b) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares;

c) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares.

$$\begin{aligned}
 4.5. \text{ a) } \|\vec{u}\| = 5 &\Leftrightarrow \sqrt{(k-1)^2 + 9} = 5 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (k-1)^2 + 9 = 25 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (k-1)^2 = 16 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow k-1 = -4 \vee k-1 = 4 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow k = -3 \vee k = 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \vec{u} &= \lambda \vec{v} \Leftrightarrow (k-1, 3) = \lambda(-3, 2) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (k-1, 3) = (-3\lambda, 2\lambda) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} k-1 = -3\lambda \\ 3 = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \times \frac{3}{2} + 1 \\ \lambda = \frac{3}{2} \end{cases} \\
 \text{Logo, } k &= -\frac{7}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \vec{u} \perp \vec{v} &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (k-1, 3) \cdot (-3, 2) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -3k + 3 + 6 = 0 \Leftrightarrow -3k = -9 \Leftrightarrow k = 3
 \end{aligned}$$

5. Retas no plano e no espaço

Equação vetorial de uma reta

Dados um ponto A e um vetor não nulo, do plano ou do espaço, existe uma única reta r que passa no ponto A e tem a direção do vetor $\vec{u}$.

Uma equação vetorial da reta r é:

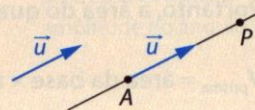
$$P = A + k\vec{u}, \quad k \in \mathbb{R}$$

P é um ponto qualquer da reta e $\vec{u}$ é um vetor diretor da reta.

Considerando as coordenadas dos pontos P e A e as coordenadas do vetor $\vec{u}$, a equação vetorial da reta r tem a forma:

$$\text{No plano: } (x, y) = (x_0, y_0) + k(u_1, u_2), \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\text{No espaço: } (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k(u_1, u_2, u_3), \quad k \in \mathbb{R}$$



Do mesmo modo, também se pode definir vetorialmente uma semirreta e um segmento de reta:

$$\text{Semirreta } \overrightarrow{AB}: \quad P = A + k\overrightarrow{AB}, \quad k \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\text{Segmento de reta } [AB]: \quad P = A + k\overrightarrow{AB}, \quad k \in [0, 1]$$

Equação reduzida de uma reta no plano

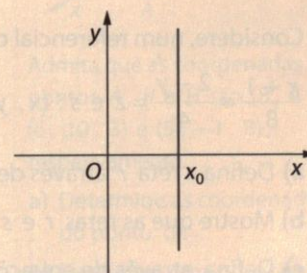
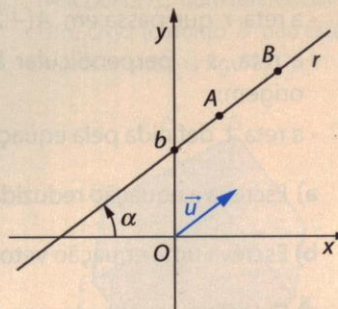
No plano, a equação reduzida de uma reta r , não vertical, é do tipo:

$$y = mx + b, \text{ com } m, b \in \mathbb{R}$$

- m é o declive e b é a ordenada na origem.
- Se $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$ são pontos da reta r , então:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

- Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$ é um vetor diretor da reta r , então $m = \frac{u_2}{u_1}$.
- Se α é a inclinação da reta r (ângulo não negativo que a reta faz com o semieixo positivo Ox), então $m = \operatorname{tg} \alpha$.
- Uma equação da uma reta r de que se conhece um ponto $A(x_0, y_0)$ e o declive m é: $y - y_0 = m(x - x_0)$.
- Se m ($m \neq 0$) é o declive de uma reta r , então $m' = -\frac{1}{m}$ é o declive de qualquer reta perpendicular à reta r .
- Uma reta vertical não tem declive definido. É definida por uma equação do tipo $x = x_0$.



Equações cartesianas de uma reta no espaço

Equações cartesianas da reta r que passa no ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e que tem a direção do vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ com $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ e $u_3 \neq 0$:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \quad \begin{array}{ll} \leftarrow A(x_0, y_0, z_0) & \text{— Ponto da reta} \\ \leftarrow \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) & \text{— Vetor diretor da reta} \end{array}$$

- Se $\vec{u} = (0, u_2, u_3)$, com $u_2 \neq 0$ e $u_3 \neq 0$, $r: x = x_0 \wedge \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$.
- Se $\vec{u} = (0, 0, u_3)$, com $u_3 \neq 0$, $r: x = x_0 \wedge y = y_0$.

Ângulo de duas retas. Retas paralelas, retas perpendiculares e retas coplanares

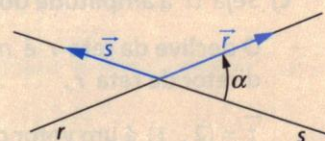
Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores diretores das retas r e s , respetivamente.

- Se α é o ângulo formado pelas retas r e s , então:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|}$$

- $r \parallel s \iff \vec{r} \parallel \vec{s} \iff \exists k \in \mathbb{R} : \vec{r} = k\vec{s}$
- $r \perp s \iff \vec{r} \perp \vec{s} \iff \vec{r} \cdot \vec{s} = 0$

Dois retas r e s , do espaço, são coplanares se, e só se, $r \parallel s$ ou r e s são concorrentes.



Exemplo 5

5.1. Considere, num referencial o. n. xOy :

- a reta r que passa em $A(-2, 6)$ e $B(8, 1)$;
- a reta s , perpendicular à reta r e com a mesma ordenada na origem;
- a reta t definida pela equação $(x, y) = (4, 3) + k(2, 1)$, $k \in \mathbb{R}$.

- Escreva a equação reduzida da reta r .
- Escreva uma equação vetorial da reta s .
- Calcule a amplitude, em graus com aproximação às décimas, do ângulo das retas r e t .

5.2. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, as retas r e s definidas por:

$$r: \frac{x+1}{8} = \frac{2-y}{4} = z \text{ e } s: (x, y, z) = (20, 4, -8) + k(1, 2, -2), k \in \mathbb{R}$$

- Defina a reta r através de uma equação vetorial.
- Mostre que as retas r e s são concorrentes.
- Defina, através de equações cartesianas, a reta que passa na origem do referencial e é paralela à reta r .

Resolução

5.1. a) $A(-2, 6)$ e $B(8, 1)$; seja $y = mx + b$ a equação da reta r .

$$m = \frac{1-6}{8+2} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$r: y - 6 = -\frac{1}{2}(x + 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - 1 + 6 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Usou-se a fórmula} \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{array} \right.$$

$$r: y = -\frac{1}{2}x + 5$$

b) O declive da reta r é $m = -\frac{1}{2}$.

Logo, o declive da reta s , perpendicular à reta r , é

$$m' = -\frac{1}{m} = 2.$$

Se a reta s tem declive $m' = 2$, então $\vec{s} = (1, 2)$ é um vetor diretor dessa reta.

Se a reta s tem a mesma ordenada na origem, $b = 5$, que a reta r , então o ponto de coordenadas $(0, 5)$ pertence à reta s .

Portanto $(x, y) = (0, 5) + k(1, 2)$, $k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta s .

c) Seja α a amplitude do ângulo das retas r e t .

O declive da reta r é $m = -\frac{1}{2}$. Logo, $\vec{r} = (2, -1)$ é um vetor diretor da reta r .

$\vec{t} = (2, 1)$ é um vetor diretor da reta t .

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{t}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{t}\|} = \frac{|(2, -1) \cdot (2, 1)|}{\sqrt{4+1} \times \sqrt{4+1}} = \frac{|4-1|}{5} = \frac{3}{5}$$

Se $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, então $\alpha \approx 53,1^\circ$.

Verifica 5

5.1. Considere, num referencial o. n. xOy , os pontos $A(-3, -1)$ e $B(6, -4)$.

- Escreva a equação reduzida da reta r que passa em A e B .
- Escreva uma equação vetorial da reta s que passa no ponto A e é perpendicular à reta r .
- Calcule a amplitude, em graus, do ângulo das retas s e t , sendo t definida pela equação $y = -2x$.

(continua)

5.2. a) $r: \frac{x+1}{8} = \frac{2-y}{4} = z \Leftrightarrow \frac{x+1}{8} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z}{1}$

A reta r passa no ponto $A(-1, 2, 0)$ e tem a direção do vetor $\vec{r} = (8, -4, 1)$.

$$r: (x, y, z) = (-1, 2, 0) + k(8, -4, 1), k \in \mathbb{R}$$

b) Seja R um ponto genérico da reta r :

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (-1, 2, 0) + k(8, -4, 1), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = (-1, 2, 0) + (8k, -4k, k), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = (-1 + 8k, 2 - 4k, k), k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Portanto, R tem coordenadas $(-1 + 8k, 2 - 4k, k), k \in \mathbb{R}$.

Seja S um ponto genérico da reta s :

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (20, 4, -8) + \lambda(1, 2, -2), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = (20 + \lambda, 4 + 2\lambda, -8 - 2\lambda), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Logo, S tem coordenadas $(20 + \lambda, 4 + 2\lambda, -8 - 2\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$.

As retas r e s são concorrentes se existirem números reais k e λ tais que:

$$(-1 + 8k, 2 - 4k, k) = (20 + \lambda, 4 + 2\lambda, -8 - 2\lambda), k, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(-1 + 8k, 2 - 4k, k) = (20 + \lambda, 4 + 2\lambda, -8 - 2\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 8k = 20 + \lambda \\ 2 - 4k = 4 + 2\lambda \\ k = -8 - 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -8 - 2\lambda \\ -1 + 8(-8 - 2\lambda) = 20 + \lambda \\ 2 - 4k = 4 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -8 - 2\lambda \\ -1 - 64 - 16\lambda = 20 + \lambda \\ 2 - 4k = 4 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -8 - 2\lambda \\ \lambda = -5 \\ -6 = -6 \end{cases}$$

O sistema é possível sendo a sua solução $k = 2 \wedge \lambda = -5$.

Para $k = 2$,

$$(-1 + 8k, 2 - 4k, k) = (-1 + 16, 2 - 8, 2) = (15, -6, 2).$$

As retas r e s são concorrentes no ponto de coordenadas $(15, -6, 2)$.

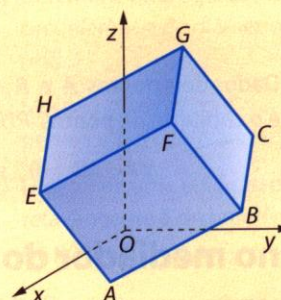
c) A reta em causa passa no ponto $O(0, 0, 0)$ e tem a direção do vetor $\vec{r} = (8, -4, 1)$.

Logo, pode ser definida pelas equações:

$$\frac{x-0}{8} = \frac{y-0}{-4} = \frac{z-0}{1} \Leftrightarrow \frac{x}{8} = -\frac{y}{4} = z$$

Verifica 5

5.2. Considere o cubo $[ABCDEFGH]$, num referencial o. n. $Oxyz$ (o ponto D não está representado na figura).



Admita que as coordenadas dos pontos A , B e H são $(8, 4, 0)$, $(6, 10, 3)$ e $(5, -1, 8)$, respetivamente.

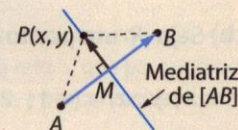
- Determine as coordenadas do ponto G .
- Determine uma equação vetorial da reta AB .
- Determine as coordenadas do ponto de interseção da reta AB com o plano yOz .
- Defina, através de equações cartesianas, a reta AG .
- Calcule a amplitude, em graus com aproximação às décimas, do ângulo das retas AB e AG .
- Determine a área da secção produzida no cubo pelo plano $[PBC]$ em que P é o ponto de $[EF]$ tal que $\overline{PF} = 2,4$.

6. Conjuntos de pontos definidos por condições no plano e no espaço

Mediatriz do segmento de reta $[AB]$

Dados dois pontos A e B , do plano, a mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é o conjunto de pontos $P(x, y)$ do plano que satisfazem a condição:

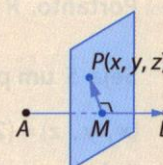
$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \text{ sendo } M \text{ o ponto médio de } [AB].$$



Plano mediador do segmento de reta $[AB]$

Dados dois pontos A e B , do espaço, o plano mediador do segmento de reta $[AB]$ é o conjunto de pontos $P(x, y, z)$ do espaço que satisfazem a condição:

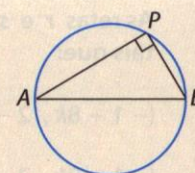
$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \text{ sendo } M \text{ o ponto médio de } [AB].$$



Circunferência de diâmetro $[AB]$

Dados dois pontos A e B , do plano, a circunferência de diâmetro $[AB]$ é o conjunto de pontos $P(x, y)$ do plano que satisfazem a condição:

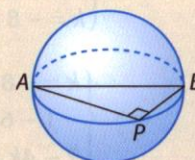
$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$$



Superfície esférica de diâmetro $[AB]$

Dados dois pontos A e B , do espaço, a superfície esférica de diâmetro $[AB]$ é o conjunto de pontos $P(x, y, z)$ do espaço que satisfazem a condição:

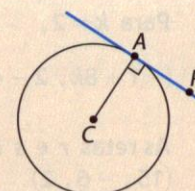
$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$$



Reta tangente a uma circunferência

Sendo A um ponto de uma circunferência de centro C , a reta tangente à circunferência no ponto A é o conjunto de pontos $P(x, y)$ que satisfazem a condição:

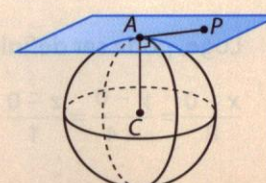
$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$



Plano tangente a uma superfície esférica

Sendo A um ponto de uma superfície esférica de centro C , o plano tangente à superfície esférica no ponto A é o conjunto de pontos $P(x, y, z)$ que satisfazem a condição:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$



Exemplo 6

- 6.1.** Considere, num referencial o.n. $Oxyz$ os pontos $A(4, 0, 1)$, $B(2, -2, 1)$ e $C(2, -1, 2)$.
- Determine uma equação da superfície esférica de diâmetro $[AB]$.
 - Mostre que o ponto C pertence à superfície esférica.
 - Mostre que o plano de equação $x = z$ é tangente à superfície esférica no ponto C .
- 6.2.** Considere, num referencial o.n. xOy , os pontos $A(-3, 1)$ e $B(5, -3)$.
- Determine uma equação da mediatriz do segmento de reta $[AB]$.
 - Identifique o conjunto de pontos P do plano, definido pela condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Resolução

- 6.1. a)** A superfície esférica de diâmetro $[AB]$ é o conjunto de pontos $P(x, y, z)$ do espaço que satisfazem a condição $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$.

$$\overrightarrow{PA} = A - P = (4, 0, 1) - (x, y, z) = (4 - x, -y, 1 - z)$$

$$\overrightarrow{PB} = B - P = (2, -2, 1) - (x, y, z) = (2 - x, -2 - y, 1 - z)$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4 - x, -y, 1 - z) \cdot (2 - x, -2 - y, 1 - z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4 - x)(2 - x) + (-y)(-2 - y) + (1 - z)(1 - z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 - 4x - 2x + x^2 + 2y + y^2 + (1 - z)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) + (z - 1)^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 2y + 1) - 1 + (z - 1)^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 2$$

Trata-se da superfície esférica de centro $D(3, -1, 1)$ e raio $\sqrt{2}$.

- b)** $C(2, -1, 2)$

$$(2 - 3)^2 + (-1 + 1)^2 + (2 - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow 1 + 0 + 1 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$$

Logo, o ponto C pertence à superfície esférica.

- c)** O plano tangente à superfície esférica de centro D , no ponto C , é o conjunto de pontos $P(x, y, z)$ que satisfazem a condição:

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

$$\overrightarrow{CP} = P - C = (x, y, z) - (2, -1, 2) = (x - 2, y + 1, z - 2)$$

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (3, -1, 1) - (2, -1, 2) = (1, 0, -1)$$

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow (x - 2, y + 1, z - 2) \cdot (1, 0, -1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2 - z + 2 = 0 \Leftrightarrow x = z$$

- 6.2. a)** Ponto médio de $[AB]$: $M\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1-3}{2}\right)$, ou seja, $M(1, -1)$.

Seja $P(x, y)$ um ponto genérico da mediatriz de $[AB]$. Então:

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (x - 1, y + 1) \cdot (8, -4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x - 8 - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow 8x - 4y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 3$$

- b)** $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ define a reta que passa em A e é perpendicular a AB .

Verifica 6

- 6.1.** Considere, num referencial o.n. xOy , os pontos $A(-1, 0)$, $B(7, 6)$ e $C(7, 0)$.

- a)** Determine uma equação da circunferência de diâmetro $[AB]$.

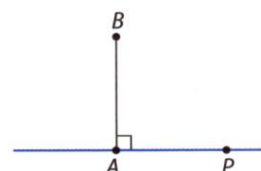
- b)** Mostre que o ponto C pertence à circunferência.

- c)** Determine uma equação da reta tangente à circunferência no ponto C .

- 6.2.** Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(3, 0, 0)$ e $B(1, -2, -2)$.

- a)** Determine uma equação do plano medidor do segmento de reta $[AB]$.

- b)** Identifique o conjunto de pontos P do espaço, definido pela condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.



7. Equação cartesiana de um plano

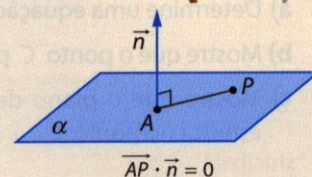
Uma equação cartesiana do plano que passa no ponto

$A(x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

ou

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ (equação geral do plano)}$$



Exemplo 7

7.1. Determine uma equação do plano que passa pelos pontos $A(2, 0, -1)$, $B(2, 1, 1)$ e $C(0, -2, -3)$.

7.2. Considere as retas r e s definidas por:

$$r: (x, y, z) = (0, 1, -1) + k(1, 0, 2), k \in \mathbb{R}$$

$$s: \frac{x-2}{2} = 1-y = \frac{z-3}{5}$$

a) Mostre que as retas r e s são concorrentes no ponto $I(2, 1, 3)$.

b) Determine uma equação do plano β definido pelas retas r e s .

Resolução

7.1. Precisamos de determinar o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ perpendicular ao plano α pedido.

O vetor $\vec{n}$ terá de satisfazer as condições:

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ e } \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\vec{AB} = B - A = (2, 1, 1) - (2, 0, -1) = (0, 1, 2)$$

$$\vec{AC} = C - A = (0, -2, -3) - (2, 0, -1) = (-2, -2, -2)$$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 1, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, -2, -2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + 2c = 0 \\ -2a - 2b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2c \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2c \\ a - 2c + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2c \\ a = c \end{cases}$$

Expressimos b e a em função de c .

Assim, $\vec{n} = (c, -2c, c)$ define a família de vetores perpendiculares ao plano α .

Por exemplo, para $c = 1$ obtemos $\vec{n} = (1, -2, 1)$.

Verifica 7

7.1. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $A(1, 1, 1)$, $B(0, 2, 2)$ e $C(-1, -1, 1)$.

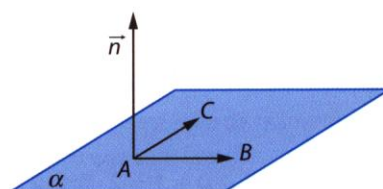
7.2. Considere as retas r e s definidas por:

$$r: \frac{x-1}{4} = 1-y = \frac{z-2}{7}$$

$$s: (x, y, z) = (2, 0, 3) + k(-4, 1, -7), k \in \mathbb{R}$$

a) Justifique que as retas r e s são estritamente paralelas.

b) Determine uma equação do plano β definido pelas retas r e s .



Substituindo estes valores na equação $ax + by + cz + d = 0$, obtemos $x - 2y + z + d = 0$.

Finalmente, para determinar d , substituímos x , y e z pelas coordenadas de um ponto do plano, por exemplo, do ponto $A(2, 0, -1)$.

$$2 - 2 \times 0 + (-1) + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$$

Logo, a equação do plano α pode ser $x - 2y + z - 1 = 0$.

7.2. a) Substituindo k por 2 na equação da reta s obtemos o ponto I :

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (0, 1, -1) + 2(1, 0, 2) = \\ &= (0, 1, -1) + (2, 0, 4) = (2, 1, 3)\end{aligned}$$

$\vec{r} = (1, 0, 2)$ é um vetor diretor da reta r .

$$s: \frac{x-2}{2} = 1-y = \frac{z-3}{5} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{5}$$

A reta s passa no ponto $I(2, 1, 3)$ e tem a direção do vetor $\vec{s} = (2, -1, 5)$.

As retas r e s têm direções diferentes e passam as duas no ponto I . Logo, são concorrentes neste ponto.

b) Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor perpendicular ao plano β .

Então:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 0, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, -1, 5) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b + 5c = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times (-2c) - b + 5c = 0 \\ a = -2c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a = -2c \end{cases}$$

$$\vec{n} = (-2c, c, c)$$

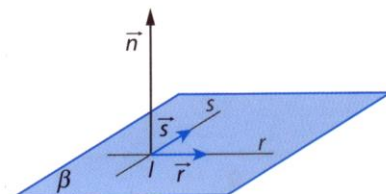
Para $c = -1$, temos $\vec{n} = (2, -1, -1)$.

$$\beta: 2x - y - z + d = 0$$

Como $I(2, 1, 3)$ é um ponto de β , vem:

$$2 \times 2 - 1 - 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$$

Portanto, $\beta: 2x - y - z = 0$.



8. Posição relativa de retas e planos

Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos

Consideremos dois planos α e β e os respectivos vetores normais $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$:

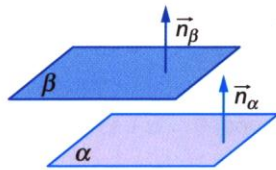
$$\alpha: ax + by + cz + d = 0; \quad \vec{n}_\alpha = (a, b, c)$$

$$\beta: a'x + b'y + c'z + d' = 0; \quad \vec{n}_\beta = (a', b', c')$$

Seja r uma reta e $\vec{r}$ um vetor diretor de r

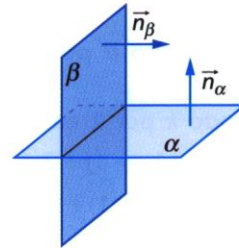
Planos paralelos

$$\alpha // \beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha // \vec{n}_\beta \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{n}_\alpha = k \vec{n}_\beta$$



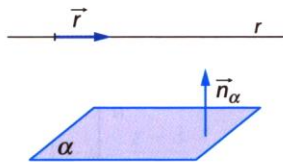
Planos perpendiculares

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$$



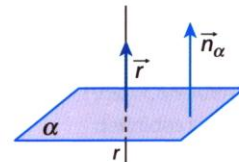
Reta paralela a um plano

$$r // \alpha \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{n}_\alpha \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$$



Reta perpendicular a um plano

$$r \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{r} // \vec{n}_\alpha \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{r} = k \vec{n}_\alpha$$



Exemplo 8

Num referencial o. n. $Oxyz$, considere os planos α , β e γ e a reta r definidos pelas condições:

$$\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$$

$$\beta: 2x - 4y - z + 2 = 0$$

$$\gamma: x - z = 0$$

$$r: -x = z - 1 \wedge y = 1$$

8.1. Verifique se o plano α é paralelo ao plano β .

8.2. Mostre que:

a) o plano γ é perpendicular ao plano α ;

b) a reta r é perpendicular ao plano γ ;

c) a reta r é paralela ao plano α .

8.3. Determine o ponto de interseção da reta r com o plano β .

Resolução

$\vec{n}_\alpha = (1, -2, 1)$, $\vec{n}_\beta = (2, -4, -1)$ e $\vec{n}_\gamma = (1, 0, -1)$ são vetores perpendiculares aos planos α , β e γ , respectivamente.

$$r: -x = z - 1 \wedge y = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{-1} = \frac{z-1}{1} \wedge y = 1$$

A reta r passa no ponto $(0, 1, 1)$ e tem a direção do vetor $\vec{r} = (-1, 0, 1)$.

$$\mathbf{8.1.} \quad \alpha // \beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha // \vec{n}_\beta$$

$$\vec{n}_\alpha = (1, -2, 1), \vec{n}_\beta = (2, -4, -1)$$

Como $\frac{2}{1} = \frac{-4}{-2} \neq \frac{-1}{1}$, $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ não são colineares.

Logo, o plano α não é paralelo ao plano β .

Verifica 8

Num referencial o. n. $Oxyz$, considere os planos α , β e γ e a reta r definidos pelas condições:

$$\alpha: x - 2y - 3z - 1 = 0$$

$$\beta: 2x - 4y - 6z - 3 = 0$$

$$\gamma: 4x - ky - 2kz = 0$$

$$r: x = \frac{1-y}{2} = -\frac{z}{3}$$

8.1. Mostre que o plano α é paralelo ao plano β .

8.2. Determine o valor de k sabendo que o plano γ é perpendicular ao plano α .

8.3. Verifique se a reta r é perpendicular ao plano β .

8.4. Determine o ponto de interseção da reta r com o plano α .

8.2. a) $\vec{n}_\gamma \cdot \vec{n}_\alpha = (1, 0, -1) \cdot (1, -2, 1) = 1 + 0 - 1 = 0$

Como $\vec{n}_\gamma \cdot \vec{n}_\alpha = 0$, o plano γ é perpendicular ao plano α .

b) $\vec{r} = (-1, 0, 1)$ e $\vec{n}_\gamma = (1, 0, -1)$

Como $\vec{r}$ e $\vec{n}_\gamma$ são colineares ($\vec{n}_\gamma = -\vec{r}$), a reta r é perpendicular ao plano γ .

c) $\vec{r} = (-1, 0, 1)$ e $\vec{n}_\alpha = (1, -2, 1)$

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = (-1, 0, 1) \cdot (1, -2, 1) = -1 + 0 + 1 = 0$$

Como $\vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$, a reta r é paralela ao plano α .

8.3. A reta r passa no ponto $(0, 1, 1)$ e tem a direção do vetor $\vec{r} = (-1, 0, 1)$.

Logo, $(x, y, z) = (0, 1, 1) + k(-1, 0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta r .

Seja R um ponto genérico da reta r .

Então, $R(-k, 1, 1+k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Pretendemos determinar $k \in \mathbb{R}$ de modo que $R \in \beta$.

Substituindo x , y e z em $2x - 4y - z + 2 = 0$ pelas coordenadas de R , obtemos:

$$2 \times (-k) - 4 \times 1 - (1+k) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2k - k - 4 - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow -3k = 3 \Leftrightarrow k = -1$$

Substituindo k por -1 em R , obtemos $(1, 1, 1-1) = (1, 1, 0)$.

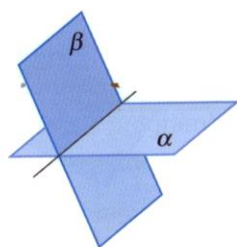
Portanto, o ponto de interseção da reta r com o plano β tem coordenadas $(1, 1, 0)$.

9. Interseção de planos

Interseção de dois planos

Dois planos podem ser concorrentes ou paralelos:

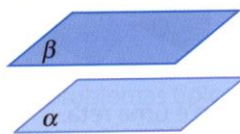
Planos concorrentes



A interseção é uma reta.

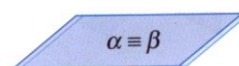
Planos paralelos

Estritamente paralelos



A interseção é o conjunto vazio.

Coincidentes



A interseção é um plano.

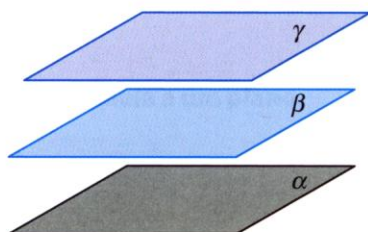
Interseção de três planos

A interseção de três planos pode ser um ponto, uma reta, um plano ou o conjunto vazio.

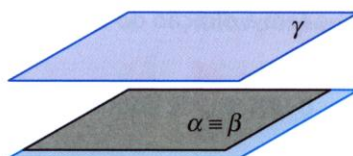
Dadas as equações gerais de três planos α , β e γ recorremos à resolução e interpretação do resultado do sistema formado pelas três equações dos planos para avaliar a sua posição relativa.

Várias situações podem ocorrer:

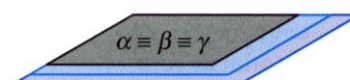
- Os três planos são paralelos.



Sistema impossível.



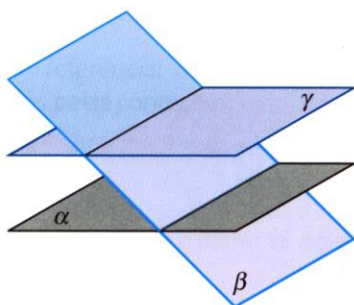
Sistema impossível.



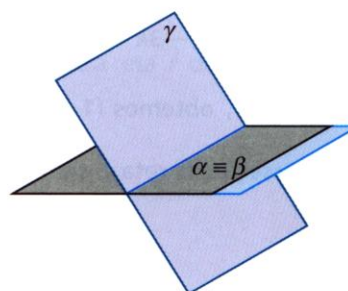
A interseção é um plano.

Sistema possível indeterminado.

- Dois (e só dois) dos três planos são paralelos.



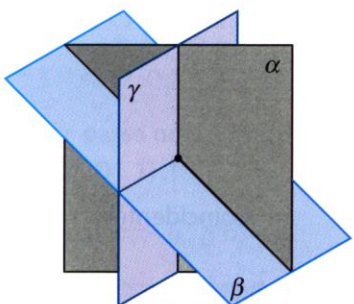
Sistema impossível.



A interseção é uma reta.

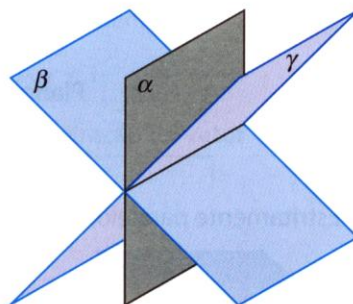
Sistema possível indeterminado.

- Não há planos paralelos.



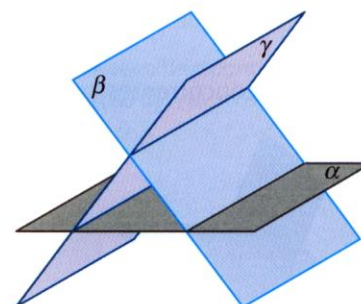
A interseção é um ponto.

Sistema possível determinado.



A interseção é uma reta.

Sistema possível indeterminado.



Sistema impossível.

Exemplo 9

Em cada um dos seguintes casos indique, justificando, a posição relativa dos três planos α , β e γ . Se necessário resolva o sistema de equações para determinar a interseção dos três planos.

9.1. $\alpha: 3x - y + 2z - 1 = 0$

$\beta: -6x + 2y - 4z + 3 = 0$

$\gamma: 2x - y = 0$

9.2. $\alpha: 3x + 2y - z + 1 = 0$

$\beta: 2x - y + z - 5 = 0$

$\gamma: x + y + z - 2 = 0$

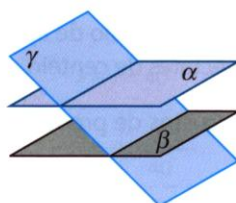
Resolução

9.1. Os planos α e β são estritamente paralelos porque:

$$\frac{3}{-6} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} \neq \frac{-1}{3}$$

O plano γ intersesta os planos α e β segundo retas paralelas.

O sistema resultante é impossível.



9.2. Como entre os três planos dados não há planos paralelos, é necessário resolver o sistema para avaliar a posição relativa dos três planos.

Vamos usar o método de substituição.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 5 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z + 2 \\ 3(-y - z + 2) + 2y - z + 1 = 0 \\ 2(-y - z + 2) - y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z + 2 \\ -y - 4z + 7 = 0 \\ -3y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z + 2 \\ y = -4z + 7 \\ -3(-4z + 7) - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z + 2 \\ y = -4z + 7 \\ 11z - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z + 2 \\ y = -4 \times 2 + 7 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -(-1) - 2 + 2 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Os três planos intersestam-se no ponto de coordenadas $(1, -1, 2)$.

Verifica 9

Considere os três planos que a seguir se definem através das respectivas equações.

Determine a interseção desses planos e interprete geometricamente o resultado.

9.1. $\alpha: x + 3y + 2z - 2 = 0$

$\beta: 2x - y + 5z + 5 = 0$

$\gamma: -3x + 2y + z + 9 = 0$

9.2. $\alpha: x - 5z = 0$

$\beta: 2x + y - 3z = 0$

$\gamma: 5x + 3y - 4z = 0$

10. Programação linear

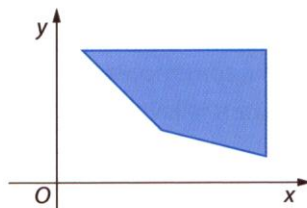
Nos mais diversos campos de atividade, em particular no domínio da economia, a programação linear permite encontrar a solução ótima para um determinado tipo de problemas.

Apresentamos de seguida a resolução de problemas típicos de programação linear onde se abordam os passos essenciais para a compreensão do método utilizado.

Exemplo 10

10.1. Na figura está representada a região admissível de um problema de programação linear. Esta região corresponde ao sistema:

$$\begin{cases} x \leq 80 \\ y \leq 50 \\ x + y \geq 60 \\ x + 4y \geq 120 \end{cases}$$



Qual é o valor mínimo que a função objetivo $z = 20x + 35y$ pode alcançar nesta região?

10.2. Um agricultor dispõe de uma área de 40 hectares para semear milho e centeio.

Para que se possa candidatar a um subsídio de apoio à produção tem de semear, pelo menos, cinco hectares de centeio.

Cada hectare de milho envolve custos de produção de 1000 euros e dá um lucro de 500 euros.

Cada hectare de centeio tem custos de produção de 600 euros e dá um lucro de 380 euros.

Sabe-se que o agricultor está limitado a um investimento máximo de 30 000 euros.

Quantos hectares de cada tipo de cereal deve o agricultor semear de modo que tenha o lucro máximo?

Resolução

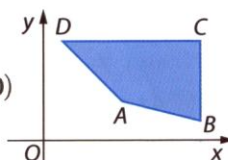
10.1. Coordenadas dos vértices

Vértice A: $\begin{cases} x + y = 60 \\ x + 4y = 120 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (40, 20)$

Vértice B: $\begin{cases} x + 4y = 120 \\ x = 80 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (80, 10)$

Vértice C: $(x, y) = (80, 50)$

Vértice D: $\begin{cases} x + y = 60 \\ y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (10, 50)$



Valores de $z = 20x + 35y$ nos vértices da região admissível:

Vértice	$z = 20x + 35y$
A(40, 20)	1500
B(80, 10)	1950
C(80, 50)	3350
D(10, 50)	1950

← Mínimo de z

O valor mínimo da função $z = 20x + 35y$ é 1500 para $x = 40 \wedge y = 20$.

Verifica 10

10.1. Considere o seguinte sistema de restrições:

$$\begin{cases} y - x \leq 20 \\ 2x + y \leq 140 \\ x + 2y \geq 100 \end{cases}$$

- Represente geometricamente a região admissível definida pelo sistema dado.
- Qual é o valor máximo que a função objetivo, definida por $z = 4x + y$, pode alcançar nessa região?

10.2. Uma fábrica de mobílias encontra-se a produzir mobílias de quarto de dois tipos.

Para produzir uma mobília do tipo A são necessárias 8 horas na montagem e 20 horas na secção de pintura e acabamento.

Para produzir uma mobília do tipo B são necessárias 16 horas na montagem e 10 horas na secção de pintura e acabamento. A empresa dispõe, por semana, de 1040 horas na secção de montagem e de 1400 horas na secção de acabamento.

Sabe-se que cada mobília do tipo A dá um lucro de 7500 euros e cada mobília do tipo B dá um lucro de 10 000 euros.

Sabe-se ainda que, por motivo de armazenamento, a empresa não pode produzir mais de 80 mobílias por semana.

Quantas mobílias de cada tipo deve a empresa produzir por semana para que o lucro obtido seja máximo?

(continua)

10.2. Sejam:

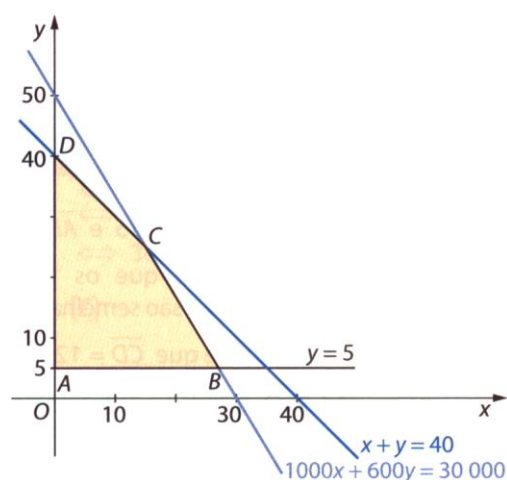
 x : o número de hectares de milho y : o número de hectares de centeio

Restrições do problema:

$$\begin{cases} x \geq 0 & (\text{O número de hectares de milho é não negativo.}) \\ y \geq 5 & (\text{Tem de semear pelo menos 5 ha de centeio.}) \\ x + y \leq 40 & (\text{Dispõe de uma área de 40 ha para semear milho e centeio.}) \\ 1000x + 600y \leq 30000 & (\text{Está limitado a um investimento máximo de 30 000 € .}) \end{cases}$$

Função objetivo: $L(x, y) = 500x + 380y$ (Cada hectare de milho dá um lucro de 500 € e cada hectare de centeio dá um lucro de 380 €.)

Região admissível:



$$x + y = 40$$

x	y
0	40
40	0

$$1000x + 600y = 30000$$

x	y
0	50
30	0

Coordenadas dos vértices B e C:

$$\begin{cases} 1000x + 600y = 30000 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (27, 5)$$

$$\begin{cases} 1000x + 600y = 30000 \\ x + y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (15, 25)$$

Valores de $L(x, y) = 500x + 380y$ nos vértices da região admissível:

Vértice	$L(x, y) = 500x + 380y$
A(0, 5)	1 900
B(27, 5)	15 400
C(15, 25)	17 000
D(0, 40)	15 200

← Máximo de L

O valor máximo da função objetivo é 17 000 €, obtido no vértice C.

Para que o lucro do agricultor seja máximo deverá semear 15 hectares de milho e 25 hectares de centeio.

Verifica 10

10.3. Uma empresa comercializa uma linha de produtos designada por "Sabores da Lusofonia".

Desta linha constam duas marcas de café, A e B, obtidas a partir da mistura de café proveniente de Timor com café oriundo de Angola.



A marca A é obtida misturando um quilograma de café de Timor por cada três quilogramas de café de Angola.

A marca B obtém-se misturando dois quilogramas de café de Angola por cada três quilogramas de café de Timor.

Semanalmente, a empresa dispõe de, no máximo, 900 kg de café de Timor e 1300 kg de café de Angola.

Por razões de presença no mercado, a empresa deverá produzir, semanalmente, pelo menos 600 kg de café da marca A e 400 kg de café da marca B.

Cada quilo de mistura da marca A dá um lucro de 5 € e cada quilo de mistura da marca B dá um lucro de 6 €.

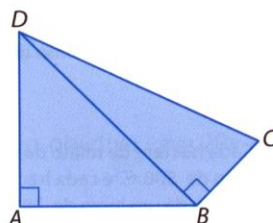
Sabendo que todo o café colocado no mercado é vendido, quantos quilogramas de cada uma das misturas devem ser produzidos semanalmente para que o lucro obtido seja máximo?

Questões tipo exame

Questões resolvidas

- 11** Relativamente ao quadrilátero $[ABCD]$ da figura, sabe-se que:

- $[ABD]$ é um triângulo isósceles e retângulo em A ;
- $[BCD]$ é um triângulo retângulo em B ;
- $\overline{AB} = 2$ e $\overline{BC} = 1$.



Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$?

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (D) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

Resolução

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$$

$$\overline{BD} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{CD} = \sqrt{8 + 1} = 3$$

$$\cos(\widehat{CD \ CB}) = \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}} = \frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CD}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \cos(\widehat{CD \ CB}) = 3 \times 1 \times \frac{1}{3} = 1$$

Resposta: (B)

- 12** Num referencial o.n. $Oxyz$, qual das seguintes condições define uma reta paralela ao eixo Oz ?

- (A) $x = 2 \wedge z = 0$
 (B) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(0, 0, 2), k \in \mathbb{R}$
 (C) $z = 1$
 (D) $x = y \wedge z = 0$

Resolução

$\vec{k} = (0, 0, 1)$ é um vetor com a direção do eixo Oz .

Um vetor diretor da reta definida por $x = 2 \wedge z = 0$ é $\vec{r} = (0, 1, 0)$.

Como $\vec{r}$ e $\vec{k}$ não são colineares, pois, qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(0, 0, 1) = (0, 0, \lambda) \neq (0, 1, 0)$, a reta definida por $x = 2 \wedge z = 0$ não é paralela ao eixo Oz .

Um vetor diretor da reta definida por $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(0, 0, 2), k \in \mathbb{R}$ é $\vec{s} = (0, 0, 2)$.

Como $\vec{s} = (0, 0, 2) = 2(0, 0, 1) = 2\vec{k}$, os vetores $\vec{s}$ e $\vec{k}$ são colineares. Logo, esta reta é paralela ao eixo Oz .

Resposta: (B)

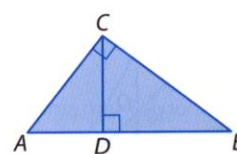
Questões propostas

- 11** $[AB]$ é um diâmetro de uma circunferência de centro O e raio 2. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA}$?

- (A) -4 (B) 4 (C) 8 (D) -8

- 12** Na figura, está representado um triângulo $[ABC]$, retângulo em C .

O segmento de reta $[CD]$ é a altura relativa à hipotenusa.



Sabe-se que $\overline{AC} = 15$ e $\overline{AB} = 25$.

12.1. Justifique que os triângulos $[ADC]$ e $[ABC]$ são semelhantes.

12.2. Mostre que $\overline{CD} = 12$.

12.3. Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$.

- 13** Num referencial o.n. $Oxyz$, qual das seguintes condições define uma reta paralela ao eixo Ox ?

- (A) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(0, 1, 1), k \in \mathbb{R}$
 (B) $x = 1$
 (C) $y = 0 \wedge z = 1$
 (D) $x = 0 \wedge y = z$

- 14** Num referencial o.n. $Oxyz$, qual das seguintes condições define uma reta perpendicular ao eixo Oy ?

- (A) $2x = z \wedge y = 1$
 (B) $x = 1 \wedge z = 0$
 (C) $y = 0$
 (D) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$

- 15** Qual dos seguintes pontos pertence à reta de interseção dos planos concorrentes α e β , definidos por $x + y - z = 1$ e $2x - 5y - 2z = 2$?

- (A) $(2, -1, 0)$ (B) $(0, 0, -1)$
 (C) $(1, 1, 1)$ (D) $(1, 1, 0)$

Questões resolvidas

- 13** Para determinado número real α , considere a reta r e o plano β , definidos num referencial o.n. $Oxyz$, respetivamente por $\frac{x}{\alpha} = \frac{y-1}{2} = z$ e $3x - \alpha y - z = 2$.

Sabe-se que a reta r é paralela ao plano β .

Qual é o valor de α ?

- (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 2

Resolução

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y-1}{2} = z \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

$\vec{r} = (\alpha, 2, 1)$ é um vetor diretor da reta r .

$\vec{u} = (3, -\alpha, -1)$ é um vetor perpendicular ao plano β .

A reta r é paralela ao plano β se, e só se, os vetores $\vec{r}$ e $\vec{u}$ forem perpendiculares, ou seja se $\vec{r} \cdot \vec{u} = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{u} = 0 &\Leftrightarrow (\alpha, 2, 1) \cdot (3, -\alpha, -1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3\alpha - 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \end{aligned}$$

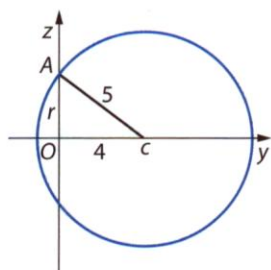
Resposta: (C)

- 14** Num referencial o.n. $Oxyz$, a interseção da superfície esférica de equação $x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 25$ com o plano xOz é:

- (A) um ponto;
(B) o conjunto vazio;
(C) uma circunferência de raio 4;
(D) uma circunferência de raio 3.

Resolução

A superfície esférica de equação $x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 25$ tem centro no ponto C de coordenadas $(0, 4, 0)$ e raio 5.



A interseção da superfície esférica com o plano xOz é uma circunferência de raio $r = \overline{OA}$, sendo $\overline{AC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OA}^2$.

Portanto, $5^2 = 4^2 + r^2 \Leftrightarrow r = 3$.

Resposta: (D)

Questões propostas

- 16** Considere num referencial o.n. $Oxyz$, a reta definida por $x - 1 = 1 - z \wedge y = 2$.

Qual das equações seguintes define um plano perpendicular a esta reta?

- (A) $x - z = 3$ (C) $x - y = 3$
(B) $x + z = 3$ (D) $x + 2y - z = 3$

- 17** Num referencial o.n. $Oxyz$, considere um ponto P que pertence à reta

definida por:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

e o vetor $\vec{u}$ de coordenadas $(1, 3, 5)$.

Sabendo que os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\vec{u}$ são perpendiculares, qual é a abscissa do ponto P ?

- (A) -2 (B) 2 (C) -1 (D) 1

- 18** Num referencial o.n. $Oxyz$, considere:

- a esfera E definida pela condição $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$
- a reta r definida pela condição $2x = 3 - y \wedge z = 0$

A interseção da esfera E com a reta r é:

- (A) um segmento de reta de comprimento 3;
(B) um segmento de reta de comprimento 6;
(C) o conjunto vazio;
(D) um ponto.

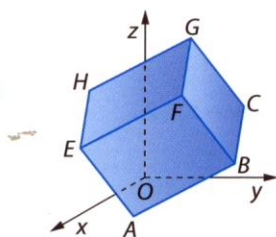
- 19** Considere duas retas r e s , distintas, perpendiculares a uma mesma reta t .

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

- (A) As retas r e s são concorrentes.
(B) As retas r e s são paralelas.
(C) Existe um plano α que contém as retas r e s , tal que a reta t é perpendicular a α .
(D) Existem planos α e β que contêm as retas r e s , respetivamente, tais que a reta t é perpendicular a α e a β .

Questões resolvidas

- 15** Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto D não está representado na figura).



Sabe-se que:

- o ponto H tem coordenadas $(5, -1, 8)$;
- o vetor $\overrightarrow{HG}$ tem coordenadas $(-2, 6, 3)$.

15.1. Escreva uma condição cartesiana que defina cada um dos seguintes conjuntos de pontos.

- a) Plano ADE b) Reta HG
c) Superfície esférica de centro no ponto H à qual pertence o ponto G .

15.2. Sabe-se ainda que a equação $3x - 2y + 6z - 16 = 0$ define o plano ABC .

Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do ponto D .

Resolução

15.1.

- a) O vetor $\overrightarrow{HG}$ é perpendicular ao plano ADE .

Logo, a equação deste plano é do tipo

$$-2x + 6y + 3z + d = 0.$$

Como $(5, -1, 8)$ pertence a este plano, temos

$$-2 \times 5 + 6 \times (-1) + 3 \times 8 + d = 0 \Leftrightarrow d = -8$$

Portanto, $-2x + 6y + 3z - 8 = 0$ é uma equação cartesiana do plano ADE .

- b) Equações cartesianas da reta HG :

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-8}{3}$$

- c) Centro da superfície esférica: $H(5, -1, 8)$.

Raio da superfície esférica:

$$\|\overrightarrow{HG}\| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$$

Equação da superfície esférica:

$$(x-5)^2 + (y+1)^2 + (z-8)^2 = 49$$

15.2. O ponto D é a interseção da reta HD com o plano ABC .

A reta HD passa no ponto H e tem a direção do vetor de coordenadas $(3, -2, 6)$, vetor perpendicular ao plano ABC .

Portanto, $HD: (x, y, z) = (5, -1, 8) + k(3, -2, 6), k \in \mathbb{R}$.

Seja P um ponto genérico da reta HD .

As coordenadas deste ponto podem ser obtidas a partir da equação vetorial: $P(5+3k, -1-2k, 8+6k), k \in \mathbb{R}$.

O ponto D é o ponto da reta que satisfaz a equação do plano: $3x - 2y + 6z - 16 = 0$.

$$\text{Então, } 3(5+3k) - 2(-1-2k) + 6(8+6k) - 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49k + 49 = 0 \Leftrightarrow k = -1$$

$$D(5-3, -1+2, 8-6)$$

O ponto D tem coordenadas $(2, 1, 2)$.

Questões propostas

- 20** Num referencial o.n. $Oxyz$, considere os pontos A e B de coordenadas $(1, 2, 1)$ e $(4, 2, 1)$.

P é o ponto do segmento de reta $[AB]$ tal que $AP = 2PB$. Quais são as coordenadas do ponto P ?

- 21** Considere, num referencial o.n. xOy , uma circunferência de centro na origem e raio igual a 10 e o ponto A de coordenadas $(0, 6)$.

Admita que B é um ponto do primeiro quadrante que pertence à circunferência e que a reta AB tem declive igual a $\frac{1}{3}$.

21.1. Mostre que o ponto B tem coordenadas $(6, 8)$.

21.2. Determine uma equação da reta t , tangente à circunferência no ponto B .

21.3. Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo das retas t e AB .

Mostre que $\text{tg } \alpha = \frac{13}{9}$.

- 22** Na figura, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.

Sabe-se que:

- Os pontos A, B e C têm coordenadas $(8, -3, 6)$, $(8, 5, 0)$ e $(-2, 5, 0)$, respetivamente.

- $11y - 2z = 55$ é uma equação do plano BCV .

- O ponto E é o centro da base da pirâmide.

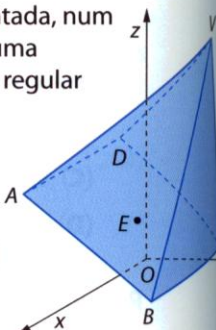
22.1. Mostre que o ponto D tem coordenadas $(-2, -3, 6)$.

22.2. Mostre que o plano ABC pode ser definido pela equação $3y + 4z = 15$.

22.3. Determine as coordenadas do ponto V .

22.4. Considere que V tem coordenadas $(3, 7, 11)$. Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo BVA .

Determine o valor exato de $\sin^2 \alpha$.



Questões para praticar

Itens de seleção

23 De um triângulo $[ABC]$ sabe-se que:

- $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 15$
- $\cos(\widehat{AB \ AC}) = \frac{3}{5}$

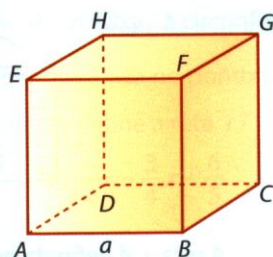
Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) O triângulo $[ABC]$ é retângulo.
 (B) O triângulo $[ABC]$ é obtusângulo.
 (C) O triângulo $[ABC]$ é isósceles não equilátero.
 (D) O triângulo $[ABC]$ é equilátero.

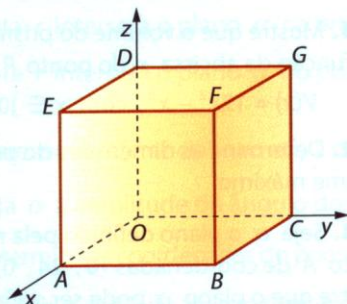
24 Na figura está representado um cubo $[ABCDEFGH]$ de aresta a .

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$?

- (A) a (B) a^2
 (C) $2a$ (D) 0



25 Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$.



Os pontos A , C e D pertencem aos semieixos positivos Ox , Oy e Oz , respetivamente.

O ponto G pertence à reta definida por:

$$x = 0 \wedge y = 6 - 2z$$

Qual é a medida da aresta do cubo?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6

26 Considere, num referencial o.n. Oxy , a reta r e o plano α , definidos, respetivamente, por:

$$(x, y, z) = (2m, 4, -1) + k(1, m, -1), k \in \mathbb{R}$$

$$\text{e } 2x + 4y - mz = 0$$

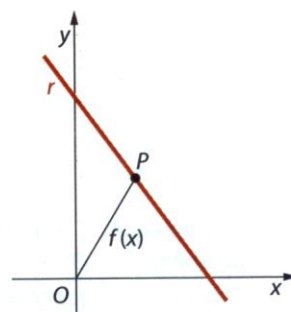
Sabendo que a reta r é paralela ao plano α , qual é o valor de m ?

- (A) $-\frac{16}{5}$ (B) 1 (C) $-\frac{2}{5}$ (D) 2

Itens de construção

27 Na figura está representada, num referencial xOy , uma reta r e um ponto P .

- A reta r é definida pela equação $4x + 3y = 25$.



- O ponto P , de abscissa x , pertence à reta r .

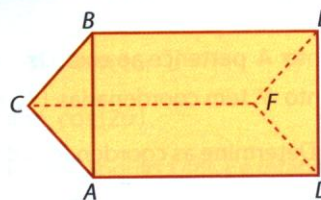
Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{5}{3}\sqrt{x^2 - 8x + 25}$.

27.1. Mostre que a distância do ponto P à origem do referencial, em função de x , é dada por $f(x)$.

27.2. Estude a função f quanto à monotonia e indique a abscissa do ponto P para a qual a distância de O a P é mínima.

27.3. Escreva uma equação da circunferência com centro na origem do referencial e tangente à reta r .

28 Na figura, está representado um prisma triangular regular $[ABCDEF]$, de altura igual a 3 e aresta da base igual a 2.



Determine o valor exato de $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$.

29 Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, duas retas r e s , definidas por:

$$r: x - 5 = \frac{1 - y}{3} = \frac{1 - z}{2}$$

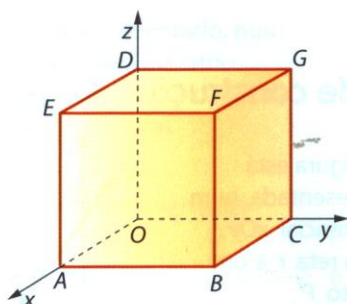
$$s: (x, y, z) = (3, 0, -2) + k(-3, 2, -1), k \in \mathbb{R}$$

29.1. Mostre que as retas r e s definem um plano.

29.2. Mostre que o plano β , definido pelas retas r e s , é perpendicular ao plano α definido pela equação $2x - y - z = 0$.

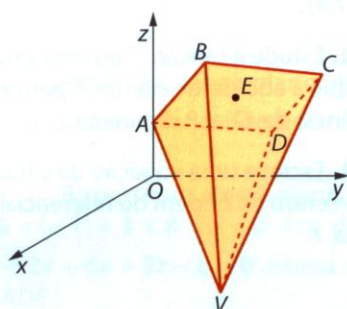
29.3. Determine, em graus, a amplitude do ângulo formado pelas retas r e s .

- 30** Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$.



Os pontos A , C e D pertencem aos semieixos positivos Ox , Oy e Oz , respetivamente.
O ponto F pertence ao plano definido pela equação $x - 2y + 3z = 4$.
Determine a área do triângulo $[OBD]$.

- 31** Na figura, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.



Sabe-se que:

- a equação $2x + y - 2z + 6 = 0$ define o plano ABC ;
- o ponto A pertence ao eixo Oz ;
- o ponto V tem coordenadas $(7, 8, -4)$.

31.1. Determine as coordenadas do ponto A .

31.2. Sabe-se que o ponto E é o centro da base da pirâmide.

- Defina a reta VE por uma equação vetorial.
- Determine as coordenadas do ponto E .

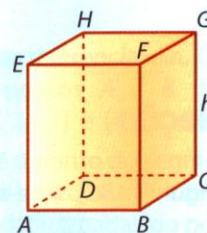
31.3. Escreva uma condição cartesiana que defina a superfície esférica de centro no ponto V e que passa na origem do referencial.

31.4. Sejam X e Y os pontos de interseção do plano ABC com os eixos Ox e Oy , respetivamente.

Sabe-se que α é a amplitude, em radianos, do ângulo XAY .

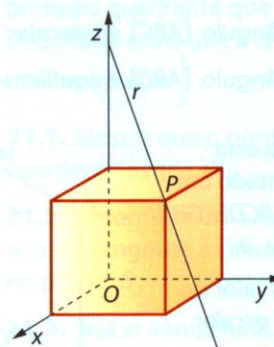
Determine $\operatorname{tg} \alpha$.

- 32** Seja $[ABCDEFGH]$ um paralelepípedo retângulo.



Mostre que o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$ não depende da altura, h , do paralelepípedo.

- 33** Na figura está representado um referencial o.n. $Oxyz$.



A reta r é definida pela condição $x = y = 12 - z$.
O ponto P desloca-se sobre a reta r de tal modo que é sempre vértice de um prisma quadrangular regular, em que os restantes vértices pertencem aos planos coordenados.
A cota de P varia entre 0 e 12.

33.1. Mostre que o volume do prisma é dado, em função da abscissa x do ponto P , por:

$$V(x) = 12x^2 - x^3, \text{ com } x \in]0, 12[$$

33.2. Determine as dimensões do prisma de volume máximo.

33.3. Seja α o plano definido pela reta r e pelo ponto A de coordenadas $(0, 24, 0)$.

Mostre que o plano α pode ser definido pela equação $x + y + 2z = 24$.

33.4. Seja s a reta que passa na origem do referencial e é perpendicular ao plano α .
Determine uma equação vetorial da reta s .

33.5. Seja B o ponto de interseção da reta s com o plano α . Determine as coordenadas do ponto B e verifique que este ponto pertence à reta r .

33.6. Verifique que, quando o ponto P tem as coordenadas do ponto B , o volume do prisma é igual a 128.

33.7. Resolva a equação $V(x) = 128$.

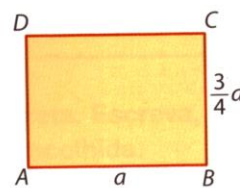
Sugestão: Tenha em conta o resultado da alínea anterior e aplique a regra de Ruffini.

- 1** Na figura, está representado um retângulo $[ABCD]$.

Sabe-se que $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = \frac{3}{4}a$.

O produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ é igual a:

- (A) a^2 (B) $\frac{3}{4}a^2$ (C) $\frac{3}{5}a^2$ (D) $\frac{4}{5}a^2$



- 2** Considere, num referencial o.n. Oxy , as retas r e s , definidas, respetivamente, por:

$$r: 3x - 2y = 14 \quad \text{e} \quad s: (x, y) = (3, 4) + k(1, -5), \quad k \in \mathbb{R}$$

Qual é a amplitude, em graus, do ângulo das duas retas?

- (A) 90° (B) 45° (C) $67,6^\circ$ (D) $3,2^\circ$

- 3** Considere, num referencial o.n. Oxy , a circunferência definida pela equação $x^2 + y^2 = 1$.

A reta r é tangente à circunferência no ponto de coordenadas $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Qual das equações seguintes define a reta r ?

- (A) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ (B) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{6}{5}$ (C) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{5}$ (D) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$

- 4** Num referencial o.n. $Oxyz$, considere a reta $r: x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ e o plano $\alpha: x + 2y + 3z = 14$.

Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira.

- (A) A reta r é estritamente paralela ao plano α .
 (B) A reta r está contida no plano α .
 (C) A reta r intersesta o plano α na origem do referencial.
 (D) A reta r intersesta o plano α no ponto de coordenadas $(1, 2, 3)$.

- 5** Considere, num referencial o.n. xOy , os pontos $A(-2, 6)$, $B(-3, 3)$ e o vetor $\vec{u} = (4, -3)$.

5.1. Seja α a amplitude do ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AB}$. Determine $\cos(2\alpha)$.

5.2. Determine as coordenadas do ponto C , do eixo Ox , sabendo que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em A .

5.3. Usando o conceito de produto escalar de vetores, determine a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

- 6** Na figura, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.

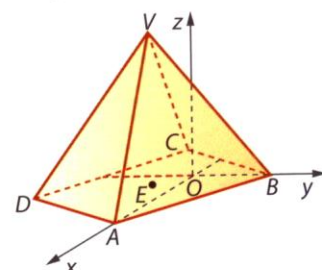
Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ está contida no plano xOy ;
- o ponto A pertence ao eixo Ox ;
- o ponto B pertence ao eixo Oy ;
- o plano ABV é definido pela equação $18x + 30y + 17z - 90 = 0$;
- o ponto E é o centro da base da pirâmide;
- a ordenada de D é negativa.

6.1. Mostre que A e B têm coordenadas $(5, 0, 0)$ e $(0, 3, 0)$, respetivamente.

6.2. Mostre que D tem coordenadas $(2, -5, 0)$.

6.3. Mostre que a altura da pirâmide é igual a 6.



Provas-modelo

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Quantos números naturais pares, com quatro algarismos diferentes, se podem escrever?

- (A) 2296 (B) 2520 (C) 2016 (D) 3600

2. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que $P(A) = 5P(A \cap B)$ e $P(A \cup B) = 2P(B)$.

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, derivável em todos os pontos do domínio, tal que:

- $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = f'(1) = e$

Considere a função h , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x) \times \ln[f(x)]$.

O valor de $h'(1)$ é:

- (A) e (B) $2e$ (C) e^2 (D) 0

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln(2x)$.

A reta de equação $y = 2x + b$ é tangente ao gráfico da função f .

Qual é o valor de b ?

- (A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) -1

5. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência do modo seguinte:

$$\begin{cases} u_1 = 100 \\ u_{n+1} + 1 = u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

A soma dos k primeiros termos de (u_n) é igual a zero.

O valor de k é:

- (A) 100 (B) 101 (C) 200 (D) 201

Cotações

5

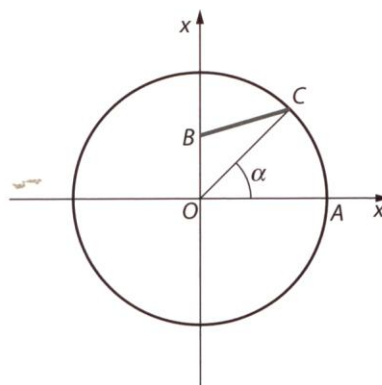
5

5

5

5

- 5 6. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy , uma circunferência de centro O e raio 2.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox ;
- o ponto B tem coordenadas $(0, 1)$;
- o ponto C pertence à circunferência;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOC , com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Qual das expressões seguintes representa, em função de α , o comprimento do segmento de reta $[BC]$?

- (A) $\sqrt{5 - 4 \sin \alpha}$ (B) $\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$ (C) $\sqrt{2 - 2 \sin \alpha}$ (D) $\sqrt{2 - 2 \cos \alpha}$

- 5 7. Seja a um número real não nulo.

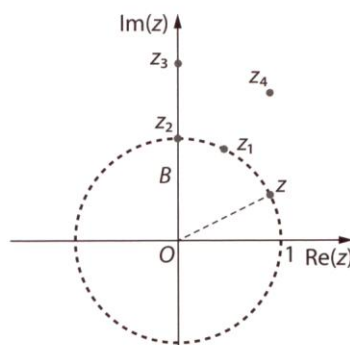
Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r e o plano β definidos, respetivamente, por $(x, y, z) = (1, 0, 1) + k(4 - 3a, 0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$ e $x + az = 1$.

Sabe-se que a reta r é paralela ao plano β .

Qual é o valor de a ?

- (A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{3}$ (D) -3

- 5 8. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: z , z_1 , z_2 , z_3 e z_4 .



Qual é o número complexo que pode ser igual a $z + z^3$?

- (A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{\sqrt{3} - i^{11}}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} - i}$.

Determine o menor número natural n tal que z^n é um número real negativo.

2. Num saco estão seis bolas brancas e quatro bolas pretas, indistinguíveis ao tato.

- 2.1. Extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, as dez bolas do saco.

Determine a probabilidade de as quatro bolas pretas **não** saírem todas seguidas (sair pelo menos uma bola branca entre duas bolas pretas).

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

- 2.2. Admita agora que, tomando como ponto de partida a constituição inicial, se colocaram mais algumas bolas pretas no saco.

Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco, e em registar a cor das bolas extraídas.

Relativamente a esta experiência aleatória considere os acontecimentos:

A : “A primeira bola retirada é branca”;

B : “A segunda bola retirada é preta”.

Sabendo que o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$ é $\frac{3}{4}$, determine o número de bolas pretas que foram posteriormente colocadas no saco.

Cotações

15

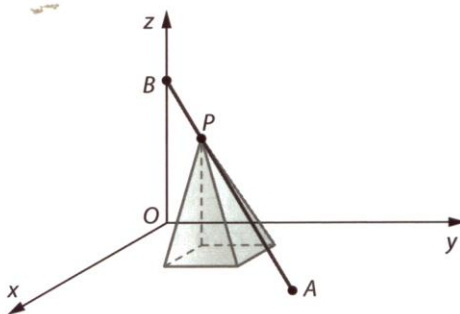
15

15

3. Na figura está representado um referencial o.n. $Oxyz$.

Os pontos A e B têm coordenadas $(6, 6, 0)$ e $(0, 0, 3)$, respetivamente.

O ponto P desloca-se sobre a reta AB de tal modo que é sempre vértice de uma pirâmide em que a base é um quadrado contido no plano xOy . A medida do lado do quadrado é igual à abcissa do ponto P e a cota de P varia entre 0 e 3.



15 3.1. Mostre que o volume da pirâmide, em função da abcissa x do ponto P , é dado por $V(x) = x^2 - \frac{x^3}{6}$, com $x \in]0, 6[$.

15 3.2. Determine a altura da pirâmide de volume máximo.

15 3.3. Seja C o ponto do eixo Oy para o qual o triângulo $[ACB]$ é retângulo em A . Determine a área do triângulo $[ACB]$.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{x+1} & \text{se } x \leq 0 \\ x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

15 4.1. Determine $f'(-1)$ recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

4.2. Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 .

10 a) Mostre que a equação reduzida da reta t é $y = -x$.

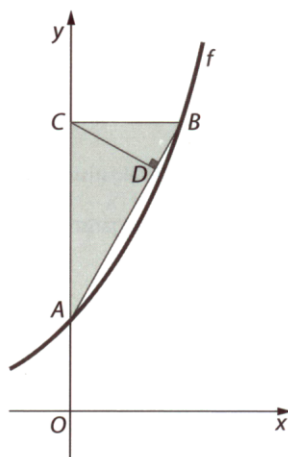
15 b) Mostre que existe um ponto do gráfico da função f , cuja abcissa pertence ao intervalo $x \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$, em que a reta tangente ao gráfico nesse ponto é paralela à reta t .

Sugestão: Recorra ao Teorema de Bolzano.

15 4.3. O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando $x \rightarrow +\infty$. Determine a equação reduzida dessa assíntota.

5. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$.

Na figura estão representados, num referencial Oxy , parte do gráfico da função f e o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(0, 1)$;
- o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa no intervalo $]0, 2[$;
- o ponto C pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto B ;
- $[CD]$ é a altura do triângulo $[ABC]$ relativa à base $[AB]$;
- $\overline{CD} = 1$

Determine a abcissa do ponto B , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizadas, devidamente identificados;
- indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

FIM

Sugestão de resolução

Grupo I

1. 1.º A 2.º A 3.º A 4.º A

9 8 7 1 Números cujo algarismo das unidades é 0.

8 8 7 4 Números cujo algarismo das unidades é 2, 4, 6 ou 8.

$$9 \times 8 \times 7 \times 1 + 8 \times 8 \times 7 \times 4 = 504 + 1792 = 2296$$

Resposta: (A)

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$2P(B) = 5P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} P(A) = 5P(A \cap B) \text{ e } P(A \cup B) = 2P(B) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow 2P(B) - P(B) = 5P(A \cap B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = 4P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A|B) = \frac{1}{4}$$

Resposta: (C)

3. $h(x) = f(x) \times \ln[f(x)]$

$$h'(x) = [f(x) \times \ln(f(x))]' =$$

$$= f'(x) \times \ln[f(x)] + f(x) \times [\ln(f(x))]' =$$

$$= f'(x) \times \ln[f(x)] + f(x) \times \frac{f'(x)}{f(x)} =$$

$$= f'(x) \times \ln[f(x)] + f'(x)$$

Como $f(1) = f'(1) = e$, então:

$$h'(1) = f'(1) \times \ln[f(1)] + f'(1) = e \times \ln e + e = e \times 1 + e = 2e$$

Resposta: (B)

4. $f(x) = \ln(2x)$

O declive da reta de equação $y = 2x + b$ é 2. Logo, esta reta é tangente ao gráfico da função f num ponto de abscissa x tal que $f'(x) = 2$.

$$f'(x) = \frac{(2x)'}{2x} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(2 \times \frac{1}{2}\right) = \ln 1 = 0$$

O ponto de tangência tem coordenadas $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Este ponto pertence à reta de equação $y = 2x + b$.

$$\text{Logo, } 0 = 2 \times \frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = -1.$$

Resposta: (D)

$$5. \begin{cases} u_1 = 100 \\ u_{n+1} + 1 = u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 100 \\ u_{n+1} - u_n = -1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(u_n) é uma progressão aritmética de razão -1 sendo $u_1 = 100$.

$$\text{Logo, } u_n = 100 + (n-1) \times (-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = 100 - n + 1$$

$$\Leftrightarrow u_n = 101 - n$$

$$S_k = \frac{u_1 + u_k}{2} \times k = \frac{100 + 101 - k}{2} \times k = \frac{(201 - k)k}{2}$$

$$S_k = 0 \Leftrightarrow \frac{(201 - k)k}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (201 - k)k = 0$$

$$\Leftrightarrow 201 - k = 0 \vee k = 0 \xLeftrightarrow^{k \in \mathbb{N}} k = 201$$

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r$$

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

Resposta: (D)

6. Sejam (a, b) as coordenadas do ponto C .

$$\frac{a}{2} = \cos \alpha \Leftrightarrow a = 2 \cos \alpha$$

$$\frac{b}{2} = \sin \alpha \Leftrightarrow b = 2 \sin \alpha$$

$$C(2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha)$$

$$B(0, 1)$$

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \sqrt{(2 \cos \alpha - 0)^2 + (2 \sin \alpha - 1)^2} \\ &= \sqrt{4 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4 \sin \alpha + 1} \\ &= \sqrt{4(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 1 - 4 \sin \alpha} \\ &= \sqrt{4 \times 1 + 1 - 4 \sin \alpha} = \sqrt{5 - 4 \sin \alpha} \end{aligned}$$

Resposta: (A)

7. $r: (x, y, z) = (1, 0, 1) + k(4 - 3a, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

$\vec{r} = (4 - 3a, 0, 1)$ é um vetor diretor da reta r .

$$\beta: x + az = 1$$

$\vec{u} = (1, 0, a)$ é um vetor perpendicular ao plano β .

Se a reta r é paralela ao plano β então $\vec{r} \perp \vec{u}$, pelo que $\vec{r} \cdot \vec{u} = 0$

$$\vec{r} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (4 - 3a, 0, 1) \cdot (1, 0, a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4 - 3a) \times 1 + 1 \times a = 0$$

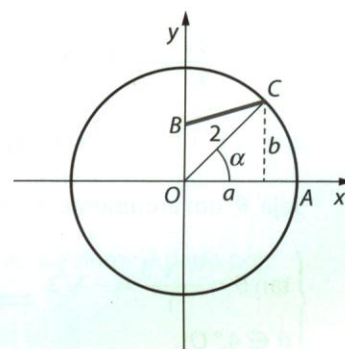
$$\Leftrightarrow 4 - 3a + a = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a = 4$$

$$\Leftrightarrow a = 2$$

Resposta: (A)

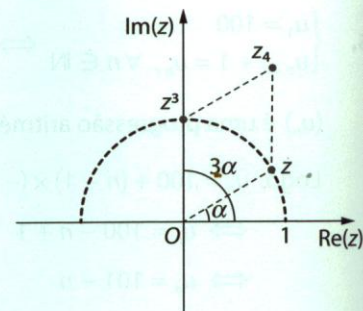


8. Como $|z| = 1$, $|z^3| = 1$

$$\arg(z^3) = 3\arg(z)$$

De entre os números complexos representados, podemos concluir (regra do paralelogramo) que $z + z^3$ só pode ser igual a z_4 .

Resposta: (D)



Grupo II

$$\begin{aligned} 1. \quad z &= \frac{\sqrt{3} - i^{11}}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} - 1} = \frac{\sqrt{3} - i^{4 \times 2 + 3}}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) - 1} \\ &= \frac{\sqrt{3} - i^3}{\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) - 1} = \frac{\sqrt{3} - (-i)}{1 + i - 1} \\ &= \frac{\sqrt{3} + i}{i} = \frac{(\sqrt{3} + i) \times (-i)}{i \times (-i)} \\ &= \frac{-\sqrt{3}i + 1}{1} = 1 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

Seja θ um argumento de z .

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} \text{ é um argumento de } z. \\ \theta \in 4.^\circ Q \end{cases}$$

$$z = 2 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{3} \right)$$

$$z^n = \left(2 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)^n = 2^n \operatorname{cis} \left(-\frac{n\pi}{3} \right)$$

$$z^n \text{ é um número real negativo} \Leftrightarrow -\frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -n = 3 + 6k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = -3 - 6k, k \in \mathbb{Z}$$

O menor número natural n é 3 e obtém-se para $k = -1$.

2.

2.1. Começamos por calcular a probabilidade do acontecimento contrário (as quatro bolas pretas saírem todas seguidas).

Número de casos possíveis: $10!$

Número de casos favoráveis: $4! \times 6! \times 7$

$$P = \frac{4! \times 6! \times 7}{10!} = \frac{1}{30}$$

A probabilidade de as quatro bolas pretas **não** saírem todas seguidas é:

$$1 - P = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

2.2. Seja n o número de bolas pretas posteriormente colocadas no saco.

Bolas brancas: 6

Bolas pretas: $4 + n$

Total: $6 + 4 + n = 10 + n$

$$P(A) = \frac{6}{10 + n}$$

$$P(B|A) = \frac{4 + n}{9 + n} \quad (\text{após ser retirada uma bola branca ficaram na caixa } 9 + n \text{ bolas sendo } 4 + n \text{ pretas})$$

$$P(B|A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{4 + n}{9 + n} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 16 + 4n = 27 + 3n \Leftrightarrow n = 11$$

Foram colocadas no saco 11 bolas pretas.

3. $A(6, 6, 0); B(0, 0, 3)$

3.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 0, 3) - (6, 6, 0) = (-6, -6, 3) = -6\left(1, 1, -\frac{1}{2}\right)$

Reta AB : $(x, y, z) = (0, 0, 3) + k\left(1, 1, -\frac{1}{2}\right), k \in \mathbb{R}$

Um ponto da reta AB é da forma $(x, y, z) = \left(k, k, 3 - \frac{k}{2}\right), k \in \mathbb{R}$

Se x é abcissa do ponto P , as coordenadas de P são $\left(x, x, 3 - \frac{x}{2}\right)$ com $x \in]0, 6[$.

A medida da aresta da base da pirâmide é x e a altura é $3 - \frac{x}{2}$. Logo, o volume é dado por:

$$V(x) = \frac{1}{3} \times x^2 \times \left(3 - \frac{x}{2}\right) = x^2 - \frac{x^3}{6}, \text{ com } x \in]0, 6[.$$

3.2. $V'(x) = \left(x^2 - \frac{x^3}{6}\right)' = 2x - \frac{3}{6}x^2 = 2x - \frac{1}{2}x^2$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(2 - \frac{1}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 2 - \frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

Como $x \in]0, 6[$, vem $x = 4$.

x	0		4		6
V'		+	0	-	
V		$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	

O volume é máximo para $x = 4$.

Se $x = 4$, a altura da pirâmide é $3 - \frac{4}{2} = 1$.

A altura da pirâmide de volume máximo é igual a 1.

3.3. $A(6, 6, 0)$

$$\overrightarrow{AB} = (-6, -6, 3)$$

$$C(0, y, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, y, 0) - (6, 6, 0) = (-6, y - 6, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (-6, y - 6, 0) \cdot (-6, -6, 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 36 - 6(y - 6) = 0 \Leftrightarrow 36 - 6y + 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6y = 72 \Leftrightarrow y = 12$$

$$\overrightarrow{AC} = (-6, 12 - 6, 0) = (-6, 6, 0)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 36 + 9} = \sqrt{81} = 9$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$$

Como o triângulo $[ACB]$ é retângulo em A , temos:

$$A_{[ACB]} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{9 \times 6\sqrt{2}}{2} = 27\sqrt{2}$$

4.

$$\begin{aligned} 4.1. f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 e^{(-1+h)+1} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h-1)^2 e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 - 2h + 1)e^h - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 - 2h)e^h + e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-2)e^h}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [(h-2)e^h] + 1 = -2 + 1 = -1 \end{aligned}$$

4.2. a) A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1 tem declive igual a $f'(-1)$.

Como $f'(-1) = -1$, a equação reduzida da reta t é da forma $y = -x + b$.

O ponto de tangência tem coordenadas $(-1, 1)$ porque $f(-1) = 1$.

Substituindo na equação $y = -x + b$, temos $1 = -(-1) + b \Leftrightarrow b = 0$.

Logo, a equação reduzida da reta t é $y = -x$.

b) Qualquer reta paralela a t tem declive -1 .

Pretende-se provar que existe $x \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$ tal que $f'(x) = -1$.

No intervalo $]-\infty, 0[$ a função f' é definida por:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 e^{x+1})' = \\ &= 2x e^{x+1} + x^2 e^{x+1} = \\ &= x e^{x+1} (2 + x) \end{aligned}$$

f' é uma função contínua em $]-\infty, 0[$ por ser definida pelo produto e composta de funções contínuas (funções polinomiais e função exponencial). Logo, f' é contínua em $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$.

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}+1}\left(2-\frac{1}{2}\right) \approx -1,24$$

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right)e^{-\frac{1}{4}+1}\left(2-\frac{1}{4}\right) \approx -0,93$$

$$-1,24 < -1 < -0,93, \text{ ou seja, } f'\left(-\frac{1}{2}\right) < -1 < f'\left(-\frac{1}{4}\right)$$

Então, pelo Teorema de Bolzano:

$$\begin{cases} f' \text{ é contínua em } \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right] \\ f'\left(-\frac{1}{2}\right) < -1 < f'\left(-\frac{1}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow \exists x \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right[: f'(x) = -1$$

$$\begin{aligned} 4.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 3 = \ln 1 + 3 = 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3x - 3x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{1}{y} \ln(1+y) \right] = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1 \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ \text{Se } x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Logo, a reta de equação $y = 3x + 1$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

5. $A(0, 1)$

$B(x, e^x)$ com $x \in]0, 2[$

$C(0, e^x)$

$$\overline{CD} = 1$$

$$\overline{AC} = |e^x - 1| = e^x - 1, \text{ porque se } x > 0, e^x - 1 > 0.$$

$$\overline{BC} = |x - 0| = x, \text{ porque } x > 0.$$

$$\overline{AB} = \sqrt{x^2 + (e^x - 1)^2}$$

A área do triângulo $[ABC]$ pode ser calculada por dois processos:

$$A_{[ABC]}^* = \frac{\overline{BC} \times \overline{AC}}{2} = \frac{x(e^x - 1)}{2}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + (e^x - 1)^2} \times 1}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + (e^x - 1)^2}}{2}$$

A abcissa do ponto B terá de ser solução da equação $\frac{x(e^x - 1)}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + (e^x - 1)^2}}{2}$ no intervalo $x \in]0, 2[$.

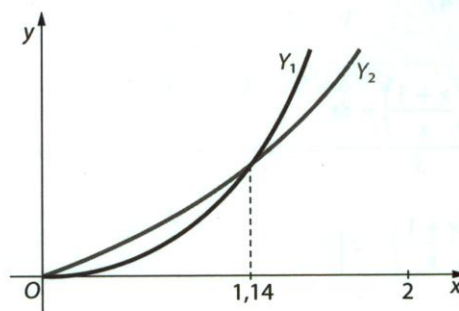
$$\frac{x(e^x - 1)}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + (e^x - 1)^2}}{2} \Leftrightarrow x(e^x - 1) = \sqrt{x^2 + (e^x - 1)^2}$$

Na calculadora gráfica, fazendo:

- $Y_1 = x(e^x - 1)$

- $Y_2 = \sqrt{x^2 + (e^x - 1)^2}$

determinou-se a abcissa do ponto interseção dos respectivos gráficos.



A abcissa do ponto B é aproximadamente igual a 1,14.

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Cotações

1. Considere os dois primeiros elementos e os dois últimos de uma certa linha do Triângulo de Pascal. Sabe-se que o produto desses quatro elementos é igual a 441.

5

Qual é o terceiro elemento da linha seguinte?

- (A) 1540 (B) 231
(C) 1330 (D) 210

2. Um saco tem 10 bolas, numeradas de 1 a 10. Extraem-se, ao acaso, duas dessas bolas e multiplicam-se os respetivos números.

5

Qual é a probabilidade de o produto obtido ser igual a 12?

- (A) $\frac{1}{45}$ (B) $\frac{2}{45}$
(C) $\frac{1}{15}$ (D) $\frac{4}{45}$

3. Seja f uma função, de domínio $]-1, +\infty[$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Sabe-se que f' , a função derivada da função f , é definida por $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x$.

5

Quantos pontos de inflexão tem o gráfico da função f ?

- (A) Zero (B) Um
(C) Dois (D) Três

4. Seja (x_n) a sucessão de termo geral $x_n = \frac{n+1}{\sqrt{n}}$.

5

Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$.

De uma função f sabe-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$.

Em qual das opções seguintes pode estar definida a função f ?

- (A) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$
(B) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$
(C) $D_f = \mathbb{R}^+$ e $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$
(D) $D_f = \mathbb{R}^+$ e $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

5. Qual das expressões seguintes é o termo geral de uma progressão aritmética decrescente?

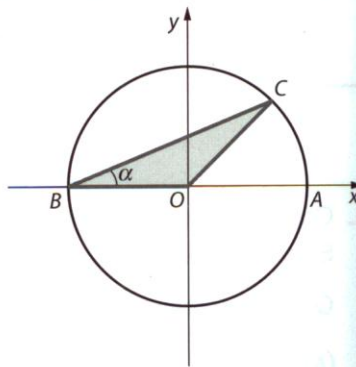
- (A) $a_n = \log_3 2^n$ (B) $b_n = \log_3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 (C) $c_n = e^{3n}$ (D) $d_n = e^{-\frac{n}{3}}$

6. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy , uma circunferência de centro O e raio 1. Sabe-se que:

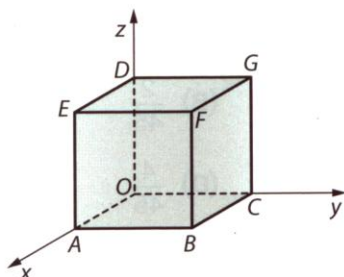
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox ;
- o ponto B tem coordenadas $(-1, 0)$;
- o ponto C pertence à circunferência;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo ABC , com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

Qual das expressões seguintes representa, em função de α , a área do triângulo $[OCB]$?

- (A) $\frac{\sin \alpha}{2}$ (B) $\sin \alpha \cos \alpha$
 (C) $\sin(2\alpha)$ (D) $\frac{\cos(2\alpha)}{2}$



7. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$ de aresta 3.



Os pontos A , C e D pertencem aos semieixos positivos.

Sejam:

- α o plano que passa no ponto B e é perpendicular a OF ;
- P , Q e R os pontos de interseção do plano α com os eixos Ox , Oy e Oz , respetivamente.

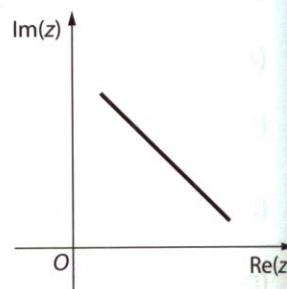
Qual é o valor do volume da pirâmide $[OPQR]$?

- (A) 4,5 (B) 36 (C) 72 (D) 108

8. Na figura está representado, no plano complexo, um segmento de reta.

Qual das condições seguintes pode definir, em $\mathbb{C}$, esse conjunto de pontos?

- (A) $\arg(z - 2) = \frac{3\pi}{4} \wedge |z - 1 - i| \leq 1$
 (B) $\arg(z - 2) = \frac{3\pi}{4} \wedge |z - 1 - i| \leq \sqrt{2}$
 (C) $\arg(z - 1) = \frac{3\pi}{4} \wedge |z - 1 - i| \leq 1$
 (D) $\arg(z - 1) = \frac{3\pi}{4} \wedge |z - 1 - i| \leq \sqrt{2}$



Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Cotações

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{(2-i)^3 - 9i^{31}}{2\sqrt{2}i}$.

Determine as raízes cúbicas de z .

15

2. Numa escola secundária, relativamente aos alunos do 12.º ano que realizaram o exame de Matemática A no ano letivo anterior, verificou-se que:

- 96% dos alunos com classificação positiva no exame de Matemática A obtiveram colocação no ensino superior, na 1.ª opção de candidatura;
- 90% dos alunos colocados no ensino superior na 1.ª opção de candidatura obtiveram classificação positiva no exame de Matemática A;
- quatro em cada cinco alunos foram colocados no ensino superior, na 1.ª opção de candidatura.

- 2.1. Escolhido um desses alunos ao acaso, qual é a probabilidade de ter obtido classificação positiva no exame de Matemática A?

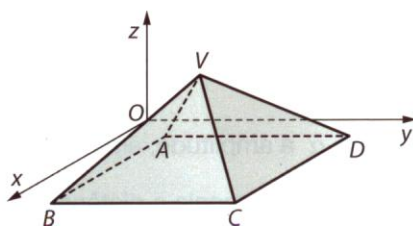
15

- 2.2. Admita que dos alunos dessa escola colocados no ensino superior na 1.ª opção de candidatura apenas 16 **não** obtiveram positiva no exame de Matemática A.

15

Quantos alunos do 12.º ano realizaram o exame de Matemática A nessa escola?

3. Na figura está representada em referencial o.n. $Oxyz$ a pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.



Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ está contida no plano xOy ;
- o ponto A tem coordenadas $(1, 1, 0)$;
- o ponto C tem abcissa positiva e igual à ordenada;
- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AV} = 16$

- 3.1. Determine uma equação do plano α que passa no ponto A e contém o eixo Oz .

15

- 3.2. Determine as coordenadas do ponto C .

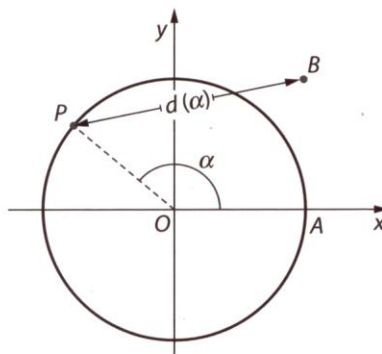
15

4. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} k - \frac{x}{e^{x+3}} & \text{se } x < 0 \\ 3 \ln(x+1) + 2x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (k \text{ é um número real})$$

- 15 4.1. Sabe-se que a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa -3 passa na origem do referencial.
Determine o valor de k .
- 15 4.2. Verifique se o gráfico da função f admite uma assíntota quando $x \rightarrow +\infty$.
- 10 4.3. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $]0, +\infty[$.

5. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy , a circunferência de centro na origem do referencial e raio 1.



O ponto A é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox .

O ponto B tem coordenadas $(1, 1)$.

Considere que o ponto P , partindo do ponto A , se desloca sobre a circunferência, dando uma volta completa no sentido positivo.

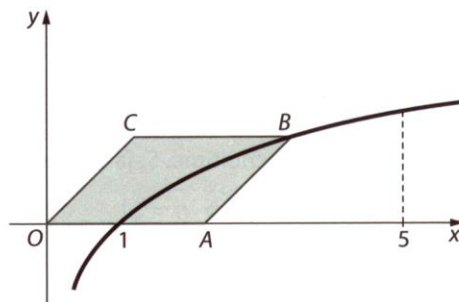
Para cada posição do ponto P , seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOP ($\alpha \in [0, 2\pi[$).

Seja d a função que, a cada valor de α , associa a distância, $d(\alpha)$, do ponto P ao ponto B .

- 15 5.1. Mostre que $d(\alpha) = \sqrt{3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha}$.
- 15 5.2. Estude a função d quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

6. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln x$.

Na figura estão representados, num referencial Oxy , parte do gráfico da função f e o paralelogramo $[OABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox ;
- o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa no intervalo $]1, 5[$;
- o ponto C pertence à bissetriz do primeiro quadrante;
- $[OABC]$ é um paralelogramo de área igual a 3.

Determine a abcissa do ponto B , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta deve:

- escrever uma expressão da área do paralelogramo $[OABC]$ em função da abcissa do ponto B ;
- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizadas, devidamente identificados;
- indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

FIM

Sugestão de resolução

Grupo I

1. Em qualquer linha do Triângulo de Pascal o primeiro elemento e o último são iguais a 1.

Por outro lado, o segundo elemento é igual ao penúltimo. Seja n o segundo elemento da linha em causa.

$$\text{Temos, então: } 1 \times n \times n \times 1 = 441 \iff n^2 = 441 \stackrel{n > 0}{\iff} n = 21$$

Trata-se da linha correspondente a $n = 21$.

A linha seguinte é a correspondente a $n = 22$.

O terceiro elemento da linha seguinte é igual a ${}^{22}C_2 = 231$.

Resposta: (B)

2. Número de casos possíveis: ${}^{10}C_2 = 45$

Número de casos favoráveis:

Os divisores de 12 menores ou iguais a 10 são 1, 2, 3, 4 e 6.

Portanto, há dois casos favoráveis: 2×6 e 3×4 .

$$P = \frac{2}{45}$$

Resposta: (B)

3. $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x$

$$f''(x) = \left(\ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x \right)' = \frac{1}{x+1} + x - 1 = \frac{1 + (x+1)(x-1)}{x+1} = \frac{1 + x^2 - 1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$$

$$f''(x) = 0 \iff \frac{x^2}{x+1} = 0 \wedge x > -1 \iff x = 0$$

O único zero de f'' é 0. No entanto, para $x \neq 0$, $f''(x) > 0$.

Logo, o gráfico de f não tem pontos de inflexão.

Resposta: (A)

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n}}{n}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1+0}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

Opção A:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

Opção B:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right) = +\infty - 0 = +\infty$$

Opção C:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = 0 + \frac{0}{+\infty} = 0\end{aligned}$$

Opção D:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Resposta: (A)

5. $a_n = \log_3 2^n$

$$a_{n+1} - a_n = \log_3 2^{n+1} - \log_3 2^n = \log_3 \frac{2^{n+1}}{2^n} = \log_3 2$$

(a_n) é uma progressão aritmética de razão $r = \log_3 2$. Como $r > 0$, a progressão aritmética é crescente.

$$b_n = \log_3 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \log_3 2^{-n}$$

$$b_{n+1} - b_n = \log_3 2^{-(n+1)} - \log_3 2^{-n} = \log_3 \frac{2^{-(n+1)}}{2^{-n}} = \log_3 2^{-1} = -\log_3 2$$

(b_n) é uma progressão aritmética de razão $r = -\log_3 2$. Como $r < 0$, a progressão aritmética é decrescente.

Resposta: (B)

6. Se $\widehat{ABC} = \alpha$, então $\widehat{AOC} = 2\alpha$.

$$\overline{CD} = \sin(2\alpha)$$

$$\overline{OD} = \cos(2\alpha)$$

$$A_{[OCB]} = \frac{\overline{BO} \times \overline{CD}}{2} = \frac{1 \times \sin(2\alpha)}{2} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \sin \alpha \cos \alpha$$

Resposta: (B)

7. $F(3, 3, 3); \overline{OF}(3, 3, 3)$

O plano α é definido por uma equação do tipo $3x + 3y + 3z + d = 0$.

Como $B(3, 3, 0)$ pertence ao plano α , vem $3 \times 3 + 3 \times 3 + 3 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -18$

Equação do plano α : $3x + 3y + 3z - 18 = 0$

Interseção do plano α com o eixo Ox :

$$\begin{cases} 3x + 3y + 3z - 18 = 0 \\ y = 0 \wedge z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 18 = 0 \\ y = 0 \wedge z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \wedge z = 0 \end{cases}$$

$P(6, 0, 0)$ e $\overline{OP} = 6$

Interseção do plano α com o eixo Oy :

$$\begin{cases} 3x + 3y + 3z - 18 = 0 \\ x = 0 \wedge z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 18 = 0 \\ x = 0 \wedge z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 0 \wedge z = 0 \end{cases}$$

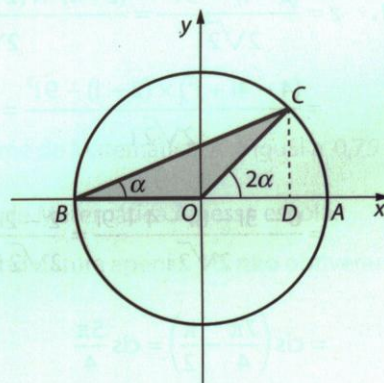
$Q(0, 6, 0)$ e $\overline{OQ} = 6$

Interseção do plano α com o eixo Oz :

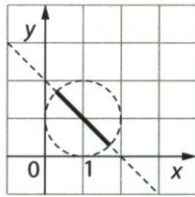
$$\begin{cases} 3x + 3y + 3z - 18 = 0 \\ x = 0 \wedge y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z - 18 = 0 \\ x = 0 \wedge y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 \\ x = 0 \wedge y = 0 \end{cases}$$

$R(0, 0, 6)$ e $\overline{OR} = 6$

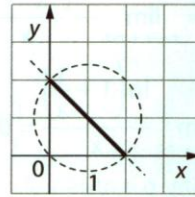
$$V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times \frac{6 \times 6}{2} \times 6 = 36$$

Resposta: (B)

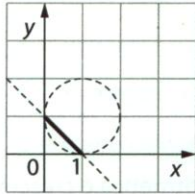
$$8. \arg(z-2) = \frac{3\pi}{4} \wedge |z-1-i| \leq 1$$



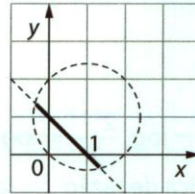
$$\arg(z-2) = \frac{3\pi}{4} \wedge |z-1-i| \leq \sqrt{2}$$



$$\arg(z-1) = \frac{3\pi}{4} \wedge |z-1-i| \leq 1$$



$$\arg(z-1) = \frac{3\pi}{4} \wedge |z-1-i| \leq \sqrt{2}$$



Resposta: (A)

Grupo II

$$\begin{aligned} 1. \quad z &= \frac{(2-i)^3 - 9i^{31}}{2\sqrt{2}i} = \frac{(2-i)^2 \times (2-i) - 9i^{4 \times 7 + 3}}{2\sqrt{2}i} = \\ &= \frac{(4-4i+i^2) \times (2-i) - 9i^3}{2\sqrt{2}i} = \frac{(3-4i)(2-i) + 9i}{2\sqrt{2}i} = \\ &= \frac{6-3i-8i-4+9i}{2\sqrt{2}i} = \frac{2-2i}{2\sqrt{2}i} = \frac{2\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2} \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}} = \\ &= \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{cis}\frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

Seja $u = 2 - 2i$ e θ um argumento de u .

$$|u| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{-2}{2} = -1 \\ \theta \in 4.^\circ Q \end{cases} \Rightarrow \frac{7\pi}{4} \text{ é um argumento de } u.$$

$$u = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{z} &= \sqrt[3]{\operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}} = \sqrt[3]{1} \operatorname{cis} \frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\} = \\ &= \operatorname{cis} \frac{5\pi + 8k\pi}{12}, k \in \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

Para $k = 0$, $w_0 = \operatorname{cis} \frac{5\pi}{12}$.

Para $k = 1$, $w_1 = \operatorname{cis} \frac{5\pi + 8\pi}{12} = \operatorname{cis} \frac{13\pi}{12}$.

Para $k = 2$, $w_2 = \text{cis} \frac{5\pi + 16\pi}{12} = \text{cis} \frac{21\pi}{12} = \text{cis} \frac{7\pi}{4}$.

As raízes cúbicas de são $\text{cis} \frac{5\pi}{12}$, $\text{cis} \frac{13\pi}{12}$ e $\text{cis} \frac{7\pi}{4}$.

2. Sejam M e C os acontecimentos:

M : "O aluno escolhido obteve classificação positiva no exame de Matemática A."

C : "O aluno escolhido foi colocado no ensino superior na 1.ª opção de candidatura."

É dado que:

$$\bullet P(C|M) = 0,96$$

$$\bullet P(M|C) = 0,9$$

$$\bullet P(C) = \frac{4}{5}$$

2.1. Pretende-se determinar $P(M)$.

Sabemos que:

$$P(M \cap C) = P(M) \times P(C|M) \text{ e } P(M \cap C) = P(C) \times P(M|C)$$

Então,

$$P(M) \times P(C|M) = P(C) \times P(M|C)$$

Substituindo os dados, vem:

$$P(M) \times 0,96 = \frac{4}{5} \times 0,9 \Leftrightarrow P(M) = \frac{\frac{4}{5} \times 0,9}{0,96} \Leftrightarrow P(M) = 0,75$$

A probabilidade de o aluno ter obtido classificação positiva no exame de Matemática A é igual a 0,75.

2.2. Seja n o número de alunos do 12.º ano que realizaram o exame de Matemática A nessa escola.

Como dos alunos colocados no ensino superior na 1.ª opção de candidatura apenas 16 **não** obtiveram positiva no exame de Matemática A, temos que $P(C \cap \overline{M}) = \frac{16}{n}$.

Por outro lado,

$$P(C \cap \overline{M}) = P(C) - P(M \cap C) = \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \times 0,9 = 0,08$$

ou

$$P(C \cap \overline{M}) = P(C) \times P(\overline{M}|C) = \frac{4}{5} \times (1 - 0,9) = 0,08$$

$$\frac{16}{n} = 0,08 \Leftrightarrow 16 = 0,08n \Leftrightarrow n = \frac{16}{0,08} \Leftrightarrow n = 200$$

Realizaram o exame de Matemática A nessa escola 200 alunos.

3. $A(1, 1, 0)$

3.1. O vetor $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ tem a direção do eixo Oz .

$$\overrightarrow{OA} = (1, 1, 0)$$

Como O é um ponto do eixo Oz , o plano α tem a direção dos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\vec{e}_3$.

Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor perpendicular a α . Então, o vetor $\vec{n}$ é perpendicular aos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\vec{e}_3$, pelo que:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1, 1, 0) \cdot (a, b, c) = 0 \\ (0, 0, 1) \cdot (a, b, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = 0 \end{cases}$$

Qualquer vetor da forma $\vec{n} = (a, -a, 0)$ é perpendicular a α .

Para, por exemplo, $a = 1$, temos $\vec{n} = (1, -1, 0)$. Logo, uma equação de α é da forma $x - y + d = 0$.

Como a origem do referencial pertence ao plano temos $d = 0$.

Portanto, $x - y = 0$ é uma equação do plano α .

3.2. $C(x, x, 0), x > 0$

Seja E o centro da base da pirâmide.

O ponto E é o ponto médio de $[AC]$:

$$E\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x+1}{2}, 0\right)$$

A altura da pirâmide é $h = \overline{EV}$.

O vértice V tem abscissa e ordenada iguais às de E :

$$V\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x+1}{2}, h\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (x, x, 0) - (1, 1, 0) = (x-1, x-1, 0)$$

$$\overrightarrow{AV} = V - A = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{x+1}{2}, h\right) - (1, 1, 0) = \left(\frac{x+1}{2} - 1, \frac{x+1}{2} - 1, h\right) = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{x-1}{2}, h\right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AV} &= (x-1, x-1, 0) \cdot \left(\frac{x-1}{2}, \frac{x-1}{2}, h\right) = \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^2}{2} + 0 \times h = \\ &= 2 \times \frac{(x-1)^2}{2} = (x-1)^2\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AV} = 16 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 4^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 4 \vee x-1 = -4$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -3$$

Como $x > 0$, temos $x = 5$ e $C(5, 5, 0)$.

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} k - \frac{x}{e^{x+3}} & \text{se } x < 0 \\ 3 \ln(x+1) + 2x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

4.1. Seja $y = mx + b$ a equação reduzida da reta t , tangente ao gráfico da função f , no ponto de abscissa -3 .

Sabemos que:

$$m = f'(-3)$$

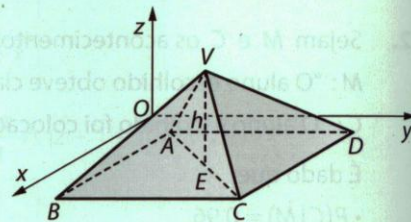
$b = 0$, dado que a reta t passa na origem do referencial.

Em $]-\infty, 0[$ vem:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(k - \frac{x}{e^{x+3}}\right)' = 0 - \frac{(x'e^{x+3} - x(e^{x+3})')}{(e^{x+3})^2} = \\ &= -\frac{e^{x+3} - xe^{x+3}}{(e^{x+3})^2} = -\frac{e^{x+3}(1-x)}{(e^{x+3})^2} = \frac{x-1}{e^{x+3}}\end{aligned}$$

$$m = f'(-3) = \frac{-3-1}{e^{-3+3}} = \frac{-4}{e^0} = -4$$

$$f(-3) = k - \frac{-3}{e^{-3+3}} = k + \frac{3}{e^0} = k + 3$$



Ponto de tangência: $(-3, k+3)$.

Equação reduzida da reta $t: y = -4x$ ($m = -4$ e $b = 0$)

O ponto de tangência, de coordenadas $(-3, k+3)$, pertence à reta de equação $y = -4x$.

Portanto, $k+3 = -4 \times (-3) \Leftrightarrow k = 12 - 3 \Leftrightarrow k = 9$.

- 4.2.** Seja $y = mx + b$ a equação reduzida da assíntota do gráfico da função f quando $x \rightarrow +\infty$, caso exista.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln(x+1) + 2x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 \ln(x+1)}{x} + \frac{2x}{x} - \frac{1}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln(x+1)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} + 2 - 0 = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]}{x} + 2 = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x} + 2 = \\ &= 3 \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x} \right] + 2 = \\ &= 3 \times \left(0 + \frac{\ln 1}{+\infty} \right) + 2 = 3(0 + 0) + 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [3 \ln(x+1) + 2x - 1 - 2x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [3 \ln(x+1) - 1] = +\infty - 1 = +\infty \end{aligned}$$

Como $b \notin \mathbb{R}$, o gráfico da função f não tem assíntota quando $x \rightarrow +\infty$.

- 4.3.** Em $]0, +\infty[$, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [3 \ln(x+1) + 2x - 1]' = 3[\ln(x+1)]' + (2x - 1)' = \\ &= 3 \times \frac{(x+1)'}{x+1} + 2 = \frac{3}{x+1} + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{3}{x+1} + 2 \right)' = \frac{-3}{(x+1)^2} + 0 = -\frac{3}{(x+1)^2} \\ -\frac{3}{(x+1)^2} &< 0, \forall x \in]0, +\infty[\end{aligned}$$

Como $f''(x) < 0$, $\forall x \in]0, +\infty[$, podemos concluir que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em $]0, +\infty[$. Logo, o gráfico da função f não tem pontos de inflexão neste intervalo.

- 5.** Dado que o ponto P pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio 1, as suas coordenadas são $(\cos \alpha, \sin \alpha)$.

$$P(\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$B(1, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{5.1. } \overline{BP} &= \sqrt{(1 - \cos \alpha)^2 + (1 - \sin \alpha)^2} = \sqrt{1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha + 1 - 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{2 + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha} = \sqrt{2 + 1 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha} = \\ &= \sqrt{3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha} \end{aligned}$$

$$d(\alpha) = \sqrt{3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha}$$

$$\begin{aligned}
 5.2. \quad d'(\alpha) &= (\sqrt{3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha})' = \left[(3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha)^{\frac{1}{2}} \right]' \\
 &= \frac{1}{2} (3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha)^{\frac{1}{2}-1} \times (3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha)' \\
 &= \frac{1}{2} (3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha)^{-\frac{1}{2}} \times (2 \sin \alpha - 2 \cos \alpha) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{(3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha)^{\frac{1}{2}}} \times 2 (\sin \alpha - \cos \alpha) \\
 &= \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sqrt{3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha}}
 \end{aligned}$$

$$d'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sqrt{3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha}} = 0 \wedge \alpha \in [0, 2\pi[$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha - \cos \alpha = 0 \wedge \alpha \in [0, 2\pi[$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \cos \alpha \wedge \alpha \in [0, 2\pi[\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \vee \alpha = \frac{5\pi}{4}$$

α	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
d'		-	0	+	0	-	
d	1	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	Máx.		Mín.		Máx.		

A função d é estritamente decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ e estritamente crescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

d admite máximos relativos para $\alpha = 0$ e $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ e um mínimo relativo para $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

6. Seja x a abcissa do ponto B .

$B(x, \ln x)$ com $x \in]1, 5[$

C pertence à reta de equação $y = x$ e tem ordenada igual à de B porque, sendo $[OABC]$ um paralelogramo, a reta CB é paralela ao eixo Ox .

$C(\ln x, \ln x)$

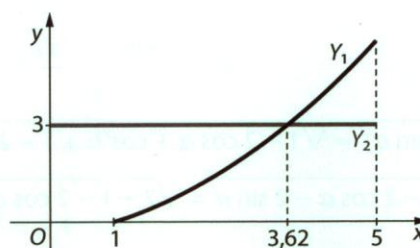
$$\overline{BC} = |x - \ln x|$$

A altura de paralelogramo é igual a $\ln x$, ordenada do ponto B .

$$A_{[OABC]} = \text{base} \times \text{altura} = |x - \ln x| \times \ln x$$

$$\text{Pretende-se resolver a equação } A_{[OABC]} = 3 \Leftrightarrow |x - \ln x| \times \ln x = 3.$$

Ao recorrer à calculadora gráfica obteve-se a abcissa do ponto de interseção do gráfico de $Y_1 = |x - \ln x| \times \ln x$ com o gráfico de $Y_2 = 3$.



A abcissa do ponto B é aproximadamente igual a 3,62.

Provas Oficiais

- Exame Final Nacional 2015 – 1.ª fase
- Exame Final Nacional 2015 – 2.ª fase



EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/1.ª Fase

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2015

VERSÃO 1

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis e, a seguir, passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume do cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \operatorname{tgb}}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Dois rapazes e quatro raparigas vão sentar-se num banco corrido com seis lugares.

De quantas maneiras o podem fazer, de modo que fique um rapaz em cada extremidade do banco?

- (A) 12 (B) 24 (C) 48 (D) 60

2. Seja Ω , conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,4$
- $P(\overline{B}) = 0,7$
- $P(A \cup B) = 0,5$

Qual é o valor de $P(\overline{A} \cup \overline{B})$?

- (A) 0,6 (B) 0,7 (C) 0,8 (D) 0,9

3. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real k , igual a $\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right)$?

- (A) $\frac{k}{2}$ (B) $k - 2$ (C) $\frac{k}{9}$ (D) $k - 9$

4. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = n^2$

Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

- (A) 0 (B) 1 (C) e (D) $+\infty$

5. Na Figura 1, está representado o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
- o ponto B pertence ao eixo Ox
- o ponto C tem coordenadas $(1, 0)$
- o ponto D pertence à semirreta $\vec{OA}$
- os segmentos de reta $[AB]$ e $[DC]$ são paralelos ao eixo Oy

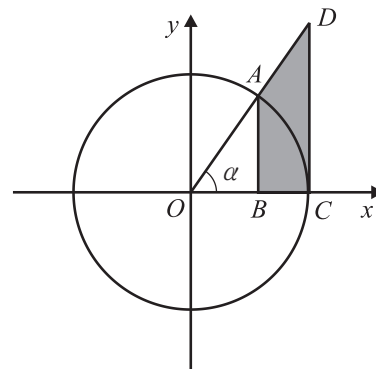


Figura 1

Seja α a amplitude do ângulo COD $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right]$

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero $[ABCD]$, representado a sombreado, em função de α ?

(A) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

(B) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$

(C) $\operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$

(D) $\operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

6. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$|z + 4 - 4i| = 3 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$$

No plano complexo, esta condição define uma linha.

Qual é o comprimento dessa linha?

(A) π

(B) 2π

(C) 3π

(D) 4π

7. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. xOy , um triângulo equilátero $[ABC]$

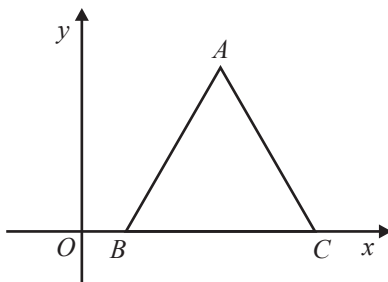


Figura 2

Sabe-se que:

- o ponto A tem ordenada positiva;
- os pontos B e C pertencem ao eixo Ox
- o ponto B tem abcissa 1 e o ponto C tem abcissa maior do que 1

Qual é a equação reduzida da reta AB ?

(A) $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$

(B) $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$

(C) $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

(D) $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

8. Seja a um número real.

Considere a sucessão (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = -3u_n + 2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual é o terceiro termo desta sucessão?

(A) $6a + 4$

(B) $9a - 4$

(C) $6a - 4$

(D) $9a + 4$

Página em branco

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{-2 + 2i^{19}}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \theta}$

Determine os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0, 2\pi[$, para os quais z é um número imaginário puro.

Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

2. De uma empresa com sede em Coimbra, sabe-se que:

- 60% dos funcionários residem fora de Coimbra;
- os restantes funcionários residem em Coimbra.

- 2.1. Relativamente aos funcionários dessa empresa, sabe-se ainda que:

- o número de homens é igual ao número de mulheres;
- 30% dos homens residem fora de Coimbra.

Escolhe-se, ao acaso, um funcionário dessa empresa.

Qual é a probabilidade de o funcionário escolhido ser mulher, sabendo que reside em Coimbra?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

- 2.2. Considere agora que a empresa tem oitenta funcionários.

Escolhem-se, ao acaso, três funcionários dessa empresa.

A probabilidade de, entre esses funcionários, haver no máximo dois a residir em Coimbra é igual a

$$\frac{{}^{80}C_3 - {}^{32}C_3}{{}^{80}C_3}$$

Elabore uma composição na qual explique a expressão apresentada.

Na sua resposta:

- enuncie a regra de Laplace;
- explique o número de casos possíveis;
- explique o número de casos favoráveis.

3. Na Figura 3, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso.

Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada.

Num certo instante, a esfera é despreendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, t segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por

$$d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0,05t} \quad (t \geq 0)$$

3.1. Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é 16 cm

Determine o volume da esfera.

Apresente o resultado em cm^3 , arredondado às centésimas.

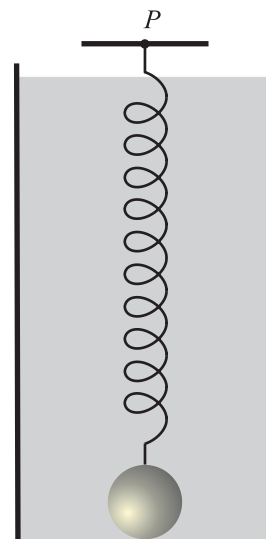


Figura 3

3.2. Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ (x + 1) \ln x & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Resolva os itens 4.1. e 4.2. recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Averigue da existência de assíntotas verticais do gráfico da função f

4.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

- 4.3. Mostre que a equação $f(x) = 3$ é possível em $]1, e[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas.

Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1, e[$
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(0, 0, 2)$ e $B(4, 0, 0)$

- 5.1. Considere o plano α de equação $x - 2y + z + 3 = 0$

Escreva uma equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α

- 5.2. Determine uma equação cartesiana que defina a superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro.

- 5.3. Seja P o ponto pertencente ao plano xOy tal que:

- a sua abcissa é igual à abcissa do ponto B
- a sua ordenada é positiva;
- $\hat{BAP} = \frac{\pi}{3}$

Determine a ordenada do ponto P

6. Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por

$$f(x) = 1 - \cos(3x) \quad \text{e} \quad g(x) = \sin(3x)$$

Seja a um número real pertencente ao intervalo $\left] \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right[$

Considere as retas r e s tais que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a
- a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $a + \frac{\pi}{6}$

Sabe-se que as retas r e s são perpendiculares.

Mostre que $\sin(3a) = -\frac{1}{3}$

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8..... (8 × 5 pontos)	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	15 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	15 pontos
3.	
3.1.	10 pontos
3.2.	15 pontos
4.	
4.1.	15 pontos
4.2.	15 pontos
4.3.	15 pontos
5.	
5.1.	5 pontos
5.2.	10 pontos
5.3.	15 pontos
6.	15 pontos
	160 pontos

TOTAL	200 pontos
--------------------	-------------------



EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/2.ª Fase

14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2015

VERSÃO 1

Página em branco

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis e, a seguir, passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$$\frac{\alpha r^2}{2} (\alpha - \text{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; } r - \text{raio})$$

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume do cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$
$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

Página em branco

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. A tabela de distribuição de probabilidades de uma certa variável aleatória X é

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	a	$2a$	0,4

(a designa um número real)

Qual é o valor médio desta variável aleatória?

- (A) 2,1 (B) 2,2 (C) 2,3 (D) 2,4

2. Um saco contém nove bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9. As bolas numeradas de 1 a 5 são pretas e as restantes são brancas.

Retira-se, ao acaso, uma bola do saco e observa-se a sua cor e o seu número.

Considere os seguintes acontecimentos, associados a esta experiência aleatória:

A : «a bola retirada é preta»

B : «o número da bola retirada é um número par»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

- (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{3}{4}$

3. Para certos valores de a e de b ($a > 1$ e $b > 1$), tem-se $\log_b a = \frac{1}{3}$

Qual é, para esses valores de a e de b , o valor de $\log_a (a^2 b)$?

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) 2 (D) 5

4. Para um certo número real k , é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 + e^{x+k} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{2x + \ln(x+1)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) 0
- (B) 1
- (C) $\ln 2$
- (D) $\ln 3$

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3 \sin^2(x)$

Qual das expressões seguintes define a função f'' , segunda derivada de f ?

- (A) $6 \sin(2x) \cos(x)$
- (B) $6 \sin(x) \cos(2x)$
- (C) $6 \cos(2x)$
- (D) $6 \sin(2x)$

6. Na Figura 1, está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero $[OAB]$

Sabe-se que:

- o ponto O é a origem do referencial;
- o ponto A pertence ao eixo real e tem abcissa igual a 1
- o ponto B pertence ao quarto quadrante e é a imagem geométrica de um complexo z

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $z = \sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{6}$
- (B) $z = \operatorname{cis} \frac{11\pi}{6}$
- (C) $z = \sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$
- (D) $z = \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$

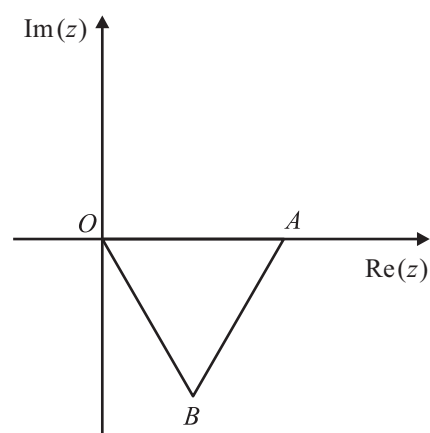


Figura 1

7. Considere, num referencial o.n. xOy , a circunferência definida pela equação

$$x^2 + (y - 1)^2 = 2$$

Esta circunferência intersecta o eixo Ox em dois pontos. Destes pontos, seja A o que tem abcissa positiva.

Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A

Qual é a equação reduzida da reta r ?

(A) $y = x + 1$

(B) $y = x - 1$

(C) $y = 2x + 2$

(D) $y = 2x - 2$

8. Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão monótona e limitada?

(A) $(-1)^n$

(B) $(-1)^n \cdot n$

(C) $-\frac{1}{n}$

(D) $1 + n^2$

Página em branco

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{12}}$

Determine os números complexos z que são solução da equação $z^4 = \overline{z_1}$, sem utilizar a calculadora.

Apresente esses números na forma trigonométrica.

2. Um cubo encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica exercida por uma mola.

A Figura 2 esquematiza esta situação. Nesta figura, os pontos O e A são pontos fixos. O ponto P representa o centro do cubo e desloca-se sobre a semirreta $\overrightarrow{OA}$

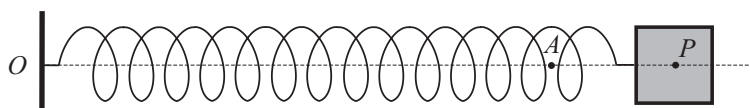


Figura 2

Admita que não existe qualquer resistência ao movimento.

Sabe-se que a distância, em metros, do ponto P ao ponto O é dada por

$$d(t) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo ($t \in [0, +\infty[$).

Resolva os itens 2.1. e 2.2. sem recorrer à calculadora.

- 2.1. No instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto P coincidia com o ponto A

Durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A mais do que uma vez.

Determine os instantes, diferentes do inicial, em que tal aconteceu.

Apresente os valores exatos das soluções, em segundos.

- 2.2. Justifique, recorrendo ao teorema de Bolzano, que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a 1,1 metros.

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + xe^x & \text{se } x \leq 3 \\ \ln(x-3) - \ln(x) & \text{se } x > 3 \end{cases}$

Resolva os itens 3.1., 3.2. e 3.3., recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

3.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

3.2. Resolva, em $]-\infty, 3]$, a condição $f(x) - 2x > 1$

Apresente o conjunto solução, usando a notação de intervalos de números reais.

3.3. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa 4

4. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que:

- f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio;
- $f'(0) > 0$
- $f''(x) < 0$, para qualquer $x \in]-\infty, 0[$

Nenhum dos gráficos a seguir apresentados é o gráfico da função f

Gráfico A

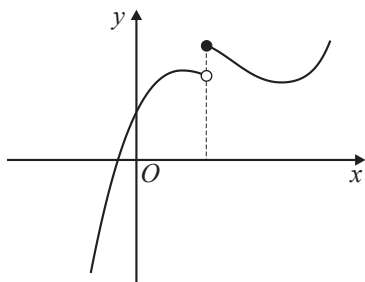


Gráfico B

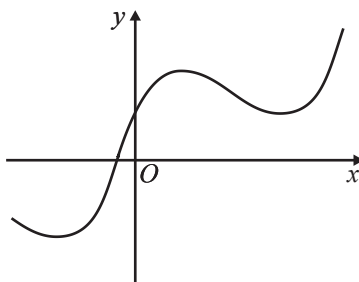
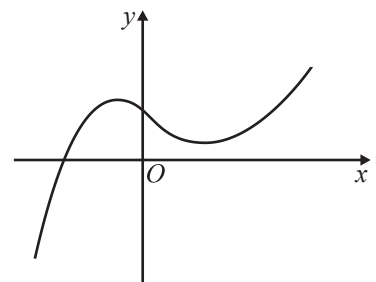


Gráfico C



Elabore uma composição na qual apresente, para cada um dos gráficos, uma razão pela qual esse gráfico não pode ser o gráfico da função f

5. Seja Ω , conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(A) \neq 0$

Prove que $P(A \cup \overline{B}) - 1 + P(B) = P(A) \times P(B|A)$

6. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[NOPQRSTU]$ que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que:

- o vértice P pertence ao eixo Ox
- o vértice N pertence ao eixo Oy
- o vértice T pertence ao eixo Oz
- o vértice R tem coordenadas $(2, 2, 2)$
- o plano PQV é definido pela equação $6x + z - 12 = 0$

6.1. Determine as coordenadas do ponto V

6.2. Escreva uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta OR

6.3. Seja A um ponto pertencente ao plano QRS

Sabe-se que:

- o ponto A tem cota igual ao cubo da abscissa;
- os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares.

Determine a abscissa do ponto A , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s) (sugere-se a utilização da janela de visualização em que $x \in [-4, 4]$ e $y \in [-2, 7]$);
- apresente a abscissa do ponto A arredondada às centésimas.

6.4. Dispõe-se de sete cores diferentes, das quais uma é branca e outra é azul, para colorir as nove faces do poliedro $[NOPQRSTU]$. Cada face vai ser colorida com uma única cor.

Considere a experiência aleatória que consiste em colorir, ao acaso, as nove faces do poliedro, podendo cada face ser colorida por qualquer uma das sete cores.

Determine a probabilidade de, no final da experiência, o poliedro ficar com exatamente duas faces brancas, ambas triangulares, exatamente duas faces azuis, ambas quadradas, e as restantes faces coloridas com cores todas diferentes.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas de milésima.

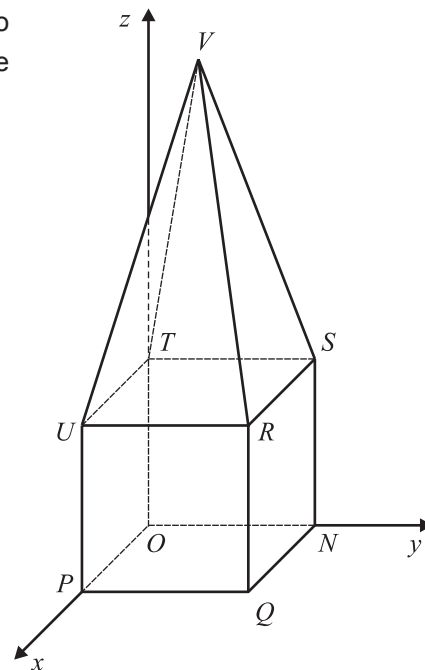


Figura 3

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8..... (8 × 5 pontos)	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	15 pontos
2.	
2.1.	10 pontos
2.2.	15 pontos
3.	
3.1.	15 pontos
3.2.	15 pontos
3.3.	15 pontos
4.	15 pontos
5.	15 pontos
6.	
6.1.	5 pontos
6.2.	10 pontos
6.3.	15 pontos
6.4.	15 pontos
	160 pontos

TOTAL		200 pontos
--------------------	-------	-------------------

Soluções

Unidade 1: Probabilidades e estatística

1. 274

Pág. 9

2.1. $S = \{7\}$

2.2. 9801

Pág. 10

3.1. 336

3.2. 120

3.3. 5040

Pág. 11

4. 720

5.1. 1296

5.2. 750

Pág. 12

6.1. a) 56

b) 21

6.2. 175

Pág. 13

7.1. 1378

7.2. ${}^7C_3 = {}^7C_4$

Pág. 14

9. 40

Pág. 15

10. (A)

11.1. (C)

11.2. (D)

12.1. (B)

12.2. (A)

12.3. (A)

13. (C)

Pág. 18

14.1. (A)

14.2. (B)

15. 100 800

16.1. 60

16.2. 246

16.3. 121

17. 7200

Pág. 19

18. 7560

19. 10

20. 581 400

21. 3360

22. 25 200

23.1. 4 989 600

23.2. 630

Pág. 20

24. 756 756

25. $\frac{52!}{(13!)^4}$

26.1. 126 126

26.2. 210 210

27. 210

28. 105

29.1. 35

29.2. 247

29.3. 246

Pág. 21

30. (D)

31. (B)

32. (B)

33. (A)

34. (B)

35. (B)

Pág. 22

36. (D)

37. (C)

38. $S = \{0, 2, 6\}$ 39. $232 - 164\sqrt{2}$

40.1. 455

40.2. $5005x^{15}$

41. (C)

Pág. 23

42. (B)

43. (B)

44. (A)

45. (C)

46. (A)

47. (D)

48. (C)

49. (B)

50. (A)

51. (C)

Pág. 24

52. (A)

53. (D)

54. (C)

55. (B)

56. (C)

57. (B)

58. (B)

59. (D)

60. (D)

61. (D)

62. (A)

63. (B)

64. (B)

Pág. 25

65.1. 65 536

65.2. 1512

65.3. 64

66.1. 6 692 786 100

66.2. 14 108 640

66.3. 198 815 760

67. 480

68. 570

69. 1176

70.1. 1728

70.2. 17 280

70.3. 151 200

71. 12 600

72.1. 560

72.2. 3360

73.1. 1013

73.2. 246

73.3. 576

Pág. 26

74.1. 720

74.2. 120

74.3. 3600

74.4. 1440

75.1. 126 126

75.2. 225 225

75.3. 630 630

76. -252

77. $k = -14$ e $i = 3$

78.1. 420

78.2. 60

78.3. 120

79.1. $n = 4$ 79.2. $n = 6$

80. 138 600

81. 1 663 200

82. 10

83.1. 35

83.2. 120

83.3. 60

83.4. 10

83.5. 50

84.1. 56

84.2. 24

84.3. 24

84.4. 8

Pág. 27

1.1.

Acontecimento	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}
Freq. relativa	0,16	0,09	0,18	0,14	0,24	0,19

1.2. a) 0,58

b) 0,37

c) 0,18

d) 0,77

Pág. 30

2. $\frac{5}{9}$

3.1. 33%

3.2. 36%

Pág. 31

4. $\frac{2}{5}$ 5. $\frac{7}{10}$

6. (C)

7. (A)

Pág. 32

8. (D)

9. (B)

10. (D)

11. (B)

Pág. 33

12. (A)

13. (D)

14. (B)

15. $\frac{1}{6}$

Pág. 34

16.1. $\frac{1}{12}$ 16.2. $\frac{11}{120}$ 16.3. $\frac{31}{120}$ 16.4. $\frac{11}{60}$

Pág. 35

17. $P(A) = \frac{36}{6435}$; $P(B) = \frac{1}{6435}$

É 36 vezes mais provável não haver gladiolos amarelos seguidos.

18.1. 0,9%

18.2. 3,5%

18.3. 0,3%

18.4. 98,7%

Pág. 36

- 19.1. 39,7% 19.2. 99,9%
 20.1. 11,5% 20.2. 5,4% 20.3. 0,8%
 21. $\frac{1}{3998}$

Pág. 37

- 22.2. $\frac{5}{11}$
 23. 1,4%
 24.2. a) $\frac{429}{2006} \approx 21,4\%$ b) $\frac{13}{10\,030} \approx 0,1\%$

Pág. 38

25. (D) 26. (D) 27. (B)
 28. (C) 29. (D) 30. (C)
 31. (D) 32. (A) 33. (A)

Pág. 39

34. (B) 35. (D)
 36.1. $\frac{2}{3}$ 36.2. 11,4%
 37. $\frac{14}{15}$
 38.1. 0 38.2. $\frac{1}{168}$ 38.3. $\frac{3}{168}$
 39.1. $\frac{1}{6}$ 39.2. $\frac{1}{2}$ 39.3. $\frac{1}{3}$
 40.1. $\frac{2}{5}$ 40.2. $\frac{3}{5}$ 40.3. $\frac{1}{5}$

Pág. 40

- 41.1. $\frac{1}{5}$ 41.2. $\frac{4}{5}$
 42.1. $\frac{2}{35}$ 42.2. $\frac{8}{35}$
 43. 9
 44.1. $\frac{3}{182}$ 44.2. $\frac{1}{429}$
 45.1. $\frac{1}{10}$ 45.2. $\frac{3}{10}$
 46. 27%
 47.1. 2500 47.2. 0,0486
 48.1. 36 036 48.2. $\frac{5}{14}$
 49. $\frac{2}{55}$

Pág. 41

50. Segundo a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, se estes forem todos equiprováveis.
 O número de casos possíveis é igual a 4^3 pois, atendendo a que há reposição de cada bola extraída, em cada extração existem quatro possibilidades. Assim no conjunto das três extrações existem $4 \times 4 \times 4 = 4^3$ resultados possíveis. Para determinar o número de casos favoráveis a que o produto dos três números obtidos seja igual a 8, temos de considerar duas possibilidades: ou saem as bolas numeradas com 1, 2 e 4 ou sai três vezes a bola com o número 2. O primeiro caso pode verificar-se de 3! maneiras diferentes (número de permutações dos três elementos). No segundo caso, $2 - 2 - 2$, existe apenas uma possibilidade. Assim, o número de casos favoráveis é dado por $3! + 1$.
 Portanto uma resposta para este problema é $\frac{3! + 1}{4^3}$.

- 51.1. a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{28}$ d) $\frac{2}{7}$
 51.2. a) $\frac{1}{14}$ b) $\frac{3}{7}$
 52.1. $\frac{5}{18}$ 52.2. $\frac{1}{14}$ 52.3. $\frac{29}{126}$

53. $\frac{1}{11}$
 54.1. $\frac{3}{11}$
 54.2. a) $\frac{1}{5775}$ b) $\frac{1}{55}$ c) $\frac{14}{55}$ d) $\frac{8}{11}$
 55.1. 0,051 55.2. $\frac{1}{180}$ 55.3. 0,01

Pág. 44

3. (D) 4. $\frac{1}{6}$

Pág. 46

5. $\frac{13}{24}$ 6. $\frac{4}{7}$

Pág. 47

7. $\frac{5}{12}$

Pág. 48

8. (D) 9. (C) 10. (C)

Pág. 49

11. (D) 12. (A) 13. (B)

Pág. 50

14. 9
 15.1. $\frac{7}{12}$ 15.2. 15
 17. (A)

Pág. 51

- 18.1. $\frac{1}{15}$ 18.2. $\frac{2}{5}$
 19. 88,8% 20.2. 0,64

Pág. 52

- 21.1. a) $\frac{10}{13}$ b) $\frac{2}{3}$ 21.2. 20
 22. 0,6 23. São independentes.

Pág. 53

25. (B) 26. (B) 27. (C) 28. (A)
 29. (B) 30. (C) 31. (C) 32. (B)
 33. (A)

Pág. 54

34. (B) 35. (D)
 36. $P(A) = 0,25$ $P(\overline{A}) = 0,75$
 37. $\frac{1}{4}$ 38. $\frac{3}{5}$
 39.1. $P(R \cap E) = 0,05$ 39.2. $\frac{1}{4}$
 40.1. $\frac{14}{15}$ 40.2. 30

Pág. 55

- 42.1. 0,397 42.2. $\frac{13}{51}$
 43. $\frac{1}{4}$ 45. $\frac{3}{8}$
 46.1. $\frac{7}{8}$ 46.2. 0,95
 47.1. Não são independentes. 47.2. 12

Pág. 58

1.1. Loja X: $\bar{x} = 19$ Loja Y: $\bar{x} = 16$

1.2. Loja X: $\sigma = \sqrt{\frac{144}{7}} \approx 4,54$

Loja Y: $\sigma = \sqrt{\frac{658}{7}} \approx 9,70$

Pág. 60

2. $\bar{x} = 10$ e $\bar{y} = 94,2$; $r = 0,96$
 $y = 2,24x + 71,8$

Pág. 62

y_i	0	1	2
$P(Y=y_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

Pág. 63

4.2. $\mu = 0$; $\sigma \approx 1,15$

Pág. 65

5.1. a) $\frac{32}{81}$ b) $\frac{1}{9}$

x_i	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

b) $\frac{1}{3}$

Pág. 67

6.1. a) 2,3% b) 81,9%

6.2. Cerca de 63 alunos.

Pág. 68

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

8. (A)

Pág. 69

9. (A) 10. (B) 11. (B) 12. 1

Pág. 70

13.2. 0,0067 14. 10,4% 15. 0,52

Pág. 71

16. (A) 17. (D) 18. (A) 19. (D)
20. (D) 21. (D) 22. (B) 23. (D)

Pág. 72

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

x_i	0	2	4
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

25.2. $\frac{1}{2}$

26.1. a) 0,29
b) Por exemplo, "sair no máximo três vezes, uma bola com um número primo inscrito".

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

$\mu \approx 2,3$

x_i	-1	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

27.2. $-\frac{3}{10}$

É de esperar que a tómbola tenha uma receita média de 0,30 € por jogada.

27.3. Em 20 jogadas é de esperar que o Pedro perca 6 €.

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{20}$

28.2. 5

29.1. $\sigma \approx 3$

29.2. $\mu = 45$

Pág. 73

1. (B) 2. (B) 3. (C)
4. (C) 5. (D) 6. (A)

Pág. 74

7. (B) 8. (D) 9. (C) 10. (C)
11. (D) 12. (A) 13. (B)

Pág. 75

14. (A) 15. (C) 16. (A) 17. (B)
18. (C) 19. (C) 20. (A)

Pág. 76

21. (D) 22.1. (C) 22.2. (B) 23. (B)
24. (B) 25. (C) 26. 16

Pág. 77

27.1. $P_2 \times P_3 \times P_4 = 288$

27.2. $P_5 \times P_3 = 720$

28. ${}^5C_4 {}^7C_4 = 175$

29.1. ${}^{25}C_6 = 177\,100$

29.2. ${}^{10}C_4 {}^{15}C_2 = 22\,050$

29.3. ${}^2C_1 {}^{23}C_5 + {}^{23}C_6 = 168\,245$

29.4. ${}^{23}C_4 = 8855$

30. 20

31. 4 862 025

32. 110

33.1. 126

33.2. 30 240

Pág. 78

34. $\frac{P_5}{P_2}$: P_5 é o número de sequências que é possível formar com cinco algarismos diferentes. Estas sequências aparecem em duplicado porque há dois algarismos iguais. A solução é, portanto, $\frac{P_5}{P_2}$.

• ${}^5A_3 = 60$ é o número de maneiras de escolher ordenadamente lugar na sequência de cinco elementos para os algarismos diferentes 1, 2 e 3.

• ${}^5C_2 \times P_3 = 60$; 5C_2 é o número de maneiras de escolher lugar na sequência para os dois algarismos iguais; P_3 é o número de maneiras de os três algarismos diferentes ocuparem os restantes lugares na sequência.

35.1. • Primeira solução:

$${}^3C_1 {}^7C_1 + {}^3C_2 {}^7C_2 + {}^3C_3 {}^7C_3 = 119$$

→ Trocam três selos. O João escolhe três em 3 e o Pedro escolhe três em 7.

→ Trocam dois selos. O João escolhe dois (em 3) e o Pedro escolhe dois (em 7).

→ Trocam um selo. O João escolhe um em 3 e o Pedro em 7.

• A outra solução corresponde a:

– juntam-se os 10 selos;

– o João escolhe qualquer subconjunto de 3 selos no conjunto de 10 selos (${}^{10}C_3$) exceto o subconjunto que corresponde aos seus três selos (${}^3C_3 = 1$).

$${}^{10}C_3 - 1 = 119$$

35.2. $4! \times 2 \times 3 \times {}^{11}A_8 = 958\,003\,200$

36. • Num conjunto de quatro livros, o João escolhe um subconjunto de um, dois, três ou quatro livros. Esta escolha pode ser feita de ${}^4C_1 + {}^4C_2 + {}^4C_3 + {}^4C_4$ maneiras diferentes.
• Para cada um dos quatro livros, o João tem duas possibilidades: escolhe o livro ou não escolhe o livro. Há, assim, $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ possibilidades. Excluindo o caso em que o João rejeita todos os livros, há $2^4 - 1$ possibilidades de escolher pelo menos um dos quatro livros.

37. $\frac{84}{45}$ 38. $264x^9$ 39. $70\sqrt{2}x^{-2}$

40. $\frac{256}{256}$

41.1. 3003 41.2. $\frac{35}{143}$

Pág. 79

42.1. $\frac{5}{14}$ 42.2. $\frac{25}{42}$ 42.3. $\frac{1}{6}$ 42.4. $\frac{11}{21}$

43.1. $\frac{13}{14}$ 43.2. $\frac{97}{105}$

44. $\frac{160}{1711} \approx 9,4\%$ 45. $\frac{13}{14}$

46.1. $\frac{11}{13}$ 46.2. $\frac{1}{273}$

47. $\frac{1}{6}$ 48. $\frac{33}{33}$ 49. $\frac{9}{125}$

Pág. 80

50. $\frac{3608}{4845} \approx 74,5\%$ 51. $\frac{1}{768}$

52.1. $26^3 \times 10^3$ 52.2. $\frac{3}{130}$

53. $\frac{26}{27}$ 54. 4 55. $\frac{7}{11}$

56. $\frac{19}{66}$ 57. $\frac{11}{13}$ 58. 1

Pág. 81

59.1. $\frac{3}{7}$ 59.2. $\frac{3}{14}$ 59.3. $\frac{1}{7}$

60.2. a) $\frac{1}{3}$ b) Não. $P(A|B) \neq P(A)$

61.1. $\frac{9}{17}$ 61.2. Não. $P(F \cap A_3) \neq P(F) \times P(A_3)$

62.1. $\frac{33}{52} \approx 63,5\%$ 62.2. 78 000

Pág. 82

63. $\frac{4}{7}$ 64. $\frac{10}{19}$

65.1. $\frac{1}{30}$ 65.2. $\frac{4}{9}$

66.1. 0,38% 66.2. $\frac{10}{19}$

67. $\frac{1}{2}$

68.1. $\frac{1}{105}$

68.2. $P(A|B) = 1; P(A|B) = \frac{1}{2}$

Pág. 83

69.1. $\frac{2}{7}$

69.2. $\frac{2}{5}$

71.1. $a = 0,15; b = 0,10$

71.2. $\mu = 1,7; \sigma \approx 1,14$

71.3. 65%

72.1.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

72.2. $\mu = 1,6; \sigma = 0,8$

73.1.

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

73.2. $\mu = 1; \sigma = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$

Pág. 84

74.1.

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

74.2. $\mu = 2$; duas tentativas.

75.1.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{384}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1296}$

75.2. $\mu = \frac{2}{3}; \sigma \approx 0,75$ 75.3. 86,8%

76. A probabilidade é a mesma (cerca de 31%).

77.2. 36%

78. 0,225 79. $0,0729 \approx 7\%$

80.1.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0,010	0,077	0,230	0,346	0,259	0,078

80.2. $\mu = 3; \sigma = \sqrt{1,2} \approx 1,1$

81. Cerca de 1010 plantas.

Pág. 85

82.1. $\frac{8}{27}$ 82.2. $\frac{5}{21}$

83. $\frac{2}{3}$

84.1. a) $P(X < 68) > P(X > 73)$ b) 81,9%

84.2. Cerca de 63 alunos.

85.1.

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

$\mu = 1,2; \sigma = 0,6$

86. $\frac{232}{323} \approx 72\%$

Unidade 2: Funções

Pág. 90

1.1. Quociente: $x^2 + 3x - 1$; Resto: $-3x^2 + 2x$ 1.2. 0

1.3. Se o resto da divisão de $A(x)$ por $x + 3$ é igual a 0, então $A(x)$ é divisível por $x + 3$.

Quociente: $x^4 + x^2$

1.4. $S =]-3, 0[\cup]0, +\infty[$

Pág. 92

- 2.1. $S =]-2, 0[\cup]2, +\infty[$
 2.2. $S =]-4, 2[\cup]3, +\infty[$
 2.3. $S = [-6, 0[\cup]1, 2[$
 2.4. $S = [-2, 1[\cup]2, +\infty[$

Pág. 93

- 3.1. a) $S = \{1\}$ b) $S = \{-1\}$ c) $S = \{-3, 3\}$
 3.2. b) 22

Pág. 94

- 4.1. 0
 4.2. $D_{f \times g} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ e $(f \times g)(x) = (x+1)^2$
 4.3. $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ e $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

Pág. 95

- 5.1. a) $D_{f \circ g} = \mathbb{R}^+$ e $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
 b) $D_{f \circ h} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e $(f \circ h)(x) = \frac{2}{x-2}$
 c) $D_{h \circ g} = \mathbb{R}_0^+$ e $(h \circ g)(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} - 1$
 5.2. Entre as funções dadas não existem duas que sejam permutáveis.

Pág. 96

- 6.1. $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3x}{x-1}$$

 6.2. $g^{-1}: [-2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 + 4x + 5$$

Pág. 99

- 7.1. a) $u_n = 5 - 3n$ b) -3100
 7.2. a) 10, 16 e 22 ou -5, 1 e 7.
 b) $a_n = 6n - 38$
 7.3. a) $v_n = 3^{7-n}$ b) 1093,5

Pág. 100

- 7.4. $a_n = 8 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
 7.5. a) (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$,
 sendo $a_1 = \frac{\pi}{2}$; $S_5 = \frac{31\pi}{32}$
 b) π

Pág. 101

- 8.1. $\sqrt[3]{e^2}$ 8.2. e^{-4} 8.3. e^{-4} 8.4. $C \times e^{\pi}$

Pág. 102

9. (C) 10. (D) 11. (A)

Pág. 103

- 12.1. $(-12, 2)$ 12.2. b) 20

Pág. 104

13. (B) 14. (C) 15. (B)
 16. (A) 17. (C)
 18.1. $] -\infty, 2[\cup]3, +\infty[$

18.2. $(f \circ g)(x) = \frac{1}{2 - \sqrt{x+1}} - 1$ e
 $D_{f \circ g} = [-1, 3[\cup]3, +\infty[$

18.3. $g^{-1}: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 - 1$$

19.1. $S = \{0, 10\}$ 19.2. $(2, 6)$

19.3. $f \circ g: [-12, 8] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{-x^2 - 4x + 96}$$

19.4. $S = \{-12, 8\}$

Pág. 105

- 20.2. $B(3, 3)$ 20.3. $x \in]0, 8]$ 20.4. 45 cm
 21.1. $] -1, \frac{3}{2}[\cup]2, 3[$
 21.2. a) $k=2$ b) $k=3$
 22.1. $] -\infty, 2[\cup]4, +\infty[$
 22.2. $S = \{-1, 0, 2\}$
 22.3. Os gráficos das funções f e f^{-1} são simétricos relativamente à reta de equação $y=x$. Portanto, os pontos de interseção destes gráficos, quando existem, pertencem aquela reta. Por isso, as equações $f(x)=x$, $f^{-1}(x)=x$ e $f(x)=f^{-1}(x)$ são equivalentes; $S = \{0, 3\}$
 23.3. 36 cm^3 23.4. 6 cm e $(3\sqrt{3}-3) \text{ cm}$

Pág. 106

1. (B) 2. (B) 3. (D)
 4.1. $\{-1\} \cup]2, +\infty[$
 4.2. $h: \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x^2}$$

 4.3. $] -1, 0[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$
 5.1. $] -\infty, 4[\cup]6, +\infty[$ 5.2. 5

Pág. 107

- 6.2. 240 6.3. 30 6.4. 33,8
 7.1. (P_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 $S_8 = 30\sqrt{2} + 30$
 7.2. a) (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.
 b) 256

8.1. $f \circ g:] -\infty, \frac{1}{8}] \rightarrow \mathbb{R}$; $(f \circ g)(x) = 4\sqrt{1-8x} - 1$
 $g \circ f:] -\infty, \frac{9}{32}] \rightarrow \mathbb{R}$; $(g \circ f)(x) = \sqrt{9-32x}$

8.2. $S = \{0\}$ 8.3. Não, porque $f \circ g \neq g \circ f$.

8.4. $g^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1-x^2}{8}$$

8.5. $S = \{3\}$

Pág. 109

- 1.1. $\{-1\}$ 1.2. $\left\{\frac{3}{4}\right\}$ 1.3. $\{-5\}$
 1.4. $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ 1.5. $\{-1, 1\}$ 1.6. $\{-1, 2\}$
 1.7. $] -\infty, 3[$ 1.8. $\left[\frac{5}{4}, +\infty\right[$ 1.9. $] -1, 1[$
 1.10. $\mathbb{R}^+$ 1.11. $\mathbb{R}^+$
 1.12. $] -\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ 1.13. $[-1, 1]$

Pág. 110

- 2.1. $\{8\}$ 2.2. $\{1\}$ 2.3. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$
 2.4. $\{5\}$ 2.5. $\{1000\}$

Pág. 111

3.1. $\log \frac{\sqrt[3]{a} b^2}{\sqrt{cd^3}}$

Pág. 112

- 3.2. a) 3 b) 3 c) $\frac{53}{6}$

Pág. 113

- 4.1. $\left\{\frac{20}{3}\right\}$ 4.2. $\{1 - \log_2 5\}$ 4.3. $\left\{\frac{10 \ln 3}{3}\right\}$
 4.4. $\{5 \ln 3, -5 \ln 3\}$ 4.5. $\{\ln(2\sqrt{3} + 1)\}$

Pág. 114

- 5.1. $\{e^3\}$ 5.2. $\left\{\frac{e}{2}\right\}$
 5.3. $\{2\}$ 5.4. $\{e^{-\frac{1}{2}}, e\}$

Pág. 115

6. Cerca de 14 anos.

Pág. 116

- 7.1. 24 cm
 7.2. A um aumento de 6 cm do comprimento de um animal corresponde a duplicação do seu peso.

Pág. 117

- 8.1. 101,32 kPa
 8.2. 2,40. A uma redução de 25% da pressão atmosférica corresponde um aumento de altitude de 2,4 km.

Pág. 118

9. (C) 10. (C) 11. (D)
 12. (D) 13. (C)

Pág. 119

14. (C) 15. (D) 16. (B) 17. (B)

Pág. 120

18. (D) 19. (B)
 20.1. $D_f =]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[$; zeros de f : $\{0, 2\}$
 $D_g =]-\sqrt{7}, \sqrt{7}[$; zeros de g : $\{-2, 2\}$
 20.2. $[1, 2]$

Pág. 121

- 21.1. 8% 21.2. 14 dias
 22.1. A intensidade da luz a 3 metros de profundidade é metade da intensidade da luz à superfície; 0,23
 22.2. 6000; A intensidade luminosa à superfície do lago é de 6000 unidades.

Pág. 122

23. (D) 24. (A) 25. (D) 26. (C)
 27. (B) 28. (C) 29. (B) 30. (D)
 31. (D) 32. (B) 33. (B)

Pág. 123

34. (C) 35. (A) 36. (B) 37. (B)
 38. (C) 39. (C) 40. (B)
 43.1. $S = \{4\}$ 43.2. $S = \{10\,000\}$
 44.2. $x = \sqrt{5}$
 46. 3; Quando a intensidade I duplica, o nível N sofre um acréscimo de 3 dB.
 47.1. 2007 47.2. 284 mil

Pág. 124

- 48.1. a) O número de microrganismos existentes nessa cultura aumenta 60% por hora.
 48.2. 9095
 49.1. 30 49.2. $k \approx 0,15$
 49.3. a) 16% b) 11 meses
 50.3. 8 h 46 min
 51.1. 2003 51.2. $k = -\ln(2,1 - p)$

Pág. 125

- 52.2. 2612
 52.3. O número de artigos vendidos decresce 1,4% por dia.
 52.4. A nova campanha deve ser iniciada durante os primeiros 66 dias que decorrem após o termo da campanha anterior.
 53.1. 8,6 53.2. 10 parsec
 54. 0,36
 55.2. 13 horas e 2 minutos.
 56.1. $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2^{\frac{x}{2}-3} + 2$$

 56.2. $D_h =]2, +\infty[$
 56.3. a) $] -\infty, 4[$ b) $]4, 6]$

Pág. 126

1. (B) 2. (B) 3. (D)
 4. (D) 5. (C) 6. (B)
 7. (D) 8. (A) 9. (D)

Pág. 127

10. (C) 11. (B) 12. (D) 13. (B)
 14. (B) 15. (A) 16. (C) 17. (C)
 18.1. $S = \{3\}$ 18.2. $S = \{0, 3\}$
 18.3. $S = \{2, 1\}$ 18.4. $t = 15 \ln 2 \approx 10,4$
 18.5. $t = -\frac{10}{3} \ln 2 \approx -2,3$ 18.6. $S = \left\{\frac{1}{2} \log_3 2\right\}$
 18.7. $S = \{5\}$ 18.8. $S = \{-6\}$
 18.9. $S = \left]-\frac{1}{4}, 2\right[$
 18.10. $S =]0, 1[\cup]4, +\infty[$ 18.11. $S =]-\infty, \ln 2[$
 18.12. $S = \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[\setminus \{0\}$

Pág. 128

- 19.2. Cerca de 907 aves. 19.3. No ano de 2009.
 20.1. 15 peças por hora. 20.2. Cerca de 80 dias.
 21.2. Terão de decorrer, aproximadamente, 9 anos.
 21.3. 332 milhares de euros.
 22.2. $E = 7,08 \times 10^{24}$ erg

Pág. 129

- 23.1. 10 milhões 23.2. 16 anos
 24.1. 409,37 gramas 24.2. 34,7 anos
 25.1. No 9.º dia o número de pessoas infetadas atingiu 4000.
 25.2. Passadas duas semanas foram infetadas cerca de 9960 pessoas.
 26.1. $D_f =]0, 1[$
 26.2. $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f^{-1}(x) = \frac{1}{e^x + 1}$.
 27.1. $f^{-1}:]-\infty, 3[\rightarrow \mathbb{R}$
 com $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{3-x}{2}\right)$.
 27.2. $\left\{0, \frac{1}{2} \ln 2\right\}$
 28.2. $x = 81$
 29.1. Aproximadamente, 7169 anos.
 29.2. 11,4%

Pág. 130

- 30.1. $d = 2^{\frac{T+4,6}{4,3}}$ 30.2. 2,1 cm
 30.3. 4,3; são necessários 4,3 anos para que o diâmetro médio do tronco de uma árvore duplique.
 30.4. 15 anos.
 31.2. 1623 anos.
 32.1. 1809 €
 32.2. Se nada investir venderá cerca de 119 bicicletas; se investir 3000 € venderá cerca de 397 bicicletas; no caso de investir 30 000 € o número de bicicletas vendidas rondará 621.
 32.3. Compensa gastar 3000 € em publicidade (o lucro é de 16 850 €) mas não compensa gastar 30 000 € (lucro de 1050 €).
 32.4. a) $L(p)$ é o lucro obtido com a venda de n bicicletas tendo sido investido p milhares de euros em publicidade.
 b) O lucro é máximo para um investimento de 4800 €.
 33.2. Às 12 h 28 min.

Pág. 137

- 1.1. $-\frac{1}{2}$ 1.2. $\frac{1}{3}$ 1.3. -8
 2.1. Não existe. 2.2. $+\infty$ 2.3. 0
 2.4. $+\infty$ 2.5. $-\infty$ 2.6. $+\infty$ 2.7. $-\infty$

Pág. 138

- 3.1. $-\infty$ 3.2. $-\infty$
 4.1. 0 4.2. 0

Pág. 139

- 5.1. $-\infty$ 5.2. 0 5.3. $\frac{4}{3}$ 5.4. -2
 6.1. $-\frac{9}{2}$ 6.2. $-\infty$ 6.3. 3
 6.4. Não existe. 6.5. $\frac{5}{3}$

Pág. 140

- 7.1. $+\infty$ 7.2. Não existe.
 7.3. 2 7.4. $\frac{1}{16}$
 7.5. $\frac{1}{3}$ 7.6. 0
 7.7. $+\infty$ 7.8. Não existe.
 8.1. 1 8.2. $+\infty$ 8.3. $\frac{1}{3}$

Pág. 141

- 9.1. $\frac{3}{2}$ 9.2. $\frac{1}{3}$ 9.3. -2 9.4. $-\frac{3}{2}$
 9.5. 2 9.6. $+\infty$ 9.7. 0 9.8. $+\infty$
 9.9. 1 9.10. $+\infty$ 9.11. 0 9.12. $-\infty$

Pág. 142

- 9.13. $\frac{3}{2}$ 9.14. $\frac{1}{2}$ 9.15. $\frac{1}{3}$ 9.16. 1
 9.17. 1 9.18. 2 9.19. 1 9.20. $-\infty$
 9.21. $+\infty$ 9.22. $4e^2$ 9.23. $1 + \ln 3$
 9.24. 1 9.25. 6

Pág. 145

10. f é contínua no ponto $x = 0$.

Pág. 146

11. f é descontínua à esquerda e à direita no ponto $x = 0$.

Pág. 148

12. f é definida pelo quociente, composta e soma de funções contínuas.

Pág. 149

13. h é contínua em $[0, 1]$; $h(0) > 0$ e $h(1) < 0$.

Pág. 151

- 14.1. a) $x = 1$ e $y = x + 1$
 b) $y = 3x$ (quando $x \rightarrow -\infty$)
 c) $x = 0$; $y = -1$ (quando $x \rightarrow -\infty$)
 $y = 1$ (quando $x \rightarrow +\infty$)
 d) $x = 0$
 e) $y = 0$ ($x \rightarrow -\infty$) e $y = 2$ ($x \rightarrow +\infty$)
 f) $x = 3$; $y = 0$ ($x \rightarrow -\infty$)
 g) $y = 3x - \frac{1}{2}$ ($x \rightarrow +\infty$); $y = -3x + \frac{1}{2}$ ($x \rightarrow -\infty$)
 14.2. a) $y = 3$ ($x \rightarrow +\infty$)
 $y = x$ ($x \rightarrow -\infty$)
 b) $y = 2x + 1$ ($x \rightarrow \pm\infty$)

Pág. 152

15. (C) 16. (A) 17. (C) 18. (D)

Pág. 153

- 19.1. (B) 19.2. (D) 20. (A) 21. (A)

Pág. 154

22. (D) 23. É contínua.
 25. g é contínua em $\mathbb{R}$.

Pág. 155

27. (C) 28. (D) 29. (C)

Pág. 156

30. (D) 31. (D) 32. (C) 33. (B)

Pág. 157

- 34.1. $\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right]$
 34.3. $A(0,671; 0,450)$, $B(1,854; 3,437)$, $C(0,726; 0,852)$ e $D(0,574; -0,758)$
 35.1. $k = -1$

37. (A) 38. (A) 39. (A) **Pág. 158**

Pág. 159

- 40.2. Com o decorrer do tempo, o número de leopardos existentes na reserva tenderá a estabilizar num número próximo das 900 unidades.
- 40.3. 2017
- 41.1. 5000 41.3. 7,21
- 41.4. 0 ; $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 0$ significa que, com o passar do tempo, a população de pinguins da ilha tende a extinguir-se, dado que o número de indivíduos que nascem é inferior ao número de indivíduos que morrem.

46. $y = 0$ **Pág. 160**

47. $y = -1$ 49. $y = -3$ 51. $y = 0$ **Pág. 161**

52. (C) 53. (A) 54. (C) **Pág. 162**
 55. (A) 56. (C) 57. (B)
 58. (A) 59. (B) 60. (B)

61. (C) 62. (A) 63. (B) **Pág. 163**
 64.1. $k = e$ 64.2. $y = 0$; $y = -3$
 64.3. 1,97
 65.1. f é contínua em $\mathbb{R}$.
 65.2. $y = x + 5$ (quando $x \rightarrow -\infty$)
 66.1. É descontínua.
 66.2. São assíntotas do gráfico de g as retas de equações $x = 0$, $y = -x + 3$ (quando $x \rightarrow +\infty$) e $y = x - 2$ (quando $x \rightarrow +\infty$).

1. (B) 2. (A) 3. (C) 4. (A) **Pág. 164**
 5. (B) 6. (A) 7. (B)

8. (D) 9. (A) 10. (B) **Pág. 165**
 11. (C) 12. (A) 13. (A)

14. (B) 15. (D) 16. (B) 17. (D) **Pág. 166**
 18. (D) 19. (C) 20. (B)

21.1. 3 21.2. $-\frac{1}{2}$ 21.3. -2 21.4. $-\infty$ **Pág. 167**
 21.5. $+\infty$ 21.6. $+\infty$ 21.7. $-\infty$ 21.8. -1
 21.9. 0 21.10. $-\infty$ 21.11. 0 21.12. 0

22.1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2$
 22.2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$
 23.1. $\frac{3}{4}$ 23.2. 0 23.3. 1 23.4. $+\infty$
 23.5. 0 23.6. $\ln 2$ 23.7. $+\infty$ 23.8. $\frac{1}{\ln 2}$
 23.9. $+\infty$ 21.10. 0 23.11. $-\infty$

24.1. f é contínua em $\mathbb{R}$. 24.2. 3
 25.1. f é descontínua em $x = 0$ (contínua à esquerda).
 25.2. $\frac{3}{2}$
 26.2. A árvore nasceu há 7 anos. Portanto, foi transplantada há 5 anos.

Pág. 168
 27. Sim. A soma de duas funções contínuas em a é uma função contínua em a .
 28. $f + g$ pode ser contínua em a . Por exemplo:
 se $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq a \\ 1 & \text{se } x = a \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}$
 f e g são descontínuas em a e $f + g$ é contínua em a .
 29. Falso. Por exemplo, se f é constante tal que $f(x) = 0$ e g é descontínua em a , $(f \times g)(x) = 0$ é contínua em a .
 30. Não. As funções do exercício 28. são descontínuas em a e o produto é uma função contínua em a .
 31.2. $f(-2) \times f(0) < 0$ e f é contínua em $[-2, 0]$.
 31.3. A reta de equação $y = x$ é uma assíntota quando $x \rightarrow -\infty$.
 32. Não. Por exemplo, sendo $f(x) = x^2 - 1$, $f(-2) \times f(2) > 0$ e f admite dois zeros em $]-2, 2[$.
 35.1. $y = 0$ 35.2. $x = 0$
 35.3. $x = 1$; $y = 0$ e $y = x$ 35.4. $x = -1$; $x = 2$; $y = x + 1$

Pág. 170
 1.1. -1 1.2. $y = -x + 4$
 2.1. 19 m/s 2.2. 13 m/s

Pág. 171
 3.1. $f'(1) = 2$
 3.2. a) $k = e$ b) $f'(1^-) = 2$ e $f'(1^+) = 1$. Não existe $f'(1)$.

Pág. 172
 4.1. a) $f'(0) = 1$
 b) Toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto. Logo, f é contínua em $x = 0$.
 4.2. b) $g'(0^-) = \frac{1}{2}$; $g'(0^+) = -\frac{1}{2}$. Não existe $g'(0)$.

Pág. 175
 6.1. $f'(x) = -12x^2 + 12$ 6.2. $g'(x) = 10x^3 + x^2$
 7.1. $f'(x) = -0,06x - 0,4 - \frac{10}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$
 7.2. $f'(t) = 6t^2 + \frac{5}{2}\sqrt{t^3}$ 7.3. $f'(t) = -\frac{4}{t^3} + \frac{1}{2\sqrt{t^3}}$
 7.4. $f'(s) = -\frac{6}{s^3} - \frac{3}{4\sqrt{s^3}}$

Pág. 176
 8.1. $f'(x) = (3x^2 + 1)(\sqrt{x} + 1) + \frac{x^3 + x}{2\sqrt{x}}$
 8.2. $f'(x) = 1 - 2x - \frac{1}{x^2}$
 9.1. $f'(x) = \frac{x^2 - 3}{3x^2}$ 9.2. $g'(x) = \frac{1 - x}{2\sqrt{x}(x + 1)^2}$

Pág. 177
 10. 15
 11.1. $f'(x) = -\frac{5}{x^6}$ 11.2. $g'(x) = \frac{2(\sqrt{x} + 1)^3}{\sqrt{x}}$

$$11.3. h'(x) = \frac{-3(x+1)^2}{x^4}$$

$$11.4. i'(x) = (2x+1)^3(10x+1)$$

Pág. 178

$$12.1. f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

$$12.2. g'(x) = (2x+1) \times 2^{x^2+x} \times \ln 2$$

$$12.3. h'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$12.4. i'(x) = (4x-4)e^{-2x}$$

Pág. 179

$$13.1. f'(x) = \frac{1+2\sqrt{x}}{2x+2\sqrt{x}}$$

$$13.2. g'(x) = -\frac{1}{x \ln 10}$$

$$13.3. h'(x) = \frac{3(1+\ln x)^2}{x}$$

$$13.4. i'(x) = \frac{1-\ln x}{2}$$

Pág. 181

14.1. f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ e estritamente crescente em $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

14.2. f é estritamente crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[0, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[-2, 0]$.

14.3. f é estritamente decrescente em $]-\infty, 3[$ e em $]3, +\infty[$.

14.4. f é estritamente decrescente em $]0, 1]$ e estritamente crescente em $[1, +\infty[$.

14.5. f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e estritamente crescente em $[-1, 1]$.

Pág. 183

15.1. f é estritamente decrescente em $[-2, 1]$ e estritamente crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[1, +\infty[$.

$f(-2) = 5e^{-2}$ é um máximo relativo e $f(1) = -e$ é um mínimo relativo.

15.2. f é estritamente crescente em $]-2, 0]$ e estritamente decrescente em $[0, 2[$.

$f(0) = 1 + \ln 4$ é um máximo relativo (e absoluto) de f .

15.3. f é estritamente decrescente em $]-\infty, -2]$ e em $[2, +\infty[$ e estritamente crescente em $[-2, 2]$.

f tem um mínimo relativo para $x = -2$ e um máximo relativo para $x = 2$.

15.4. f é estritamente crescente em $]0, e]$ e estritamente decrescente em $[e, +\infty[$.

f tem um máximo relativo para $x = e$.

15.5. f é estritamente decrescente em $]0, e^2]$ e estritamente crescente em $[e^2, +\infty[$.

f tem um mínimo relativo para $x = e^2$.

15.6. f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente decrescente em $[0, 1[$ e em $[1, +\infty[$.

$f(0) = 2$ e $f(1) = 2$ são máximos relativos de f .

Pág. 186

16.1. Concavidade voltada para baixo em $]0, 1]$ e voltada para cima em $[1, +\infty[$. $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ é um ponto de inflexão do gráfico.

16.2. Concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1]$ e voltada para cima em $[-1, +\infty[$. $(-1, e^2)$ é um ponto de inflexão.

16.3. O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 1]$ e voltada para baixo em $[1, +\infty[$.

O ponto de abscissa 1 é um ponto de inflexão.

16.4. O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em todo o domínio.

Pág. 187

17. $f(1)$ é um máximo relativo e $f(2)$ é um mínimo relativo.

Pág. 188

18.1. $D_f = \mathbb{R}^+$

Monotonia e extremos

x	0		e	$+\infty$
f'		+	0	-
f			e^{-1}	

Máximo

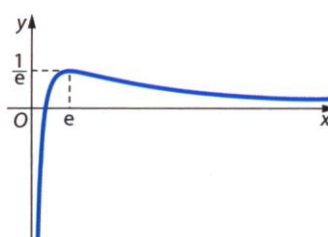
Concavidade e pontos de inflexão

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
f''		-	0	+
f			$\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}$	

PI

Assíntotas: $x=0$ e $y=0$ ($x \rightarrow +\infty$)

Gráfico:



Contradomínio:

$$D_f = \left] -\infty, \frac{1}{e} \right]$$

18.2. $D_f = \mathbb{R}$

Monotonia e extremos

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
f'	+	0	+	0	-
f		0		$4e^{-2}$	

Mínimo

Máximo

Concavidade e pontos de inflexão

x	$-\infty$	$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$	$+\infty$
f''	+	0	-	0	+
f					

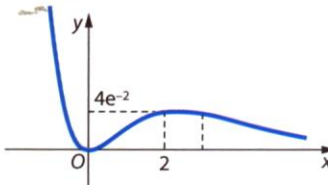
PI

PI

Assíntotas:

 $y=0$ ($x \rightarrow +\infty$)

Gráfico:



Contradomínio:

$$D_f = [0, +\infty[$$

Pág. 190

$$19.3. x = 5 \text{ m}; y = \frac{5\sqrt{3}}{4} \text{ m}$$

Pág. 191

20.1. $5 \in$

20.3. O lucro é máximo decorridos 43 dias.

Pág. 192

21. (A) 22. (D) 23. (B) 24. (D)

Pág. 193

25. (D) 26. (A) 27. (C) 28. (D)

Pág. 194

29. (A) 30. (C)

Pág. 195

31. (D) 32. (A) 33. (B)

Pág. 196

34. (B) 35. (B) 36. (B)

Pág. 197

37.1. f é estritamente crescente.37.2. $y=0$ e $y=1$ 37.3. $]0, 1[$ 37.4. a) $y = \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$ b) $2 \ln 2$ 37.5. O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $] -\infty, \ln 2]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[\ln 2, +\infty[$.O ponto de abscissa $\ln 2$ é um ponto de inflexão.38.3. $y = \frac{x}{4}$ (quando $x \rightarrow +\infty$) e $y = -\frac{x}{4}$ (quando $x \rightarrow -\infty$)38.4. f é estritamente decrescente em $] -\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, +\infty[$. f tem um mínimo relativo para $x=0$.38.5. $S = \{-4 \ln 2, 4 \ln 2\}$

Pág. 198

39.1. g é estritamente decrescente em $] -\infty, 0]$ e em $[1, +\infty[$ e é estritamente crescente em $[0, 1]$. g tem um mínimo relativo para $x=0$ e um máximo relativo para $x=1$.39.2. $y=1$ (quando $x \rightarrow +\infty$) 39.3. $S = \{-1, 1\}$ 40.1. f é estritamente decrescente em $] -\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.40.3. $x \in]-1, +\infty[$ 40.4. $k \approx 0,649$

Pág. 199

41.1. $y = 4x - 2$ 41.2. $h'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow h$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$.41.3. Como h é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$, h é injetiva e, por isso, admite inversa.41.4. $h^{-1}(2) = 1$ 41.5. $a \approx 0,54$ 42.1. A função g é estritamente decrescente em $]0, 1]$ e é estritamente crescente em $[1, +\infty[$.A função tem um mínimo relativo para $x=1$.

42.2. 2

43.2. $x=-1$ e $x=1$ 43.3. O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $] -1, 0]$ e voltada para baixo em $[0, 1]$. O ponto de abscissa 0 é um ponto de inflexão.43.4. $y = -2x$

Pág. 200

44.1. $y = -x + 3$ 44.2. f é contínua no ponto 1 porque toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto e $f'(1) = -1$ 44.3. O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $] -\infty, 1]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[1, +\infty[$. O ponto de abscissa 1 é um ponto de inflexão.45.1. $f'(0^-) = -1$ e $f'(0^+) = -\infty$ 45.2. $f'(x) = \begin{cases} e^x(-1-x) & \text{se } x < 0 \\ \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ 45.3. A função f é estritamente crescente em $] -\infty, -1]$ e em $\left[\frac{2}{e}, +\infty\right[$ e é estritamente decrescente em $\left[-1, \frac{2}{e}\right]$. A função f tem um máximo relativo para $x=-1$ e um mínimo relativo para $x=\frac{2}{e}$.46.1. $f'(1^-) = 0$ e $f'(1^+) = 5$ 46.2. f é estritamente crescente em $] -\infty, \frac{1}{2}]$ e em $[1, 2]$; f é estritamente decrescente em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ e em $[2, +\infty[$. f tem máximos relativos para $x=\frac{1}{2}$ e para $x=2$ e tem um mínimo relativo para $x=1$.46.3. $y = x + \frac{1}{2}$ (quando $x \rightarrow -\infty$)

Pág. 201

47.1. f é contínua no ponto 0.47.2. $f'(0^-) = e$ e $f'(0^+) = -2$
 $f'(0^+) \neq f'(0^-) \Rightarrow$ não existe $f'(0)$ 47.3. f é estritamente decrescente em $] -\infty, -1]$ e em $[0, +\infty[$ e estritamente crescente em $[-1, 0]$.
 f admite um mínimo relativo para $x=-1$ e um máximo relativo para $x=0$.48.1. $f'(0) = -\frac{1}{2}$ 48.2. $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 48.4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(2 - \frac{3x}{2} \right) \right] = 0$ 49.2. $f'(0^-) = e^{-1} - 2$ e $f'(0^+) = 1$
 $f'(0^+) \neq f'(0^-) \Rightarrow$ não existe $f'(0)$ 49.3. f é estritamente crescente em $[0, 1]$ e estritamente decrescente em $[1, +\infty[$. f tem um máximo relativo para $x=1$.49.4. $y=0$

Pág. 202

50. (A) 51. (C) 52. (C)

53. (C) 54. (B) 55. (B)

Pág. 203

56. (A) 57. (D) 58. (B)

59. (C) 60. (B) 61. (B)

Pág. 204

62.1. f é estritamente decrescente. Logo, f não tem extremos relativos.62.2. Os pontos de abscissas -1 e 0 são pontos de inflexão do gráfico de f .

- 62.3. $f'(-1) = 0$ 62.4. $y = -4x + 5$
 63.1. $x = 0$
 63.2. g é estritamente crescente em $]0, 1]$ e em $[4, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[1, 4]$.
 f tem um máximo relativo para $x = 1$ e um mínimo relativo para $x = 4$.
 63.3. O ponto de abscissa 2 é um ponto de inflexão.
 $y = -x + 4 \ln 2 - 6$
 64.1. $y = 0$ (quando $x \rightarrow -\infty$)
 64.2. $g(0) = 1$ é o máximo de f .
 64.3. $D_g' =]-\infty, 1]$ 64.4. $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
 64.6. O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ e voltada para baixo em $[-\frac{1}{2}, +\infty[$.
 O ponto de abscissa $-\frac{1}{2}$ é um ponto de inflexão.
 64.7. $y = \frac{2}{e}x + \frac{3}{e}$
 65.1. 23,77 m 65.2. 8 m
 66.1. $x = 0$; $y = 2x$ 66.2. $y = 5x - 3$
 66.4. $u(x) < 0$, $\forall x \in]0, 1[$ e $u(x) > 0$, $\forall x \in]1, +\infty[$
 66.6. f é estritamente decrescente em $]0, 1]$ e estritamente crescente em $[1, +\infty[$.
 f admite um mínimo relativo para $x = 1$.
 66.7. $D_f' = [3, +\infty[$
 67. $k = 2$

Pág. 205

- 69.6. f é estritamente decrescente em $]0, \alpha]$ e estritamente crescente em $[\alpha, +\infty[$.
 Logo, $f(\alpha)$ é o mínimo (absoluto) de f .
 73.1. O gráfico da função f_n tem um único ponto, de abscissa $x = e^{-n-1}$, onde a reta tangente é paralela ao eixo Ox .
 73.2. Como $f(e^{-n-1}) = -e^{-n-1}$ o ponto gráfico de f_n com abscissa e^{-n-1} tem ordenada $-e^{-n-1}$. Logo, pertence à reta de equação $y = -x$.
 73.3. R_n tem abscissa e^{-n} .
 73.4. Como $f'(e^{-n}) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a tangente ao gráfico de f_n no ponto R_n é paralela à reta de equação $y = x$.
 74.3. $y = \frac{\sqrt{e}}{e}x - \frac{1}{2}$

Pág. 206

1. (B) 2. (B) 3. (B) 4. (A)
 5. (C) 6. (B) 7. (C) 8. (A)

Pág. 207

9. (B) 10. (A) 11. (C)

Pág. 208

12. (D) 13. (A) 14. (C)

Pág. 209

15. (A)
 16.1. $(0, 0)$ e $(4, -32)$ 16.2. $(0, 0)$ e $\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$
 16.3. $(0, 3 + \ln 4)$ 16.4. $\left(e - 1, \frac{1}{e}\right)$
 17. $y = -\frac{10}{9}x + \frac{32}{9}$

18. 0,216; $-0,024$. 20 minutos após ter sido tomado, a concentração do medicamento no sangue cresce a uma velocidade de 0,216 mg/l e, 3 horas após ter sido tomado, decresce a uma taxa de 0,024 mg/l.

$$19.1. f'(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ 2x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$19.2. y = \frac{2}{e}x - \frac{1}{e} \quad 20. \frac{3}{2 \ln 2}$$

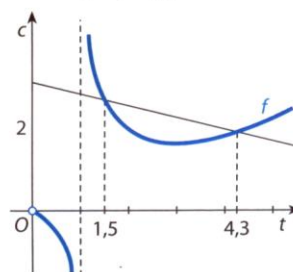
$$21.1. \text{ Não existe } (f'(1^-) = -2 \text{ e } f'(1^+) = 2). \quad 21.2. 1$$

Pág. 210

22. (B)
 23.1. $y = x + 5$
 23.2. g é estritamente crescente em $\mathbb{R}$; g não tem extremos.
 24.1. 1
 24.2. Concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0]$ e voltada para baixo em $[0, +\infty[$. O ponto do gráfico de abscissa 0 é um ponto de inflexão.
 25.1. A reta de equação $x = 0$ é a única assíntota do gráfico de f .
 25.2. f é estritamente crescente em $]0, 2]$ e estritamente decrescente em $[2, +\infty[$, logo $f(2) = 2 \ln 2$ é o único máximo de f .
 26.1. $x = 1$
 26.3. f é estritamente decrescente em $]0, 1[$ e em $]1, e[$; f é estritamente crescente em $[e, +\infty[$; $f(e) = e$ é um mínimo relativo.

- 26.4. Consideram-se as funções $y_1 = \frac{x}{\ln x}$ e $y_2 = 4 - \frac{x}{4}$.

Determinou-se a interseção dos dois gráficos tendo-se obtido os valores seguintes (aproximados às décimas).

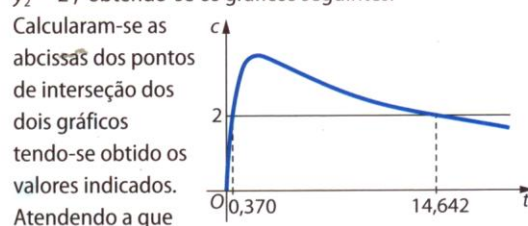


Logo, as soluções inteiras da inequação $f(x) < 4 - \frac{x}{4}$ são 2, 3 e 4.

- 27.1. g é a derivada de f . 27.2. f é a derivada de g .

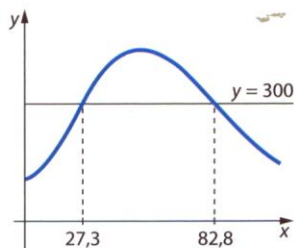
Pág. 211

- 28.1. A concentração foi máxima 2 h e 9 min após a substância ter sido injetada.
 28.2. Introduziram-se na calculadora as funções $y_1 = C(x)$ e $y_2 = 2$, obtendo-se os gráficos seguintes.



Calcularam-se as abscissas dos pontos de interseção dos dois gráficos tendo-se obtido os valores indicados. Atendendo a que $14,642 - 0,370 = 14,272$ e $14,272 \text{ h} \approx 14 \text{ h } 16 \text{ min}$, podemos concluir que a concentração de substância no sangue do animal foi superior a 2 miligramas por litro de sangue durante cerca de 14 horas e 16 minutos.

- 29.1. As retas definidas por $x=0$ e $y=0$ são as únicas assíntotas do gráfico de f .
- 29.3. A área do triângulo $[OAP]$ é máxima para $x=1$.
- 30.1. 50 000 30.2. 22 h 50 min
- 30.3. Calculou-se a interseção dos gráficos de $y_1 = N(x)$ e $y_2 = 300$, tendo-se obtido os valores indicados (às décimas).



O número de espectadores ultrapassou os 300 000 entre as 22 h 27 min e as 23 h 23 min. (82,8 min $\approx$ 1 h 23 min)

- 31.1. h é estritamente decrescente em $]0, 1]$ e estritamente crescente em $[1, +\infty[$.
 $h(1)=3$ é o mínimo absoluto de h .
 Então, $h(x) \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}^+$.
- 31.2. $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f$ é estritamente crescente.
- 31.3. $-\infty; +\infty$ 31.4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$
- 31.5. É o ponto de abscissa e .

Pág. 212

32. (208,33; 36 875,65)
 Para $x=208,33$ milhares de euros, a velocidade de crescimento R é máxima.
33. $\left(-\frac{b}{3a}, -\frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} + d\right)$
- 34.1. (14,67; 12 765,26) 34.2. 1085,33 m/s
- 34.3. A velocidade máxima é atingida para $t=14,67$ s, abscissa do ponto de inflexão.
35. Não. Por exemplo, $(2, 0)$ é um ponto de inflexão do gráfico da função f definida por $f(x) = |x^2 - 4|$ e $f'(2)$ não existe.
- 36.1. 4,63 cm 36.2. $x = 13 - \sqrt{26}$
37. 3,9 cm

Pág. 213

38. A reta de equação $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ é tangente ao gráfico h no ponto de inflexão, ponto de coordenadas $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
- 39.1. $N(0)=0,01 \Leftrightarrow k=2$ 39.2. No ano de 2001.
- 39.3. 245 castores/ano.
40. 1
- 41.1. $a=-3$ e $b=1$ 41.2. $y=-x-1$
42. $y=5x-3$

Unidade 3: Trigonometria e números complexos

1.1. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 1.2. $-\frac{38}{15}$

Pág. 217

2.1. $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Pág. 218

2.2. $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi\right\}$

2.3. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2.4. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

2.5. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

2.6. $\left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

Pág. 220

3.3. $x \approx 0,46$

Pág. 222

4. $d(n) = 12,15 + 2,73 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(n - 78,75)\right]$

Pág. 224

5.1. $\frac{5}{2}$

5.2. $\frac{3}{5}$

5.3. 4

5.4. 0

5.5. $-\frac{1}{2}$

5.6. 3

5.7. 1

5.8. 1

Pág. 226

6.1. $f'(x) = \cos x - \cos(2x)$ 6.2. $h'(t) = -\frac{3\pi}{10} \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right)$

6.3. $g'(x) = 1 + \frac{2}{\cos^2(2x)}$

7.2. $A(0) = 3$

$A(0)$ é a área do quadrilátero $[PBCD]$ quando $x=0$.
 Como, neste caso, P coincide com M , trata-se da área do trapézio $[MBCD]$. Esta área também pode ser obtida por:

$$\frac{MB + DC}{2} \times BC = \frac{1+2}{2} \times 2 = 3$$

Pág. 227

7.3. $\frac{\pi}{4}; 4 - \sqrt{2}$

Pág. 228

8. (C)

9. (C)

Pág. 229

10. (B)

11. (A)

12. (A)

Pág. 230

13.2. $\frac{\pi}{6}$

13.3. $\frac{8\sqrt{2}}{9}$

Pág. 231

15.3. Se $x = \frac{\pi}{6}$, $\overline{AC} = 2$, $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ e $\overline{BC} = 4$.

Pág. 232

17.1. f é estritamente crescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

e é estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

f tem mínimos relativos para $x=0$ e $x=\frac{3\pi}{2}$ e tem máximos relativos para $x=\frac{\pi}{2}$ e $x=2\pi$.

17.2. $y = -4x + 4\pi + 1$

17.4. O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[0, \frac{7\pi}{6}\right]$ e em $\left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$ e voltada para cima $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$.

O gráfico de f tem dois pontos de inflexão, de abscissas $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

17.5. $\frac{\pi}{2}$

18.1. O gráfico de f não tem assíntotas.

Pág. 233

19.1. g é estritamente crescente em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$. g tem mínimos relativos para $x=0$ e $x=\pi$ e tem um máximo relativo para $x=\frac{\pi}{4}$.19.2. O gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e voltada para cima em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
O ponto de abscissa $\frac{\pi}{2}$ é um ponto de inflexão do gráfico de g .

19.3. 0,12

Pág. 234

21.1. $f'(1) = 2$ 21.2. $y = 2x + 1$ 21.4. $x = e$ 21.5. O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]1, 2]$ e voltada para cima em $[2, +\infty[$.
O ponto de abscissa 2 é um ponto de inflexão.22.1. $a = \frac{1}{2}$ 22.3. $\frac{9}{10}$ 23.1. O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$.Os pontos do gráfico de abscissas $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{2\pi}{3}$ são pontos de inflexão.23.2. $\frac{\pi}{2} + 1$

Pág. 235

24. (B) 25. (A) 26. (C)
27. (B) 28. (B)

Pág. 236

29. (D) 30. (C) 31. (D) 32. (A)
33. (A) 34. (D) 35. (A) 36. (D)
37. (C) 38. (D) 39. (B)

Pág. 237

40. (A) 41. (B) 42. (C) 43. (D)
44. (C) 45. (D) 46. (A) 47. (D)
48. (C) 49. (D)

Pág. 238

50.1. $\frac{1}{2}$

50.2. f é estritamente crescente em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ e é estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. f tem mínimos relativos para $x=0$ e $x=\frac{2\pi}{3}$ e tem máximos relativos para $x=\frac{\pi}{3}$ e $x=\pi$.50.3. O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e voltada para cima em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
O ponto do gráfico com abscissa $\frac{\pi}{2}$ é um ponto de inflexão.

50.4. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$

50.5. b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

51.3. A área do triângulo $[ABP]$ é máxima para $x = \frac{\pi}{2}$ e, para este valor de x , o perímetro também é máximo.

53. 6 m

Pág. 239

54.1. $x=0$ e $x=\frac{\pi}{2}$

54.3. $\alpha = \frac{\pi}{4}$

54.4. $2\sqrt{2} + 2$

54.5. $\frac{25}{24}$

54.6. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

55.1. $D'_1 = [1, \pi - 1]$

55.2. $D'_g = [0, 1]$

55.4. $k = \frac{\pi}{2} - 1$

56.2. $k \approx 2,5$

Pág. 240

57.1. $x = \frac{\pi}{2}$

57.3. $y = 2x + 2$

57.4. d) $\frac{\pi}{6}$

58.2. d é estritamente decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{2}, \pi\right]$ e estritamente crescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. d tem máximos relativos para $\alpha=0$ e para $\alpha=\frac{3\pi}{2}$ e tem um mínimo relativo para $\alpha=\frac{\pi}{2}$.Coordenadas de P : $(4, 0)$ para $\alpha=0$, $(0, 4)$ para $\alpha=\frac{\pi}{2}$ e $(0, -4)$ para $\alpha=\frac{3\pi}{2}$.

58.3. 3

59.2. f é estritamente crescente em $[-\pi, \pi]$. $f(-\pi)$ é o mínimo absoluto de f e $f(\pi)$ é o máximo absoluto de f .

59.3. $D'_1 = [-\pi, \pi]$

59.4. a) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$

b) $g(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Pág. 241

60.2. 14 min 60.3. 711 m 62.2. 0,18 l

63.4. g é estritamente crescente em $\left]0, \frac{\pi}{3}\right]$ e é estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.63.5. g tem máximos relativos para $x=\frac{\pi}{3}$ e para $x=-\frac{\pi}{3}$ e tem um mínimo relativo para $x=0$.

63.6. $y = -x + \frac{\pi}{2} + 1$

Pág. 242

1. (A) 2. (D) 3. (A)
4. (B) 5. (C)

Pág. 243

6. $\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

7.2. $A(0) = \frac{1}{2}$

 $A(0)$ é a área do triângulo $[AQP]$ quando $x=0$.Neste caso, este triângulo coincide com o triângulo $[ABD]$ cuja área é igual a metade da área do quadrado, ou seja, $\frac{1}{2}$.

7.3. $A(x) = \frac{1}{4}$ para $x \approx 0,6$

8. $h(t) = 1,605 \sin \left[\frac{\pi}{6}(t - 0,53) \right] + 1,935$

9.1. $\theta = 2,25$ rad 9.2. 1800 cm^2

9.3. $\overline{AB} = 80 \sin(1,125 \text{ rad}) \approx 72,18 \text{ cm}$

9.4. $A_{[AOB]} = 800 \sin(2,25) \approx 622,46 \text{ cm}^2$

9.5. $0,462 \text{ m}^3$

Pág. 244

10.2. $\frac{\pi}{4}$

10.3. Isósceles

11.2. $\frac{\pi}{3}$

11.3. 4

12.2. $\frac{\pi}{3}$

12.3. $1; \alpha \approx 0,6$

Pág. 245

13.2. $C(0) = 60$

Se $x=0$ o custo da instalação é de 60 mil euros.
(Neste caso são 2 km de cabo submerso e 2 km de cabo subterrâneo: $2 \times 10 + 2 \times 20 = 60$.)

13.3. $x = \frac{\pi}{6}$

14.1. a) $y = 3$

b) Concauidade voltada para baixo em $]1, 2]$ e voltada para cima em $[2, +\infty[$. $(2, 4)$ é um ponto de inflexão.

14.2. $k \approx 1,6$

Pág. 246

15.1. g é estritamente crescente em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$;

g é estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$;

$g(0)$ e $g\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ são mínimos relativos;

$g\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $g(\pi)$ são máximos relativos.

15.2. $x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4}$

Tangente no ponto de abscissa $\frac{\pi}{4}$: $y = x + 1$

Tangente no ponto de abscissa $\frac{3\pi}{4}$: $y = x - 1$

15.3. $\overline{AB} \approx 2,519 - 0,623 \approx 1,9$

17.1. -8

17.2. $y = 4x - 6$

18.1. A função f é estritamente crescente em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e é

estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$.

A função f tem um mínimo relativo para $x=0$ e para $x=\pi$ e um máximo relativo para $x=\frac{\pi}{4}$.

18.2. 1,00

19.1. $k = \frac{1}{2}$

19.2. $y = \frac{3}{2}$

19.3. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

Pág. 250

1.1. $\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$

1.2. $-\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$

1.3. $-3 - 10i$

1.4. $-8i$

1.5. -2

Pág. 251

2.1. $\{-1 + 2i\}$

2.2. $\{3 + 2i, 3 - 2i\}$

2.3. $\{1 + 5i, -1 + 5i\}$

2.4. $\{0, i, -i\}$

2.5. $\{0, 2 - i, 2 + i\}$ 2.6. $\left\{-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i\right\}$

3. $-2, 1 + \sqrt{2}i, 1 - \sqrt{2}i$

Pág. 252

4.1. $a = -1$

4.2. $a = 1$

Pág. 254

5.1. $z_1 = 3 \text{ cis } \pi$

5.2. $z_2 = \sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{2}$

5.3. $z_3 = 2 \text{ cis } \frac{3\pi}{2}$

5.4. $z_4 = \text{cis } 0$

5.5. $z_5 = \text{cis } \pi$

Pág. 255

6.1. $z_1 = \sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{4}$

6.2. $z_2 = 2 \text{ cis } \frac{2\pi}{3}$

6.3. $z_3 = 2\sqrt{2} \text{ cis } \frac{5\pi}{4}$

6.4. $z_4 = 6 \text{ cis } \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

6.5. $3 \text{ cis } \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

6.6. $8 \text{ cis } \frac{5\pi}{6}$

6.7. $6 \text{ cis } \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Pág. 256

7.1. $z_1 = 2 + 2i$

7.2. $z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$

7.3. $z_3 = -\sqrt{3} - i$

7.4. $z_4 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

7.5. $z_5 = 3$

7.6. $z_6 = 2i$

Pág. 258

8.1. $8i$

8.2. $-\sqrt{3} - i$

9.1. $\left\{2, 2 \text{ cis } \frac{\pi}{3}, 2 \text{ cis } \frac{2\pi}{3}, -2, 2 \text{ cis } \frac{4\pi}{3}, 2 \text{ cis } \frac{5\pi}{3}\right\}$

9.2. $\left\{0, \text{cis } \frac{\pi}{3}, -1, \text{cis } \frac{5\pi}{3}\right\}$

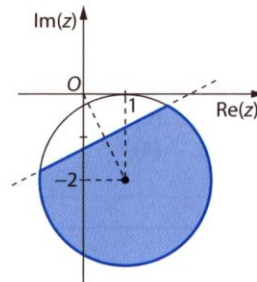
Pág. 259

10. Por exemplo:

$z \xrightarrow{\quad} A; \bar{z} \xrightarrow{\quad} D; -z \xrightarrow{\quad} C; -\bar{z} \xrightarrow{\quad} B;$
 $iz \xrightarrow{\quad} E; i\bar{z} \xrightarrow{\quad} F; -iz \xrightarrow{\quad} G; -i\bar{z} \xrightarrow{\quad} H$

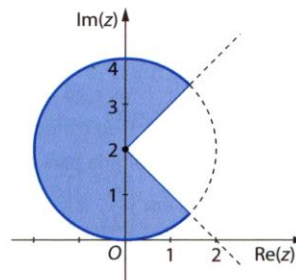
Pág. 262

11.

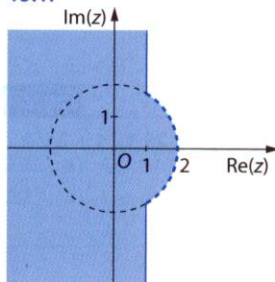


Pág. 263

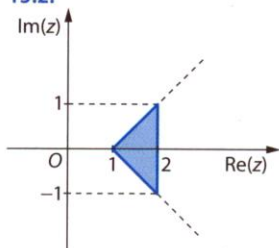
12.



13.1.



13.2.



Pág. 264

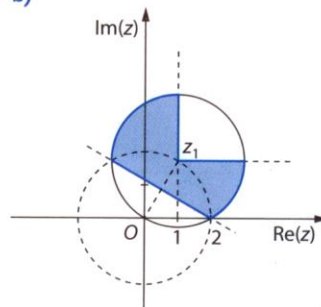
48.1. $\frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{cis}\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$

48.2. $\frac{7\pi}{24}$

Pág. 274

49.1. $\frac{1}{2}$

50.1. a) $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
b)



Pág. 265

14.1. $|z| \leq 1 \wedge \frac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$ (por exemplo)

14.2. $|z+1| \leq 1 \wedge \left(0 \leq \arg(z+1) \leq \frac{\pi}{2} \vee |z+1| \geq |z+i|\right)$
(por exemplo)

Pág. 266

15. (A) 16. (B) 17. (A) 18. (D)

Pág. 267

19. (B) 20. (B) 21. (D)

Pág. 268

22. (C) 23. (D) 24. (B)

Pág. 269

25. (B) 26. (B) 27. (D)

Pág. 270

28. (C) 29. (D) 30.4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Pág. 271

31.1. $|z| = 2$ 31.2. $-\sqrt{3} - i$

32.1. $\left\{\frac{1}{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2} \operatorname{cis} \pi, \frac{1}{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}\right\}$

32.2. $-\sqrt{3} + i$

33.1. a) $8\sqrt{2}$ b) $|z| = \sqrt{2}$

33.2. $\left\{2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}, 2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}, 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}, 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}\right\}$

Pág. 272

34. (B) 35. (A) 36. (C)

37. (A) 38. (D) 39. (A)

Pág. 273

40. (C) 41. (C)

42.1. $-3 - i$ 42.2. $w^2 = 4\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4} + 1$

43.1. $S = \left\{\operatorname{cis} \frac{\pi}{3}, \operatorname{cis} \pi, \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}\right\}$ 43.2. b) 1

44.2. $S = \left\{-i, i, \frac{1}{2}, 2\right\}$

45.2. $2 \cos \frac{8\pi}{7} \operatorname{cis} \frac{8\pi}{7}$

46.1. $2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ 46.2. $k = 2 \vee k = -2$ 46.3. 2

47.2. $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

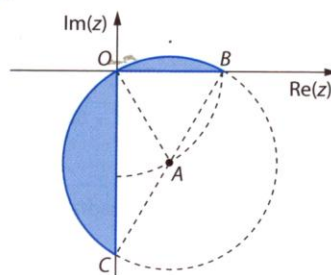
Pág. 275

57.1. $w = 7\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

58.1. $-1 - i$

58.2. $S = \left\{0, 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{9}\right), 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{9}, 2 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{9}\right\}$

58.3.



$A = 2\pi - 2\sqrt{3}$

60. $-8i$

61.1. $-\sqrt{3} - i; \sqrt{3} - i$

61.2. a) $3\sqrt{3}$

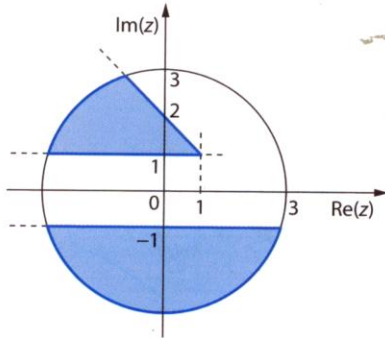
b) Por exemplo:

$$0 \leq \arg(z + \sqrt{3} + i) \leq \frac{\pi}{3} \wedge \operatorname{Re}(z) < 0 \wedge \operatorname{Im}(z) < 0$$

62.1. $-4 + 4i$

62.2. $\alpha = -\frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

62.3.

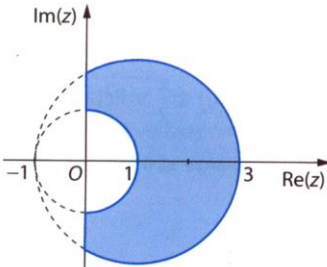


63.1. 6

63.2. a) 1

63.3. $-\frac{5\pi}{6}$

63.4.



1. (C)
4. (B)

2. (A)
5. (C)

3. (C)
6. (C)

Pág. 276

7. (C)
10. (A)

8. (D)
11. (D)

9. (A)

Pág. 277

12.1. $k = 2$

12.2. $k = -2$

13.1. $\{-2, 1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i\}$

14.1. $\{0, 2 - \sqrt{3}i, 2 + \sqrt{3}i\}$

15.2. $\frac{1}{32}, \frac{\pi}{6}$

15.3. $\left\{2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}, 2 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{12}, 2 \operatorname{cis} \frac{19\pi}{12}\right\}$

16.1. $\{4 - i\sqrt{2}, 4 + i\sqrt{2}\}$

17.1. 1

17.2. $\left\{-2i, \frac{1}{2}i\right\}$

18. $\left\{0, \operatorname{cis} \frac{\pi}{9}, \operatorname{cis} \frac{7\pi}{9}, \operatorname{cis} \frac{13\pi}{9}\right\}$

Pág. 278

19. Não existe.

20.1. $z_1 = -1 \in \mathbb{R}$

20.2. $\{4 - 3i, 4 + 3i\}$

20.3. $n = 3 + 6k, k \in \mathbb{N}$

21.1. $z_1^4 = w; 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}; 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}; 2 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$

21.2. $8\sqrt{2}$

22.2. 3.º quadrante

23.1. $\left\{0, 2 \operatorname{cis} \left(-\frac{4\pi}{9}\right), 2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{9}, 2 \operatorname{cis} \frac{8\pi}{9}\right\}$

23.2. 1; π

24.1. $a = -1 \vee a = 1$

24.2. $\frac{1}{4} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{3}\right)$

24.3. $z_2^6 = z_3^6 = 4096$

24.5. $\left\{0, 4 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{9}\right), 4 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{9}, 4 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{9}\right\}$

Pág. 280

25.1. $|z| = 2$

25.2. $2 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

25.3. $4 + 2\sqrt{2}$

26.1. $6 + 2\sqrt{3}$

27.2. $|z| = 2$

28.1. $u = -\frac{1}{3}i; \operatorname{Re}(u) = 0 \wedge \operatorname{Im}(u) \neq 0$

28.2. $\left\{\operatorname{cis} \frac{\pi}{3}, \operatorname{cis} \pi, \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}\right\}$

28.3. $|z - (1 - i)| < \sqrt{2}$

Pág. 281

29.1. $|z| = 3$

29.2. $w = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

29.3. 9

30.2. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; -i$

30.3. $|z - 2i| = 2$

31.1. 80

31.2. a) $z_2 = -3\sqrt{3} - 3i$ b) 6

32.1. $\left\{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$

32.2. $1 - \sqrt{3}i$

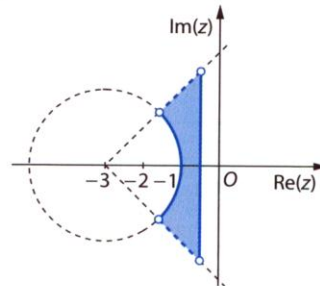
32.3. 8

Pág. 282

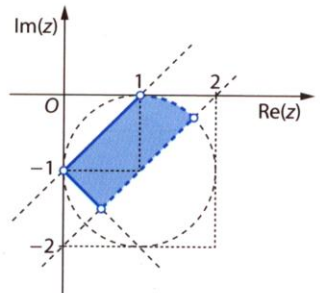
33.1. $w_1 = \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{6}\right); w_1^{12} = 1$

33.3. $\left\{0, \operatorname{cis} \left(-\frac{2\pi}{9}\right), \operatorname{cis} \frac{4\pi}{9}, \operatorname{cis} \frac{10\pi}{9}\right\}$

33.4.



34.



35.1. $\left\{2 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{9}\right), 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{9}, 2 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{9}\right\}$

35.2. b) $\sqrt{\frac{50}{13}}$

36. Por exemplo:

$$\left|z - \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}\right| \leq 1 \wedge 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3} \wedge \operatorname{Im} z \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

37.1. $1 + i$

37.2. a) $S = \left\{2 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{12}\right), 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{12}, 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}\right\}$

b) $S = \{i, -1 + i\}$ c) $z = 3 + 4i$

Unidade 4: Geometria

1.2. $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 32$ 1.5. $P(20, 16)$

Pág. 285

2.1. a) $\overrightarrow{AF}$ b) B c) F
 2.2. $a=1$ e $b=2$

Pág. 288

3.1. $(3, 5)$ 3.2. 5

3.3. $(x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}$

3.4. As diagonais de um retângulo são iguais e bissetam-se. Logo, se $[AC]$ é um diâmetro da circunferência, $[BD]$ também o é.

3.5. a) $P(0, -2)$ ou $P(0, 6)$ b) $P(0, 1)$

Pág. 290

4.1. a) 2 b) -2
 4.3. a) 24 b) $53,1^\circ$

Pág. 292

4.4. a) -18 b) $108,4^\circ$
 4.5. a) $k=8 \vee k=-8$ b) $k=8$ c) $k=-\frac{1}{10}$

Pág. 293

5.1. a) $y = -\frac{1}{3}x - 2$
 b) $(x, y) = (-3, -1) + k(1, 3), k \in \mathbb{R}$
 c) 45°

Pág. 296

5.2. a) $G(3, 5, 11)$
 b) $(x, y, z) = (8, 4, 0) + k(-2, 6, 3), k \in \mathbb{R}$
 c) $(0, 28, 12)$ d) $\frac{8-x}{5} = y - 4 = \frac{z}{11}$
 e) $54,7^\circ$ f) $51,8$ u.a.

Pág. 297

5.1. a) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 25$ c) $y = \frac{4}{3}x - \frac{28}{3}$
 5.2. a) $x + y + z = 0$
 b) A condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ define o plano que passa no ponto A e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB}$.

Pág. 299

7.1. $x - y + 2z - 2 = 0$ 7.2. b) $2x + y - z - 1 = 0$

Pág. 300

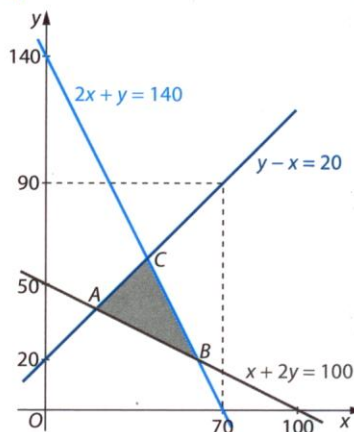
3.2. $k = -\frac{1}{2}$
 3.3. A reta r é perpendicular ao plano β .
 3.4. $\left(\frac{3}{14}, \frac{4}{7}, -\frac{9}{14}\right)$

Pág. 302

1.1. Os três planos interseitam-se no ponto de coordenadas $(3, 1, -2)$.
 1.2. A interseção dos três planos é a reta definida por:
 $\frac{x}{5} = \frac{y}{-7} = z$

Pág. 305

10.1. a) b) 260



10.2. Para que o lucro seja máximo devem ser produzidas 30 mobílias do tipo A e 50 mobílias do tipo B.

Pág. 307

10.3. Para que o lucro obtido seja máximo, a empresa deverá comercializar 1200 kg de café da marca A e 1000 kg de café da marca B.

Pág. 308

11. (C) 12.3. 144 13. (C)
 14. (A) 15. (B)

Pág. 309

16. (A) 17. (A) 18. (B) 19. (D)

Pág. 310

20. $P(3, 2, 1)$
 21.2. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{2}$
 22.3. $(3, 7, 11)$ 22.4. $\frac{5}{9}$

Pág. 311

23. (C) 24. (B) 25. (C) 26. (C)
 27.2. $x=4$ 27.3. $x^2 + y^2 = 25$ 28. 11
 29.1. $l(6, -2, -1)$. As retas r e s são concorrentes em l . Logo, são coplanares.
 29.3. 60°

Pág. 312

30. $2\sqrt{2}$ 31.1. $(0, 0, 3)$
 31.2. a) $(x, y, z) = (7, 8, -4) + k(2, 1, -2), k \in \mathbb{R}$
 b) $(-1, 4, 4)$
 31.3. $(x-7)^2 + (x-8)^2 + (x+4)^2 = 129$ 31.4. $\tan \alpha = 3$
 32. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Logo, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$ não depende de h .
 33.2. A base do prisma de volume máximo é um quadrado de lado 8 e a altura é igual a 4.
 33.4. $(x, y, z) = k(1, 1, 2), k \in \mathbb{R}$ 33.5. $B(4, 4, 8)$
 33.7. $x = 4 \vee x = 4\sqrt{3} + 4$

Pág. 313

1. (A) 2. (B) 3. (A) 4. (D)
 5.1. $-\frac{4}{5}$ 5.2. $C(16, 0)$
 5.3. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

Questões de exame essenciais

Na última fase de preparação para o Exame Final Nacional do 12.º ano, o aluno depara-se com centenas de questões e problemas que já saíram em exames oficiais.

Perante esta situação, surgem dúvidas, tais como:

- Terei de resolver tudo isto para me sentir seguro?
- Terei tempo para resolver tudo?
- Será que preciso de resolver todas as questões?

Para ajudar o aluno seleccionámos questões de exame essenciais que deve resolver, para se sentir seguro e confiante no dia do exame, divididas pelos grandes temas:

1. Análise combinatória. Probabilidades
2. Funções e trigonometria
3. Números complexos

Lembramos que as resoluções detalhadas de todas estas questões essenciais encontram-se também disponíveis no site www.paraescolar.pt

Prepare o seu exame com segurança e confiança.

Felicidades e boa sorte!
Os autores

1. Análise combinatória. Probabilidades

- 1** Num grupo de nove pessoas, constituído por seis homens e três mulheres, vão ser escolhidos três elementos para formarem uma comissão.

Quantas comissões diferentes se podem formar com exatamente duas mulheres?

- (A) 3C_2 (B) $6 \times {}^3C_2$
(C) 9A_3 (D) $6 \times {}^3A_2$

- 2** Uma caixa contém apenas bolas brancas e bolas pretas, indistinguíveis ao tato. Todas as bolas estão numeradas com um único número natural.

Sabe-se que:

- duas bolas em cada cinco são pretas;
- 20% das bolas pretas têm um número par;
- 40% das bolas brancas têm um número ímpar.

2.1. Retira-se, ao acaso, uma bola dessa caixa.

Determine a probabilidade de essa bola ser preta, sabendo que tem um número par.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Admita agora que a caixa tem n bolas.

Extraem-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

Determine n , sabendo que a probabilidade de ambas as bolas serem brancas é igual a $\frac{7}{20}$.

- 3** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

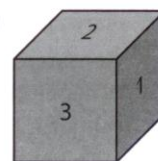
- $P(B) = \frac{1}{4}$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{15}{16}$
- $P(A | \overline{B}) = \frac{7}{12}$

Determine $P(A)$.

- 4** Considere a linha do triângulo de Pascal em que o produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento é 484.
- Qual é a probabilidade de escolher, ao acaso, um elemento dessa linha que seja superior a 1000?

- (A) $\frac{15}{23}$ (B) $\frac{6}{11}$ (C) $\frac{17}{23}$ (D) $\frac{8}{11}$

- 5** Na figura está representado um dado cúbico, não equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 3, em que faces opostas têm o mesmo número.



Lança-se o dado uma única vez e observa-se o número da face voltada para cima.

Sejam A e B os acontecimentos seguintes:

A : "sair número ímpar"

B : "sair número menor do que 3"

Sabe-se que:

- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) - P(A \cap B) = \frac{5}{9}$
- $P(B | A) = \frac{2}{7}$

Determine a probabilidade de sair o número 3.

- 6** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,3$
- $P(\overline{A} \cap B) = 0,55$
- A e B são acontecimentos incompatíveis.

Qual é o valor de $P(\overline{A} \cap \overline{B})$?

- (A) 0,85 (B) 0,25 (C) 0,15 (D) 0

- 7** Numa turma com 15 raparigas e 7 rapazes, vai ser formada uma comissão com 5 elementos. Pretende-se que essa comissão seja mista e que tenha mais raparigas do que rapazes. Quantas comissões diferentes se podem formar?

- (A) ${}^{15}A_3 + {}^{15}A_4$ (B) ${}^{15}C_3 \times {}^7C_2 + {}^{15}C_4 \times 7$
(C) ${}^{15}C_3 \times {}^7C_2 \times {}^{15}C_4 \times 7$ (D) ${}^{22}C_3 \times {}^{19}C_2$

- 8** Uma empresa produz apenas dois tipos de lâmpadas: lâmpadas fluorescentes e lâmpadas LED (Díodos Emissores de Luz).

As lâmpadas de cada tipo podem ter a forma tubular ou ser compactas.

Sabe-se que:

- 55% das lâmpadas produzidas nessa empresa são fluorescentes;
- das lâmpadas fluorescentes produzidas nessa empresa, 50% têm a forma tubular;
- das lâmpadas LED produzidas nessa empresa, 90% são compactas.

Determine a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, uma lâmpada produzida nessa empresa, ela ser fluorescente, sabendo que tem a forma tubular. Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

- 9** Considere todos os números que se podem obter alterando a ordem dos algarismos do número 12 345.

Quantos desses números são ímpares e maiores do que 40 000?

(A) 18 (B) 30 (C) 120 (D) 240

- 10** Um saco contém quatro bolas com o número 0, uma bola com o número 2 e duas bolas com o número 3.

10.1. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas do saco.

Seja X a variável aleatória “produto dos números das duas bolas retiradas”.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X .

Apresente cada uma das probabilidades na forma de fração irredutível.

10.2. Considere agora a experiência que consiste em retirar, ao acaso, uma a uma, sucessivamente e sem reposição, **todas** as bolas do saco.

Sejam A e B os acontecimentos seguintes.

A : “Não saem bolas com o número 0 em extrações consecutivas”

B : “A segunda bola retirada tem o número 2”

Determine $P(B|A)$, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada.

Numa pequena composição, justifique a sua resposta. A sua composição deve contemplar:

- o significado de $P(B|A)$, no contexto da situação descrita;
- a explicação da ordem de saída das bolas com o número 0;
- a explicação do número de casos possíveis;
- a explicação do número de casos favoráveis;
- a apresentação do valor da probabilidade na forma de fração.

- 11** Os três irmãos Andrade e os quatro irmãos Martins vão escolher, de entre eles, dois elementos de cada família para um jogo de matraquilhos, de uma família contra a outra. De quantas maneiras pode ser feita a escolha dos jogadores de modo que o Carlos, o mais velho dos irmãos da família Andrade, seja um dos escolhidos?

(A) 8 (B) 12 (C) 16 (D) 20

- 12** Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio μ e desvio-padrão σ ($X \sim N(\mu, \sigma)$).

Sabe-se que:

$$\bullet \mu = 5 \quad \bullet P(4,7 < X < 5) < 0,3$$

Qual dos números seguintes pode ser o valor de σ ?

(A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,4

- 13** Relativamente a uma turma de 12.º ano, sabe-se que:

- o número de rapazes é igual ao número de raparigas;
- $\frac{3}{4}$ dos alunos pretendem frequentar um curso da área de saúde e os restantes alunos pretendem frequentar um curso da área de engenharia;
- dos alunos que pretendem frequentar um curso da área de engenharia, dois em cada sete são raparigas.

13.1. Escolhe-se, ao acaso, uma rapariga da turma.

Qual é a probabilidade dessa rapariga pretender frequentar um curso da área de saúde?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

13.2. Escolhem-se, ao acaso, dois alunos da turma para estarem presentes nas comemorações do aniversário da escola.

Sabe-se que a probabilidade de esses dois alunos serem rapazes é $\frac{13}{54}$.

Seja n o número de rapazes da turma.

Determine o valor de n .

Para resolver este problema, percorra as seguintes etapas:

- equacione o problema;
- resolva a equação sem utilizar a calculadora.

- 14** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

$$\bullet P(A) = 0,3 \quad \bullet P(\bar{B}) = 0,6$$

$$\bullet P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,4$$

Averigue se os acontecimentos A e B são independentes.

- 15** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
- A e B são acontecimentos independentes;
 - $P(\overline{A}) = \frac{7}{10}$ • $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$
- Qual é o valor de $P(B)$?
- (A) $\frac{5}{14}$ (B) $\frac{9}{14}$ (C) $\frac{9}{20}$ (D) $\frac{11}{20}$
- 16** Para assistirem a um espetáculo, o João, a Margarida e cinco amigos sentam-se, ao acaso, numa fila com sete lugares.
- Qual é a probabilidade de o João e a Margarida não ficarem sentados um ao lado do outro?
- (A) $\frac{2 \times 5!}{7!}$ (B) $\frac{5!}{7!}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{5}{7}$
- 17** Numa caixa com 12 compartimentos, pretende-se arrumar 10 copos, com tamanho e forma iguais: sete brancos, um verde, um azul e um roxo. Em cada compartimento pode ser arrumado apenas um copo.
- De quantas maneiras diferentes se podem arrumar os 10 copos nessa caixa?
- (A) ${}^{12}A_7 \times 3!$ (B) ${}^{12}A_7 \times {}^5C_3$
 (C) ${}^{12}C_7 \times {}^5A_3$ (D) ${}^{12}C_7 \times {}^{12}A_3$
- 18** Numa escola, realizou-se um estudo sobre os hábitos alimentares dos alunos. No âmbito desse estudo, analisou-se o *peso* de todos os alunos.
- Sabe-se que:
- 55% dos alunos são raparigas;
 - 30% das raparigas têm excesso de *peso*;
 - 40% dos rapazes não têm excesso de *peso*.
- 18.1.** Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.
- Determine a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz, sabendo que tem excesso de *peso*.
- Apresente o resultado na forma de fração irredutível.
- 18.2.** Considere agora que a escola onde o estudo foi realizado tem 200 alunos.
- Pretende-se escolher, ao acaso, três alunos para representarem a escola num concurso.
- Determine a probabilidade de serem escolhidos duas raparigas e um rapaz.
- Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.
- 19** O código de acesso a uma conta de *e-mail* é constituído por quatro letras e três algarismos. Sabe-se que um código tem quatro "a", dois "5" e um "2", como, por exemplo, o código 2aa5a5a.
- Quantos códigos diferentes existem nestas condições?
- (A) 105 (B) 210 (C) 5040 (D) 39
- 20** Numa certa linha do Triângulo de Pascal, o penúltimo elemento é 111.
- Escolhe-se, ao acaso, um elemento dessa linha.
- Qual é a probabilidade de esse elemento ser maior do que 10^5 ?
- (A) $\frac{3}{56}$ (B) $\frac{53}{56}$ (C) $\frac{2}{37}$ (D) $\frac{35}{37}$
- 21** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(B) \neq 0$.
- Mostre que $P(\overline{A \cap B} | B) = P(\overline{A} | B)$.
- 22** Uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número designa-se por *capicua*. Por exemplo, 103 301 é *capicua*.
- Quantos números com seis algarismos são *capicuas*?
- (A) 729 (B) 900
 (C) 810 000 (D) 900 000
- 23** Considere um dado cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6, e um saco que contém cinco bolas, indistinguíveis ao tato, cada uma delas numerada com um número diferente: 0, 1, 2, 3 e 4.
- Lança-se o dado uma vez e retira-se, ao acaso, uma bola do saco, registando-se os números que saíam.
- Qual é a probabilidade de o produto desses números ser igual a zero?
- (A) 0 (B) $\frac{1}{15}$ (C) $\frac{1}{30}$ (D) $\frac{1}{5}$
- 24** Considere uma empresa em que:
- 80% dos funcionários apostam no euromilhões;
 - dos funcionários que apostam no euromilhões, 25% apostam no totoloto;
 - 5% dos funcionários não apostam no euromilhões nem no totoloto.
- 24.1.** Determine a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, um funcionário dessa empresa, ele apostar no totoloto.

24.2. Considere agora que essa empresa tem 50 funcionários.

Escolhem-se, ao acaso, oito funcionários dessa empresa.

Determine a probabilidade de, pelo menos, sete desses funcionários serem apostadores no Euromilhões.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

- 25** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).
Mostre que, se A e B são dois acontecimentos independentes, então:
 $P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A}) \times (1 - P(B)) = P(\overline{A})$.

- 26** Uma escola secundária tem alunos de ambos os sexos em todos os anos de escolaridade.
Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.
Sejam A e B os acontecimentos:
 A : "O aluno é do sexo feminino"
 B : "O aluno está no 12.º ano"
Qual das expressões seguintes designa o acontecimento "O aluno é do sexo masculino e não está no 12.º ano"?
(A) $A \cap B$ (B) $\overline{A \cap B}$ (C) $A \cup B$ (D) $\overline{A \cup B}$

- 27** Uma caixa, que designaremos por caixa 1, tem uma bola branca e duas bolas pretas.
27.1. Considere a experiência que consiste em tirar, ao acaso, uma bola da caixa 1, observar a sua cor e voltar a colocar a bola na caixa. Efetua-se esta experiência cinco vezes.
Qual é a probabilidade de sair bola preta pelo menos quatro vezes?

- 27.2.** Outra caixa, que designaremos por caixa 2, tem três bolas brancas e quatro bolas pretas.
Realiza-se a seguinte experiência: ao acaso, tiram-se duas bolas da caixa 1 e colocam-se na caixa 2; em seguida, tiram-se simultaneamente duas bolas da caixa 2.
Sejam A e B os acontecimentos:
 A : "As bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor"
 B : "As bolas retiradas da caixa 2 são da mesma cor"
Determine o valor de $P(\overline{B} | A)$, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada.
Numa pequena composição, justifique a sua resposta. A sua composição deve contemplar:
• o significado de $P(\overline{B} | A)$, no contexto da situação descrita;

- a explicação do conteúdo da caixa 2 após a realização do acontecimento A ;
- a explicação do número de casos possíveis;
- a explicação do número de casos favoráveis;
- a apresentação do valor da probabilidade pedida.

- 28** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos incompatíveis ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).
Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?
(A) $P(A \cup B) = P(A \cap B)$
(B) $P(A) + P(B) = 1$
(C) $P(A \cap B) = 0$
(D) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

- 29** O comprimento, em centímetros, das peças produzidas por uma máquina é uma variável aleatória X com distribuição normal, de valor médio 6.
Sabe-se que $P(X > 7) = 0,1$.
Escolhe-se ao acaso uma peça produzida por essa máquina e mede-se o seu comprimento.
Considere os acontecimentos:
 A : "O comprimento da peça escolhida é inferior a 7 cm"
 B : "O comprimento da peça escolhida é superior a 6 cm"
Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A | B)$?
(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{7}{9}$ (D) $\frac{8}{9}$

- 30** Uma turma de 12.º ano é constituída por 14 raparigas e 10 rapazes.
30.1. Os alunos da turma vão dispor-se em duas filas para tirarem uma fotografia de grupo.
Combinaram que:
• os rapazes ficam sentados na fila da frente;
• as raparigas ficam na fila de trás, em pé, ficando a delegada numa das extremidades e a subdelegada na outra extremidade, podendo cada uma destas duas alunas ocupar qualquer uma das extremidades.
Escreva uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de, nestas condições, os jovens se poderem dispor para a fotografia.
Nota: Não calcule o valor da expressão que escreveu.

30.2. Vão ser escolhidos aleatoriamente dois jovens desta turma, para constituírem uma comissão que participará num congresso. Seja X o número de raparigas que integram a comissão.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X . Apresente as probabilidades na forma de fração irredutível.

- 31** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$) independentes, com $P(A) \neq 0$. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?
- (A) $P(A) + P(B) = 1$
 (B) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 (C) $P(A) \neq P(B)$
 (D) $P(B|A) = P(B)$

- 32** O código de um autorrádio é constituído por uma sequência de quatro algarismos. Por exemplo, 0137. Quantos desses códigos têm dois e só dois algarismos iguais a 7?
- (A) 486 (B) 810 (C) 432 (D) 600

- 33** Uma companhia aérea vende bilhetes a baixo custo exclusivamente para viagens cujos destinos sejam Berlim ou Paris.

33.1. Nove jovens decidem ir a Berlim e escolhem essa companhia aérea. Cada jovem paga o bilhete com cartão multibanco, ou não, independentemente da forma de pagamento utilizada pelos outros jovens.

Considere que a probabilidade de um jovem utilizar cartão multibanco, para pagar o seu bilhete, é igual a 0,6.

Determine a probabilidade de exatamente seis desses jovens utilizarem cartão multibanco para pagarem o seu bilhete.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

33.2. A companhia aérea constatou que, quando o destino é Berlim, 5% dos seus passageiros perdem o voo e que, quando o destino é Paris, 92% dos passageiros seguem viagem. Sabe-se que 30% dos bilhetes a baixo custo que a companhia aérea vende têm por destino Berlim.

Determine a probabilidade de um passageiro, que comprou um bilhete a baixo custo nessa companhia aérea, perder o voo. Apresente o resultado na forma de dízima.

- 34** Os medicamentos produzidos num laboratório são embalados em caixas de igual aspeto exterior e indistinguíveis ao tato. Um lote contém 10 caixas de um medicamento X e 20 caixas de um medicamento Y .

Desse lote, retiram-se, ao acaso, simultaneamente, quatro caixas para controlo de qualidade.

Qual é a probabilidade de as caixas retiradas serem todas do medicamento Y ?

(A) $\frac{10C_4}{30C_4}$ (B) $\frac{20C_4}{30C_4}$ (C) $\frac{4}{30C_4}$ (D) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

- 35** A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$2a$	a	b	b	b	$\frac{1}{10}$

Sabe-se que:

- a e b são números reais;
- $P(X \leq 1) = 3P(X = 5)$.

Qual é o valor de b ?

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{4}{15}$ (C) $\frac{7}{30}$ (D) $\frac{1}{5}$

- 36** Num determinado clube desportivo praticam-se apenas dois desportos, futebol e andebol. Dos jovens inscritos nesse clube, 28 jogam apenas futebol, 12 jogam apenas andebol e 12 jogam futebol e andebol.

Escolhe-se, ao acaso, um dos jovens inscritos.

Qual é a probabilidade de o jovem escolhido jogar andebol sabendo que joga futebol?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{7}{10}$ (D) $\frac{3}{7}$

- 37** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$) incompatíveis.

Sabe-se que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,3$ e que $P(A) = 0,5$.

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) 0,2 (B) 0 (C) 0,5 (D) 0,4

- 38** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(B) \neq 0$.

Mostre que $P(\overline{A \cap B} | B) + P(A | B) = 1$.

- 39** Considere as 13 cartas do naipe de copas: ás, três figuras (rei, dama e valete) e mais nove cartas (do 2 ao 10).

39.1. As cartas vão ser dispostas, ao acaso, sobre uma mesa, lado a lado, de modo a formarem uma sequência de 13 cartas. Determine o número de sequências diferentes que é possível construir, de modo que as três figuras fiquem juntas.

39.2. Determine a probabilidade de, ao retirar, ao acaso, 4 das 13 cartas do naipe de copas, obter pelo menos duas figuras. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

- 40** Um saco contém dezasseis bolas, numeradas de 1 a 16.

Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas dessas dezasseis bolas e adicionam-se os respetivos números.

Qual é a probabilidade de a soma obtida ser igual a 7?

- (A) $\frac{1}{35}$ (B) $\frac{1}{40}$ (C) $\frac{1}{45}$ (D) $\frac{1}{50}$

- 41** A Ana dispõe de sete cartas todas diferentes: quatro cartas do naipe de espadas e três cartas do naipe de copas.

41.1. A Ana vai dispor essas sete cartas sobre uma mesa, lado a lado, da esquerda para a direita, de modo a formar uma sequência com as sete cartas.

A Ana pretende que a primeira e a última cartas da sequência sejam ambas do naipe de espadas.

Quantas sequências diferentes, nestas condições, pode a Ana fazer?

41.2. Admita que a Ana baralha essas sete cartas e, em seguida, tira três, ao acaso.

Qual é a probabilidade de, nessas três cartas, haver pelo menos uma carta de copas?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

41.3. As cartas de que a Ana dispõe são:

- o ás, o rei, a dama e o valet do naipe de espadas;
- o rei, a dama e o valet do naipe de copas.

Depois de introduzir as sete cartas num saco, a Ana retira uma carta ao acaso.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : "A carta retirada é do naipe de espadas"

B : "A carta retirada é um rei"

Averigue se os acontecimentos A e B são independentes.

- 42** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(B) = 0,3$
- $P(A | B) = 0,2$
- $P(\overline{A} | \overline{B}) = 0,4$

Determine $P(B | A)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

- 43** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 30\%$
- $P(A \cup B) = 70\%$
- A e B são incompatíveis.

Qual é o valor de $P(B)$?

- (A) 21% (B) 40% (C) 60% (D) 61%

- 44** Num grupo de dez trabalhadores de uma fábrica, vão ser escolhidos três, ao acaso, para frequentarem uma ação de formação. Nesse grupo de dez trabalhadores, há três amigos, o João, o António e o Manuel, que gostariam de frequentar essa ação.

Qual é a probabilidade de serem escolhidos, exatamente, os três amigos?

- (A) $\frac{1}{10A_3}$ (B) $\frac{3}{10A_3}$ (C) $\frac{1}{10C_3}$ (D) $\frac{3}{10C_3}$

- 45** A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$2a$	a

Qual das igualdades seguintes é verdadeira, considerando os valores da tabela?

- (A) $P(X = 0) = P(X > 1)$
 (B) $P(X = 0) = P(X = 2)$
 (C) $P(X = 0) = P(X = 3)$
 (D) $P(X < 2) = P(X = 3)$

- 46** Dos alunos de uma escola, sabe-se que:
- a quinta parte dos alunos tem computador portátil;
 - metade dos alunos não sabe o nome do diretor;
 - a terça parte dos alunos que não sabe o nome do diretor tem computador portátil.

46.1. Determine a probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, não ter computador portátil e saber o nome do diretor. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

46.2. Admita que essa escola tem 150 alunos. Pretende-se formar uma comissão de seis alunos para organizar a viagem de finalistas. Determine de quantas maneiras diferentes se pode formar uma comissão com, exatamente, quatro dos alunos que têm computador portátil.

- 47** Uma caixa contém bolas indistinguíveis ao tato e de duas cores diferentes: azul e roxo. Sabe-se que:

- o número de bolas azuis é 8;
- extraíndo-se, ao acaso, uma bola da caixa, a probabilidade de ela ser azul é igual a $\frac{1}{2}$.

Quantas bolas roxas há na caixa?

- (A) 16 (B) 12 (C) 8 (D) 4

- 48** Considere todos os números de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos 5, 6, 7, 8 e 9.

De entre estes números, quantos têm, exatamente, três algarismos 5?

- (A) ${}^5C_3 \times {}^4A_2$ (B) ${}^5C_3 \times 4^2$
(C) ${}^5A_3 \times 4^2$ (D) ${}^5A_3 \times {}^4C_2$

- 49** Na sequência seguinte, reproduzem-se os três primeiros elementos e os três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal.

1 15 105 ... 105 15 1

São escolhidos, ao acaso, dois elementos dessa linha.

Qual é a probabilidade de a soma desses dois elementos ser igual a 105?

- (A) 1 (B) $\frac{1}{60}$
(C) $\frac{1}{120}$ (D) 0

- 50** Quantos números naturais de três algarismos diferentes se podem escrever não utilizando o algarismo 2 nem o algarismo 5?

- (A) 256 (B) 278 (C) 286 (D) 294

- 51** Um teste é constituído por oito perguntas de escolha múltipla.

A sequência das oito respostas corretas às oito perguntas desse teste é A A B D A D A A.

O Pedro, que não se preparou para o teste, respondeu ao acaso às oito perguntas.

Qual é a probabilidade de o Pedro ter respondido corretamente a todas as perguntas sabendo que escolheu cinco opções A, uma opção B e duas opções D?

- (A) $\frac{1}{56}$ (B) $\frac{1}{112}$ (C) $\frac{1}{168}$ (D) $\frac{1}{224}$

- 52** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam X e Y dois acontecimentos ($X \subset \Omega$ e $Y \subset \Omega$) de probabilidade não nula.

Prove que:

$$P(\overline{X} \cap \overline{Y}) = P(X) \times P(Y|X) + P(\overline{X}) - P(Y)$$

- 53** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos independentes;
- $P(A) = 0,4$ e $P(B) = 0,5$

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

- (A) 0,6 (B) 0,7 (C) 0,8 (D) 0,9

- 54** Uma caixa tem seis bolas: três bolas com o número 0 (zero), duas bolas com o número 1 (um) e uma bola com o número 2 (dois). Tiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa e observam-se os respetivos números.

54.1. Sejam A e B os acontecimentos:

A : "Os números saídos são iguais"

B : "A soma dos números saídos é igual a 1"

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$? Justifique a sua resposta.

54.2. Seja X a variável aleatória "Produto dos números saídos".

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X .

Apresente cada uma das probabilidades na forma de fração irredutível.

55

55.1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos

$A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, com $P(A) > 0$.

Prove que:

$$P(A) \times [P(B|A) - 1] + P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}).$$

55.2. Num encontro desportivo, participam atletas de vários países, entre os quais Portugal.

Metade dos atletas portugueses que participam no encontro são do sexo feminino. Escolhido ao acaso um atleta participante no encontro, a probabilidade de ele ser estrangeiro ou do sexo masculino é 90%.

Participam no encontro duzentos atletas.

Quantos são os atletas portugueses?

Nota: Se desejar, pode utilizar a igualdade do item 55.1. na resolução deste problema; nesse caso, comece por explicitar os acontecimentos A e B , no contexto do problema.

56

De um baralho com 40 cartas, repartidas por quatro naipes (Copas, Ouros, Espadas e Paus), em que cada naipe contém um Ás, uma Dama, um Valete, um Rei e seis cartas (do Dois ao Sete), foram dadas sucessivamente, ao acaso, seis cartas a um jogador, que as coloca na mão, pela ordem que as recebe.

Qual é a probabilidade de o jogador obter a sequência 2 – 4 – 6 – 7 – Dama – Rei nas cartas recebidas?

- (A) $\frac{4^6}{40A_6}$ (B) $\frac{4^6}{40C_6}$ (C) $\frac{1}{40A_6}$ (D) $\frac{1}{40C_6}$

57

Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,3$
- $P(B) = 0,4$
- $P(A \cup B) = 0,5$

Qual é a probabilidade de se realizar A , sabendo que B se realiza?

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

58

De um bilhete de lotaria sabe-se que o seu número é formado por sete algarismos, dos quais três são iguais a 1, dois são iguais a 4 e dois são iguais a 5 (por exemplo: 1 551 414). Determine quantos números diferentes satisfazem as condições anteriores.

59

Uma caixa contém bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 20. As bolas numeradas de 1 a 10 têm cor verde e as bolas numeradas de 11 a 20 têm cor amarela. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, sucessivamente, duas bolas da caixa, não repondo a primeira bola retirada, e em registar a cor das bolas retiradas.

59.1. Determine a probabilidade de as duas bolas retiradas da caixa terem cores diferentes. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

59.2. Na mesma experiência aleatória, considere os acontecimentos:

A : "A 1.ª bola retirada é verde"

B : "A 2.ª bola retirada é amarela"

C : "O número da 2.ª bola retirada é par"

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P((B \cap C) | A)$?

A resposta correta a esta questão é:

$$P((B \cap C) | A) = \frac{5}{19}.$$

Numa pequena composição, **sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada**, explique o valor dado, começando por interpretar o significado de $P((B \cap C) | A)$ no contexto da situação descrita e fazendo referência:

- à Regra de Laplace;
- ao número de casos possíveis;
- ao número de casos favoráveis.

60

A Maria gravou nove CD, sete com música *rock* e dois com música popular, mas esqueceu-se de identificar cada um deles.

Qual é a probabilidade de, ao escolher dois CD ao acaso, um ser de música *rock* e o outro ser de música popular?

- (A) $\frac{7}{36}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{7}{18}$

61

Admita que um estudante tem de realizar dois testes no mesmo dia. A probabilidade de ter classificação positiva no primeiro teste é 0,7, a de ter classificação positiva no segundo teste é 0,8 e a de ter classificação negativa em ambos os testes é 0,1.

Qual é a probabilidade de o estudante ter negativa no segundo teste, sabendo que teve negativa no primeiro teste?

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

62

Uma certa linha do Triângulo de Pascal é constituída por todos os elementos da forma ${}^{14}C_p$. Escolhido, ao acaso, um elemento dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser o número 14?

- (A) $\frac{1}{15}$ (B) $\frac{1}{14}$ (C) $\frac{2}{15}$ (D) $\frac{4}{15}$

- 63** Uma certa linha do Triângulo de Pascal tem exatamente nove elementos. Escolhem-se ao acaso dois desses nove elementos. Qual é a probabilidade de escolher dois números cujo produto seja igual a 8?
- (A) 0 (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{4}{9}$
- 64** Efetua-se um único lançamento de um dado **tetraédrico**, com as faces **numeradas de 1 a 4**. Considere que o “Número que sai” é o número que está na face que fica voltada para baixo. O dado **não** é equilibrado, pelo que os quatro números **não** têm a mesma probabilidade de sair.
- Sejam A e B os acontecimentos seguintes:
 A : “Sair número ímpar”
 B : “Sair número maior do que 2”
- Sabe-se que:
 $\bullet P(A \cap B) = 0,4$ $\bullet P(A) = P(\bar{A})$ $\bullet P(A \cup B) = 0,8$
- Seja X a variável aleatória “Número saído no lançamento efetuado”.
- Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X .
- Nota:** Apresente todas as justificações e todos os cálculos que efetuar na determinação dos valores das probabilidades.
- 65** Uma caixa A contém duas bolas verdes e uma bola amarela. Outra caixa B contém uma bola verde e três bolas amarelas. As bolas colocadas nas caixas A e B são indistinguíveis ao tato.

Lança-se um dado cúbico perfeito, com as faces numeradas de 1 a 6. Se sair o número 5, tira-se uma bola da caixa A ; caso contrário, tira-se uma bola da caixa B .

Qual é a probabilidade de a bola retirada ser verde, sabendo que saiu o número 5 no lançamento do dado?

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{2}{3}$

66

66.1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Prove que $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) - P(B) + P(A \cup B)$.

66.2. Numa determinada cidade, das 160 raparigas que fizeram o exame nacional de Matemática, 65% tiveram classificação positiva, e, dos 120 rapazes que fizeram o mesmo exame, 60% também tiveram classificação positiva.

Escolhendo, ao acaso, um dos estudantes que realizaram o exame, qual é a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva?

Apresente o resultado em forma de dízima, com aproximação às centésimas.

Nota: Se o desejar, utilize a igualdade referida em **66.1**. Neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B , no contexto da situação apresentada; no entanto, pode optar por resolver o problema por outro processo.

Soluções

1. (B) 2.1. $\frac{2}{11}$ 2.2. 25 3. $\frac{1}{2}$ 33.2. 0,071 34. (B) 35. (D)
4. (C) 5. $\frac{5}{9}$ 6. (C) 7. (B) 36. (B) 37. (A)
8. 0,86 9. (B) 39.1. 239 500 800 39.2. $\frac{29}{143}$ 40. (B)
- 10.1. $P(X=0) = \frac{6}{7}$, $P(X=6) = \frac{2}{21}$, $P(X=9) = \frac{1}{21}$ 41.1. 1440 41.2. $\frac{31}{35}$
- 10.2. $\frac{1}{3}$ 11. (B) 41.3. Não são independentes.
12. (D) 13.1. $\frac{6}{7}$ 13.2. $n = 14$ 42. $\frac{1}{8}$ 43. (B) 44. (C) 45. (B)
14. Não são independentes. 46.1. $\frac{7}{15}$ 46.2. 195 671 700 47. (C)
15. (B) 16. (D) 17. (C) 48. (B) 49. (D) 50. (D)
- 18.1. $\frac{18}{29}$ 18.2. 0,41 19. (A) 51. (C) 53. (B) 54.1. 0
20. (B) 22. (B) 23. (D) 54.2. $P(X=0) = \frac{4}{5}$, $P(X=1) = \frac{1}{15}$, $P(X=2) = \frac{2}{15}$
- 24.1. 0,35 24.2. 0,49 26. (D) 55.2. 40 56. (A) 57. (D)
- 27.1. $\frac{112}{243}$ 27.2. $\frac{1}{2}$ 28. (C) 58. 210 59.1. $\frac{10}{19}$ 60. (D)
29. (B) 30.1. $10! \times 2! \times 12!$ 61. (C) 62. (C) 63. (B)
- 30.2. $P(X=0) = \frac{15}{92}$, $P(X=1) = \frac{35}{69}$, $P(X=2) = \frac{91}{276}$ 64. $P(X=1) = 0,1$; $P(X=2) = 0,2$;
 $P(X=3) = 0,4$; $P(X=4) = 0,3$
31. (D) 32. (A) 33.1. 0,25 65. (D) 66.2. 0,74

2. Funções e trigonometria

- 1** Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{\sin(-x)}{x}$.

Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = \frac{1}{n}$.

Qual é o valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$?

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

- 2** Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + f(x)}{3x} = 1.$$

Qual das equações seguintes pode definir uma assíntota do gráfico da função f ?

- (A) $y = \frac{1}{3}x$ (B) $y = \frac{2}{3}x$
(C) $y = x$ (D) $y = 3x$

- 3** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} & \text{se } x < 0 \\ x \ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens 3.1. e 3.2., recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

3.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

3.2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$.

Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos em $]0, e]$.

Resolva o item 3.3., recorrendo à calculadora gráfica.

3.3. Considere, num referencial o.n. xOy , a representação gráfica da função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$.

Sabe-se que:

- A é o ponto de coordenadas $(2, 0)$;
- B é o ponto de coordenadas $(5, 0)$;
- P é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função g .

Para cada posição do ponto P , considere o triângulo $[ABP]$.

Determine as abscissas dos pontos P para os quais a área do triângulo $[ABP]$ é 1.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as abscissas dos pontos P com arredondamento às centésimas.

- 4** Considere a função g , de domínio $]-\frac{\pi}{2}, 0[$, definida por $g(x) = \sin(2x) - \cos x$.

Seja a um número real do domínio de g .

A reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa a é paralela à reta de

equação $y = \frac{x}{2} + 1$.

Determine o valor de a , recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

- 5** Considere, para um certo número real a positivo, uma função f , contínua, de domínio $[-a, a]$.

Sabe-se que $f(-a) = f(a)$ e $f(a) > f(0)$.

Mostre que a condição $f(x) = f(x+a)$ tem, pelo menos, uma solução em $] -a, 0[$.

- 6** Sejam a e b dois números reais tais que $1 < a < b$ e $\log_a b = 3$.

Qual é, para esses valores de a e de b , o valor de $\log_a (a^5 \times \sqrt[3]{b}) + a^{\log_a b}$?

- (A) $6 + b$ (B) $8 + b$ (C) $6 + a^b$ (D) $8 + a^b$

- 7** Seja f uma função de domínio $[-e, 1]$.

Sabe-se que:

- f é contínua no seu domínio;
- $f(-e) = 1$
- $f(1) = e$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

- (A) A equação $f(x) - 1 = 0$ tem pelo menos uma solução em $] -e, 1[$.
(B) A equação $f(x) = e$ tem pelo menos uma solução em $] -e, 1[$.
(C) A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $] -e, 1[$.
(D) A equação $f(x) = \frac{e}{2}$ tem pelo menos uma solução em $] -e, 1[$.

- 8 Sejam f' e f'' , de domínio $\mathbb{R}$, a primeira derivada e a segunda derivada de uma função f , respetivamente.

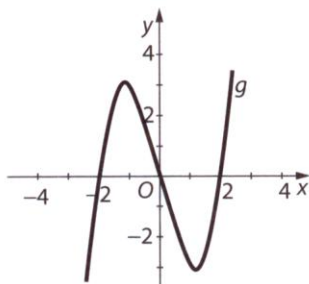
Sabe-se que:

- a é um número real;
- P é o ponto do gráfico de f de abscissa a ;
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$
- $f''(a) = -2$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

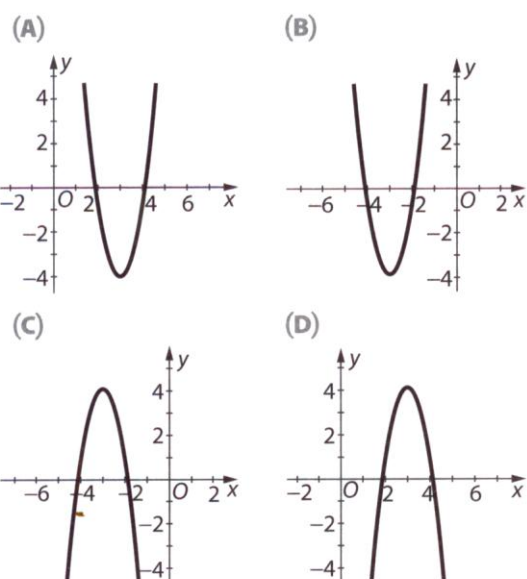
- (A) a é um zero da função f .
 (B) $f(a)$ é um máximo relativo da função f .
 (C) $f(a)$ é um mínimo relativo da função f .
 (D) P é ponto de inflexão do gráfico da função f .

- 9 Na figura está representada, num referencial ortogonal xOy , parte do gráfico de uma função polinomial g , de grau 3.



Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, que verifica a condição $f(x) = g(x - 3)$.

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f' , primeira derivada da função f ?



- 10 Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{3+x} + 2x & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1 - \sqrt{x} + \sin(x-1)}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

10.1. Averigue se a função f é contínua em $x = 1$.

10.2. Mostre que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua quando x tende para $-\infty$.

- 11 Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, g' , de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por $g'(x) = \ln(e^x + 6e^{-x} + 4x)$.

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

- 12 Considere, num referencial o.n. xOy , a representação gráfica da função f , de domínio $[-1, 2]$, definida por $f(x) = -x - 3^{1+\ln(x^2+1)}$, o ponto A de coordenadas $(2, 0)$ e um ponto P que se desloca ao longo do gráfico da função f . Existe uma posição do ponto P para a qual a área do triângulo $[AOP]$ é mínima. Determine a área desse triângulo recorrendo à calculadora gráfica.

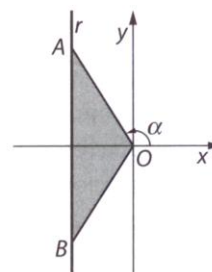
Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar o valor da área do triângulo $[AOP]$ com arredondamento às centésimas.

- 13 Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy , o triângulo $[OAB]$ e a reta r .

Sabe-se que:

- a reta r é definida por $x = -3$;
- o ponto A pertence à reta r e tem ordenada positiva;
- o ponto B é o simétrico do ponto A em relação ao eixo Ox ;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\widehat{OA}$;



$$\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$$

a função P , de domínio $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, é definida por $P(x) = -6 \operatorname{tg} x - \frac{6}{\cos x}$.

13.1. Mostre que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α , por $P(\alpha)$.

13.2. Determine o declive da reta tangente ao gráfico da função P no ponto de abscissa $\frac{5\pi}{6}$ sem utilizar a calculadora.

- 14** Seja f uma função cuja derivada, f' , de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $f'(x) = (4+x)^2$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?
- (A) O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$.
- (B) A função f tem um máximo relativo em $x = -4$.
- (C) O gráfico da função f não tem pontos de inflexão.
- (D) O gráfico da função f tem um ponto de inflexão de coordenadas $(-4, f(-4))$.

- 15** Seja a um número real positivo. Considere o conjunto: $S = \{x \in \mathbb{R} : \ln(e^{-x} - a) \leq 0\}$. Qual dos conjuntos seguintes é o conjunto S ?
- (A) $]-\ln(1+a), -\ln a[$
- (B) $[-\ln(1+a), -\ln a[$
- (C) $]-\infty, -\ln(1+a)]$
- (D) $[-\ln(1+a), +\infty[$

- 16** Considere a função f , de domínio $]0, \pi[$, definida por $f(x) = \ln x + \cos x - 1$. Sabe-se que:
- A é um ponto do gráfico de f ;
 - a reta tangente ao gráfico de f , no ponto A , tem inclinação $\frac{\pi}{4}$ radianos.
- Determine a abscissa do ponto A , recorrendo à calculadora gráfica.
- Na sua resposta, deve:
- equacionar o problema;
 - reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
 - indicar a abscissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

- 17** Considere, para um certo número real k positivo, a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{1-e^{2x}} & \text{se } x < 0 \\ \ln k & \text{se } x = 0 \\ \frac{x}{2} - \ln\left(\frac{6x}{x+1}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes recorrendo a métodos analíticos sem utilizar a calculadora.

17.1. Determine k de modo que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

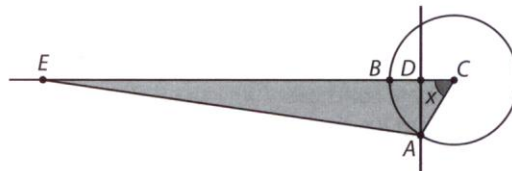
17.2. Mostre que $\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{3}\right)$ é um extremo relativo da função f no intervalo $]0, +\infty[$.

- 18** Considere duas funções g e h , de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que:

- a reta de equação $y = 2x - 1$ é assíntota do gráfico da função g ;
- a função h é definida por $h(x) = \frac{1 - [g(x)]^2}{x^2}$.

Mostre que o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal.

- 19** Na figura estão representados a circunferência de centro no ponto C e de raio 1, a semirreta $\vec{CB}$, a reta AD e o triângulo $[ACE]$.



Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- os pontos D e E pertencem à semirreta $\vec{CB}$;
- a reta AD é perpendicular à semirreta $\vec{CB}$;
- o ponto A desloca-se sobre a circunferência e os pontos D e E acompanham esse movimento de modo que $\overline{DE} = 6$;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo ACB ;
- $x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$

19.1. Mostre que a área do triângulo $[ACE]$ é dada, em função de x , por:

$$f(x) = 3 \sin x + \frac{1}{4} \sin(2x)$$

19.2. Mostre, sem resolver a equação, que $f(x) = 2$ tem, pelo menos, uma solução em

$$\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right[.$$

- 20** Para um certo número real k , positivo, seja f a função, de domínio $]-\infty, 1[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(k-x) & \text{se } x \leq 0 \\ 2e^x + \frac{1}{\ln x} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Sabe-se que f é contínua.

Qual é o valor de k ?

- (A) $\ln 2$ (B) e^2 (C) $\ln 3$ (D) e^3

- 21** Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^a + a^2 \ln x$ (a é um número real maior do que 1), e seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa a .

Qual é o declive da reta r ?

- (A) $a^{a-1} + a^2$ (B) $a^a + a^2$
(C) $a^{a-1} + a$ (D) $a^a + a$

- 22** Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e seja f'' a segunda derivada da função f .

Sabe-se que f'' tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f''(x) = e^{-x} x^2 (x-1)$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

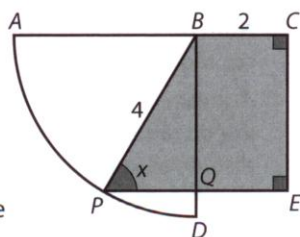
- (A) O gráfico da função f tem exatamente quatro pontos de inflexão.
(B) O gráfico da função f tem exatamente três pontos de inflexão.
(C) O gráfico da função f tem exatamente dois pontos de inflexão.
(D) O gráfico da função f tem exatamente um ponto de inflexão.

- 23** Relativamente à figura sabe-se que:

- o ponto B pertence ao segmento de reta $[AC]$;
- os pontos A e D pertencem à circunferência que tem centro no ponto B e raio igual a 4;
- o segmento de reta $[BD]$ é perpendicular ao segmento de reta $[AC]$;
- $\overline{BC} = 2$

Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco AD , nunca coincidindo com A nem com D , e que um ponto E acompanha o movimento do ponto P de forma que o quadrilátero $[PBCE]$ seja um trapézio retângulo.

O ponto Q é a interseção do segmento de reta $[PE]$ com o segmento de reta $[BD]$.



Para cada posição do ponto P , seja x a amplitude do ângulo EPB e seja $S(x)$ a área do trapézio $[PBCE]$.

- 23.1.** Mostre que $S(x) = 8 \sin x + 4 \sin(2x)$

$$\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right).$$

- 23.2.** Estude a função S quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Na sua resposta, deve apresentar:

- o(s) intervalo(s) em que a função é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função é decrescente;
- os valores de x para os quais a função tem extremos relativos, caso existam.

- 24** Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 - xe^x & \text{se } x < 0 \\ x + \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

- 24.1.** Determine $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

- 24.2.** O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando $x \rightarrow -\infty$.

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

- 25** Seja a um número real tal que $a > e$ (e – número de Neper ou número de Euler).

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $g(x) = ax + \ln x$.

Mostre que a função g tem, pelo menos, um

zero no intervalo $\left]\frac{1}{a}, \frac{1}{e}\right[$.

- 26** Para certos valores de a e de b ($a > 1$ e $b > 1$), tem-se $\log_a b = 2$.

Qual é, para esses valores de a e de b , o valor de $\log_b a + \log_a \sqrt{b}$?

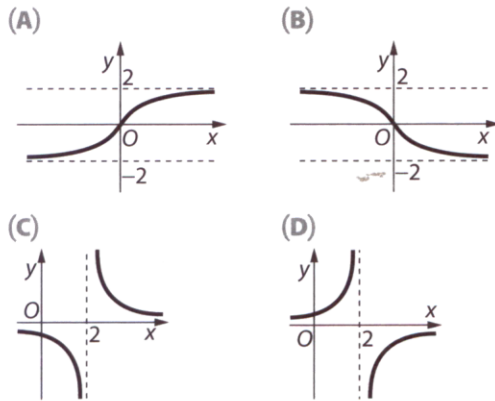
- (A) $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ (B) $-2 + \sqrt{2}$
(C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$

- 27** Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 2 + \frac{1}{n}$.

De uma certa função f , sabe-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = +\infty$$

Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função f ?

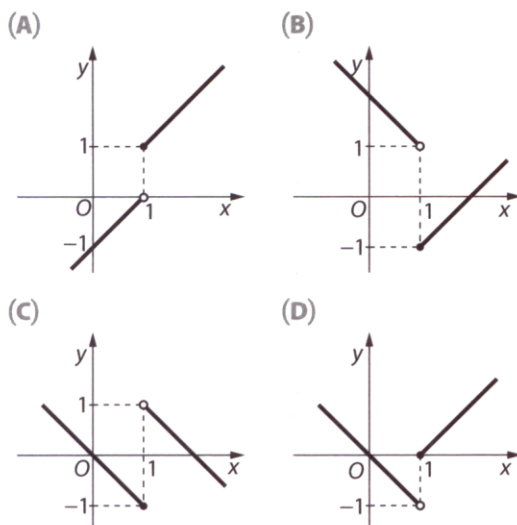


28 Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} & \text{se } x < 1 \\ \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Seja g uma outra função, de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que a função $f \times g$ é contínua no ponto 1.

Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função g ?



29 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+9}} & \text{se } x \leq 4 \\ \frac{\ln(3x-11)}{x-4} & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Resolva os itens **29.1.** e **29.2.**, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

29.1. Averigue se existe $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

29.2. O gráfico da restrição da função f ao intervalo $]-\infty, 4]$ tem uma assíntota horizontal.

Determine uma equação dessa assíntota.

29.3. Considere, num referencial o.n. xOy , o triângulo $[OPQ]$ tal que:

- o ponto P é o ponto de interseção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas;
- o ponto Q é o ponto do gráfico da função f que tem abcissa positiva e ordenada igual à ordenada do ponto P .

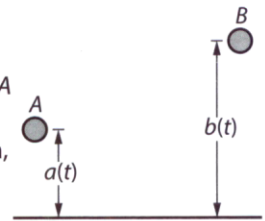
Determine um valor aproximado da área do triângulo $[OPQ]$, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função f para $x \in [0, 10]$;
- desenhar o triângulo $[OPQ]$;
- indicar a abcissa do ponto Q arredondada às milésimas;
- apresentar a área do triângulo $[OPQ]$ arredondada às centésimas.

Nota: Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

30 Considere que dois balões esféricos, que designamos por balão A e por balão B , se deslocam na atmosfera, por cima de um solo plano e horizontal.



Num determinado instante, é iniciada a contagem do tempo.

Admita que, durante o primeiro minuto imediatamente a seguir a esse instante, as distâncias, medidas em metros, do centro do balão A ao solo e do centro do balão B ao solo são dadas, respetivamente, por:

$$a(t) = e^{-0,03t} - 0,02t + 3$$

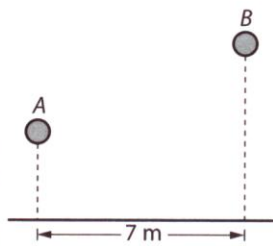
$$b(t) = 6e^{-0,06t} - 0,02t + 2$$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo ($t \in [0, 60]$).

Resolva os dois itens seguintes sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

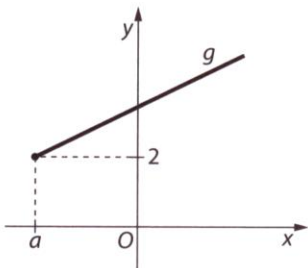
Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

30.1. Determine a distância entre o centro do balão A e o centro do balão B , cinco segundos após o início da contagem do tempo, sabendo que, nesse instante, a distância entre as projeções ortogonais dos centros dos balões no solo era de 7 metros. Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.



30.2. Sabe-se que, alguns segundos após o início da contagem do tempo, os centros dos dois balões estavam à mesma distância do solo. Determine quanto tempo decorreu entre o instante inicial e o instante em que os centros dos dois balões estavam à mesma distância do solo. Apresente o resultado em segundos, arredondado às unidades.

31 Na figura está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função g , de domínio $[a, +\infty[$, com $a < -\frac{1}{3}$.



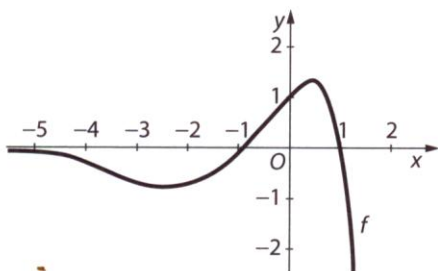
Para esse valor de a , a função f , contínua em $\mathbb{R}$, é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \log_3\left(-x - \frac{1}{3}\right) & \text{se } x < a \\ g(x) & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

Qual é o valor de a ?

- (A) $-\frac{28}{3}$ (B) $-\frac{25}{3}$ (C) $-\frac{19}{3}$ (D) $-\frac{8}{3}$

32 Na figura está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função f , de domínio $\mathbb{R}$.



Sejam f' e f'' , de domínio $\mathbb{R}$, a primeira derivada e a segunda derivada de f , respetivamente.

Qual dos valores seguintes pode ser positivo?
(A) $f'(1)$ (B) $f'(-3)$ (C) $f''(-3)$ (D) $f''(1)$

33 Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(x+1) - x \ln(x) + 3x & \text{se } x > 0 \\ x e^{1-x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

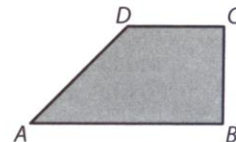
33.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas não verticais do seu gráfico.

33.2. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa $x = -1$.

34 Na figura está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- $\overline{BC} = 1$
- $\overline{CD} = 1$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo ADC ;
- $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$



Resolva os itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

34.1. Mostre que o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é dado, em função de α , por:

$$P(\alpha) = 3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

34.2. Para um certo número real θ , tem-se que $\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{8}$, com $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

Determine o valor exato de $P'(\theta)$.

Comece por mostrar que

$$P'(\alpha) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

35 Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 - \sqrt{1-x^3}} & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{k+1} & \text{se } x = 0 \text{ com } k \in \mathbb{R} \\ \frac{1 - e^{4x}}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

35.1. Determine k , de modo que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).$$

35.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

35.3. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, g' , de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por $g'(x) = f(x) - \frac{1}{x}$.

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

- 36** Considere a função f , de domínio $[-7, 0[$, definida por:
- $$f(x) = e^x + \ln(x^2) + 3$$
- Sejam A e B os pontos de interseção do gráfico de f com a bissetriz dos quadrantes pares e seja d a distância entre os pontos A e B . Determine d , recorrendo à calculadora gráfica.

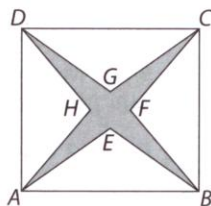
Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar os pontos A e B ;
- indicar as coordenadas dos pontos A e B com arredondamento às centésimas;
- apresentar o valor de d com arredondamento às centésimas.

- 37** Na figura está representado o quadrado $[ABCD]$.

Sabe-se que:

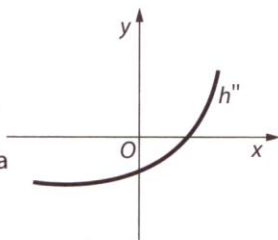
- $\overline{AB} = 4$
- $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{CF} = \overline{CG} = \overline{DG} = \overline{DH}$
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo EAB ;
- $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$



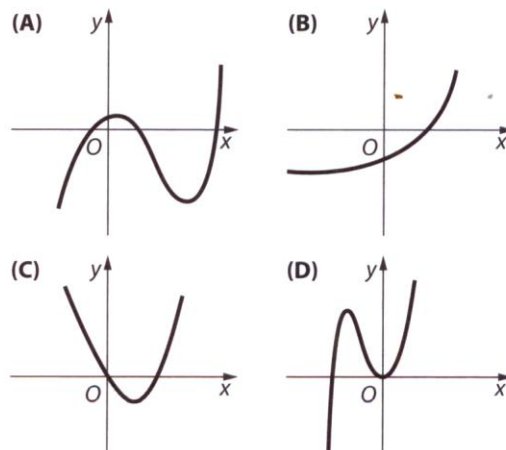
37.1. Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x , por $a(x) = 16(1 - \operatorname{tg} x)$.

37.2. Mostre que existe um valor de x compreendido entre $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{5}$ e para o qual a área da região sombreada é 5. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

- 38** Na figura está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de h'' , segunda derivada de uma função h , de domínio $\mathbb{R}$.



Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h ?



- 39** Sejam f e g funções de domínio $]0, +\infty[$. Sabe-se que:

- a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f ;
- f não tem zeros;
- $g(x) = \frac{e^{-x} - 3}{f(x)}$

Qual das opções seguintes define uma assíntota horizontal do gráfico de g ?

- (A) $y = 3$ (B) $y = e$
(C) $y = 0$ (D) $y = -1$

- 40** Sejam a , b e c três números tais que $a \in]1, +\infty[$, $b \in \mathbb{R}^+$ e $c \in \mathbb{R}^+$.

Sabe-se que $\log_a b = c$ e que $\log_a \sqrt{c} = 3$.

Qual das expressões seguintes é equivalente a $\log_a \sqrt{b \times c}$?

- (A) $c + 3$ (B) $c - 3$
(C) $\frac{c}{2} + 3$ (D) $\frac{c}{2} - 3$

- 41** Admita que a concentração de um produto químico na água, em gramas por litro, t minutos após a sua colocação na água, é dada, aproximadamente, por $C(t) = 0,5t^2 \times e^{-0,1t}$, com $t \geq 0$. Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

41.1. Mostre que, durante os primeiros 15 minutos após a colocação desse produto químico na água, houve, pelo menos, um instante em que a concentração do produto foi 13 gramas por litro.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

41.2. Determine o valor de t para o qual a concentração desse produto químico na água é máxima.

- 42** Considere as funções f e g , de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por:

$$f(x) = -x + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \text{ e}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ e^k - 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

42.1. Determine k de modo que a função g seja contínua.

42.2. Determine, em $]-2\pi, 5\pi[$, as soluções da equação $2f'(x) = (f(x) + x)^2 - 1$.

- 43** Considere, num referencial o. n. xOy , o gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = e^{0,1x} + \ln(3x + 1)$.

Seja P um ponto do gráfico de f .

A distância do ponto P à origem é igual a 2.

Determine a abscissa do ponto P recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abscissa do ponto P com arredondamento às centésimas.

- 44** Seja a um número real maior do que 1 e seja $b = a^\pi$.

Qual é o valor, arredondado às unidades, de $\log_a(a^{12} \times b^{100})$?

(A) 138 (B) 326 (C) 1238 (D) 3770

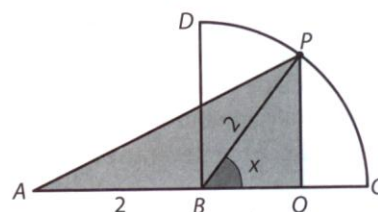
- 45** Relativamente a duas funções, f e g , sabe-se que:

- têm domínio $[2, 3]$;
- são funções contínuas;
- $f(2) - g(2) > 0$ e $f(3) - g(3) < 0$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

- (A) Os gráficos de f e g interseam-se em pelo menos um ponto.
 (B) A função $f - g$ é crescente.
 (C) Os gráficos de f e g não se interseam.
 (D) A função $f - g$ é decrescente.

- 46** Relativamente à figura, sabe-se que:



- o segmento de reta $[AC]$ tem comprimento 4;
- o ponto B é o ponto médio de $[AC]$;
- o segmento de reta $[BD]$ é perpendicular a $[AC]$;
- o arco de circunferência CD tem centro em B .

Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco CD , nunca coincidindo com C nem com D , e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta $[BC]$ de tal forma que $[PQ]$ é sempre perpendicular a $[BC]$. Para cada posição do ponto P , seja x a amplitude, em radianos, do ângulo CBP e seja $A(x)$ a área do triângulo $[APQ]$.

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

46.1. Mostre que:

$$A(x) = 2 \sin x + \sin(2x) \quad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right]$$

46.2. Mostre que existe um valor de x para o qual a área do triângulo $[APQ]$ é máxima.

- 47** De uma certa função f sabe-se que:

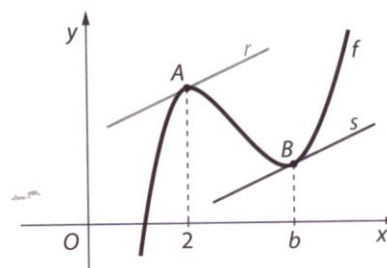
- o seu domínio é $]1, +\infty[$;
- a sua derivada é dada por:

$$f'(x) = x^2 - 4x + \frac{9}{2} - 4 \ln(x - 1)$$

47.1. Na figura estão representadas:

- parte do gráfico da função f ;
- a reta r que é tangente ao gráfico da função f no ponto A , de abscissa 2;
- a reta s que é tangente ao gráfico da função f no ponto B .

As retas r e s são paralelas.



Seja b a abscissa do ponto B .

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor de b .

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir e identificar o(s) gráfico(s) que tiver necessidade de visualizar na calculadora para resolver graficamente a equação;
- assinalar o ponto relevante para a resolução do problema;
- apresentar o valor de b arredondado às centésimas.

47.2. Tal como a figura sugere, o gráfico da função f tem um ponto de inflexão. Determine a abcissa desse ponto recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

48 Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xe^x - 2e^2}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ 3e^x + \ln(x - 1) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Averigue se a função f é contínua em $x = 2$.

49 Considere a sucessão (u_n) , definida por:

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Seja f uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = 0$.

Qual das seguintes expressões pode definir a função f ?

- (A) $1 - \ln x$ (B) $1 + \ln x$
(C) $x - \ln x$ (D) $x + \ln x$

50 Para um certo valor de α e para um certo valor de β , é **contínua** no ponto 0 a função g , definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \\ \beta - \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é esse valor de α e qual é esse valor de β ?

- (A) $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ (B) $\alpha = 2$ e $\beta = 3$
(C) $\alpha = 1$ e $\beta = 3$ (D) $\alpha = 2$ e $\beta = 1$

51 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 2 + \log_3 x$.

Resolva os três itens seguintes sem recorrer à calculadora.

51.1. Determine o conjunto dos números reais para os quais se tem $f(x) \geq 4 + \log_3(x - 8)$. Apresente a sua resposta na forma de intervalo de números reais.

51.2. Determine o valor de $f(36^{1000}) - f(4^{1000})$.

51.3. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = x + f(x)$.

Mostre que $\exists c \in]1, 3[: g(c) = 5$.

52 Um vírus atacou os frangos de um aviário. Admita que x dias após o instante em que o vírus foi detetado, o número de frangos infetados é dado aproximadamente por:

$$f(x) = \frac{200}{1 + 3 \times 2^{3 - 0,1x}}$$

(considere que $x = 0$ corresponde ao instante em que o vírus foi detetado).

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar cálculos numéricos.

52.1. No instante em que o vírus foi detetado, já existiam frangos infetados.

Passados alguns dias, o número de frangos infetados era dez vezes maior.

Quantos dias tinham passado?

52.2. Para tentar verificar se um frango está infetado, o veterinário aplica um teste que ou dá positivo ou dá negativo.

Sabe-se que:

- quando o frango está infetado, a probabilidade de o teste dar positivo é 96% ;
- quando o frango não está infetado, a probabilidade de o teste dar negativo é 90% .

Trinta dias após o instante em que o vírus foi detetado, existiam no aviário 450 frangos não infetados. Nesse dia, de entre todos os frangos do aviário (infetados e não infetados), o veterinário escolheu, ao acaso, um frango e aplicou-lhe o teste.

O teste deu negativo.

Qual é a probabilidade de o frango escolhido não estar infetado?

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

53 Para cada valor de k , a expressão

$$f(x) = \begin{cases} k + xe^x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{2x + \ln x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

define uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cujo gráfico tem:

- uma assíntota horizontal, quando $x \rightarrow +\infty$;
- uma assíntota horizontal, quando $x \rightarrow -\infty$.

Existe um valor de k para o qual as duas assíntotas são coincidentes, ficando assim o gráfico de f com uma única assíntota horizontal. Determine esse valor de k , sem recorrer à calculadora.

- 54** Seja f uma função de domínio $[0, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 9 & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ \frac{1 - e^x}{x} & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

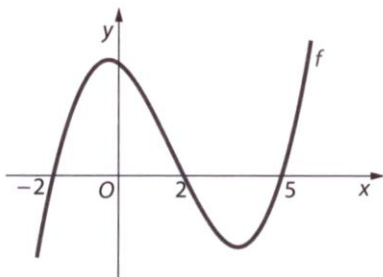
Em qual dos intervalos seguintes o Teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f ?

- (A) $]0, 1[$ (B) $]1, 4[$
(C) $]4, 6[$ (D) $]6, 7[$

- 55** Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right)$?

- (A) 4 (B) 0 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

- 56** Na figura está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f de grau 3, de domínio $\mathbb{R}$.



Sabe-se que:

- $-2, 2$ e 5 são zeros de f ;
- f' representa a função derivada de f .

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $f'(0) \times f'(6) = 0$
(B) $f'(-3) \times f'(6) < 0$
(C) $f'(-3) \times f'(0) > 0$
(D) $f'(0) \times f'(6) < 0$

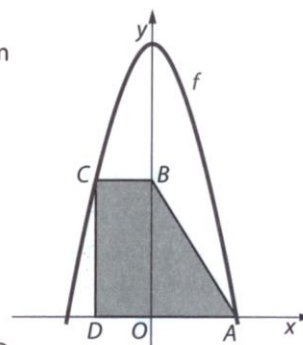
- 57** Num museu, a temperatura ambiente em graus Celsius, t horas após as zero horas do dia 1 de abril de 2010, é dada, aproximadamente, por:
 $T(t) = 15 + 0,1t^2 e^{-0,15t}$, com $t \in [0, 20]$

Determine o instante em que a temperatura atingiu o valor máximo recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Apresente o resultado em horas e minutos, apresentando os minutos arredondados às unidades.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos use três casas decimais.

- 58** Na figura está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 4 \cos(2x)$.



Sabe-se que:

- os vértices A e D do trapézio $[ABCD]$ pertencem ao eixo Ox ;
- o vértice B do trapézio $[ABCD]$ pertence ao eixo Oy ;
- o vértice D do trapézio $[ABCD]$ tem abcissa $-\frac{\pi}{6}$;
- os pontos A e C pertencem ao gráfico de f ;
- a reta CD é paralela ao eixo Oy .

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

58.1. Determine o valor exato da área do trapézio $[ABCD]$.

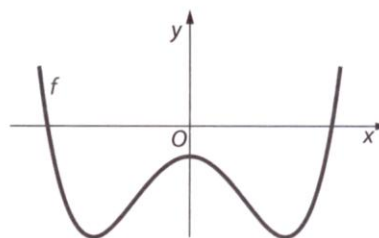
58.2. Seja f' a primeira derivada da função f e seja f'' a segunda derivada da função f .

Mostre que:

$$f(x) + f'(x) + f''(x) = -4(3 \cos(2x) + 2 \sin(2x)),$$

para qualquer número real x .

- 59** Na figura está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f , de grau 4.



Qual das expressões seguintes pode definir a função f'' , segunda derivada de f ?

- (A) $(x-3)^2$ (B) $(x+3)^2$
(C) $9-x^2$ (D) x^2-9

- 60** Para um certo número real positivo, k , a função g definida em $\mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{3x} & \text{se } x > 0 \\ \ln(k-x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{é contínua.}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) $\sqrt[3]{e}$ (B) e^3 (C) $\frac{e}{3}$ (D) $3e$

- 61** Considere a função f , de domínio $[0, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \frac{x + 1}{\ln(x + 1)} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Resolva os três itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

61.1. Estude f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

61.2. Mostre, sem resolver a equação, que $f(x) = -3$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

61.3. Estude f quanto à monotonia em $]2, +\infty[$.

- 62** Para a, b e n , números reais positivos, considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = a \cos(nx) + b \sin(nx)$$

Seja f'' a segunda derivada da função f .

Mostre que $f''(x) + n^2 f(x) = 0$, para qualquer número real x .

- 63** Considere uma função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, contínua em todo o seu domínio.

Sabe-se que:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = 0$

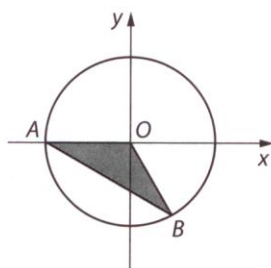
Em qual das opções seguintes as equações definem duas assíntotas do gráfico de f ?

- (A) $x = -2$ e $y = 1$
- (B) $x = 3$ e $y = -2x$
- (C) $y = -2x$ e $y = 1$
- (D) $y = 2x$ e $y = -1$

- 64** Na figura estão representados, num referencial o. n. xOy , uma circunferência e o triângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- a circunferência tem centro no ponto O e raio 1;
- A é o ponto de coordenadas $(-1, 0)$;



- B pertence à circunferência e tem ordenada negativa;
- o ângulo AOB tem amplitude igual a $\frac{2\pi}{3}$ radianos.

Qual é a área do triângulo $[OAB]$?

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- (B) $\frac{1}{2}$
- (C) $\frac{1}{4}$
- (D) $\sqrt{3}$

- 65** Para um certo valor real de k , admita que a quantidade de combustível, em litros, existente no depósito de uma certa máquina agrícola, t minutos após ter começado a funcionar, é dada aproximadamente por:

$$Q(t) = 12 + \log_3(81 - kt^2), \text{ com } t \in [0, 20]$$

Considere que essa máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e que, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível.

Determine o valor de k recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

- 66** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{1-e^{x+1}} + 1 & \text{se } x \neq -1 \\ a+2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

(a é um número real)

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

66.1. Determine a sabendo que f é contínua em $x = -1$.

66.2. Seja f' a primeira derivada de f .

Mostre, sem resolver a equação, que $f'(x) = \frac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0, 1[$.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos use duas casas decimais.

- 67** Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, contínua no intervalo $[-1, 4]$.

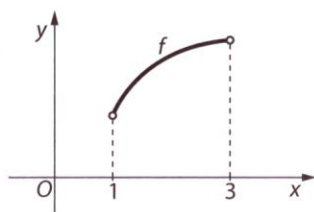
Tem-se $f(-1) = 3$ e $f(4) = 9$.

Em qual das opções seguintes está definida uma função g , de domínio $\mathbb{R}$, para a qual o Teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $] -1, 4[$?

- (A) $g(x) = 2x + f(x)$
- (B) $g(x) = 2x - f(x)$
- (C) $g(x) = x^2 + f(x)$
- (D) $g(x) = x^2 - f(x)$

- 68** Na figura está o gráfico de uma função f cujo domínio é o intervalo $]1, 3[$.

A função f tem primeira derivada e segunda derivada finitas em todos os pontos do seu domínio.



Seja $x \in]1, 3[$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $f'(x) > 0 \wedge f''(x) > 0$
 (B) $f'(x) < 0 \wedge f''(x) > 0$
 (C) $f'(x) > 0 \wedge f''(x) < 0$
 (D) $f'(x) < 0 \wedge f''(x) < 0$

- 69** Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{\sin(x-1)}{e^x - e} & \text{se } 0 < x < 1 \\ xe^{-x} + 2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Resolva os três itens seguintes sem recorrer à calculadora.

69.1. Averigue se a função f é contínua em $x = 1$.

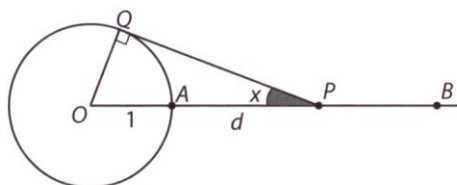
69.2. O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua.

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

69.3. Resolva, no intervalo $[1, +\infty[$, a

equação $\frac{f(x)}{x} = e^x - \frac{2}{3}$.

- 70** Na figura está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência;
- os pontos O , A e B são colineares;
- o ponto A está entre o ponto O e o ponto B ;
- o ponto P desloca-se ao longo da semirreta AB , nunca coincidindo com o ponto A ;
- d é a distância do ponto A ao ponto P ;
- para cada posição do ponto P , o ponto Q é um ponto da circunferência tal que a reta PQ é tangente à circunferência;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo OPQ ($x \in]0, \frac{\pi}{2}[$).

$$OPQ \left(x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\right).$$

Seja f a função, de domínio $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, definida

por $f(x) = \frac{1 - \sin x}{\sin x}$.

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

70.1. Mostre que $d = f(x)$.

70.2. Considere a seguinte afirmação:

“Quanto maior é o valor de x , menor é o valor de d .”

Averigue a veracidade desta afirmação, começando por estudar a função f quanto à monotonia.

- 71** Na década de 60 do século passado, uma doença infecciosa atacou a população de algumas regiões do planeta.

Admita que, ao longo dessa década, e em qualquer uma das regiões afetadas, o número, em **milhares**, de pessoas que estavam infetadas com a doença, t anos após o início de 1960, é dado, aproximadamente, por

$$I(t) = \frac{3e^{kt}}{1 + pe^{kt}}, \text{ em que } k \text{ e } p \text{ são parâmetros reais.}$$

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar cálculos numéricos.

71.1. Admita que, para uma certa região,

$$k = \frac{1}{2} \text{ e } p = 1.$$

Determine o ano em que o número de pessoas que estavam infetadas, nessa região, atingiu 2500.

Nota: Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

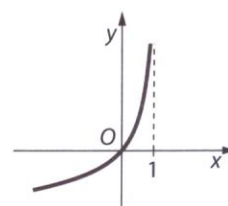
71.2. Numa outra região, constatou-se que havia um milhar de pessoas que estavam infetadas no início de 1961.

Qual é, para este caso, a relação entre k e p ?

Apresente a sua resposta na forma

$k = -\ln(A + Bp)$, em que A e B são números reais.

- 72** Na figura está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função f , contínua, de domínio $]-\infty, 1[$.



Tal como a figura sugere, a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de f .

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x}{f(x)}$?

- (A) $-\infty$ (B) 3 (C) 0 (D) $+\infty$

73 Seja g a função, de domínio $]-2, +\infty[$, definida por $g(x) = \ln(x+2)$.

Considere, num referencial o. n. xOy , um triângulo $[OAB]$ tal que:

- O é a origem do referencial;
- A é um ponto de ordenada 5;
- B é o ponto de interseção do gráfico da função g com o eixo das abcissas.

Qual é a área do triângulo $[OAB]$?

- (A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5 \ln 2}{2}$ (D) $\frac{\ln 2}{2}$

74 Na Internet, no dia 14 de outubro de 2009, pelas 14 horas, colocaram-se à venda todos os bilhetes de um espetáculo.

O último bilhete foi vendido cinco horas após o início da venda.

Admita que, t horas após o início da venda, o número de bilhetes vendidos, em **centenas**, é dado, aproximadamente, por

$$N(t) = 8 \log_4(3t+1)^3 - 8 \log_4(3t+1), \quad t \in [0, 5]$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

74.1. Mostre que $N(t) = 16 \log_4(3t+1)$, para qualquer $t \in [0, 5]$.

74.2. Determine quanto tempo foi necessário para vender 2400 bilhetes.

Apresente o resultado em horas e minutos.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais, apresentando os minutos arredondados às unidades.

75 Considere a função f , de domínio $]-\infty, 2\pi]$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b + e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x - \sin(2x)}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

75.1. Prove que a reta de equação $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma assíntota oblíqua do gráfico de f .

75.2. Determine o valor de b , de modo que f seja contínua em $x = 0$.

76 Na figura estão representados, num referencial o. n. xOy , uma circunferência e o triângulo $[OAB]$. Sabe-se que:

- a circunferência tem diâmetro $[OA]$;
- o ponto A tem coordenadas $(2, 0)$;
- o vértice O do triângulo $[OAB]$ coincide com a origem do referencial;
- o ponto B desloca-se ao longo da semicircunferência superior.

Para cada posição do ponto B , seja α a

amplitude do ângulo AOB , com $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

76.1. Mostre que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α , por

$$f(\alpha) = 2(1 + \cos \alpha + \sin \alpha)$$

76.2. Determine o valor de α para o qual o perímetro do triângulo $[OAB]$ é máximo.

77 De uma função h , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- h é uma função par;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - 2x) = 0$$

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$?

- (A) $+\infty$ (B) -2 (C) 0 (D) $-\infty$

78 Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

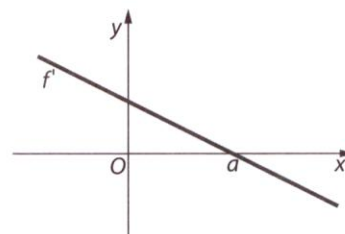
$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$.

Qual é o valor de $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n)$?

- (A) $+\infty$ (B) 1 (C) 0 (D) $-\infty$

79 Na figura está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico da função f' , primeira derivada de f .



Seja $a \in \mathbb{R}^+$ um ponto do domínio de f , tal que $f'(a) = 0$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A função f tem um mínimo para $x = a$.
 (B) A função f tem um ponto de inflexão para $x = a$.
 (C) A função f é crescente em $]0, a[$.
 (D) A função f é decrescente em $\mathbb{R}$.

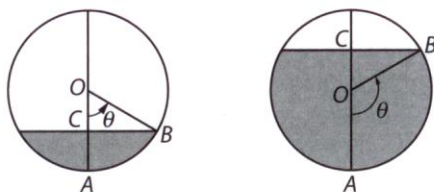
- 80** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x + e^{2x^2 - 1}$.
 Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

80.1. Mostre que $f(x) = 1,5$ tem, pelo menos, uma solução em $] -2, -1[$.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

80.2. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 0$.

- 81** Um depósito de combustível tem a forma de uma esfera.
 As figuras representam dois cortes do mesmo depósito, com alturas de combustível distintas.
 Os cortes são feitos por um plano vertical que passa pelo centro da esfera.



Sabe-se que:

- o ponto O é o centro da esfera;
- a esfera tem 6 metros de diâmetro;
- a amplitude θ , em radianos, do arco AB é igual à amplitude do ângulo ao centro AOB correspondente.

A altura $\overline{AC}$, em metros, do combustível existente no depósito é dada, em função de θ , por h , de domínio $[0, \pi]$.

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

81.1. Mostre que $h(\theta) = 3 - 3 \cos(\theta)$, para qualquer $\theta \in]0, \pi[$.

81.2. Resolva a condição:

$$h(\theta) = 3, \theta \in]0, \pi[$$

Interprete o resultado obtido no contexto da situação apresentada.

- 82** Seja g uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}$. Qual dos seguintes conjuntos não pode ser o contradomínio da função g ?

- (A) $]0, 2[$ (B) $\mathbb{R}$
 (C) $\mathbb{R}^-$ (D) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

- 83** Seja a um número real diferente de zero.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax^2 + a^2 x}$?

- (A) $\frac{1}{a}$ (B) $\frac{1}{2a}$ (C) 0 (D) $+\infty$

- 84** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3 + 4x^2 e^{-x}$.

Resolva os itens seguintes, usando exclusivamente métodos analíticos.

84.1. Mostre que o gráfico da função f tem uma única assíntota e escreva uma equação dessa assíntota.

84.2. Mostre que a função f tem um único mínimo relativo e determine-o.

84.3. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = x + \ln[f(x) - 3]$.
 Determine os zeros da função g .

- 85** Qual é o valor de $\log_5 \left(\frac{5^{1000}}{25} \right)$?

- (A) 40 (B) 500 (C) 975 (D) 998

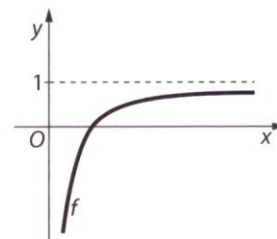
- 86** Seja g a função, de domínio $[0, +\infty[$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 3^x - \sqrt{x} & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ x - 5 + \log_2(x - 1) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o Teorema de Bolzano permite garantir a existência de pelo menos um zero da função g ?

- (A) $]0, 1[$ (B) $]1, 3[$
 (C) $]3, 5[$ (D) $]5, 9[$

- 87** Na figura está representado o gráfico de uma função f , de domínio $\mathbb{R}^+$. Tal como a figura sugere, a reta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico de f .



Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x)}{x} - f(x) \right]$.

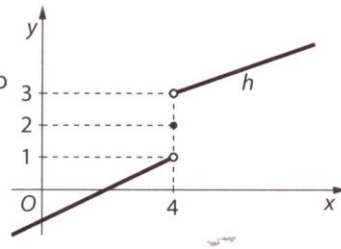
- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

- 88** Na figura está representada parte do gráfico de uma função h , de domínio $\mathbb{R}$. Seja (u_n) a sucessão de termo geral

$$u_n = h\left(4 - \frac{1000}{n}\right).$$

Qual é o valor de $\lim (u_n)$?

- (A) $-\infty$ (B) 1 (C) 2 (D) 3



- 89** Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-\sqrt{2}x} & \text{se } 0 < x < 2 \\ xe^{-x} + x + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Resolva, usando exclusivamente métodos analíticos, os itens **89.1.** e **89.2.**

89.1. Averigue se a função f é contínua em $x = 2$.

89.2. O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua.

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

89.3. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = 3 + \ln(x)$.

A equação $f(x) = g(x)$ tem exatamente duas soluções.

Determine essas soluções, utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora.

Apresente as soluções arredondadas às centésimas.

Apresente os gráficos que obteve na calculadora e assinale os pontos relevantes.

- 90** Seja x um número real positivo. Qual das expressões seguintes é igual a $e^{4 \ln x} - 10^{2 \log x}$? (ln designa logaritmo de base e ; log designa logaritmo de base 10.)

- (A) $\ln x^4 - \log x^2$ (B) $x^4 + x^2$
(C) $x^4 - x^2$ (D) $\frac{\ln x^4}{\log x^2}$

- 91** Para um certo número real positivo k , é contínua a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(k+x) & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{\sin(2x)}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

- 92** Sejam f e g duas funções, ambas de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$$

a função g é definida por $g(x) = f(x) + x^2$.

Prove que o gráfico de g não tem assíntotas oblíquas.

- 93** Sejam as funções f e h , de domínios $]1, +\infty[$ e $]-\infty, 2[$, respetivamente, definidas por $f(x) = \log_2(x-1)$ e por $h(x) = \log_2(2-x)$.

Determine, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, o conjunto-solução da condição $f(x) \geq 1 + h(x)$.

Apresente o resultado sob a forma de intervalo real.

- 94** Sejam a , x e y três números reais tais que $\log_a x = 1 + 5 \log_a y$.

Qual das igualdades seguintes é necessariamente verdadeira?

- (A) $x = ay^5$ (B) $x = 5ay$
(C) $x = 5y$ (D) $x = y^5$

- 95** Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 1$.

Seja g a função cujo gráfico é a reta representada na figura.

Seja $h = f + g$.

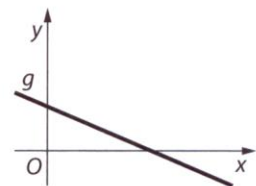
Seja h' a função derivada da função h .

O gráfico da função h' é uma reta.

Sejam m e b , respetivamente, o declive e a ordenada na origem desta reta.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $m > 0$ e $b > 0$ (B) $m > 0$ e $b < 0$
(C) $m < 0$ e $b > 0$ (D) $m < 0$ e $b < 0$



- 96** De uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua derivada, f' , é definida por:

$$f'(x) = (2x + 4)e^x$$

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

96.1. Seja A o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das ordenadas. Sabe-se que a ordenada deste ponto é igual a 1.

Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto A .

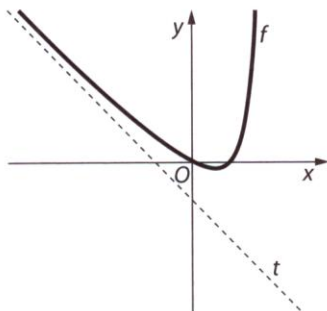
96.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

- 97** Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação:
- $$\log_2(x-1) + \log_2(13-x) \leq 5$$
- Apresente a sua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

- 98** De uma função f de domínio $[1, 2]$ sabe-se que:
- f é contínua em todo o seu domínio;
 - $\forall x \in [1, 2], f(x) < 0$
 - $f(1) = 3 f(2)$
- Seja g a função de domínio $[1, 2]$ definida por $g(x) = 2 f(x) - f(1)$.
- Prove que a função g tem pelo menos um zero.

- 99** Seja a um número real maior do que 1.
- Qual dos seguintes valores é igual a $2 \log_a \left(a^{\frac{1}{3}} \right)$?
- (A) $-\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$
(C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

- 100** Na figura está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $]-\infty, 2[$.



A reta t , de equação $y = -x - 1$, é assíntota do gráfico de f quando x tende para $-\infty$.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x + 1)$?

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

- 101** Seja f a função de domínio $[-\pi, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-4x+1} & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{3 \sin(x)}{x^2} & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados, escrevendo as suas equações, caso existam.

- 102** Seja h a função de domínio $]-1, +\infty[$, definida por $h(x) = 4 - x + \ln(x+1)$.
- Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens seguintes.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use, pelo menos, duas casas decimais.

102.1. Estude a função h , quanto à monotonia, no seu domínio.

Indique os intervalos de monotonia e, se existir algum extremo relativo, determine-o.

102.2. Justifique, aplicando o Teorema de Bolzano, que a função h tem, pelo menos, um zero no intervalo $]5, 6[$.

- 103** Sabe-se que o ponto $P(1, 3)$ pertence ao gráfico da função $f(x) = 2^{ax} - 1$, $a \in \mathbb{R}$.
- Qual é o valor de a ?

- (A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -2

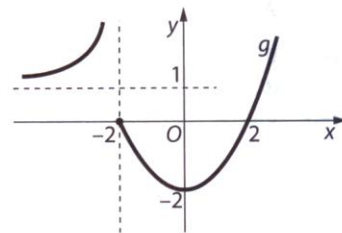
- 104** Na figura está representada parte do gráfico de uma função g , de domínio $\mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

As retas de equações $x = -2$ e $y = 1$ são as únicas assíntotas do gráfico de g .

Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = +\infty$.

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (x_n) ?

- (A) $-2 + \frac{2}{n}$ (B) $-2 - \frac{1}{n}$
(C) $1 + \frac{1}{n}$ (D) $1 - \frac{1}{n}$



- 105** Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2 + \sin(4x)$.
- Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens seguintes.

105.1. Determine $g'(0)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

105.2. Estude a monotonia da função g , no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, indicando o valor dos extremos relativos, caso existam, e os intervalos de monotonia.

Soluções

1. (A) 2. (D)
- 3.1. Não tem.
- 3.2. A função g é estritamente decrescente no intervalo $]0, 1[$ e estritamente crescente no intervalo $[1, e]$.
A função g tem um mínimo relativo para $x = 1$ e um máximo relativo para $x = e$.
- 3.3. $\{0,31; 0,61; 1,56; 2,52\}$
4. $a = -\frac{\pi}{6}$
6. (A) 7. (D) 8. (B)
9. (A) 10.1. Não é. 10.2. $y = 2x$
11. O gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]0, \ln(-2 + \sqrt{10})[$ e voltada para cima no intervalo $]\ln(-2 + \sqrt{10}), +\infty[$.
O ponto de abscissa $\ln(-2 + \sqrt{10})$ é um ponto de inflexão do gráfico da função g .
12. 2,92 13.2. -12 14. (D)
15. (B) 16. 0,63 17.1. $k = e^{-\frac{3}{2}}$
20. (B) 21. (D) 22. (D)
- 23.2. A função S é estritamente crescente no intervalo $]0, \frac{\pi}{3}]$ e estritamente decrescente no intervalo $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.
A função S tem um máximo relativo para $x = \frac{\pi}{3}$.
- 24.1. 0 24.2. $y = 3x + 1$ 26. (D)
27. (C) 28. (A) 29.1. 3
- 29.2. $y = -3$ 29.3. 2,95 30.1. 7,5 m
- 30.2. 23 s 31. (A) 32. (C)
- 33.1. $y = 3x + 1$ quando $x \rightarrow +\infty$
- 33.2. $y = 2e^2x + e^2$ 34.2. $\frac{3}{2}$
- 35.1. $k = -1 + \ln 5$ 35.2. $x = 0$
- 35.3. O gráfico da função g tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]0, \frac{1}{4}[$ e voltada para baixo no intervalo $]\frac{1}{4}, +\infty[$. O ponto de abscissa $\frac{1}{4}$ é um ponto de inflexão do gráfico da função g .
36. 9,46 38. (A) 39. (D)
40. (C) 41.2. 20 42.1. $k = -\ln 2$
- 42.2. $\{0, 4\pi\}$ 43. 0,48 44. (B)
45. (A) 46.2. $\frac{\pi}{3}$ 47.1. 4,14
- 47.2. 3 48. É contínua. 49. (A)
50. (B) 51.1. $]8, 9]$ 51.2. 2000
- 52.1. 40 52.2. 0,995 53. $k = 2$
54. (B) 55. (C) 56. (D)
57. 13 h 20 min 58.1. $\frac{7\pi}{12}$ 59. (D)
60. (A) 61.1. Não tem.
- 61.3. f é estritamente crescente.
63. (C) 64. (A) 65. $k = \frac{9}{50}$
- 66.1. $a = -2$ 67. (D) 68. (C)
- 69.1. É contínua. 69.2. $y = 2x$ 69.3. $\{\ln 3\}$
- 70.2. Verdadeira
- 71.1. 1963 71.2. $k = -\ln(3 - p)$
72. (C) 73. (A) 74.2. 2 h 20 min
- 75.2. $b = -2$ 76.2. $\frac{\pi}{4}$ 77. (A)
78. (D) 79. (C)
- 80.2. $y = -x + \frac{1}{e}$ 81.2. $\frac{\pi}{2}$
82. (D) 83. (A) 84.1. $y = 3$
- 84.2. $f(0) = 3$ 84.3. $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ 85. (D)
86. (C) 87. (A) 88. (B)
- 89.1. Não. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \neq f(2)$
- 89.2. $y = x + 1$ 89.3. $\{0,72; 2,91\}$
90. (C) 91. (D) 93. $\left[\frac{5}{3}, 2\right]$
94. (A) 95. (B) 96.1. $y = 4x + 1$
- 96.2. O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-\infty, -3[$ e voltada para cima no intervalo $]-3, +\infty[$. O ponto de abscissa -3 é um ponto de inflexão do gráfico da função f .
97. $]1, 5] \cup [9, 13[$ 99. (D)
100. (B) 101. $x = 0; y = 0$
- 102.1. A função h é estritamente crescente no intervalo $]-1, 0]$ e estritamente decrescente no intervalo $[0, +\infty[$. A função h tem um máximo relativo igual a 4 para $x = 0$.
103. (A) 104. (B) 105.1. 4
- 105.2. A função g é estritamente crescente em $]0, \frac{\pi}{8}]$ e em $[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}]$ e é estritamente decrescente no intervalo $[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}]$. A função g tem um máximo relativo igual a 3 para $x = \frac{\pi}{8}$ e um mínimo relativo igual a 1 para $x = \frac{3\pi}{8}$.

3. Números complexos

- 1** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2} + 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$ e $z_2 = 1 + i$.

1.1. Sabe-se que $\frac{z_1}{z_2}$ é uma raiz quarta de um certo número complexo w .

Determine w na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.

1.2. Seja $z_3 = \operatorname{cis} \alpha$.

Determine o valor de α pertencente ao intervalo $] -2\pi, -\pi[$, sabendo que $z_3 + \bar{z}_2$ é um número real.

- 2** Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z = 2 + bi$, com $b < 0$.

Seja $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.

Qual dos números complexos seguintes pode ser o conjugado de z ?

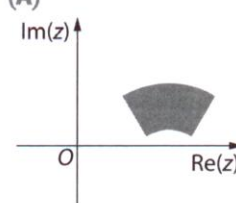
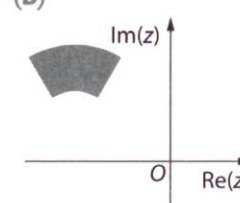
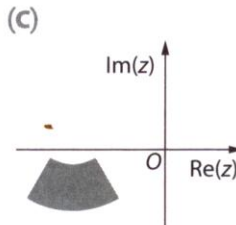
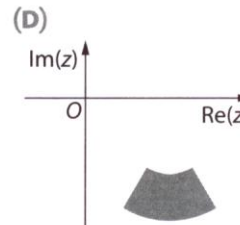
- (A) $\frac{3}{2} \operatorname{cis}(\alpha)$ (B) $3 \operatorname{cis}(-\alpha)$
(C) $3 \operatorname{cis}(\alpha)$ (D) $\frac{3}{2} \operatorname{cis}(-\alpha)$

- 3** Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição:

$$\frac{3}{2} \leq |z - 3 + i| \leq 3 \wedge \frac{\pi}{3} \leq \arg(z - 3 + i) \leq \frac{2\pi}{3}$$

Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi, \pi[$.

Qual das opções seguintes pode representar, no plano complexo, o conjunto de pontos definido pela condição dada?

- (A)  (B) 
(C)  (D) 

- 4** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

4.1. Considere $z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} + i^{22}$ e $z_2 = \frac{-2}{i z_1}$.

Determine, sem utilizar a calculadora, o menor número natural n tal que $(z_2)^n$ é um número real negativo.

4.2. Seja $\alpha \in [-\pi, \pi[$. Mostre que:

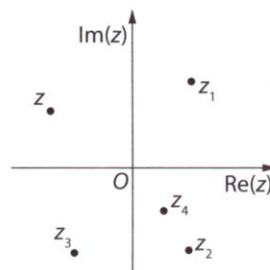
$$\frac{\cos(\pi - \alpha) + i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos \alpha + i \sin \alpha} = \operatorname{cis}(\pi - 2\alpha)$$

- 5** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = (1 + i)^{2013}$.

A qual dos conjuntos seguintes pertence w ?

- (A) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > |z - 1|\}$
(B) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \sqrt{2}\}$
(C) $\{z \in \mathbb{C} : z = \bar{z}\}$
(D) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)\}$

- 6** Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas dos números complexos: z , z_1 , z_2 , z_3 e z_4 .



Sabe-se que w é um número complexo tal que $z = i \times \bar{w}$.

Qual é o número complexo que pode ser igual a w ?

- (A) z_4 (B) z_3 (C) z_2 (D) z_1

- 7** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + 2i \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)} \text{ e } z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

7.1. Seja $z = \operatorname{cis} \theta$, com θ pertencente a $[0, 2\pi[$.

Determine θ de modo que $\frac{z}{z_1}$ seja um número real negativo, sem utilizar a calculadora.

7.2. As imagens geométricas de z_2 e do seu conjugado, $\bar{z}_2$, são vértices consecutivos de um polígono regular. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um certo número complexo w .

Determine w na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.

Comece por calcular n .

- 8** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = \text{cis } \theta$, em que θ é um número real

pertencente ao intervalo $\left] \frac{3\pi}{4}, \pi \right]$.

Seja $w = z^2 - 2$.

A que quadrante do plano complexo pertence a imagem geométrica de w ?

- (A) Primeiro quadrante
(B) Segundo quadrante
(C) Terceiro quadrante
(D) Quarto quadrante

- 9** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

9.1. Determine o valor de $\frac{i^6 + 2i^7}{2 - i}$.

Apresente o resultado na forma algébrica.

9.2. Mostre que o número $2 \text{cis} \left(\frac{\pi}{10} \right)$ é

solução da equação $z^6 \times \bar{z} = 128i$.

- 10** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = (-2 + i)^3$ e $z_2 = \frac{1 + 28i}{2 + i}$.

10.1. Resolva a equação $z^3 + z_1 = z_2$, sem recorrer à calculadora.

Apresente as soluções da equação na forma trigonométrica.

10.2. Seja w um número complexo não nulo. Mostre que, se w e $\frac{1}{w}$ são raízes de índice n de um mesmo número complexo z , então $z = 1$ ou $z = -1$.

- 11** Seja k um número real e sejam $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 3 - ki$ dois números complexos. Qual é o valor de k para o qual $z_1 \times \bar{z}_2$ é um imaginário puro?

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) 1 (D) 6

- 12** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

12.1. Seja n um número natural.

Determine $\frac{\sqrt{3} \times i^{4n-6} + 2 \text{cis} \left(-\frac{\pi}{6} \right)}{2 \text{cis} \left(\frac{\pi}{5} \right)}$, sem

recorrer à calculadora. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

12.2. Seja $\alpha \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$.

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos tais

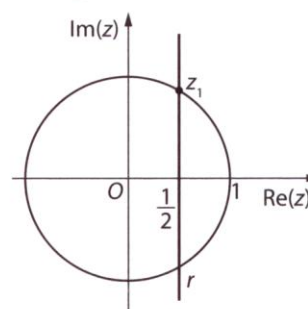
que $z_1 = \text{cis } \alpha$ e $z_2 = \text{cis} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)$.

Mostre, analiticamente, que a imagem geométrica de $z_1 + z_2$, no plano complexo, pertence ao 2.º quadrante.

- 13** Sejam k e p dois números reais tais que os números complexos $z = 1 + i$ e $w = (k - 1) + 2pi^{11}$ sejam inversos um do outro. Qual é o valor de $k + p$?

- (A) $-\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{7}{4}$

- 14** Na figura estão representadas, no plano complexo, uma circunferência, de centro na origem e de raio 1, e uma reta r , definida por $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}$.



Seja z_1 o número complexo cuja imagem geométrica está no 1.º quadrante e é o ponto de interseção da circunferência com a reta r . Qual das opções seguintes apresenta uma equação de que z_1 é solução?

- (A) $|z - 1| = |z - i|$
(B) $\text{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
(C) $\left| z - \frac{1}{2} \right| = 1$
(D) $|1 - z| = \sqrt{2}$

- 15** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

15.1. Considere o número complexo $z = 8\sqrt{3} - 8i$.

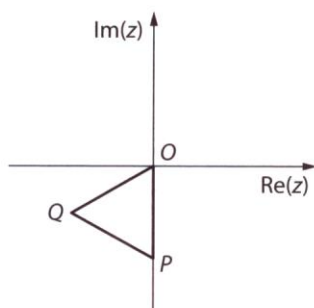
Determine as raízes de índice 4 de z .

Apresente as raízes na forma trigonométrica.

15.2. Seja w um número complexo não nulo.

Mostre que se o conjugado de w é igual a metade do inverso de w , então a imagem geométrica de w pertence à circunferência de centro na origem e de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- 16** Na figura está representado, no plano complexo, o triângulo equilátero $[OPQ]$ de altura $\sqrt{3}$.



Tal como a figura sugere, o vértice O coincide com a origem do referencial, o vértice P pertence ao eixo imaginário e o vértice Q pertence ao 3.º quadrante.

Seja z o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto Q .

Qual é a representação trigonométrica do número complexo z ?

- (A) $3 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}$
 (B) $3 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$
 (C) $2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}$
 (D) $2 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$

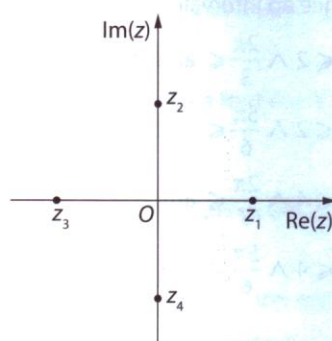
- 17** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Para um certo número inteiro k , a expressão

$$\frac{(\sqrt{2}i)^3 \times \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}}{k+i} \text{ designa um número real.}$$

Determine esse número k .

- 18** Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 .



Qual é o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2}$?

- (A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4

- 19** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 5i \quad \text{e} \quad z_3 = \operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{40}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

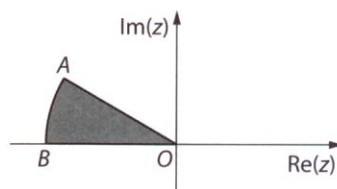
19.1. O complexo z_1 é raiz do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$.

Determine, em $\mathbb{C}$, as restantes raízes do polinómio.

Apresente as raízes obtidas na forma trigonométrica.

19.2. Determine o menor valor de n natural para o qual a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$, no plano complexo, está no terceiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

- 20** Na figura está representado, no plano complexo, a sombreado, um setor circular.



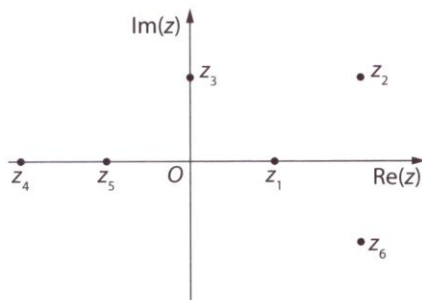
Sabê-se que:

- o ponto A é a imagem geométrica do número complexo $-\sqrt{3} + i$;
- o ponto B tem abcissa negativa, ordenada nula, e pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a OA .

Qual das condições seguintes define, em $\mathbb{C}$, a região a sombreado, incluindo a fronteira?
(Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$.)

- (A) $|z| \leq 2 \wedge \frac{2\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \pi$
 (B) $|z| \leq 2 \wedge \frac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$
 (C) $|z| \leq 4 \wedge \frac{2\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \pi$
 (D) $|z| \leq 4 \wedge \frac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$

- 21** Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de seis números complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6 .



Qual é o número complexo que pode ser igual a $(z_2 + z_4) \times i$?

- (A) z_1 (B) z_3 (C) z_5 (D) z_6

- 22** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Resolva os dois itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

22.1. Considere $z_1 = 1 + 2i$ e $w = \frac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

com $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

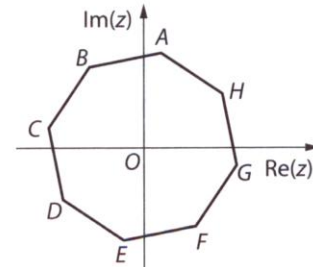
Determine o valor de b para o qual w é um número real.

22.2. Seja z um número complexo tal que $|z| = 1$.

Mostre que $|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = 4$.

- 23** Sejam k e p dois números reais e sejam $z_1 = (3k + 2) + pi$ e $z_2 = (3p - 4) + (2 - 5k)i$ dois números complexos. Quais são os valores de k e de p para os quais z_1 é igual ao conjugado de z_2 ?
- (A) $k = -1$ e $p = 3$
 (B) $k = 1$ e $p = 3$
 (C) $k = 0$ e $p = -2$
 (D) $k = 1$ e $p = -3$

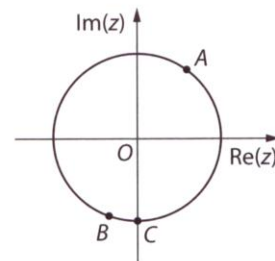
- 24** Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo w . No plano complexo, a imagem geométrica de w é o vértice A do octógono $[ABCDEFGH]$, representado na figura. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice 8 de um certo número complexo.



Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice C do octógono $[ABCDEFGH]$?

- (A) $-w$ (B) $w + 1$
 (C) $i \times w$ (D) $i^3 \times w$

- 25** Na figura, está representada, no plano complexo, uma circunferência de centro na origem O do referencial.



O ponto A é a imagem geométrica do número complexo $3 + 4i$.

O ponto C pertence ao eixo imaginário.

O arco BC tem $\frac{\pi}{9}$ radianos de amplitude.

Qual é o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto B ?

- (A) $5 \operatorname{cis} \frac{10\pi}{9}$ (B) $5 \operatorname{cis} \frac{25\pi}{18}$
 (C) $7 \operatorname{cis} \frac{10\pi}{9}$ (D) $7 \operatorname{cis} \frac{25\pi}{18}$

- 26** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Considere a equação $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$. Esta equação tem três soluções em $\mathbb{C}$, sendo uma delas o número real 1. As imagens geométricas, no plano complexo, dessas três soluções são vértices de um triângulo. Determine o perímetro desse triângulo. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

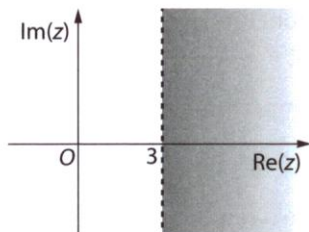
- 27** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos,

considere $z = 3 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8} - \theta\right)$, com $\theta \in \mathbb{R}$.

Para qual dos valores seguintes de θ podemos afirmar que z é um número imaginário puro?

- (A) $-\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{8}$ (D) $\frac{5\pi}{8}$

- 28** Na figura está representada, no plano complexo, a sombreado, parte do semiplano definido pela condição $\operatorname{Re}(z) > 3$.



Qual dos números complexos seguintes tem a sua imagem geométrica na região representada a sombreado?

- (A) $\sqrt{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (B) $3\sqrt{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$
(C) $\sqrt{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (D) $3\sqrt{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

- 29** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos,

considere $z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)$ e $z_2 = 2 + i$.

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

29.1. Determine o número complexo:

$$w = \frac{3 - i \times (z_1)^7}{\bar{z}_2}$$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

29.2. Mostre que:

$$|z_1 + z_2|^2 = 6 + 4 \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

- 30** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos,

considere $z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3$.

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

30.1. Determine o número complexo:

$$w = \frac{z_1^4 + 4i}{i}$$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

30.2. Escreva uma condição, em $\mathbb{C}$, que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_2 e que passa na imagem geométrica de z_1 .

- 31** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Determine $\frac{(1 + 2i)(3 + i) - i^6 + i^7}{3i}$, sem recorrer à calculadora.

Apresente o resultado na forma $x + yi$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

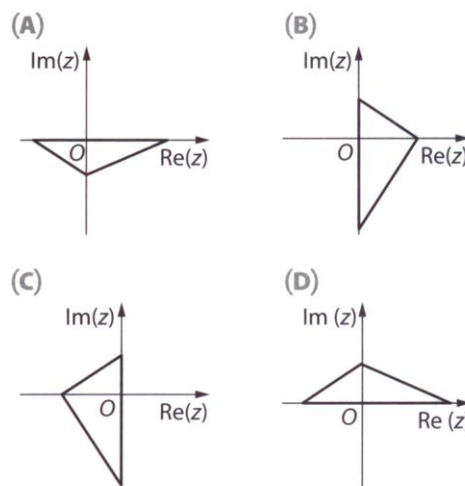
- 32** Seja z um número complexo, em que um dos argumentos é $\frac{\pi}{3}$.

Qual dos valores seguintes é um argumento de $\frac{2i}{z}$, sendo $\bar{z}$ o conjugado de z ?

- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{2}{3}\pi$ (C) $\frac{5}{6}\pi$ (D) $\frac{7}{6}\pi$

- 33** Seja b um número real positivo e $z_1 = bi$ um número complexo.

Em qual dos triângulos seguintes os vértices podem ser as imagens geométricas dos números complexos z_1 , $(z_1)^2$ e $(z_1)^3$?



- 34** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \frac{i}{1-i} - i^{18}$ e $z_2 = \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

34.1. Determine z_1 na forma trigonométrica sem recorrer à calculadora.

34.2. Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, tal que $(-iz_2)^n = -1$.

- 35** Seja k um número real e $z_1 = (k - i)(3 - 2i)$ um número complexo.

Qual é o valor de k , para que z_1 seja um número imaginário puro?

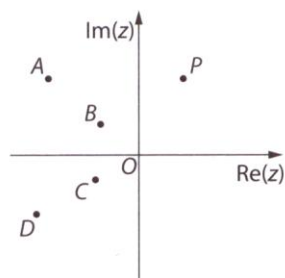
- (A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$

- 36** No conjunto dos números complexos, seja:

$$z = \frac{\left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{7}\right)^7 + (2+i)^3}{4 \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{2}\right)}$$

Determine z na forma algébrica sem recorrer à calculadora.

- 37** Para um certo número real positivo ρ e para um certo número real α compreendido entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, o número complexo $\rho \operatorname{cis} \alpha$ tem por imagem geométrica o ponto P , representado na figura.



Qual é a imagem geométrica do número complexo $\frac{\rho}{2} \operatorname{cis}(2\alpha)$?

- (A) O ponto A (B) O ponto B
(C) O ponto C (D) O ponto D

- 38** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ e $z_2 = 8 \operatorname{cis} 0$.

38.1. Mostre, sem recorrer à calculadora, que $(-z_1)$ é uma raiz cúbica de z_2 .

38.2. No plano complexo, sejam A e B as imagens geométricas de z_1 e de $z_3 = z_1 i^{46}$, respetivamente.

Determine o comprimento do segmento $[AB]$.

- 39** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - i$.

39.1. Sem recorrer à calculadora, determine o valor de $\frac{2z_1 - i^{18} - 3}{1 - 2i}$.

Apresente o resultado na forma algébrica.

39.2. Considere z_1 uma das raízes quartas de um certo número complexo z .

Determine uma outra raiz quarta de z , cuja imagem geométrica é um ponto pertencente ao 3.º quadrante. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

Soluções

- | | | | |
|---|------------------------|---|--|
| 1.1. -1 | 1.2. $-\frac{3\pi}{2}$ | 21. (C) | |
| 2. (C) | 3. (A) | 22.1. $b=3$ | |
| 4.1. $n=6$ | | 23. (B) | |
| 5. (D) | 6. (C) | 24. (C) | |
| 7.1. $\frac{11\pi}{6}$ | 7.2. $n=12; w=-64$ | 25. (B) | |
| 8. (C) | | 26. $4+2\sqrt{5}$ | |
| 9.1. $-i$ | | 27. (D) | |
| 10.1. $\left\{2 \operatorname{cis} 0, 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}, 2 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}\right\}$ | | 28. (B) | |
| 11. (D) | | 29.1. $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ | |
| 12.1. $\frac{1}{2} \operatorname{cis} \frac{13\pi}{10}$ | | 30.1. $4\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ | 30.2. $ z-3 =\sqrt{5}$ |
| 13. (D) | 14. (B) | 31. $2-\frac{2}{3}i$ | |
| 15.1. $\left\{2 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{24}, 2 \operatorname{cis} \frac{23\pi}{24}, 2 \operatorname{cis} \frac{35\pi}{24}, 2 \operatorname{cis} \frac{47\pi}{24}\right\}$ | | 32. (C) | |
| 16. (C) | | 33. (C) | |
| 17. $k=-1$ | | 34.1. $\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ | 34.2. $n=3$ |
| 18. (B) | | 35. (C) | |
| 19.1. $\left\{4 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}, 4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}\right\}$ | | 36. $-\frac{11}{4}+\frac{1}{4}i$ | |
| 19.2. 30 | | 37. (B) | |
| 20. (B) | | 38.2. 4 | |
| | | 39.1. $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$ | 39.2. $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}$ |

Preparação para o

Exame Final Nacional

10.º e 11.º anos

Português

Matemática A

História A

11.º ano

Filosofia

Geografia A

Matemática B

MACS

Biologia e Geologia

Física e Química A

Geometria Descritiva A

Economia A

História da Cultura

e das Artes

12.º ano

Português

Matemática A

História A

Matemática A

12.º ano

Esta coleção foi especialmente desenvolvida para os alunos dos 10.º, 11.º e 12.º anos de escolaridade que se encontram em fase de preparação para os Exames Finais Nacionais.

Dirigida e produzida por uma equipa especializada de professores, a sua regular atualização faz desta coleção o instrumento ideal para o sucesso escolar de qualquer aluno.

Um livro funcional

- I Toda a **teoria** de Matemática A do Ensino Secundário, estruturada em unidades organizadas por resumos teóricos, sínteses e **questões tipo exame**, resolvidas e propostas, que mobilizam e integram matérias que os alunos já estudaram.
- I **Provas-modelo** e as **Provas oficiais de 2015** com sugestão de resolução.

Uma preparação orientada

Este livro inclui um **anexo destacável** com *Questões de Exame Essenciais*, criteriosamente selecionadas e organizadas, que focaliza os alunos nos exercícios mais representativos, esclarecendo dúvidas e orientando-os para os conteúdos a rever.

Um estudo autónomo

Resoluções detalhadas de todas as questões propostas e ainda **mais provas oficiais** resolvidas em www.escolavirtual.pt

 Porto
Editora

ISBN 978-972-0-46909-0



46909.10