



MAT 12

CADERNO DE APOIO AO PROFESSOR

12.º ANO Matemática A

Cristina Viegas • Sérgio Valente

Documentos orientadores

Planificações

Guia de exploração de recursos multimédia

Materiais disponibilizados através de QR Codes

Testes de avaliação

Questões de aula

Banco de questões

Introdução	2
Documentos orientadores	3
Programa e Metas Curriculares – Matemática A	3
Conteúdos	3
Níveis de desempenho	7
Indicações metodológicas	8
Avaliação	9
Metas Curriculares Secundário	10
Orientações de gestão curricular	71
Planificações	73
Planificação semanal do 1.º período	74
Planificação semanal do 2.º período	79
Planificação semanal do 3.º período	82
Guia de exploração de recursos multimédia	86
Materiais disponibilizados através de QR Codes	93
Testes de avaliação	177
Teste de avaliação 1	177
Teste de avaliação 2	180
Teste de avaliação 3	183
Teste de avaliação 4	186
Teste de avaliação 5	189
Teste de avaliação 6	192
Respostas dos testes de avaliação	195
Questões de aula	212
Respostas das questões de aula	233
Banco de questões	248

No ano letivo 2015/2016 entrou em vigor o novo Programa de Matemática A para o 10.º ano de escolaridade, e as respetivas Metas Curriculares. Tratando-se de documentos orientadores fundamentais para o planeamento da atividade letiva do 12.º ano, transcrevem-se neste Caderno de Apoio ao Professor as **Metas Curriculares** para o Secundário.

Considerando o número de aulas previstas no Programa para cada tema, apresenta-se uma **planificação semanal** para cada período letivo.

O projeto MVT 12 apresenta, complementarmente ao Manual e ao Caderno de Exercícios, um Simulador de Exames e um conjunto de recursos multimédia. O **Simulador de Exames** estará disponível para todos os alunos em www.mat12.te.pt. Apresenta-se neste Caderno de Apoio ao Professor um **guia com sugestões de exploração** para os **recursos multimédia** que estarão disponíveis em **20 AULA DIGITAL**. Destacam-se, entre estes, as resoluções animadas de exercícios com grau de dificuldade diversificado.

Para facilitar ao professor a gestão do tempo, nomeadamente agilizando a correção de exercícios em sala de aula, o projeto MVT 12 disponibiliza ao professor, em setembro de 2017, as seguintes propostas de resolução:

- propostas de resolução de todos os exercícios e das propostas «Será que...?» do Manual;
- propostas de resolução de todos os exercícios do Caderno de Exercícios.

Todas estas propostas estarão disponíveis, em formato projetável, em **20 AULA DIGITAL**.

Para apoiar o professor no trabalho de avaliação, o projeto MVT 12 disponibiliza seis testes, duas provas-modelo de exame (que serão fornecidas assim que o IAVE publicar a informação-prova para o ano letivo 2017/2018) e 20 questões de aula pensadas para uma duração aproximada de 30 minutos. Todas estas propostas estarão disponíveis, em formato editável, em **20 AULA DIGITAL**.

Disponibiliza-se ainda ao professor um banco de questões, ferramenta útil para construir as suas próprias fichas e testes. Este banco de questões estará disponível, em formato editável, em **20 AULA DIGITAL**.

Nas páginas 3 a 70 apresentam-se transcrições do *Programa e Metas Curriculares de Matemática A – Ensino Secundário*, de janeiro de 2014. A versão completa do documento pode ser consultada no sítio da Direção Geral da Educação.

Conteúdos de 12.º ano

Domínio	Conteúdos
CC12 18 aulas	Propriedades das operações sobre conjuntos - Propriedades comutativa, associativa, de existência de elemento neutro e elemento absorvente e da idempotência da união e da interseção e propriedades distributivas da união em relação à interseção e da interseção em relação à união; - Distributividade do produto cartesiano relativamente à união. Introdução ao cálculo combinatório - Conjuntos equipotentes e cardinais; cardinal da união de conjuntos disjuntos; - Cardinal do produto cartesiano de conjuntos finitos; - Arranjos com repetição; - Número de subconjuntos de um conjunto de cardinal finito; - Permutações; fatorial de um número inteiro não negativo; - Arranjos sem repetição; - Número de subconjuntos de p elementos de um conjunto de cardinal n; combinações; - Resolução de problemas envolvendo cardinais de conjuntos, contagens, arranjos e combinações. Triângulo de Pascal e Binómio de Newton - Fórmula do binómio de Newton; - Triângulo de Pascal: definição e construção; - Resolução de problemas envolvendo o triângulo de Pascal e o binómio de Newton.
PRB12 20 aulas	Espaços de probabilidade - Probabilidade no conjunto das partes de um espaço amostral finito; espaço de probabilidades; - Acontecimento impossível, certo, elementar e composto; acontecimentos incompatíveis, acontecimentos contrários, acontecimentos equiprováveis e regra de Laplace; - Propriedades das probabilidades: probabilidade do acontecimento contrário, probabilidade da diferença e da união de acontecimentos; monotonia da probabilidade; - Resolução de problemas envolvendo a determinação de probabilidades em situações de equiprobabilidade de acontecimentos elementares; - Resolução de problemas envolvendo espaços de probabilidade e o estudo de propriedades da função de probabilidade. Probabilidade condicionada - Probabilidade condicionada; - Acontecimentos independentes; - Teorema da probabilidade total; - Resolução de problemas envolvendo probabilidade condicionada, acontecimentos independentes e o Teorema da probabilidade total.

FRVR12 34 aulas	Limites e Continuidade - Teoremas de comparação para sucessões e teorema das sucessões enquadadas; - Teoremas de comparação envolvendo desigualdades entre funções e os respetivos limites; - Teorema das funções enquadadas; - Utilização dos teoremas de comparação e do teorema das funções enquadadas para determinar limites de funções reais de variável real; - Teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy); - Teorema de Weierstrass; - Resolução de problemas envolvendo os teoremas de comparação para o cálculo de limites de sucessões e de funções e a continuidade de funções. Derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão - Derivada de segunda ordem de uma função; - Sinal da derivada de segunda ordem num ponto crítico e identificação de extremos locais; - Pontos de inflexão e concavidades do gráfico de funções duas vezes diferenciáveis; - Interpretação cinemática da derivada de segunda ordem de uma função posição: aceleração média e aceleração; unidades de medida de aceleração; - Estudo e traçados de gráficos de funções diferenciáveis; - Resolução de problemas envolvendo propriedades de funções diferenciáveis. Aplicação do cálculo diferencial à resolução de problemas - Resolução de problemas de otimização envolvendo funções diferenciáveis; - Resolução de problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas, acelerações médias e acelerações instantâneas e mudanças de unidades de aceleração; - Resolução de problemas envolvendo a resolução aproximada de equações da forma $f(x) = g(x)$ utilizando uma calculadora gráfica.
TRI12 26 aulas	Diferenciação de funções trigonométricas - Fórmulas trigonométricas da soma, da diferença e da duplicação; - Limite notável $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$; - Diferenciabilidade das funções seno, cosseno e tangente; - Resolução de problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções trigonométricas. Aplicações aos osciladores harmónicos - Osciladores harmónicos: amplitude, pulsação, período, frequência e fase; - Estudo das funções definidas analiticamente por $a \sin(bx + c) + d$, $a \cos(bx + c) + d$, $a \operatorname{tg}(bx + c) + d$, ($a \neq 0$); - Os osciladores harmónicos como soluções de equações diferenciais da forma $f'' = -\omega^2 f$; relação com a segunda lei de Newton e com a lei de Hooke; - Resolução de problemas envolvendo osciladores harmónicos.

FEL12	Juros compostos e Número de Neper - Cálculo de juros compostos; - Resolução de problemas envolvendo juros compostos. - Sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e relação com juros compostos; capitalização contínua de juros e definição do número de Neper. Funções exponenciais - Propriedades da função definida nos números racionais pela expressão $f(x) = a^x$, ($a > 0$): monotonia, continuidade, limites e propriedades algébricas; - Extensão ao caso real: definição das funções exponenciais de base a e respectivas propriedades; - Função exponencial e^x e relação com o limite da sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$; - Limite notável $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ e derivada da função exponencial. Funções logarítmicas - Função logarítmica de base $a \neq 1$ enquanto bijeção recíproca da função exponencial de base a; logaritmo decimal e logaritmo neperiano; - Monotonia, sinal, limites e propriedades algébricas dos logaritmos; - Derivadas das funções logarítmicas e da função a^x, $a > 0$; - Derivada da função x^α, α real, $x > 0$. Limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas - Limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$. - Resolução de problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas, as respectivas propriedades algébricas e limites notáveis. Modelos exponenciais - A equação $f' = kf$, $k \in \mathbb{R}$, enquanto modelo para o comportamento da medida de grandezas cuja taxa de variação é aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente num dado instante (evolução de uma população, da temperatura de um sistema ou do decaimento de uma substância radioativa); - Soluções da equação $f' = kf$, $k \in \mathbb{R}$; - Resolução de problemas de aplicação, envolvendo a equação $f' = kf$, $k \in \mathbb{R}$.
PCI12	Primitivas - Primitiva de uma função num intervalo; família das primitivas de uma dada função num intervalo; - Primitivas de funções de referência: 1, x^α ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}\}$), $\frac{1}{x}$, e^x, $\sin x$ e $\cos x$; - Linearidade da primitivação; - Primitivas de funções da forma $u'(x)f(u(x))$. Cálculo Integral - Definição intuitiva da noção de integral de funções contínuas não negativas ou não positivas num intervalo limitado e fechado; extensão a funções contínuas que alternam de sinal um número finito de vezes; - Origem histórica do símbolo de integral;

	- Teorema fundamental do cálculo integral e Fórmula de Barrow; - Linearidade e monotonia do integral definido; aditividade do integral em relação ao domínio. Resolução de problemas - Resolução de problemas envolvendo o cálculo de medidas de área de regiões do plano; - Resolução de problemas envolvendo a primitivação e a integração de funções contínuas; - Resolução de problemas envolvendo funções posição, velocidade e aceleração e a primitivação e integração de funções.
NC12 26 aulas	Introdução aos números complexos - A fórmula de Cardano e a origem histórica dos números complexos; - Motivação da definição dos números complexos e das operações de soma e produto de números complexos; - Propriedades das operações $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ definidas em $\mathbb{R}^2$: associatividade, comutatividade, distributividade de $\times$ relativamente a $+$ e respectivos elementos neutros; definição do corpo dos números complexos $\mathbb{C}$, enquanto $\mathbb{R}^2$ munido destas operações; - $\mathbb{R}$ enquanto subconjunto de $\mathbb{C}$; a unidade imaginária $i = (0, 1)$; - Representação dos números complexos na forma $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Parte real e parte imaginária dos números complexos; o plano complexo e os eixos real e imaginário; ponto afixo de um número complexo. Complexo conjugado e módulo dos números complexos - Conjugado de um número complexo; propriedades algébricas e geométricas; expressão da parte real e da parte imaginária de um número complexo z em função de z e $\bar{z}$; - Módulo de um número complexo; propriedades algébricas e geométricas. Quociente de números complexos - Inverso de um número complexo não nulo e quociente de números complexos. Exponencial complexa e forma trigonométrica dos números complexos - Complexos de módulo 1; a exponencial complexa $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, e respectivas propriedades algébricas e geométricas; argumento de um número complexo e representação trigonométrica dos números complexos; - Fórmulas de De Moivre. Raízes n-ésimas de números complexos - Soluções das equações da forma $z^n = w$, $n \in \mathbb{N}$ e $w \in \mathbb{C}$; raízes em $\mathbb{C}$ de polinómios do segundo grau de coeficientes reais. Resolução de problemas - Resolução de problemas envolvendo propriedades algébricas e geométricas dos números complexos, a respetiva forma trigonométrica, raízes n-ésimas de números complexos e as fórmulas de De Moivre.

Níveis de desempenho

Os descritores especificados na tabela seguinte, que dizem respeito a propriedades que os alunos devem reconhecer, a procedimentos que devem efetuar ou a problemas que devem resolver, foram assinalados, nas Metas Curriculares, com o símbolo «+». Para estes descritores especificaram-se, no Caderno de Apoio, diferentes níveis de desempenho, materializados em exemplos de complexidade variada que poderão ser propostos aos alunos. Os exemplos que no Caderno de Apoio se encontram assinalados com um ou dois asteriscos correspondem a desempenhos progressivamente mais avançados que não serão exigíveis à totalidade dos alunos, estando os restantes associados a um desempenho considerado regular. Pretende-se assim estabelecer, para estes descritores, um referencial que permita ao professor apreender o grau de exigência requerido.

Ano de escolaridade	Descritores
10.º ano	LTC10 1.16, 2.19, 3.1, 3.2. ALG10 1.1, 1.2, 1.11, 2.1, 2.2, 2.4, 2.5, 3.1, 4.2, 4.5, 4.11, 5.1, 5.2, 5.3. GA10 1.2, 1.4, 1.10, 1.11, 2.1, 3.5, 3.6, 4.1, 6.1, 6.2, 6.3, 7.5, 7.6, 10.1, 11.1, 11.2. FRVR10 1.11, 2.6, 2.7, 2.8, 2.10, 4.8, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4. EST10 3.2, 3.3, 5.1, 5.2.
11.º ano	TRI11 1.6, 8.1, 9.1, 9.2, 9.3, 9.4. GA11 4.1, 4.2, 4.3, 4.4. SUC11 3.3, 5.2, 5.3, 6.3, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4. FRVR11 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 7.13, 9.1, 9.2, 9.3. EST11 1.3, 2.1, 2.2, 2.3.
12.º ano	CC12 2.4, 2.5, 2.8, 2.10, 3.3, 3.4, 4.1, 4.2, 4.3. PRB12 3.1, 3.2, 3.3. FRVR12 3.1, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5. TRI12 1.1, 1.2, 2.1, 4.1, 4.2. FEL12 4.3, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4. PCI12 1.7, 3.1, 3.2, 3.3. NC12 1.3, 4.3, 5.1, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6.

Por outro lado, alguns descritores (LTC10 2.9; ALG10 1.4; GA10 1.9, 8.3; TRI11 1.4; GA11 2.8, 2.9, 3.8; SUC11 6.8, 6.29, 6.30; FRVR11 7.8, 7.11; CC12 2.3; FRVR12 4.3, 4.4; FEL12 1.4, 2.1, 2.2, 2.3, 3.11, 4.1), relativos a propriedades que os alunos devem provar, encontram-se igualmente assinalados, nas Metas Curriculares, com o símbolo «+». Entende-se, neste caso, que embora todos os alunos devam conhecer o resultado em causa e saber aplicá-lo, a elaboração da respetiva demonstração é facultativa, não sendo portanto exigível aos alunos. Finalmente, nos domínios LTC10, ALG10, SUC11, FRVR11, FRVR12, CC12, PRB12 e FEL12 encontram-se assinalados com o símbolo «#» alguns descritores relativos a conjuntos de demonstrações muito semelhantes entre si, ficando ao critério do professor quais devem ser tratadas como exemplo.

Indicações metodológicas

Tendo em consideração, tal como para os níveis de desempenho, as circunstâncias de ensino (e, de modo muito particular, as características das turmas e dos alunos), as escolas e os professores devem decidir quais as metodologias e os recursos mais adequados para auxiliar os seus alunos a alcançar os desempenhos definidos nas Metas Curriculares.

A experiência acumulada das escolas e dos professores constitui um elemento fundamental no sucesso de qualquer projeto educativo, não se pretendendo, por isso, espartilhar e diminuir a sua liberdade pedagógica nem condicionar a sua prática letiva. Pelo contrário, o presente Programa reconhece e valoriza a autonomia das escolas e dos professores, não impondo portanto metodologias específicas.

Sem constituir ingerência no seu trabalho, nota-se, contudo, que a aprendizagem matemática é estruturada em patamares de crescente complexidade, pelo que na prática letiva deverá ter-se em atenção a progressão dos alunos, sendo muito importante proceder-se a revisões frequentes de conteúdos já lecionados com vista à sua consolidação, incluindo alguns já conhecidos do Ensino Básico.

Utilização da tecnologia

As salas de aulas estão, em geral, dotadas de determinados equipamentos que podem constituir uma mais-valia para a prática letiva. A tecnologia no Ensino Secundário deve, portanto, ser aproveitada para ajudar os alunos a compreender certos conteúdos e relações matemáticas e para o exercício de certos procedimentos; essa utilização deve, no entanto, ser criteriosa, já que, caso contrário, pode condicionar e comprometer gravemente a aprendizagem e a avaliação.

Os professores e os alunos têm ao seu dispor, por exemplo, um vasto conjunto de recursos que facilitam o cálculo, as representações geométricas e a representação gráfica de funções, mas importa que os alunos adquiram capacidade crítica para reconhecer as situações em que a tecnologia não permite só por si justificar a adequação dos resultados encontradas ao problema proposto ou ilustrar devidamente os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos.

A utilização da tecnologia não pode, pois, substituir a compreensão conceptual, a proficiência no cálculo e a capacidade de resolver problemas. Assim, os alunos devem dominar procedimentos como operar com polinómios, efetuar representações de gráficos de funções, resolver equações, calcular limites e derivadas sem necessitarem de utilizar recursos tecnológicos (calculadoras, computadores, etc.) que substituam algumas das capacidades matemáticas inerentes a esses procedimentos. Apenas a memorização e a compreensão cumulativa de conceitos, técnicas e relações matemáticas permitem alcançar conhecimentos progressivamente mais complexos e resolver problemas progressivamente mais exigentes.

Em particular o professor deve alertar os alunos para as limitações das calculadoras e computadores, sublinhando sempre a importância de relacionar quer as representações gráficas observadas, quer os valores encontrados, com o conhecimento teórico que permite atribuir o devido significado a essas representações e valores. É um erro grave, por exemplo, pensar que a simples consideração de resultados obtidos através de uma calculadora permite verificar se um número é irracional (já que esta apenas apresenta uma aproximação de um dado número como dízima finita até determinada ordem), concluir que uma função definida numa infinidade de pontos é monótona (teria de calcular-se o valor da função em cada ponto do respetivo domínio, e não apenas num subconjunto finito do mesmo, que é o que na realidade qualquer calculadora faz, aliás em geral apenas com determinado grau de aproximação), se uma sucessão é convergente, ou, de maneira geral, deduzir qualquer propriedade do gráfico de uma função que necessite do conhecimento dos valores da função numa infinidade de

pontos do domínio (continuidade, diferenciabilidade, limites, assíntotas, resultados positivos de concavidade e monotonia, extremos, etc.). No entanto, o conhecimento prévio de propriedades analíticas de uma função ou funções pode, em muitos casos, permitir uma utilização adequada das potencialidades da calculadora para visualizar partes particularmente interessantes dos respetivos gráficos, obter valores aproximados de soluções de equações, de extremos e pontos de extremo, etc. As propriedades que, em cada caso, será necessário estabelecer antes de se poderem extrair conclusões justificadas a partir do que se observa na calculadora ou computador dependem, evidentemente, da questão que se pretende resolver, podendo mesmo resumir-se, em certos casos, à simples continuidade; apenas em casos em que o conhecimento de um número finito de pontos do gráfico permite extrair alguma conclusão segura (situações de inexistência de monotonia ou de sentido determinado de concavidade em determinado intervalo, por exemplo) é possível praticamente prescindir de um conhecimento prévio de alguma propriedade analítica da função em estudo.

Como é evidente, a calculadora gráfica pode sempre ser utilizada para ilustrar propriedades de gráficos de funções adequadamente escolhidas pelo professor, ou para que o aluno teste o resultado de variações de parâmetros em classes de funções de que já tenha algum conhecimento teórico e, de maneira geral, para uma abordagem experimental ao estudo de funções, desde que devidamente controlada e acompanhada de uma análise crítica da validade de conjeturas que essas experiências possam induzir.

Neste sentido, considera-se que no Ensino Secundário a tecnologia, e mais especificamente a calculadora gráfica, deve ser utilizada em sala de aula e consequentemente em certos instrumentos de avaliação (na resolução de problemas requerendo cálculos de valores aproximados de soluções de determinado tipo de equações ou de funções envolvendo, por exemplo, razões trigonométricas, logaritmos, ou exponenciais) mas que se deve evitar a sua utilização em outras provas de avaliação em que os conteúdos e capacidades envolvidas claramente o não justifiquem ou mesmo o desaconselhem.

Avaliação

O Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho, alterado pelo Decreto-Lei n.º 91/2013 de 10 de julho, estabelece os princípios orientadores da organização, da gestão e do desenvolvimento dos currículos do Ensino Básico e do Ensino Secundário, bem como da avaliação dos conhecimentos adquiridos e das capacidades desenvolvidas pelos alunos do Ensino Básico ministradas em estabelecimentos escolares públicos, particulares e cooperativos.

Os conhecimentos a adquirir e as capacidades a desenvolver pelos alunos do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática A, têm como referência o programa dessa disciplina e as respetivas Metas Curriculares definidas por ano de escolaridade. É este documento que permitirá cumprir a função de regulação do percurso de aprendizagem que a avaliação do desempenho dos alunos deverá assumir.

Os resultados dos processos avaliativos (de carácter nacional, de escola, de turma e de aluno) devem contribuir para a orientação científico-pedagógica do ensino, para que se possam superar, em tempo útil e de modo apropriado, dificuldades de aprendizagem identificadas e, simultaneamente, reforçar os progressos verificados. Todos estes propósitos devem ser concretizados recorrendo a uma avaliação diversificada e frequente, contribuindo para que os alunos adquiram uma maior consciência do seu nível de conhecimentos e valorizem a avaliação como um processo promotor de melhores desempenhos.

A classificação resultante da avaliação interna no final de cada período, guiada pelos critérios de avaliação da disciplina de Matemática A definidos em cada agrupamento de escolas/escola não agrupada, deverá traduzir com fidelidade o nível de desempenho do aluno no que se refere ao cumprimento do programa e das respetivas metas curriculares.

Metas Curriculares para o Ensino Secundário – Matemática A

O presente documento descreve o conjunto das metas curriculares da disciplina de Matemática A que os alunos devem atingir durante o Ensino Secundário. Os objetivos gerais, completados por descritores mais precisos, encontram-se organizados em cada ano de escolaridade, por domínios e subdomínios, segundo a seguinte estrutura:

Domínio

Subdomínio

1. *Objetivo geral*

1. Descritor
2. Descritor

.....

Os diferentes descritores estão redigidos de forma objetiva, numa linguagem rigorosa destinada ao professor, devendo este selecionar uma estratégia de ensino adequada à respetiva concretização, incluindo uma adaptação da linguagem, sempre que seja necessária. O significado preciso de certos verbos com que se iniciam alguns descritores («identificar», «designar», «referir», «representar», «reconhecer», «saber», «provar», «demonstrar», «justificar») encontra-se definido no parágrafo intitulado «Leitura das Metas Curriculares».

A prática letiva obriga, naturalmente, a frequentes revisões de objetivos gerais e descritores correspondentes a anos de escolaridade anteriores. Estes pré-requisitos não se encontram explicitados no texto, devendo o professor identificá-los consoante a necessidade, a pertinência e as características próprias de cada grupo de alunos.

Optou-se por formar uma sequência de objetivos gerais e de descritores, dentro de cada subdomínio, que corresponde a uma progressão de ensino adequada, podendo no entanto optar-se por alternativas coerentes que cumpram os mesmos objetivos e respetivos descritores. De um modo mais geral, as Metas Curriculares não devem ser entendidas como um sumário sequencial dos conteúdos a lecionar, podendo em particular ser proveitoso o tratamento em simultâneo de descritores pertencentes a objetivos gerais ou mesmo a domínios distintos. Existem mesmo circunstâncias em que se torna necessário um tal procedimento; com efeito, a arrumação dos tópicos por domínios temáticos, e simultaneamente respeitando dentro de cada domínio uma determinada progressão, a isso pode levar, dada a própria natureza e interligação dos conteúdos e capacidades matemáticas.

São também disponibilizados aos professores Cadernos de Apoio às presentes metas curriculares (um por ano de escolaridade) contendo, em alguns casos, suportes teóricos aos objetivos e descritores, bem como exemplos de concretização de alguns deles. Nesses documentos, os níveis de desempenho esperados foram objeto de especificação.

Leitura das Metas Curriculares

«Identificar»/«Designar»/«Referir»/ O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.

«Reconhecer»: O aluno deve apresentar uma argumentação coerente, ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.

«Saber»: O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.

«Provar»/«Demonstrar»: O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.

«Justificar»: O aluno deve justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.

Certos descritores encontram-se assinalados com o símbolo «+».

- Relativamente aos que correspondem a propriedades que os alunos devem reconhecer, a procedimentos que devem efetuar ou a problemas que devem resolver, especificaram-se nos Cadernos de Apoio diferentes níveis de desempenho.

- Quanto aos relativos a propriedades que os alunos devem provar, entende-se que, embora todos devam conhecer o resultado em causa e saber aplicá-lo, a elaboração da respetiva demonstração é facultativa, não sendo portanto exigível aos alunos.

Por outro lado, certos grupos de descritores de um mesmo objetivo geral, relativos a conjuntos de demonstrações muito semelhantes entre si, encontram-se assinalados com o símbolo «#», ficando ao critério do professor quais devem ser tratadas como exemplo.

Lógica e Teoria dos Conjuntos LTC10

Introdução à Lógica bivalente e à Teoria dos conjuntos

1. Operar com proposições

1. Designar por «proposição» toda a expressão p suscetível de ser «verdadeira» ou «falsa» e designar estes atributos por «valores lógicos».
2. Saber que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa e designar esta propriedade por «Princípio de não contradição».
3. Saber, dadas proposições p e q , que « p é equivalente a q » é uma proposição, designada por «equivalência entre p e q », que é verdadeira se e somente se p e q tiverem o mesmo valor lógico e representá-la também por « $p \Leftrightarrow q$ ».
4. Saber, dada uma proposição p , que «não p » é uma proposição, designada por «negação de p », que é verdadeira se p for falsa e é falsa se p for verdadeira e representá-la também por « $\sim p$ ».
5. Justificar, dada uma proposição p , que $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$, designando esta propriedade por «lei da dupla negação».
6. Saber, dadas proposições p e q , que « p e q » é uma proposição, designada por «conjunção de p e q », que é verdadeira se e somente se p e q forem simultaneamente verdadeiras, e representá-la também por « $p \wedge q$ ».
7. Saber, dadas proposições p e q , que « p ou q » é uma proposição, designada por «disjunção de p e q », que é falsa se e somente se p e q forem simultaneamente falsas, representá-la também por « $p \vee q$ » e justificar que $p \vee \sim p$ é uma proposição verdadeira, designando esta propriedade por «Princípio do terceiro excluído».
8. Saber, dadas proposições p e q , que « p implica q » é uma proposição, designada por «implicação entre p e q », que é falsa se e somente se p for verdadeira e q for falsa, representá-la também por « $p \Rightarrow q$ », designar p por «antecedente» e q por «consequente» da implicação e reconhecer, dada uma proposição r , que se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow r$ então $p \Rightarrow r$.
9. Saber que, por convenção, em qualquer sequência de operações lógicas, a menos de utilização de parênteses, se respeitam as seguintes prioridades: negação; conjunção e disjunção; implicação e equivalência.
10. #Provar, dadas proposições p e q , que a proposição $\sim(p \Rightarrow q)$ é equivalente à proposição $p \wedge \sim q$.
11. #Provar, dadas proposições p e q , que a proposição $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira se e somente se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ forem ambas proposições verdadeiras e designar esta propriedade por «princípio da dupla implicação».
12. #Provar, dada uma proposição p e representando por V (respetivamente F) uma qualquer proposição verdadeira (respetivamente falsa), que $p \wedge V \Leftrightarrow p$, $p \vee V \Leftrightarrow V$, $p \vee F \Leftrightarrow p$ e $p \wedge F \Leftrightarrow F$.
13. #Provar, dadas proposições p e q , que $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ e que $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ e designar estas equivalências por «Primeiras Leis de De Morgan».

14. #Provar, dadas proposições p, q e r , que $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$, $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ e que $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$, bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos « $\wedge$ » e « $\vee$ », e designá-las respetivamente por «associatividade», «comutatividade» e «distributividade».
15. #Provar, dadas duas proposições p e q , que a proposição $p \Rightarrow q$ é equivalente à proposição $\sim q \Rightarrow \sim p$, designar esta última implicação por «implicação contrarrecíproca da implicação $p \Rightarrow q$ ».
16. +Simplificar expressões envolvendo operações com proposições, substituindo-as por proposições equivalentes envolvendo menos símbolos, e determinar o respetivo valor lógico sempre que possível.

2. Relacionar condições e conjuntos

1. Designar por «expressão proposicional» ou por «condição» uma expressão $p(x)$ envolvendo uma variável x tal que, substituindo x por um objeto a , se obtém uma proposição $p(a)$.
2. Saber, dada uma condição $p(x)$, que «qualquer que seja x , $p(x)$ » é uma proposição que é verdadeira quando e apenas quando se obtém uma proposição verdadeira sempre que se substitui x em $p(x)$ por um objeto arbitrário, representá-la por « $\forall x, p(x)$ », e designar o símbolo « $\forall$ » por «quantificador universal».
3. Identificar uma condição $p(x)$ como «universal» se $\forall x, p(x)$ for uma proposição verdadeira e reconhecer que a disjunção de qualquer condição com uma condição universal é uma condição universal.
4. Saber, dada uma condição $p(x)$, que «existe x tal que $p(x)$ » é uma proposição que é verdadeira se e somente se, para pelo menos um objeto a , $p(a)$ for verdadeira, representá-la por « $\exists x: p(x)$ » e designar o símbolo « $\exists$ » por «quantificador existencial».
5. Identificar uma condição $p(x)$ como «possível» se $\exists x: p(x)$ for uma proposição verdadeira, como «impossível» se não for possível e reconhecer que a disjunção de qualquer condição com uma condição possível é uma condição possível e a conjunção de qualquer condição com uma condição impossível é uma condição impossível.
6. Saber, dada uma condição $p(x)$, que a negação da proposição $\forall x, p(x)$ é equivalente à proposição $\exists x: \sim p(x)$, que a negação da proposição $\exists x: p(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, \sim p(x)$, designar estas propriedades por «Segundas Leis de De Morgan», reconhecendo-as informalmente em exemplos, e justificar que a negação de uma condição universal é uma condição impossível e vice-versa.
7. Representar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U , a proposição $\forall x, x \in U \Rightarrow p(x)$ por « $\forall x \in U, p(x)$ », e, no caso de ser verdadeira, designar $p(x)$ por «condição universal em U ».
8. Representar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U , a proposição $\exists x: x \in U \wedge p(x)$ por « $\exists x \in U: p(x)$ », no caso de ser verdadeira designar $p(x)$ por «condição possível em U » e, no caso contrário, por «condição impossível em U ».
9. +Reconhecer, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U , que a negação da proposição $\forall x \in U, p(x)$ é equivalente à proposição $\exists x \in U: \sim p(x)$, que a negação da proposição $\exists x \in U: p(x)$ é equivalente à proposição $\forall x \in U, \sim p(x)$ e designar um elemento $a \in U$ tal que $\sim p(a)$ como um «contraexemplo» para a proposição $\forall x \in U, p(x)$.

10. Representar, dada uma condição $p(x)$, por $\{x : p(x)\}$ um conjunto A tal que $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$, designando a igualdade $A = \{x : p(x)\}$ por «definição em compreensão do conjunto A pela condição $p(x)$ ».
11. Saber, dados conjuntos A e B , que $A = B$ se e somente se $\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$.
12. Designar, dado um objeto a e um conjunto A , a por «elemento de A » quando $a \in A$, dados objetos $a_1, \dots, a_k$ ($k \in \mathbb{N}$), representar por $\{a_1, \dots, a_k\}$ o conjunto A cujos elementos são exatamente $a_1, \dots, a_k$ e designar a igualdade $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ por «definição em extensão do conjunto A de elementos $a_1, \dots, a_k$ ».
13. Identificar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U , o conjunto $\{x : x \in U \wedge p(x)\}$ como «conjunto definido por $p(x)$ em U » (ou «conjunto-solução de $p(x)$ em U ») e representá-lo também por $\{x \in U : p(x)\}$.
14. Identificar, dados conjuntos A e B , o «conjunto união (ou reunião) de A e B » e o «conjunto interseção de A e B » respetivamente como $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ e $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.
15. Identificar, dados conjuntos A e B , A como estando «contido em B » (« $A \subset B$ ») quando $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ e, nesse caso, designar A por «subconjunto de B » ou por «uma parte de B ».
16. Designar, dados conjuntos A e B , por «diferença entre A e B » o conjunto $\{x \in A : x \notin B\}$ e representá-lo por $A \setminus B$ ou simplesmente por $\bar{B}$ quando $B \subset A$ e esta notação não for ambígua, designando-o então por «complementar de B em A ».
17. Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a proposição $\forall x, p(x) \Leftrightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \Rightarrow p(x))$ e designar uma demonstração da segunda proposição por «demonstração por dupla implicação» da primeira.
18. Reconhecer, dados conjuntos A e B , que $A = B$ se e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$, e designar esta propriedade por «princípio da dupla inclusão».
19. +Reconhecer, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a negação da proposição « $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ » é equivalente à proposição « $\exists x: p(x) \wedge \sim q(x)$ », isto é, que essa proposição é falsa se e somente se existir a tal que $p(a)$ é verdadeira e $q(a)$ é falsa.
20. Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$, designar a segunda proposição por «contrarrecíproco» da primeira e uma demonstração da segunda proposição por «demonstração por contrarrecíproco» da primeira.

3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições.
2. +Resolver problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos.

Álgebra ALG10

Radicais

1. Definir e efetuar operações com radicais

1. +Reconhecer, dados dois números reais a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, que se $a < b$ então $a^n < b^n$.
2. +Reconhecer, dados dois números reais a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ par, que se $0 \leq a < b$ então $0 \leq a^n < b^n$ e se $a < b \leq 0$ então $a^n > b^n \geq 0$.
3. Saber, dado um número real a e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, que existe um número real b tal que $b^n = a$, provar que é único, designá-lo por «raiz índice n de a » e representá-lo por « $\sqrt[n]{a}$ ».
4. +Saber, dado um número real positivo a e um número $n \in \mathbb{N}$ par, que existe um número real positivo b tal que $b^n = a$, provar que $(-b)^n = a$ e que não existe, para além de b e de $-b$, qualquer outra solução da equação $x^n = a$, designar b por «raiz índice n de a » e representá-lo por « $\sqrt[n]{a}$ ».
5. Justificar, dado um número natural n , que 0 é o único número real cuja potência de expoente n é igual a 0 e, por esta razão, representá-lo também por « $\sqrt[n]{0}$ » («raiz índice n de 0»).
6. #Provar, dados números reais não negativos a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ par, que $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$ e reconhecer que, para $m \in \mathbb{N}$, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.
7. #Provar, dados números reais a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, que $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$ e reconhecer que, para $m \in \mathbb{N}$, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.
8. #Provar, dados números reais a e b (respetivamente números reais a e b não negativos), $b \neq 0$, e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar (respetivamente um número $n \in \mathbb{N}$ par), que $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ e justificar que para $m \in \mathbb{N}$, $(\sqrt[n]{b})^{-m} = \sqrt[n]{b^{-m}}$.
9. #Provar, dados números naturais n e m (respetivamente números naturais ímpares n e m) e um número real não negativo a (respetivamente um número real a), que $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.
10. Designar também por «fração» a representação « $\frac{a}{b}$ » do quociente entre números reais a e b (com $b \neq 0$), a e b , neste contexto, respetivamente por «numerador» e «denominador» e identificar duas frações como «equivalentes» quando representam o mesmo número.
11. +Racionalizar denominadores da forma $a\sqrt[n]{b}$, ou $a\sqrt[n]{b} + c\sqrt[n]{d}$ (a e c números inteiros, b, d, n números naturais, $n > 1$).

Potências de expoente racional

2. Definir e efetuar operações com potências de expoente racional

1. +Reconhecer, dado um número real não negativo a e um número racional não negativo q ($q \neq 0$ se $a = 0$), $q = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ (sendo m, n, m' e n' números inteiros, $m, m' \geq 0$ e $n, n' \geq 2$), que $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$.
2. +Identificar, dado um número real não negativo a e um número racional não negativo $q = \frac{m}{n}$ (m e n números inteiros, $m \geq 0$ e $n \geq 2$), $q \neq 0$ se $a = 0$, a «potência de base a e de expoente q », a^q , como $\sqrt[n]{a^m}$, reconhecendo que este número não depende da fração escolhida para representar q , e que esta definição é a única possível por forma a estender a propriedade $(a^b)^c = a^{bc}$ a expoentes racionais positivos.
3. Identificar, dado um número real positivo a e um número racional positivo q , a «potência de base a e de expoente $-q$ », a^{-q} , como $\frac{1}{a^q}$, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a propriedade $a^b \times a^c = a^{b+c}$ a expoentes racionais.
4. +Reconhecer que as propriedades algébricas previamente estudadas das potências de expoente inteiro (relativas ao produto e quociente de potências com a mesma base, produto e quociente de potências com o mesmo expoente e potência de potência) podem ser estendidas às potências de expoente racional.
5. +Simplificar expressões envolvendo radicais e potências.

3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo operações com radicais e com potências.

Divisão inteira de polinómios

4. Efetuar operações com polinómios

1. Designar um polinómio P com apenas uma variável x por « $P(x)$ ».
2. +Reconhecer, dados polinómios não nulos $A(x)$ e $B(x)$, que o grau do polinómio $A(x)B(x)$ é igual à soma dos graus de $A(x)$ e de $B(x)$.
3. Saber, dados polinómios $A(x)$ e $B(x)$, $B(x)$ não nulo, que existem dois únicos polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que $R(x)$ ou é o polinómio nulo ou tem grau inferior ao grau de $B(x)$ e $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$, e designar, neste contexto, $A(x)$ por «polinómio dividendo», $B(x)$ por «polinómio divisor», $Q(x)$ por «polinómio quociente» e $R(x)$ por «polinómio resto» da «divisão inteira» (ou «divisão euclidiana») de $A(x)$ por $B(x)$.
4. Determinar, dados polinómios $A(x)$ e $B(x)$, $B(x)$ não nulo, as formas reduzidas dos polinómios quociente e resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.
5. +Reconhecer, dado um polinómio $P(x)$ e um número $a \in \mathbb{R}$, que aplicando a «regra de Ruffini» se obtém o quociente e o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - a$.
6. Provar, dado um polinómio $P(x)$ e um número $a \in \mathbb{R}$, que o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$ e designar esta propriedade por «Teorema do Resto».

7. Designar, dado um polinómio $P(x)$, por «raiz do polinómio» (ou «zero do polinómio») qualquer número real a tal que $P(a) = 0$.
8. Identificar um polinómio $P(x)$ como «divisível» por um polinómio $Q(x)$ não nulo se o resto da divisão euclidiana de $P(x)$ por $Q(x)$ é nulo.
9. Provar, dado um polinómio $P(x)$ de grau $n \in \mathbb{N}$ e um número real a , que a é uma raiz de $P(x)$, se e somente se $P(x)$ for divisível por $x - a$ e que, nesse caso, existe um polinómio $Q(x)$ de grau $n - 1$ tal que $P(x) = (x - a)Q(x)$.
10. Identificar, dado um polinómio $P(x)$ e uma raiz a de $P(x)$, a «multiplicidade de a » como o maior número natural n tal que existe um polinómio $Q(x)$ com $P(x) = (x - a)^n Q(x)$, justificar que nesta situação $Q(a) \neq 0$ e designar a por «raiz simples» quando a respetiva multiplicidade é igual a 1.
11. +Reconhecer, dado um polinómio $P(x)$ de grau $n \in \mathbb{N}$ cujas raízes (distintas) $x_1, x_2, \dots, x_k$ têm respetivamente multiplicidade $n_1, n_2, \dots, n_k$, que $n_1 + n_2 + \dots + n_k \leq n$ e que existe um polinómio $Q(x)$ sem raízes tal que $P(x) = (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_k)^{n_k} Q(x)$, tendo-se $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ se e somente se $Q(x)$ tiver grau zero.
12. Reconhecer, dado um polinómio $P(x)$ de coeficientes inteiros, que o respetivo termo de grau zero é múltiplo inteiro de qualquer raiz inteira desse polinómio.

5. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a divisão inteira de polinómios e o Teorema do resto.
2. +Resolver problemas envolvendo a fatorização de polinómios de que se conhecem algumas raízes.
3. +Resolver problemas envolvendo a determinação dos zeros e do sinal de funções polinomiais de grau superior a dois.

Geometria Analítica GA10

Geometria Analítica no plano

1. Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do plano

1. Designar por «referencial ortonormado» um referencial ortogonal e monométrico de um dado plano, tal que a unidade de comprimento comum aos eixos coordenados coincide com uma unidade de comprimento pré-fixada e, dados números reais a_1 e a_2 , designar por « $A(a_1, a_2)$ », o ponto A de abscissa a_1 e ordenada a_2 nesse referencial.
2. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado e pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ pertencentes a esse plano, que a medida da distância entre A e B é igual a $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$, e representá-la por « $d(A, B)$ ».
3. Demonstrar, dada uma reta numérica e dois pontos A e B de abscissas a e b respetivamente, que a abscissa do ponto médio do segmento de reta de extremos A e B é igual a $\frac{a+b}{2}$.
4. +Reconhecer, utilizando argumentos geométricos baseados no Teorema de Tales ou em consequências conhecidas deste Teorema, que, dado um plano munido de um referencial ortonormado e dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ pertencentes a esse plano, as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AB]$ são $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$.
5. Designar, dado um plano munido de um referencial ortonormado, por «equação cartesiana» (respetivamente por «inequação cartesiana») de um conjunto C uma equação (respetivamente inequação) cujas soluções são as coordenadas dos pontos de C .
6. Determinar, dado um plano munido de um referencial ortonormado e dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ desse plano, uma equação cartesiana da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ na forma $y = mx + b$ (equação reduzida da reta) ou na forma $x = c$.
7. Justificar, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado, um ponto $A(a_1, a_2)$ pertencente a esse plano e um número $r > 0$, que a equação $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2$ é uma equação cartesiana da circunferência de centro A e de raio r , e designá-la por «equação (cartesiana) reduzida da circunferência».
8. Designar, fixada uma unidade de comprimento e um plano, dados dois pontos A e B pertencentes a esse plano e um número $a > \frac{1}{2}\overline{AB}$, por «elipse» o conjunto de pontos P do plano tais que $d(P, A) + d(P, B) = 2a$, por «focos da elipse» os pontos A e B , por «centro da elipse» o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, e por «eixo maior da elipse» o número $2a$ (e a por «semieixo maior da elipse»), interpretando-o geometricamente.
9. +Demonstrar, dada uma elipse de focos A e B e de eixo maior $2a$, que a mediatriz de $[AB]$ interseca a elipse em dois pontos C e D equidistantes do centro da elipse e que tomando $b = \frac{1}{2}\overline{CD}$ se tem $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, onde $c = \frac{1}{2}\overline{AB}$, designando $2b$ por «eixo menor da elipse» (e b por «semieixo menor da elipse»).
10. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado e $0 < b < a$ que a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é uma equação

cartesiana da elipse de semieixo maior a e semieixo menor b que tem focos $A(-c, 0)$ e $B(c, 0)$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, e designá-la por «equação (cartesiana) reduzida da elipse».

11. +Reconhecer, dado um plano munido de um referencial ortonormado e uma reta r do plano de equação reduzida $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), que os dois semiplanos abertos (respetivamente fechados) determinados por r têm por inequações cartesianas $y > ax + b$ e $y < ax + b$ (respetivamente $y \geq ax + b$ e $y \leq ax + b$) e designá-los respetivamente por «semiplano superior» e «semiplano inferior» em relação à reta r .
12. Reconhecer, dado um plano munido de um referencial ortonormado e uma reta r do plano de equação cartesiana $x = c$ ($c \in \mathbb{R}$), que os dois semiplanos abertos (respetivamente fechados) determinados por r têm por inequações cartesianas $x > c$ e $x < c$ (respetivamente $x \geq c$ e $x \leq c$) e designá-los respetivamente por «semiplano à direita» e «semiplano à esquerda» da reta r .
13. Justificar, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado, que a inequação $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $r > 0$) é uma inequação do círculo de centro $C(a, b)$ e de raio r .

2. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do plano, e equações e inequações cartesianas de subconjuntos do plano.

Cálculo vetorial no plano

3. Operar com vetores

1. Identificar, fixada uma unidade de comprimento e dado um vetor $\vec{v}$, a «norma do vetor $\vec{v}$ » como a medida do comprimento de um segmento orientado representante de $\vec{v}$ e representá-la por $\|\vec{v}\|$.
2. Identificar, dado um vetor $\vec{v}$ e um número real (também designado por «escalar») λ , o «produto de $\vec{v}$ por λ » ($\lambda\vec{v}$) como o vetor de norma $|\lambda|\|\vec{v}\|$ (fixada uma mesma unidade de comprimento para o cálculo das normas), com a direção e sentido de $\vec{v}$ se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\lambda > 0$ e com a direção de $\vec{v}$ e sentido contrário ao de $\vec{v}$ se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\lambda < 0$, justificar que $\lambda\vec{v}$ não depende da unidade de comprimento fixada e que $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$, vetor simétrico de $\vec{v}$.
3. Justificar, dado um vetor $\vec{v}$ não nulo, que um vetor $\vec{u}$ é colinear a $\vec{v}$ se e apenas existir um número real λ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, e que, nesse caso, λ é único.
4. Justificar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que existe um e somente um vetor $\vec{w}$ tal que $\vec{w} + \vec{v} = \vec{u}$, provando que $\vec{w} = \vec{u} + (-\vec{v})$, designar $\vec{w}$ por «diferença entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ » e representá-lo por $\vec{u} - \vec{v}$.
5. +Reconhecer, dado um vetor $\vec{v}$ e números reais λ e μ , que $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$.
6. +Reconhecer, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e números reais λ e μ que $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ e $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$.

4. Operar com coordenadas de vetores

1. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e um vetor $\vec{v}$ do plano que, sendo $X(1,0)$, $Y(0,1)$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$ e $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$, existe um e somente um par ordenado (v_1, v_2) de números reais tais que $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$, por esse motivo designar o par ordenado $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ por uma «base do espaço vetorial dos vetores do plano», (v_1, v_2) por «coordenadas do vetor $\vec{v}$ (na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$)» e representar por « $\vec{v}(v_1, v_2)$ » o vetor $\vec{v}$ de coordenadas (v_1, v_2) .
2. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e dado um ponto A , o «vetor-posição do ponto A » como o vetor $\overrightarrow{OA}$ e justificar que as coordenadas do vetor posição de um dado ponto coincidem com as coordenadas do ponto.
3. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$ e um número real λ , que o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ (respetivamente $\vec{u} - \vec{v}$) tem coordenadas $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ (respetivamente $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$), que o vetor $\lambda\vec{u}$ tem coordenadas $(\lambda u_1, \lambda u_2)$, que o vetor simétrico do vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$ tem coordenadas $(-u_1, -u_2)$ e que dois vetores não nulos são colineares se e somente se as respectivas coordenadas forem todas não nulas e os quocientes das coordenadas correspondentes forem iguais, ou as primeiras ou segundas coordenadas de ambos os vetores forem nulas.
4. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, começando por justificar que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, identificar, a «diferença entre os pontos B e A » como o vetor $\overrightarrow{AB}$, representá-la por « $B - A$ » e justificar que, para todo o vetor $\vec{v}$ e para quaisquer pontos A e B do plano, $B - A = \vec{v} \Leftrightarrow B = A + \vec{v}$.
5. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dado um ponto $A(a_1, a_2)$ e um vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$ desse plano, que o ponto $A + \vec{v}$ tem coordenadas $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$.
6. Justificar, fixada uma unidade de comprimento e um plano munido de um referencial ortonormado que para qualquer vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

5. Conhecer propriedades dos vetores diretores de retas do plano

1. Identificar, dado um vetor $\vec{v}$ não nulo e uma reta r , $\vec{v}$ como «tendo a direção de r » quando r tiver a direção das retas suporte dos segmentos orientados que representam $\vec{v}$.
2. Designar por «vetor diretor» de uma dada reta r qualquer vetor não nulo com a mesma direção do que r .
3. Provar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e uma reta r não vertical de declive m , que o vetor $\vec{v}(a, b)$ é vetor diretor de r se e somente se $a \neq 0$ e $m = \frac{b}{a}$, e que, em particular, o vetor de coordenadas $(1, m)$ é vetor diretor da reta r .
4. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que os vetores diretores das retas verticais são os vetores $\vec{v}(0, b)$, $b \neq 0$.
5. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que dada uma reta r de vetor diretor $\vec{v}$, os pontos de r são os pontos $P = A + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, onde A é um qualquer ponto de r , e designar esta equação por «equação vetorial da reta r ».

- Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados $a_1, a_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, que um ponto $P(x, y)$ pertence à reta r de vetor diretor $\vec{v}(v_1, v_2)$ passando pelo ponto $A(a_1, a_2)$ se e somente se existir $t \in \mathbb{R}$ tal que $x = a_1 + tv_1$ e $y = a_2 + tv_2$, e designar este sistema por «sistema das equações paramétricas da reta r ».

6. Resolver problemas

- +Resolver problemas envolvendo a determinação das coordenadas de vetores do plano.
- +Resolver problemas envolvendo a colinearidade de vetores do plano.
- +Resolver problemas envolvendo equações vetoriais, paramétricas e cartesianas de retas do plano.

Geometria Analítica no espaço

7. Definir referenciais cartesianos do espaço

- Identificar um «referencial (cartesiano) ortonormado do espaço» (ou simplesmente «referencial cartesiano») como um terço ordenado de retas numéricas que se intersectam nas respectivas origens, duas a duas perpendiculares e com unidades de comprimento coincidentes com uma mesma unidade de comprimento pré-fixada, designar a origem comum das três retas por «origem do referencial», a primeira reta por «eixo das abcissas», a segunda por «eixo das ordenadas», a terceira por «eixo das cotas», genericamente cada uma delas por «eixo coordenado» e, se for representada por « O » a origem do referencial, representar estes três eixos respetivamente por « Ox », « Oy » e « Oz » e o referencial por « $Oxyz$ ».
- Designar, dado um ponto P e uma reta r , por «projeção ortogonal de P sobre r » como o próprio ponto P quando P pertencer a r e como o pé da perpendicular traçada de P para r no caso contrário, reconhecendo que é a interseção com r do plano normal a r passando por P .
- Designar, dado um referencial ortonormado e um ponto P de projeções ortogonais P_x , no eixo das abcissas, P_y , no eixo das ordenadas e P_z , no eixo das cotas, por «abscissa de P », «ordenada de P » e «cota de P » respetivamente a abscissa de P_x , de P_y e de P_z nas respetivas retas numéricas, e o terço ordenado destes três valores por «coordenadas de P ».
- Designar por «planos coordenados» os três planos determinados por dois dos eixos coordenados, representá-los por « xOy », « xOz » e « yOz » consoante os eixos coordenados que contêm, e reconhecer que são perpendiculares dois a dois.
- +Reconhecer, dado um referencial ortonormado e um terço ordenado de números reais (x, y, z) , que existe um e apenas um ponto P com essas coordenadas e representá-lo por « $P(x, y, z)$ ».
- +Reconhecer, dado um referencial ortonormado e um ponto $P(a, b, c)$ de projeção ortogonal P' no plano xOy , que, nesse plano, munido do referencial constituído pelos eixos Ox e Oy , P' tem coordenadas (a, b) e enunciar resultados análogos para os planos xOz e yOz .

8. Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do espaço

1. Justificar, dado um referencial ortonormado do espaço e $a \in \mathbb{R}$, que $x = a$ é uma equação cartesiana do plano paralelo ao plano coordenado yOz que intersesta o eixo das abscissas no ponto $A(a, 0, 0)$ e determinar as equações dos planos paralelos aos planos coordenados xOz e xOy .
2. Justificar, dado um referencial cartesiano do espaço e $a, b \in \mathbb{R}$ que o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ cujas coordenadas satisfazem o «sistema de equações cartesianas» $x = a \wedge y = b$ é a reta paralela ao eixo das cotas que intersesta o plano coordenado xOy no ponto $A(a, b, 0)$ e determinar sistemas de equações cartesianas de retas paralelas ao eixo das abscissas e ao eixo das ordenadas.
3. +Provar, fixada uma unidade de comprimento e dados um referencial ortonormado do espaço e pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$, que a medida da distância entre A e B é igual a $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$ e representá-la por « $d(A, B)$ ».
4. Determinar, dado um referencial ortonormado do espaço e as coordenadas de dois pontos A e B do espaço, uma equação do plano mediador do segmento de reta $[AB]$ na forma $ax + by + cz + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
5. Justificar, fixada uma unidade de comprimento e dados um referencial ortonormado do espaço, um ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e um número $r > 0$, que $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = r^2$ é uma equação cartesiana da superfície esférica de centro A e de raio r , e designá-la por «equação (cartesiana) reduzida da superfície esférica».
6. Justificar, fixada uma unidade de comprimento e dados um referencial ortonormado do espaço, um ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e um número $r > 0$, que $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 \leq r^2$ é uma inequação cartesiana da esfera de centro A e de raio r , e designá-la por «inequação (cartesiana) reduzida da esfera».

Cálculo vetorial no espaço

9. Definir vetores do espaço

1. Designar um par de segmentos orientados do espaço por «equipolentes» quando são coplanares e equipolentes num plano que os contenha.
2. Saber que um «vetor do espaço» fica determinado por um segmento orientado do espaço de tal modo que segmentos de reta equipolentes determinam o mesmo vetor e segmentos de reta não equipolentes determinam vetores distintos.
3. Estender do plano ao espaço a definição de norma de um vetor, de adição de um ponto com um vetor, de translação de um dado vetor e as operações de subtração de dois pontos, de adição e subtração de vetores, de multiplicação de um vetor por um escalar e as respectivas propriedades geométricas e algébricas.

10. Operar com coordenadas de vetores do espaço

1. +Reconhecer, fixado um referencial ortonormado no espaço de origem O e um vetor $\vec{v}$ que, sendo $X(1,0,0)$, $Y(0,1,0)$, $Z(0,0,1)$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$ e $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OZ}$, existe um e somente um terno ordenado (v_1, v_2, v_3) de números reais tais que $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$, designar o terno ordenado $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ por uma «base do espaço vetorial dos vetores do espaço», (v_1, v_2, v_3) por «coordenadas do vetor $\vec{v}$ (na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$)» e representar por « $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ » o vetor $\vec{v}$ de coordenadas (v_1, v_2, v_3) .
2. Estender do plano ao espaço a definição do vetor posição de um ponto e a identificação das respectivas coordenadas, as fórmulas para o cálculo das coordenadas da soma e da diferença de vetores, do produto de um vetor por um escalar, do simétrico de um vetor, da diferença de dois pontos, da soma de um ponto com um vetor e da norma de um vetor, e o critério de colinearidade de vetores através das respectivas coordenadas.
3. Estender do plano ao espaço a definição e propriedades das equações vetoriais e sistemas de equações paramétricas de retas.

11. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do espaço, equações e inequações cartesianas de subconjuntos do espaço.
2. +Resolver problemas envolvendo cálculo vetorial no espaço.

Funções Reais de Variável Real FRVR10

Generalidades acerca de funções

1. Definir a composição de funções e a função inversa de uma função bijetiva

1. Identificar, dados conjuntos A e B , o «produto cartesiano de A por B » como o conjunto $\{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ dos pares ordenados (a, b) tais que a e b pertencem, respetivamente a A e a B e representá-lo por « $A \times B$ ».
2. Reconhecer que um conjunto $G \subset A \times B$ é o gráfico de uma função de A em B quando e apenas quando para todo o $a \in A$ existir um e somente um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in G$.
3. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ e um conjunto C , a «restrição de f a C » como a função $f|_C : C \cap A \rightarrow B$ tal que, $\forall x \in C \cap A, f|_C(x) = f(x)$.
4. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ e $C \subset A$, o «conjunto imagem de C por f » como o conjunto $f(C) = \{y \in B : \exists x \in C : y = f(x)\}$ das imagens por f dos elementos de C , representá-lo também por « $\{f(x) : x \in C\}$ ».
5. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ como «injetiva» se para todos os x_1 e x_2 pertencentes a A , $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (ou, de modo equivalente, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$) e designar também uma tal função por «injeção de A em B ».
6. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ como «sobrejetiva» se para todo o y pertencente a B , existir um elemento x pertencente a A tal que $y = f(x)$ e reconhecer que uma função é sobrejetiva se e somente se coincidirem os respetivos contradomínio e conjunto de chegada e designar também uma tal função por «sobrejeção de A em B » ou por «função de A sobre B ».
7. Identificar, dados conjuntos A e B , uma função $f : A \rightarrow B$ como «bijetiva» se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva e designar também uma tal função por «bijeção de A em B ».
8. Identificar, dadas funções $f : D_f \rightarrow A$ e $g : D_g \rightarrow B$, a «função composta de g com f » como a função $g \circ f : D_{g \circ f} \rightarrow B$, tal que $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$ e $\forall x \in D_{g \circ f}, g \circ f(x) = g(f(x))$ e designá-la também por « g composta com f », « g após f » ou « f seguida de g ».
9. Designar, dado um conjunto A , por «função identidade em A » a função $Id_A : A \rightarrow A$ tal que $\forall x \in A, Id_A(x) = x$ e justificar que se trata de uma função bijetiva.
10. Justificar, dados conjuntos A e B e uma função $f : A \rightarrow B$ bijetiva, que para todo o y pertencente a B existe um e apenas um elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$ e, representando-o por x_y , designar por «função inversa de f » a função $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que $\forall y \in B, f^{-1}(y) = x_y$.
11. +Reconhecer, dada uma função $f : A \rightarrow B$ bijetiva, que f^{-1} é bijetiva e que $(f^{-1})^{-1} = f$ e designar também f^{-1} por «bijeção recíproca de f ».
12. Reconhecer, dada uma função $f : A \rightarrow B$, que f é bijetiva se e somente se existir uma função $g : B \rightarrow A$, tal que $\forall (x, y) \in A \times B, y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$.
13. Justificar que uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetiva se e somente se existir uma função $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = Id_A$ e $f \circ g = Id_B$ e que, nesse caso, $g = f^{-1}$.

Generalidades acerca de funções reais de variável real

2. Relacionar propriedades geométricas dos gráficos com propriedades das respectivas funções

1. Designar por «função real de variável real» uma função cujo domínio e conjunto de chegada estão contidos em $\mathbb{R}$.
2. Saber, dada uma expressão $f(x)$, que se convencionou, quando nada for indicado em contrário, que essa expressão representa a função f com conjunto de chegada igual a $\mathbb{R}$ e domínio constituído por todos os números reais a para os quais fica representado um número real pela expressão que se obtém substituindo todas as ocorrências de x em $f(x)$ por um símbolo representando o número a , designar, nesse caso, a expressão $f(x)$ por «expressão analítica de f » e este processo de caracterizar f por «definição (analítica) de f pela expressão $f(x)$ ».
3. Identificar uma função real de variável real f como «par» se, para todo o $x \in D_f$, $-x \in D_f$ e $f(-x) = f(x)$.
4. Identificar uma função real de variável real f como «ímpar» se, para todo o $x \in D_f$, $-x \in D_f$ e $f(-x) = -f(x)$.
5. Justificar, dada uma função real de variável real ímpar f , que, se $0 \in D_f$, então $f(0) = 0$.
6. +Reconhecer, dado um plano munido de um referencial ortogonal, que uma dada função é par se e somente se o eixo das ordenadas for eixo de simetria do respetivo gráfico cartesiano.
7. +Reconhecer, dado um plano munido de um referencial cartesiano, que uma dada função é ímpar se e somente se o respetivo gráfico cartesiano for «simétrico relativamente à origem O do referencial», isto é, se e somente se a imagem do gráfico pela reflexão central de centro O coincidir com o próprio gráfico.
8. +Reconhecer, dada uma função real de variável real bijetiva f e um plano munido de um referencial monométrico, que os gráficos cartesianos das funções f e f^{-1} são a imagem um do outro pela reflexão axial de eixo de equação $y = x$.
9. Reconhecer, dados uma função real de variável real f , um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = f(x) + c$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(0, c)$.
10. +Reconhecer, dados uma função real de variável real f , um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função g definida por $g(x) = f(x - c)$ no conjunto $D_g = \{x + c : x \in D_f\}$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(c, 0)$.
11. Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$), por «contração vertical (respetivamente dilatação vertical) de coeficiente a » a transformação ϕ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (x, ay) .
12. Reconhecer, dados uma função real de variável real f , um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em D_f por $g(x) = af(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela contração vertical (respetivamente pela dilatação vertical) de coeficiente a .

13. Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$), por «contração horizontal (respetivamente dilatação horizontal) de coeficiente a » a transformação ϕ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (ax, y) .
14. Reconhecer, dados uma função real de variável real f , um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \left\{ \frac{x}{a} : x \in D_f \right\}$ por $g(x) = f(ax)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela dilatação horizontal (respetivamente pela contração horizontal) de coeficiente $\frac{1}{a}$.
15. Reconhecer, dada uma função real de variável real f e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = -f(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela reflexão de eixo Ox .
16. Reconhecer, dada uma função real de variável real f e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \{-x : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(-x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela reflexão de eixo Oy .

3. Identificar intervalos de monotonia de funções reais de variável real

1. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «(estritamente) crescente em A » (ou simplesmente «(estritamente) crescente» se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.
2. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «(estritamente) decrescente em A » (ou simplesmente «(estritamente) decrescente» se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$.
3. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «crescente, em sentido lato, em A » (ou simplesmente «crescente, em sentido lato» se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$.
4. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «decrescente, em sentido lato, em A » (ou simplesmente «decrescente, em sentido lato» se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \geq f(x_2)$.
5. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «(estritamente) monótona em A » (ou simplesmente «(estritamente) monótona» se $A = D_f$) se for (estritamente) crescente ou (estritamente) decrescente em A e f como «monótona, em sentido lato, em A » (ou simplesmente «monótona, em sentido lato» se $A = D_f$) se for crescente ou decrescente, em sentido lato, em A .
6. Identificar, dada uma função real de variável real f , um «intervalo de (estrita) monotonia de f » como um intervalo $I \subset D_f$ tal que $f|_I$ é (estritamente) monótona.
7. Identificar, dada uma função real de variável real e $A \subset D_f$, f como «constante em A » se para quaisquer elementos x_1 e x_2 de A , $f(x_1) = f(x_2)$.
8. Demonstrar que uma função afim definida por $f(x) = ax + b$ é estritamente crescente (respetivamente decrescente) em $\mathbb{R}$ se e somente se $a > 0$ (respetivamente $a < 0$).
9. Demonstrar que, dada uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2$, se $a > 0$ então f é decrescente em $] - \infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$ e que, se $a < 0$, então f é crescente em $] - \infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$.

4. Identificar extremos de funções reais de variável real

1. Designar, dada uma função f de domínio D_f e valores em $\mathbb{R}$, um número real M como «majorante de f » (respetivamente «minorante de f ») quando $\forall x \in D_f, f(x) \leq M$ (respetivamente $\forall x \in D_f, f(x) \geq M$), referindo a função f como «majorada» (respetivamente «minorada») quando admitir um majorante (respetivamente um minorante).
2. Designar por «limitada» uma função simultaneamente majorada e minorada.
3. Designar por «mínimo absoluto» (respetivamente por «máximo absoluto») de uma função real de variável real um valor $f(a)$ do contradomínio de f tal que $\forall x \in D_f, f(a) \leq f(x)$ (respetivamente $\forall x \in D_f, f(a) \geq f(x)$) e designar por «extremos absolutos de f » os máximos absolutos e os mínimos absolutos de f .
4. Designar, dados um número real x_0 e um número real positivo r , por «vizinhança r de x_0 » o intervalo $]x_0 - r, x_0 + r[$ e representá-la por « $V_r(x_0)$ ».
5. Referir que uma função real de variável real «atinge um mínimo relativo (ou local)» (respetivamente «atinge um máximo relativo (ou local)») em $a \in D_f$ quando existe $r > 0$, tal que, $\forall x \in D_f \cap V_r(a), f(a) \leq f(x)$ (respetivamente, $\forall x \in D_f \cap V_r(a), f(a) \geq f(x)$) e designar $f(a)$ por «mínimo relativo (ou local)» (respetivamente «máximo relativo (ou local)») de f e a por um «minimizante» (respetivamente por um «maximizante») de f .
6. Identificar, dada uma função real de variável real f , o gráfico de f como «tendo a concavidade (estritamente) voltada para cima» (respetivamente como «tendo a concavidade (estritamente) voltada para baixo») num dado intervalo $I \subset D_f$ se dados quaisquer três pontos P, Q e R do gráfico, de abcissas em I tais que $x_P < x_Q < x_R$, o declive da reta PQ é inferior (respetivamente superior) ao da reta QR .
7. Saber que uma função real de variável real tem a concavidade (estritamente) voltada para cima (respetivamente para baixo) num dado intervalo $I \subset D_f$ se e somente se dados quaisquer dois pontos P e Q do gráfico, de abcissas em I , a parte do gráfico de f de abcissas estritamente situadas entre as abcissas de P e Q ficar «abaixo» (respetivamente «acima») do segmento de reta $[PQ]$.
8. +Reconhecer, dado um número real não nulo a , que o gráfico da função f definida pela expressão $f(x) = ax^2$ tem, em $]-\infty, +\infty[$, a concavidade voltada para cima se $a > 0$ e voltada para baixo se $a < 0$.

5. Estudar funções elementares e operações algébricas sobre funções

1. Esboçar o gráfico de funções quadráticas, começando por representá-las por expressões da forma $a(x - b)^2 + c$ e identificando os intervalos de monotonia, o extremo absoluto, as eventuais raízes e o sentido da concavidade dos respetivos gráficos.
2. Identificar uma função $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ para a qual são dados um número natural $n > 1$, uma partição $A_1, A_2, \dots, A_n$ de D_f e n expressões $f_j(x)$ ($1 \leq j \leq n$) tais que para todo o j e para todo o $x \in A_j, f(x) = f_j(x)$ como «estando definida por ramos pelas expressões $f_j(x)$, respetivamente nos conjuntos A_j ($1 \leq j \leq n$)».
3. Esboçar o gráfico de funções definidas por $f(x) = a|x - b| + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) interpretando geometricamente os valores a, b e c .

4. Justificar que a função $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $f(x) = x^2$ é bijetiva e que para todo o $x \in \mathbb{R}_0^+$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
5. Justificar que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é bijetiva e que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.
6. Determinar o domínio e esboçar o gráfico de funções definidas analiticamente por $f(x) = a\sqrt[n]{x-b} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \{2, 3\}$, $a \neq 0$).
7. Identificar «função polinomial» como uma função que pode ser definida analiticamente por um polinómio com uma só variável.
8. Esboçar o gráfico de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais até ao 3.º grau, módulos e radicais quadrados e cúbicos.
9. Identificar, dadas funções $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$, um número real α e um número racional r , as funções $f + g: D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}$ («soma de f com g »), $fg: D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}$, («produto de f por g »), $\frac{f}{g}: D_{\frac{f}{g}} \rightarrow \mathbb{R}$ («quociente de f por g », onde $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g: g(x) \neq 0\}$), $\alpha f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ («produto de f pelo escalar α ») e $f^r: D_{f^r} \rightarrow \mathbb{R}$ («potência de expoente r de f », onde D_{f^r} é o conjunto dos números reais x para os quais está definido $f(x)^r$), como as funções com os domínios e conjunto de chegada indicados, definidas, para cada elemento x do respetivo domínio, respetivamente por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ e $f^r(x) = f(x)^r$, podendo utilizar-se, para representar as potências de expoente racional, as notações envolvendo raízes.

6. Resolver problemas

1. +Resolver equações e inequações envolvendo as funções polinomiais e a composição da função módulo com funções polinomiais.
2. +Resolver equações e inequações envolvendo as funções raiz quadrada e raiz cúbica.
3. +Resolver problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real.
4. +Resolver problemas envolvendo as funções afim, quadrática, raiz quadrada, raiz cúbica, módulo, funções definidas por ramos e a modelação de fenómenos reais.
5. +Resolver problemas envolvendo a determinação do domínio de funções obtidas por aplicação de operações algébricas a funções dadas.

Estatística EST10

Características amostrais

1. Manipular o sinal de somatório

1. Designar, dado $p \in \mathbb{N}$ e uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, a soma $x_1 + x_2 + \dots + x_p$ por «somatório de 1 a p dos x_i » (ou por «soma dos p termos da sequência», quando esta designação não for ambígua), representá-la por $\sum_{i=1}^p x_i$, designar o símbolo « Σ » por «sinal de somatório» e, para $1 < m \leq p$, representar também por $\sum_{i=m}^p x_i$ a soma $x_m + x_{m+1} + \dots + x_p$ («somatório de m a p dos x_i »).
2. Reconhecer, dados $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, que a igualdade $\sum_{i=1}^p (\lambda x_i) = \lambda \sum_{i=1}^p x_i$ representa, no formalismo dos somatórios, a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição aplicada ao produto de λ pela soma das p parcelas $x_1, x_2, \dots, x_p$.
3. Reconhecer, dados $p \in \mathbb{N}$, uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ e um número natural n tal que $n < p$, que a igualdade $\sum_{i=1}^p x_i = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=n+1}^p x_i$ representa, no formalismo dos somatórios, uma aplicação da propriedade associativa da adição à soma das p parcelas $x_1, x_2, \dots, x_p$.
4. Reconhecer, dado $p \in \mathbb{N}$ e sequências de números reais $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ e $(y_i)_{1 \leq i \leq p}$, que a igualdade $\sum_{i=1}^p (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^p x_i + \sum_{i=1}^p y_i$ representa, no formalismo dos somatórios, uma aplicação das propriedades associativa e comutativa da adição à soma das p parcelas $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_p + y_p$.

2. Utilizar as propriedades da média de uma amostra

1. Interpretar uma dada variável estatística quantitativa em determinada população como uma função numérica definida na população, cujo valor em cada unidade estatística é o valor que mede a característica em estudo nesse elemento da população.
2. Representar, dada uma variável estatística quantitativa x em determinada população e uma amostra A de dimensão $n \in \mathbb{N}$ dessa população cujos elementos estão numerados de 1 a n , por « x_i » o valor da variável x no elemento de A com o número i , por « $\tilde{x}$ » a sequência $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, designá-la por «amostra da variável estatística x » ou simplesmente por «amostra» e por «valores da amostra» os valores x_i , $1 \leq i \leq n$, sempre que estes abusos de linguagem não forem ambíguos.
3. Representar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de uma variável estatística, por « $\bar{x}$ » a média $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$, designando-a igualmente por «média da amostra $\tilde{x}$ » sempre que este abuso de linguagem não for ambíguo.
4. Representar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ com m valores ($1 \leq m \leq n$), por « $\tilde{x}$ » o conjunto dos valores da amostra, por $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$ os elementos de $\tilde{x}$, por

« n_j » ($1 \leq j \leq m$) o cardinal do conjunto $\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i = \tilde{x}_j\}$, designar n_j por «frequência absoluta do valor $\tilde{x}_j$ », e justificar que $\sum_{j=1}^m n_j = n$ e que $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^m \tilde{x}_j n_j}{n}$, designando esta última igualdade por «fórmula da média para dados agrupados».

5. Representar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais h e a , por « $a\underline{x} + h$ » a amostra $\underline{y} = (ax_1 + h, ax_2 + h, \dots, ax_n + h)$ e justificar que $\bar{y} = a\bar{x} + h$.
6. Interpretar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, a média de $\underline{x}$ como a abscissa do centro de gravidade de um segmento de reta no qual se colocou, para cada valor $\tilde{x}_j$ da amostra, um ponto material no ponto de abscissa $\tilde{x}_j$ de massa igual à respetiva frequência absoluta n_j .
7. Reconhecer que o valor da média de uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nunca se mantém quando, para um dado $i \in \{1, \dots, n\}$, se altera o valor x_i , e referir, por essa razão, que a média é uma característica amostral «com pouca resistência».

3. Definir e conhecer propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra

1. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, por «desvio de x_i em relação à média» a quantidade $x_i - \bar{x}$, representá-la por « d_i » e provar que $\sum_{i=1}^n d_i = 0$.
2. +Representar dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, por « SS_x » a soma $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ dos quadrados dos desvios dos x_i em relação à média e reconhecer que $SS_x = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$.
3. +Reconhecer, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que é possível calcular d_n em função de $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ mas que d_n só fica determinado se for conhecida a totalidade desses $n - 1$ desvios, e referir, por esta razão, que « SS_x tem $n - 1$ graus de liberdade».
4. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que $SS_x = 0$ se e somente se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.
5. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais h e α , que se $\underline{y} = \underline{x} + h$ (respetivamente $\underline{y} = \alpha \underline{x}$) então $SS_y = SS_x$ (respetivamente $SS_y = \alpha^2 SS_x$).
6. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que $SS_x = \sum_{j=1}^m (\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j$, onde $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$ representam os m valores da amostra $\underline{x}$ e n_j a frequência absoluta de $\tilde{x}_j$.
7. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) e uma amostra $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1}$ por «variância da amostra $\underline{x}$ » e $s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}$ por «desvio-padrão da amostra $\underline{x}$ ».

8. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que $s_x = 0$ se e somente se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.
 9. Justificar, dados $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$), uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais h e α , que se $y = \tilde{x} + h$ (respetivamente $y = \alpha \tilde{x}$) então $s_y = s_x$ (respetivamente $s_y = |\alpha| s_x$).
 10. Reconhecer, dada uma variável estatística quantitativa x em determinada população, uma amostra A de dimensão $n > 1$ dessa população e sendo $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra correspondente da variável estatística x , que para todo o $k > 0$ a percentagem dos elementos da amostra A nos quais os valores da variável estatística têm desvios em relação à média superiores a k desvios-padrão é inferior a $\frac{1}{k^2}$ e interpretar este resultado como tradução quantitativa da afirmação segundo a qual o par $(\bar{x}, s_x)$ reflete a distribuição dos valores da amostra $\tilde{x}$ em termos de “localização” e de “dispersão”.
 11. Reconhecer que para comparar a “dispersão” dos valores dos elementos de duas ou mais amostras em torno da média, faz sentido comparar as respetivas variâncias (ou os respetivos desvios-padrão), sempre que a característica quantitativa em análise seja a mesma nas diversas amostras e que a respetiva medida esteja calculada na mesma unidade.
 12. Saber, dada uma população, que existem critérios que conduzem à recolha de amostras cujas médias e desvios-padrão são consideradas boas estimativas da média e do desvio-padrão da população.
4. Definir e conhecer propriedades do percentil de ordem k
1. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, por «amostra $\tilde{x}$ ordenada» a sequência $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$ tal que $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, com os mesmos valores que a amostra $\tilde{x}$, cada um deles figurando na sequência um número de vezes igual à respetiva frequência absoluta enquanto valor da amostra $\tilde{x}$.
 2. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e um número natural k do intervalo $]0, 100]$, por «percentil de ordem k » o valor máximo da amostra se $k = 100$, a média dos elementos de ordem $\frac{kn}{100}$ e $\frac{kn}{100} + 1$ na amostra ordenada se $k \neq 100$ e $\frac{kn}{100}$ for inteiro, e nos restantes casos, o elemento de ordem $\left[\frac{kn}{100}\right] + 1$ na amostra ordenada, (onde, para $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ designa a «parte inteira de x », ou seja, o maior número natural inferior ou igual a x) e representá-lo por « P_k ».

3. Reconhecer, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que P_{50} é igual à mediana de $\tilde{x}$ e saber que também é usual definir o primeiro e o terceiro quartil de modo a coincidirem, respetivamente, com P_{25} e P_{75} .
4. Designar, dados números naturais n e k , $k \leq 100$, uma sequência crescente de números reais $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ e um conjunto de dados quantitativos organizados nos intervalos de classe $[a_i, a_{i+1}[$, que se supõem de igual amplitude $h > 0$, por «percentil de ordem k », o número x tal que $\sum_{i=1}^{L-1} (a_{i+1} - a_i) n_i + (x - a_L) n_L = \frac{k}{100} \sum_{i=1}^m (a_{i+1} - a_i) n_i$, ou seja, tal que $h \sum_{i=1}^{L-1} n_i + (x - a_L) n_L = \frac{kh n}{100}$ onde n_i é a frequência absoluta do intervalo de classe $[a_i, a_{i+1}[$ e L é o maior número natural tal que $\sum_{i=1}^{L-1} n_i \leq \frac{kn}{100}$.

5. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a média e o desvio-padrão de uma amostra.
2. +Resolver problemas envolvendo os percentis de uma amostra.

Trigonometria e Funções trigonométricas TRI11

Extensão da Trigonometria a ângulos retos e obtusos e resolução de triângulos

1. Definir as razões trigonométricas dos ângulos retos e obtusos e resolver triângulos

1. Provar, dado um triângulo acutângulo $[ABC]$, de ângulos internos $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ e $\gamma = \widehat{ACB}$ e de lados de medida $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, fixada uma unidade de comprimento, que $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$, e designar estas igualdades por «Lei dos senos» ou «Analogia dos senos».
2. Estender a definição do seno aos ângulos retos, tomando $\sin \alpha = 1$ quando o ângulo α é reto, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos senos a triângulos retângulos.
3. Estender a definição do seno aos ângulos obtusos tomando, para um ângulo α obtuso, $\sin \alpha = \sin \alpha'$, onde α' é suplementar a α , reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos senos a triângulos obtusângulos.
4. +Provar, dado um triângulo $[ABC]$, de lados de medida $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, fixada uma unidade de comprimento, e sendo agudo o ângulo interno em A , que, se $\alpha = \widehat{BAC}$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, e designar este resultado por «Teorema de Carnot» ou «Lei dos cossenos».
5. Estender a definição do cosseno aos ângulos retos, tomando $\cos \alpha = 0$ quando o ângulo α é reto, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos cossenos ao caso de um ângulo interno reto, reconhecendo que neste caso se reduz ao Teorema de Pitágoras.
6. +Estender a definição do cosseno aos ângulos obtusos tomando, para um ângulo α obtuso, $\cos \alpha = -\cos \alpha'$, onde α' é suplementar a α , reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos cossenos ao caso de um ângulo interno obtuso.
7. Estender a todos os ângulos convexos a propriedade segundo a qual, dados ângulos α e α' com a mesma amplitude $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha'}$, o seno e o cosseno de α são respetivamente iguais ao seno e ao cosseno de α' e designá-los também respetivamente por seno e cosseno de $\widehat{\alpha}$.
8. Determinar, dado um triângulo $[ABC]$, fixadas unidades de comprimento e de amplitude de ângulos e conhecidas as medidas dos comprimentos dos três lados (LLL), as medidas do comprimento de dois dos lados e da amplitude do ângulo interno por eles formado (LAL) ou as medidas do comprimento de um dos lados e das amplitudes dos dois ângulos internos que lhe são adjacentes (ALA), as medidas dos comprimentos dos restantes lados e as medidas das amplitudes dos restantes ângulos internos do triângulo, designar este procedimento por «resolução do triângulo $[ABC]$ » e obter valores aproximados destas medidas na forma de dízimas finitas até uma dada ordem, utilizando uma máquina de calcular.

Orientação de ângulos num plano e rotações

2. Definir ângulos orientados e as respectivas medidas de amplitude

1. Identificar «ângulo orientado» como um ângulo não nulo nem giro no qual se fixa um dos lados para «lado origem», designando o outro por «lado extremidade».
2. Identificar um ângulo orientado de um plano como tendo «orientação negativa» quando, imaginando os movimentos dos ponteiros de um relógio cujo mostrador se supõe situado nesse plano π , os ponteiros podem descrever o ângulo começando no lado origem e terminando no lado extremidade, identificar um ângulo orientado como tendo «orientação positiva» no caso contrário, e afetar do sinal «-» as amplitudes dos primeiros enquanto ângulos orientados, bem como as respectivas medidas.

3. Definir rotações segundo ângulos orientados

1. Designar, dados dois pontos O e M e um ângulo orientado α em determinado plano, um ponto M' por «imagem do ponto M pela rotação de centro O e de ângulo orientado α » quando $\overline{OM} = \overline{OM'}$ e $\widehat{OM'}$ for o lado extremidade do ângulo orientado de lado origem $\widehat{OM}$ e com a mesma amplitude de α enquanto ângulos orientados.

4. Definir ângulos generalizados

1. Identificar um «ângulo generalizado» (ou «ângulo trigonométrico») como um par ordenado (α, n) , onde α é um ângulo orientado ou um ângulo nulo e n é um número inteiro, que é positivo ou nulo se α tiver orientação positiva e negativo ou nulo se α tiver orientação negativa, interpretando-o intuitivamente como o resultado de rodar o lado extremidade do ângulo α (ou, no caso de α ser nulo, o único lado, coincidente com α), realizando $|n|$ voltas completas, no sentido determinado pelo sinal de n .
2. Designar o lado origem (respetivamente extremidade) de um ângulo orientado α também por «lado origem (respetivamente extremidade) dos ângulos generalizados (α, n) » e um ângulo nulo ω também como «lado origem e extremidade dos ângulos generalizados (ω, n) ».
3. Identificar, fixado um ângulo unidade e sendo g a medida de amplitude dos ângulos giros, a medida de amplitude do ângulo generalizado (α, n) como $a + ng$, onde a é a medida de amplitude do ângulo orientado ou nulo α .
4. Reconhecer que dois ângulos generalizados (α, n) e (α', n') têm a mesma amplitude se e somente α e α' tiverem a mesma amplitude e $n = n'$ e justificar, fixado um ângulo unidade que, dado um número real x e fixada uma semirreta para lado origem, existe um e apenas um ângulo generalizado cuja medida de amplitude é igual a x .
5. Identificar, fixado um ponto O e um ângulo generalizado (α, n) , a «rotação de centro O e ângulo generalizado (α, n) », no caso de α ser um ângulo nulo, como a aplicação identidade no plano e nos restantes casos como a aplicação do plano sobre si próprio que a cada ponto distinto de O associa a imagem desse ponto pela rotação de centro O e ângulo orientado α e ao ponto O associa o próprio ponto O .
6. Reconhecer, dado um ponto O e ângulos generalizados (α, n) e (α', n') , α, α' ângulos orientados, que as rotações de centro O e ângulos generalizados (α, n) e (α', n') coincidem se e somente se α e α' tiverem a mesma amplitude ou se tiverem sentidos contrários e os valores absolutos das respectivas amplitudes tiverem soma igual à medida de um ângulo giro.

5. Definir as razões trigonométricas dos ângulos generalizados

1. Designar um referencial ortonormado num dado plano como «direto» quando o primeiro quadrante, considerado como ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e lado extremidade coincidente com semieixo positivo Oy , tem orientação positiva.
2. Designar, dado um referencial ortonormado em dado plano, a circunferência centrada na origem e de raio 1 desse plano também por «circunferência trigonométrica» (ou, por abuso de linguagem, por «círculo trigonométrico»).
3. Identificar, dado um referencial ortonormado direto em dado plano e um ângulo orientado α desse plano, o «seno de α » (respetivamente o «cosseno de α ») como a ordenada (respetivamente a abscissa) do ponto P , interseção da circunferência trigonométrica com o lado extremidade do ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e de amplitude igual a α , representá-lo por $\sin(\alpha)$, $\text{sen}(\alpha)$, $\sin \alpha$ ou $\text{sen } \alpha$ (respetivamente por $\cos(\alpha)$ ou por $\cos \alpha$), reconhecer que este valor não depende da escolha do referencial, e que esta definição estende a definição de seno (respetivamente de cosseno) de ângulos geométricos convexos, se o identificarmos com o seno (respetivamente cosseno) de um ângulo orientado com a mesma amplitude.
4. Identificar, dado um referencial ortonormado direto em dado plano, e um ângulo orientado α desse plano de lados não perpendiculares, a «tangente de α » como a ordenada do ponto P , interseção da reta de equação $x = 1$, tangente à circunferência trigonométrica no ponto de coordenadas $(1,0)$, com a reta suporte do lado extremidade do ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e de amplitude igual a α , representá-la por $\tan(\alpha)$, $\text{tg}(\alpha)$, $\tan \alpha$ ou $\text{tg } \alpha$, reconhecer que $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ e que esta definição estende a definição de tangente de um ângulo agudo, se a identificarmos com a tangente de um ângulo orientado com a mesma amplitude.
5. Identificar, dado um ângulo generalizado $\theta = (\alpha, n)$, o «seno de θ », o «cosseno de θ » e a «tangente de θ » como, respetivamente, o seno, o cosseno e a tangente de α .
6. Justificar, dados ângulos generalizados θ e θ' com a mesma amplitude $\hat{\theta} = \hat{\theta}'$, que o seno, o cosseno e a tangente de θ são respetivamente iguais ao seno, ao cosseno e à tangente de θ' e designá-los também respetivamente por seno, cosseno e tangente de $\hat{\theta}$.

6. Definir medidas de ângulos em radianos

1. Designar por «radiano» a amplitude de um ângulo ao centro de uma circunferência que nela determina um arco de comprimento igual ao raio e reconhecer que o radiano não depende da escolha da circunferência, aproximando o comprimento do arco de circunferência por comprimentos de linhas poligonais inscritas.
2. Efetuar conversões de medidas de amplitude de ângulos de graus para radianos e de radianos para graus, começando por justificar que um ângulo giro tem amplitude 2π radianos.

7. Definir funções trigonométricas e deduzir propriedades

1. Identificar, dado um número real x , a «tangente de x » (respetivamente o «seno de x » e o «cosseno de x ») como a tangente (respetivamente o seno e o cosseno) de um ângulo generalizado de medida de amplitude igual a x , em radianos, sempre que esse valor esteja definido, e designar a função assim determinada nesse conjunto de números reais e com conjunto de chegada $\mathbb{R}$ por «(função) tangente» (respetivamente «(função) seno» e «(função) cosseno»), representando-a por «tan» ou «tg» (respetivamente por «sin» ou «sen» e por «cos») e o respetivo valor num ponto x do domínio também por $\tan x$ ou $\operatorname{tg} x$ (respetivamente por «sin x » ou «sen x » e por «cos x »).
2. Identificar, dado um número $P > 0$, uma função f como «periódica de período P » ou « P -periódica» se para todo o $x \in D_f$, $x + P \in D_f$ e $f(x + P) = f(x)$.
3. Designar, dada uma função f , o número $P_0 > 0$ por «período fundamental de f ou por «período positivo mínimo de f » se f for P_0 -periódica e não admitir outro período P inferior a P_0 .
4. Justificar que as funções reais de variável real seno e cosseno têm domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $[-1, 1]$ e período fundamental $P_0 = 2\pi$.
5. Provar que os zeros da função seno (respetivamente da função cosseno) são os números da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (respetivamente da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).
6. Justificar que a função seno (respetivamente a função cosseno) admite extremos locais nos pontos de abcissa da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (respetivamente da forma $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).
7. Provar que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, reconhecendo que esta igualdade generaliza a fórmula fundamental da Trigonometria, e referi-la igualmente por essa designação.
8. Justificar que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(x \pm \pi) = -\cos x$, $\sin(x \pm \pi) = -\sin x$, $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x$ e $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x$.
9. Justificar que a função real de variável real tangente tem domínio $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, contradomínio $\mathbb{R}$, período fundamental $P_0 = \pi$ e que os respetivos zeros são os números da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
10. Justificar que as funções seno e tangente são ímpares e a função cosseno é par.

8. Definir funções trigonométricas inversas

1. +Reconhecer que as funções $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ e $\tan: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$, obtidas por restrição respetivamente das funções sin, cos e tan aos intervalos indicados e tomando para conjuntos de chegada os respetivos contradomínios, são bijetivas e designar as bijeções recíprocas por «(função) arco-seno» (arcsin ou arcsen), «(função) arco-cosseno» (arccos) e «(função) arco-tangente» (arctan ou arctg), respetivamente, sabendo que são valores aproximados destas funções que as calculadoras fornecem, associados às teclas, respetivamente, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$, desde que esteja selecionado o radiano para unidade de medida dos ângulos.
2. Reconhecer, dados números reais x e α , que $\cos x = \cos \alpha$ se e somente se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$.

3. Reconhecer, dados números reais x e α , que $\sin x = \sin \alpha$ se e somente se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$.
4. Reconhecer, dados números reais x e α do domínio da função tangente, que $\tan x = \tan \alpha$ se e somente se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + k\pi$.
5. Resolver equações da forma $\sin x = a$, $\cos x = a$ e $\tan x = a$, $a \in \mathbb{R}$.

9. *Resolver problemas*

1. +Resolver problemas envolvendo a resolução de triângulos.
2. +Resolver problemas envolvendo a determinação de distâncias utilizando ângulos e as respectivas razões trigonométricas.
3. +Resolver equações trigonométricas e problemas envolvendo fórmulas trigonométricas e a determinação de razões trigonométricas.
4. +Resolver problemas envolvendo funções trigonométricas.

Geometria Analítica GA11

Declive e inclinação de uma reta

1. Definir a inclinação de uma reta

1. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e dada uma reta r que passa pela origem e é distinta do eixo Ox , a «inclinação de r » como a amplitude do ângulo convexo formado pelo semi-eixo positivo das abcissas e a semirreta $\vec{OP}$, onde P é um qualquer ponto de r de ordenada positiva, e identificar a inclinação do eixo das abcissas como a amplitude nula.
2. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O , a inclinação de uma reta r como a inclinação da reta paralela a r que passa por O .
3. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que o declive de uma reta não vertical é igual à tangente trigonométrica da respetiva inclinação.

Produto escalar

2. Definir e conhecer propriedades do produto escalar de vetores

1. Identificar, fixada uma unidade de comprimento, dados vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o «produto escalar (ou interno) de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ » como o número $\overline{OP} \times \overline{OQ'}$, (respetivamente o número $-\overline{OP} \times \overline{OQ'}$) onde, fixado um ponto O , $P = O + \vec{u}$, $Q = O + \vec{v}$, Q' é a projeção ortogonal de Q na reta OP , se $\overline{OQ'}$ e $\overline{OP}$ tiverem o mesmo sentido (respetivamente se tiverem sentidos contrários), reconhecendo que este valor é independente da escolha do ponto O , identificar o produto escalar de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como nulo se um dos vetores for nulo e representar o produto escalar de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por « $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ».
2. Identificar, dados vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, «ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ » como qualquer ângulo convexo, nulo ou raso POQ tal que $\vec{u} = \overline{OP}$ e $\vec{v} = \overline{OQ}$, reconhecendo que têm todos a mesma amplitude, designar também essa amplitude por «ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ » quando essa designação não for ambígua, e representá-la por « $(\vec{u}, \vec{v})$ ».
3. Provar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
4. Identificar vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como «perpendiculares» quando um deles for nulo ou quando, não sendo nulo nenhum dos dois, forem perpendiculares duas retas de vetores diretores respetivamente iguais a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, e indicar que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares escrevendo « $\vec{u} \perp \vec{v}$ ».
5. Justificar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.
6. Justificar, dado um vetor $\vec{u}$, que $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
7. Justificar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
8. +Provar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e um número real λ , que $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
9. +Provar, dados vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.
10. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$, começando por justificar que $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$ e $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$.

11. Provar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que duas retas de declives respetivamente iguais a m e a m' são perpendiculares se e somente se $mm' = -1$.
12. Justificar, fixado um referencial ortonormado do espaço e dados vetores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ do espaço, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, começando por justificar que $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$ e $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$.

3. Determinar equações de planos no espaço

1. Identificar um vetor $\vec{v}$ como «normal a um plano α » se for nulo ou, não sendo nulo, se as retas de vetor diretor $\vec{v}$ forem perpendiculares a α .
2. Justificar, dados planos α e β e vetores $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ não nulos, normais respetivamente a α e β , que α e β são (estritamente) paralelos ou coincidentes se e somente se $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ forem colineares e α e β são perpendiculares se e somente se $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ forem perpendiculares.
3. Justificar, dado um vetor não nulo $\vec{v}$ normal a um plano α e um ponto $P_0 \in \alpha$, que para todo o ponto P do plano, $P \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{v} = 0$.
4. Reconhecer, fixado um referencial ortonormado do espaço e dado um vetor não nulo $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ e um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, que existe um único plano α que passa por P_0 tal que $\vec{v}$ é normal a α e provar que $P(x, y, z) \in \alpha$ se e somente se $v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0$.
5. Justificar que as equações da forma $ax + by + cz + d = 0$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, são equações de planos e, reciprocamente, que qualquer plano admite uma equação cartesiana daquela forma.
6. Justificar, dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, que o vetor de coordenadas (a, b, c) é normal ao plano de equação $ax + by + cz + d = 0$.
7. Identificar, dado um plano α , um vetor $\vec{v}$ como «paralelo a α » se $\vec{v}$ for nulo ou, não sendo nulo, se for vetor diretor de uma reta de α .
8. +Provar, dado um plano α , um ponto $P_0 \in \alpha$ e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares paralelos a α , que para todo o ponto P do espaço, $P \in \alpha \Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}, P = P_0 + s\vec{u} + t\vec{v}$ e designar esta equação por «equação vetorial do plano α ».
9. Justificar, dado um plano α , um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ e dois vetores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ não colineares paralelos a α , que para todo o ponto $P(x, y, z)$ do espaço, $P \in \alpha \Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}, x = x_0 + su_1 + tv_1 \wedge y = y_0 + su_2 + tv_2 \wedge z = z_0 + su_3 + tv_3$ e designar este sistema de equações por «sistema das equações paramétricas do plano α ».

4. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a noção de produto escalar de vetores.
2. +Resolver problemas relativos à determinação de equações de retas do plano em situações diversas envolvendo a noção de perpendicularidade.
3. +Resolver problemas relativos à determinação de equações de planos em situações diversas envolvendo a noção de perpendicularidade e de paralelismo.
4. +Resolver problemas envolvendo equações de planos e de retas no espaço.

Sucessões SUC11

Generalidades sobre sucessões

1. Caracterizar o conjunto dos majorantes e dos minorantes de um conjunto de números reais

1. Identificar um subconjunto A de $\mathbb{R}$ como «majorado» quando existe um número real M tal que $\forall a \in A, a \leq M$ e designar M por «majorante de A ».
2. Identificar um subconjunto A de $\mathbb{R}$ como «minorado» quando existe um número real m tal que $\forall a \in A, a \geq m$ e designar m por «minorante de A ».
3. Identificar um subconjunto A de $\mathbb{R}$ como «limitado» quando for majorado e minorado.
4. Designar por «máximo» (respetivamente por «mínimo») de um subconjunto A de $\mathbb{R}$ um majorante (respetivamente um minorante) de A pertencente a A e justificar que se existir é único.

2. Estudar propriedades elementares de sucessões reais

1. Identificar uma «sucessão real» (ou simplesmente «sucessão» quando esta designação não for ambígua) como uma função u de domínio $\mathbb{N}$ e de conjunto de chegada $\mathbb{R}$, e representar por « u_n », dito «termo geral da sucessão», a imagem $u(n)$ de $n \in \mathbb{N}$ por u e por « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ » (ou simplesmente por « (u_n) », ou ainda por « u_n », quando estas notações não forem ambíguas) a própria sucessão u .
2. Identificar uma sucessão (u_n) como «crescente» (respetivamente «decrescente») quando o for como função real de variável real, ou seja, quando para quaisquer $p_1, p_2 \in \mathbb{N}, p_1 > p_2 \Rightarrow u_{p_1} > u_{p_2}$ (respetivamente $p_1 > p_2 \Rightarrow u_{p_1} < u_{p_2}$) e reconhecer que (u_n) é crescente (respetivamente decrescente) se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ (respetivamente $u_{n+1} < u_n$).
3. Identificar uma sucessão (u_n) como «crescente (respetivamente decrescente) em sentido lato» quando para quaisquer $p_1, p_2 \in \mathbb{N}, p_1 > p_2 \Rightarrow u_{p_1} \geq u_{p_2}$ (respetivamente $p_1 > p_2 \Rightarrow u_{p_1} \leq u_{p_2}$) e reconhecer que (u_n) é crescente (respetivamente decrescente) em sentido lato se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (respetivamente $u_{n+1} \leq u_n$).
4. Identificar uma sucessão (u_n) como «majorada» se o conjunto $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos respetivos termos for majorado e designar os majorantes deste conjunto também por «majorantes da sucessão».
5. Identificar uma sucessão (u_n) como «minorada» se o conjunto $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos respetivos termos for minorado e designar os minorantes deste conjunto também por «minorantes da sucessão».
6. Designar por «limitada» uma sucessão (u_n) simultaneamente majorada e minorada.

Princípio de Indução matemática

3. Utilizar o princípio de indução matemática

1. Saber, dada uma condição $T(n)$, que a proposição $\forall n \in \mathbb{N}, T(n)$ é verdadeira se $T(1)$ for verdadeira e se, além disso, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, designar este resultado por «princípio de indução (matemática)», $T(n)$, enquanto antecedente da

implicação $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, por «hipótese de indução» e a proposição $\forall n \in \mathbb{N}$, $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ por «hereditariedade» da propriedade $T(n)$ e saber que o princípio de indução pode estender-se, *mutatis mutandis*, fixado um número inteiro p e uma condição $T(n)$, à demonstração da proposição $\forall n \in \mathbb{N}_p$ $T(n)$, onde $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq p\}$.

2. Saber, dada uma função $f: A \rightarrow A$ e $a \in A$, que existe uma única sucessão (u_n) de elementos de A tal que $u_1 = a$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, referir que estas condições definem a sucessão (u_n) «por recorrência» e saber que estes resultados podem estender-se, *mutatis mutandis*, à definição de funções de $\mathbb{N}_p$ em A , onde $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq p\}$, também designadas por «sucessões (indiciadas em $\mathbb{N}_p$)».
3. +Utilizar o princípio de indução para efetuar demonstrações.

Progressões aritméticas e geométricas

4. Calcular o termo geral de progressões aritméticas e geométricas

1. Designar, dados $a, r \in \mathbb{R}$, por «progressão aritmética de primeiro termo a e razão r » a sucessão definida por recorrência por $u_1 = a$ e, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
2. Justificar que o termo geral da progressão aritmética de primeiro termo $a \in \mathbb{R}$ e de razão $r \in \mathbb{R}$ é dado por $u_n = a + (n-1)r$.
3. Designar, dados $a, r \in \mathbb{R}$, por «progressão geométrica de primeiro termo a e razão r » a sucessão definida por recorrência por $u_1 = a$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times r$.
4. Justificar que o termo geral da progressão geométrica de primeiro termo a e razão r não nula é dado por $u_n = ar^{n-1}$.

5. Calcular a soma de um número finito de termos de progressões aritméticas e geométricas

1. Designar, dado $N \in \mathbb{N}$, por «progressão aritmética (finita) de comprimento N » (respetivamente «progressão geométrica (finita) de comprimento N »), a sequência $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ «dos N primeiros termos» de uma progressão aritmética (respetivamente geométrica) (u_n) .
2. +Reconhecer, dado $N \in \mathbb{N}$, que a soma dos termos de uma progressão aritmética de comprimento N , $(u_1, u_2, \dots, u_N)$, é dada por $S = \sum_{i=1}^N u_i = \frac{u_1 + u_N}{2} \times N$.
3. +Reconhecer, dado $N \in \mathbb{N}$, que a soma dos termos de uma progressão geométrica de comprimento N , de primeiro termo u_1 e de razão r diferente de 1, é dada por $S = u_1 \frac{1-r^N}{1-r}$.

Limites de sucessões

6. Definir o limite de uma sucessão

1. Identificar, dada uma sucessão (u_n) , um número real l como «limite da sucessão (u_n) » ou como «limite de u_n quando n tende para $+\infty$ » quando, para todo o número real $\delta > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \delta$, referir, nesta situação, que « u_n tende para l » (« $u_n \rightarrow l$ »), e designar a sucessão (u_n) por «convergente» quando um tal limite l existe e por «divergente» quando não for convergente.

2. Provar que uma sucessão convergente (u_n) admite um único limite e representá-lo por « $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ », « $\lim_n u_n$ » ou simplesmente por « $\lim u_n$ ».
3. +Reconhecer que as sucessões convergentes são limitadas.
4. Saber que uma sucessão crescente (respetivamente decrescente) em sentido lato e majorada (respetivamente minorada) é convergente.
5. Identificar uma sucessão (u_n) como «tendo limite $+\infty$ » ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_n u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$) quando, para todo o $L > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$, referir, nesta situação, que « u_n tende para $+\infty$ » (« $u_n \rightarrow +\infty$ ») e reconhecer que uma tal sucessão é divergente.
6. Identificar uma sucessão (u_n) como «tendo limite $-\infty$ » ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, $\lim_n u_n = -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$) quando, para todo o $L > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$, referir, nesta situação, que « u_n tende para $-\infty$ » (« $u_n \rightarrow -\infty$ ») e reconhecer que uma tal sucessão é divergente (e não tende para $+\infty$).
7. Reconhecer, dada uma sucessão (u_n) com limite $l \in \mathbb{R}$ ou tendendo para $+\infty$ ou para $-\infty$ (respetivamente sem limite), que qualquer sucessão (v_n) que possa ser obtida de (u_n) alterando apenas um número finito de termos, tem o mesmo limite (respetivamente não tem limite).
8. +Provar, dada uma sucessão (u_n) limitada e uma sucessão (u_n) com limite nulo, que $\lim u_n v_n = 0$.
9. Provar, dados números reais a, b, c e d e utilizando a definição de limite, que o limite da sucessão de termo geral $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ ($cn+d \neq 0$ para todo o n) é igual a $\frac{a}{c}$ se $c \neq 0$, a $+\infty$, se $c = 0$ e $\frac{a}{d} > 0$, a $-\infty$ se $c = 0$ e $\frac{a}{d} < 0$ e a $\frac{b}{d}$, se $a = c = 0$, ou seja, em particular, que o limite de uma sucessão constante é igual à própria constante.
10. Provar, utilizando a definição de limite, que, dado um número racional p , $\lim n^p = +\infty$ se $p > 0$ e $\lim n^p = 0$ se $p < 0$.
11. Provar, dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes, com limites respetivamente iguais a l_1 e l_2 , que a sucessão $(u_n + v_n)$ é convergente e que $\lim (u_n + v_n) = l_1 + l_2$.
12. #Provar, dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes, com limites respetivamente iguais a l_1 e l_2 , que a sucessão $(u_n v_n)$ é convergente e que $\lim u_n v_n = l_1 l_2$.
13. #Provar, dada uma sucessão (u_n) convergente de termos não nulos, com limite l_1 não nulo, que $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l_1}$ e justificar que se for também dada uma sucessão $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, com limite l_2 então a sucessão $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ é convergente e $\lim \frac{v_n}{u_n} = \frac{l_2}{l_1}$.
14. #Provar, dada uma sucessão convergente (u_n) e um número real a , que a sucessão de termo geral au_n é convergente e que $\lim (au_n) = a \lim u_n$.
15. #Provar, dada uma sucessão convergente (u_n) e um número racional r , que, se $r \in \mathbb{N}$, ou se os termos da sucessão forem todos não negativos e r for positivo, ou ainda se os termos da sucessão forem todos positivos, então a sucessão de termo geral $(u_n)^r$ é convergente e $\lim (u_n)^r = (\lim u_n)^r$.
16. Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , com limites respetivamente $+\infty$ e $l \in \mathbb{R}$ (ou ambas com limite $+\infty$), que $\lim(u_n + v_n) = +\infty$ e representar esta propriedade por « $+\infty + l = +\infty$ » (ou por « $+\infty + (+\infty) = +\infty$ »).
17. #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , com limites respetivamente $-\infty$ e $l \in \mathbb{R}$ (ou ambas com limite $-\infty$), que $\lim(u_n + v_n) = -\infty$ e representar esta propriedade por « $-\infty + l = -\infty$ » (ou por « $-\infty + (-\infty) = -\infty$ »).

18. Justificar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , que apenas da informação $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = -\infty$ nada se pode concluir acerca da existência de $\lim(u_n + v_n)$ e referir esta situação por «indeterminação do tipo $(+\infty) + (-\infty)$ ».
19. #Provar, dadas sucessões (u_n) , com limite $+\infty$, e (v_n) com limite $l \in \mathbb{R}^+$ ou $+\infty$ (respetivamente com limite $l \in \mathbb{R}^-$ ou $-\infty$), que $\lim(u_n v_n) = +\infty$ (respetivamente $\lim(u_n v_n) = -\infty$) e representar estas propriedades por « $(+\infty) \times l = +\infty$ » e « $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$ » (respetivamente por « $(+\infty) \times l = -\infty$ » e « $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$ »).
20. #Provar, dadas sucessões (u_n) , com limite $-\infty$, e (v_n) com limite $l \in \mathbb{R}^+$ (respetivamente com limite $l \in \mathbb{R}^-$ ou $-\infty$), que $\lim(u_n v_n) = -\infty$ (respetivamente $\lim(u_n v_n) = +\infty$) e representar esta propriedade por « $(-\infty) \times l = -\infty$ » (respetivamente por « $(-\infty) \times l = +\infty$ » e « $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$ »).
21. #Provar, dada uma sucessão (u_n) com limite $+\infty$ e de termos não negativos (respetivamente com limite $-\infty$) e um número racional r positivo (respetivamente $r \in \mathbb{N}$), que a sucessão de termo geral u_n^r tem limite $+\infty$ (respetivamente tem limite $+\infty$ se r for par e limite $-\infty$ se r for ímpar) e representar esta propriedade por « $(+\infty)^r = +\infty$ » (respetivamente por « $(-\infty)^r = +\infty$ » se r for par e por « $(-\infty)^r = -\infty$ » se r for ímpar).
22. Justificar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) que apenas da informação $\lim u_n = +\infty$ (ou $\lim u_n = -\infty$) e $\lim v_n = 0$ nada se pode concluir acerca da existência de $\lim(u_n v_n)$ e referir esta situação por «indeterminação do tipo $\infty \times 0$ ».
23. #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos, positiva a partir de certa ordem, com limite nulo (« $\lim v_n = 0^+$ »), que $\lim \frac{1}{v_n} = +\infty$ e representar esta propriedade por « $\frac{1}{0^+} = +\infty$ ».
24. #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos, negativa a partir de certa ordem, com limite nulo (« $\lim v_n = 0^-$ »), que $\lim \frac{1}{v_n} = -\infty$ e representar esta propriedade por « $\frac{1}{0^-} = -\infty$ ».
25. #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos e a tender para $+\infty$ ou para $-\infty$, que $\lim \frac{1}{v_n} = 0$ e representar esta propriedade por « $\frac{1}{\infty} = 0$ ».
26. Justificar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , que apenas da informação $\lim u_n = \pm\infty$ e $\lim v_n = \pm\infty$ (respetivamente $\lim u_n = \lim v_n = 0$, onde (v_n) não se anula) nada se pode concluir acerca da existência do limite $\lim \frac{u_n}{v_n}$ e referir esta situação por «indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ » (respetivamente «indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ »).
27. Justificar, dado um polinómio $P(x)$ de grau superior ou igual a 1, que a sucessão $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $\lim P(n) = +\infty$ se o coeficiente do termo de maior grau da forma reduzida de P for positivo e que $\lim P(n) = -\infty$ no caso contrário.
28. Calcular, dadas sucessões $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ e $(Q(n))_{n \in \mathbb{N}}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios, $Q(x)$ sem raízes naturais, o limite $\lim \frac{P(n)}{Q(n)}$ e relacioná-lo com os graus de $P(n)$ e $Q(n)$ e com os coeficientes dos termos de maior grau das respetivas formas reduzidas.
29. +Provar, dado um número real $a > 0$, que $\lim a^n = +\infty$ se $a > 1$ e que $\lim a^n = 0$ se $a < 1$.

30. +Provar, dado um número real $a > 0$, que $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, começando por observar, no caso de $a \geq 1$, que $1 \leq a \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.
31. Saber de memória os limites das sucessões de termo geral n^p ($p \in \mathbb{Q}$), a^n e $\sqrt[n]{a}$ ($a > 0$).

7. *Resolver problemas*

1. +Resolver problemas envolvendo o estudo da monotonia e a determinação de majorantes e minorantes de sucessões.
2. +Resolver problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas.
3. +Calcular, por meios algébricos, o limite de sucessões em situação indeterminada e referir esse cálculo como um «levantamento da indeterminação».
4. +Resolver problemas envolvendo a noção de limite de uma sucessão.

Funções Reais de Variável Real FRVR11

Limites segundo Heine de funções reais de variável real

1. Definir limite de uma função num ponto e estudar as respetivas propriedades fundamentais

1. Identificar, dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, a como «ponto aderente a A » quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$.
2. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como «limite de $f(x)$ quando x tende para a » quando a for aderente ao domínio D_f de f e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a , $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por « $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ », referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para a » e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.
3. Identificar, dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como o «limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a » quando $b = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, representar b por $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, designá-lo também por «limite de $f(x)$ à esquerda de a », referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores inferiores a a » e estender esta definição ao caso de limites infinitos.
4. Identificar, dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como o «limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores a a » quando $b = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, representar b por $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, designá-lo também por «limite de $f(x)$ à direita de a », referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores superiores a a » e estender esta definição ao caso de limites infinitos.
5. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto a aderente ao respetivo domínio D_f , que se $a \notin D_f$ e se os limites $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existirem e forem iguais, então existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
6. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in D_f$, que se os limites $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existirem e forem ambos iguais a $f(a)$, então existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
7. Identificar, dada uma função real de variável real f cujo domínio não é majorado como «limite de $f(x)$ quando x tende para mais infinito» quando para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f com limite $+\infty$, $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para mais infinito» e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.
8. Identificar, dada uma função real de variável real f cujo domínio não é minorado como «limite de $f(x)$ quando x tende para menos infinito» quando para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f com limite $-\infty$, $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para menos infinito» e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.

9. Justificar que os limites da soma, do produto e do quociente de funções $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ e do produto por um escalar α e da potência de expoente racional r de uma função $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, se calculam, em pontos aderentes aos domínios respetivamente de $f + g$, fg , $\frac{f}{g}$, αf e f^r a partir dos limites de f e g nesse pontos de forma análoga ao caso das sucessões, reconhecendo que se mantêm as situações indeterminadas.
10. Justificar, dado $D \subset \mathbb{R}$, funções $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ e um ponto a aderente a D , que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e se g é limitada então $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = 0$ e estender este resultado ao caso de limites por valores superiores ou inferiores a a bem como ao caso de limites em $\pm\infty$.
11. Justificar, dadas funções reais de variável real f e g e um ponto a aderente a $D_{g \circ f}$, que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \in \mathbb{R}$ então $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

2. Definir a noção de continuidade e as respetivas propriedades fundamentais

1. Justificar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio que se o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe então é igual a $f(a)$.
2. Designar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, a função f por «contínua em a » quando o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.
3. Designar, dada uma função real de variável real f de domínio D_f , a função f por «contínua no conjunto $A \subset D_f$ » quando f é contínua em todos os pontos de A e simplesmente por «contínua» quando é contínua em todos os pontos de D_f .
4. Saber que se uma função real de variável real f de domínio D_f for contínua em $a \in D_f$ e $f(a) \neq 0$ (respetivamente $f(a) > 0$ ou $f(a) < 0$) então existe uma vizinhança V de a tal que f não se anula (respetivamente f é positiva ou f é negativa) em $V \cap D_f$.
5. Justificar que se as funções reais de variável real $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas num ponto a , então as funções $f + g$, $f - g$ e $f \times g$ são contínuas em a e, se $g(a) \neq 0$, a função $\frac{f}{g}$ é contínua em a .
6. Designar por «função racional» uma função real de variável real dada por uma expressão da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios.
7. Justificar que as funções polinomiais e racionais são contínuas.
8. Justificar que as potências de expoente racional são contínuas.
9. Saber que as funções seno e cosseno são contínuas e justificar que a função tangente é contínua.
10. Justificar, dadas funções reais de variável real f e g e $a \in D_{g \circ f}$, que se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$ então a função composta $g \circ f$ é contínua em a .
11. Justificar a continuidade de funções obtidas por aplicação sucessiva de operações de adição algébrica, multiplicação, divisão e composição de funções «de referência para a continuidade»: funções polinomiais, potências de expoente racional e as funções cosseno, seno e tangente.

3. Definir assíntotas ao gráfico de uma função

1. Identificar, dado um referencial cartesiano, uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, a reta de equação $x = a$ como « assíntota vertical ao gráfico de f » quando pelo menos um dos limites laterais de f no ponto a for infinito.
2. Designar, dada uma função real de variável real f e um referencial cartesiano, a reta de equação $y = mx + b$ ($m, b \in \mathbb{R}$) por « assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ » (respetivamente por « assíntota ao gráfico de f em $-\infty$ ») se $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$ (respetivamente se $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$) e designá-la, quando $m = 0$, por « assíntota horizontal ».
3. Provar, dada uma função real de variável real f , que a condição $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ (respetivamente $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m$) é necessária (mas não suficiente) para que exista uma reta de declive m que seja assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ (respetivamente em $-\infty$).

4. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções racionais.
2. +Calcular, por meios algébricos, limites de funções reais de variável real em situação de indeterminação e referir um desses cálculos como um « levantamento da indeterminação ».
3. +Resolver problemas envolvendo a noção de limite e de continuidade de uma função real de variável real.
4. +Resolver problemas envolvendo a determinação das assíntotas e da representação gráfica de funções racionais definidas em $\mathbb{R} \setminus \{c\}$ por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$.
5. +Resolver problemas envolvendo a determinação de assíntotas ao gráfico de funções racionais e de funções definidas pelo radical de uma função racional.

Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

5. Definir a noção de derivada

1. Identificar, dada uma função real de variável real f e dois pontos a e b do respetivo domínio, a « taxa média de variação de f entre a e b » como $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
2. Justificar, dada uma função real de variável real f e dois pontos a e b do respetivo domínio, que o declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ é igual à taxa média de variação de f entre a e b .
3. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto x_0 do respetivo domínio, a « taxa instantânea de variação de f no ponto x_0 » como o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, quando este existe e é finito, designá-lo por « derivada de f no ponto x_0 », representá-lo por « $f'(x_0)$ » e, nesse caso, identificar a função f como « diferenciável em x_0 » ou « derivável em x_0 ».
4. Justificar, dada uma função real de variável real f e um ponto x_0 do respetivo domínio, que o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe se e somente se o limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existir e que, nesse caso, ambos os limites são iguais.

- Identificar, dada uma função real de variável real f diferenciável em $x_0 \in D_f$ e um referencial ortonormado, a «reta tangente ao gráfico de f no ponto $P_0(x_0, f(x_0))$ » como a reta de declive $f'(x_0)$ que passa por P_0 e justificar, representando por $M(x)$, $x \in D_f$, o declive da reta secante ao gráfico de f que passa pelo ponto P_0 e pelo ponto $P(x, f(x))$, que $\lim_{x \rightarrow x_0} M(x) = f'(x_0)$.

6. Aplicar a noção de derivada à cinemática do ponto

- Identificar, fixados um instante τ_0 para origem das medidas de tempo, uma unidade de tempo T , uma reta numérica r com unidade de comprimento L e um intervalo I , uma função $p : I \rightarrow \mathbb{R}$, como «função posição de um ponto P que se desloca na reta r durante o intervalo de tempo I », se, para cada $t \in I$, $p(t)$ for a abcissa do ponto de r que representa a posição que P ocupa, t unidades de tempo T depois de τ_0 se $t > 0$, ou $|t|$ unidades de tempo T antes de τ_0 se $t < 0$, designando também por «instante», neste contexto, cada $t \in I$.
- Identificar, fixados um instante τ_0 para origem das medidas de tempo, uma unidade de tempo T , uma reta numérica r com unidade de comprimento L , um intervalo I , a função posição p de um ponto P que se desloca na reta r durante o intervalo de tempo I , e dados dois instantes $t_1 < t_2$ de I , a «velocidade média de P no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ na unidade L/T » como a taxa média de variação de p entre t_1 e t_2 , $\frac{p(t_2) - p(t_1)}{t_2 - t_1}$, e, para $t \in I$, a «velocidade instantânea de P no instante t na unidade L/T » como a derivada de p em t , $p'(t)$, caso exista.

7. Operar com derivadas

- Designar, dada uma função real de variável real f , a «função derivada de f » como a função de domínio $D_{f'} = \{x \in D_f : f \text{ é diferenciável em } x\}$ que a cada $x \in D_{f'}$ faz corresponder $f'(x)$.
- Identificar uma função real de variável real como «diferenciável num conjunto A » quando é diferenciável em todos os pontos de A .
- Justificar que se uma função real de variável real f é diferenciável num conjunto A e é crescente (respetivamente decrescente), no sentido lato, nesse conjunto, então para todo o $x \in A$, $f'(x) \geq 0$ (respetivamente $f'(x) \leq 0$).
- Provar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, que se f é diferenciável em a , f é contínua em a e justificar que a recíproca não é verdadeira.
- Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D e um número real k , que as funções $f + g$ e kf são diferenciáveis em a e que se tem $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ e $(kf)'(a) = kf'(a)$.
- Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D , que a função fg é diferenciável em a e que $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

7. #Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D , com $g(a) \neq 0$, que a função $\frac{f}{g}$ é diferenciável em a e que $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.
8. +Provar, dada uma função $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $a \in D_f$ e uma função real de variável real $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $D'_f \subset D_g$, diferenciável em $f(a)$, que a função composta $g \circ f$ é diferenciável em a e que $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.
9. Calcular, utilizando a definição, uma expressão analítica para os valores das funções derivadas das «funções de referência (para o cálculo de derivadas)» definidas por $x, x^2, x^3, \frac{1}{x}$ e $\sqrt{x}$, ou constantes, e saber de memória estes resultados.
10. Provar, dado um número natural n (respetivamente dado um número inteiro n negativo), que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}$ (respetivamente de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) definida por $f(x) = x^n$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = nx^{n-1}$, considerando também estas funções como «funções de referência (para o cálculo de derivadas)» e saber de memória este resultado.
11. +Provar, dado um número natural par n (respetivamente dado um número natural ímpar $n > 1$), que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}^+$ (respetivamente de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
12. Provar, para todo o número racional α , que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x^\alpha$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, considerando também estas funções como «funções de referência (para o cálculo de derivadas)» e saber de memória este resultado.
13. +Determinar, utilizando as regras de derivação e as derivadas das funções de referência, uma expressão analítica para as derivadas de funções obtidas por aplicação sucessiva de operações de adição algébrica, multiplicação, divisão e composição a funções de referência.

8. Aplicar a noção de derivada ao estudo de funções

1. Provar, dada uma função real de variável real f com domínio contendo um intervalo $I =]a, b[$, ($a < b$), e diferenciável em $x_0 \in I$, que se f atinge um extremo local em x_0 então $f'(x_0) = 0$ e dar um contraexemplo para a implicação recíproca.
2. Saber, dada uma função real de variável real f contínua em $[a, b]$, ($a < b$), e diferenciável em $]a, b[$ que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, interpretar geometricamente este resultado e designá-lo por «Teorema de Lagrange».
3. Justificar, utilizando o Teorema de Lagrange, que se uma função real de variável real f é contínua num dado intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b , diferenciável em $]a, b[$ e, $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) > 0$ (respetivamente $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) < 0$) então f é estritamente crescente (respetivamente estritamente decrescente) no intervalo I .
4. Justificar, utilizando o Teorema de Lagrange, que se uma função real de variável real f é contínua num dado intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b , diferenciável em $]a, b[$ e $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) \geq 0$ (respetivamente $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) \leq 0$) então f é crescente em sentido lato (respetivamente decrescente em sentido lato) no intervalo I .

5. Justificar que se uma função real de variável real f é contínua num dado intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b , diferenciável em $]a, b[$ e, $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$, então f é constante em I .

9. *Resolver problemas*

1. +Resolver problemas envolvendo a determinação de equações de retas tangentes ao gráfico de funções reais de variável real.
2. +Resolver problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas e mudanças de unidades de velocidade.
3. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções reais de variável real, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos.

Estatística EST11

Reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficiente de correlação

1. Determinar os parâmetros da reta de mínimos quadrados

1. Designar, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n , uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano e uma reta t de equação $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) por «desvio vertical do ponto $P_i(x_i, y_i)$ em relação à reta t » ($i \in \{1, \dots, n\}$) a quantidade $y_i - ax_i - b$, interpretá-lo geometricamente e representá-lo por « e_i ».
2. Provar, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n , uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano e uma reta t de equação $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), que as condições $\sum_{i=1}^n e_i = 0$ e $b = \bar{y} - a\bar{x}$ são equivalentes, onde $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ e $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$.
3. +Reconhecer, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n , uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano, não pertencentes a uma mesma reta vertical, e uma reta t de equação $y = ax + b$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $b = \bar{y} - a\bar{x}$, ou seja, tal que é nula a soma $\sum_{i=1}^n e_i$ dos desvios verticais da sequência de pontos em relação à reta t , que a função definida em $\mathbb{R}$ pela expressão $f(a) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$ atinge um mínimo absoluto no ponto $a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{SS_x}$ e designar a reta t com esse declive (e ordenada na origem igual a $\bar{y} - a\bar{x}$) por «reta de mínimos quadrados» da sequência de pontos.
4. Identificar, dadas duas variáveis estatísticas quantitativas x e y em determinada população e uma amostra A de dimensão $n \in \mathbb{N}$ dessa população cujos elementos estão numerados de 1 a n , a «amostra bivariada das variáveis estatísticas x e y » (ou simplesmente «amostra de dados bivariados (quantitativos)») como a sequência $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$, representá-la por « (x, y) » e designar por «dimensão da amostra bivariada» o número natural n .
5. Determinar, em casos concretos de amostras de dados bivariados, qual das variáveis estatísticas deverá ser tomada como independente e qual deve ser tomada como dependente, utilizando argumentos que envolvam o conhecimento empírico das condicionantes físicas (ou outras) que poderão ter determinado a estrutura de relação entre as duas variáveis estatísticas.
6. Designar, dada uma amostra de dados bivariados, a variável considerada dependente por «variável resposta» e a variável considerada independente por «variável explicativa».
7. Designar, fixado um referencial ortonormado num plano, $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra de dados bivariados quantitativos $(x, y) = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$, por «nuvem de pontos» o conjunto $\{(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))\}$ e saber que uma análise visual e intuitiva da nuvem de pontos poderá permitir argumentar se será ou não adequada a interpretação da relação entre as duas variáveis estatísticas através do ajustamento da reta de mínimos quadrados.

8. Determinar, dada uma amostra de dados bivariados quantitativos e após a escolha da variável resposta e da variável explicativa e, ainda, da avaliação empírica da possível existência de relação linear entre as duas variáveis estatísticas mediante a observação da representação gráfica da nuvem de pontos, o declive e a ordenada na origem da reta de mínimos quadrados.
9. Designar, dado um número natural n e uma amostra de dados bivariados quantitativos (x, y) , por «coeficiente de correlação linear» o quociente $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}}$, representá-lo por « r », reconhecer que $r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}$ onde a é o declive da reta de mínimos quadrados, justificar que r e a têm o mesmo sinal e saber que $|r|$ é sempre menor ou igual a 1, tomando o valor 1 unicamente nos casos em que todos os pontos $P_i(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq n$, estão alinhados e referir que a «associação linear entre as variáveis estatísticas» é positiva (respetivamente negativa) se $r > 0$ (respetivamente se $r < 0$) e que é tão mais «forte» quanto mais perto de 1 estiver $|r|$.

2. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a determinação da reta de mínimos quadrados.
2. +Resolver problemas cujo contexto seja o da análise de dados bivariados, envolvendo a identificação da variável resposta e da variável explicativa e a análise empírica do ajustamento da reta de mínimos quadrados.
3. +Resolver problemas envolvendo o cálculo e interpretação do coeficiente de correlação.

Cálculo Combinatório CC12

Introdução ao cálculo combinatório

1. Conhecer propriedades das operações sobre conjuntos

1. #Provar, dados conjuntos A e B , que $A \subset B$ se e somente se $A \cap B = A$ e se e somente se $A \cup B = B$ e que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
2. Justificar, dados subconjuntos A e B de um conjunto U , que $A \subset B$ se e somente se $\bar{B} \subset \bar{A}$.
3. #Provar, dados conjuntos A , B e C , que são verdadeiras as igualdades $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ e $A \cap A = A$, bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos « $\cap$ » e « $\cup$ », e designá-las respetivamente por «associatividade», «comutatividade», «distributividade» e «idempotência».
4. #Provar, dado um conjunto U , que, para quaisquer subconjuntos A e B de U , $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ e $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, e designar estas igualdades por «Leis de De Morgan para conjuntos».
5. Provar, dados conjuntos A , B e C , que $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ e que $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$.

2. Conhecer factos elementares da combinatória

1. Saber, dados conjuntos A e B , que $\#A = \#B$ se e somente se existir uma bijeção de A sobre B e nesse caso identificar os conjuntos A e B como «equipotentes».
2. Saber, dados conjuntos A e B tais que $A \cap B = \emptyset$, que $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.
3. +Provar, dados conjuntos A e B de cardinais respetivamente iguais a $n \in \mathbb{N}$ e a $m \in \mathbb{N}$, que o cardinal do produto cartesiano $A \times B$ é igual a $n \times m$.
4. +Reconhecer que existem exatamente n^p sequências de $p \in \mathbb{N}_0$ elementos, não necessariamente distintos, escolhidos num conjunto de cardinal $n \in \mathbb{N}$, designar esse número por «arranjos com repetição de n elementos p a p » (« ${}^nA'_p$ ») e reconhecer que, dados n objetos, existem exatamente ${}^nA'_p$ formas distintas de efetuar p extrações sucessivas de um desses objetos, repondo o objeto escolhido após cada uma das extrações.
5. +Designar, dado um conjunto E , por «conjunto das partes de E » o conjunto formado pelos subconjuntos de E , representá-lo por $\mathcal{P}(E)$ e reconhecer que se E tiver $p \in \mathbb{N}_0$ elementos ($\#E = p$) então $\mathcal{P}(E)$ tem 2^p elementos ($\#\mathcal{P}(E) = 2^p$).
6. Reconhecer que existem exatamente $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ formas de ordenar os elementos de um conjunto de cardinal $n \geq 1$, designar este número por «(número de) permutações de n elementos» e representá-lo por « $n!$ » (« n fatorial»).
7. Saber que, por convenção, $0! = 1$, reconhecendo que esta definição é a única para a qual a igualdade $n! = n(n-1)!$ vale também para $n = 1$.

8. +Reconhecer que existem exatamente $n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ sequências de $p \in \mathbb{N}_0$ elementos distintos escolhidos num conjunto de $n \geq p$ elementos, designar este número por «(número de) arranjos (sem repetição) de n elementos p a p » (« nA_p ») e reconhecer que, dados n objetos, existem exatamente nA_p formas distintas de efetuar p extrações sucessivas de um desses objetos, sem repor o objeto escolhido após cada uma das extrações.
9. Justificar que um conjunto de $n \in \mathbb{N}_0$ elementos tem exatamente $\frac{{}^nA_p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ subconjuntos de p elementos ($0 \leq p \leq n$), e designar este número por «(número de) combinações de n elementos p a p », reconhecendo que, dado $n \in \mathbb{N}$ objetos, existem exatamente $\frac{{}^nA_p}{p!}$ formas de escolher p ($p \leq n$) de entre eles e representar este número por « nC_p », por « C_p^n » ou por « $\binom{n}{p}$ », reconhecendo que se trata de um número natural.
10. +Simplificar expressões envolvendo fatoriais, arranjos e combinações.

3. Conhecer o triângulo de Pascal e o binómio de Newton

1. Justificar, dados números naturais n e p , $p \leq n$, que ${}^nC_p = {}^nC_{n-p}$ de dois modos distintos: utilizando um cálculo algébrico e um argumento combinatório.
2. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$, que $\sum_{k=0}^n {}^nC_k = 2^n$, interpretando esta igualdade à luz do número de subconjuntos de um conjunto de n elementos.
3. +Reconhecer, dados números naturais n e p , $p < n$, que ${}^{n+1}C_{p+1} = {}^nC_p + {}^nC_{p+1}$ e utilizar esta igualdade para construir, progressivamente, o «triângulo de Pascal», no qual figuram, na n -ésima linha, os números ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \dots, {}^nC_{n-1}$ e nC_n , por esta ordem.
4. +Reconhecer, dado $n \in \mathbb{N}$, a igualdade entre polinómios nas variáveis x e y , $(x+y)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1}y^1 + {}^nC_2 x^{n-2}y^2 + \dots + {}^nC_{n-1} x^1 y^{n-1} + y^n = \sum_{k=0}^n {}^nC_k x^{n-k} y^k$, designando-a por «binómio de Newton», e por esta razão, designar os números nC_p igualmente por «coeficientes binomiais».

4. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo operações sobre conjuntos e cardinais de conjuntos.
2. +Resolver problemas de contagens envolvendo arranjos e combinações.
3. +Resolver problemas envolvendo o triângulo de Pascal e o binómio de Newton.

Probabilidades PRB12

Definição de probabilidade

1. Definir espaços de probabilidade

1. Identificar, dado um conjunto finito E , uma «probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$ das partes de E » como uma função P de domínio $\mathcal{P}(E)$ e de valores não negativos tal que $P(E) = 1$ e, para $A, B \in \mathcal{P}(E)$ disjuntos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, designar, neste contexto, o conjunto E por «espaço amostral» ou «universo dos resultados», $\mathcal{P}(E)$ por «espaço dos acontecimentos», os respetivos elementos por «acontecimentos», $P(A)$, para $A \in \mathcal{P}(E)$, por «probabilidade do acontecimento A » e o terno $(E, \mathcal{P}(E), P)$ por (um caso particular de) «espaço de probabilidade».
2. Designar, dado um conjunto finito E e uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$, o conjunto vazio $\emptyset$ por «acontecimento impossível», o conjunto E por «acontecimento certo», dois acontecimentos por «incompatíveis» ou por «mutuamente exclusivos» se forem disjuntos, por «complementares» ou por «contrários» se forem disjuntos e a respetiva união for igual a E e por «equiprováveis» se tiverem a mesma probabilidade.
3. Designar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e um acontecimento $A \subset E$, por «casos favoráveis a A » os elementos de A e por «casos possíveis» os elementos do espaço amostral E .
4. Designar, dado um conjunto finito E e uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$, um acontecimento A por «elementar» quando $\#A = 1$ e por «composto» quando $\#A \geq 2$.
5. Justificar, dado um conjunto finito E , que a função P de domínio $\mathcal{P}(E)$ definida por $\forall A \in \mathcal{P}(E), P(A) = \frac{\#A}{\#E}$ é a única probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ tal que os acontecimentos elementares são equiprováveis e designar esta definição da função de probabilidade por «definição de Laplace».
6. Provar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e um acontecimento $A \in \mathcal{P}(E)$, que $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ e que $P(\emptyset) = 0$.
7. Provar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, que se $A \subset B$, $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$, justificando que $P(A) \leq P(B)$, e designar este último resultado por «monotonia da probabilidade».
8. Justificar, dado um conjunto finito E e uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$, que $\forall A \in \mathcal{P}(E), P(A) \in [0, 1]$.
9. Provar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
10. Saber que se podem considerar espaços amostrais E infinitos, podendo-se definir, nessa situação, uma função de probabilidade P cujas propriedades generalizam as que caracterizam este conceito no caso em que E é finito, desde que se defina de forma apropriada a classe de acontecimentos, subconjunto de $\mathcal{P}(E)$, que constitui o domínio de p .

2. Definir probabilidade condicionada

1. Reconhecer, no quadro de uma experiência aleatória em que o universo dos resultados é finito, que, se se souber que um dado acontecimento B ocorreu, o número de casos possíveis da experiência aleatória é $\#B$ e o número de casos favoráveis de um acontecimento A é dado por $\#(A \cap B)$, e justificar que, se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de ocorrer A sabendo que ocorreu B é igual a $\frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ em que P representa a probabilidade no espaço inicial.
2. Designar, dada uma probabilidade P e dois acontecimentos A e B , com $P(B) \neq 0$, por «probabilidade de A se B », por «probabilidade condicionada de A se B » ou por «probabilidade de ocorrer A sabendo que ocorreu B » a quantidade $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ e representá-la por « $P(A|B)$ ».
3. #Provar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e um acontecimento $B \in \mathcal{P}(E)$, com $P(B) \neq 0$, que a função P_B definida pela expressão $P_B(A) = P(A|B)$ é uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$.
4. Justificar, dada uma probabilidade P e dois acontecimentos A e B que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ se e somente se $P(B) \neq 0$ e $P(A|B) = P(A)$, e identificar os acontecimentos A e B como «independentes» quando é verdadeira uma destas condições equivalentes.
5. #Provar, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$, $N \in \mathbb{N}$ e uma partição $\{E_1, E_2, \dots, E_N\}$ de E constituída por acontecimentos de probabilidade não nula, que para todo o acontecimento $A \subset E$, $P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + \dots + P(A|E_N)P(E_N)$ e designar este resultado por «Teorema da probabilidade total».

3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo cálculo combinatório e a determinação de probabilidades em situações de equiprobabilidade de acontecimentos elementares.
2. +Resolver problemas envolvendo espaços de probabilidades e a determinação de propriedades da função de probabilidade.
3. +Resolver problemas envolvendo probabilidade condicionada, acontecimentos independentes e o Teorema da probabilidade total.

Funções Reais de Variável Real FRVR12

Limites e Continuidade

1. Utilizar teoremas de comparação e os teoremas das sucessões e funções encastradas

1. #Provar, dadas sucessões convergentes (u_n) e (v_n) , que se, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$ então $\lim u_n \leq \lim v_n$.
2. #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , que se, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$ e $\lim u_n = +\infty$ então $\lim v_n = +\infty$.
3. #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , que se, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$ e $\lim v_n = -\infty$ então $\lim u_n = -\infty$.
4. #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes com o mesmo limite l e uma sucessão (w_n) tal que, a partir de certa ordem, $u_n \leq w_n \leq v_n$, que (w_n) é convergente e $\lim w_n = l$, e designar este resultado por «Teorema das sucessões encastradas».
5. #Provar, dadas funções reais de variável real f e g de domínio D e $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente a D que, se para todo o $x \in D$, $f(x) \geq g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ (respetivamente $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$), então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (respetivamente $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$) e estender este resultado ao caso de limites por valores superiores ou inferiores a a bem como ao caso de limites em $\pm\infty$.
6. #Provar, dado um número real l , funções reais de variável real f, g e h de domínio D e $a \in \mathbb{R}$, que se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ e se para todo o $x \in D$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, estender este resultado ao caso de limites por valores superiores ou inferiores a a bem como ao caso de limites em $\pm\infty$, e designar este resultado por «Teorema das funções encastradas».

2. Conhecer propriedades elementares das funções contínuas

1. Saber, dada uma função real de variável real f contínua num intervalo $I = [a, b]$, ($a < b$), que para qualquer valor $k \in \mathbb{R}$ do intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$ existe $c \in I$ tal que $f(c) = k$ e designar esta propriedade por «Teorema dos valores intermédios» ou por «Teorema de Bolzano-Cauchy».
2. Saber, dada uma função real de variável real f contínua num intervalo $[a, b]$, ($a < b$), que f admite máximo e mínimo absolutos e designar este resultado por «Teorema de Weierstrass».

3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo os teoremas de comparação e das sucessões e funções encastradas para o cálculo de limites e o estudo da continuidade de funções reais de variável real.

Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

4. Relacionar a derivada de segunda ordem com o sentido da concavidade do gráfico de uma função e com a noção de aceleração

1. Designar, dada uma função real de variável real f diferenciável num intervalo I tal que a função derivada f' é diferenciável num ponto $a \in I$, a derivada $(f')'(a)$ por «derivada de segunda ordem de f no ponto a » e representá-la por « $f''(a)$ ».
2. Identificar uma função real de variável real f como «duas vezes diferenciável» num dado intervalo I se $f''(a)$ existir para todo o $a \in I$.
3. +Provar, dada uma função f duas vezes diferenciável num intervalo $I =]a, b[$, $a < b$, e $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$, que se $f''(c) > 0$ (respetivamente $f''(c) < 0$) f admite um mínimo (respetivamente um máximo) local em c .
4. +Provar, dada uma função f diferenciável num intervalo I , que f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente voltada para baixo) em I se e somente se f' for estritamente crescente (respetivamente estritamente decrescente) em I .
5. Justificar, dada uma função f duas vezes diferenciável num intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b , que se para todo o $x \in]a, b[$, $f''(x) > 0$ (respetivamente $f''(x) < 0$), o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente voltada para baixo) no intervalo I .
6. Justificar, dada uma função f duas vezes diferenciável num intervalo I , que se o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente voltada para baixo) no intervalo I então, para todo o $x \in I$, $f''(x) \geq 0$ (respetivamente $f''(x) \leq 0$).
7. Identificar, dada uma função f de domínio D , o ponto $(c, f(c))$ onde $c \in D$, como «ponto de inflexão do gráfico de f » se existirem números reais $a < c$ e $b > c$ tais que $[a, b] \subset D$ e a concavidade do gráfico de f no intervalo $[a, c]$ tem sentido contrário à concavidade do gráfico de f no intervalo $[c, b]$ e, nesse caso, referir que «o gráfico de f tem ponto de inflexão em c ».
8. Justificar, dada uma função f duas vezes diferenciável num intervalo I , que se o gráfico de f tem ponto de inflexão em c então $f''(c) = 0$.
9. Identificar, fixado um instante T_0 para origem das medidas de tempo, uma unidade de tempo T , uma reta numérica r com unidade de comprimento L , um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, não vazio nem reduzido a um ponto, dada a função posição p de um ponto P que se desloca na reta r durante o intervalo de tempo I e dois instantes $t_1 < t_2$ de I , a «aceleração média de P no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ na unidade L/T^2 » como a taxa média de variação de p' entre t_1 e t_2 , $\frac{p'(t_2) - p'(t_1)}{t_2 - t_1}$, e, para $t \in I$, a «aceleração instantânea de P no instante t na unidade L/T^2 » como a derivada de segunda ordem de p em t .

5. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo propriedades das funções diferenciáveis.
2. +Esboçar o gráfico de funções definidas analiticamente começando por determinar o respetivo domínio e, sempre que possível, os zeros, os intervalos de monotonia, os extremos locais e absolutos, o sentido das concavidades, os pontos de inflexão e as assíntotas ao respetivo gráfico.

3. +Resolver problemas de otimização envolvendo funções diferenciáveis.
4. +Resolver problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas, acelerações médias e acelerações instantâneas e mudanças de unidades de aceleração.
5. +Resolver problemas envolvendo a determinação de valores aproximados de soluções de equações da forma $f(x) = g(x)$ (f e g funções contínuas) utilizando uma calculadora gráfica, em casos em que é possível justificar, através da leitura das informações fornecidas pela calculadora, que determinados valores coincidem, até à casa decimal indicada, com soluções da referida equação, utilizando propriedades conhecidas das funções contínuas, como o Teorema dos valores intermédios, ou outras propriedades analíticas das funções f e g , previamente estabelecidas.

Trigonometria e Funções Trigonométricas TRI12

Diferenciação de funções trigonométricas

1. Estabelecer fórmulas de trigonometria

1. +Reconhecer, dados ângulos α e β cuja soma é um ângulo convexo, que $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ e $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$.
2. +Reconhecer, dado um ângulo α convexo de amplitude superior à de um ângulo β , que $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ e $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$, onde $\alpha - \beta$ é um ângulo cuja soma com β é igual a α .
3. Saber que, para todos os $x, y \in \mathbb{R}$, $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$, $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, estendendo-se assim as fórmulas já conhecidas envolvendo apenas medidas de amplitude de ângulos geométricos convexos e justificar que $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ e $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

2. Calcular a derivada de funções trigonométricas

1. +Reconhecer que para todo o $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leq x \leq \tan x$ e provar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, referindo este limite como «limite notável».
2. Provar que as funções seno e cosseno são diferenciáveis e que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x$ e $\cos' x = -\sin x$.
3. Provar que a função tangente é diferenciável no respetivo domínio $D_{\tan}$ e que para todo o $x \in D_{\tan}$, $\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

3. Relacionar osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton

1. Designar por «oscilador harmónico» um sistema constituído por um ponto que se desloca numa reta numérica em determinado intervalo de tempo I , de tal forma que a respetiva abcissa, como função de $t \in I$, seja dada por uma expressão da forma $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, onde $A > 0$, $\omega > 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi[$, designar estas constantes, respetivamente, por «amplitude», «pulsção» e «fase», justificar que a função x é periódica de período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e designar $f = \frac{1}{T}$ por «frequência» do oscilador harmónico.
2. Esboçar o gráfico de funções definidas por $f(x) = a \sin(bx + c) + d$, $f(x) = a \cos(bx + c) + d$ e $f(x) = a \tan(bx + c) + d$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$.
3. Saber, dado um ponto material P de massa m colocado na extremidade de uma mola cuja outra extremidade se encontra fixa, que tomando por origem da reta numérica em que P se desloca o respetivo ponto de equilíbrio, a abcissa $x(t)$ da posição de P no instante t satisfaz a equação $mx''(t) = -\alpha x(t)$ ($\alpha > 0$), interpretando o termo $-\alpha x(t)$ como a força exercida pela mola sobre P («lei de Hooke»), designar a igualdade desta força com o produto da massa pela aceleração de P por (um caso particular da) «segunda Lei de Newton» e resolver problemas envolvendo sistemas massa-mola com estas características.

4. Justificar, dado $\alpha > 0$, que as funções definidas por uma expressão da forma $x(t) = A \cos(\sqrt{\alpha}t + b)$, onde A e b são constantes reais, satisfazem a equação diferencial $x'' = -\alpha x$, saber que todas as soluções desta equação são dessa forma, e reconhecer que um sistema constituído por uma mola e por um ponto material P colocado na respetiva extremidade constitui um oscilador harmónico.

4. *Resolver problemas*

1. +Resolver problemas envolvendo a utilização de fórmulas trigonométricas, o estudo de funções definidas a partir de funções trigonométricas, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia bem como os extremos relativos e absolutos.
2. +Resolver problemas envolvendo derivadas de funções trigonométricas e osciladores harmónicos.

Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas FEL12

Juros compostos e número de Neper

1. Operar com juros compostos e definir o número de Neper

1. Designar, dado um número real r , uma unidade de medida temporal T e $n \in \mathbb{N}$, por «aplicar juros compostos à taxa de $r\%$ a T durante n períodos de tempo T » a um dado capital disponível em certo instante inicial t_0 , a operação que consiste em calcular um juro igual a $r\%$ do capital disponível no início de cada período de tempo com duração igual a T e adicioná-lo ao capital findo esse período, começando este processo a partir do instante t_0 , e levando-o a cabo n vezes seguidas.
2. Provar, dado um capital inicial C_0 , que, aplicando-se juros compostos à taxa de $r\%$ a T , o capital disponível ao fim de $n \in \mathbb{N}$ períodos de tempo T é igual a $C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$.
3. Justificar, dado um número real r , um número natural n e um capital C_0 disponível no início de um determinado período de um ano, que dividindo esse ano em n períodos iguais de medida temporal T e aplicando juros compostos à taxa de $\frac{r}{n}\%$ a T durante esses n períodos ao capital inicial C_0 , o capital disponível ao fim do ano é igual a $C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^n$.
4. +Provar que a sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente, majorada, justificar que é convergente, designar por «número de Neper» (« e ») o respetivo limite, interpretar todos estes resultados à luz da noção de juro composto e saber que e é um número irracional.

Funções exponenciais

2. Definir as funções exponenciais e estabelecer as respetivas propriedades principais

1. +Provar, dado um número real $a > 0$, que a função definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $a < 1$.
2. +Provar, dado um número real $a > 0$, que a função f definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ e justificar que f é contínua.
3. +Provar, dado um número real $a > 1$, que a função f definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, utilizando o limite já conhecido $\lim a^n = +\infty$ e o facto de f ser crescente.
4. Justificar, dado $a \in \mathbb{R}$, que a função f definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ quando $a > 1$, e, quando $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
5. Saber, dado um número real $a > 0$ e um número irracional x , que se $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma qualquer sucessão de números racionais de limite x , a sucessão de termo geral a^{q_n} é convergente e o respetivo limite depende apenas de x e de a , e que, representando esse limite por « a^x », se estende a função definida por $f(x) = a^x$ em $\mathbb{Q}$ ao conjunto $\mathbb{R}$,

obtendo-se por este processo uma função contínua nesse conjunto, designada por «função exponencial de base a », que mantém a monotonia, os limites em $\pm\infty$ e as propriedades algébricas de f em $\mathbb{Q}$: para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e $b > 0$, $a^x \times a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $(ab)^x = a^x b^x$ e $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

6. Saber que, tal como no caso em que $b \in \mathbb{Q}$, mais geralmente quando $b \in \mathbb{R}$ a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = x^b$ é contínua.
7. Saber que a função definida em $\mathbb{R} \setminus [-1, 0]$ por $f(y) = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$ tem por limite e em $\pm\infty$ e justificar, dado $x \in \mathbb{R}$, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.
8. Designar a função exponencial de base e simplesmente por «função exponencial» e representá-la também por «exp».
9. Saber que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, referindo este limite como um «limite notável».
10. Provar que a função exponencial é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Funções logarítmicas

3. Definir as funções logarítmicas e estabelecer as respetivas propriedades principais

1. Reconhecer, dado um número real $a > 0$, $a \neq 1$, que a função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$ é bijetiva e designar a respetiva bijeção recíproca, $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, por «logaritmo de base a », representá-la por « $\log_a$ », e justificar que $\forall x \in \mathbb{R}^+, a^{\log_a(x)} = x$ e $\forall x \in \mathbb{R}, \log_a(a^x) = x$.
2. Designar o logaritmo de base 10 por «logaritmo decimal», representando-o também por «log» e designar o logaritmo de base e por «logaritmo neperiano», representando-o também por «ln».
3. Justificar que a função logaritmo de base a é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.
4. Justificar que $x = 1$ é o único zero da função logaritmo de base $a > 0$, $a \neq 1$, e que, se $a > 1$ (respetivamente se $0 < a < 1$), $\forall x \in \mathbb{R}^+, \log_a(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ (respetivamente $\forall x \in \mathbb{R}^+, \log_a(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$).
5. Justificar, dado $a > 1$, que $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x) = -\infty$ e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty$.
6. Justificar, dado $0 < a < 1$, que $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x) = +\infty$ e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty$.
7. #Provar, dado $a > 0$, $a \neq 1$, e $x, y \in \mathbb{R}^+$, que $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ e $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$.
8. #Provar, dados $a, b > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 1$, que $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.
9. Justificar, dado $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, que $a^x = e^{x \ln(a)}$.
10. Justificar, dado $a > 0$, que a função exponencial de base a é diferenciável e que a respetiva derivada é dada, em $\mathbb{R}$, pela expressão $\ln(a) a^x$.
11. #Provar, dado $a > 0$, $a \neq 1$, que $\log_a$ é diferenciável e que para todo o $x \in \mathbb{R}^+$, $\log'_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x}$.
12. Justificar, dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, que a função x^α é diferenciável para $x > 0$, de derivada $\alpha x^{\alpha-1}$, estendendo-se assim o caso já conhecido correspondente a α racional.

Limites notáveis

4. Conhecer alguns limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas

1. +Provar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$.
2. Justificar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
3. +Calcular limites de funções e sucessões envolvendo logaritmos e exponenciais.

Modelos exponenciais

5. Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial

1. Saber que a evolução de determinadas grandezas, como a massa de uma substância radioativa, a temperatura de alguns sistemas ou o número de indivíduos de certas populações, pode ser modelada por uma «equação diferencial de 1.ª ordem» da forma $f' = kf$, que traduz o facto de, em cada instante, a taxa de variação ser aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente.
2. Justificar, dado um número real k , que as funções $f(x) = ce^{kx}$, onde c é uma constante real, são soluções em $\mathbb{R}$ da equação diferencial $f' = kf$ e que todas as soluções desta equação são dessa forma, mostrando que dada uma qualquer solução f , tem derivada nula a função $e^{-kx}f(x)$.

6. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo juros compostos.
2. +Resolver problemas envolvendo as propriedades algébricas das funções exponenciais e logarítmicas.
3. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia bem como os extremos relativos e absolutos e a existência de assíntotas ao respetivo gráfico.
4. +Resolver problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma $y' = ky, k \in \mathbb{R}$.

Primitivas e Cálculo Integral PCI12

Noção de primitiva

1. Definir a noção de primitiva

1. Designar, dada uma função f real definida num intervalo I , uma função F por «primitiva de f em I » quando F é diferenciável em I , e, para todo o $x \in I$, $F'(x) = f(x)$ e designar f como «primitivável em I » quando f admite uma primitiva nesse intervalo.
2. Justificar, dada uma função f primitivável num intervalo I e F e G duas primitivas de f nesse intervalo, que a função $F - G$ é constante em I .
3. Justificar que se f é primitivável num intervalo I , então as primitivas de f nesse intervalo são as funções definidas pelas expressões $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, onde F é uma qualquer primitiva de f em I , representar esta expressão por « Pf » ou por « $\int f(x)dx$ » e designar as constantes c por «constantes de primitivação».
4. Justificar, dado um intervalo I , um ponto $a \in I$, $b \in \mathbb{R}$ e uma função f primitivável em I , que existe uma única primitiva de F em I tal que $F(a) = b$.
5. Calcular e conhecer de memória as primitivas das funções «de referência para a primitivação»: 1 , x^α ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$), $\frac{1}{x}$, e^x , $\sin x$ e $\cos x$.
6. Justificar, dadas funções f e g primitiváveis num intervalo I e $k \in \mathbb{R}$, que $f + g$ e kf são primitiváveis em I , que a soma de uma primitiva de f com uma primitiva de g é uma primitiva de $f + g$ e o produto de uma primitiva de f por k é uma primitiva de kf e representar estes resultados, respetivamente, pelas expressões « $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ » e « $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ », quando estas notações não forem ambíguas e designá-los conjuntamente por «linearidade da primitivação».
7. +Calcular primitivas de funções dadas por expressões da forma $u'(x)f(u(x))$, sendo conhecida uma primitiva de f .

Noção de integral

2. Abordar intuitivamente a noção de integral definido

1. Identificar, dado um referencial cartesiano e uma função f contínua e não negativa num intervalo $[a, b]$ ($a \leq b$), o «integral de f entre a e b » ($\int_a^b f(x)dx$) como a medida, na unidade quadrada associada à unidade de comprimento desse referencial, da área da região do plano delimitada pelas retas de equação $x = a$ e $x = b$, o eixo das abcissas e o gráfico de f .
2. Conhecer a origem histórica da expressão « $\int_a^b f(x)dx$ », representando o símbolo « $\int$ » uma «soma» e « $f(x)dx$ » a medida da área de um «retângulo» com lados de medida $f(x)$ e « dx », sendo esta última «infinitesimal».
3. Saber que na expressão « $\int_a^b f(x)dx$ », o símbolo « x » pode ser substituído por qualquer outro e designar, por esta razão, a variável x como «muda».

4. Reconhecer, dadas funções f e g contínuas e não negativas num intervalo $[a, b]$, ($a \leq b$), que se para todo o $x \in [a, b]$, $g(x) \leq f(x)$, então $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$ e designar esta propriedade por «monotonia do integral definido».
5. Reconhecer, dada uma função f contínua não negativa num intervalo $[a, b]$, ($a < b$), que a função F_a definida em $[a, b]$ por $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ é a primitiva de f no intervalo $[a, b]$ nula em a e designar este resultado por «Teorema fundamental do cálculo (integral)».
6. Provar, dada uma função f contínua não negativa num intervalo $[a, b]$, ($a < b$), que $\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b$, onde F é uma qualquer primitiva de f no intervalo $[a, b]$ e $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, e designar este resultado por «Fórmula de Barrow».
7. Saber, dada uma função f contínua não negativa num intervalo I e dois pontos α e β de I tais que $\alpha < \beta$, que, por convenção, $\int_\beta^\alpha f(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)dx$ e justificar que com esta convenção, dados quaisquer pontos a, b e c de I , se tem $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, designando este resultado por «relação de Chasles».
8. Identificar, dado um referencial cartesiano e uma função f contínua num intervalo $[a, b]$ ($a \leq b$) tal que $f(x) \leq 0$ para $x \in [a, b]$, o «integral de f entre a e b » ($\int_a^b f(x)dx$) como o simétrico da medida da área da região do plano delimitada pelas retas de equação $x = a$ e $x = b$, o eixo das abcissas e o gráfico de f e reconhecer que se tem $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b -f(x)dx$.
9. Reconhecer, dadas funções f e g contínuas e não negativas ou não positivas num intervalo $[a, b]$ ($a \leq b$), que $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ e que $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ e designar o conjunto destes resultados por «linearidade do integral definido».
10. Identificar, dada uma função f contínua de domínio $[a, b]$ ($a < b$) para a qual existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $c_0, c_1, \dots, c_{k+1}$, com $a = c_0 < c_1 < \dots < c_{k+1} = b$, tal que f é não negativa ou não positiva em cada um dos intervalos $[c_j, c_{j+1}]$ ($0 \leq j \leq k$), o integral de f entre a e b , $\int_a^b f(x)dx$, como a soma $\int_{c_0}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \dots + \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx$, reconhecendo que este valor não depende da sequência $(c_1, \dots, c_k)$ e saber que se podem estender a esta categoria de funções a propriedade de monotonia do integral, o Teorema fundamental do cálculo, a fórmula de Barrow, a relação de Chasles (com a mesma convenção relativa à inversão dos extremos de integração) e a propriedade de linearidade.

3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo o cálculo de integrais definidos.
2. +Resolver problemas envolvendo funções posição, velocidade, aceleração e a primitivação e integração de funções reais de variável real.
3. +Resolver problemas envolvendo a determinação da medida da área de regiões do plano delimitadas por gráficos de funções.

Números Complexos NC12

Introdução aos números complexos

1. Conhecer o contexto histórico do aparecimento dos números complexos e motivar a respetiva construção

1. Saber que, em meados do século XVI, Girolamo Cardano apresentou uma fórmula, dita «fórmula resolvente para equações do terceiro grau», que permite obter uma solução real de equações do terceiro grau da forma $x^3 + px + q = 0$ em função dos números reais p e q .
2. Saber que ao substituir formalmente p e q por certos valores na fórmula de Cardano esta passa a apresentar o símbolo « $\sqrt{-1}$ » e que, operando formalmente com este símbolo, considerando em particular que « $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$ », se obtém efetivamente uma solução real da equação $x^3 + px + q = 0$, e que este facto está na origem da motivação para se definir adequadamente um “número” cujo quadrado é igual a -1 .
3. +Reconhecer que se existir um conjunto C contendo $\mathbb{R}$, munido de duas operações « $+$ » e « $\times$ » que estendem respetivamente a operação de adição e de multiplicação de números reais, mantendo os mesmos elementos neutros, que são associativas, comutativas, tais que « $\times$ » é distributiva relativamente a « $+$ », e tal que C contém um elemento i que satisfaz $i \times i = -1$, então, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tem-se necessariamente em C a equivalência $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$ bem como as igualdades $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$ e $(a + bi) \times (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$, notando, em particular, que os resultados das operações « $+$ » e « $\times$ » sobre elementos de C da forma $x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) têm essa mesma forma.

2. Definir o corpo dos números complexos

1. Definir em $\mathbb{R}^2$ uma operação aditiva « $+$ » por $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e uma operação multiplicativa « $\times$ » por $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ ($(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$), designar o conjunto $\mathbb{R}^2$, quando munido destas duas operações, por «corpo dos números complexos» e representá-lo por $\mathbb{C}$.
2. Justificar que as operações « $+$ » e « $\times$ », definidas em $\mathbb{R}^2$, são associativas, comutativas, que $(0, 0)$ e $(1, 0)$ são respetivamente os elementos neutros de « $+$ » e « $\times$ » e que « $\times$ » é distributiva relativamente a « $+$ ».
3. Justificar que, dados $a, c \in \mathbb{R}$, $(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$ e $(a, 0) \times (c, 0) = (ac, 0)$ e, por esta razão, identificar $\mathbb{R}$ com um subconjunto de $\mathbb{C}$, associando a cada $x \in \mathbb{R}$ o par ordenado $(x, 0) \in \mathbb{C}$ e representando, portanto, o número complexo $(x, 0)$ por « x ».
4. Representar o número complexo $(0, 1)$ por « i », designá-lo por «unidade imaginária» e provar que $i^2 = -1$.
5. Provar que, dado um número complexo z , existe um único número real a e um único número real b tais que $z = a + bi$, observando que z é, por definição, um par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e que $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$.

6. Designar, dado um número complexo $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), a por «parte real de z » e b por «parte imaginária de z », e representá-las respetivamente por $Re(z)$ e por $Im(z)$.
7. Justificar que um número complexo z é real se e somente se $Im(z) = 0$ e designar por «números imaginários puros» os números complexos não reais tais que $Re(z) = 0$.
8. Justificar, dados $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$, que $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$ e que $(a + bi) \times (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$.
9. Designar, dado um plano munido de um referencial ortonormado direto e $a, b \in \mathbb{R}$, o ponto M de coordenadas (a, b) como o «afixo do número complexo $z = a + bi$ » e reconhecer que se podem assim representar os números complexos no plano, designando, neste contexto, o plano por «plano complexo» ou «plano de Argand», o eixo das abcissas por «eixo real» e o eixo das ordenadas por «eixo imaginário».
10. Justificar, dados números complexos $z = x + yi$ e $z_0 = a + bi$, $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, que o afixo de $z + z_0$ é a imagem pela translação de vetor $\vec{u}(a, b)$ do ponto M , afixo de z .

3. Operar com números complexos

1. Designar, dado um número complexo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, por «conjugado de z » o número complexo $a - bi$, representando-o por $\bar{z}$, e justificar que o ponto afixo de $\bar{z}$ é a imagem pela reflexão de eixo real do ponto afixo de z .
2. Justificar, dados números complexos z e w , que $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ e $\overline{\bar{z}} = z$.
3. Justificar, dado um número complexo z , que $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e que $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
4. Justificar, dado um número complexo $z \neq 0$, que z é um número real (respetivamente um número imaginário puro) se e somente se $z = \bar{z}$ (respetivamente $z = -\bar{z}$).
5. Designar, dado um número complexo z , por «módulo de z » a medida da distância, no plano complexo, entre a origem e o ponto afixo de z , representá-lo por « $|z|$ », justificar que se $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, que o módulo de um número complexo estende a noção de módulo de um número real e que se tem a equivalência $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
6. Provar, dados pontos A e B afijos respetivamente dos números complexos z_1 e z_2 , que $\overline{AB} = |z_2 - z_1|$.
7. Justificar, dados números complexos z e w , que $|zw| = |z||w|$, $|z| = |\bar{z}|$, $|z|^2 = z\bar{z}$ e $|z + w| \leq |z| + |w|$, designando esta última propriedade por «desigualdade triangular».
8. Designar, dado um número complexo z não nulo, por «inverso de z » um número z' tal que $zz' = 1$, justificar que existe e é único, representá-lo por « $\frac{1}{z}$ » e provar que o inverso de z é igual a $\frac{1}{|z|^2} \bar{z}$.
9. Designar, dados números complexos z e w , $z \neq 0$, o «quociente de w por z » como o número complexo pelo qual se tem de multiplicar z para obter w , representá-lo por « $\frac{w}{z}$ » e justificar que $\frac{w}{z} = w \times \frac{1}{z}$.
10. Justificar, dados números complexos z e w , $z \neq 0$, que $\left| \frac{w}{z} \right| = \frac{|w|}{|z|}$ e que $\overline{\left(\frac{w}{z} \right)} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}$.

4. Definir a forma trigonométrica de um número complexo

1. Designar um número complexo z de módulo 1 por «unitário» e justificar, dado um número complexo z , que z é unitário se e somente se existir um número real α tal que $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$, designando α , nesse caso, por um «argumento de z » e justificar que dois argumentos de um mesmo número complexo diferem por $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. Justificar, dados números complexos unitários $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$ e $z_2 = \cos \beta + i \sin \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, que $z_1 z_2 = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$ e que $\frac{z_1}{z_2} = \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)$, representar, para $\theta \in \mathbb{R}$, o número complexo $\cos \theta + i \sin \theta$ por « $e^{i\theta}$ », designando esta expressão por «exponencial complexa de $i\theta$ » e motivar esta notação observando que se tem $e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ e $\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$.
3. +Reconhecer, dado um número complexo $z \neq 0$, que existe um único número positivo r e um único número complexo unitário w tais que $z = rw$, que $r = |z|$ e se θ for um argumento de w , designar igualmente θ por um «argumento de z », interpretando geometricamente r e θ .
4. Designar a representação de um número complexo $z \neq 0$ na forma $|z|e^{i\theta}$, onde θ é um argumento de z , por «forma trigonométrica» (ou «forma polar») de z , e justificar, dados números complexos não nulos z e z' de argumentos respetivamente iguais a θ e a θ' , que $z = z'$ se e somente se $|z| = |z'|$ e existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = \theta' + 2k\pi$, interpretando geometricamente esta equivalência.
5. Justificar, dado um número complexo $z \neq 0$, que existe um único argumento de z no intervalo $] -\pi, \pi]$, designá-lo por «argumento principal de z » e representá-lo por « $\text{Arg}(z)$ ».
6. Justificar, dado um número real θ , que se M é o afixo de um número complexo z , o afixo do número complexo $e^{i\theta}z$ é a imagem de M pela rotação de centro O e ângulo generalizado de medida θ .
7. Justificar, dado um número complexo $z_0 \neq 0$, que se M é o afixo de um número complexo z , o afixo do número complexo $z_0 z$ é a imagem de M pela rotação de centro O e ângulo orientado de medida θ , argumento de z_0 , composta com a homotetia de centro O e razão $|z_0|$.
8. Justificar que θ é um argumento do número complexo não nulo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, se e somente se $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e que, nesse caso, se $a \neq 0$, $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$.
9. Provar, dado $\theta \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, que $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ e designar este resultado por «Fórmula de De Moivre».

5. Extrair raízes n -ésimas de números complexos

1. +Reconhecer, dado um número complexo $w \neq 0$ e um número natural $n \geq 2$, que a equação $z^n = w$ tem exatamente as n soluções $z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n})}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, onde α é um argumento de w , e designar estes números por «raízes n -ésimas de w » ou «raízes de ordem n de w ».
2. Reconhecer, dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, ($a \neq 0$) que se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, as raízes da equação $az^2 + bz + c = 0$, em $\mathbb{C}$, são dadas por $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ e $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

6. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo números complexos e as respectivas propriedades algébricas.
2. +Resolver problemas envolvendo a representação, por números complexos, de isometrias do plano (translações, reflexões e rotações) ou outras transformações do plano, como as homotetias.
3. +Resolver problemas envolvendo a representação trigonométrica de números complexos.
4. +Resolver problemas envolvendo a representação de conjuntos de pontos definidos por condições sobre números complexos.
5. +Resolver problemas envolvendo equações da forma $z^n = w$, ($n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$) e vértices de polígonos regulares enquanto afijos de números complexos.
6. +Resolver problemas envolvendo polinómios de segundo grau.

I. Introdução

De acordo com o Despacho n.º 15971/2012, de 14 de dezembro, na sua atual redação, o novo Programa e Metas Curriculares da disciplina de Matemática A dos Cursos Científico-Humanísticos entrou em vigor no 10.º ano de escolaridade em 2015/2016 e, sequencialmente, nos anos seguintes, nos 11.º e 12.º anos.

A adoção do Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário suscitou um conjunto de questões e a sinalização de vários problemas por parte das Escolas e dos Professores, pondo em causa a exequibilidade destes documentos.

Os principais problemas sinalizados prendiam-se com a extensão do Programa (que não potenciavam a consolidação das aprendizagens pelos alunos), com a antecipação de conteúdos e com a inadequação de alguns conteúdos às faixas etárias.

Para dar resposta às inúmeras solicitações dirigidas aos diversos Serviços Centrais do Ministério da Educação, bem como para salvaguardar o interesse dos alunos foi constituído o Grupo de Trabalho de Matemática A para o Ensino Secundário, com vista à produção de orientações de gestão dos documentos curriculares em vigor.

O Grupo de Trabalho integrou elementos da Sociedade Portuguesa de Matemática, da Associação de Professores de Matemática e foi coordenado pela Direção-Geral da Educação.

Deste modo, as presentes Orientações visam constituir-se como um documento orientador para a lecionação da disciplina de Matemática A e regem-se pelo *Programa e Metas Curriculares de Matemática A*. Pretende-se igualmente com estas Orientações que todos os alunos tenham acesso a uma educação matemática de elevada qualidade, que todos os intervenientes, no processo de ensino/aprendizagem, possam trabalhar em conjunto de forma a criar salas de aulas onde os alunos, das mais variadas proveniências socioculturais e com as mais diversas competências, consigam trabalhar com os professores, aprendendo e compreendendo importantes noções matemáticas, em ambientes equitativos e desafiadores.

As presentes Orientações de gestão curricular não se pretendem, naturalmente, substituir-se ao Programa, o qual permanece integralmente vinculativo nos objetivos, conteúdos e conceitos que define. No entanto, em função da abertura que caracterizou a orientação de fundo da sua elaboração, o *Programa e as Metas Curriculares de Matemática A* optou por deixar indeterminada a abordagem de cada domínio e respetivos subdomínios, em termos dos recursos e das estratégias metodológicas.

Nestas Orientações de gestão são identificados, relativamente ao documento curricular em vigor:

- *descritores* cuja abordagem pode aproveitar a natureza particularmente transversal do respetivo conteúdo e cuja aprendizagem pode, assim, ser progressivamente consolidada ao longo dos três anos deste ciclo de estudos;
- *descritores* que podem ser eventualmente abordados em ano diferente daquele em que aparecem elencados nos documentos;
- *domínios* que poderão ser considerados, pontualmente, de carácter facultativo, no caso de os professores, tendo em conta as limitações naturais induzidas pela aplicação de um novo currículo, não tenham comprovadamente tempo para tratar o Programa no seu todo.

Deste modo, em cada domínio, que mereceu objeto de análise e propostas de gestão pelo Grupo de Trabalho de Matemática, é apresentada a identificação dos descritores de acordo com a enumeração anterior, bem como a orientação sobre um determinado conteúdo ser considerado facultativo e a respetiva duração.

Os domínios que constam no documento curricular *Programa e Metas Curriculares de Matemática A* que não merecem destaque no presente documento orientador devem ser trabalhados pelos professores de acordo com as orientações dadas no documento curricular *Programa e Metas Curriculares de Matemática A*.

12.º ANO

Domínio: Probabilidades (PRB12)

Os descritores 2.4. e 2.5. (relativos à probabilidade condicionada) podem ser considerados facultativos se não houver tempo para lecionar todos os conteúdos do 12.º ano.

Domínio: Funções Reais de Variável Real (FRVR 12)

Devem ser abordados os descritores de FRVR11, a saber: conclusão de 4.5., 6.1., 6.2. e 9.2. e ainda 7.11. e 7.12., de acordo com o que foi especificado em FRVR11.

Domínio: Trigonometria e Funções Trigonométricas TRI12

Modelação Matemática e Osciladores Harmónicos

Uma possível abordagem da sequência de descritores relativa ao Objetivo Geral 3 é a de se iniciar pelo descritor 3.2. para o estudo genérico das funções das famílias indicadas, associando-se os valores de alguns parâmetros a certas características das funções como, por exemplo, o contradomínio ou o período. Depois, após a identificação do que se entende por oscilador harmónico, abordar-se as noções a ele associadas (descritor 3.1.), aplicando os conhecimentos já adquiridos no descritor 3.2. à família particular de funções definidas por $x(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ que, tal como se estabelece em 3.4., embora num caso particular, verificam a relação $x''(t) = -\omega^2 x(t)$. Por fim, e utilizando a informação contida no descritor 3.3., verifica-se que um sistema constituído por uma mola e por um ponto material colocado na respetiva extremidade constitui um oscilador harmónico.

O descritor 3.3. pode ser considerado facultativo, aconselhando-se a sua leção numa perspetiva interdisciplinar com a disciplina de Física para os alunos do Curso de Ciências e Tecnologias. No entanto, ao nível da resolução de problemas de aplicação dos osciladores harmónicos, aconselha-se que este exemplo seja um modelo privilegiado, ou seja, se não for tratado como um conteúdo em si, deve ser apresentado como um dos problemas a resolver pelos alunos.

Domínio: Primitivas e Cálculo Integral (PCI)

Dadas as dificuldades e atrasos inerentes à implementação de um novo Programa, o domínio PCI poderá ser considerado facultativo, a título excecional, nos anos letivos 2017/2018 e 2018/2019. O período de exceção de dois anos resulta essencialmente pelo facto de que, só a partir do próximo ano letivo, os professores irão começar a organizar as suas planificações desde o 10.º ano de escolaridade, tendo em conta o presente documento. Deste modo, é necessária uma maior estabilização do mesmo para que, no futuro, seja possível o cumprimento integral do *Programa e Metas Curriculares de Matemática A*.

Contudo, chama-se a atenção dos professores para a importância de trabalhar o domínio PCI também nesses anos letivos de exceção, sempre que seja possível e ainda que o tempo apenas permita fazê-lo parcialmente. Com efeito, o estudo dos conteúdos desse objetivo geral poderá trazer uma importante consolidação de outros conteúdos centrais do Ensino Secundário (noção e estudo de funções, diferenciabilidade...). Por outro lado, uma primeira abordagem da noção de primitiva e de integral ao nível do Ensino Secundário poderá ser uma mais-valia para um prosseguimento de estudos de sucesso no Ensino Superior.

Planificações

Apresenta-se, aqui, o número de aulas previstas no Programa (184, no total) para cada domínio (isto é, para cada tema do Manual). Nestes tempos não se incluem as aulas dedicadas a testes, avaliações, visitas de estudo ou outros extras que possam surgir.

Cálculo Combinatório	18 aulas
Propriedades das operações sobre conjuntos Introdução ao cálculo combinatório Triângulo de Pascal e binómio de Newton	
Probabilidades	20 aulas
Definir espaços de probabilidade Definir probabilidade condicionada	
Funções Reais de Variável Real	34 aulas
Limites e continuidade Derivadas de funções reais de variável real e aplicações	
Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas	40 aulas
Juros compostos e número de Neper Funções exponenciais Funções logarítmicas Modelos exponenciais	
Trigonometria e Funções Trigonómicas	26 aulas
Fórmulas trigonométricas Limites e derivadas de funções trigonométricas Osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton	
Primitivas e Cálculo Integral	20 aulas
Noção de primitiva Noção de integral	
Números Complexos	26 aulas
Introdução aos números complexos Operar com números complexos Forma trigonométrica de um número complexo Raízes de um número complexo	

184 aulas

Disponibiliza-se, em seguida, uma planificação semanal para o 1.º período. As planificações para os restantes períodos serão disponibilizadas aos professores adotantes do projeto MVT 12 em setembro de 2017.

Planificação semanal do 1.º período

1.º Período | 13 a 14 semanas

Semana	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
1. ^a	Propriedades das operações sobre conjuntos que envolvem a relação de inclusão. Propriedades das operações de interseção e reunião de conjuntos. Leis de De Morgan para conjuntos. Propriedades que envolvem o produto cartesiano de conjuntos. Conjuntos equipotentes. Cardinal da união de conjuntos disjuntos. Cardinal do produto cartesiano de conjuntos finitos. Princípios fundamentais de contagem. Resolução de exercícios.	Páginas 6 a 8 Páginas 9 a 15 Páginas 16 a 18	Resolução – Exercícios de «Propriedades das operações sobre conjuntos» Resolução – Exercícios de «Introdução ao cálculo combinatório»
2. ^a	Arranjos com repetição. Extrações com reposição. Número de subconjuntos de um conjunto de cardinal finito. Permutações. Fatorial de um número inteiro não negativo. Resolução de exercícios. Arranjos sem repetição. Extrações sem reposição.	Páginas 19 a 22 Páginas 22 a 26 Páginas 27 e 28	Resolução – Exercício 32 (resolução passo a passo)
3. ^a	Número de subconjuntos de p elementos de um conjunto com cardinal n. Combinações. Resolução de exercícios. Resolução de exercícios. Triângulo de Pascal. Propriedades das combinações. Resolução de exercícios.	Páginas 29 a 34 Páginas 36 a 39 Páginas 40 a 43	Resolução – Exercício 44 (resolução passo a passo) Simulador – Geogebra: Diagonais de um polígono Resolução – Exercícios de «Triângulo de Pascal e binómio de Newton» Simulador – Geogebra: Construção do triângulo de Pascal Simulador – Geogebra: Propriedades do triângulo de Pascal Simulador – Geogebra: Padrões no triângulo de Pascal

Semana	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
4. ^a	Binómio de Newton. Resolução de exercícios. Caça aos erros. Teste 5+5 n.º 1 Resolução de exercícios Consolidação de conceitos. Experiência aleatória. Espaço amostral. Acontecimentos. Espaço de acontecimentos.	Páginas 44 a 46 Páginas 48 e 49 Páginas 50 e 51 O aluno poderá resolver os «+Exercícios propostos» (páginas 52 a 57) Páginas 60 a 63	QR Code – Caça aos erros! QR Code – Ajuda QR Code – Resolução Resolução – Exercícios de «+Exercícios propostos» Resolução – Exercício 176 (resolução passo a passo) Resolução – Exercícios de «Definir espaços de probabilidade»
5. ^a	Axiomática de Kolmogorov. Espaço de probabilidade. Teoremas. Resolução de exercícios. Definição de Laplace de probabilidade. Resolução de exercícios.	Páginas 64 a 66 Páginas 67 a 69 Páginas 70 a 75	Resolução – Exercício 5 (resolução passo a passo) Simulador – Geogebra: As diagonais do prisma
6. ^a	Teste 5+5 n.º 2 Resolução de exercícios Probabilidade condicionada. Resolução de exercícios. Teorema da probabilidade total. Acontecimentos independentes. Caça aos erros.	Páginas 78 a 79 Páginas 80 a 84 Páginas 85 a 90 Páginas 91 a 100	QR Code – Ajuda QR Code – Resolução Resolução – Exercícios de «Definir probabilidade condicionada» Resolução – Exercício 68 (resolução passo a passo) QR Code – Caça aos erros!

Semana	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
7. ^a	Teste 5+5 n.º 3 Resolução de exercícios. Consolidação de conceitos. 1.ª prova de avaliação	Páginas 102 e 103 Páginas 104 e 106 O aluno poderá resolver os «+Exercícios propostos» (páginas 107 a 114)	QR Code – Ajuda QR Code – Resolução Resolução – Exercício 82 (resolução passo a passo) Resolução – Exercícios de «+Exercícios propostos»
8. ^a	Revisões sobre sucessões. Teoremas de comparação para sucessões. Teorema das sucessões enquadadas. Resolução de exercícios. Limites de funções reais de variável real. Teoremas de comparação para funções de variável real e teorema das funções enquadadas.	Páginas 6 a 8 Páginas 8 a 13 Página 14 e 15	Resolução – Exercícios de «Limites e continuidade»
9. ^a	Resolução de exercícios. Funções contínuas. Teorema de Bolzano-Cauchy. Resolução de exercícios. Teorema de Weierstrass. Resolução de exercícios. Caça aos erros.	Páginas 16 e 17 Páginas 17 a 22 Páginas 23 e 24	Resolução – Exercício 19 (resolução passo a passo) QR Code – Caça aos erros!

Semana	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
10. ^a	Teste 5+5 n.º 1 Resolução de exercícios. Revisões sobre «concavidade do gráfico de uma função» e sobre derivadas de funções reais de variável real. Derivada de segunda ordem de uma função. Pontos críticos ou de estacionaridade e identificação de extremos relativos. Concavidade do gráfico da função e monotonia da derivada.	Páginas 26 e 27 Páginas 28 a 30 Páginas 31 a 35 Páginas 36 a 38	QR Code – Ajuda QR Code – Resolução Resolução – Exercício 41, alínea f (resolução passo a passo) Resolução – Exercícios de «Derivadas de funções reais de variável real e aplicações» Resolução – Exercício 66 (resolução passo a passo)
11. ^a	Concavidades do gráfico e pontos de inflexão. Interpretação cinemática da derivada de segunda ordem de uma função posição. Teste 5+5 n.º 2	Páginas 39 a 41 Páginas 42 e 43 Páginas 44 e 45	QR Code – Ajuda QR Code – Resolução
12. ^a	Estudo e traçado de gráficos. Resolução de problemas.	Página 46 a 55 Páginas 56 a 59	Simulador – Geogebra: Estudo de uma função Simulador – Geogebra: Assíntotas não verticais Simulador – Geogebra: A central elétrica

Semana	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
13. ^a	Resolução de problemas. Teste 5+5 n.º 3 Resolução de exercícios. Consolidação de conceitos. 2.ª prova de avaliação	Páginas 62 e 63 Páginas 64 e 67 O aluno poderá resolver os «+Exercícios propostos» (páginas 69 a 77)	QR Code – Ajuda QR Code – Resolução Resolução – Exercício 108, alínea c (resolução passo a passo) Resolução – Exercícios de «+Exercícios propostos» Simulador – Geogebra: O triângulo de área mínima

Fim do 1.º período.

Planificação semanal do 2.º período

2.º Período | 10 semanas

Semana	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
1. ^a	Juros compostos. Número de Neper. Resolução de exercícios. Função definida por a^x , $x \in \mathbb{Q}$. Propriedades. Conceito de potência de expoente irracional.	Páginas 80 a 84 Páginas 84 a 87 Páginas 88 a 92	Resolução – Exercícios de «Juros compostos e número de Neper» QR-Code – Demonstrações facultativas Resolução – Exercícios de «Funções exponenciais» QR-Code – Demonstrações facultativas QR-Code – Demonstrações facultativas
2. ^a	Função exponencial de base a e domínio $\mathbb{R}$. Propriedades. Resolução de exercícios. Função exponencial de base e . Limite notável.	Páginas 92 a 96 Páginas 97 a 100	Simulador – Geogebra: Transformações de gráficos de funções exponenciais Simulador – Geogebra: Limites notáveis
3. ^a	Derivada da função exponencial. Resolução de exercícios. Teste 5+5 n.º 4 Resolução de exercícios	Páginas 100 e 101 Páginas 102 e 103 Páginas 104 a 107	Simulador – Geogebra: A exponencial e a reta tangente QR-Code – Ajuda QR-Code – Resolução
4. ^a	Função logaritmo de base a . Propriedades. Resolução de exercícios.	Páginas 108 a 111 Páginas 111 a 117	Resolução – Exercícios de «Funções logarítmicas» Resolução – Exercício 73 (resolução passo a passo) Simulador – Geogebra: Transformações de gráficos de funções logarítmicas

Semana	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
5. ^a	Teste 5+5 n.º 5 Consolidação de conceitos. 3.ª prova de avaliação	Páginas 118 e 119	QR-Code – Ajuda QR-Code – Resolução
6. ^a	Funções derivadas das funções exponenciais e das funções logarítmicas. Mais limites notáveis. Resolução de exercícios. Caça aos erros.	Páginas 120 a 124 Páginas 125 a 133	Simulador – Geogebra: Derivada da função exponencial e derivada da função logarítmica Simulador – Geogebra: Derivada da função inversa QR-Code – Caça aos erros!
7. ^a	Teste 5+5 n.º 6 Resolução de exercícios Equações diferenciais. Modelos exponenciais. Resolução de exercícios.	Páginas 134 e 135 Páginas 136 a 142 Páginas 143 a 145 Páginas 146 a 149	QR-Code – Ajuda QR-Code – Resolução Resolução – Exercícios de «Modelos exponenciais»
8. ^a	Outros modelos. Resolução de exercícios.	Páginas 150 a 153	Simulador – Geogebra: Modelo logístico Resolução – Exercício 152 (resolução passo a passo)
9. ^a	Teste 5+5 n.º 7 Resolução de exercícios. Consolidação de conceitos.	Páginas 156 e 157 Páginas 158 a 161 O aluno poderá resolver os «+Exercícios propostos» (páginas 162 a 187)	QR-Code – Ajuda QR-Code – Resolução Resolução – Exercícios de «+Exercícios Propostos» Simulador – Geogebra: Exercício 1 Simulador – Geogebra: Exercício 2 Resolução – Exercício 273 (resolução passo a passo)

Semana	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
10. ^a	4.ª prova de avaliação Revisões sobre trigonometria.		

Fim do 2.º período.

Planificação semanal do 3.º período

3.º Período | 9 semanas

Semana	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
1. ^a	Fórmulas trigonométricas. Resolução de exercícios. Limite notável.	Páginas 6 e 7 Páginas 8 a 11 Páginas 12 e 13	Resolução – Exercícios de «Fórmulas trigonométricas» Simulador – Geogebra: Seno e cosseno da soma Resolução – Exercício 20 (resolução passo a passo) Resolução – Exercícios de «Limites e derivadas de funções trigonométricas»
2. ^a	Derivadas de funções trigonométricas. Resolução de exercícios. Resolução de exercícios. Modelação com funções trigonométricas.	Páginas 14 a 16 Páginas 17 a 22 Páginas 23 a 27	Simulador – Geogebra: Derivada da função seno e derivada da função cosseno Resolução – Exercício 26 (resolução passo a passo) Resolução – Exercícios de «Osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton» Simulador – Geogebra: Funções trigonométricas Simulador – Geogebra: Transformações dos gráficos de funções trigonométricas
3. ^a	Resolução de exercícios. Osciladores harmónicos. Equações diferenciais envolvendo funções trigonométricas.	Páginas 28 a 32 Páginas 33 a 36	Simulador – Geogebra: A mola Simulador – Geogebra: O pêndulo

Semana	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
4. ^a	Resolução de exercícios. Caça aos erros. Teste 5+5 n.º 1 Resolução de exercícios. Consolidação de conceitos	Página 36 Páginas 38 e 39 Páginas 40 a 42 O aluno poderá resolver os «+Exercícios propostos» (páginas 43 a 63)	QR-Code – Caça aos erros! QR-Code – Ajuda QR-Code – Resolução Resolução – Exercício 53 (resolução passo a passo) Resolução – Exercícios de «+Exercícios Propostos» Simulador – Geogebra: Exercício 3 Simulador – Geogebra: Exercício 4
5. ^a	5.ª prova de avaliação Números complexos. Introdução histórica. O corpo dos números complexos.	Páginas 104 a 106 Páginas 107 a 111	Resolução – Exercícios de «Introdução aos números complexos»
6. ^a	Representação de números complexos no plano de Argand. Operações com números complexos. Resolução de exercícios.	Páginas 111 a 113 Páginas 114 a 118 Páginas 119 a 121	Resolução – Exercícios de «Operar com números complexos»

Semana	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
7. ^a	Operações com números complexos. Forma trigonométrica de um número complexo. Igualdade. Argumento principal. Operações com números complexos na forma trigonométrica	Páginas 122 a 125 Páginas 126 a 134 Páginas 135 a 141	Resolução – Exercício 26 (resolução passo a passo) Resolução – Exercícios de «Forma trigonométrica de um número complexo» Simulador – Geogebra: Forma trigonométrica de números complexos Simulador – Geogebra: Circunferências e círculos Simulador – Geogebra: Mediatrizes e semiplanos Simulador – Geogebra: Ângulos e semirretas Simulador – Geogebra: Multiplicação de complexos na forma trigonométrica Simulador – Geogebra: Rotações, translações e homotetias Simulador – Geogebra: Potências em $\mathbb{C}$
8. ^a	Resolução de exercícios. Radiciação em $\mathbb{C}$. Resolução de exercícios Equações do segundo grau. Resolução de exercícios. Caça aos erros.	Página 142 a 148 Página 149 a 151	Resolução – Exercícios de «Raízes de um número complexo» Simulador – Geogebra: Soma das raízes de um número complexo Simulador – Geogebra: Radiciação em $\mathbb{C}$ QR-Code – Caça aos erros!

Semana	Conteúdos	Estudar (aula e casa)	Recursos multimédia em 20 Aula Digital
9. ^a	Teste 5+5 n.º 3 Resolução de exercícios. Consolidação de conceitos. 6.ª Prova de avaliação	Páginas 156 e 157 Páginas 158 a 163 O aluno poderá resolver os «+Exercícios propostos» (páginas 164 a 181)	QR-Code – Ajuda QR-Code – Resolução Resolução – Exercício 69 (resolução passo a passo) Resolução – Exercício 85 (resolução passo a passo) Resolução – Exercícios de «+Exercícios Propostos»

Fim do 3.º período.

Guia de exploração dos recursos multimédia

O **2D AULA DIGITAL** é uma ferramenta inovadora que possibilita, em sala de aula, a fácil exploração do projeto *MVT 12* através das novas tecnologias. Permite o acesso a um vasto conjunto de conteúdos multimédia associados ao manual:

- **Resoluções de exercício passo a passo**

Estes recursos são resoluções passo a passo de alguns exercícios do Manual, de diferentes níveis de dificuldades.

São compostos por diversas secções: a primeira apresenta o enunciado do exercício e as restantes os diferentes passos da resolução.

Permitem uma exploração interativa dos exercícios, rentabilizando o tempo em sala de aula.

- **Simuladores (GeoGebra®)**

Estes recursos permitem uma exploração dinâmica dos conteúdos, facilitando a compreensão e interiorização de conceitos abstratos.

Abrangem conteúdos trabalhados em todos os domínios.

- **Resoluções projetáveis de todos os exercícios do Manual e do Caderno de Exercícios**

Estes recursos apresentam as resoluções de todos os exercícios do Manual e do Caderno de exercícios, agrupadas por domínios.

- **Banco de questões**

Este recurso contempla cerca de 250 questões dos diferentes conteúdos programáticos. Está num formato editável, permitindo ao professor a sua utilização e adaptação para diversos materiais.

- **Simulador de exames**

Esta ferramenta permite ao aluno gerar um exame modelo e personalizar o seu estudo, filtrando os conteúdos que pretende exercitar. Todas as questões apresentam soluções ou propostas de resolução.

Está disponível em <http://www.mat12.te.pt>

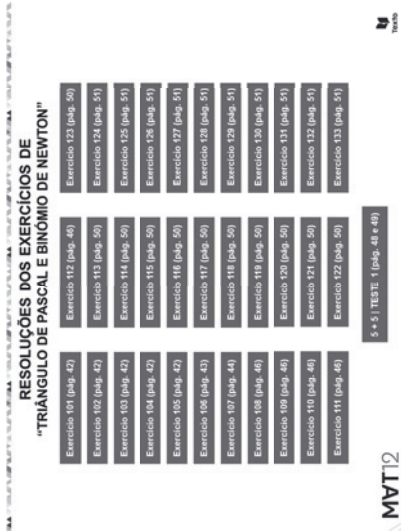
DOMÍNIO	RESOLUÇÕES PASSO A PASSO	SIMULADORES	RESOLUÇÕES PROJETÁVEIS	BANCO DE QUESTÕES
Cálculo Combinatório	- Exercício 32 da página 24 (resolução passo a passo) - Exercício 44 da página 32 (resolução passo a passo) - Exercício 176 da página 57 (resolução passo a passo)	- Geogebra: Diagonais de um polígono (pág. 34) - Geogebra: Construção do triângulo de Pascal (pág. 40) - Geogebra: Propriedades do triângulo de Pascal (pág. 40) - Geogebra: Padrões no triângulo de Pascal (pág. 40)	- Exercícios de «Propriedades das operações sobre conjuntos» (pág. 6) - Exercícios de «Introdução ao cálculo combinatório» (pág. 14) - Exercícios de «Triângulo de Pascal e binómio de Newton» (pág. 40) - Exercícios de «+ Exercícios propostos» (pág. 52)	30 Questões
Probabilidades	- Exercício 5 da página 67 (resolução passo a passo) - Exercício 68 da página 90 (resolução passo a passo) - Exercício 82 da página 104 (resolução passo a passo)	Geogebra: As diagonais do prisma (pág. 72)	- Exercícios de «Definir espaços de probabilidades» (pág. 60) - Exercícios de «Definir probabilidade condicionada» (pág. 85) - Exercícios de «+ Exercícios propostos» (pág. 107)	25 Questões
Funções Reais de Variável Real	- Exercício 19 da página 19 (resolução passo a passo) - Exercício 41, alínea f) da página 29 (resolução passo a passo) - Exercício 66 da página 37 (resolução passo a passo) - Exercício 108, alínea c) da página 67	- Geogebra: Estudo de uma função (pág. 46) - Geogebra: Assíntotas não verticais (pág. 50) - Geogebra: A central elétrica (pág. 58) - Geogebra: O triângulo de área mínima (pág. 77)	- Exercícios de «Limites e continuidade» (pág. 6) - Exercícios de «Derivadas de funções reais de variável real e aplicações» (pág. 31) - Exercícios de «+ Exercícios propostos» (pág. 68)	30 Questões

DOMÍNIO	RESOLUÇÕES PASSO A PASSO	SIMULADORES	RESOLUÇÕES PROJETÁVEIS	BANCO DE QUESTÕES
Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas	- Exercício 73 da página 113 (resolução passo a passo) - Exercício 152 da página 152 (resolução passo a passo) - Exercício 273 da página 185 (resolução passo a passo)	- Geogebra: Transformações de gráficos de funções exponenciais (pág. 92) - Geogebra: Limites notáveis (pág. 100) - Geogebra: A exponencial e a reta tangente (pág. 101) - Geogebra: Transformações dos gráficos de funções logarítmicas (pág. 114) - Geogebra: Derivada da função exponencial e derivada da função logarítmica (pág. 120) - Geogebra: Derivada da função inversa (pág. 120) - Geogebra: Modelo logístico (pág. 150) - Geogebra: Exercício 1 (pág. 162) - Geogebra: Exercício 2 (pág. 162)	- Exercícios de «Juros compostos e número de Neper» (pág. 80) - Exercícios de «Funções exponenciais» (pág. 88) - Exercícios de «Funções logarítmicas» (pág. 108) - Exercícios de «Modelos exponenciais» (pág. 143) - Exercícios de «+ Exercícios propostos» (pág. 162)	50 Questões

DOMÍNIO	RESOLUÇÕES PASSO A PASSO	SIMULADORES	RESOLUÇÕES PROJETÁVEIS	BANCO DE QUESTÕES
Trigonometria e Funções Trigonométricas	- Exercício 20 da página 11 (resolução passo a passo) - Exercício 26 da página 17 (resolução passo a passo) - Exercício 53 da página 40 (resolução passo a passo)	- Geogebra: Seno e cosseno da soma (pág. 7) - Geogebra: Derivada da função seno e derivada da função cosseno (pág. 14) - Geogebra: Funções trigonométricas (pág. 24) - Geogebra: Transformações dos gráficos de funções trigonométricas (pág. 24) - Geogebra: A mola (pág. 28) - Geogebra: O pêndulo (pág. 28) - Geogebra: Exercício 3 (pág. 43) - Geogebra: Exercício 4 (pág. 43)	- Exercícios de «Fórmulas trigonométricas» (pág. 6) - Exercícios de «Limites e derivadas de funções trigonométricas» (pág. 12) - Exercícios de «Osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton» (pág. 23) - Exercícios de «+ Exercícios propostos» (pág. 43)	55 Questões
Primitivas e Cálculo Integral	- Exercício 8 da página 76 (resolução passo a passo) - Exercício 16 da página 87 (resolução passo a passo) - Exercício 24 da página 100 (resolução passo a passo)	- Geogebra: Integral (pág. 80) - Geogebra: Integral – Polinomial de 3.º grau (pág. 80) - Geogebra: A área (pág. 80)	- Exercícios de «Noção de primitiva» (pág. 66) - Exercícios de «Noção de integral» (pág. 80)	20 Questões

DOMÍNIO	RESOLUÇÕES PASSO A PASSO	SIMULADORES	RESOLUÇÕES PROJETÁVEIS	BANCO DE QUESTÕES
Números Complexos	• Exercício 26 da página 124 (resolução passo a passo) • Exercício 69 da página 159 (resolução passo a passo) • Exercício 85 da página 162 (resolução passo a passo)	• Geogebra: Forma trigonométrica de números complexos (pág. 128) • Geogebra: Circunferências e círculos (pág. 134) • Geogebra: Mediatrizes e semiplanos (pág. 134) • Geogebra: Ângulos e semirretas (pág. 134) • Geogebra: Multiplicação de complexos na forma trigonométrica (pág. 136) • Geogebra: Rotações, translações e homotetias (pág. 137) • Geogebra: Potências em $\mathbb{C}$ (pág. 140) • Geogebra: Soma das raízes de um número complexo (pág. 142) • Geogebra: Radiciação em $\mathbb{C}$ (pág. 142)	• Exercícios de «Introdução aos números complexos» (pág. 105) • Exercícios de «Operar com números complexos» (pág. 114) • Exercícios de «Forma trigonométrica de um número complexo» (pág. 126) • Exercícios de «Raízes de um número complexo» (pág. 142) • Exercícios de «+ Exercícios propostos» (pág. 164)	40 Questões

Resoluções projetáveis de exercícios



Opção 1

- Propor aos alunos que resolvam o exercício no caderno, em sala de aula.
- Projetar a resolução do exercício.

Opção 2

- Propor aos alunos que resolvam o exercício no caderno, como trabalho para casa.
- Projetar a resolução do exercício na aula seguinte.

Opção 3

- Propor aos alunos que resolvam o exercício no caderno, como trabalho para casa.
- Enviar a resolução do exercício aos alunos por email, para que possam verificar se o resolveram bem.

Apresentam-se, de seguida, todos os materiais do manual disponibilizados através de QR Codes.

Caça aos erros!

**As respostas aos itens seguintes têm um ou mais erros.
Descobre todos os erros!**

- 1** De quantas maneiras se podem dispor em fila quatro bolas brancas e duas bolas amarelas?

Resposta de um aluno:

Ao todo são seis bolas; portanto, $6! = 720$.

- 2** Quantos números pares de cinco algarismos diferentes se podem escrever?

Resposta de um aluno:

O número não pode começar em zero, tem de terminar em 0, 2, 4, 6, ou 8 e tem de ter os algarismos diferentes. Portanto, a resposta é:

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 5 = 22\,680$$

- 3** Numa turma de 25 alunos vai ser constituída uma comissão com presidente, tesoureiro e vogal. A Teresa é aluna dessa turma. Quantas comissões se podem constituir de que a Teresa faça parte?

Resposta de um aluno:

Como a Teresa tem de fazer parte, só é preciso escolher mais dois alunos e, como as funções são diferenciadas, é arranjos: ${}^{24}A_2$.

- 4** De um baralho de 52 cartas, tiram-se sucessivamente três cartas (sem reposição) e colocam-se numa mesa pela ordem de saída, da esquerda para a direita. De quantas maneiras se pode obter uma sequência com exatamente dois ouros?

Resposta de um aluno:

Posso começar por tirar dois ouros e depois uma carta que não é de ouros: $13 \times 12 \times 39$.

Mas, como podem sair por uma ordem qualquer, tenho de multiplicar por $3!$.

$$13 \times 12 \times 39 \times 3! = 36\,504$$

- 5** De um grupo de cinco rapazes e três raparigas vão escolher-se quatro jovens. De quantas maneiras pode ser constituído esse grupo de quatro jovens com pelo menos dois rapazes? Explica a resposta que apresentares.

Resposta de um aluno:

Há 10 (5C_2) maneiras de escolher dois rapazes de entre os cinco. Para cada uma destas 10 escolhas, temos de escolher dois elementos, rapazes ou raparigas, o que pode ser feito de 6C_2 maneiras. A resposta é $10 \times 15 = 150$.



Erros caçados!

1. $6!$ é o número de permutações de seis objetos diferentes. Neste caso, o número de maneiras de dispor em fila as bolas é o número de maneiras de, dos seis lugares disponíveis, escolher quatro para colocar as bolas brancas (ou escolher dois para colocar as bolas amarelas): 6C_4 (ou 6C_2).

2. A resposta apresentada sugere que o aluno identifica nove possibilidades para o algarismo das dezenas de milhar (não pode usar o 0) e nove possibilidades para o algarismo dos milhares (não pode usar o algarismo que utilizou na primeira opção, mas já pode usar o 0). As cinco possibilidades para o algarismo das unidades refletem o facto de o número ter de ser par. Repara, no entanto, que, se é escolhido o 2 para algarismo das dezenas de milhar ou dos milhares, esse algarismo já não faz parte das opções para algarismo das unidades. Vice-versa, se é escolhido o 2 para algarismo das unidades, o algarismo das dezenas de milhar não pode ser nem 0, nem 2, ficando o número de opções reduzido a 8.

A contagem deve ser feita considerando os números pares cujo algarismo das unidades é 2, 4, 6 ou 8 e os números pares cujo algarismo das unidades é 0.

Há $8 \times 8 \times 7 \times 6$ números de cinco algarismos diferentes terminados em 2: o algarismo das dezenas de milhar não pode ser 2 nem 0 (8 hipóteses); o algarismo dos milhares não pode ser nem 2 nem o algarismo das dezenas de milhar (8 hipóteses); para o algarismo das centenas há 7 hipóteses e para o algarismo das dezenas há 6 hipóteses.

É fácil perceber que também há $8 \times 8 \times 7 \times 6$ números de cinco algarismos diferentes terminados em 4, 6 ou 8.

Vamos agora contar aqueles cujo algarismo das unidades é 0.

Há $9 \times 8 \times 7 \times 6$ números de cinco algarismos diferentes terminados em 0: o algarismo das dezenas de milhar não pode ser 0 (9 hipóteses) e, para cada um dos algarismos dos milhares, das centenas e das dezenas há menos uma opção do que na fase anterior.

Portanto, uma resposta correta é: $8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 4 + 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 13\,776$

3. É verdade que só temos de escolher mais dois alunos e também é verdade que as funções desses dois alunos são diferenciadas. No entanto, a resposta apresentada seria a resposta, por exemplo, ao problema: «Quantas comissões se podem constituir, nas quais a Teresa seja presidente?».

Ora, a pergunta é mais geral, pois a Teresa pode fazer parte da comissão desempenhando qualquer um dos cargos.

Uma resposta correta é ${}^{24}A_2 \times 3$.

Nota: A resposta correta também pode ser obtida recorrendo ao acontecimento contrário: ${}^{24}A_3 - {}^{23}A_3$.

4. O produto 13×12 já contempla a ordem de saída das duas cartas de ouros. Portanto, o produto $13 \times 12 \times 39$ deve ser multiplicado por 3 (e não por 3!), considerando que a carta que não é de ouros poderá sair em primeiro, em segundo ou em terceiro lugar.

A resposta correta é: $13 \times 12 \times 39 \times 3 = 18\,252$.

5. Na contagem deste aluno, há grupos que estão contados mais do que uma vez, nomeadamente os grupos que incluem mais do que dois rapazes.

Vamos designar os rapazes por A, B, C, D e E e as raparigas por F, G e H.

Tem-se, por exemplo:

O grupo $\{A, B, C, F\}$ surge quando comesas por escolher os rapazes A e B e depois escolhes os jovens C e F, mas também surge quando escolhes os rapazes A e C e depois escolhes os jovens B e F, tal como surge quando escolhes os rapazes B e C e depois os jovens A e F.

Portanto, o mesmo grupo está considerado três vezes.

Uma resposta correta pode ser obtida contando, separadamente, os grupos com dois rapazes e três raparigas, com três rapazes e uma rapariga e com quatro rapazes:

$${}^5C_2 \times {}^3C_2 + {}^5C_3 \times 3 + {}^5C_4 = 65$$

Teste 1

Págs. 48 e 49

Grupo I

1. Recorda as propriedades das operações sobre conjuntos que envolvem a relação de inclusão.
2. Repara que, como o delegado e o subdelegado têm de fazer parte da comissão, é necessário escolher dois alunos, entre 18, para a completar.
3. Começa por pensar no número de maneiras de escolher as posições onde se vão colocar os algarismos 4.
4. Repara que, como a soma dos dois últimos elementos da linha em causa é 15, o penúltimo elemento dessa linha é 14, pelo que se trata da linha que contém os elementos da forma ${}^{14}C_k$.
5. Recorda a relação entre nA_k e nC_k e as propriedades das combinações que se relacionam com o triângulo de Pascal.

Grupo II

1. a) Recorda as leis de De Morgan.
b) Recorda as propriedades associativa e comutativa da conjunção.
2. a₁) Repara que:
 - cada conjunto de álbuns da mesma banda forma um bloco;
 - os três blocos podem permutar entre si;
 - em cada bloco, os álbuns que o constituem também podem permutar entre si.a₂) Repara que:
 - existem seis escolhas possíveis para o álbum que vai ocupar a posição central;
 - escolhem-se quatro das sete posições à esquerda da posição central para colocar os álbuns dos Xutos;
 - os restantes álbuns podem permutar entre si.b) Repara que a Teresa pode levar dois álbuns dos Xutos e três dos U2, ou dois álbuns dos Xutos, um dos Muse e dois dos U2.
3. a) Nota que cada um dos referidos segmentos de reta tem de estar contido numa das bases do prisma.
b) Nota que, em cada um dos triângulos pretendidos, um dos lados tem de ser uma aresta lateral do prisma.
4. Recorda a fórmula do desenvolvimento de um binómio.
5. Começa por designar por n o referido segundo elemento e por exprimir, em função de n , os restantes elementos referidos no enunciado.

Resolução do teste 1



Grupo I

1. (D)

Como $B \subset \bar{A}$, vem $A \subset \bar{B}$, pelo que $A \cup \bar{B} = \bar{B}$.

2. (A)

$${}^{18}C_2 = 153$$

3. (B)

$${}^5C_3 \times 5 \times 4 = 200$$

4. (A)

$${}^{14}C_7 = 3432$$

5. (C)

$$\frac{{}^{999}A_{99}}{99!} + {}^{999}C_{100} = {}^{999}C_{99} + {}^{999}C_{100} = {}^{1000}C_{100} = {}^{1000}C_{900}$$

Grupo II

1. a) Tem-se:

$$\overline{A \cup B} = U \Leftrightarrow \overline{A \cap B} = U \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

b) Tem-se:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow (A \cap C) \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (C \cap C) = \emptyset \cap C = \emptyset$$

A recíproca não é verdadeira.

Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{2, 6\}$, tem-se

$A \cap C = \{2\}$ e $B \cap C = \{6\}$, pelo que $A \cap C$ e $B \cap C$ são conjuntos disjuntos.

No entanto, os conjuntos A e B não são disjuntos, pois $A \cap B = \{4\}$.

2. a₁) $3! \times 4! \times 5! \times 6! = 12\,441\,600$

a₂) $6 \times {}^7A_4 \times 10! \approx 1,83 \times 10^{10}$

b) ${}^4C_2 \times 5 \times {}^6C_2 + {}^4C_2 \times {}^6C_3 = 570$

3. a) $2 \times {}^6C_2 = 30$

b) $2 \times 6 \times 5 = 60$

4. $(x+2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 48 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4 \times x^3 \times 2 + 6 \times x^2 \times 2^2 + 4 \times x \times 2^3 + 2^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 48 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 48 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 32x + 16 = 48 \Leftrightarrow x = 1$$

5. O segundo elemento da linha do triângulo de Pascal que contém os elementos da forma nC_k ($n \geq 3$) é igual a n .

O penúltimo elemento dessa linha é igual ao segundo, pelo que também é igual a n .

Assim, o produto do segundo elemento pelo penúltimo é igual a n^2 .

O terceiro elemento dessa linha é igual a nC_2 .

O terceiro elemento da linha seguinte é igual a ${}^{n+1}C_2$.

Portanto, temos de provar que:

$${}^nC_2 + {}^{n+1}C_2 = n^2$$

Tem-se:

$${}^nC_2 + {}^{n+1}C_2 = \frac{{}^nA_2}{2!} + \frac{{}^{n+1}A_2}{2!} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2} = n^2$$

Teste 2

Págs. 78 e 79

Grupo I

1. Começa por ver quantas hipóteses existem para a primeira e para a última letra. Recorda também o conceito de permutação e o número de permutações de n elementos.
2. Identifica o acontecimento $A \cap B$, no contexto do problema.
Para tal, recorda que a interseção está associada à conjunção ($\cap \rightarrow e$).
3. Recorda:
 - que o número de maneiras de escolher k elementos, de entre n , é nC_k ;
 - o triângulo de Pascal e as suas propriedades;
 - a regra de Laplace.
4. Recorda o termo geral do desenvolvimento do binómio de Newton.
5. Começa por notar que o número pode ter quatro ou cinco algarismos.
Tendo em conta que todos os algarismos têm de ser ímpares, tenta responder às seguintes questões:
 - Qual terá de ser o primeiro algarismo, se o número tiver quatro algarismos?
 - Quais terão de ser os dois primeiros algarismos, se o número tiver cinco algarismos?
 - Quantas hipóteses existem para cada um dos restantes algarismos?

Grupo II

1. a) Recorda:
 - que o número de maneiras de escolher k elementos, de entre n , é nC_k ;
 - a regra de Laplace.

Nota ainda que, como a Rita e a Filipa têm obrigatoriamente de fazer parte da comissão, é necessário escolher mais três elementos para a completar.
- b) Nota que, como a Rita e a Filipa devem ficar uma ao lado da outra, podemos pensar que elas formam um bloco.
2. a) Tenta responder às seguintes questões:
 - Quantas são as faces disponíveis para colocar o segundo número 2?
 - Depois de termos colocado o segundo número 2, de quantas maneiras podemos escolher as faces onde vamos colocar os dois números 3 que faltam colocar?
 - Depois de cumpridas as etapas anteriores, de quantas maneiras podemos numerar as restantes faces?

- b) Recorda a regra de Laplace e tenta responder às seguintes questões:
- Escolhendo, ao acaso, um vértice em cada base do prisma, quantos são os casos possíveis?
 - Para os dois vértices escolhidos definirem uma reta perpendicular ao plano zOy , esses dois vértices terão de ser os extremos de quê?
3. a) Recorda:
- as leis de De Morgan;
 - a propriedade relativa à probabilidade do acontecimento contrário;
 - a propriedade relativa à probabilidade de uma união de acontecimentos.
- b) Relativamente ao sorteio de uma viagem entre os funcionários do banco, nota que o acontecimento «a viagem sai a uma mulher licenciada» é a interseção dos acontecimentos «a viagem sai a uma mulher» e «a viagem sai a um funcionário licenciado». Designa por A um dos acontecimentos, designa o outro por B , traduz simbolicamente as informações do enunciado e utiliza a igualdade da alínea anterior.
4. Recorda o desenvolvimento de uma potência de um binómio.
5. Começa por tentar responder à seguinte questão:
- Para a equação $ax^2 + bx + c = 0$ ser impossível, que relação deve existir entre a , b e c ?

Resolução do teste 2



Grupo I

1. (D)

$$3 \times 6! \times 5 = 10\,800$$

2. (D)

Tem-se $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{5, 6\}$, pelo que $A \cap B = \{5\}$.

Portanto, o acontecimento $A \cap B$ é «sair a face 5».

Logo, o acontecimento contrário de $A \cap B$ é «não sair a face 5».

3. (B)

A linha em causa é a linha que contém os elementos da forma ${}^{16}C_k$, linha essa que tem 17 elementos. Portanto, tem-se:

Número de casos possíveis: ${}^{17}C_2 = 136$

Número de casos favoráveis: 4

Apresentam-se a seguir os quatro casos favoráveis:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 16 & \dots & 16 & 1 \\ * & * & & * & * \\ & * & & * & * \end{array}$$

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{4}{136} = \frac{1}{34}$$

4. (D)

O termo geral do desenvolvimento de $(2x + y)^7$ é ${}^7C_k(2x)^{7-k}y^k$.

Em todas as opções, a parte literal é x^2y^5 . Portanto, $k = 5$.

Vem, então:

$${}^7C_5(2x)^2y^5 = 21 \times 4x^2y^5 = 84x^2y^5$$

5. (A)

Os números em causa têm de ser da forma $9___$ ou $11___$.

Portanto, a resposta é $2 \times 5^3 = 250$.

Grupo II

1. a) Número de casos possíveis: ${}^{24}C_3 = 2024$

Número de casos favoráveis: ${}^{11}C_3 = 165$

Probabilidade pedida: $\frac{165}{2024} \approx 0,08$

b) $4! \times 2 = 48$

2. a) $7 \times {}^6C_2 \times {}^6A_4 = 37\,800$

b) Número de casos possíveis: 8×8

Número de casos favoráveis: 8

Probabilidade pedida: $\frac{8}{8 \times 8} = \frac{1}{8}$

3. a) Tem-se:

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A) &= P(\overline{A \cup B}) + P(A) = \\ &= 1 - P(A \cup B) + P(A) = \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] + P(A) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) + P(A) = \\ &= 1 - P(B) + P(A \cap B) = P(\overline{B}) + P(A \cap B) \end{aligned}$$

b) Relativamente ao sorteio de uma viagem entre os funcionários do banco, sejam A e B os acontecimentos:

A : a viagem sai a uma mulher

B : a viagem sai a um funcionário licenciado

Tem-se: $P(A) = 0,48$; $P(B) = 0,3$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,4$

Pretende-se determinar $P(A \cap B)$.

Utilizando a igualdade da alínea anterior, vem: $0,4 + 0,48 = 0,7 + P(A \cap B)$.

Portanto,

$$P(A \cap B) = 0,4 + 0,48 - 0,7 = 0,18$$

Assim, a probabilidade de a viagem sair a uma mulher licenciada é 18%.

$$\begin{aligned} 4. (x+1)^4 - x^4 &= 4x\left(x^2 + \frac{3x}{2}\right) + 13 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 13 - x^4 = \\ &= 4x^3 + 6x^2 + 13 \Leftrightarrow 4x + 1 = 13 \Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

5. Uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ é impossível quando $b^2 - 4ac < 0$.

No nosso caso, tem-se $a = 1$.

Portanto, a equação é impossível se e somente se $b^2 - 4c < 0$, ou seja, se e somente se $b^2 < 4c$.

Na tabela seguinte apresentam-se os casos possíveis e assinalam-se os casos favoráveis.

$b^2 \backslash 4c$	4	8	12	16	20	24
1	(1, 4)	(1, 8)	(1, 12)	(1, 16)	(1, 20)	(1, 24)
4	(4, 4)	(4, 8)	(4, 12)	(4, 16)	(4, 20)	(4, 24)
9	(9, 4)	(9, 8)	(9, 12)	(9, 16)	(9, 20)	(9, 24)
16	(16, 4)	(16, 8)	(16, 12)	(16, 16)	(16, 20)	(16, 24)
25	(25, 4)	(25, 8)	(25, 12)	(25, 16)	(25, 20)	(25, 24)
36	(36, 4)	(36, 8)	(36, 12)	(36, 16)	(36, 20)	(36, 24)

Vem, então:

Número de casos possíveis: $6 \times 6 = 36$

Número de casos favoráveis: 17

Probabilidade pedida: $\frac{17}{36}$

Caça aos erros!

**As respostas aos itens seguintes têm um ou mais erros.
Descobre todos os erros!**



- 1** Lança-se duas vezes um dado cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6, e somam-se os números das faces voltadas para cima. Qual é a probabilidade de obter 7?

Resposta de um aluno:

Não dá para obter 1 e vai até 12. Portanto, há 11 casos possíveis. Então, pela regra de Laplace, a probabilidade é $\frac{1}{11}$.

- 2** Num dado cúbico não equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, a probabilidade de obter face par é $\frac{1}{3}$. Lançando esse dado três vezes, qual é a probabilidade de não sair sempre face par?

Resposta de um aluno:

É a probabilidade de sair sempre face ímpar: $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

- 3** Um saco tem dez bolas numeradas de 1 a 10. Tiram-se simultaneamente, ao acaso, três bolas do saco. Qual é a probabilidade de, nas três bolas retiradas, haver apenas uma bola com número par? Apresenta a probabilidade na forma de fração irredutível.

Resposta de um aluno:

Casos possíveis: ${}^{10}C_3 = 120$ Casos favoráveis: ${}^5C_1 = 5$ Probabilidade: $\frac{5}{120} = \frac{1}{24}$

- 4** Numa turma, todos os alunos jogam voleibol ou basquetebol. Sabe-se que, escolhido um aluno dessa turma ao acaso, a probabilidade de jogar basquetebol é 80% e a probabilidade de jogar voleibol é 30%. Qual é a probabilidade de que um aluno dessa turma que jogue basquetebol também jogue voleibol? Apresenta o valor pedido em percentagem.

Resposta de um aluno:

O pedido é $P(B \cap V)$. Como todos jogam uma coisa ou outra, tem-se $P(B \cup V) = 1$. Então, $P(B \cap V) = 0,8 + 0,3 - 1 = 0,1 = 10\%$.

- 5** De um saco com cinco bolas brancas e três bolas verdes, tiram-se três bolas, ao acaso. Qual é a probabilidade de as bolas retiradas serem todas da mesma cor?

Resposta de um aluno:

Probabilidade: $\frac{5 \times 4 \times 3 + 1}{8 \times 7 \times 6} = \frac{61}{336}$

- 6** Considera todos os números de três algarismos diferentes que se podem escrever com algarismos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Sorteando um desses números ao acaso, qual é a probabilidade de a soma dos algarismos desse número ser par?

Resposta de um aluno:

Para a soma dar par, podem ser todos pares ou dois ímpares e um par:

Probabilidade: $\frac{4 \times 3 \times 2 + 5 \times 4 \times 4}{9 \times 8 \times 7} = \frac{104}{504} = \frac{13}{63}$

Erros caçados!

1. A regra de Laplace não pode ser utilizada, pois os casos possíveis não são equiprováveis.
2. Não sair sempre face par não é o mesmo do que sair sempre face ímpar. Por exemplo, o resultado (2, 4, 5) pertence ao acontecimento «não sair sempre face par» e não pertence ao acontecimento «sair sempre face ímpar».

Uma forma de responder corretamente ao problema é recorrer à probabilidade do acontecimento contrário: «sair sempre face par».

$$\text{Probabilidade: } 1 - \frac{3 \times 3 \times 3}{6 \times 6 \times 6} = \frac{7}{8}$$

3. A experiência consiste em retirar três bolas do saco; portanto, um resultado dessa experiência é um conjunto de três bolas. Assim, os acontecimentos, «sair 2», «sair 4», ..., «sair 8», não são resultados dessa experiência.

O acontecimento de que se pede a probabilidade é o acontecimento cujos resultados são os conjuntos com uma bola com número par e duas bolas com número ímpar.

Portanto, a resposta deve ser:

$$\text{Número de casos possíveis: } {}^{10}C_3 = 120$$

$$\text{Número de casos favoráveis: } {}^5C_1 \times {}^5C_2 = 50$$

$$\text{Probabilidade: } \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

4. O uso da palavra «também» não deve ser associado, neste caso, à «conjunção». É uma frase de uso corrente cujo conteúdo pode ser expresso, de forma equivalente, por:

- Escolhendo, ao acaso, um aluno de entre os que jogam basquetebol, qual é a probabilidade de que ele jogue voleibol?

ou por

- Escolhendo, ao acaso, um aluno, qual é a probabilidade de ele jogar voleibol, sabendo que joga basquetebol?

Considerando os acontecimentos:

B : o aluno joga basquetebol

V : o aluno joga voleibol

$$\text{a resposta correta é } P(V|B) = \frac{P(V \cap B)}{P(B)}.$$

$$\text{Dado que } P(B \cap V) = 0,8 + 0,3 - 1 = 0,1 = 10\%, \text{ tem-se } P(V|B) = \frac{0,1}{0,8} = \frac{1}{8} = 12,5\%.$$

5. A resposta $\frac{5 \times 4 \times 3 + 1}{8 \times 7 \times 6}$ pode ser escrita na forma $\frac{{}^5A_3 + {}^3C_3}{{}^8A_3}$ que evidencia que se consideraram seqüências, na contagem dos casos possíveis e dos casos favoráveis, a retirar três bolas brancas. Já no que se refere à possibilidade de retirar as três bolas verdes, foi considerado o conjunto constituído por essas bolas.

A resposta correta pode ser obtida considerando sempre conjuntos, ou considerando sempre seqüências (neste caso, as bolas seriam identificadas, por exemplo, como $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, V_1, V_2, V_3$):

$$\text{Probabilidade: } \frac{{}^5C_3 + {}^3C_3}{{}^8C_3} = \frac{11}{56} \text{ ou } \frac{5 \times 4 \times 3 + 3 \times 2 \times 1}{8 \times 7 \times 6} = \frac{66}{336} = \frac{11}{56}$$

6. O erro está na parcela correspondente aos números com dois algarismos ímpares e um algarismo par que considera apenas uma posição para o algarismo par na seqüência dos três algarismos.

Uma resolução possível é:

$$\text{Probabilidade: } \frac{4 \times 3 \times 2 + 5 \times 4 \times 4 \times 3}{9 \times 8 \times 7} = \frac{264}{504} = \frac{11}{21}$$

Teste 3

Págs. 102 e 103

Grupo I

1. Recorda:
 - a fórmula que relaciona $P(A|B)$ com $P(A \cap B)$ e $P(B)$;
 - as leis de De Morgan;
 - a propriedade relativa à probabilidade do acontecimento contrário;
 - a propriedade relativa à probabilidade de uma união de acontecimentos.
2. Começa por identificar os acontecimentos $C \cup D$ e $A \cap B$, no contexto do problema.
Para tal, recorda que a união está associada à disjunção ($\cup \rightarrow$ ou) e que a interseção está associada à conjunção ($\cap \rightarrow$ e).
3. Utiliza a propriedade relativa à probabilidade do acontecimento contrário e recorda a regra de Laplace.
4. Recorda a regra de Laplace e o número de permutações de n elementos.
5. Repara que existem duas hipóteses em alternativa: escolher dois dos cinco vértices do pentágono e um dos seis vértices do hexágono ou escolher dois dos seis vértices do hexágono e um dos cinco vértices do pentágono.

Grupo II

1. Recorda a regra de Laplace e que o número de maneiras de escolher k elementos, de entre n , é nC_k .
2. Organiza a informação do enunciado para construir uma tabela de dupla entrada.
3. Recorda:
 - as leis de De Morgan;
 - a propriedade relativa à probabilidade do acontecimento contrário;
 - a propriedade relativa à probabilidade de uma união de acontecimentos;
 - a fórmula que relaciona $P(A|B)$ com $P(A \cap B)$ e $P(B)$.
4. a) Recorda o conceito de acontecimentos incompatíveis e o terceiro axioma da axiomática de Kolmogorov.
b) Recorda:
 - a relação de $P(A \cap B)$ com $P(A)$ e $P(B)$ quando A e B são acontecimentos independentes;
 - a propriedade relativa à probabilidade de uma união de acontecimentos.
5. Começa por pensar nos diferentes resultados possíveis e determina, para cada um deles, o número de registos que podem ocorrer.

Resolução do teste 3



Grupo I

1. (B)

Tem-se:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,4 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0,4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,2 + P(B) - 0,1 = 0,6 \Leftrightarrow P(B) = 0,5$$

Portanto,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5} = 0,2$$

2. (A)

$P(C \cup D | A \cap B)$ é a probabilidade de a segunda carta ser uma figura ou ser de copas, sabendo que a primeira carta foi o rei de paus.

Portanto, tem-se:

Número de casos possíveis: 51 (após a extração de uma carta, ficaram 51 cartas no baralho)

Número de casos favoráveis: 21 (13 cartas de copas + 9 figuras dos outros naipes - rei de paus)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{21}{51} = \frac{7}{17}$$

3. (C)

«O produto obtido é igual a 0» é o acontecimento contrário de «o produto obtido é diferente de 0».

O produto é diferente de 0 se e somente se os números saídos forem todos diferentes de 0.

$$\text{Tem-se, portanto, que a probabilidade pedida é igual a } 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{91}{216}.$$

4. (A)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{2 \times 4! \times 6!}{10!} = \frac{1}{105}$$

5. (D)

$$\text{Número pedido: } {}^6C_2 \times 5 + {}^5C_2 \times 6 = 135$$

Grupo II

$$1. \text{ Probabilidade pedida: } \frac{4}{{}^{20}C_5} = \frac{1}{3876}$$

2. Seja A o acontecimento «o aluno chega atrasado».

Seja B o acontecimento «o aluno vai a pé».

$$\text{Tem-se: } P(A) = 0,2; \quad P(B) = 0,7; \quad P(A|B) = 0,1$$

Tem-se, então, que: $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = 0,7 \times 0,1 = 0,07$

Tem-se, então, a seguinte tabela:

	B	$\bar{B}$	T
A	0,07	0,13	0,2
$\bar{A}$	0,63	0,17	0,8
T	0,7	0,3	1

Vem, então:

$$\text{a) } P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,13}{0,3} = \frac{13}{30}$$

$$\text{b) } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,07}{0,2} = \frac{7}{20}$$

3. Vamos resolver este item por dois processos.

1.º processo:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B}) - P(\bar{A})}{P(B)} &= \\ = 1 + \frac{P(\bar{A} \cup \bar{B}) - P(\bar{A})}{P(B)} &= \\ = 1 + \frac{1 - P(A \cup B) - [1 - P(A)]}{P(B)} &= \\ = 1 + \frac{1 - P(A \cup B) - 1 + P(A)}{P(B)} &= \\ = 1 + \frac{-P(A \cup B) + P(A)}{P(B)} &= \\ = 1 + \frac{-[P(A) + P(B) - P(A \cap B)] + P(A)}{P(B)} &= \\ = 1 + \frac{-P(A) - P(B) + P(A \cap B) + P(A)}{P(B)} &= \\ = 1 + \frac{-P(B) + P(A \cap B)}{P(B)} &= \\ = 1 + \frac{-P(B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} &= \\ = 1 + (-1) + P(A|B) = P(A|B) \end{aligned}$$

2.º processo:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B}) - P(\bar{A})}{P(B)} &= \\ = 1 - \frac{P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(B)} &= \\ = 1 - \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} &= \\ = 1 - P(\bar{A}|B) &= \\ = P(A|B) \end{aligned}$$

4. a) Se A e B são incompatíveis, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, pelo que $0,7 = 0,24 + P(B)$.

Vem, então:

$$P(B) = 0,7 - 0,24 = 0,46$$

- b) Se A e B são independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, pelo que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B).$$

Vem, então:

$$0,7 = 0,24 + P(B) - 0,24 \times P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,46 = 0,76 P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{0,46}{0,76} \Leftrightarrow P(B) = \frac{23}{38}$$

5. Suponhamos que a equipa vencedora é a equipa A.

Então, o registo terá cinco letras A e a última letra registada tem de ser A. Têm-se as seguintes hipóteses:

Vitória por 5-0: registo com zero letras B $\rightarrow$ 1 registo possível

Vitória por 5-1: registo com uma letra B $\rightarrow$ 5 registos possíveis

Vitória por 5-2: registo com duas letras B $\rightarrow {}^6C_2$ registos possíveis

Vitória por 5-3: registo com três letras B $\rightarrow {}^7C_3$ registos possíveis

Vitória por 5-4: registo com quatro letras B $\rightarrow {}^8C_4$ registos possíveis

Portanto, no caso em que a equipa vencedora é a equipa A, temos $1 + 5 + {}^6C_2 + {}^7C_3 + {}^8C_4$ registos possíveis, ou seja, temos 126 registos possíveis.

De igual modo, no caso em que a equipa vencedora é a equipa B, temos 126 registos possíveis.

Portanto, a resposta é 2×126 , ou seja, 252 registos.

Caça aos erros!

As respostas aos itens seguintes têm um ou mais erros. Descobre todos os erros!

- 1** Determina, caso exista, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \operatorname{sen} x)$.

Resposta de um aluno:

Sabe-se que $\forall x, \operatorname{sen} x \geq -1$; então, $x \operatorname{sen} x \geq -x$.

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$, por comparação, conclui-se que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \operatorname{sen} x) = +\infty$.

- 2** Acerca de uma certa função f , sabe-se que:

- é contínua em $[-2, 5]$;
- $f(-2) = 1$
- $f(5) = -3$

Comenta a seguinte afirmação: «A equação $f(x) = -4$ não tem solução no intervalo $] -2, 5[$.»

Resposta de um aluno:

A afirmação é verdadeira.

De acordo com o teorema de Bolzano-Cauchy, a função não toma o valor -4 , pois -4 não está entre 1 e -3 .

- 3** Sejam a e b números reais, sendo $a < b$.

Define, se possível, uma função f que seja contínua em $[a, b]$, que tenha um zero em $]a, b[$ e tal que $f(a) \times f(b) > 0$.

Se não existir qualquer função nas condições pedidas, explica porquê.

Resposta de um aluno:

Uma função como pedem não existe porque, sendo a função contínua, para que existisse um zero era preciso que $f(a) \times f(b) < 0$, o que não acontece.

- 4** Seja f uma função contínua, de domínio $[0, 5]$ e contradomínio $[3, 4]$.

Seja g a função, de domínio $[0, 5]$, definida por $g(x) = f(x) - x$.

Prova que a função g tem pelo menos um zero.

Resposta de um aluno:

A função g é contínua porque é a diferença de duas funções contínuas.

$$g(0) = f(0) - 0 = 3 - 0 = 3$$

$$g(5) = f(5) - 5 = 4 - 5 = -1$$

Como 0 está entre 3 e -1 , tem-se $g(5) < 0 < g(0)$. Então, o teorema de Bolzano-Cauchy diz que g tem pelo menos um zero em $[0, 5]$.

- 5** Uma função g tem domínio $[a, b]$ mas não é contínua no domínio.

Comenta a afirmação seguinte: «Como a função não é contínua, o teorema de Weierstrass permite concluir que a função não tem máximo absoluto ou não tem mínimo absoluto.»

Resposta de um aluno:

A conclusão não está bem. Se a função fosse contínua, o teorema de Weierstrass garantia que a função tinha mínimo e máximo. Assim, conclui-se que não tem nem uma coisa nem outra.



Erros caçados!

1. De $\sin x \geq -1$ não se pode concluir que $x \sin x \geq -x$. Essa conclusão seria válida no caso de x ser um número positivo.

Este limite não existe.

Seja $f(x) = x \sin x$ e sejam (u_n) e (v_n) as sucessões definidas por $u_n = -n\pi$ e $v_n = \frac{\pi}{2} - 2n\pi$. Ambas tendem para $-\infty$ e as sucessões $(f(u_n))$ e $(f(v_n))$ têm limites diferentes: $\lim(f(u_n)) = 0$ e $\lim(f(v_n)) = -\infty$.

2. O teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que, nestas condições, a função toma todos os valores entre -3 e 1 , mas não afirma que a imagem de $[-2, 5]$ é $[-3, 1]$. A função pode tomar valores para além dos que estão entre -3 e 1 .

3. O que se sabe é que, sendo a função contínua em $[a, b]$, a condição $f(a) \times f(b) < 0$ é suficiente para que exista um zero em $]a, b[$, mas não é condição necessária.

Por exemplo: a função f definida por $f(x) = (x-2)^2$ é contínua em $[0, 3]$, tem um zero em $]0, 3[$, pois $f(2) = 0$, e é tal que $f(0) \times f(3) > 0$, pois $f(0) \times f(3) = 4 \times 1 = 4$.

4. Do facto de o domínio da função f ser $[0, 5]$ e o contradomínio ser $[3, 4]$, não se pode concluir que $f(0) = 3$ ou que $f(5) = 4$. Portanto, não se pode afirmar que $g(0) = 3$ ou que $g(5) = -1$. Pode-se concluir que:

- $g(0) > 0$, pois $g(0) = f(0)$ e $f(0) \in [3, 4]$;
- $g(5) < 0$, pois $g(5) = f(5) - 5$ e $f(5) - 5 \in [3 - 5, 4 - 5]$.

Ora, de $g(5) < 0 < g(0)$, sendo a função g contínua em $[0, 5]$, pode-se então concluir, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que a função g tem pelo menos um zero.

5. É verdade que a conclusão não está correta. Mas a conclusão de que a função não tem nem máximo nem mínimo também não está correta. Da informação do enunciado, nada se pode concluir acerca da existência de extremos absolutos da função.

Teste 1

Págs. 26 e 27

Grupo I

1. Relaciona $\sum_{i=0}^n C_i$ com a soma dos elementos de uma linha do triângulo de Pascal.
2. Começa por obter um enquadramento para $2 - \cos x$ e, em seguida, obtém um enquadramento para $\frac{1}{2 - \cos x}$.
3. Começa por mostrar que o domínio da função g não é o intervalo $[-5, 5]$.
4. O número de sequências com duas vogais é 25 e, portanto, manifestamente insuficiente. Deves averiguar qual é o número de sequências de vogais com três vogais, ...
5. Recorda uma propriedade relativa à probabilidade da interseção de acontecimentos independentes.

Grupo II

1. a) Resolve, em $\mathbb{N}$, a condição $u_n > 2$.
b) Compara a sucessão (u_n) com a sucessão de termo geral 2^n .
c) Começa por identificar a menor e a maior parcela do somatório.
2. a) Para provares que a equação $f(x) = 1$ é impossível, tens de provar que a equação é impossível em $]-\infty, 2]$, em $]2, 5]$ e em $]5, +\infty[$.
b) Averigua se estás em condições de aplicar o teorema de Weierstrass.
3. Estuda o sinal de $f(-1) \times f(1)$ no intervalo indicado.
4. Considera a função g definida por $g(x) = f(x) - f(x+1)$ e aplica o teorema de Bolzano-Cauchy.

Resolução do teste 1



Grupo I

1. (B)

$$\sum_{i=0}^n C_i = 2^n \text{ e, portanto, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

2. (C)

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq -\cos x \leq 1 \text{ e, portanto, } \forall x \in \mathbb{R}, 2 - 1 \leq 2 - \cos x \leq 2 + 1.$$

$$\text{Então, } \forall x \in \mathbb{R}, 1 \leq 2 - \cos x \leq 3 \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2 - \cos x} \geq \frac{1}{3}.$$

$$\text{Dado que } \forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) > 0, \text{ pode-se concluir que } \forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{f(x)}{2 - \cos x} \geq \frac{f(x)}{3}.$$

3. (D)

Dado que a função f é contínua em $[-5, 5]$ e que $f(-5) < -2 < f(5)$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists x \in]-5, 5[: f(x) = -2$.

Então, $-2 \notin D_g$ e, sendo g uma função racional, a reta de equação $x = -2$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função g .

4. (B)

O número total de sequências de quatro vogais é 5^4 . Ora, $5^4 = 625$ e, portanto, as sequências de quatro vogais não permitem identificar todos os alunos.

O número total de sequências de cinco vogais é 5^5 e $5^5 = 3125$.

5. (D)

Dado que os acontecimentos A e B são independentes, sabe-se que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Grupo II

1. a) $u_n > 2 \Leftrightarrow \frac{10n - 15}{3n + 18} > 2 \Leftrightarrow 10n - 15 > 6n + 36 \Leftrightarrow 4n > 51 \Leftrightarrow n > 12,75$

$$\text{Então, } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 13 \Rightarrow u_n > 2$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 13 \Rightarrow (u_n)^n > 2^n$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$, conclui-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2}{\sqrt{4n^2 + n}} \times n \leq \sum_{i=1}^n \frac{2}{\sqrt{4n^2 + i}} \leq \frac{2}{\sqrt{4n^2 + 1}} \times n \leq \frac{2}{\sqrt{4n^2}} \times n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{4n^2}} \times n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{4n^2 + n}} \times n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 \left(4 + \frac{1}{n} \right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n \sqrt{4 + \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$$

Portanto, o teorema das sucessões encastradas permite concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$.

2. a) $f(0) = \frac{0^2 - 7 \times 0 + 13}{4 - 0} = \frac{13}{4}$ e $f(5) = \frac{\sqrt{5-1}-1}{5-2} = \frac{1}{3}$; portanto, $f(5) < 1 < f(0)$.

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2 - 7x + 13}{4 - x} = 1 \wedge x \leq 2 \right) \vee \left(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = 1 \wedge 2 < x \leq 5 \right) \vee$$

$$\vee \left(\frac{x-5}{x^2 - 7x + 10} = 1 \wedge x > 5 \right)$$

$$\frac{x^2 - 7x + 13}{4 - x} = 1 \wedge x \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \wedge x \leq 2 \Leftrightarrow x = 3 \wedge x \leq 2 \text{ (impossível)}$$

$$\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = 1 \wedge 2 < x \leq 5 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = x-1 \wedge 2 < x \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=2 \vee x=1) \wedge 2 < x \leq 5 \text{ (impossível)}$$

$$\frac{x-5}{x^2 - 7x + 10} = 1 \wedge x > 5 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \wedge x > 5 \Leftrightarrow (x=3 \vee x=5) \wedge x > 5 \text{ (impossível)}$$

b) A função é contínua em $[3, 5[$ e em $]5, 6]$; portanto, é contínua em $[3, 6]$ se for contínua em 5.

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = f(5) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-5}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-5}{(x-5)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3}$$

Dado que a função é contínua em 5, conclui-se que é contínua no intervalo $[3, 6]$ e o teorema de Weierstrass permite afirmar que a função, nesse intervalo, admite mínimo e máximo absolutos.

3. A função é contínua em $[-1, 1]$ pois, qualquer que seja o valor de k é sempre uma função polinomial. Se $f(-1) \times f(1) < 0$, o teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de um zero no intervalo $] -1, 1[$.

$$f(-1) \times f(1) < 0 \Leftrightarrow (1 - k + 2) \times (1 + k + 2) < 0 \Leftrightarrow (3 - k) \times (k + 3) < 0 \Leftrightarrow k < -3 \vee k > 3$$

Portanto, se $k \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$, o teorema de Bolzano-Cauchy garante que a função f tem pelo menos um zero em $] -1, 1[$.

4. A equação $f(x) = f(x+1)$ é equivalente à equação $f(x) - f(x+1) = 0$.

Seja g a função definida por $g(x) = f(x) - f(x+1)$.

A função g é contínua em $[a, a+1]$ porque é diferença de funções contínuas.

$$g(a) = f(a) - f(a+1) = -f(a+1)$$

$$g(a+1) = f(a+1) - f(a+2) = f(a+1)$$

Como $f(a+1) \neq 0$, conclui-se que $g(a) \times g(a+1) < 0$ e o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que a função g tem pelo menos um zero no intervalo $] -1, 1[$.

Como $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - f(x+1) = 0$, está provado o pedido.

5. a) ${}^{10}C_4 = 210$

b) Número de casos possíveis: $4! = 24$

Os casos favoráveis são as sequências:

$(8, 5, 2, 4)$, $(8, 5, 4, 2)$, $(2, 8, 5, 4)$, $(4, 8, 5, 2)$, $(2, 4, 8, 5)$ e $(4, 2, 8, 5)$

Número de casos possíveis: 6

Probabilidade pedida: $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

c) Número de casos possíveis: ${}^{10}C_4 = 210$

Número de casos favoráveis: ${}^9C_3 = 84$

Probabilidade pedida: $\frac{2}{5}$

Teste 2

Págs. 44 e 45

Grupo I

1. Deves começar por reconhecer o que representa o limite apresentado.
2. Determina a equação reduzida da reta r para obteres $f(0)$; $f'(0)$ é o declive da reta r e o valor de f'' em 0 está relacionado com o facto de haver mudança no sentido da concavidade do gráfico.
3. Dado que a função é duas vezes diferenciável, as abcissas dos pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, mas tem de haver mudança de sentido da concavidade. Para além de determinares os zeros de f'' , deves estudar a variação de sinal.
4. Recorda a regra de derivação da composta de funções: $(f \circ g)'(a) = g'(a) \times f'(g(a))$.
5. Mais uma vez, tens de aplicar o facto de, dada uma função diferenciável, o declive da reta tangente ao gráfico da função num ponto ser o valor da derivada na abcissa desse ponto.

Grupo II

1. Tem em consideração que o gráfico de uma função f tem a concavidade voltada para baixo num intervalo I contido no seu domínio se e só se, dados quaisquer dois pontos A e B do gráfico de f , de abcissas, respetivamente, a e b , pertencentes a I , a parte do gráfico de abcissas estritamente situadas entre a e b ficar acima do segmento de reta $[AB]$.
2. a) Dado que a função é diferenciável, é necessário que $f'(1) = 0$.
b) O estudo pedido deve ser feito recorrendo à primeira e à segunda derivada.
3. Representa a assíntota e interpreta a monotonia da função derivada em termos da concavidade do gráfico da função.
4. a) De acordo com o enunciado, o tempo que o carro demora a chegar à meta é o tempo que demora a atingir a velocidade máxima.
b) Recorda o conceito de aceleração média e aceleração na página 42.
c) O máximo de uma função diferenciável pode determinar-se recorrendo à sua função derivada.

Resolução do teste 2



Grupo I

1. (B)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \Leftrightarrow f'(a) = 0$$

Portanto, tem-se $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$, o que permite concluir que f atinge um máximo relativo em a .

2. (A)

A equação reduzida da reta r é $y = -x + 1$; portanto, $f(0) = 0 + 1 = 1$.

Por outro lado, $f'(0)$ é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0 e, portanto, é o declive da reta r , ou seja, $f'(0) = -1$.

Por fim, como a concavidade do gráfico da função muda de sentido no ponto de abscissa 0, esse ponto é ponto de inflexão do gráfico.

$$f(0) + f'(0) + f''(0) = 1 - 1 + 0 = 0$$

3. (B)

Tem-se $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$.

A função f'' tem dois zeros. No entanto, um dos zeros (o 0) é raiz dupla e, portanto, não há mudança de sinal. O outro zero (o 1) é um zero de multiplicidade 1, ocorrendo, assim, mudança de sinal. Podes construir um quadro de sinais para confirmar estas afirmações.

O gráfico da função tem apenas um ponto de inflexão de abscissa igual a 1.

4. (D)

$$(f \circ g)'(1) = g'(1) \times f'(g(1))$$

Tem-se $f'(x) = 3x^2 - 6$ e, portanto, $f'(0) = -6$.

$$\text{Então: } (f \circ g)'(1) = g'(1) \times f'(g(1)) = 2 \times (-6) = -12$$

5. (D)

O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa a é igual a $f'(a)$.

$$f'(x) = (x^a + a^2x)' = ax^{a-1} + a^2 \text{ e, portanto, } f'(a) = aa^{a-1} + a^2 = a^a + a^2.$$

Grupo II

1. O declive da reta que passa nos pontos do gráfico de abscissas -2 e 4 é $\frac{5-1}{4-(-2)} = \frac{2}{3}$.

$$\text{A equação reduzida dessa reta é } y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}.$$

Dado que o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $[-2, 4]$, o gráfico da restrição da função a esse intervalo está acima da reta. Portanto, $f(-1)$ tem de ser maior do que a ordenada do ponto da reta que tem abscissa -1 .

$$\text{Como } \frac{2}{3} \times (-1) + \frac{7}{3} = \frac{5}{3}, f(-1) \text{ não pode ser } \frac{4}{3}.$$

2. a) Para que a função atinja um extremo em 1 tem de ser $f'(1) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 2kx + 5$$

$$\text{Portanto, } f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2k + 5 = 0 \Leftrightarrow k = 4$$

- b) Para $k = 4$, tem-se $f''(1) < 0$ e, portanto, a função atinge um máximo relativo em 1.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{5}{3}$$

x	$-\infty$	1		$\frac{5}{3}$	$+\infty$
Sinal e zeros de f'	+	0	-	0	+
Variação e extremos de f		Máx. relativo		Mín. relativo	

A função é crescente em $]-\infty, 1]$ e em $[\frac{5}{3}, +\infty[$ e é decrescente em $[1, \frac{5}{3}]$.

$f(1) = 1$ é máximo relativo e $f(\frac{5}{3}) = \frac{23}{27}$ é mínimo relativo.

$$f''(x) = 6x - 8$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, \frac{4}{3}]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[\frac{4}{3}, +\infty[$; o ponto de coordenadas $(\frac{4}{3}, \frac{25}{27})$ é ponto de inflexão do gráfico.

3. Por exemplo:



4. a) $v' = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 6t + 3 = 0$

A solução positiva desta equação é $3 + 2\sqrt{3} \approx 6,5$.

Como a derivada à esquerda é positiva e à direita é negativa a função v atinge um máximo relativo em $3 + 2\sqrt{3}$.

A velocidade máxima é $v(3 + 2\sqrt{3}) \approx 54,7$ m/s.

- b) A aceleração média é $\frac{v(2) - v(0)}{2} = \frac{23}{3} \approx 7,7$ m/s² e a aceleração ao fim de um segundo é

$$v'(1) = -1^2 + 6 \times (1) + 3 = 8 \text{ m/s}^2.$$

- c) $v'' = 0 \Leftrightarrow -2t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Como v'' passa de positiva a negativa, v' atinge um máximo em 3.

A aceleração é máxima ao fim de 3 segundos.

5. A afirmação I é falsa.

O domínio de b' é $\mathbb{R}$, portanto:

$$b'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$$

No quadro seguinte apresenta-se o estudo da variação de sinal de b' .

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+	0	-
$x^2 + 1$	+	+	+	+	+
Sinal e zeros de b'	+	0	+	0	-
Variação e extremos de b				Máx. relativo	

A função b só tem um extremo relativo (atinge um máximo em 3).

A afirmação II é verdadeira.

$$b''(x) = \frac{f'(x) \times (x^2 + 1) - f(x) \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{Portanto, } b''(-2) = \frac{f'(-2) \times (4 + 1) - f(-2) \times (-4)}{(4 + 1)^2}.$$

Dado que -2 é zero de f , tem-se $f(-2) = 0$ e como f é diferenciável e tem um extremo relativo em -2 , conclui-se que $f'(-2) = 0$.

$$\text{Assim, } b''(-2) = \frac{0 \times 5 - 0 \times (-4)}{(4 + 1)^2} = \frac{0}{25} = 0$$

A afirmação III é falsa.

Dado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = 3$, conclui-se que a reta de equação $y = 3$ é assíntota ao gráfico de b em $+\infty$.

Portanto, a reta de equação $y + 3 = 0$, ou seja, a reta de equação $y = -3$, não é assíntota ao gráfico da função b em $+\infty$.

Teste 3

Págs. 62 e 63

Grupo I

1. Relaciona o sinal da primeira derivada com a monotonia da função e o sinal da segunda derivada com o sentido da concavidade do gráfico da função.
2. Os pontos de inflexão do gráfico de f são pontos onde muda o sentido da concavidade do gráfico. Sendo a função duas vezes diferenciável, para que o ponto de abscissa c seja ponto de inflexão é necessário que $f''(c) = 0$. Mas, atenção, esta condição não é suficiente para que o ponto seja ponto de inflexão.
3. Uma equação da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa 1 é:
$$y = g'(1)(x - 1) + g(1)$$
4. Determina $g(1)$ e determina $g'(1)$, depois de calculares $g'(x)$.
5. Tem em consideração que só admitimos dois valores lógicos.

Grupo II

1. O gráfico apresentado é o gráfico da função derivada. Identifica os zeros e estuda a variação de sinal de f' para tirares conclusões acerca da monotonia e existência de extremos da função f . Estuda a monotonia e existência de extremos de f' para tirares conclusões acerca do sentido da concavidade do gráfico de f e existência de pontos de inflexão.
4. Exprime a altura de qualquer desses triângulos em função de $\overline{AC}$, recorrendo ao teorema de Pitágoras. Podes, em seguida, obter uma expressão da área dos triângulos em função de $\overline{AC}$ e estudar a monotonia da função correspondente recorrendo à função derivada.

Resolução do teste 3



Grupo I

1. (A)

A função é crescente e, portanto, a derivada é positiva; o gráfico tem a concavidade voltada para cima e, portanto, a segunda derivada é positiva.

2. (B)

Tem-se:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \vee x^2 + 3 = 0 \vee (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \vee x = -1$$

A função f'' tem três zeros, mas só muda de sinal em -2 e em 2 .

Portanto, o gráfico da função f tem exatamente dois pontos de inflexão.

3. (C)

Uma equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 é:

$$y = g'(1) \times (x - 1) + g(1)$$

$$g'(x) = 2 \times f(x) + (2x - 1) \times f'(x)$$

$$m = g'(1) = 2 \times f(1) + (2 \times 1 - 1) \times f'(1) = 3$$

$$g(1) = (2 \times 1 - 1) \times f(1) = 1$$

$$y = 3(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = 3x - 3 + 1 \Leftrightarrow y = 3x - 2$$

4. (C)

Na opção (D) não existe derivada no ponto 0 e, portanto, a função não é diferenciável.

Na opção (A), a derivada em 0 é negativa e, na opção (B), a concavidade do gráfico está voltada para cima no intervalo $]-\infty, 0]$ e, assim, nesse intervalo, a segunda derivada é positiva.

5. (A)

Dado que só existem dois valores lógicos, há duas possibilidades para indicar o valor lógico de cada proposição e só há uma maneira de errar o respetivo valor lógico. Portanto, a probabilidade pedida é dada por $\frac{1 \times 1 \times 1 \times 1}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{16}$.

Grupo II

1. A função f é decrescente em $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$, porque $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$, $f'(x) \leq 0$, e é crescente em $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$, porque $\forall x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$, $f'(x) \geq 0$; portanto, a função f atinge um mínimo no ponto de abscissa $-\frac{3}{2}$ e não tem máximos.

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -\frac{1}{3}]$ e em $[2, +\infty[$, porque a função f' é crescente em cada um desses intervalos.

O gráfico tem pontos de inflexão nos pontos de abscissas $-\frac{1}{3}$ e 2, pois nesses pontos muda o sentido da concavidade do gráfico.

2. a) A função atinge um máximo no ponto de abscissa 1 se $f'(1) = 0$ e $f''(1) < 0$.

$$f'(x) = 3kx^2 - 2k^2x + 5 \text{ e } f''(x) = 6kx - 2k^2$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3k - 2k^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow k = -1 \vee k = \frac{5}{2}$$

Se $k = -1$, tem-se $f''(1) = -6 - 2 = -8$; se $k = \frac{5}{2}$, tem-se $f''(1) = 15 - 2 \times \frac{25}{4} = \frac{5}{2}$.

Portanto, se $k = -1$, a função atinge um máximo em 1.

- b) $f(x) = -x^3 - x^2 + 5x - 5$; portanto, $f'(x) = -3x^2 - 2x + 5$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3} \vee x = 1$$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$		1	$+\infty$
Sinal e zeros de f'	-	0	+	0	-
Variação e extremos de f		Mín. relativo		Máx. relativo	

A função é decrescente em $]-\infty, -\frac{5}{3}]$ e em $[1, +\infty[$ e é crescente em $[-\frac{5}{3}, 1]$.

$f(-\frac{5}{3}) = -\frac{310}{27}$ é mínimo relativo e $f(1) = -2$ é máximo relativo.

$$f''(x) = -6x - 2$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

O gráfico tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -\frac{1}{3}]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[-\frac{1}{3}, +\infty[$; o ponto do gráfico de abscissa $-\frac{1}{3}$ é ponto de inflexão.

3. $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$; o gráfico interseja os eixos na origem do referencial.

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2}$$

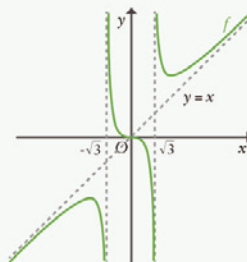
f é crescente em $]-\infty, -3]$ e em $[3, +\infty[$ e é decrescente em $[-3, -\sqrt{3}[$, em $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$ e em $]\sqrt{3}, 3]$.

$f(-3) = -\frac{9}{2}$ é máximo relativo e $f(3) = \frac{9}{2}$ é mínimo relativo.

$$f''(x) = \frac{x(6x^2 + 54)}{(x^2 - 3)^3}$$

O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -\sqrt{3}[$ e em $[0, \sqrt{3}[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-\sqrt{3}, 0]$ e $]\sqrt{3}, +\infty[$.

O ponto de coordenadas $(0, 0)$ é ponto de inflexão; as retas de equações $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$ são assíntotas verticais e a reta de equação $y = x$ é assíntota não vertical em $-\infty$ e em $+\infty$.



4. $4\sqrt{2}$

5. A afirmação I é falsa pois, dado que a reta de equação $x = 0$ é assíntota ao gráfico da função, a função não é contínua no ponto 0, pelo que não é contínua no intervalo $[-5, 3]$. Então, o teorema de Bolzano-Cauchy não permite garantir, no intervalo $]-5, 3[$, a existência de pelo menos um zero da função f .

A afirmação II é falsa pois, da igualdade $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x] = 0$, pode concluir-se que a reta de equação $y = -3x$ é assíntota ao gráfico da função em $-\infty$, pelo que o gráfico não admite uma assíntota horizontal em $-\infty$.

A afirmação III é falsa pois, dado que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ é igual a $f'(x)$, tem-se que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) > 0$ mas, deste resultado só se pode concluir que a função é crescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$.

Demonstração facultativa (pág. 85)

Teorema

A sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente.

Demonstração

Começamos por provar, recorrendo ao método de indução matemática, que, se $a \in [0, 1]$, então $\forall n \in \mathbb{N}, a^n \in [0, 1]$.

Se $a = 0$, então, para qualquer número natural n , tem-se $a^n = 0^n = 0$, de onde se conclui que $\forall n \in \mathbb{N}, a^n \in [0, 1]$.

Vamos agora provar que, se $a \in]0, 1]$, então, $\forall n \in \mathbb{N}, a^n \in]0, 1]$.

Para $n = 1$, tem-se $a^1 = a$ e, portanto, $a^1 \in]0, 1]$.

Seja n um qualquer número natural e suponhamos que $a^n \in]0, 1]$.

Vamos provar que $a^n \in]0, 1] \Rightarrow a^{n+1} \in]0, 1]$.

$$0 < a \leq 1 \wedge 0 < a^n \leq 1 \Rightarrow 0 < a^n < a \times a^n \leq 1 \times a^n$$

Então, dado que $a^n \leq 1$, conclui-se que $a^n \in]0, 1] \Rightarrow 0 < a^{n+1} \leq 1$.

Estamos agora em condições de justificar que:

Se $x \in [0, 1]$, então $(1-x)^n \geq 1-nx$ *.

Para $x = 0$ e para $x = 1$, a desigualdade é trivial.

Analisemos o caso em que $x \in]0, 1[$.

$$n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ parcelas}} \geq 1 + (1-x) + (1-x)^2 + \dots + (1-x)^{n-1}$$

A soma destas n parcelas pode ser feita recorrendo à fórmula que permite calcular a soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica. Neste caso, o primeiro termo é igual a 1 e a razão é $1-x$.

$$1 + (1-x) + (1-x)^2 + \dots + (1-x)^{n-1} = 1 \times \frac{1 - (1-x)^n}{1 - (1-x)} = \frac{1 - (1-x)^n}{x}$$

$$\text{Então, } n \geq \frac{1 - (1-x)^n}{x}.$$

$$\text{Dado que } n \geq \frac{1 - (1-x)^n}{x} \Leftrightarrow nx \geq 1 - (1-x)^n, \text{ conclui-se que } (1-x)^n \geq 1 - nx.$$

Estamos, agora, em condições de provar que a sucessão (u_n) de termo geral

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ é crescente.}$$

* Este resultado é um caso particular da desigualdade de Bernoulli.

NOTA
 $x \in]0, 1[\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 1-x \in]0, 1[$

Começa por observar que, dado que se trata de uma sucessão de termos positivos:

$$u_{n+1} > u_n \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \times \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \times \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n$$

Tem-se $n(n+2) = n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1$; portanto:

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n$$

Aplicando a desigualdade de Bernoulli, com $x = \frac{1}{(n+1)^2}$, obtém-se:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{n+1} \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq \frac{n+2}{n+1} \left(1 - n \times \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

Ora,

$$\begin{aligned} \frac{n+2}{n+1} \left(1 - n \times \frac{1}{(n+1)^2}\right) &= \frac{n+2}{n+1} - \frac{n(n+2)}{(n+1)^3} = \frac{(n+2)(n+1)^2 - (n+1)^2 + 1}{(n+1)^3} = \\ &= \frac{(n+1)^2[(n+2) - 1] + 1}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^2(n+1) + 1}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3 + 1}{(n+1)^3} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 + \frac{1}{(n+1)^3}$, de onde se conclui que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, ou seja,

a sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente.

Teorema

A sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é majorada.

Demonstração

Começemos por provar que, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow n! > 2^{n-1}$.

Para $n = 3$, tem-se $3! = 6$ e $2^{3-1} = 2^2 = 4$.

Portanto, a condição $n! > 2^{n-1}$ é verificada por $n = 3$.

Vamos agora provar que, sendo n um qualquer natural maior ou igual a 3, se tem:

$$n! > 2^{n-1} \Rightarrow (n+1)! > 2^n$$

$$n! > 2^{n-1} \Rightarrow (n+1) \times n! > (n+1) \times 2^{n-1} \Rightarrow^*$$

$$\Rightarrow (n+1)! > 2 \times 2^{n-1} \Rightarrow (n+1)! > 2^n$$

* Sabe-se que $n+1 > 2$ pois $n \geq 3$.

Então, como a condição é válida para $n = 3$ e é hereditária, o princípio de indução matemática permite concluir que é verificada por qualquer número natural maior ou igual a 3.

Recorrendo ao desenvolvimento pelo binómio de Newton, podemos escrever:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{p=0}^n {}^nC_p \left(\frac{1}{n}\right)^p = \sum_{p=0}^n \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)}{p! n^p}$$

Ora, para $2 \leq p \leq n$, tem-se:

$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)}{p! n^p} = \frac{1}{p!} \times \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \cdots \times \frac{n-p+1}{n} \leq \frac{1}{p!}^*$$

* $\forall p \in \mathbb{N}, 2 \leq p \leq n$,
 $\frac{n-p+1}{n} \leq 1$

Então, podemos concluir que:

$$\sum_{p=0}^n {}^nC_p \left(\frac{1}{n}\right)^p = \sum_{p=0}^n {}^nC_p \left(\frac{1}{n}\right)^p = 1 + n \times \frac{1}{n} + \sum_{p=2}^n {}^nC_p \left(\frac{1}{n}\right)^p \leq 2 + \sum_{p=2}^n \frac{1}{p!}$$

$$\text{Portanto, } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 2 + \sum_{p=2}^n \frac{1}{p!}.$$

$$\text{Dado que, } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow n! > 2^{n-1}, \text{ tem-se } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow \sum_{p=2}^n \frac{1}{p!} \leq \sum_{p=2}^n \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Aplicando a fórmula que permite obter a soma de termos consecutivos de uma progressão geométrica, obtém-se:

$$\sum_{p=2}^n \frac{1}{2^{p-1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Finalmente, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 2 + \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \leq 2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 3$ e, dado que os dois primeiros termos da sucessão são iguais, respetivamente, a 2 e a 2,25, conseguimos provar que 3 é majorante da sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Portanto, a sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente e é majorada. Logo, é convergente.

O limite desta sucessão é um número irracional designado por número de Neper e representado por e .

Demonstração facultativa (pág. 90)

Começemos por notar que a função raiz de índice n é crescente em $\mathbb{R}^+$ pois, para $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ e $\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} > 0$.

Já provámos que, sendo n e m números naturais e sendo $a > 1$, $n < m \Rightarrow a^n < a^m$.

Pretendemos estender este resultado ao caso de expoentes racionais. Começemos por considerar o caso em que os expoentes são racionais positivos.

Sejam, então, r e s números racionais positivos e tais que $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$, com $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ e suponhamos que $r < s$.

$$\begin{aligned} r < s &\Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{p}{q} \Rightarrow mq < np \Rightarrow a^{mq} < a^{np} \Rightarrow \sqrt[q]{a^{mq}} < \sqrt[q]{a^{np}} \Rightarrow a^m < \sqrt[q]{a^{np}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^m < \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{a^m} < \sqrt[q]{a^p} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{p}{q}} \Rightarrow a^r < a^s. \end{aligned}$$

Portanto, em $\mathbb{Q}^+$ tem-se $r < s \Rightarrow a^r < a^s$.

Consideremos agora o caso em que os dois racionais têm sinais contrários. Suponhamos, por exemplo, que $r < 0$ e $s > 0$. Tem-se, portanto, $r < s$ e vamos provar que $a^r < a^s$.

Ora, dado que $a > 1$, conclui-se que $a^{-r} > 1$, pois $-r > 0$, e também $a^s > 1$.

$$\text{Então, } a^r = \frac{1}{a^{-r}} < 1 < a^s.$$

Consideremos agora o caso em $r < s$, sendo r e s números racionais negativos.

$r < s \Rightarrow -s < -r$ e, dado que $-r$ e $-s$ são números racionais positivos, tem-se:

$$r < s \Rightarrow -s < -r \Rightarrow a^{-s} < a^{-r} \Rightarrow \frac{1}{a^s} < \frac{1}{a^r} \Rightarrow a^r < a^s$$

No caso de $r < s$, sendo $r = 0$, tem-se $a^s > 1$, pois $s > 0$ e, portanto, $a^s > a^r$ dado que $a^r = a^0 = 1$.

No caso de $r < s$, sendo $s = 0$, basta atender a que r é negativo e, portanto, $a^r < 1$, para concluir que $a^r < a^s$, pois $a^s = a^0 = 1$.

Demonstração facultativa (pág. 91)

Seja f a função definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$.

Vamos provar que a função f é contínua em 0, ou seja, dado que $a^0 = 1$, pretendemos provar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = \lim_{x \rightarrow 0^-} a^x = 1$.

No 11.º ano, provámos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Sabemos, portanto, que $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Então, dado $\delta > 0$, existe uma ordem $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_1 \Rightarrow \left| a^{\frac{1}{n}} - 1 \right| < \delta$.

Tem-se, em particular, que $1 - \delta < a^{\frac{1}{p_1}} < 1 + \delta$ e, se $a > 1$, pode ainda afirmar-se que $1 < a^{\frac{1}{p_1}} < 1 + \delta$.

Começemos por ver o caso $a > 1$. Consideremos, agora, uma qualquer sucessão de números racionais positivos, (q_n) , que tenda para 0.

Dado que $q_n \rightarrow 0$ e que os termos da sucessão são positivos, sabemos que existe uma ordem $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_2 \Rightarrow 0 < q_n < \frac{1}{p_1}$.

Então, sendo p o maior dos números p_1 e p_2 , e dado que a função definida por a^x , com $a > 1$, é crescente em $\mathbb{Q}$, tem-se:

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow 1 < a^{q_n} < a^{\frac{1}{p_1}} < 1 + \delta$, de onde se pode concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n} = 1$.

No caso de $0 < a < 1$, a conclusão é idêntica pois $a^{q_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{q_n}}$ e, dado que $\frac{1}{a} > 1$, tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{q_n}} = \frac{1}{1} = 1$$

O que fizemos até agora, permite concluir que $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = 1$.

Para atingir o objetivo a que nos propusemos, falta provar que $\lim_{x \rightarrow 0^-} a^x = 1$.

Seja (q_n) uma qualquer sucessão de números racionais negativos, que tende para 0.

Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-q_n}} = \frac{1}{1} = 1$.

Concluimos, portanto, que a função f definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$ é contínua em 0.

* Repara que a sucessão definida por $-q_n$ é uma sucessão de números racionais positivos que tende para 0.

Teste 4

Págs. 102 e 103

Grupo I

1. Uma situação como a descrita pode ser associada a uma progressão geométrica de razão $1 + \frac{8,05}{100}$.
2. Recorda o que aprendeste sobre o número e e sobre o limite da sucessão de termo geral $u_n = a^n$, com $0 < a < 1$ e com $a > 1$.
3. Se o ponto $P\left(x, \frac{1}{3}\right)$ pertence ao gráfico de f , então $f(x) = \frac{1}{3}$.
4. Considera a função g como composta da função exponencial de base 2 com a função r , identifica o contradomínio da função r e atende a que a exponencial de base 2 é uma função contínua e crescente.
5. Observa as expressões que definem as funções: duas das funções são funções exponenciais, uma outra é função afim e outra é função quadrática. Recorda o que sabes acerca da monotonia das funções destas famílias.

Grupo II

1. Começa por identificar o capital que o sr. António tem disponível para depositar.
2. Para resolveres as condições das alíneas c) e d), sugerimos que uses uma mudança de variável.
3. a) Recorda que a reta de equação $y = b$ é assíntota horizontal ao gráfico de f se e só se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ e uma reta de equação $x = a$ é assíntota vertical se e só se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$.
- c) Recorda que o declive da reta tangente ao gráfico de uma função (diferenciável) num ponto é igual à derivada da função na abcissa desse ponto.
4. d) Determina a área do triângulo tomando $[BC]$ para base.
5. Usa $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ num processo e os teoremas de comparação no outro.

Resolução do teste 4



Grupo I

1. (C)

Seja $p(n)$ a percentagem de utilizadores de internet, n anos após 2005.

Tem-se $p(n) = p_0 \times 1,0805^n$, com $n \in \mathbb{N}_0$, sendo p_0 a percentagem de utilizadores no início de 2005.

Dado que $p(3) = p_0 \times 1,0805^3$ e que $p(3) = 92,7$, conclui-se que $p_0 = \frac{92,7}{1,0805^3} \approx 73,5$.

2. (D)

O número e é um número irracional, que é o limite da sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Portanto, as afirmações das opções (A) e (B) são proposições verdadeiras.

Sabe-se que $\lim(a^n) = 0$ e $\lim(a^n) = +\infty$, consoante $0 < a < 1$ ou $a > 1$.

Atendendo a que $e \approx 2,72$, tem-se $\lim(e^n) = +\infty$ e $\lim(e^{-n}) = \lim\left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$.

Portanto, a afirmação da opção (C) é verdadeira.

3. (D)

A equação $f(x) = \frac{1}{3}$ é equivalente a $9^{-x} = \frac{1}{3}$.

$$9^{-x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{-2x} = 3^{-1} \Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

4. (B)

Tem-se $D_f =]-\infty, 2]$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 2^{-\infty} = 0$.

Como a função exponencial de base 2 é contínua e crescente, o contradomínio da função g é $]0, g(2)] =]0, 2^2] =]0, 4]$.

5. (C)

A função f é uma função afim decrescente e a função g é uma função quadrática, que é crescente em $] -\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$; a função h é decrescente, pois é uma função exponencial com base entre 0 e 1 e a função r é crescente, pois é uma função exponencial com base maior do que 1.

A experiência consiste em escolher duas de quatro funções, o que pode ser feito de 4C_2 formas diferentes. Como só há duas funções decrescentes, existe apenas um caso favorável: a escolha das funções f e h .

Portanto, a probabilidade pedida é $\frac{1}{{}^4C_2} = \frac{1}{6}$.

Grupo II

1. O sr. António recebeu $25\,000 \times 0,8 = 20\,000$ (euros) e é este montante que vai depositar.

Dado que a taxa de juro do depósito é 1,9%, o capital acumulado decorridos n anos é dado por $20\,000 \times 1,019^n$.

A resposta ao problema é o menor valor natural de n para o qual $20\,000 \times 1,019^n \geq 25\,000$.

$$20\,000 \times 1,019^n \geq 25\,000 \Leftrightarrow 1,019^n \geq 1,25$$

$$\text{Tem-se } 1,019^{11} \approx 1,230 \text{ e } 1,019^{12} \approx 1,253.$$

Portanto, o depósito tem de durar, no mínimo, 12 anos.

2. a) $100^x = 0,001 \Leftrightarrow 10^{2x} = 10^{-3} \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

b) $5^{x-1} + 5^{x-2} = 150 \Leftrightarrow 5^x \times 5^{-1} + 5^x \times 5^{-2} = 150 \Leftrightarrow 5^x \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{25} \right) = 150 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 5^x \times \frac{6}{25} = 150 \Leftrightarrow 5^x = \frac{150 \times 25}{6} \Leftrightarrow 5^x = 625 \Leftrightarrow 5^x = 5^4 \Leftrightarrow x = 4$

c) $9^x + 3^{x+1} = 4 \Leftrightarrow (3^x)^2 + 3 \times 3^x = 4$; seja $3^x = y$.

$$y^2 + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -4 \vee y = 1$$

Portanto, $(3^x)^2 + 3 \times 3^x = 4 \Leftrightarrow \underbrace{3^x = -4 \vee 3^x = 1}_{\substack{\text{equação} \\ \text{impossível}}} \Leftrightarrow x = 0$

d) $2 \times 3^{x+1} - 3^{-x} \leq 5 \Leftrightarrow 2 \times 3 \times 3^x - \frac{1}{3^x} \leq 5 \Leftrightarrow 6 \times 3^x - \frac{1}{3^x} \leq 5$; seja $3^x = y$.

$$6y - \frac{1}{y} \leq 5 \Leftrightarrow \frac{6y^2 - 5y - 1}{y} \leq 0 \Leftrightarrow 6y^2 - 5y - 1 \leq 0$$

Cálculos auxiliares

$$6y^2 - 5y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{12} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{6} \vee y = 1$$

Portanto, $6y^2 - 5y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{6} \wedge y \leq 1$.

$$6 \times 3^x - \frac{1}{3^x} \leq 5 \Leftrightarrow \underbrace{3^x \geq -\frac{1}{6} \wedge 3^x \leq 1}_{\substack{\text{condição} \\ \text{universal}}} \Leftrightarrow 3^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$$

3. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = e^0 = 1$

Portanto, a reta de equação $y = 1$ é assíntota ao gráfico da função f (em $-\infty$).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - e^{-x}) = e^{+\infty} - e^{-\infty} = +\infty - 0 = +\infty$$

Não existe assíntota horizontal em $+\infty$.

A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; portanto, só a reta de equação $x = 0$ poderá ser assíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - e^{-x}) = e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0$$

Assim, não existem assíntotas verticais ao gráfico da função f .

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} \times 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = e^0 \times 2 \times 1 = 2$

c) $x < 0 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}}; m = f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -4e^{-2} \text{ e } f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa $-\frac{1}{2}$ é $y = -\frac{4}{e^2}x - \frac{1}{e^2}.$

4. a) O gráfico da função f , que é uma função exponencial, está representado a verde, portanto o gráfico da função g é o representado a azul.

b) $g(x) = -3 \Leftrightarrow 5 - 2^{2-x} = -3 \Leftrightarrow 2^{2-x} = 8 \Leftrightarrow 2^{2-x} = 2^3 \Leftrightarrow 2 - x = 3 \Leftrightarrow x = -1$

c) É a reta de equação $y = 5$, pois $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - 2^{2-x}) = 5 - 2^{-\infty} = 5 - 0 = 5.$

d) Tomando $[BC]$ para base, a base e a altura do triângulo são, respetivamente, a ordenada e a abscissa do ponto B .

A abscissa do ponto B é a solução positiva da equação $f(x) = g(x).$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2^x = 5 - 2^{2-x} \Leftrightarrow 2^x = 5 - \frac{4}{2^x}; \text{ seja } 2^x = y.$$

$$y = 5 - \frac{4}{y} \Leftrightarrow y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 4$$

$$\text{Portanto, } 2^x = 5 - \frac{4}{2^x} \Leftrightarrow 2^x = 1 \vee 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

A abscissa do ponto B é 2 e a ordenada é $f(2) = 2^2 = 4.$

Então, a área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{4 \times 2}{2} = 4$ (u.a.).

5. 1.º processo

$$\lim \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n = \lim \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right] = \lim \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 0 \times e = 0$$

2.º processo

$$\forall n \in \mathbb{N}_2, 0 < \frac{n+1}{2n} \leq \frac{3}{4}, \text{ portanto, } \forall n \in \mathbb{N}_2, 0 < \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n \leq \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

Dado que $\lim \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0$, o teorema das sucessões enquadadas permite concluir que $\lim \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n = 0$.

Teste 5

Págs. 118 e 119

Grupo I

1. Atendendo a que em todas as opções a abcissa é igual a 1, podes começar por obter uma expressão da função inversa de f para, em seguida, determinar a imagem de 1 por essa função.
2. Se o ponto $P\left(x, \frac{1}{2}\right)$ pertence ao gráfico de f , então $f(x) = \frac{1}{2}$.
3. Aplica propriedades algébricas dos logaritmos.
4. A abcissa do ponto A é o zero da função f e a ordenada do ponto C é $f(c)$.
5. Recorda que os termos do desenvolvimento de $(3x + 2)^4$ são da forma ${}^4C_k(3x)^{4-k}2^k$.

Grupo II

1. e) Os pontos do gráfico da função f cuja ordenada é igual à abcissa são os pontos em que o gráfico interseja a reta de equação $y = x$.
2. O estudo da monotonia da função, a que deves acrescentar o cálculo dos limites em $+\infty$ ou em $-\infty$, vão permitir-te obter o contradomínio da função.
3. a) Do enunciado concluis que b é 8 quando T é 2.
4. Começa por identificar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2x]$.
5. a) Começa por identificar quantas músicas portuguesas devem ser escolhidas de modo a respeitar a proporção de 2 para 1.
b) Recorre ao acontecimento contrário.

Resolução do teste 5



Grupo I

1. (C)

$$2 \log_4(x+4) = y \Leftrightarrow \log_4(x+4) = \frac{y}{2} \Leftrightarrow x+4 = 4^{\frac{y}{2}} \Leftrightarrow x = 4^{\frac{y}{2}} - 4; \text{ então, } f^{-1}(x) = 4^{\frac{x}{2}} - 4.$$

Assim, $f^{-1}(1) = 4^{\frac{1}{2}} - 4 = \sqrt{4} - 4 = 2 - 4 = -2.$

2. (D)

A equação $f(x) = \frac{1}{2}$ é equivalente a $\log_2(x) = \frac{1}{2}.$

$$\log_2(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

3. (D)

$$\ln(a^3) = 6k \Leftrightarrow 3 \ln(a) = 6k \Leftrightarrow \ln(a) = 2k$$

$$\ln(ab) = k \Leftrightarrow \ln(a) + \ln(b) = k \Leftrightarrow \ln(b) = k - \ln(a)$$

Como $\ln(a) = 2k$, conclui-se que $\ln(b) = k - 2k = -k.$

Então, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) = 2k - (-k) = 3k.$

4. (C)

A abscissa do ponto A é igual a 1, porque é o zero da função logaritmo; a ordenada do ponto C é igual a $\ln(c)$, porque C é o ponto do gráfico de f que tem abscissa $c.$

Então, $\overline{AB} \times \overline{BC} = (c-1) \times \ln(c) = \ln(c^{c-1}).$

5. (B)

Os termos do desenvolvimento de $(3x+2)^4$ são da forma ${}^4C_k(3x)^{4-k}2^k$ e o termo cuja parte literal é x^3 é aquele em que $k=1.$

Tem-se: ${}^4C_1(3x)^{4-1}2^1 = 4 \times 3^3 \times x^3 \times 2 = 216x^3.$

Grupo II

1. a) $1 + \ln(3x) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow 3x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3e}; \frac{1}{3e}$ é o único zero da função $f.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln(3x)}{x} = \frac{1 - \infty}{0^+} = -\infty$

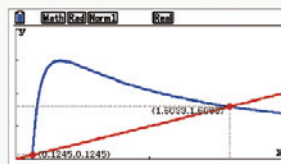
$$c) f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1 + \ln\left(\frac{3}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = \frac{1 + \ln(3) - \ln(e)}{\frac{1}{e}} = \frac{1 + \ln(3) - 1}{\frac{1}{e}} = e \ln(3) = \ln(3^e)$$

$$\text{Tem-se } \lim\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Como a função f é contínua e a sucessão (u_n) tende para $\frac{1}{e}$, conclui-se que $\lim f(u_n) = f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(3^e)$.

$$\begin{aligned} d) x f(x) \geq \ln(e - ex) &\Leftrightarrow 1 + \ln(3x) \geq \ln(e - ex) \Leftrightarrow \ln(e) + \ln(3x) \geq \ln(e - ex) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(3ex) \geq \ln(e - ex) \Leftrightarrow 3ex \geq e - ex \wedge x > 0 \wedge e - ex > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4ex \geq e \wedge x > 0 \wedge x < 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4} \wedge x > 0 \wedge x < 1 \\ \text{C.S.} &= \left[\frac{1}{4}, 1\right[\end{aligned}$$

- e) Recorrendo à calculadora, começamos por determinar as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico da função f com a reta de equação $y = x$.



O lado do quadrado de diagonal $[AB]$ é a diferença entre as abscissas dos pontos B e A . $(1,603 - 0,125)^2 = 1,478^2 \approx 2,2$.

O valor pedido é 2,2 (u.a.).

$$2. f'(x) = 2xe^{x^2} - 2ex$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} - e) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^{x^2} = e \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$2x$	-	-	-	0	+	+	+
$e^{x^2} - e$	+	0	-	-	-	0	+
f'	-	0	+	0	-	0	+
f		Mín. rel.		Máx. rel.		Mín. rel.	

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x^2 \left(\frac{e^{x^2}}{x^2} - e - \frac{2}{x^2} \right) \right] \underset{y=x^2}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[y \left(\frac{e^y}{y} - e - \frac{2}{y} \right) \right] = +\infty \times (+\infty - e - 0) = +\infty$$

$$f(-1) = e - e - 2 = -2 \quad \text{e} \quad f(1) = e - e - 2 = -2$$

Como a função f é contínua, podemos concluir que $D_f = [-2, +\infty[$.

Portanto, a equação $f(x) = k$ é impossível se $k \in]-\infty, -2[$.

$$3. a) \quad 8 = 2 \log_2 \left(\frac{A-2}{2} \right) \Leftrightarrow 4 = \log_2 \left(\frac{A-2}{2} \right) \Leftrightarrow \frac{A-2}{2} = 2^4 \Leftrightarrow \frac{A-2}{2} = 16 \Leftrightarrow A = 34$$

A temperatura ambiente é 34°C .

$$b) \quad h = 2 \log_2 \left(\frac{8T}{2} \right) \Leftrightarrow \frac{h}{2} = \log_2(4T) \Leftrightarrow h = 2 [\log_2(4) + \log_2(T)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = 2 [2 + \log_2(T)] \Leftrightarrow h = 4 + \log_2(T^2)$$

4. Dado que a reta de equação $y = 2x - 3$ é assíntota ao gráfico de g , sabe-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ e sabe-se também que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2x] = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{xg(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + x}{g(x)} - \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{g(x)} + \frac{x^2}{g(x)} - \frac{1}{2}x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{g(x)} - \frac{1}{2}x \right] = \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - xg(x)}{2g(x)} = \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x[2x - g(x)]}{2g(x)} = \\ &= \frac{1}{2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2g(x)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g[2x - g(x)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (-3) = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

A reta de equação $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ é assíntota ao gráfico da função f .

5. a) Dado que vão ser escolhidas nove músicas, têm de ser seis músicas portuguesas e três músicas estrangeiras, de modo a respeitar a proporção de 2 para 1.

Tem-se $20 \times 0,4 = 8$; portanto, há 8 pedidos de músicas portuguesas e 12 pedidos de músicas estrangeiras.

O número de escolhas possíveis é ${}^8C_6 \times {}^{12}C_3 = 6160$.

- b) Recorrendo ao acontecimento contrário: «nenhuma das músicas pedidas pelo Pedro é escolhida», a probabilidade que se pretende calcular é $1 - \frac{{}^{12}C_3 \times {}^6C_6}{{}^8C_6 \times {}^{12}C_3} = 1 - \frac{1}{{}^8C_6} = \frac{27}{28}$.

Caça aos erros!

As respostas aos itens seguintes têm um ou mais erros.
Descobre todos os erros!

1 Resolve as equações:

a) $8^{x+3} = 2 \times 4^{3x-1}$

b) $2^{x+1} + 2^{x+2} = 64$

Resposta de um aluno:

a) $8^{x+3} = 2 \times 4^{3x-1} \Leftrightarrow 8^{x+3} = 8^{3x-1} \Leftrightarrow x+3 = 3x-1 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$

b) $2^{x+1} + 2^{x+2} = 64 \Leftrightarrow 2^{x+1} + 2^{x+2} = 2^6 \Leftrightarrow x+1 + x+2 = 6 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

2 Resolve a condição $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-1} > \left(\frac{1}{8}\right)^{x-3}$ e apresenta o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.

Resposta de um aluno:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-1} > \left(\frac{1}{8}\right)^{x-3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{4x-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+3} \Leftrightarrow 4x-1 > 3x+3 \Leftrightarrow x > 4$$

O conjunto-solução é $]4, +\infty[$.

3 Determina o conjunto-solução de cada uma das condições.

a) $\log(x) < 2$

b) $\log_2(2x) < \log_2(x) + 3$

c) $x \ln(1-x) \geq x$

Resposta de um aluno:

a) $\log(x) < 2 \Leftrightarrow x < 10^2$; C.S. = $] -\infty, 100[$

b) $\log_2(2x) < \log_2(x) + 3 \Leftrightarrow \log_2(2x) < \log_2(x) + \log_2(8) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x < x + 8 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x < 8 \wedge x > 0$; C.S. = $]0, 8[$

c) $x \ln(1-x) \geq x \Leftrightarrow \ln(1-x) \geq \frac{x}{x} \Leftrightarrow \ln(1-x) \geq 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 1-x \geq e \Leftrightarrow -x \geq e-1 \Leftrightarrow x \leq 1-e$

O conjunto-solução é $] -\infty, 1-e]$ porque está contido no domínio, pois se $1-x$ é maior do que e , também é maior do que 0.

4 Determina os limites seguintes.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}-1}{x}$

Resposta de um aluno:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (é um limite notável)

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}-1}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}-1}{3x} = 3 \times 1 = 3$ (é um limite notável, fazendo $3x = y$)



Erros caçados!

1. a) O erro está na substituição de $2 \times 4^{3x-1}$ por 8^{3x-1} .

Uma resolução correta pode ser:

$$\begin{aligned} 8^{x+3} &= 2 \times 4^{3x-1} \Leftrightarrow (2^3)^{x+3} = 2 \times (2^2)^{3x-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{3(x+3)} = 2 \times 2^{2(3x-1)} \Leftrightarrow 2^{3(x+3)} = 2^{1+2(3x-1)} \Leftrightarrow 3(x+3) = 1+2(3x-1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x+9 = 1+6x-2 \Leftrightarrow -3x = -10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

- b) O erro está na equivalência $2^{x+1} + 2^{x+2} = 2^6 \Leftrightarrow x+1+x+2=6$ que não é válida porque $2^{x+1} + 2^{x+2}$ não é igual a $2^{x+1+x+2}$.

Uma resolução correta pode ser:

$$\begin{aligned} 2^{x+1} + 2^{x+2} &= 64 \Leftrightarrow 2^{x+1} + 2^{x+1} \times 2 = 64 \Leftrightarrow 2^{x+1} \times 3 = 64 \Leftrightarrow 2^{x+1} = \frac{64}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x+1 = \log_2\left(\frac{64}{3}\right) \Leftrightarrow x = \log_2\left(\frac{64}{3}\right) - 1 \end{aligned}$$

2. O erro desta resolução está na equivalência $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+3} \Leftrightarrow 4x-1 > 3x+3$.

Dado que a função exponencial de base $\frac{1}{2}$ é decrescente (pois $0 < \frac{1}{2} < 1$), a resolução correta é $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+3} \Leftrightarrow 4x-1 < 3x+3 \Leftrightarrow x < 4$.

O conjunto-solução é, portanto, $] -\infty, 4[$.

3. a) Nesta resposta não foi considerado o domínio da função logaritmo. Atendendo a que só há logaritmo de números positivos, deve ser:

$$\log(x) < 2 \Leftrightarrow x < 10^2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x < 100 \wedge x > 0$$

$$C. S. =]0, 100[$$

- b) Dado que a soma de logaritmos não é igual ao logaritmo da soma, a equivalência

$$\log_2(2x) < \log_2(x) + \log_2(8) \Leftrightarrow 2x < x + 8 \text{ está errada.}$$

Deve ser:

$$\log_2(2x) < \log_2(x) + \log_2(8) \Leftrightarrow \log_2(2x) < \log_2(8x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x < 8x \wedge x > 0 \Leftrightarrow -6x < 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$C.S. =]0, +\infty[$$

- c) O erro está na equivalência $x \ln(1-x) \geq x \Leftrightarrow \ln(1-x) \geq \frac{x}{x}$.

A segunda condição obtém-se dividindo os dois membros da primeira condição por x ; portanto, a equivalência só é válida para valores positivos de x ; no caso de x ser negativo, teria de inverter-se o sentido da desigualdade.

Podíamos considerar, separadamente o caso de x ser positivo e o caso de x ser negativo, mas, tal como fazemos em situações idênticas, vamos criar condições para elaborar um quadro de sinais.

$$x \ln(1-x) \geq x \Leftrightarrow x \ln(1-x) - x \geq 0 \Leftrightarrow x[\ln(1-x) - 1] \geq 0$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} x[\ln(1-x) - 1] = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \vee \ln(1-x) = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee 1-x = e \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1-e \end{aligned}$$

Vamos agora construir um quadro de sinais, tendo em consideração que o domínio da condição é $\{x \in \mathbb{R} : 1-x > 0\} =]-\infty, 1[$.

x	$-\infty$	$1-e$		0	1
x	-	-	-	0	+
$\ln(1-x) - 1$	+	0	-	-	-
$x[\ln(1-x) - 1]$	-	0	+	0	-

$$\text{C.S.} = [1-e, 0]$$

4. a) Não se trata de um limite notável. Este limite está, provavelmente, a ser confundido com

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}.$$

O limite em causa não é uma situação de indeterminação: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$.

- b) Este limite envolve um limite notável, mas está, provavelmente, a ser confundido com

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}.$$

O limite em causa é uma situação de indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} - 1}{x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 3 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{3x} - 0 = 3 \times \lim_{\substack{3x=y \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{e^y}{y} = 3 \times +\infty = +\infty$$

Teste 6

Págs. 134 e 135

Grupo I

1. Identifica o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ tendo em consideração que a reta de equação $y = \frac{x+3}{2}$ é assíntota ao gráfico da função f .
2. Se $f(-1) \times f(1)$ é menor do que 0, então o teorema de Bolzano-Cauchy garante que a função f tem pelo menos um zero no intervalo $] -1, 1[$.
3. Recorda que $(g \circ f)'(1) = f'(1) \times g'(f(1))$.
4. Procura relacionar o limite pedido com $\lim \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$.

Grupo II

1. b) Designa a concentração de iões H_3O^+ no leite por x e exprime em função de x a concentração de iões H_3O^+ no café e o pII de cada uma das bebidas.
2. O estudo da monotonia é feito recorrendo à primeira derivada e o estudo do sentido das concavidades é feito recorrendo à segunda derivada.
4. a) Deves utilizar a expressão $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
b) Sendo x a abcissa dos pontos A e B , tem-se $m_r = f'(x)$ e $m_s = g'(x)$. O facto de as retas r e s serem paralelas permite relacionar $f'(x)$ com $g'(x)$.
5. Começa por obter expressões para as coordenadas dos pontos A e B em função de a ; em seguida, obtém uma expressão do declive da reta AB e escreve uma equação que traduza a situação descrita.

Resolução do teste 6



Grupo I

1. (B)

A reta de equação $y = \frac{x+3}{2}$ é assíntota ao gráfico da função f . Como esta reta tem declive positivo, conclui-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e, como o declive é $\frac{1}{2}$, conclui-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$.

Assim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{\frac{1}{x}}}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{f(x)} = 2 + \frac{e^0}{+\infty} = 2 + 0 = 2$$

2. (B)

$$f(-1) = e^{-1} + a \text{ e } f(1) = e + a$$

$$f(-1) \times f(1) < 0 \Leftrightarrow (e^{-1} + a)(e + a) < 0 \Leftrightarrow a \in \left] -e, -\frac{1}{e} \right[$$

Então, se $a \in \left] -e, -\frac{1}{e} \right[$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que f tem pelo menos um zero em $] -1, 1[$; para valores de a em qualquer dos outros intervalos, $f(-1) \times f(1) > 0$ e f é estritamente crescente.

3. (D)

Sabe-se que $(g \circ f)'(1) = f'(1) \times g'(f(1))$.

Determinemos $f'(1)$, $f(1)$, $g'(x)$ e $g'(f(1))$.

- $f'(1)$ é o declive da reta de equação $y = -2x + 5$; portanto, $f'(1) = -2$;
- $f(1) = -2 \times 1 + 5 = 3$, porque o ponto A pertence à reta de equação $y = -2x + 5$;
- $g'(x) = \frac{2^x \ln(2)}{\ln(2)} = 2^x$
- $g'(f(1)) = g'(3) = 2^3 = 8$

Então, $(g \circ f)'(1) = f'(1) \times g'(f(1)) = -2 \times 8 = -16$.

4. (D)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n} \right)^n \frac{\left(1 + \frac{3}{n} \right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = 1 \times \frac{e^3}{e} = e^2$$

5. (C)

Número de casos possíveis: 9C_5

Número de casos favoráveis: 6C_2

Probabilidade pedida: $\frac{{}^6C_2}{{}^9C_5} = \frac{15}{126} = \frac{5}{42}$

Grupo II

1. a) $7,4 = -\log(x) \Leftrightarrow -7,4 = \log(x) \Leftrightarrow 10^{-7,4} = x$

Recorrendo a uma calculadora, obtém-se $x \approx 4 \times 10^{-8}$.

b) Seja x a concentração de iões H_3O^+ no leite.

Então, a concentração de iões H_3O^+ no café é $3x$.

$$\text{pH}(x) - \text{pH}(3x) = -\log(x) - [-\log(3x)] = \log(3x) - \log(x) = \log\left(\frac{3x}{x}\right) = \log(3) \approx 0,5$$

2. $D_g = \mathbb{R}^+$; $g'(x) = 2x \ln(x) + x = x[2 \ln(x) + 1]$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee 2 \ln(x) + 1 = 0) \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
x		+	+
$2 \ln(x) + 1$		-	+
g'		-	+
g		↘	↗

A função é decrescente em $]0, e^{-\frac{1}{2}}]$ e é crescente em $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$; $g(e^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2e}$ é mínimo absoluto.

$$g''(x) = 2 \ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln(x) + 2 + 1 = 2 \ln(x) + 3$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln(x) + 3 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{3}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$$

x	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$2 \ln(x) + 3$		-	+
g''		-	+
Gráfico de g		∩	∪

O gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo em $]0, e^{-\frac{3}{2}}]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty[$; o ponto de coordenadas $(e^{-\frac{3}{2}}, g(e^{-\frac{3}{2}})) = (e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3})$ é ponto de inflexão do gráfico.

3. a) $x < 0 \Rightarrow g''(x) = e^x + 4e^{2x} - 3$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x + 4e^{2x} - 3 = 0$$

Seja $y = e^x$.

$$y + 4y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{8} \Leftrightarrow y = -1 \vee y = \frac{3}{4}$$

Então, $e^x + 4e^{2x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = -1}_{\text{equação impossível}} \vee e^x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

$$y + 4y^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow y < -1 \vee y > \frac{3}{4}$$

Então, $e^x + 4e^{2x} - 3 > 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x < -1}_{\text{condição impossível}} \vee e^x > \frac{3}{4} \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

No intervalo $]-\infty, 0[$, o gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, \ln\left(\frac{3}{4}\right)[$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left[\ln\left(\frac{3}{4}\right), 0\right]$. O ponto de abscissa $\ln\left(\frac{3}{4}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico da função g .

b) A função g' é contínua; portanto, só a reta de equação $x = 0$ poderá ser assíntota vertical;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 2e^{2x} - 3x) = e^0 + 2 \times e^0 - 3 \times 0 = 1 + 2 - 0 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(x)] \stackrel{0 \times (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$$

Não existem assíntotas verticais.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g'(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 2e^{2x} - 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 2e^{2x}}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = \\ &= \frac{e^{-\infty} + 2e^{-\infty}}{-\infty} - 3 = \frac{0 + 2 \times 0}{-\infty} - 3 = \frac{0}{-\infty} - 3 = 0 - 3 = -3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [g'(x) - (-3x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2e^{2x} - 3x + 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2e^{2x}) = 0$$

A reta de equação $y = -3x$ é assíntota ao gráfico de g' , em $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Não existem assíntotas não verticais ao gráfico de g' em $+\infty$.

Portanto, o gráfico da função g' tem uma única assíntota, que é a reta de equação $y = -3x$.

c) Da informação disponível não é possível concluir que a função não seja contínua em 0, porque há funções que não são diferenciáveis em pontos em que são contínuas, como, por exemplo, a função definida por $f(x) = |x|$.

$$\begin{aligned}
 4. a) \quad f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2e^{1+h} - 3(1+h) - (2e - 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2e^{1+h} - 3h - 2e}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2e^{1+h} - 2e}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 2e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} - 3 = 2e \times 1 - 3 = 2e - 3
 \end{aligned}$$

b) A abscissa dos pontos A e B é solução da equação $f'(x) = g'(x)$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) = g'(x) &\Leftrightarrow 2e^x - 3 = \frac{4e^x}{e^x + 1} \Leftrightarrow 2(e^x)^2 + 2e^x - 3e^x - 3 = 4e^x \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2(e^x)^2 - 5e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} \Leftrightarrow e^x = -\frac{1}{2} \vee e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)
 \end{aligned}$$

equação impossível

O ponto A tem coordenadas $(\ln(3), 6 - 3\ln(3))$ e o ponto B tem coordenadas $(\ln(3), 4\ln(4))$.

5. Determinemos as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de f com os eixos coordenados.

$$f(0) = \ln(a) \text{ e } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - a$$

Portanto, os pontos A e B são os pontos de coordenadas $(0, \ln(a))$ e $(1 - a, 0)$.

$$\text{O declive da reta } AB \text{ é } m_{AB} = \frac{-\ln(a)}{1 - a}.$$

$$\text{Portanto, } \frac{-\ln(a)}{1 - a} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{-\ln(a)}{1 - a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln(a)}{a - 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\ln(a) = a - 1 \Leftrightarrow \ln(a^2) = a - 1 \Leftrightarrow a^2 = e^{a-1}$$

Teste 7

Págs. 156 e 157

Grupo I

1. Aplica propriedades algébricas dos logaritmos.
2. Designa por a o coeficiente do termo de grau 2 de $f(x)$ e escreve uma expressão, em função de a , que possa definir a função f , tendo em conta os seus zeros.
3. Identifica o domínio da função $g \circ f$ e o contradomínio da restrição da função f ao domínio de $g \circ f$.
4. A situação descrita pode ser associada a uma progressão geométrica de razão $1 - \frac{0,5}{100}$.
5. Recorre ao acontecimento contrário.

Grupo II

1. a) Uma função é contínua num ponto do seu domínio se existir limite nesse ponto.
b) Tem em consideração, na caracterização da função f' , que a função não é contínua em 0 e recorda que uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa a é:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

2. Recorda qual é a família de funções que satisfazem a equação diferencial $f' = kf$.
3. a) Obtém uma expressão de N' e uma expressão de $N(120 - N)$ em função de t .
b) Deves resolver a equação $N(t) = M(t)$.

5. Dado que existe uma assíntota não vertical ao gráfico de $f+g$, o seu declive é $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f+g)(x)}{x}$.
Deves calcular este limite. O conhecimento da equação reduzida da assíntota não vertical ao gráfico de g , permite-te obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$.

Resolução do teste 7



Grupo I

1. (A)

$$\begin{aligned}\log_b\left(\frac{a}{c^2\sqrt{b}}\right) &= \log_b(a) - \log_b(c^2) - \log_b(\sqrt{b}) = \\ &= \frac{1}{\log_a(b)} - 2\log_b(c) - \log_b\left(b^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = -2\end{aligned}$$

2. (C)

O facto de o gráfico da função passar na origem do referencial significa que 0 é um zero da função. Também sabemos que 1 é zero de f e que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo. Então, $f(x) = ax(x-1)$, com $a < 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax(x-1)}{e^x - 1} = a \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = \\ &= a \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}} \times \lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = a \times \frac{1}{1} \times (-1) = -a\end{aligned}$$

Dado que a é um número negativo, o limite pedido é um número positivo. Só a opção (C) apresenta um número positivo.

3. (D)

$$\text{Tem-se } D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in D_f : f(x) > 0\} =]-2, 2[$$

$$f(]-2, 2[) =]0, 2]$$

Como a função logaritmo de base 2 é crescente, é contínua e $\lim_{x \rightarrow 0} \log_2(x) = -\infty$, o contradomínio da função $g \circ f$ é $]-\infty, \log_2(2)] =]-\infty, 1]$.

4. (B)

$$\text{Seja } v(n) \text{ o valor do produto, decorridos } n \text{ semestres. Tem-se } v(n) = 1000 \times \left(1 - \frac{0,5}{100}\right)^n.$$

Como 10 anos são 20 semestres, o valor do produto decorridos 10 anos é

$$v(20) = 1000 \times \left(1 - \frac{0,5}{100}\right)^{20} = 1000 \times 0,995^{20} \approx 904,61 \text{ (euros)}.$$

5. (D)

O acontecimento contrário de «não chamarem todos o mesmo fisioterapeuta» é «chamarem todos o mesmo fisioterapeuta». Como há quatro fisioterapeutas, há quatro casos favoráveis a este acontecimento. O número de casos possíveis é 4^6 , pois cada um dos seis utentes magoados pode chamar qualquer um dos quatro fisioterapeutas.

$$\text{A probabilidade pedida é } 1 - \frac{4}{4^6} = 1 - \frac{1}{4^5}.$$

Grupo II

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{0,5}(1-x) = \log_{0,5}(1) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \ln\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \ln\left(\frac{2}{x}\right) \right) - 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} - 1 = \\ &= 2 \lim_{\substack{y=\frac{2}{x} \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{\ln(y)}{y} - 1 = 2 \times 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e, portanto, a função não é contínua no ponto 0.

b) Como a função não é contínua em 0, sabemos que não é diferenciável em 0.

$$(\log_{0,5}(1-x))' = \frac{-1}{(1-x) \ln(0,5)} = \frac{-1}{(x-1) \ln(2)}$$

$$\left(x \ln\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \right)' = \ln\left(\frac{2}{x}\right) + x \times \frac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x}} - 0 = \ln\left(\frac{2}{x}\right) + x \times \frac{-1}{x} = \ln\left(\frac{2}{x}\right) - 1$$

$$\text{Então: } f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-1) \ln(2)} & \text{se } x < 0 \\ \ln\left(\frac{2}{x}\right) - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

O declive da reta tangente no ponto de abcissa 2 é:

$$m = f'(2) = \ln\left(\frac{2}{2}\right) - 1 = \ln(1) - 1 = 0 - 1 = -1$$

Como $f(2) = 2 \ln\left(\frac{2}{2}\right) - 1 = 2 \times \ln(1) - 1 = 2 \times 0 - 1 = -1$, uma equação da reta tangente é

$y = -1(x-2) + (-1)$ que é equivalente a $y = -x + 1$.

2. a) Sabemos que $M(t) = ce^{kt}$ e, dado que a semivida é 30 anos, sabemos também que

$$M(30) = \frac{1}{2} M_0.$$

$$M(30) = \frac{1}{2} M_0 \Leftrightarrow M_0 e^{30k} = \frac{1}{2} M_0 \Leftrightarrow e^{30k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 30k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{30}$$

$$\text{Então, } M(t) = M_0 e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{30} t} = M_0 \left(e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{30}} \right)^{\frac{t}{30}} = M_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{30}}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } M(t) < \frac{M_0}{4} &\Leftrightarrow M_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{30}} < \frac{M_0}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{30}} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{30}} < \left(\frac{1}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{t}{30} > 2 \Leftrightarrow t > 60 \end{aligned}$$

Mais de 60 anos.

- c) Quando já se desintegrou 10% da massa inicial, a massa existente é $0,9M_0$ e, quando falta desintegrar 10% da massa inicial, a massa existente é $0,1M_0$.

Sejam t_1 e t_2 os instantes em que ocorrem essas situações.

$$\text{Tem-se } M'(t) = \frac{M_0}{30} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} \ln\left(\frac{1}{2}\right); \text{ portanto, } M'(t) = \frac{1}{30} \ln\left(\frac{1}{2}\right) M(t).$$

$$\text{Então, } M'(t_1) = \frac{1}{30} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times 0,9M_0 \text{ e } M'(t_2) = \frac{1}{30} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times 0,1M_0.$$

Portanto, $\frac{M'(t_1)}{M'(t_2)} = \frac{0,9}{0,1} = 9$, de onde se conclui que a taxa de desintegração, quando se desintegrou 10% da massa inicial, é 9 vezes superior à taxa de desintegração, quando falta desintegrar 10% da massa inicial.

$$3. a) N' = \frac{-120 \times 7 \times (-0,2) \times e^{-0,2t}}{(1 + 7e^{-0,2t})^2}$$

$$\begin{aligned} N(120 - N) &= \frac{120}{1 + 7e^{-0,2t}} \times \left(120 - \frac{120}{1 + 7e^{-0,2t}}\right) = \frac{120^2}{1 + 7e^{-0,2t}} \times \left(1 - \frac{1}{1 + 7e^{-0,2t}}\right) = \\ &= \frac{120^2}{1 + 7e^{-0,2t}} \times \frac{7e^{-0,2t}}{1 + 7e^{-0,2t}} = \frac{120^2 \times 7e^{-0,2t}}{(1 + 7e^{-0,2t})^2} \end{aligned}$$

$$\text{Então, } N' = \underbrace{120^{-1} \times 0,2}_k N(120 - N)$$

$$b) M(t) = N(t) \Leftrightarrow \frac{150}{1 + 50e^{-0,4t}} = \frac{120}{1 + 7e^{-0,2t}} \Leftrightarrow \frac{5}{1 + 50e^{-0,4t}} = \frac{4}{1 + 7e^{-0,2t}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(1 + 7e^{-0,2t}) = 4(1 + 50e^{-0,4t}) \Leftrightarrow 200e^{-0,4t} - 35e^{-0,2t} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,2t} = \frac{35 \pm \sqrt{35^2 + 800}}{400} \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,2t} = -0,025}_{\text{equação impossível}} \vee e^{-0,2t} = 0,2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,2)}{-0,2}$$

No dia 9 de março de 2015.

$$4. a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2xe^{\frac{1}{x}}\right) \stackrel{0 \times \infty}{=} 2 \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{\infty}{\frac{1}{x}}}{=} 2 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = 2 \times (+\infty) = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota ao gráfico da função f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2xe^{\frac{1}{x}}}{x} = 2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 2 \times e^0 = 2 \times 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2xe^{\frac{1}{x}} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x(e^{\frac{1}{x}} - 1)] =$$

$$= 2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} 2 \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = 2 \times 1 = 2$$

Portanto, a reta de equação $y = 2x + 2$ é assíntota ao gráfico da função f .

- b)** Seja $A(x)$ a área do triângulo $[OPA]$, sendo x a abscissa do ponto P .

Então, $A(x) = \frac{2x \times 2xe^{\frac{1}{x}}}{2} = 2x^2e^{\frac{1}{x}}$. Vamos estudar a variação da função recorrendo à derivada.

$$A'(x) = 2(x^2e^{\frac{1}{x}})' = 4xe^{\frac{1}{x}} + 2x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times e^{\frac{1}{x}} = 4xe^{\frac{1}{x}} - 2e^{\frac{1}{x}} = 2e^{\frac{1}{x}}(2x - 1)$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{\frac{1}{x}}(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2e^{\frac{1}{x}}$	+	+	+
$2x - 1$	-	0	+
A'	-	0	+
A		Mín.	

A área é mínima para $x = \frac{1}{2}$ e a área mínima é $A\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} \times e^2 = e^2$ (u.a.).

- 5.** Dado que sabemos que existe uma assíntota não vertical ao gráfico da função $f + g$, o seu declive

$$\text{é } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f+g)(x)}{x}.$$

A reta que contém a bissetriz do segundo quadrante tem declive -1 .

Temos, portanto, de mostrar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f+g)(x)}{x} = -1$.

A reta de equação $x + 2y = 0$ tem declive $-\frac{1}{2}$ e, dado que é assíntota ao gráfico da função g , pode-se concluir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -\frac{1}{2}$.

Vamos agora calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f+g)(x)}{x}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f+g)(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{x^2}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} - \frac{1}{2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] - \frac{1}{2} = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(e) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \end{aligned}$$

Caça aos erros!

**As respostas aos itens seguintes têm um ou mais erros.
Descobre todos os erros!**

1 Sabendo que $\sin(4x) = -\frac{2}{3}$, determina $\sin(2x) \cos(2x)$.

Resposta de um aluno:

Como $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, tem-se $\sin(4x) = 4\sin x \cos x$.

Então:

$$\sin(4x) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 4\sin x \cos x = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \sin x \cos x = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6} \text{ e, portanto,}$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$\sin^2(2x) + \cos^2(2x) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2(2x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(2x) = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(2x) = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\text{Então, } \sin(2x) \cos(2x) = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{\sqrt{8}}{9}.$$

2 Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x + \sin(x^2)$ e $g(x) = \sin^2 x$.
Caracteriza as funções f' e g' .

Resposta de um aluno:

As funções f' e g' têm domínio $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 1 + \cos(2x) \text{ e } g'(x) = 2\cos x$$

3 Considera a função f , de domínio $]0, 2\pi[$, definida por $f(x) = \sin(2x) + 2x$.

Indica, justificando, o valor lógico da afirmação seguinte: «A função f não tem extremos relativos.»

Resposta de um aluno:

$$f'(x) = 2\cos(2x) + 2$$

$$2\cos(2x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$k = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$k = 1 \longrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

A derivada tem dois zeros no intervalo $]0, 2\pi[$, logo, a função tem dois extremos.

Portanto, a afirmação é falsa.



Erros caçados!

1. Não é verdade que $\sin(4x) = 4\sin x \cos x$. Por outro lado, $\cos^2(2x) = \frac{8}{9}$ é equivalente a $\cos(2x) = \pm \frac{\sqrt{8}}{3}$ e não há informação no enunciado que permita decidir acerca do sinal de $\cos(2x)$.

O facto de $\sin(2x)$ ser igual a $2\sin x \cos x$ decorre de $\sin(2x) = \sin(x+x)$.

Portanto, $\sin(4x) = \sin(2x+2x) = 2\sin(2x) \cos(2x)$.

Então, $\sin(4x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2\sin(2x) \cos(2x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sin(2x) \cos(2x) = \frac{1}{3}$.

2. É verdade que as funções f' e g' têm domínio $\mathbb{R}$, mas as regras de derivação, nomeadamente no que diz respeito à derivada da função composta, não estão bem aplicadas.

$$f'(x) = (x + \sin(x^2))' = 1 + (x^2)' \sin'(x^2) = 1 + 2x \cos(x^2)$$

$$g'(x) = (\sin^2 x)' = ((\sin x)^2)' = 2\sin' x (\sin x)^1 = 2\cos x \sin x$$

3. A função derivada e os seus zeros estão obtidos corretamente. Dado que a função é diferenciável e o seu domínio é um intervalo aberto, os extremos só podem ocorrer em pontos em que a derivada seja zero. No entanto, o facto de a derivada se anular não é condição suficiente para que a função atinja um extremo.

Neste caso, $\forall x \in]0, 2\pi[, f'(x) \geq 0$ e, como a derivada anula apenas em dois pontos, conclui-se que a função é estritamente crescente no domínio. Logo, não tem extremos.

A afirmação é verdadeira.

Teste 1

Págs. 38 e 39

Grupo I

1. Começa por recordar a fórmula de $\sin(2x)$, em função de $\sin x$ e de $\cos x$.
2. Nota que, como a função f é contínua em $\mathbb{R}$, a função f é contínua, em particular, no ponto 0, tendo-se, portanto, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Recorda também o limite notável $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.
3. Recorda que o declive da reta tangente ao gráfico de uma função f , no ponto de abscissa a , é igual a $f'(a)$.
4. Podes descobrir o valor lógico das proposições I e II através da determinação do contradomínio da função d e podes descobrir o valor lógico da proposição III através da determinação do período fundamental da mesma função.
5. Recorda a relação entre o período e a frequência de um oscilador harmónico.

Grupo II

1. Repara que, designando por α o ângulo orientado cujo lado extremidade é a semirreta $\vec{OP}$, a abscissa do ponto Q é igual a $\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$.
2. a) Recorda a fórmula que relaciona $\operatorname{tg} \alpha$ com $\cos \alpha$.
b) Recorda a definição de derivada de uma função num ponto.
c) Recorda a relação entre o sinal e os zeros da segunda derivada de uma função e o sentido das concavidades do gráfico dessa função e pontos de inflexão.
d) Começa por determinar as abscissas dos pontos P e Q e por desenhar o triângulo $[OPQ]$.
3. a) Começa por ver se haverá assíntota horizontal, quando x tende para $-\infty$. Em seguida, justifica que não tem sentido procurar outras assíntotas não verticais. Depois tenta responder à seguinte questão: tendo em conta o domínio da função e eventuais pontos de descontinuidade, quais são as retas candidatas a assíntotas verticais?
b) Recorda a relação entre o sinal e os zeros da derivada de uma função e a monotonia e extremos relativos dessa função.
4. Começa por dividir ambos os termos da fração por x .
5. a) A Marta vai levar x livros de aventuras, y de ficção científica e z policiais. Começa por analisar as diferentes possibilidades para x , y e z , de modo a que ela leve pelo menos três livros de ficção científica.
b) Recorda a regra de Laplace.

Resolução do teste 1



Grupo I

1. (D)

Tem-se $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.

Como $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, vem $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$, pelo que $\cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Como $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, vem que $\cos x < 0$, pelo que $\cos x = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Portanto, $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

2. (C)

Como a função f é contínua em $\mathbb{R}$, a função f é contínua, em particular, no ponto 0.

Portanto, tem-se $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Ora, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = k - \cos 0 = k - 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x} + \frac{\sin(3x)}{x}\right) =$
 $= 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \sin(3x)}{3x} \underset{y=3x}{=} 1 + 3 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1 + 3 \times 1 = 4$.

Tem-se, portanto, $k - 1 = 4$, de onde vem $k = 5$.

3. (A)

Tem-se $f'(x) = 3 \times 2 \times \sin(4x) \times 4 \cos(4x) = 12 \times 2 \sin(4x) \cos(4x) = 12 \sin(2 \times 4x) =$
 $= 12 \sin(8x)$.

Assim, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $\frac{\pi}{48}$ é:

$$f'\left(\frac{\pi}{48}\right) = 12 \sin\left(8 \times \frac{\pi}{48}\right) = 12 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

4. (D)

O contradomínio da função d é $[1, 5]$, pelo que a função d nunca toma o valor 0.

Assim, a reta r não é tangente à circunferência, pelo que a proposição I é falsa.

Sendo a distância máxima do ponto P à reta igual a 5 e a distância mínima igual a 1, vem que o diâmetro da circunferência é igual a 4, pelo que o comprimento da circunferência é igual a 4π .

Assim, a proposição II é verdadeira.

A função d é periódica, de período fundamental $\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{6}}$, ou seja, d é periódica, de período fundamental igual a 4.

Portanto, o ponto P demora 4 segundos a dar uma volta completa, pelo que a proposição III é verdadeira.

5. (B)

A função d é periódica, de período $\frac{2\pi}{6\pi}$, ou seja, d é periódica, de período $\frac{1}{3}$.

Portanto, a frequência do oscilador harmónico é 3.

Grupo II

1. Seja α o ângulo orientado cujo lado origem coincide com o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\vec{OP}$.

Como o ponto P tem ordenada $\frac{2}{3}$, tem-se $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

A abscissa do ponto Q é igual a $\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$.

Tem-se: $\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos \alpha \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \alpha \sin \frac{2\pi}{3}$.

Ora,

$$\bullet \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}, \text{ pelo que } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\bullet \cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \sin \frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Portanto, } \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos \alpha \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \alpha \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{3}}{6}.$$

2. a) Tem-se $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, pelo que $1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, de onde vem $\cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$.

$$\text{Portanto, } f(\alpha) = 1 + 3 \cos^2(\alpha) = 1 + 3 \times \frac{4}{5} = \frac{17}{5}.$$

$$\text{b) Tem-se: } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + 3 \cos^2 x - \left[1 + 3 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]}{x - \frac{\pi}{2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + 3 \cos^2 x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y = x - \frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + y\right)}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right]^2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3(-\sin y)^2}{y} = 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 y}{y} = 3 \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \times \sin y\right) = 3 \times 1 \times 0 = 0$$

- c) Tem-se: $f'(x) = [1 + 3\cos^2(x)]' = 3 \times 2 \times \cos x \times (-\sin x) = -3 \sin(2x)$,
pelo que $f''(x) = -6 \cos(2x)$.

Como $x \in]0, \pi[$, tem-se que $2x \in]0, 2\pi[$, pelo que:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \vee 2x = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4}$$

Tem-se, então, o seguinte quadro:

x	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$	π
f''	-	0	+	0	-
f		P.I.		P.I.	

P.I. – ponto de inflexão

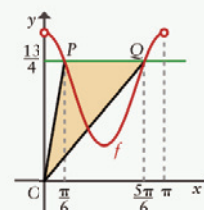
Portanto, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo nos intervalos $]0, \frac{\pi}{4}[$ e $[\frac{3\pi}{4}, \pi[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

Os pontos de abscissa $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ são pontos de inflexão do gráfico da função f .

- d) Tem-se: $f(x) = \frac{13}{4} \Leftrightarrow 1 + 3\cos^2 x = \frac{13}{4} \Leftrightarrow 3\cos^2 x = \frac{13}{4} - 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3\cos^2 x = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$ (pois $x \in]0, \pi[$)

Vem, então:

$$\text{Área do triângulo } [OPQ] = \frac{\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}}{2} \times \frac{13}{4} = \frac{4\pi}{12} \times \frac{13}{4} = \frac{13\pi}{12}$$



3. a) Tem-se: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x^2 e^x) \stackrel{\infty \times 0}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} (1 + (-y)^2 e^{-y}) =$

$$= 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{e^y} = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y^2}} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

Portanto, a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico da função g , quando $x \rightarrow -\infty$.

Uma vez que o domínio da função g é majorado, o gráfico desta função não tem mais assíntotas não verticais.

Quanto às assíntotas verticais, apenas as retas de equação $x = 0$ e $x = \pi$ poderão ser assíntotas verticais do gráfico da função g .

Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x^2 e^x) = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - \cos x}{\sin x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{2 - \cos x}{\sin x} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

Portanto, as retas de equação $x = 0$ e $x = \pi$ são assíntotas verticais do gráfico da função g .

b) Tem-se:

$$g'(x) = \left(\frac{2 - \cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(2 - \cos x)' \sin x - (\sin x)' (2 - \cos x)}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x \sin x - \cos x (2 - \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - 2 \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - 2 \cos x}{\sin^2 x}$$

Em $]0, \pi[$, tem-se:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Tem-se, então, o seguinte quadro:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
g'	-	0	+
g		Mín.	

Portanto, a função é decrescente no intervalo $]0, \frac{\pi}{3}[$ e é crescente no intervalo $]\frac{\pi}{3}, \pi[$.

A função tem um mínimo relativo para $x = \frac{\pi}{3}$.

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin^2 x}{x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{\sin^2 x}{x}}{1 + \frac{\ln x}{x}} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2$$

5. a) Se a Marta leva pelo menos três livros de ficção científica, ela pode levar:

- 2 de aventuras, 3 de ficção científica e 1 policial, ou
- 1 de aventuras, 3 de ficção científica e 2 policiais, ou
- 0 de aventuras, 3 de ficção científica e 3 policiais, ou
- 2 de aventuras, 4 de ficção científica e 0 policiais, ou
- 1 de aventuras, 4 de ficção científica e 1 policial, ou
- 0 de aventuras, 4 de ficção científica e 2 policiais.

Portanto, o número de maneiras de a Marta fazer a seleção é:

$$\begin{aligned} & {}^2C_2 \times {}^4C_3 \times {}^6C_1 + {}^2C_1 \times {}^4C_3 \times {}^6C_2 + {}^2C_0 \times {}^4C_3 \times {}^6C_3 + {}^2C_2 \times {}^4C_4 \times {}^6C_0 + {}^2C_1 \times {}^4C_4 \times {}^6C_1 + {}^2C_0 \times {}^4C_4 \times {}^6C_2 = \\ & = 1 \times 4 \times 6 + 2 \times 4 \times 15 + 1 \times 4 \times 20 + 1 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 6 + 1 \times 1 \times 15 = \\ & = 24 + 120 + 80 + 1 + 12 + 15 = 252 \end{aligned}$$

b) Número de casos possíveis: $6! = 720$

Número de casos favoráveis: $3! \times 2! \times 2! \times 2! = 48$

Probabilidade pedida: $\frac{48}{720} = \frac{1}{15}$

Teste 2

Págs. 96 e 97

Grupo I

1. Recorda a definição de primitiva de uma função.
2. Recorda uma propriedade que relaciona duas primitivas da mesma função num intervalo ou usa o conceito de primitiva de uma função num intervalo.
3. Começa por representar graficamente a região cuja área se pretende determinar.
4. Começa por determinar o contradomínio da função d e interpreta-o no contexto do problema.
5. Recorda a regra de Laplace.

Grupo II

1. **a)** Substitui $\cos^2 x - \sin^2 x$ por uma expressão equivalente.
b) Começa por escrever o polinómio $(1 + 2x)^3$ na forma reduzida.
2. Considerando um eixo vertical, orientado de baixo para cima, com origem no ponto de lançamento do projétil, começa por traduzir simbolicamente cada um dos dados do problema.
3. Começa por representar graficamente as funções definidas por $y = x^3$ e $y = 2x - x^2$ em $[0, +\infty[$; em seguida, determina as abcissas dos pontos de interseção desses gráficos e avalia o sinal da diferença das funções entre as abcissas dos pontos de interseção.
4. Recorda o teorema fundamental do cálculo integral (página 83).
5. **a)** Começa por determinar o valor de k , recorrendo à informação acerca da semivida.
b) Começa por equacionar o problema, considerando $k = -0,002\,567$. Na escrita da equação tem atenção às unidades de massa envolvidas no enunciado.

Resolução do teste 2



Grupo I

1. (A)

Tem-se:

$$\begin{aligned} [(x^2 + 1)e^x]' &= (x^2 + 1)'e^x + (x^2 + 1)(e^x)' = 2xe^x + (x^2 + 1)e^x = e^x(2x + x^2 + 1) = \\ &= e^x(x^2 + 2x + 1) = e^x(x + 1)^2 = (x + 1)^2 e^x \end{aligned}$$

2. (D)

Apresentamos duas resoluções.

- A diferença entre duas primitivas da mesma função é uma constante.

Na opção (D) estão definidas duas funções cuja diferença é uma constante, o que não acontece nas outras opções, como podes verificar.

$$\ln(2x) - \ln(x) = \ln(2) + \ln(x) - \ln(x) = \ln(2)$$

- Na opção (D) estão definidas duas funções cujas derivadas são iguais, o que não acontece nas outras opções, como podes verificar.

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad [\ln(2x)]' = \frac{(2x)'}{2x} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

3. (B)

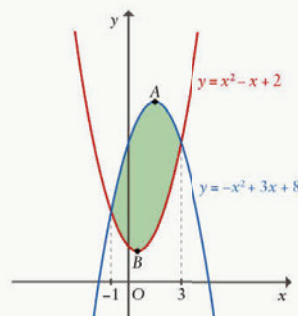
As abscissas dos pontos de interseção das duas parábolas são as soluções da equação:

$$-x^2 + 3x + 8 = x^2 - x + 2$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x + 8 = x^2 - x + 2 &\Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \end{aligned}$$

A parábola definida por $y = -x^2 + 3x + 8$ tem vértice no ponto $A\left(\frac{3}{2}, \frac{41}{4}\right)$ e tem a concavidade voltada para baixo. A parábola definida por $y = x^2 - x + 2$ tem vértice no ponto $B\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$ e tem a concavidade voltada para cima. A representação gráfica das duas parábolas evidencia que, no intervalo $]-1, 3[$, a parábola de equação $y = -x^2 + 3x + 8$ está sempre acima da parábola de equação $y = x^2 - x + 2$. A região cuja área se pretende determinar é a região colorida de verde na figura.



$$\text{A área desta região é } \int_{-1}^3 (-x^2 + 3x + 8) dx - \int_{-1}^3 (x^2 - x + 2) dx = \int_{-1}^3 (-2x^2 + 4x + 6) dx.$$

4. (B)

Dado que $t \in [0, +\infty[$, a função definida por $\cos(2\pi t)$ assume o seu valor máximo.

Então, o máximo da função d é $116 + 24 \times 1$.

A distância máxima do centro da esfera ao chão da sala é, portanto, $116 + 24$ (cm), ou seja, é 1,4 m.

Portanto, a distância mínima do centro da esfera ao teto da sala é $2,5 - 1,4$ (m), ou seja, é 1,1 m.

5. (B)

Número de casos possíveis: $6 \times 6 = 36$

Número de casos favoráveis: $2 \times 2 \times 4 = 16$ (sai 5 ou 6 num dado e 1, 2, 3 ou 4 no outro dado)

Probabilidade pedida: $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

Grupo II

$$\begin{aligned} 1. \text{ a) } \int [e^{1+\sin(2x)}(\cos^2 x - \sin^2 x)] dx &= \int [e^{1+\sin(2x)} \cos(2x)] dx = \frac{1}{2} \int [2 \cos(2x) e^{1+\sin(2x)}] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int [(1 + \sin(2x))' e^{1+\sin(2x)}] dx = \frac{1}{2} e^{1+\sin(2x)} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{(1+2x)^3}{x} dx &= \int \frac{1+3(2x)+3(2x)^2+(2x)^3}{x} dx = \int \frac{1+6x+12x^2+8x^3}{x} dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{x} + 6 + 12x + 8x^2 \right) dx = \ln|x| + 6x + 6x^2 + \frac{8x^3}{3} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. Consideremos um eixo vertical, orientado de baixo para cima, com origem no ponto de lançamento do projétil. O projétil desloca-se sobre este eixo. Seja $p(t)$ a posição do ponto P no instante t . Consideremos que a distância é medida em metros, que o tempo é medido em segundos e que o instante zero coincide com o instante em que o projétil é lançado.

Tem-se $p''(t) = -10$ (como o eixo está orientado de baixo para cima, a aceleração da gravidade tem sentido negativo).

Portanto, tem-se $p'(t) = -10t + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

Como o projétil é disparado verticalmente, de baixo para cima, com uma velocidade de 30 m/s, tem-se $p'(0) = 30$.

Vem, então, $p'(t) = -10t + 30$.

Portanto, $p(t) = -10 \frac{t^2}{2} + 30t + k = -5t^2 + 30t + k$ ($k \in \mathbb{R}$).

Como a origem do eixo orientado coincide com o ponto de lançamento do projétil, tem-se $p(0) = 0$.

Assim, $p(t) = -5t^2 + 30t$.

Queremos saber ao fim de quanto tempo, depois de ter sido disparado, é que o projétil atinge o mar.

Tem-se:

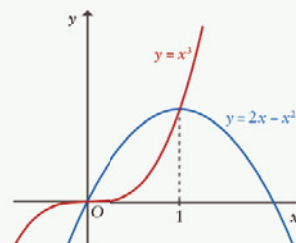
$$\begin{aligned} -5t^2 + 30t &= -80 \Leftrightarrow 5t^2 - 30t - 80 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t - 16 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times (-16)}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = \frac{6 \pm 10}{2} \Leftrightarrow t = -2 \vee t = 8 \end{aligned}$$

Portanto, é 8 segundos depois de ser disparado que o projétil atinge o mar.

3. Tem-se:

$$\begin{aligned} x^3 &= 2x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 1 \end{aligned}$$

A representação gráfica evidencia que, no intervalo $]0, 1[$, o gráfico de $y = 2x - x^2$ está acima do gráfico de $y = x^3$.



Portanto, a área pedida é:

$$\int_0^1 (2x - x^2) dx - \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 (2x - x^2 - x^3) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 0 = \frac{5}{12}$$

4. Tem-se:

- $F(3) = \int_3^3 \sqrt{t^2 + 16} dt = 0$
- $F'(x) = \sqrt{x^2 + 16}$, pelo que $F'(3) = \sqrt{3^2 + 16} = 5$.
- $F''(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$, pelo que $F''(3) = \frac{3}{5}$.

Portanto, $F(3) + F'(3) + F''(3) = 0 + 5 + \frac{3}{5} = \frac{28}{5}$.

5. a) Consideremos que a massa é medida em gramas e que o tempo é medido em milhares de anos.

Tem-se $m(t) = 1 \times e^{kt} = e^{kt}$.

Como a semivida do urânio-235 é de 270 mil anos, tem-se $m(270) = \frac{1}{2}$.

Ora,

$$m(270) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{270k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 270k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 270k = -\ln(2) \Leftrightarrow k = -\frac{\ln(2)}{270}$$

Portanto, $k \approx -0,002\,567$, pelo que $m(t) = e^{-0,002\,567t}$.

Vem, então, que a massa de urânio-235 que permanece numa amostra de 1 grama, após 100 mil anos, é $m(100) = e^{-0,2567} = 0,773\,600$.

Tem-se $0,773\,600\text{ g} = 773,6\text{ mg}$.

Portanto, a resposta é 774 mg.

- b) Tem-se $100\text{ mg} = 0,1\text{ g}$.

$$m(t) = 0,1 \Leftrightarrow e^{-0,002\,567t} = 0,1 \Leftrightarrow -0,002\,567t = \ln(0,1) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,1)}{-0,002\,567}$$

Assim, $t \approx 896,99$.

Portanto, a resposta é 897 mil anos.

Caça aos erros!



As respostas aos itens seguintes têm um ou mais erros. Descobre todos os erros!

1 Seja a um número real e seja $z = (a - 2i)(3 + i)$ um número complexo.

Determina a de modo que z seja um real negativo.

Resposta de um aluno:

$$z = (a - 2i)(3 + i) = 3a - 6i + ai - 2i^2 = 3a + 2 - 6i + ai$$

$$\text{Então, } z \text{ é real negativo se } 3a + 2 < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{2}{3}.$$

2 Escreve o número $3 - 2(1 - 2i)^2$ na forma $x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Resposta de um aluno:

$$3 - 2(1 - 2i)^2 = 3 - (2 - 4i)^2 = 3 - (4 - 16i + 4i^2) = 3 - (4 - 16i - 4) = 3 + 16i$$

3 Seja $z = 2e^{i\frac{\pi}{5}}$ um número complexo.

Escreve na forma trigonométrica os números $-z$, $2z$ e z^2 .

Resposta de um aluno:

$$-z = 2e^{-i\frac{\pi}{5}}, \quad 2z = 4e^{i\frac{2\pi}{5}} \quad \text{e} \quad z^2 = 4e^{i\left(\frac{\pi}{5}\right)^2}$$

4 Escreve na forma trigonométrica o número $-3\sqrt{2} + \sqrt{6}i$.

Resposta de um aluno:

$$|-3\sqrt{2} + \sqrt{6}i| = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6}i)^2} = \sqrt{18 - 6} = \sqrt{12}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}, \text{ portanto, } -3\sqrt{2} + \sqrt{6}i = \sqrt{12}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}.$$

5 Mostra que a condição $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 \leq 10$, $z \in \mathbb{C}$, define, num referencial o.n., o círculo de centro na origem e raio 1.

Resposta de um aluno:

$$|z - 2|^2 + |z + 2|^2 \leq 10 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 4 + z^2 + 4z + 4 \leq 10 \Leftrightarrow 2z^2 \leq 2 \Leftrightarrow z^2 \leq 1 \Leftrightarrow |z| \leq 1$$

6 Seja $z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{8}}$ um número complexo. Determina os valores naturais de n para os quais o afixo de z^n pertence à reta que contém as bissetrizes dos quadrantes pares.

Resposta de um aluno:

$$z^n = \sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{8}}$$

O afixo está na bissetriz dos quadrantes pares se e só se $\frac{n\pi}{8} = -\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{n\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$.

$$\frac{n\pi}{8} = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow n = -2 \text{ é impossível}$$

$$\frac{n\pi}{8} = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow n = \frac{24}{4} \Leftrightarrow n = 6$$

É só o 6.

7 Resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 \times \bar{z} = -2$.

Resposta de um aluno:

Seja $z = r e^{i\alpha}$, $r > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$z^3 \times \bar{z} = -2 \Leftrightarrow r^3 e^{i(3\alpha)} \times r e^{-i\alpha} = 2 e^{i\pi} \Leftrightarrow r^4 e^{i(2\alpha)} = 2 e^{i\pi}$$

$$\begin{cases} r^4 = 2 \\ 2\alpha = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$z = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Erros caçados!

1. Nesta resposta confunde-se «ser um real negativo» com «ter a parte real negativa».

Tem-se $z = 3a + 2 - 6i + ai = 3a + 2 + (-6 + a)i$.

Então, z é um número real negativo se e só se $-6 + a = 0 \wedge 3a + 2 < 0$.

$$-6 + a = 0 \wedge 3a + 2 < 0 \Leftrightarrow a = 6 \wedge a < -\frac{2}{3}$$

Portanto, não existe a de modo que z seja um real negativo.

2. O primeiro erro da resolução está na substituição de $2(1 - 2i)^2$ por $(2 - 4i)^2$. Esta expressão é equivalente a $[2(1 - 2i)]^2$, ou seja, $4(1 - 2i)^2$.

O segundo erro está na parcela $4i^2$ que deveria ser $(4i)^2$.

Uma resolução correta é:

$$3 - 2(1 - 2i)^2 = 3 - 2(1 - 4i + (2i)^2) = 3 - 2 \times (1 - 4i - 4) = 3 - (-6 - 8i) = 9 + 8i$$

3. O simétrico de z é $2e^{i(\frac{\pi}{5} + \pi)} = 2e^{i\frac{6\pi}{5}} = 2e^{-i\frac{4\pi}{5}}$, $2z = 4e^{i\frac{\pi}{5}}$ e $z^2 = 4e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

4. O módulo do número complexo $a + bi$ é $\sqrt{a^2 + b^2}$ e não $\sqrt{a^2 + (bi)^2}$.

$$\text{Portanto, } |-3\sqrt{2} + \sqrt{6}i| = \sqrt{(-3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{18 + 6} = \sqrt{24}.$$

Por outro lado, dado que o afixo de $-3\sqrt{2} + \sqrt{6}i$ pertence ao 2.º quadrante, um argumento

$$\text{deste número é } \arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{Portanto, } -3\sqrt{2} + \sqrt{6}i = \sqrt{24}e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

5. A resolução apresentada confunde $|z - 2|^2$ com $(z - 2)^2$ ($|z + 2|^2$ com $(z + 2)^2$ e $|z|^2$ com z^2), o que nem faz sentido, pois não se escrevem inequações com números complexos, uma vez que em $\mathbb{C}$ não está definida uma relação de ordem.

Uma resolução correta é:

Seja $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$|z - 2|^2 + |z + 2|^2 \leq 10 \Leftrightarrow |x + yi - 2|^2 + |x + yi + 2|^2 \leq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{(x - 2)^2 + y^2})^2 + (\sqrt{(x + 2)^2 + y^2})^2 \leq 10 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 + (x + 2)^2 + y^2 \leq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + x^2 + 4x + 4 + y^2 \leq 10 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

A condição $x^2 + y^2 \leq 1$, $x, y \in \mathbb{R}$, define o círculo de centro na origem do referencial e raio igual a 1.

6. O erro nesta resposta está na afirmação de que «o afixo está na bissetriz dos quadrantes pares se e só se $\frac{n\pi}{8} = -\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{n\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$ ».

A condição $\frac{n\pi}{8} = -\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{n\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$ é suficiente, mas não é necessária.

Uma resolução correta é: o afixo de z^n pertence à reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares se e só se $n \in \mathbb{N}$ e $\frac{n\pi}{8} = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{n\pi}{8} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow n = -2 + 8k$$

Todos os números da forma $-2 + 8k, k \in \mathbb{N}$ são solução do problema.

7. O erro da resolução está na aplicação do critério de igualdade de números complexos na forma trigonométrica.

$$\text{Deve ser: } \begin{cases} r^4 = 2 \\ 2\alpha = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

A equação tem duas soluções distintas que se podem obter atribuindo a k os valores 0 e 1.

$$\text{Tem-se } z^3 \times \bar{z} = -2 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{2}} \vee z = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

Teste 3

Págs. 156 e 157

Grupo I

1. Começa por escrever z na forma trigonométrica, designando o seu módulo por ρ (por exemplo), e determina $\frac{iz}{w}$.
2. Começa por determinar o raio da circunferência e a abscissa do ponto B . Repara que o ponto B é um dos pontos de interseção da circunferência com o eixo Ox .
3. Repara que, consoante o número termine, ou não, em zero, existem diferentes hipóteses para o algarismo das centenas.
4. Começa por traduzir simbolicamente as duas informações dadas no enunciado.
5. Recorda o conceito de $\log_a(b)$ e as propriedades operatórias dos logaritmos.

Grupo II

1.
 - a) Começa por justificar que as únicas assíntotas que podem existir são assíntotas verticais e, no que diz respeito a estas, em que pontos podem surgir.
 - b) Recorda a derivada das funções seno e cosseno e a regra de derivação de um quociente.
 - c) Recorda a relação entre a derivada de uma função num ponto a do seu domínio e o declive da reta tangente ao gráfico dessa função no ponto de coordenadas $(a, f(a))$.
 - d) Recorda a relação entre a monotonia e extremos de uma função e os zeros e sinal da sua derivada.
 - e) Recorda a relação entre o sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de uma função e os zeros e sinal da segunda derivada dessa função.
2. Começa por traduzir simbolicamente a informação de que o carbono-14 tem uma semivida de 5730 anos e utiliza essa tradução simbólica para determinar o valor da constante b . Em seguida, para determinares a massa de carbono-14 presente no fóssil daqui a 500 anos, considera o dia de hoje como sendo o instante inicial.

-
3. a) Recorda as operações com números complexos, na forma $x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) e na forma trigonométrica. Começa por calcular w^6 . Para obter zw deves escrever z na forma algébrica.
- b) Recorda as propriedades relativas ao conjugado e ao simétrico de números complexos, na forma trigonométrica, bem como o critério de igualdade de números complexos escritos nessa forma.
4. a) Recorda que os afixos das raízes cúbicas de um número complexo são vértices de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial.
- b) Recorre ao conceito de raiz cúbica de um número complexo.
5. Recorda que, quando as soluções de uma equação do segundo grau são números imaginários, então são números complexos conjugados.

Resolução do teste 3



Grupo I

1. (A)

Tem-se $z = \rho e^{i\frac{3\pi}{5}}$, $w = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}$ e $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, pelo que:

$$\frac{iz}{w} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} \times \rho e^{i\frac{3\pi}{5}}}{\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}} = \frac{\rho e^{i\frac{11\pi}{10}}}{\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}} = \frac{\rho}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{13\pi}{20}}$$

Como $-\frac{13\pi}{20}$ pertence a $]-\pi, \pi]$, tem-se que $-\frac{13\pi}{20}$ é o argumento principal de $\frac{iz}{w}$.

Logo, $\text{Arg}\left(\frac{iz}{w}\right) = -\frac{13\pi}{20}$.

2. (B)

A circunferência de centro em $A(4, 3)$ e que passa na origem do referencial tem raio igual a $\sqrt{4^2 + 3^2}$, ou seja, igual a 5.

Portanto, uma condição que define em $\mathbb{C}$ o círculo limitado por esta circunferência é $|z - (4 + 3i)| \leq 5$.

Tem-se:

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25 \wedge y=0 &\Leftrightarrow (x-4)^2 + 9 = 25 \wedge y=0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 16 \wedge y=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-4) = -4 \vee (x-4) = 4 \wedge y=0 \Leftrightarrow (x=0 \vee x=8) \wedge y=0 \end{aligned}$$

Portanto, B tem coordenadas $(8, 0)$.

Assim, uma condição que define o semiplano definido pela mediatriz de $[AC]$ e que contém o ponto B é $|z-8| \leq |z-(4+3i)|$.

Portanto, uma condição que define a região colorida, incluindo a fronteira, é:

$$|z - (4 + 3i)| \leq 5 \wedge |z - 8| \leq |z - (4 + 3i)|$$

que é equivalente à condição:

$$|z - 4 - 3i| \leq 5 \wedge |z - 8| \leq |z - 4 - 3i|$$

3. (A)

Existem números pares que terminam em zero e números pares que não terminam em zero.

Existem $9 \times 8 \times 1$ números pares que terminam em zero, nas condições do enunciado.

Existem $8 \times 8 \times 4$ números pares que terminam em dois, quatro, seis ou oito, nas condições do enunciado.

Portanto, existem $9 \times 8 \times 1 + 8 \times 8 \times 4$ números nas condições do enunciado.

Tem-se: $9 \times 8 \times 1 + 8 \times 8 \times 4 = 328$

4. (B)

Tem-se $P(\overline{A \cup B}) = 0,8$ e $P(A|B) = 0,4$.

Daqui vem $P(\overline{A \cap B}) = 0,8$ e $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,4$.

De $P(\overline{A \cap B}) = 0,8$, vem $P(A \cap B) = 0,2$, pelo que $\frac{0,2}{P(B)} = 0,4$.

Portanto, $P(B) = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$.

5. (C)

Tem-se $\log_a \left(\frac{a^6 b}{\sqrt{a}} \right) = \log_a(a^6) + \log_a(b) - \log_a(\sqrt{a}) = 6 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 8$.

Grupo II

1. a) Como o domínio da função f é limitado, apenas poderão existir assíntotas verticais ao seu gráfico.

Dado que a função é contínua em todo o seu domínio, apenas as retas de equações $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$ podem ser assíntotas verticais.

Tem-se:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{2 - \sin x}{\cos x} = \frac{3}{0^+} = +\infty \quad (\text{observa o gráfico de } y = \cos x \text{ para melhor reconheceres que } x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+ \Rightarrow \cos x \rightarrow 0^+) \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{2 - \sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (\text{observa o gráfico de } y = \cos x \text{ para melhor reconheceres que } x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^- \Rightarrow \cos x \rightarrow 0^+) \end{aligned}$$

Portanto, as retas de equações $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$ são assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\begin{aligned} \text{b) Tem-se } f'(x) &= \left(\frac{2 - \sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(2 - \sin x)' \cos x - (2 - \sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{(-\cos x) \cos x - (2 - \sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{-\cos^2 x + (2 - \sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{-\cos^2 x + 2 \sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{2 \sin x - 1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

c) Tem-se $f'(0) = \frac{0-1}{1} = -1$ e $f(0) = \frac{2-0}{1} = 2$.

Portanto, a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0 tem declive -1 e ordenada na origem igual a 2. A sua equação reduzida é, portanto, $y = -x + 2$.

d) Para $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, tem-se:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Tem-se:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
f'	-	0	+
f		Mín.	

Portanto, f é decrescente no intervalo $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \right[$ e é crescente no intervalo $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right[$.

A função atinge um mínimo que é mínimo absoluto para $x = \frac{\pi}{6}$ e tem-se:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2 - \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$$

e) Tem-se $f''(x) = \left(\frac{2 \sin x - 1}{\cos^2 x} \right)' = \frac{(2 \sin x - 1)' \cos^2 x - (2 \sin x - 1)(\cos^2 x)'}{\cos^4 x}$

$$= \frac{2 \cos x \times \cos^2 x - (2 \sin x - 1) 2 \cos x (-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2 \cos^3 x - (2 \sin x - 1) 2 (-\sin x)}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{2 \cos^3 x + (2 \sin x - 1) 2 \sin x}{\cos^4 x} = \frac{2 \cos^3 x + 4 \sin^2 x - 2 \sin x}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{2 \cos^3 x + 2 \sin^2 x + 2 \sin^2 x - 2 \sin x}{\cos^4 x} = \frac{2 (\cos^3 x + \sin^2 x) + 2 \sin^2 x - 2 \sin x}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{2 + 2 \sin^2 x - 2 \sin x}{\cos^3 x}$$

A equação $2 \sin^2 x - 2 \sin x + 2 = 0$ é impossível em $\mathbb{R}$, pois $(-2)^2 - 4 \times 2 \times 2 < 0$.

Portanto, a função f'' não tem zeros, pelo que, sendo contínua em $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, tem sempre o mesmo sinal. Como $f''(0) = 2$, podemos concluir que a função f'' é sempre positiva.

Portanto, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima e não tem pontos de inflexão.

2. Como o carbono-14 tem uma semivida de 5730 anos, tem-se $m(5,73) = \frac{1}{2}a$.

Ora,

$$m(5,73) = \frac{1}{2}a \Leftrightarrow ae^{5,73b} = \frac{1}{2}a \Leftrightarrow e^{5,73b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 5,73b = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5,73b = -\ln(2) \Leftrightarrow b = \frac{-\ln(2)}{5,73}$$

Portanto, $b \approx -0,12$.

Vem, então: $m(0,5) = 3,76e^{-0,12 \times 0,5} \approx 3,54$

Portanto, a massa de carbono-14 presente nesse fóssil daqui a 500 anos será aproximadamente igual a 3,54 gramas.

3. a) Tem-se:

$$\bullet u^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^6 = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i$$

$$\bullet z = -2 + \sqrt{12}i = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}, \text{ pelo que } zw = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = 4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right)} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \\ = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 + 4i$$

$$\text{Portanto, } \frac{7+i}{u^6 - zw - 1} = \frac{7+i}{8i - (-4+4i) - 1} = \frac{7+i}{8i+4-4i-1} = \frac{7+i}{3+4i} = \frac{(7+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \\ = \frac{21-28i+3i+4}{9+16} = \frac{25-25i}{25} = 1-i.$$

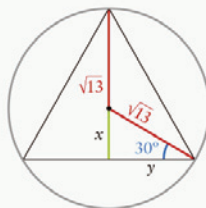
- b) Tem-se $\bar{w} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$, pelo que $-\bar{w} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + \pi\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

$$\text{Portanto, } \rho e^{i\alpha} = -\bar{w} \Leftrightarrow \rho e^{i\alpha} = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}} \Leftrightarrow \rho = \sqrt{2} \wedge \alpha = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Como se pretende } \alpha \in [-2\pi, 0], \text{ vem } \alpha = \frac{11\pi}{12} - 2\pi = -\frac{13\pi}{12}.$$

$$\text{Portanto, } \rho = \sqrt{2} \text{ e } \alpha = -\frac{13\pi}{12}.$$

4. a) O ponto $A(3, 2)$ é o afixo do número complexo $3+2i$, que é uma das raízes cúbicas de z . O polígono cujos vértices são as raízes cúbicas de z é um triângulo equilátero inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial e raio igual a $|3+2i|$, ou seja, raio igual a $\sqrt{13}$. Trata-se, portanto, de determinar a área de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio $\sqrt{13}$.



Tal como se evidencia na figura anterior, tem-se:

- $\cos 30^\circ = \frac{y}{\sqrt{13}}$, de onde vem $y = \sqrt{13} \times \cos 30^\circ = \sqrt{13} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{39}}{2}$, pelo que a base do triângulo é $2 \times \frac{\sqrt{39}}{2} = \sqrt{39}$;
- $\sin 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{13}}$, de onde vem $x = \sqrt{13} \times \sin 30^\circ = \sqrt{13} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, pelo que a altura do triângulo é $\sqrt{13} + \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$.

A área do triângulo é, portanto, igual a $\frac{\sqrt{39} \times \frac{3\sqrt{13}}{2}}{2} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$.

b) Tem-se:

$$z = (3 + 2i)^3 = 3^3 + 3 \times 3^2 \times 2i + 3 \times 3 \times (2i)^2 + (2i)^3 = 27 + 54i - 36 - 8i = -9 + 46i$$

5. Tem-se $w = \bar{z}$, pelo que $\left| \frac{z}{w} \right| = \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = 1$.

Teste de Avaliação 1

Nome _____ N.º _____ Turma _____ Data /____/____/____

Avaliação _____ Professor _____

Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles escolhe a única opção correta.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$. Qual é o valor de $P[\overline{A} \cup (A \cap \overline{B})]$?

(A) 0 (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$

2. Sejam A e B dois quaisquer acontecimentos de um espaço finito Ω . Considera as proposições seguintes:

- I. Se $P(A) + P(B) = 1$, então A e B são acontecimentos contrários.
II. Se $P(A \cup B) = 1$, então A e B são acontecimentos contrários.
III. Se A e B são acontecimentos contrários, então $P(A \cap B) = 0$.

Quanto ao valor lógico, podemos dizer que:

- (A) as três proposições são verdadeiras. (B) as três proposições são falsas.
(C) só a proposição III é verdadeira. (D) só a afirmação II é falsa.

3. Quantos são os números naturais ímpares de cinco algarismos que têm exatamente dois algarismos iguais a zero?

(A) 405 (B) 1215 (C) 1680 (D) 2430

4. O número $\frac{{}^{1000}A_{900}}{{}^{1000}C_{100}}$ é igual a:

(A) 100! (B) 800! (C) 900! (D) 1000!

5. Seja Ω , conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,4$ • $P(B) = 0,5$ • $P(A|\overline{B}) = 0,2$

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

(A) 0,6 (B) 0,7 (C) 0,8 (D) 0,9

Grupo II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Queremos colocar no tabuleiro representado ao lado seis botões brancos, todos iguais, e quatro botões de cores diferentes (um verde, outro amarelo, outro vermelho e outro azul). Cada botão ocupa uma casa e em cada casa não se pode colocar mais do que um botão.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
<i>I</i>	<i>J</i>	<i>K</i>	<i>L</i>

- a) De quantas maneiras diferentes podem os botões ficar dispostos no tabuleiro?
- b) De quantas maneiras diferentes podem os botões ficar dispostos no tabuleiro, se os botões que não são brancos ficarem todos numa mesma fila?

2. O casal Rocha tem dois filhos e o casal Costa tem três.

Num certo dia, os dois casais e os respetivos filhos juntam-se num jantar e, no fim, dispõem-se ao acaso, lado a lado, para tirarem uma fotografia.

- a) De quantas maneiras se podem dispor, de modo que os elementos de cada família fiquem juntos?
- b) Determina a probabilidade de os dois elementos de cada casal ficarem juntos na fotografia. Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

3. Os 20 alunos de uma turma do 12.^o ano, 12 rapazes e oito raparigas, vão fazer teste de Matemática.

- a) A professora fez três versões do enunciado do teste: são seis enunciados da versão 1, seis enunciados da versão 2 e oito enunciados da versão 3. Os enunciados vão ser distribuídos ao acaso.

a₁) De quantas maneiras podem ser distribuídos os enunciados dos testes pelos alunos?

a₂) Qual é a probabilidade de todas as raparigas receberem testes da versão 3?

- b) A «fila da janela» tem seis mesas individuais. De quantas maneiras pode ser ocupada, ficando duas raparigas nos dois primeiros lugares?

4. A soma dos dois primeiros elementos de uma linha do triângulo de Pascal com os dois últimos elementos dessa mesma linha é igual a 40.

Qual é a soma de todos os elementos da linha seguinte?

5. Um dos termos do desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x} + x^2\right)^{12}$, com $x \neq 0$, não depende de x .

Determina esse termo.

6. Uma caixa tem seis bolas: duas bolas com o número 2 e quatro bolas com o número 3. Tiram-se, simultaneamente e ao acaso, três bolas da caixa e observam-se os respectivos números.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : os três números saídos são todos iguais

B : a soma dos três números saídos é um número ímpar

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$?

Justifica a tua resposta.

7. Considera uma escola em que:

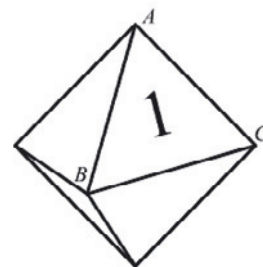
- 75% dos alunos têm computador;
- $\frac{2}{3}$ dos alunos que têm computador também têm *tablet*;
- 5% dos alunos não têm computador nem têm *tablet*.

Escolhe-se um aluno desta escola, ao acaso. Qual é a probabilidade de ele ter computador, sabendo que tem *tablet*?

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

8. Na figura está representado um octaedro regular. A face $[ABC]$ do octaedro está numerada com o número 1, como se pode observar na figura. Pretende-se numerar as restantes faces do octaedro com os números 2 a 8 (um número diferente em cada face).

De quantas maneiras se podem numerar as restantes sete faces de modo que a soma dos números das faces concorrentes no vértice A seja um número ímpar?



9. Considera o jogo seguinte, que envolve um dado cúbico, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e uma caixa com oito bolas, indistinguíveis ao tato, sendo seis bolas azuis e duas bolas verdes.

Em cada jogada, lança-se o dado e, em seguida, retiram-se duas bolas da caixa. Se no lançamento do dado sair uma face com número maior do que quatro, retiram-se as duas bolas da caixa, repondo a primeira antes de tirar a segunda; caso contrário, as duas bolas são retiradas simultaneamente.

Sempre que, numa jogada, as bolas retiradas tiverem a mesma cor, o jogador ganha um ponto. Se as bolas retiradas tiverem cor diferente, o jogador não ganha qualquer ponto.

Qual é a probabilidade de, realizando duas jogadas, ganhar exatamente um ponto?

Apresenta o resultado arredondado às milésimas.

Cotações

1	2	3	4	5	1.a)	1.b)	2.a)	2.b)	3.a ₁)	3.a ₂)	3.b)	4	5	6	7	8	9
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	15	10	15	15	15

Teste de Avaliação 2

Nome _____ N.º _____ Turma _____ Data /____/____/____

Avaliação _____ Professor _____

Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles escolhe a única opção correta.

1. Seja (u_n) uma sucessão. Em qual das opções seguintes está definida uma sucessão (v_n) que permite concluir que $\lim u_n = +\infty$, sabendo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n$?

(A) $v_n = \left(\frac{1}{\pi}\right)^n$

(B) $v_n = (\pi - 1)^n$

(C) $v_n = \frac{\pi n}{n+1}$

(D) $v_n = \frac{\pi - n^2}{n}$

2. Para um certo valor real de k , a função f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{4x^2 + k} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ é uma função

contínua.

Qual é esse valor de k ?

(A) 4

(B) 8

(C) 12

(D) 16

3. Seja f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e seja $f''(x) = (x - 2)(x - 1)^2(x^2 - 4)$.

Quantos pontos de inflexão tem o gráfico da função f ?

(A) Zero

(B) Um

(C) Dois

(D) Quatro

4. No triângulo de Pascal, considera a linha constituída pelos números da forma $^{1000}C_p$. Quantos elementos dessa linha são maiores do que $^{1000}C_{10}$?

(A) 979

(B) 980

(C) 981

(D) 990

5. O Tiago tem um dado equilibrado, de forma cúbica, em cujas faces estão gravados os números 0, 1, 2, 3, 4 e 5. Lança-se três vezes esse dado e multiplicam-se os números das faces que ficam voltadas para cima. Qual é a probabilidade de o produto obtido ser zero?

(A) $\frac{1}{216}$

(B) $\frac{25}{216}$

(C) $\frac{91}{216}$

(D) $\frac{125}{216}$

Grupo II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Considera a sucessão (v_n) definida por $v_n = \frac{3n+1}{\sqrt{n^2+2}}$ e seja (u_n) uma sucessão tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \leq v_n + 3^{-n}.$$

Justifica que a sucessão (u_n) é convergente e determina o seu limite.

2. Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2}{x^2+3} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{x-\sqrt{x}}{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

a) Prova que a função é contínua para $x = 1$.

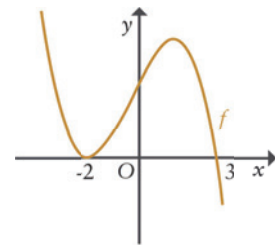
b) Justifica que a função atinge mínimo e máximo relativos no intervalo $[-2, 2]$.

c) Estuda a restrição da função f ao intervalo $]-\infty, 1]$ relativamente aos seguintes aspetos:

- intervalos de monotonia e existência de extremos relativos;
- sentido das concavidades do gráfico e existência de pontos de inflexão;
- existência de assíntotas ao gráfico.

d) Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 4.

3. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico de uma função polinomial de grau 3. Seja h uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja função derivada, h' , é definida por $h'(x) = \frac{f(x)}{x^2+1}$.



Mostra que a função h atinge um extremo relativo em 3 e indica se esse extremo é máximo ou é mínimo.

4. Seja b um número real positivo e seja f uma função real de variável real, contínua no intervalo $[0, 2b]$, tal que $f(0) = f(2b)$ e $f(0) \neq f(b)$.

Prova que $\exists c \in]0, b[: f(c) = f(c+b)$.

5. Seja f uma função ímpar, de domínio $\mathbb{R}$.

Prova que, se a reta de equação $y = mx + b$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$, então a reta de equação $y = mx - b$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

6. Determina o número de vértices de um polígono convexo, sabendo que, escolhendo dois dos seus vértices ao acaso, a probabilidade de que definam uma diagonal é 99%.

Cotações

1	2	3	4	5	1	2.a)	2.b)	2.c)	2.d)	3	4	5	6
10	10	10	10	10	20	15	10	20	15	20	20	15	15

Teste de Avaliação 3

Nome _____ N.º _____ Turma _____ Data /____/____/____

Avaliação _____ Professor _____

Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles escolhe a única opção correta.

1. O João abriu um negócio em 2017. O estudo que encomendou a uma firma garante-lhe que a receita desse negócio vai crescer à taxa anual de 6 % durante oito anos. Se em 2017 a receita foi 21 000 euros, qual se espera que seja a receita em 2024, em euros, arredondada às unidades?

(A) 31571 (B) 31 576 (C) 31581 (D) 31586

2. Seja (x_n) a sucessão definida por $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e seja (y_n) a sucessão definida por $y_n = 1 - \ln(x_n)$.

Qual é o limite da sucessão (y_n) ?

(A) $-\infty$ (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

3. Sejam a , b e c três números reais maiores do que 1 e tais que $\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = -3$.

Qual é o valor de $\log_c\left(\frac{b}{ac^2}\right)$?

(A) $-\frac{7}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) 1 (D) 5

4. Seja f a função definida por $f(x) = 2^{x+1}$ e seja g a função definida por $g(x) = \log_2(x)$.

Qual das expressões seguintes é equivalente a $(f \circ g)(x)$?

(A) $x+1$ (B) $x+2$ (C) $2x$ (D) x^2

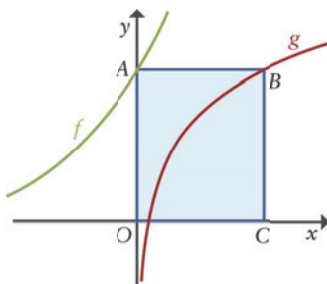
5. A Leonor e o Tiago vão a um concerto com mais seis amigos e ocupam uma fila de oito lugares. De quantas maneiras podem ocupar os oito lugares, sabendo que a Leonor e o Tiago não ficam juntos?

(A) 15 120 (B) 20 160 (C) 30 240 (D) 40 320

Grupo II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. No referencial o.n. xOy estão representadas graficamente as funções f e g definidas por $f(x) = 7e^{\frac{x}{4}} - 1$ e $g(x) = 2 + 2\log_a(x)$, respetivamente, sendo a um número real maior do que 1, e o retângulo $[OABC]$, cujos vértices A e B pertencem aos gráficos das funções f e g , respetivamente. Os vértices A e C pertencem aos eixos coordenados.



- a) Determina a , sabendo que o retângulo $[OABC]$ tem área 30.
- b) Tomando para conjunto de chegada o contradomínio da função f , caracteriza a função inversa de f .
2. Seja f a função definida por $f(x) = \log_2(x^2 - 1) - \log_2(8 - x)$ e sejam g e h as funções definidas por $g(x) = 2^{x+1}$ e $h(x) = 2^{3-x} + 2f(5)$.
Resolve os itens seguintes sem recorrer à calculadora.
- a) Mostra que $f(5) = 3$.
- b) Sejam A , B e C , respetivamente, os pontos de interseção dos gráficos das funções g e h e os pontos de interseção de cada uma destas funções com o eixo das ordenadas.
Determina a área do triângulo $[ABC]$.
- c) Resolve a condição $f(x) \geq -1$.

3. Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} e^{2x} - x - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ (x-1)\ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

a) Estuda a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

b) Determina $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$.

c) Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $-\ln(2)$.

4. Na escala de Richter, a magnitude M de um sismo exprime-se em função da energia libertada segundo a fórmula $M = \frac{\log(E) - 5,24}{1,44}$, sendo a energia E expressa em joule.

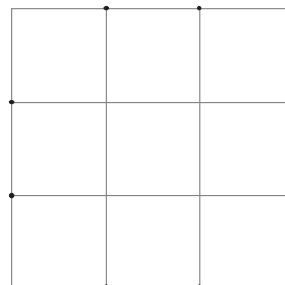
Mostra que existe um número real x tal que $M(xE) = M(E) + 1,5$, qualquer que seja o valor de E .

Apresenta o valor de x arredondado às unidades e interpreta-o no contexto descrito.

5. Na figura está representado um quadrado dividido em nove quadrados iguais. Sobre os lados do quadrado estão marcados oito pontos. Considera todas as retas distintas que podem ser definidas por esses pontos.

Escolhendo, ao acaso, duas dessas retas, qual é a probabilidade de que sejam paralelas a uma das diagonais do quadrado?

Apresenta a probabilidade na forma de fração irredutível.



Cotações

1	2	3	4	5	1.a)	1.b)	2.a)	2.b)	2.c)	3.a)	3.b)	3.c)	4	5
10	10	10	10	10	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15

Teste de Avaliação 4

Nome _____ N.º _____ Turma _____ Data /____/____/____

Avaliação _____ Professor _____

Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles escolhe a única opção correta.

- Qual é o limite da sucessão (u_n) definida por $u_n = \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{2n}$?
(A) 1 (B) e^{-6} (C) e^2 (D) $+\infty$
- Seja g a função definida por $g(x) = \ln(e^x + 1)$ e seja $a \in \mathbb{R}$. A reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa a é paralela à reta de equação $y = \frac{x}{3}$. Qual é o valor de a ?
(A) 0 (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $-\ln(2)$ (D) $\ln(2)$
- Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^+$ tal que $f'(x) = 2^{-x} + \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.
Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\sqrt{x} - 1}$?
(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) -1 (D) 1
- Qual das expressões seguintes define a função derivada de uma função, de domínio $\mathbb{R}$, crescente e cujo gráfico tem um único ponto de inflexão?
(A) $e^x(x+1)$ (B) $e^x(x^2+1)$ (C) $e^x + e^{-x}$ (D) $e^x - e^{-x}$
- O desenvolvimento de $(x^4 - 2)^n$ pela fórmula do binómio de Newton tem 13 termos. Um dos termos é kx^n , para um certo valor de k .
Qual é esse valor de k ?
(A) $-112\,640$ (B) -220 (C) 220 (D) 112 640

Grupo II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \begin{cases} x(1 - e^{\frac{1}{x}}) & \text{se } x < 0 \\ \ln(x) - \ln(x+1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

a) Estuda a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico e escreve equações das assíntotas que identificares.

b) Resolve, em $]-\infty, 0[$, a condição $f(x) \leq \frac{x}{2}$.

Apresenta o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.

2. Admite que a intensidade da luz solar, x metros abaixo da superfície da água, é dada, para $x \geq 0$, numa certa unidade de medida, por $I(x) = ae^{-bx}$, sendo a e b constantes positivas que dependem do instante e do local onde é efetuada a medição.

a) Medições efetuadas, num certo instante e em determinado local do oceano Atlântico, mostraram que a 20 metros de profundidade a intensidade da luz solar era metade da sua intensidade à superfície. Determina o valor de b para esse instante e local. Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

b) Considera agora $b = 0,05$. Mostra que $\frac{I(x+2)}{I(x)}$ é constante.

Apresenta o valor da constante arredondado às centésimas e interpreta o seu valor no contexto descrito.

3. Durante um certo período, o número de ursos numa reserva natural é dado por $P(t)$, onde t é o tempo, em anos, decorrido a partir do dia 1 de janeiro de 2010.

Admite que $P(t) = \frac{100}{1 + Ae^{\frac{4t}{5}}}$, $A \in \mathbb{R}$.

a) Determina o valor da constante A em função da população inicial, P_0 ($P_0 = P(0)$).

b) Qual é a evolução da população se $P_0 = 100$?

c) Mostra que a função P satisfaz a equação diferencial $P'(t) = \frac{1}{125}P(t)(100 - P(t))$.

d) Considera agora $P_0 = 10$ e determina em que mês de que ano é que a taxa instantânea foi máxima.

Adaptado de *Caderno de Apoio*, 12.º ano

4. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$.

Seja A o ponto do gráfico de f , de abscissa a , com $a \neq 0$, e seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto A .

A reta r interseca o eixo Ox num ponto B , de abscissa $2a$.

Seja g a função definida por $g(x) = xf(x)$.

Mostra que $g'(a) = 0$.

5. Seja Ω um espaço de resultados finito e sejam A e B ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(B) \neq 0$.

a) Prova que $P(\bar{A} | B) = 1 - P(A | B)$.

b) Admite que $P(A | \bar{B}) = 0,3$ e que $P(B) = 0,6$. Determina $P(A \cup B)$.

Cotações

1	2	3	4	5	1.a)	1.b)	2.a)	2.b)	3.a)	3.b)	3.c)	3.d)	4	5
10	10	10	10	10	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15

Teste de Avaliação 5

Nome _____ N.º _____ Turma _____ Data /____/____/____

Avaliação _____ Professor _____

Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles escolhe a única opção correta.

1. Seja a um número real positivo e seja f a função definida por $f(x) = \frac{e^{x-1}}{a}$. Se $f(2) = b$, qual das expressões seguintes é igual a $\ln(a)$?

(A) $\frac{1}{\ln(b)}$ (B) $1 - \ln(b)$ (C) $\frac{1}{b}$ (D) $1 - b$

2. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $] -\infty, 0[$. Qual é o conjunto-solução da condição $g(x)\log_2(x) \leq 2g(x)$?

(A) $\emptyset$ (B) $] -\infty, 4]$ (C) $] 0, 4]$ (D) $[4, +\infty[$

3. Seja f a função definida por $f(x) = \frac{\cos^3(4x)}{3}$.

Qual é o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{3}$?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Um ponto desloca-se sobre uma reta numérica de tal modo que a sua abcissa, t segundos após um certo instante inicial, é dada por $x(t) = \frac{1}{3}\cos(4\pi t + 2)$.

Qual é a frequência deste oscilador harmónico?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.

A reta de equação $y = \frac{3-x}{2}$ é assíntota ao gráfico de f . Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x) + f(x)}{x}$?

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$

Grupo II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Seja f a função definida por $f(x) = 1 - 2\cos(\pi x + 1)$.

a) Determina o período positivo mínimo da função f .

b) Determina o contradomínio da função f e uma expressão geral dos maximizantes.

2. Um ponto P desloca-se numa reta numérica, no intervalo de tempo $I = [0, 60]$ (medido em segundos), de tal forma que a sua abcissa, no instante t , é dada por $x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

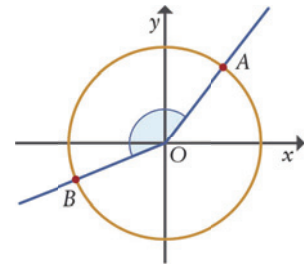
a) Determina os instantes em que a distância do ponto P à origem é igual a 1, durante os primeiros 10 segundos.

b) Prova que se trata de um oscilador harmónico, ou seja, prova que $x(t)$ se pode escrever na forma $A\cos(\omega t + \phi)$, com $A > 0$, $\omega > 0$ e $\phi \in [0, 2\pi[$.

3. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy , a circunferência trigonométrica.

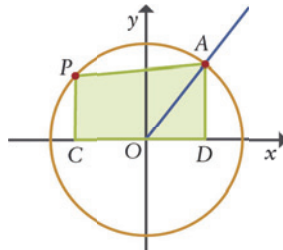
Os pontos A e B pertencem à circunferência. O ponto A tem abcissa $\frac{3}{5}$ e o

ângulo AOB tem $\frac{5\pi}{6}$ radianos de amplitude.



a) Determina o valor exato da ordenada do ponto B .

b) Considera agora que um ponto P se move sobre a circunferência no segundo quadrante e, para cada posição do ponto P , seja $[APCD]$ o trapézio retângulo cujos vértices C e D pertencem ao eixo Ox .



Designando por x a amplitude, em radianos, do ângulo DOP ($x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e por α a amplitude, em

radianos, do ângulo DOA , mostra que a área do trapézio é dada, em função de x , por

$\frac{\sin(x + \alpha) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{12}{25}}{2}$ e determina, em função de α , o valor de x para o qual a área do triângulo é máxima.

4. Considera as funções f e g definidas, respetivamente, por $f(x) = \sin(2x)$ e $g(x) = 2\cos x - 1$.

a) Determina $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

b) Sejam A e B dois pontos com a mesma abcissa.

Sabe-se que a abcissa dos dois pontos pertence ao intervalo $\left]-\frac{3}{2}\pi, -\pi\right[$ e que a reta tangente ao gráfico de f no ponto A e a reta tangente ao gráfico de g no ponto B são paralelas.

Determina as coordenadas dos pontos A e B .

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 - \sqrt{1-x}} & \text{se } x < 0 \\ \frac{e^{a^2x} - 1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}, a \neq 0.$

a) Determina os valores de a para os quais existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

b) Considera agora que $a = 1$ e seja b um número real. A reta de equação $y = b$ intersesta o gráfico da função em dois pontos, um de abcissa negativa e outro de abcissa positiva, que vamos designar, respetivamente, por A e B e que são tais que $\overline{AB} = 2$.

Determina a abcissa de cada um dos pontos A e B e determina b , recorrendo a uma calculadora gráfica.

Apresenta os valores pedidos arredondados às centésimas.

Equaciona o problema e reproduz os gráficos que visualizaste na calculadora, devidamente identificados.

Cotações

1	2	3	4	5	1.a)	1.b)	2.a)	2.b)	3.a)	3.b)	4.a)	4.b)	5.a)	5.b)
10	10	10	10	10	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15

Teste de Avaliação 6

Nome _____ N.º _____ Turma _____ Data /____/____/____

Avaliação _____ Professor _____

Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles escolhe a única opção correta.

1. Do desenvolvimento de $(x^3 - 2)^9$ pelo binómio de Newton resulta a forma reduzida de um polinómio. Qual é o termo de grau 15 desse polinómio?

(A) $-2016x^{15}$ (B) $2016x^{15}$ (C) $-126x^{15}$ (D) $126x^{15}$

2. Sejam n e k números naturais tais que $0 < k < n$.

A qual das expressões seguintes é equivalente a expressão ${}^nC_{k-1} + {}^nC_k + {}^{n+1}C_{k+1}$?

(A) ${}^{n+1}C_{k+1}$ (B) ${}^{n+1}C_{k+2}$ (C) ${}^{n+2}C_{k+1}$ (D) ${}^{n+2}C_{k+2}$

3. Seja a um número real e seja $w = \frac{2-3i}{a+i}$ um número complexo.

Qual é o valor de a para o qual w é um número real?

(A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) $-\frac{2}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

4. Seja $z = e^{i\theta}$, com $\theta \in \left] \frac{3\pi}{4}, \pi \right[$, um número complexo e seja $w = -z^2 - 2$.

A que quadrante, no plano de Argand, pertence o afixo do número complexo w ?

(A) 1.º (B) 2.º (C) 3.º (D) 4.º

5. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera os números $w = \sqrt{5} + 2i$ e $z = \frac{3w}{i\bar{w}^2}$.

Seja α um argumento de w . Qual dos números seguintes é igual a z ?

(A) $9e^{i\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$ (B) $9e^{i\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$ (C) $e^{i\left(3\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}$ (D) $e^{i\left(-\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$

Grupo II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões. Resolve os itens de 1 a 4 sem recorrer à calculadora.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera os números $w_1 = \frac{i^6 + 2e^{i\frac{3\pi}{2}}}{2-i} + \frac{2i\sqrt{3}}{(1-i)^2}$ e $w_2 = -2ie^{i\frac{\pi}{6}}$.

a) Escreve w_1 na forma trigonométrica.

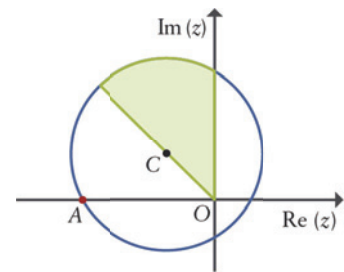
b) Determina uma expressão dos valores de $n \in \mathbb{N}$ para os quais $(w_2)^n$ é um número real positivo.

2. A circunferência representada na figura ao lado tem centro no ponto C e é definida pela condição $|z + 2 - 2i| = 4$, sendo z um número complexo.

a) Define, por meio de uma condição em $z \in \mathbb{C}$, a região colorida (incluindo a fronteira).

b) O ponto A é o afixo do número complexo w .

Determina o número w e apresenta-o na forma trigonométrica



3. Seja $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ um número complexo.

a) Seja z_2 um outro número complexo com módulo igual a 4 e argumento principal θ . Considera a região do plano de Argand determinada pela condição:

$$|z_1| \leq |z| \leq |z_2| \wedge \text{Arg}(z_2) \leq \text{Arg}(z) \leq \text{Arg}(z_1)$$

Determina z_2 , sabendo que a área da região é 3π .

Apresenta z_2 na forma $a + bi$, sendo a e b números reais.

b) Considera agora um número complexo z_3 cujo afixo pertence ao 2.º quadrante. Determina z_3 , sabendo que z_1 e z_3 são raízes de índice 5 do mesmo número complexo.

4. Resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 - 4z + 4 - 2i = 0$.

Apresenta as soluções na forma $a + bi$, sendo a e b números reais.

5. Num saco estão dez cartões indistinguíveis ao tato. Em quatro dos cartões estão escritos números reais diferentes de zero e, nos outros seis, estão escritos números imaginários puros.
- a) Retiram-se, ao acaso, dois cartões do saco e multiplicam-se os números que estão escritos nos cartões. Qual é a probabilidade de ter tirado dois cartões com números reais, sabendo que o produto é um número real?
- b) Supõe agora que se retiram, ao acaso, três cartões e se multiplicam os três números obtidos. O que é mais provável: obter um número real ou obter um imaginário puro?
- c) Os dez cartões vão ser colocados em fila sobre numa mesa. Admite que os números são todos diferentes.
- c₁) Quantas filas diferentes se podem formar de modo que os cartões em que está escrito um número imaginário fiquem juntos na fila?
- c₂) Quantas filas diferentes se podem formar de modo que não fiquem cartões com números reais lado a lado na fila?

Cotações

1	2	3	4	5	1.a)	1.b)	2.a)	2.b)	3.a)	3.b)	4	5.a)	5.b)	5.c ₁)	5.c ₂)
10	10	10	10	10	20	15	15	15	15	15	15	10	10	10	10

Teste de avaliação 1

Grupo I

1. (D)

$$\begin{aligned} P[\overline{A} \cup (A \cap \overline{B})] &= P[(\overline{A} \cup A) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] = P[\Omega \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] = \\ &= P[(\overline{A} \cup \overline{B})] = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

2. (C)

A proposição I é falsa; considera, por exemplo, no espaço $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, os acontecimentos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 4\}$; tem-se $P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ e, no entanto, A e B não são acontecimentos contrários.

A proposição II é falsa; considera, por exemplo, no espaço $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, os acontecimentos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$; tem-se $A \cup B = \Omega$ e, portanto, $P(A \cup B) = 1$; no entanto, A e B não são acontecimentos contrários.

A proposição III é verdadeira, o que decorre do facto de dois acontecimentos contrários serem incompatíveis.

3. (B)

O algarismo das dezenas de milhar não pode ser 0 e o algarismo das unidades tem de ser 1, 3, 5, 7 ou 9; então, os algarismos 0 têm de ocupar duas de três posições possíveis.

Existem $9 \times 1 \times 1 \times 9 \times 5 + 9 \times 1 \times 9 \times 1 \times 5 + 9 \times 9 \times 1 \times 1 \times 5 = 9 \times 9 \times 5 \times {}^3C_2$ nas condições pedidas.

$$9 \times 9 \times 5 \times {}^3C_2 = 1215$$

4. (C)

$$\frac{{}^{1000}A_{900}}{{}^{1000}C_{100}} = \frac{{}^{1000}C_{900} \times 900!}{{}^{1000}C_{100}} = \frac{{}^{1000}C_{100} \times 900!}{{}^{1000}C_{100}} = 900!$$

5. (A)

$$P(A|\overline{B}) = 0,2 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = 0,2 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap \overline{B})}{0,5} = 0,2 \Leftrightarrow P(A \cap \overline{B}) = 0,1$$

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = 0,4 - 0,1 = 0,3$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,3 = 0,6$$

Grupo II

1. a) ${}^{12}C_6 \times {}^6A_4 = 332\,640$

b) $3 \times 4 \times {}^8C_6 = 2016$

2. a) $4 \times 5 \times 2 = 5760$

b) $\frac{7 \times 2 \times 2}{9!} = \frac{1}{18}$

3. **a₁)** ${}^{20}C_6 \times {}^{14}C_6 \times 1 = 116396280$ **a₂)** $\frac{1}{{}^{20}C_8} = \frac{1}{125970}$

b) ${}^8A_2 \times {}^{18}A_4 = 4112640$

4. $1 + n + n + 1 = 40 \Leftrightarrow n = 19$

A linha seguinte é a que contém os elementos da forma ${}^{20}C_p$ e $\sum_{p=0}^{20} {}^{20}C_p = 2^{20} = 1048576$.

5.
$$\left(\frac{2}{x} + x^2\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} {}^{12}C_k \left(\frac{2}{x}\right)^{12-k} (x^2)^k = \sum_{k=0}^{12} {}^{12}C_k \times 2^{12-k} \times x^{-12+k} \times x^{2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{12} {}^{12}C_k \times 2^{12-k} \times x^{-12+3k}$$

O termo que não depende de x é o termo em que $-12 + 3k = 0$.

$$-12 + 3k = 0 \Leftrightarrow k = 4$$

O termo pedido é ${}^{12}C_4 \times 2^8 = 126720$.

6. No contexto descrito, $P(B|A)$ é a probabilidade de a soma dos três números saídos ser um número ímpar, sabendo que os três números saídos são iguais. Dado que os números são iguais, as bolas retiradas têm de ser bolas com o número 3 e, como $3 + 3 + 3 = 9$, conclui-se que a probabilidade pedida é igual a 1.

7. Seja C : «ter computador» e seja T : «ter tablet».

Tem-se $P(C) = \frac{3}{4}$, $P(T|C) = \frac{2}{3}$ e $P(\bar{C} \cap \bar{T}) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

Pretende-se calcular $P(C|T)$.

$$P(T|C) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(T \cap C)}{P(C)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(T \cap C)}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(T \cap C) = \frac{1}{2}$$

$$P(\bar{C} \cap \bar{T}) = \frac{1}{20} \Leftrightarrow P(\overline{C \cup T}) = \frac{1}{20} \Leftrightarrow P(C \cup T) = \frac{19}{20}$$

$$P(C \cup T) = \frac{19}{20} \Leftrightarrow P(C) + P(T) - P(C \cap T) = \frac{19}{20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} + P(T) - \frac{1}{2} = \frac{19}{20} \Leftrightarrow P(T) = \frac{7}{10}$$

$$\text{Então, } P(C|T) = \frac{P(C \cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{10}} = \frac{5}{7}.$$

8. Para que a soma dos números das faces concorrentes no vértice A seja um número ímpar, a soma das três faces não numeradas tem de ser um número par. Para que isso aconteça, ou os três números são pares, ou um número é par e os outros dois são ímpares.

Para a primeira opção existem 4A_3 possibilidades e, para a segunda, existem $4 \times 3 \times {}^3A_2$ possibilidades.

Portanto, o número de maneiras de se numerar as restantes faces, nas condições pedidas é ${}^4A_3 \times 4! + 4 \times 3 \times {}^3A_2 \times 4! = 2304$.

9. Para ganhar exatamente um ponto, o jogador tem de retirar duas bolas com a mesma cor numa jogada e duas bolas com cor diferente na outra.

Seja A : «as bolas têm a mesma cor» e seja B : «o número saído no dado é maior do que 4».

Calculemos a probabilidade de tirar duas bolas com a mesma cor:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B}) = \\ = \frac{2}{6} \times \left(\frac{6}{8} \times \frac{6}{8} + \frac{2}{8} \times \frac{2}{8} \right) + \frac{4}{6} \times \left(\frac{{}^6C_2}{{}^8C_2} + \frac{{}^2C_2}{{}^8C_2} \right) = \frac{33}{56}$$

Então, a probabilidade pedida é $\frac{33}{56} \times \left(1 - \frac{33}{56} \right) \times 2 = \frac{759}{1568}$, ou seja, é, aproximadamente, 0,484.

Teste de avaliação 2

Grupo I

1. (B)

Para concluir o pretendido, a sucessão (v_n) tem de tender para $+\infty$. Tem-se:

$$\lim \left(\frac{1}{\pi} \right)^n = 0; \lim (\pi - 1)^n = +\infty; \lim \frac{\pi n}{n+1} = \pi; \lim \frac{\pi - n^2}{n} = -\infty.$$

Portanto, $v_n = (\pi - 1)^n$.

2. (C)

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ e é contínua para $x = 1$ se e só se $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \sqrt{4+k}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 4$$

$$\sqrt{4+k} = 4 \Leftrightarrow 4+k = 16 \Leftrightarrow k = 12$$

3. (B)

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)^2(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$+$	0

O gráfico tem um único ponto de inflexão, que tem abcissa -2.

4. (A)

A linha que contém os elementos da forma ${}^{1000}C_p$ tem 1001 elementos. Os elementos menores ou iguais a ${}^{1000}C_{10}$ são os números da forma ${}^{1000}C_p$ com $p = 0, 1, 2, \dots, 10$ ou com $p = 9990, 9991, 9992, \dots, 1000$.

Portanto, o número de elementos maiores do que ${}^{1000}C_{10}$ é $1001 - 2 \times 11 = 979$.

5. (C)

O produto obtido é zero se sair zero em pelo menos um dos lançamentos. Vamos recorrer ao acontecimento contrário, que se realiza sempre que nenhum dos números saídos é zero.

A probabilidade pedida é $1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{91}{216}$.

Grupo II

1. Dado que $\lim(3^{-n}) = \lim\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, a sucessão (u_n) é convergente desde que a sucessão (v_n) seja convergente.

$$\lim \frac{3n+1}{\sqrt{n^2+2}} = \lim \frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{1+\left(\frac{2}{n^2}\right)}} = \lim \frac{3+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n^2}\right)}} = \frac{3}{\sqrt{1+0}} = 3$$

Portanto, a sucessão (u_n) é convergente e $\lim u_n = 3$.

2.

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2}{x^2+3} = f(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-\sqrt{x}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-x}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x+\sqrt{x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dado que existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, a função é contínua para $x = 1$.

- b) A função é contínua em $[-2, 2]$; assim, o teorema de Weierstrass permite concluir que a função atinge mínimo e máximo relativos nesse intervalo.

c) $\left(\frac{2x^2}{x^2+3}\right)' = \frac{4x(x^2+3)-2x^2 \times 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{12x}{(x^2+3)^2}$; $f'(x) = 0 \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow x = 0$;

f é decrescente em $]-\infty, 0]$ e é crescente em $[0, 1]$; $f(0) = 0$ é mínimo relativo e $f(1) = \frac{1}{2}$ é máximo relativo.

$$\left(\frac{12x}{(x^2+3)^2}\right)' = 12 \frac{1 \times (x^2+3)^2 - x \times 2 \times 2x(x^2+3)}{(x^2+3)^4} = 12 \frac{x^2+3-4x^2}{(x^2+3)^3} = 12 \frac{3-3x^2}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(x) = 0 \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[-1, 1]$; o ponto de abcissa -1 é ponto de inflexão.

A função é contínua em $]-\infty, 1]$ e, portanto, não existem assíntotas verticais;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$
; assim, a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal.

$$d) \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x-1} \right)' = \frac{\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)(x-1) - (x - \sqrt{x}) \times 1}{(x-1)^2}$$

$$m = f'(4) = \frac{\left(1 - \frac{1}{4} \right) \times 3 - (4-2) \times 1}{3^2} = \frac{\frac{3}{4} - 2}{9} = \frac{1}{36} \qquad f(4) = \frac{4 - \sqrt{4}}{3} = \frac{2}{3}$$

A equação $y - \frac{2}{3} = \frac{1}{36}(x - 4)$ define a reta tangente ao gráfico no ponto de abscissa 4.

A equação reduzida dessa reta é $y = \frac{1}{36}x + \frac{5}{9}$.

$$3. \quad h'(3) = \frac{f(3)}{3^2 + 1} = \frac{0}{10} = 0; \quad h''(x) = \left(\frac{f(x)}{x^2 + 1} \right)' = \frac{f'(x) \times (x^2 + 1) - f(x) \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$h''(3) = \frac{f'(3) \times 10 - f(3) \times 6}{100} = \frac{f'(3) \times 10 - 0 \times 6}{100} = \frac{f'(3)}{10}; \text{ como a função } f \text{ é decrescente numa vizinhança de 3, conclui-se que } f'(3) < 0.$$

Portanto, h é duas vezes diferenciável em 3, $h'(3) = 0$ e $h''(3) < 0$, de onde se conclui que a função h atinge um máximo relativo para $x = 3$.

4. Seja h a função definida por $h(x) = f(x) - f(x+b)$; a função f é contínua em $[0, b]$ e, portanto, a função h também é contínua em $[0, b]$.

$$h(0) = f(0) - f(0+b) = f(0) - f(b); \quad h(b) = f(b) - f(b+b) = f(b) - f(2b) = f(b) - f(0).$$

Como $f(0) \neq f(b)$, conclui-se que $h(0)$ e $h(b)$ têm sinais contrários.

Então, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que a função h tem pelo menos um zero em $]0, b[$ e, dado que $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - f(x+b) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(x+b)$, tem-se que $\exists c \in]0, b[: f(c) = f(c+b)$.

5. Sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$ e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx+b)) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx-b)) = \lim_{y=-x, y \rightarrow +\infty} (f(-y) - (-my-b)) =$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} (-f(y) + (my+b)) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} (f(y) - (my+b)) = 0$$

Então, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx-b)) = 0$ de onde se conclui que a reta de equação $y = mx - b$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

6. O segmento de reta definido por quaisquer dois vértices do polígono é uma diagonal ou é um lado. Seja n o número de vértices do polígono. Recorrendo ao acontecimento contrário e tendo em consideração que o número de lados do polígono é igual ao número de vértices, a probabilidade de que os dois vértices definam uma diagonal é: $1 - \frac{n}{n C_2}$.

$$1 - \frac{n}{n C_2} = 0,99 \Leftrightarrow \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = 0,01 \Leftrightarrow \frac{2}{n-1} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow 200 = n-1 \Leftrightarrow n = 201$$

O polígono tem 201 vértices.

Teste de avaliação 3

Grupo I

1. (B)

$$21000 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)^7 \approx 31576$$

2. (B)

$$\lim(x_n) = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e; \text{ então, } \lim y_n = 1 - \ln(e) = 1 - 1 = 0.$$

3. (A)

$$\begin{aligned} \log_c\left(\frac{b}{ac^2}\right) &= \log_c(b) - \log_c(ac^2) = \log_c(b) - \log_c(a) - \log_c(c^2) = \log_c\left(\frac{b}{a}\right) - 2 = \\ &= \frac{1}{\log_c\left(\frac{a}{b}\right)} - 2 = -\frac{1}{3} - 2 = -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

4. (C)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_2(x)) = 2^{\log_2(x)+1} = 2^{\log_2(x)} \times 2^1 = x \times 2 = 2x$$

5. (C)

$$\text{Recorrendo ao acontecimento contrário, } 8! - 7! \times 2 = 30240.$$

Grupo II

1.

a) O ponto A tem coordenadas $(0, f(0)) = (0, 6)$; portanto, $\overline{OA} = 6$.

Então, $\overline{OC} = 5$ e, portanto, as coordenadas do ponto B são $(5, 6)$.

$$g(5) = 6 \Leftrightarrow 2 + 2\log_a(5) = 6 \Leftrightarrow \log_a(5) = 2 \Leftrightarrow a^2 = 5$$

Dado que $a > 1$, conclui-se que $a = \sqrt{5}$.

$$\text{b) } f(x) = y \Leftrightarrow 7e^{\frac{x}{4}} - 1 = y \Leftrightarrow e^{\frac{x}{4}} = \frac{y+1}{7} \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \ln\left(\frac{y+1}{7}\right) \Leftrightarrow x = 4\ln\left(\frac{y+1}{7}\right)$$

$$D_{f^{-1}} =]-1, +\infty[, D'_{f^{-1}} = \mathbb{R} \text{ e } f^{-1}(x) = 4\ln\left(\frac{x+1}{7}\right)$$

2.

$$\text{a) } f(5) = \log_2(24) - \log_2(3) = \log_2\left(\frac{24}{3}\right) = \log_2(8) = 3$$

$$\text{b) } g(x) = h(x) \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^{3-x} + 6 \Leftrightarrow 2 \times 2^x = \frac{8}{2^x} + 6 \Leftrightarrow 2y = \frac{8}{y} + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 6y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 4 \Leftrightarrow \underbrace{2^x = -1}_{\text{equação impossível}} \vee 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

O ponto A tem abscissa igual a 2.

A ordenada do ponto B é $g(0) = 2$ e a ordenada do ponto C é $h(0) = 14$.

Então, a área do triângulo é $\frac{(14-2) \times 2}{2} = 12$ (u.a.).

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) \geq -1 &\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) - \log_2(8 - x) \geq -1 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) + 1 \geq \log_2(8 - x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) + \log_2(2) \geq \log_2(8 - x) \Leftrightarrow \log_2(2x^2 - 2) \geq \log_2(8 - x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 2 \geq 8 - x \wedge x^2 - 1 > 0 \wedge 8 - x > 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 10 \geq 0 \wedge x \in]-\infty, -1[\cup]1, 8[\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x \leq -\frac{5}{2} \vee x \geq 2\right) \wedge x \in]-\infty, -1[\cup]1, 8[\\ \text{C.S.} &= \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup [2, 8[\end{aligned}$$

3.

a) A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; portanto, só a reta de equação $x = 0$ poderá ser assíntota vertical.

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} ((x-1)\ln(x)) = -1 \times (-\infty) = +\infty$, conclui-se que a reta de equação $x = 0$ é assíntota ao gráfico da função.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - x - 1) = 0 + \infty - 1 = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x-1)\ln(x)) = +\infty \times (+\infty) = +\infty$; portanto, não existem assíntotas horizontais.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - x - 1}{x} \stackrel{0}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x} - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$\text{c) } (e^{2x} - x - 1)' = (2x)'e^{2x} - 1 - 0 = 2e^{2x} - 1$$

$$m = 2e^{2(-\ln(2))} - 1 = 2(e^{\ln(2)})^{-2} - 1 = 2 \times 2^{-2} - 1 = 2 \times \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$f(-\ln(2)) = e^{-2\ln(2)} + \ln(2) - 1 = 2^{-2} + \ln(2) - 1 = \ln(2) - \frac{3}{4}$$

Uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $-\ln(2)$ é

$$y - (\ln(2) - \frac{3}{4}) = -\frac{1}{2} \times (x + \ln(2)).$$

$$\text{A equação reduzida dessa reta é } y = -\frac{1}{2}x + \ln(\sqrt{2}) - \frac{3}{4}.$$

$$\text{4. } M(xE) = M(E) + 1,5 \Leftrightarrow \frac{\log(xE) - 5,24}{1,44} = \frac{\log(E) - 5,24}{1,44} + 1,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log(xE) - \log(E) = 1,5 \times 1,44 \Leftrightarrow \log(x) + \log(E) - \log(E) = 2,16 \Leftrightarrow$$

$$\log(x) = 2,16 \Leftrightarrow x = 10^{2,16}$$

$$x \approx 145$$

A diferença de 1,5 graus de magnitude corresponde a uma libertação de energia 145 vezes superior.

5. O número de retas definidas pelos pontos assinalados é ${}^8C_2 = 28$; existem ${}^{28}C_2$ maneiras de escolher duas dessas retas e, dado que há quatro retas paralelas a cada uma das diagonais, existem 4C_2 maneiras de escolher duas retas paralelas a cada uma das diagonais. Portanto, a probabilidade pedida é $\frac{2 \times {}^4C_2}{{}^{28}C_2} = \frac{2}{63}$.

Teste de avaliação 4

Grupo I

1. (B)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+1} \right)^{2n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \right)^n \right)^2 = \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1-\frac{2}{n} \right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n} \right)^n} \right)^2 = \left(\frac{e^{-2}}{e} \right)^2 = (e^{-3})^2 = e^{-6}$$

2. (C)

$g'(x) = (\ln(e^x + 1))' = (e^x + 1)' \times \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1}$; o declive da reta tangente no ponto de abscissa a

é igual a $g'(a)$ e, dado que as retas são paralelas, têm o mesmo declive.

$$g'(a) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{e^a}{e^a + 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3e^a = e^a + 1 \Leftrightarrow e^a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow a = -\ln(2)$$

3. (C)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} \right) = f'(1) \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1) \times (\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1} = \\ &= \left(2^{-1} + \log_{\frac{1}{2}}(1 + 1) \right) \times \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1) = \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \times 2 = -1 \end{aligned}$$

4. (C)

As opções (A) e (D) devem ser rejeitadas, pois definem funções que tomam valores negativos (a primeira em $]-\infty, -1[$ e a segunda em $]-\infty, 0[$) e, portanto, as funções de que são as derivadas não são crescentes em todo o domínio.

A opção (B) deve ser rejeitada pois $(e^x(x^2 + 1))' = e^x(x^2 + 1) + e^x \times 2x = e^x(x + 1)^2$ e, portanto, o gráfico da função não tem pontos de inflexão, pois a segunda derivada não muda de sinal.

A expressão da opção (C) define a função derivada de uma função crescente, pois só toma valores positivos, e cujo gráfico tem um único ponto de inflexão, no ponto de abscissa 0.

5. (A)

Como o desenvolvimento tem 13 termos, sabemos que $n=12$ e, portanto, k é o coeficiente do termo de grau 12. Dado que $x^{12} = (x^4)^3$, o termo de grau 12 é ${}^{12}C_9(x^4)^3(-2)^9 = -112\,640x^{12}$.

Grupo II

1.

a) A função é contínua em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$; portanto, só a reta de equação $x=0$ pode ser assíntota vertical ao gráfico da função.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [x(1 - e^{\frac{1}{x}})] = [0 \times (1 - e^{-\infty})] = 0 \times (1 - 0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(x) - \ln(x+1)] = +\infty - \ln(1) = +\infty - 0 = +\infty$$

A reta de equação $x=0$ é assíntota ao gráfico da função pois $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 - e^{\frac{1}{x}})}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{\frac{1}{x}}) = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(1 - e^{\frac{1}{x}})] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y = \frac{1}{x}} \frac{1 - e^y}{y} = - \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y} = -1$$

A reta de equação $y=-1$ é assíntota ao gráfico da função f em $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{x} = \frac{\ln(1)}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x) - \ln(x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1}\right] = \ln(1) = 0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico da função f em $+\infty$.

$$\text{b) } f(x) \leq \frac{x}{2} \wedge x \in]-\infty, 0[\Leftrightarrow x(1 - e^{\frac{1}{x}}) \leq \frac{x}{2} \wedge x \in]-\infty, 0[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{\frac{1}{x}} \geq \frac{1}{2} \wedge x \in]-\infty, 0[\Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2} \wedge x \in]-\infty, 0[\Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \wedge x \in]-\infty, 0[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq x \ln\left(\frac{1}{2}\right) \wedge x \in]-\infty, 0[\Leftrightarrow 1 \geq -x \ln(2) \wedge x \in]-\infty, 0[\Leftrightarrow -\frac{1}{\ln(2)} \leq x \wedge x \in]-\infty, 0[$$

$$\text{C.S.} = \left[-\frac{1}{\ln(2)}, 0\right[$$

2.

$$\text{a) } I(0) = a$$

$$I(20) = \frac{a}{2} \Leftrightarrow ae^{-20b} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow e^{-20b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -20b = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow b = \frac{\ln(2)}{20}$$

$$b \approx 0,03$$

$$\text{b)} \frac{I(x+2)}{I(x)} = \frac{ae^{-0,05(x+2)}}{ae^{-0,05x}} = e^{-0,05x-0,1+0,05x} = e^{-0,1}$$

$$e^{-0,1} \approx 0,90$$

Quando a profundidade aumenta 2 metros, a intensidade da luz diminui 10%.

3.

$$\text{a)} P_0 = \frac{100}{1+A \times e^0} \Leftrightarrow P_0 = \frac{100}{1+A} \Leftrightarrow 1+A = \frac{100}{P_0} \Leftrightarrow A = \frac{100-P_0}{P_0}$$

b) Se $P_0 = 100$, tem-se $A = 0$ e, portanto, a população é constante.

$$\text{c)} \left(\frac{100}{1+Ae^{-\frac{4t}{5}}} \right)' = \frac{0 - 100 \times A \times \left(-\frac{4}{5}\right) \times e^{-\frac{4t}{5}}}{\left(1+Ae^{-\frac{4t}{5}}\right)^2} = \frac{1}{5} \times \frac{100}{1+Ae^{-\frac{4t}{5}}} \times \frac{4Ae^{-\frac{4t}{5}}}{1+Ae^{-\frac{4t}{5}}} =$$

$$= \frac{1}{125} \times P(t) \times \frac{100 + 100Ae^{-\frac{4t}{5}} - 100}{1+Ae^{-\frac{4t}{5}}} = \frac{1}{125} \times P(t) \times \frac{100 \left(1+Ae^{-\frac{4t}{5}}\right) - 100}{1+Ae^{-\frac{4t}{5}}} =$$

$$= \frac{1}{125} \times P(t) \times \left(\frac{100 \left(1+Ae^{-\frac{4t}{5}}\right)}{1+Ae^{-\frac{4t}{5}}} - \frac{100}{1+Ae^{-\frac{4t}{5}}} \right) = \frac{1}{125} \times P(t) \times (100 - P(t))$$

d) Para $P_0 = 10$, tem-se $A = 9$.

Vamos determinar $P''(t)$ recorrendo à expressão de $P'(t)$ obtida na alínea c).

$$P''(t) = \frac{1}{125} [P(t)(100 - P(t))]' = \frac{1}{125} [P'(t)(100 - P(t)) - P(t)P'(t)] =$$

$$= \frac{1}{125} P'(t)(100 - 2P(t))$$

$$P''(t) = 0 \Leftrightarrow P'(t) = 0 \vee 100 - 2P(t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{P(t) = 0 \vee P(t) = 100 \vee P(t) = 50}_{\text{condição impossível}}$$

Atendendo a que $\forall t, 0 < P(t) < 100$, conclui-se que $\forall t, P'(t) > 0$.

Então, $P''(t) > 0$ se $P(t) < 50$ e $P''(t) < 0$ se $P(t) > 50$.

A taxa instantânea é máxima no instante t para o qual $P(t) = 50$.

$$P(t) = 50 \Leftrightarrow \frac{100}{1+9e^{-\frac{4t}{5}}} = 50 \Leftrightarrow 1+9e^{-\frac{4t}{5}} = 2 \Leftrightarrow e^{-\frac{4t}{5}} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{4}{5}t = \ln(9) \Leftrightarrow t = \frac{5}{4}\ln(9)$$

$$t \approx 2,45$$

A taxa instantânea foi máxima em junho de 2012.

4. A reta r passa nos pontos $A(a, f(a))$ e $B(2a, 0)$.

O vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(a, -f(a))$ e, portanto, o declive da reta r é igual a $-\frac{f(a)}{a}$.

Então, $f'(a) = -\frac{f(a)}{a}$.

Como $g'(x) = x'f(x) + xf'(x) = f(x) + xf'(x)$, tem-se:

$$g'(a) = f(a) + af'(a) = f(a) + a\left(-\frac{f(a)}{a}\right) = f(a) - f(a) = 0$$

5.

$$\text{a)} \quad P(\bar{A} | B) = 1 - P(A | B) \Leftrightarrow P(\bar{A} | B) + P(A | B) = 1 \Leftrightarrow \frac{P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)}{P(B)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P[(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)]}{P(B)} = 1 \Leftrightarrow \frac{P[(\bar{A} \cup A) \cap B]}{P(B)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P[\Omega \cap B]}{P(B)} = 1 \Leftrightarrow \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \quad (\text{verdade})$$

b) Recorrendo à alínea a), podemos concluir que $P(\bar{A} | \bar{B}) = 1 - P(A | \bar{B}) = 1 - 0,3 = 0,7$

$$P(\bar{A} | \bar{B}) = 0,7 \Leftrightarrow \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = 0,7 \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,4 \times 0,7 \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,28$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,28 = 0,72$$

Teste de avaliação 5

Grupo I

1. (B)

$$f(2) = b \Leftrightarrow \frac{e}{a} = b \Leftrightarrow a = \frac{e}{b}. \text{ Então:}$$

$$\ln(a) = \ln\left(\frac{e}{b}\right) = \ln(e) - \ln(b) = 1 - \ln(b)$$

2. (D)

Dado que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$, tem-se $g(x)\log_2(x) \leq 2g(x) \Leftrightarrow \log_2(x) \geq 2$.

$$\log_2(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2^2 \Leftrightarrow x \geq 4$$

3. (D)

O declive da reta tangente é igual a $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

$$f'(x) = \frac{3(\cos(4x))' \cos^2(4x)}{3} = -4\sin(4x)\cos^2(4x); \text{ assim:}$$

$$m = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. (B)

A frequência é igual ao inverso do período. Como o período é igual a $\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{4\pi} \right)$, a frequência é igual a 2.

5. (A)

O declive da assíntota é igual a $-\frac{1}{2}$ e, portanto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen}(x) + f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Ora, atendendo a que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$, tem-se: $\forall x \in \mathbb{R}^+, -\frac{1}{x} \leq \frac{\text{sen}(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$.

Então, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 0$, pois $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$.

Portanto: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen}(x) + f(x)}{x} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Grupo II**1.**

a) O período positivo mínimo é $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

b) Tem-se $f(x) = -2\cos(\pi x + 1) + 1$.

Portanto, o contradomínio da função f é $[1 - | -2 |, 1 + | -2 |] = [-1, 3]$.

Os maximizantes da função são as soluções da equação $f(x) = 3$.

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 1 - 2\cos(\pi x + 1) = 3 \Leftrightarrow 2\cos(\pi x + 1) = -1 \Leftrightarrow \cos(\pi x + 1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi x + 1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \pi x + 1 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3} - \frac{1}{\pi} + 2k, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{2}{3} - \frac{1}{\pi} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

2.

$$\text{a) } |x(t)| = 1 \Leftrightarrow \left| \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Nos primeiros 10 segundos, a distância do ponto P à origem é igual a 1 nos instantes 1 s, 3 s, 5 s, 7 s e 9 s.

$$\text{b) } x(t) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 1\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{3\pi}{2}\right).$$

4.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } g'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-1-\left(2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-1\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-1-2\times\frac{1}{2}+1}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-1}{h} \stackrel{0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\left[\cos\frac{\pi}{3}\cos h - \sin\frac{\pi}{3}\sin h\right]-1}{h} \stackrel{0}{=} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\left[\frac{1}{2}\cosh - \frac{\sqrt{3}}{2}\sinh\right]-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh-1}{h} - \sqrt{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{h(\cos h+1)} - \sqrt{3} \times 1 = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 h}{h(\cos h+1)} - \sqrt{3} = \\
 &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{h(\cos h+1)} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{\cos h+1} - \sqrt{3} = -1 \times \frac{0}{2} - \sqrt{3} = -\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

b) Dado que as retas são paralelas, os seus declives são iguais.

$$f'(x) = (\sin(2x))' = 2\cos(2x) \text{ e } g'(x) = (2\cos x - 1)' = -2\sin(x)$$

Portanto, sendo a a abcissa dos dois pontos, tem-se $f'(a) = g'(a)$.

$$2\cos(2a) = -2\sin(a) \Leftrightarrow \cos(2a) = -\sin(a) \Leftrightarrow \cos(2a) + \sin(a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2(a) + \sin(a) = 0 \Leftrightarrow \sin(a) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2) \times 1}}{-4} \Leftrightarrow \sin(a) = -\frac{1}{2} \vee \sin(a) = 1$$

Dado que $a \in \left[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, a única solução desta equação é $-\frac{5}{6}\pi$.

As coordenadas do ponto A são $\left(-\frac{5}{6}\pi, f\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right) = \left(-\frac{5}{6}\pi, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

e as coordenadas do ponto B são $\left(-\frac{5}{6}\pi, g\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right) = \left(-\frac{5}{6}\pi, -\sqrt{3}-1\right)$.

5.

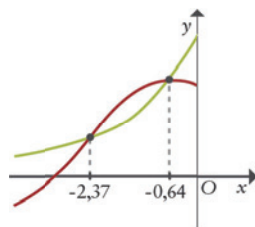
$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{1-\sqrt{1-x}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)(1+\sqrt{1-x})}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+\sqrt{1-x}) = 1 \times 2 = 2
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{a^2x} - 1}{x} \stackrel{0}{=} a^2 \times \lim_{a^2x \rightarrow 0^+} \frac{e^{a^2x} - 1}{a^2x} = a^2 \times 1 = a^2$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe se e somente se $a^2 = 2$, ou seja, se e somente se $a = -\sqrt{2}$ ou $a = \sqrt{2}$

b) Seja x a abscissa do ponto A . Então, a abscissa do ponto B é $x + 2$ e a equação

$$\frac{\sin x}{1 - \sqrt{1 - x}} = \frac{e^{x+2} - 1}{x + 2} \text{ permite resolver o problema.}$$



O valor $-2,37$ não é solução do problema porque $-2,37 + 2$ é um número negativo. Então, a abscissa do ponto A , arredondada às centésimas é $-0,64$ e a abscissa do ponto B , arredondada às centésimas, é $1,36$ ($-0,64 + 2$).

O valor de b arredondado às centésimas é $2,13$.

Teste de avaliação 6

Grupo I

1. (B)

Atendendo a que $x^{15} = (x^3)^5$, o termo de grau 15 é ${}^9C_4(x^3)^5(-2)^4$ e ${}^9C_4(-2)^4 = 2016$.

2. (C)

$${}^nC_{k-1} + {}^nC_k + {}^{n+1}C_{k+1} = {}^{n+1}C_k + {}^{n+1}C_{k+1} = {}^{n+2}C_{k+1}$$

3. (C)

$$w = \frac{2-3i}{a+i} = \frac{(2-3i)(a-i)}{(a+i)(a-i)} = \frac{2a-3ai-2i+3i^2}{a^2+1^2} = \frac{(2a-3)+(-3a-2)i}{a^2+1}$$

w é real se e só se $-3a-2=0$.

$$-3a-2=0 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$$

4. (B)

Um argumento de z^2 é $2 \times \text{Arg}(z)$ e, portanto, há um argumento de z^2 que pertence ao

intervalo $\left] 2 \times \frac{3\pi}{4}, 2\pi \right]$. Como $\left] 2 \times \frac{3\pi}{4}, 2\pi \right] = \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]$, conclui-se que o afixo de z^2 pertence

ao 4.º quadrante. Então, o afixo de $-z^2$ pertence ao 2.º quadrante e, como a adição do número -2 corresponde, geometricamente, à aplicação da translação definida pelo vetor de coordenadas $(-2, 0)$, o afixo de w pertence ao 2.º quadrante.

5. (C)

$$|w| = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3, \text{ portanto, } |z| = \frac{3|w|}{|i||w|^2} = \frac{3 \times 3}{1 \times 3^2} = 1.$$

As opções (A) e (B) podem ser rejeitadas porque apresentam números que não têm módulo igual a 1.

Sendo α um argumento de w , α também é argumento de $3w$ e um argumento de $\bar{w}^2$ é -2α .

Dado que $\frac{\pi}{2}$ é argumento de i , conclui-se que $\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$ é argumento de z .

Como $\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = 3\alpha - \frac{\pi}{2}$, tem-se $z = e^{i\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$. Este número é igual a $e^{i\left(3\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}$ pois

$$3\alpha + \frac{3\pi}{2} - \left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi.$$

Grupo II

1.

$$\begin{aligned} \text{a) } w_1 &= \frac{i^6 + 2e^{i\frac{3\pi}{2}}}{2-i} + \frac{2i\sqrt{3}}{(1-i)^2} = \frac{i^2 - 2i}{2-i} + \frac{2i\sqrt{3}}{1-2i+i^2} = \frac{-1-2i}{2-i} + \frac{2i\sqrt{3}}{1-2i-1} = \\ &= \frac{(-1-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} + \frac{2i\sqrt{3}}{-2i} = \frac{-2-4i-i-2i^2}{2^2+1^2} - \sqrt{3} = \frac{-2-5i+2}{5} - \sqrt{3} = -i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} - i \\ |-\sqrt{3} - i| &= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg}(w_1)) = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ e } \operatorname{Arg}(w_1) \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right[; \text{ então, } \operatorname{Arg}(w_1) = -\frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{Assim, } w_1 = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

b) Seja α um argumento de $(w_2)^n$; $(w_2)^n$ é um número real positivo se e somente se $\exists k \in \mathbb{Z} : \alpha = 2k\pi$.

$$w_2 = -2ie^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

$$(w_2)^n = 2^n e^{i\frac{5n\pi}{3}}; \frac{5n\pi}{3} = 2k\pi \Leftrightarrow n = \frac{6}{5}k.$$

Os números naturais que satisfazem esta equação, sendo k um número inteiro, são os múltiplos naturais de 6, que podem ser representados pela expressão $6m$, com $m \in \mathbb{N}$.

2.

$$\text{a) } |z + 2 - 2i| \leq 4 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{3\pi}{4}$$

b) Dado que o ponto A pertence à parte negativa do eixo real, tem-se $\text{Arg}(w) = \pi$.

O módulo de w é $\overline{OA}$.

A circunferência pode ser definida pela condição $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 16$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

O ponto A é o ponto da circunferência que tem ordenada igual a 0 e abscissa negativa.

$$\begin{aligned}(x+2)^2 + (0-2)^2 &= 16 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 16 - 4 \Rightarrow (x+2)^2 = 12 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x+2 &= -\sqrt{12} \vee x+2 = \sqrt{12} \Leftrightarrow x = -2 - \sqrt{12} \vee x = -2 + \sqrt{12}\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{OA} = 2 + \sqrt{12}$ e $w = (2 + \sqrt{12})e^{i\pi}$.

3.

a) A região do plano definida pela condição $|z_1| \leq |z| \leq |z_2|$ é uma coroa circular determinada pelas circunferências de centro na origem e raios 2 e 4. Essa coroa tem área $16\pi - 4\pi = 12\pi$. Então, a área da região definida pela condição dada é igual a $\frac{1}{4}$ da área desta coroa circular e, portanto, o ângulo determinado pela condição $\text{Arg}(z_2) \leq \text{Arg}(z) \leq \text{Arg}(z_1)$ tem $\frac{\pi}{2}$ radianos de amplitude.

Então, o argumento principal de z_2 é $-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{6}$.

$$z_2 = 4e^{i\frac{5\pi}{6}} = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i$$

b) Dado que z_1 e z_3 são raízes de índice 5 do mesmo número complexo, sabemos que têm módulos iguais e que a diferença dos argumentos é um múltiplo de $\frac{2\pi}{5}$.

Como o afixo de z_3 pertence ao segundo quadrante, o argumento principal de z_3 pertence ao intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. O número da forma $-\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{5}$, com $k \in \mathbb{Z}$, que pertence a esse intervalo é $-\frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{5} = \frac{13\pi}{15}$. Portanto, $z_3 = 4e^{i\frac{13\pi}{15}}$.

4. Tem-se $z^2 - 4z + 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow (z-2)^2 = 2i$

Então, as soluções são os números complexos z tais que $z-2$ é raiz de índice 2 de $2i$.

Ora, $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ e, portanto, as raízes de índice 2 de $2i$ são os números $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

$$z-2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow z = 2 + \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2 + 1 + i = 3 + i$$

$$z-2 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \Leftrightarrow z = 2 + \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2 - 1 - i = 1 - i$$

As soluções da equação são os números $3+i$ e $1-i$.

5.

- a) O produto, quer de dois números reais, quer de dois números imaginários puros, é um número real. Já o produto de um número real não nulo por um número imaginário puro não é um número real (sabemos que é um imaginário puro). Tem-se, então, que a probabilidade pedida é dada por:

$$\frac{{}^4C_2}{{}^4C_2 + {}^6C_2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

- b) Pensemos nos casos favoráveis a que o produto dos três números seja um número real. Há duas hipóteses: ou os três números são reais, ou um número é real e os outros dois são imaginários puros. No primeiro caso, há 4C_3 possibilidades; no segundo caso, há $4 \times {}^6C_2$ possibilidades. Então, a probabilidade de o produto dos três números ser um número real é

$$\text{dada por: } \frac{{}^4C_3 + 4 \times {}^6C_2}{{}^{10}C_3} = \frac{64}{120} = \frac{8}{15}$$

Assim sendo, dado que o produto de números reais e números imaginários puros é sempre um número real ou um número imaginário puro, podemos concluir que é mais provável que o produto seja um número real do que seja um número imaginário puro, pois $\frac{8}{15} > \frac{1}{2}$.

Se tivéssemos começado por calcular a probabilidade de o produto ser um número imaginário puro, consideraríamos as seguintes possibilidades: ou os três números são imaginários puros, ou um número é imaginário puro e os outros dois são números reais. Então, a probabilidade de que o produto dos três números seja um número imaginário puro é dada por:

$$\frac{{}^6C_3 + 6 \times {}^4C_2}{{}^{10}C_3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}, \text{ o que confirma a conclusão que obtivemos acima.}$$

c₁) $5! \times 6! = 86\,400$

- c₂) Entre os cartões que têm números reais tem de existir pelo menos um cartão com um número imaginário puro. Então, os quatro cartões com números reais têm de ocupar quatro dos sete lugares indicados no esquema abaixo, onde a letra I designa um número imaginário puro.

1 2 3 4 5 6 7

Existem, portanto, ${}^7A_4 \times 6! = 604\,800$ filas em que os números reais não estão lado a lado.

Questão de aula 1

30 minutos

Conteúdos em avaliação

- Propriedades das operações de interseção e reunião de conjuntos.
- Leis de De Morgan para conjuntos.
- Propriedades que envolvem o produto cartesiano de conjuntos.

1. Sejam A e B conjuntos contidos num universo U .

Simplifica as expressões:

a) $\overline{A \cap B} \cup A$

b) $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$

c) $(A \cup B) \cap (\overline{B} \cup A)$

2. Sejam A , B e C três conjuntos contidos num universo U .

Mostra que, se $(A \times \overline{C}) \cup (A \times B) = A \times \overline{C}$, então $C \subset \overline{B}$.

3. Sejam A e B dois conjuntos contidos no universo U .

Indica, justificando, o valor lógico da afirmação:

«Se $A \cup B = U$, então $B = \overline{A}$.»

Questão de aula 2

30 minutos

Conteúdos em avaliação

- Princípio geral da multiplicação e princípio geral da adição.
- Arranjos com repetição. Permutações.

1. O Asdrúbal está a responder a um inquérito sobre a qualidade dos serviços da biblioteca, do refeitório, do bar e da reprografia (por esta ordem) da escola.

A classificação deve ser feita com os níveis 1, 2, 3 e 4.

- a) De quantas maneiras pode o Asdrúbal responder ao inquérito:

- a₁) com os níveis todos diferentes?
- a₂) sem níveis 1 e 4?
- a₃) não colocando dois níveis iguais seguidos?
- a₄) com pelo menos um nível 4?

- b) O Asdrúbal já respondeu ao inquérito. A soma dos níveis que atribuiu é superior a 13.

Quantas respostas diferentes existem nestas condições?

2. Considera todos os números de seis algarismos diferentes que se podem escrever com os algarismos de 1 a 6. Quantos destes números:

- a) são múltiplos de 5?
- b) têm o algarismo das centenas de milhar e o algarismo das unidades ambos ímpares?
- c) são pares e superiores a 400 000?
- d) são inferiores a 350 000?

Questão de aula 3

30 minutos

Conteúdos em avaliação

- Arranjos. Combinações.

1. Queremos colocar no quadro ao lado seis botões brancos indistinguíveis e quatro botões de cores diferentes (um verde, outro amarelo, outro vermelho e outro cor-de-rosa).

De quantas maneiras diferentes podem ficar dispostos os botões no tabuleiro, se cada botão for colocado numa única casa e não pudermos colocar mais do que um botão em cada casa?



2. Os 20 alunos da turma Y, 12 rapazes e oito raparigas, vão fazer teste de Matemática.
- a) A professora fez três versões do enunciado do teste: são cinco enunciados da versão 1, sete enunciados da versão 2 e oito enunciados da versão 3. De quantas maneiras podem as três versões do teste ser distribuídas pelos alunos?
- b) O teste tem cinco perguntas de escolha múltipla com as opções A, B, C e D.
O Mário respondeu a três perguntas com a opção A e respondeu às outras duas com duas opções diferentes. Quantas respostas às cinco perguntas de escolha múltipla estão nestas condições?
- c) A «fila da janela» tem seis mesas individuais. De quantas maneiras pode ser ocupada, alternando rapazes e raparigas?
3. No jogo da sueca utiliza-se um baralho de 40 cartas (dez cartas de cada um dos quatro naipes) e chama-se *mão* a um conjunto de dez cartas. Quantas *mãos* têm:
- a) cinco cartas de espadas e cinco cartas de ouros?
- b) cinco cartas de um naipe e cinco cartas de outro?
- c) seis cartas de um naipe e quatro cartas de outro?
- d) pelo menos duas cartas de cada naipe?

Questão de aula 4

30 minutos

Conteúdos em avaliação

- Triângulo de Pascal.
- Binómio de Newton.

1. Considera a linha do triângulo de Pascal que tem 11 elementos.
 - a) Qual é o segundo elemento dessa linha?
 - b) Qual é o maior elemento dessa linha?
 - c) Qual é a soma de todos os elementos da linha anterior?
2. O oitavo e o nono elementos de uma linha do triângulo de Pascal são iguais.
Determina o valor do quarto elemento dessa linha.
3. A soma dos três últimos elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 23 221. Qual é o terceiro elemento da linha seguinte?
4. No desenvolvimento pelo binómio de Newton de $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{12}$ existe um termo cuja parte literal é x^9 .
Determina esse termo.

Questão de aula 5

40 minutos

Conteúdos em avaliação

- Espaços de probabilidade e propriedades da função de probabilidade.

1. Sejam E um conjunto finito e P uma probabilidade definida em $\mathcal{P}(E)$.

Sejam A e $B \in \mathcal{P}(E)$ tais que $P(A) = 0,3$, $P(\bar{B}) = 0,3$ e $P(A \cap B) = 0,2$.

Determina $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

2. Seja Ω o espaço de resultados, finito, associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Indica, justificando, o valor lógico da proposição:

«Se $P(A) + P(B) = 1$, então A e B são acontecimentos contrários.»

3. Sejam E um conjunto finito e P uma probabilidade definida em $\mathcal{P}(E)$.

Sejam A e $B \in \mathcal{P}(E)$.

a) Mostra que $P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{B}) = P(\bar{A}) + P(A \cap \bar{B})$.

b) Utilizando a igualdade anterior, resolve o seguinte problema:

Colocaram-se num saco bolas indistinguíveis ao tato. Todas as bolas estão numeradas com um número natural. Algumas dessas bolas são amarelas.

Considera a experiência que consiste em retirar, ao acaso, uma bola do saco. Admite que:

- a probabilidade de a bola retirada ser amarela é 50% ;
- a probabilidade de o número da bola retirada ser ímpar é 40%;
- a probabilidade de a bola retirada não ser amarela e ter um número par é 20%.

Prova que há pelo menos uma bola amarela com número ímpar no saco.

Questão de aula 6

40 minutos

Conteúdos em avaliação

- Probabilidade. Regra de Laplace.

1. Considera uma grelha quadriculada como a da figura. Nessa grelha vão ser colocadas oito fichas, todas iguais, não mais do que uma por quadrícula.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Supondo que as fichas são colocadas ao acaso, qual é a probabilidade de:

- a) as duas diagonais ficarem preenchidas?
- b) ficarem preenchidas exatamente duas colunas?
- c) ficar preenchida pelo menos uma diagonal?

Apresenta as respostas na forma de fração irredutível.

2. Considera ainda a grelha do exercício 1 e admite agora que se vão colocar na grelha, ao acaso, cinco fichas brancas, uma ficha azul, uma ficha verde e uma ficha rosa, não mais do que uma por quadrícula.

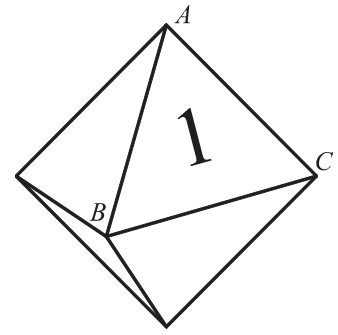
Determina a probabilidade de as fichas coloridas serem colocadas em quadrículas com número par e as quadrículas dos quatro cantos ficarem ocupadas com fichas brancas.

3. O casal Paciência tem dois filhos e o casal Boavida tem três filhos. Num certo dia, os dois casais e os respetivos filhos juntaram-se num jantar e, terminado o jantar, dispuseram-se, lado a lado, ao acaso, para uma fotografia.

- a) Determina a probabilidade de os dois filhos do casal Paciência ficarem, cada um deles, numa das extremidades da fila.
- b) Determina a probabilidade de os dois elementos de cada casal ficarem juntos.

Apresenta a probabilidade na forma de fração irredutível.

4. Na figura está representado um octaedro regular. A face $[ABC]$ do octaedro está numerada com o número 1, como se pode observar na figura.



- a) Escolhendo, ao acaso, três vértices do octaedro, qual é a probabilidade de esses três vértices definirem um plano paralelo ao plano $[ABC]$?
- b) Pretende-se numerar as restantes faces do octaedro com os números de 2 a 8 (um número diferente em cada face).

Supondo que se numeram as faces ao acaso, qual é a probabilidade de que a soma dos números das faces concorrentes no vértice A seja um número par?

Questão de aula 7

40 minutos

Conteúdos em avaliação

- Probabilidade condicionada.
- Acontecimentos independentes.

1. Numa turma com 24 alunos, a probabilidade de um rapaz ter olhos castanhos é $\frac{1}{5}$. Sabendo que nessa turma há três rapazes com olhos castanhos, determina quantos rapazes há nessa turma.

2. Considera uma escola em que:

- 75% dos alunos têm computador;
- $\frac{2}{3}$ dos alunos que têm computador também têm *tablet*;
- 5% dos alunos não têm computador nem têm *tablet*.

Determina a probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, ter *tablet*.

Apresenta o resultado na forma de percentagem.

3. Seja E um espaço de resultados finito e sejam C e D dois acontecimentos ($C \subset E$ e $D \subset E$).

Prova que $P(\overline{C} \cap \overline{D} | D) = P(C | D)$.

4. Lança-se um dado não equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Acerca deste dado, sabe-se que a probabilidade de sair qualquer das faces com número maior do que 4 é o dobro da probabilidade de sair qualquer das outras faces.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «sair um número múltiplo de 3»

B : «sair um número maior do que 3»

Averigua se os acontecimentos A e B são independentes. Justifica.

Questão de aula 8

25 minutos

Conteúdos em avaliação

- Teoremas de comparação.
- Teorema das sucessões encastradas.

1. Seja (v_n) a sucessão de termo geral $v_n = \frac{n+1}{\sqrt{n}}$ e seja (u_n) uma sucessão tal que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + v_n < 1$.

Prova que a sucessão (u_n) não é convergente.

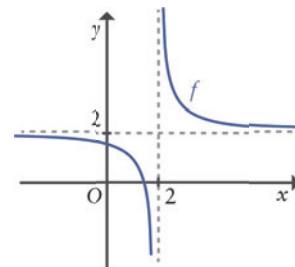
2. Determina, recorrendo ao teorema das sucessões encastradas, o limite da sucessão (u_n)

definida por $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{2n}{k+n^2}$.

3. Seja f a função representada graficamente e sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões tais que $\lim f(u_n) = -\infty$ e $\lim v_n = +\infty$.

Seja (w_n) uma sucessão tal que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq w_n \leq f(v_n)$.

Justifica que a sucessão (w_n) é convergente e indica qual é o seu limite.



Questão de aula 9

25 minutos

Conteúdos em avaliação

- Teorema de Bolzano.

1. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ por $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$.

Sem recorrer à calculadora, justifica que existe, no intervalo $]2, 3[$, pelo menos um objeto cuja imagem por f é igual a 10.

2. Seja a um número real maior do que zero.

Justifica que a função h definida por $h(x) = x^3 - x^2 + x + a^2$ tem pelo menos um zero pertencente ao intervalo $] -a, a[$.

3. Seja k um número real diferente de zero e seja f uma função contínua de domínio $[-|k|, |k|]$ cujo gráfico intersesta a bissetriz dos quadrantes ímpares nos pontos de abcissas $-k$ e k .

Mostra que o gráfico da função f também intersesta a bissetriz dos quadrantes pares.

Questão de aula 10

25 minutos

Conteúdos em avaliação

- Derivada de segunda ordem e aplicações.

1. Seja f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$. Sabe-se que $f'(-1)=0$ e que

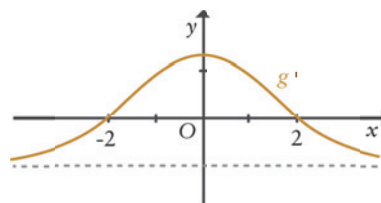
$$f''(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Justifica que a função f atinge um extremo em -1 e indica se esse extremo é um máximo ou é um mínimo relativo.

2. Seja g uma função duas vezes derivável em $\mathbb{R}$.

No referencial ao lado está representada graficamente a função g' .

Quais as conclusões que podes apresentar acerca do sentido das concavidades do gráfico da função g e existência de pontos de inflexão? Justifica.



3. Seja f a função definida por $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

Por processos analíticos, estuda o gráfico da função f quanto ao sentido das concavidades e existência de pontos de inflexão.

Questão de aula 11

25 minutos

Conteúdos em avaliação

- Juros compostos.
- Número e .

1. A Miquelina e o Asdrúbal depositaram, em regime de juros compostos, cada um deles, 12 500 euros.

A Miquelina negociou uma taxa nominal de 2,1%, sendo o juro capitalizado anualmente.

O Asdrúbal aceitou uma taxa nominal que, sendo os juros capitalizados semestralmente, lhe vai permitir acumular 14 169 euros em 6 anos.

- a) Qual é o capital acumulado pela Miquelina se o depósito se prolongar por seis anos?

Apresenta o valor arredondado ao euro.

- b) Qual é a taxa nominal anual que o Asdrúbal aceitou?

Apresenta a taxa em percentagem, arredondada às décimas. Se em cálculos intermédios fizeres arredondamentos, conserva, no mínimo, quatro casas decimais.

2. O António fez um depósito em regime de juros compostos à taxa anual de 1,8%. Decorridos 11 anos foi saber qual era o capital acumulado e o banco informou-o de que dispunha de 18 800 euros.

Determina o capital que o António tinha depositado.

Apresenta o valor arredondado às unidades.

3. Sejam (x_n) e (y_n) as sucessões definidas por $x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ e por $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ e seja (u_n) uma sucessão tal que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq u_n \leq y_n$.

Justifica que a sucessão (u_n) é convergente e determina o seu limite.

Questão de aula 12

40 minutos

Conteúdos em avaliação

- Função exponencial.

1. Resolva as condições seguintes e apresenta o conjunto-solução de cada uma.

a) $4^{1-2x} = \frac{1}{8}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$

c) $3^{x+2} - 4 \times 3^x - 45 = 0$

d) $3^x - 3^{2-x} \leq 8$

2. O carbono-14 é uma substância radioativa.

Seja $m(t) = 3,28e^{-0,12t}$, em que t é o tempo, medido em milénios, decorrido desde um certo instante inicial $t = 0$. A função m dá a massa de carbono-14, em gramas, presente num determinado fóssil, decorridos t milénios depois de um instante inicial.

a) Qual é a massa de carbono -14 presente no fóssil, decorridos 2000 anos depois do instante inicial?

Apresenta o resultado na forma de dízima, com duas casas decimais.

b) Mostra que $\frac{m(t+5,8)}{m(t)}$ é constante. Determina o valor dessa constante arredondado às décimas e interpreta esse valor no contexto descrito.

Questão de aula 13

40 minutos

Conteúdos em avaliação

- Função logarítmica. Logaritmos.

1. Resolva as condições seguintes e apresenta o conjunto-solução de cada uma.

a) $\log_3(2x+3)+1=0$

b) $2\log_2(3-x)\leq 2+\log_2(x)$

c) $\log_9(1-2x)-\frac{1}{2}=\log_3(x)$

d) $\frac{1-\ln(x)}{\log_2(5-x)-1}\geq 0$

2. Seja (u_n) uma progressão geométrica de termos positivos e razão igual a e e seja f a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x)=\ln(\sqrt{x})$.

Considera a sucessão (v_n) definida por $v_n=f(u_n)$.

Prova que a sucessão (v_n) é uma progressão aritmética e indica a sua razão.

Questão de aula 14

45 minutos

Conteúdos em avaliação

- Funções derivadas das funções exponenciais e logarítmicas.
- Limites notáveis.

1. Determina cada um dos seguintes limites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 3\ln(x)}{x - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{x-1})$

2. Seja k um número real e seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x - e^{1-x}}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ k & \text{se } x = 1 \\ \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

- a) Mostra que, qualquer que seja o valor de k , a função não é contínua para $x = 1$.
- b) Caracteriza a função derivada da função f .

Questão de aula 15

30 minutos

Conteúdos em avaliação

- Estudo de uma função.

1. Considera a função f definida por $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$.

Faz o estudo da função f e do seu gráfico, por processos analíticos, sem recorrer à calculadora.

No teu estudo, deves referir os seguintes aspetos:

- domínio da função e existência de zeros;
- equações das assíntotas ao gráfico;
- intervalos de monotonia e extremos.

Questão de aula 16

35 minutos

Conteúdos em avaliação

- Modelos exponenciais.

Na desintegração radioativa, a taxa de variação da massa de isótopo existente num instante t é diretamente proporcional à massa de isótopo existente nesse instante. Designa-se por **semivida** o tempo necessário para que a massa se reduza a metade.

1. O fósforo-32 é um isótopo radioativo. A massa $Q(t)$ existente ao fim de t dias, a partir de uma massa inicial Q_0 , é dada por $Q(t) = Q_0 e^{-0,0462t}$.

- a) Uma amostra continha inicialmente 8 gramas de fósforo. Que massa de fósforo vai conter daqui a 10 dias?

Apresenta o resultado em gramas, arredondado às unidades.

- b) Determina a semivida do fósforo. Apresenta o resultado em dias, arredondado às unidades.

2. O carbono-11 é um isótopo radioativo usado em medicina, na área de imagiologia. A taxa de desintegração $Q'(t)$ da massa $Q(t)$ de carbono-11 existente numa amostra decorridos t minutos é diretamente proporcional a $Q(t)$.

As imagens são recolhidas decorridas cinco semividas depois da amostra do produto contendo carbono-11 ser injetada. Qual é, nesse instante, a percentagem de carbono-11 da amostra que ainda não se desintegrou?

3. Um copo com água acabada de ferver (estando, portanto, à temperatura de 100°C) é deixado a arrefecer numa sala à temperatura ambiente de 25°C . Sabendo que ao fim de 1 minuto e 15 segundos a temperatura da água atinge 87°C , determina ao fim de quanto tempo atingirá a temperatura de 45°C .

Apresenta a resposta em minutos, arredondados à unidade.

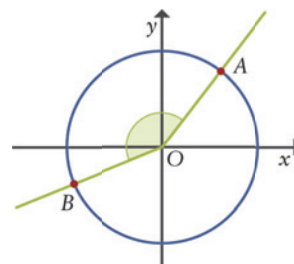
Questão de aula 17

35 minutos

Conteúdos em avaliação

- Fórmulas trigonométricas e limites.

1. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy , a circunferência trigonométrica. Os pontos A e B pertencem à circunferência. O ponto A tem abscissa $\frac{3}{5}$ e o ângulo AOB tem $\frac{5\pi}{6}$ radianos de amplitude.



Determina o valor exato da ordenada do ponto B .

2. Considera a função f definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \sin(2x) + x$.

a) Estuda o gráfico de f quanto à existência de assíntotas.

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x}{3}\right)}{5x}$.

c) Mostra que, se $a+b=\pi$, também $f(a)+f(b)=\pi$.

d) Seja $h(x) = f(x) - x$. Determina o valor exato de $h(\theta)$ sabendo que $\cos(4\theta) = \frac{1}{3}$ e que

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right].$$

Questão de aula 18

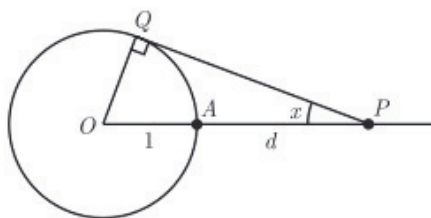
35 minutos

Conteúdos em avaliação

- Funções trigonométricas.
- Derivadas de funções trigonométricas.

1. Na figura está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1. O ponto A pertence à circunferência e o ponto P desloca-se na semirreta $\overrightarrow{OA}$, sendo sempre $\overline{OP} > 1$. Para cada posição do ponto P , o ponto Q é um ponto da circunferência tal que a reta PQ é tangente à circunferência e d é a distância de P a A .

Seja x a amplitude, em radianos, do ângulo OPQ ($x \in]0, \frac{\pi}{2}[$) e seja f a função, de domínio $]0, \frac{\pi}{2}[$, definida por $f(x) = \frac{1 - \sin x}{\sin x}$.



- a) Mostra que $d = f(x)$.
- b) Determina o valor de x para o qual $\overline{OP} = 2$.
- c) Prova que, quanto maior é o valor de x , menor é o valor de d .
- d) Mostra que a área do triângulo $[AQP]$ é dada, em função de x , por:

$$A(x) = \frac{2\cos x - \sin(2x)}{4\sin x}$$

- e) Mostra que $A'(x) = \frac{\sin x - \sin x \cos(2x) - 2}{4\sin^2 x}$.

Questão de aula 19

25 minutos

Conteúdos em avaliação

- Operar com números complexos.
- Forma trigonométrica de um número complexo.

1. Escreve na forma $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) o número $\frac{5i^5 - (2+i)^3}{1-2i}$.
2. Seja a um número real. Determina a de modo que o afixo do número $\frac{(2a-i)i-3i}{1-ai}$ pertença à bissetriz do 3.º quadrante e não coincida com a origem.
3. Escreve na forma trigonométrica os números:
 - a) $2i^3$
 - b) $\frac{3e^{i\pi} + i}{i} + \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

Questão de aula 20

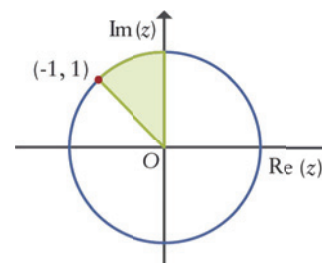
25 minutos

Conteúdos em avaliação

- Representação de conjuntos definidos por condições sobre números complexos.
- Radiciação no conjunto dos números complexos.

1. Sejam $z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ e $z_2 = \rho e^{i\theta}$, com $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in [0, 2\pi[$, dois números complexos.

Determina o conjunto dos valores de ρ e de θ para os quais o afixo do número $(z_1)^2 \times \bar{z}_2$ pertence à região colorida, incluindo a sua fronteira.



2. Os afixos dos números complexos $w_1 = \sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{12}}$ e $w_2 = \sqrt{5}e^{i\frac{-17\pi}{12}}$ são vértices consecutivos de um polígono regular inscrito numa circunferência com centro na origem do referencial.

Determina:

- os números complexos cujos afixos são os restantes vértices desse polígono;
 - o perímetro do polígono.
3. Sejam $w_1 = -1 + i$ e $w_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ dois números complexos. Mostra que existe um número natural n tal que w_1 e w_2 são raízes de ordem n do mesmo número complexo.

Respostas às questões de aula

Questão de aula 1

1.

a) $\overline{A \cap B} \cup A = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup A = \overline{A} \cup (\overline{B} \cup A) = \overline{A} \cup (A \cap \overline{B}) = (\overline{A} \cup A) \cap \overline{B} = U \cap \overline{B} = \overline{B}$

b) $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A \cap B}) = \emptyset$

c) $(A \cup B) \cap (\overline{B} \cup A) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A \cup \emptyset = A$

2. $(A \times \overline{C}) \cup (A \times B) = A \times \overline{C} \Rightarrow A \times (\overline{C} \cup B) = A \times \overline{C} \Rightarrow \overline{C} \cup B = \overline{C} \Rightarrow B \subset \overline{C} \Rightarrow C \subset \overline{B}$

3. A afirmação é falsa.

Sejam, por exemplo, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$.

Tem-se $A \cup B = U$ e, no entanto, $B \neq \overline{A}$, pois $\overline{A} = \{5\}$.

Questão de aula 2

1.

a₁) $4! = 24$

a₂) ${}^2A'_4 = 2^4 = 16$

a₃) $4 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$

a₄) ${}^4A'_4 - {}^3A'_4 = 4^4 - 3^4 = 175$

b) São três as situações que podem ter ocorrido:

- quatro níveis 4 (1 resposta nestas condições)
- três níveis quatro e um nível 2 ou 3 (4×2 respostas nestas condições);
- dois níveis 4 e dois níveis 3 (6 respostas nestas condições).

Há 15 respostas nas condições do enunciado ($1 + 8 + 6$).

2.

a) $5! = 120$

b) ${}^3A_2 \times 4! = 144$

c) Existem $4! \times 2$ números pares com o algarismo das centenas de milhar igual a 4, existem $4! \times 2$ números pares com o algarismo das centenas de milhar igual a 6 e existem $4! \times 3$ números pares com o algarismo das centenas de milhar igual a 5.

Ao todo são 168 números ($4! \times 2 \times 2 + 4! \times 3 = 168$).

d) Satisfazem a condição todos os números cujo algarismo das centenas de milhar é igual a 1 ou 2 e aqueles cujo algarismo das centenas de milhar é igual a 3 com o algarismo das dezenas de milhar inferior a 5 (e diferente de 3).

Ao todo são 168 números ($2 \times 5! + 1 \times 3 \times 4! = 192$).

Questão de aula 3

1. ${}^{12}C_6 \times {}^6A_4 = {}^{12}A_4 \times {}^8C_6 = 332\,640$
2.
 - a) Por exemplo, ${}^{20}C_5 \times {}^{15}C_7 = 99\,768\,240$
 - b) ${}^5C_3 \times {}^3A_2 = 60$
 - c) $2 \times {}^{12}A_3 \times {}^8A_3 = 887\,040$
3.
 - a) ${}^{10}C_5 \times {}^{10}C_5 = 63\,504$
 - b) ${}^{10}C_5 \times {}^{10}C_5 \times {}^4C_2 = 381\,024$
 - c) ${}^{10}C_6 \times {}^{10}C_4 \times {}^4A_2 = 529\,200$
 - d) $\left({}^{10}C_3\right)^2 \times \left({}^{10}C_2\right)^2 \times {}^4C_2 + {}^{10}C_4 \times \left({}^{10}C_2\right)^3 \times 4 = 251\,505\,000$

Questão de aula 4

1.
 - a) 10
 - b) ${}^{10}C_5 = 252$
 - c) $2^9 = 512$
2. ${}^nC_7 = {}^nC_8 \Rightarrow n = 15$, portanto, o número pedido é ${}^{15}C_3 = 455$.
3. A soma dos três últimos elementos de uma linha é igual à soma dos três primeiros. Portanto:
 ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 = 23\,221 \Leftrightarrow {}^nC_1 + {}^nC_2 = 23\,220 \Leftrightarrow {}^{n+1}C_2 = 23\,220$
O terceiro elemento da linha seguinte é 23 220.
4.
$$\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} {}^{12}C_k (x^2)^{12-k} \left(\frac{2}{x}\right)^k$$
$${}^{12}C_k (x^2)^{12-k} \left(\frac{2}{x}\right)^k = {}^{12}C_k \times 2^k \times x^{24-2k-k} = {}^{12}C_k \times 2^k \times x^{24-3k}$$

Tem-se: $24 - 3k = 9 \Leftrightarrow k = 5$

Então, o termo pedido é ${}^{12}C_5 \times 2^5 \times x^9 = 25\,344$.

Questão de aula 5

$$1. P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = \\ = 1 - (0,3 + 0,7 - 0,2) = 1 - 0,8 = 0,2$$

2. A proposição é falsa.

Sejam, por exemplo, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 5\}$.

Tem-se $P(A) = \frac{3}{5}$ e $P(B) = \frac{2}{5}$ e, portanto, $P(A) + P(B) = 1$. No entanto, A e B não são acontecimentos contrários, pois $\overline{A} = \{4, 5\}$.

3.

$$a) P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{B}) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cup B) + P(\overline{B}) = \\ = P(\overline{A}) + P(B) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + 1 - P(\overline{A} \cup B) = \\ = P(\overline{A}) + P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A}) + P(A \cap \overline{B})$$

b) Seja A o acontecimento «a bola retirada é amarela» e seja B o acontecimento «o número da bola retirada é par».

Tem-se $P(A) = 0,5$, $P(\overline{B}) = 0,4$ e $P(\overline{A} \cap B) = 0,2$. Então:

$$P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{B}) = P(\overline{A}) + P(A \cap \overline{B}) \Leftrightarrow 0,2 + 0,4 = 0,5 + P(A \cap \overline{B}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,2 + 0,4 = 0,5 + P(A \cap \overline{B}) \Leftrightarrow 0,1 = P(A \cap \overline{B})$$

Ora $P(A \cap \overline{B})$ é a probabilidade de a bola retirada ser amarela e ter um número ímpar; como essa probabilidade é maior do que 0, podemos concluir que há pelo menos uma bola amarela com número ímpar no saco.

Questão de aula 6

$$1. a) \frac{1}{{}^{16}C_8} = \frac{1}{12870}$$

$$b) \frac{{}^4C_2}{{}^{16}C_8} = \frac{6}{12870} = \frac{1}{2145}$$

$$c) \frac{2 \times {}^{12}C_4 - 1}{{}^{16}C_8} = \frac{989}{12870}$$

$$2. \frac{{}^6A_3 \times 9}{{}^{16}C_5 \times {}^{11}A_3} = \frac{1}{4004}$$

$$3. a) \frac{2 \times 7!}{9!} = \frac{1}{36}$$

$$b) \frac{7! \times 2 \times 2}{9!} = \frac{1}{18}$$

$$4. a) \frac{1}{{}^6C_3} = \frac{1}{20}$$

$$b) \frac{3! \times 4! + 3 \times 3 \times {}^4A_2 \times 4!}{7!} = \frac{19}{35}$$

Questão de aula 7

1. Seja C : «ter os olhos castanhos» e seja R : «ser rapaz».

Tem-se $P(C|R) = \frac{1}{5}$ e $P(R \cap C) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

$$P(C|R) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{8}}{P(R)} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(R) = \frac{5}{8}.$$

Dado que $\frac{5}{8} \times 24 = 15$, concluímos que há 15 rapazes na turma.

2. Seja C : «ter computador» e seja T : «ter tablet».

Tem-se $P(C) = \frac{3}{4}$, $P(T|C) = \frac{2}{3}$ e $P(\bar{C} \cap \bar{T}) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

$$P(T|C) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(T \cap C)}{P(C)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(T \cap C)}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(T \cap C) = \frac{1}{2}$$

$$P(\bar{C} \cap \bar{T}) = \frac{1}{20} \Leftrightarrow P(\overline{C \cup T}) = \frac{1}{20} \Leftrightarrow P(C \cup T) = \frac{19}{20}$$

$$P(C \cup T) = \frac{19}{20} \Leftrightarrow P(C) + P(T) - P(C \cap T) = \frac{19}{20} \Leftrightarrow \frac{3}{4} + P(T) - \frac{1}{2} = \frac{19}{20} \Leftrightarrow P(T) = \frac{7}{10}$$

$$P(T) = 70\%$$

$$\begin{aligned} 3. P(\overline{(C \cap D)} | D) &= P((C \cup \bar{D}) | D) = \frac{P((C \cup \bar{D}) \cap D)}{P(D)} = \\ &= \frac{P((C \cap D) \cup (D \cap \bar{D}))}{P(D)} = \frac{P((C \cap D) \cup \emptyset)}{P(D)} = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = P(C|D) \end{aligned}$$

4. Seja x a probabilidade de cada uma das faces com número menor ou igual a 4.

Tem-se $x + x + x + x + 2x + 2x = 1$, portanto $x = \frac{1}{8}$.

Seja P_i a probabilidade de sair a face com o número i ; então, $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \frac{1}{8}$

$$A = \{3, 6\}, B = \{4, 5, 6\} \text{ e } A \cap B = \{6\}$$

$$P(A) = P_3 + P_6 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}, P(B) = P_4 + P_5 + P_6 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \text{ e } P(A \cap B) = P_6 = \frac{1}{8}$$

Tem-se $P(A) \times P(B) = \frac{2}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{64}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{8} = \frac{8}{64}$; portanto, os acontecimentos A e B não são independentes.

Questão de aula 8

1. $\lim v_n = \lim \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \lim \left(\frac{n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \lim \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = +\infty + \frac{1}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty$

$$u_n + v_n < 1 \Leftrightarrow u_n < 1 - v_n$$

Dado que $v_n \rightarrow +\infty$, pode concluir-se que a sucessão de termo geral $1 - v_n$ tende para $-\infty$.

Assim, recorrendo aos teoremas de comparação, tem-se que $\lim u_n = -\infty$. Portanto, a sucessão (u_n) não é convergente.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2n(n+1)}{n+n^2} \leq \sum_{k=0}^n \frac{2n}{k+n^2} \leq \frac{2n(n+1)}{0+n^2}$

Como $\lim \frac{2n(n+1)}{n+n^2} = \lim \frac{2n(n+1)}{0+n^2} = 2$, pelo teorema das sucessões enquadradas, conclui-se

que $\lim \sum_{k=0}^n \frac{2n}{k+n^2} = 2$.

3. Dado que $\lim f(u_n) = -\infty$, conclui-se que $u_n \rightarrow 2^-$ e dado que $\lim v_n = +\infty$, conclui-se que $f(v_n) \rightarrow 2$.

Recorrendo ao teorema das sucessões enquadradas pode, então, afirmar-se que a sucessão (w_n) é convergente e $\lim w_n = 2$.

Questão de aula 9

1. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, pois é uma função polinomial, logo, é contínua em $[2, 3]$. Tem-se $f(2) = 2$ e $f(3) = 26$, então, dado que $f(2) < 10 < f(3)$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists c \in]2, 3[: f(c) = 10$.

2. A função h é contínua em $\mathbb{R}$, pois é uma função polinomial, logo, é contínua em $[-a, a]$.

$h(-a) = (-a)^3 - (-a)^2 - a + a^2 = -a^3 - a$ e, portanto, $h(-a) < 0$, pois a é um número positivo.

$h(a) = a^3 - a^2 + a + a^2 = a^3 + a$ e, portanto, $h(a) > 0$, pois a é um número positivo.

Então, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists c \in]-a, a[: h(c) = 0$, ou seja, a função h tem pelo menos um zero em $]-a, a[$.

3. O gráfico da função f intersesta a bissetriz dos quadrantes pares se a equação $f(x) = -x$ tiver pelo menos uma solução.

Tem-se $f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0$.

Sendo h a função definida por $h(x) = f(x) + x$, tem-se que h é contínua em $[-|k|, |k|]$ e os zeros da função h são as soluções da equação $f(x) = -x$, nesse intervalo.

O facto de o gráfico da função f intersear a bissetriz dos quadrantes ímpares nos pontos de abscissa $-k$ e k , permite concluir que $f(-k) = -k$ e que $f(k) = k$.

Tem-se, então:

$$h(-k) = f(-k) - k = -k - k = -2k$$

$$h(k) = f(k) + k = k + k = 2k$$

Dado que $k \neq 0$, os números $-2k$ e $2k$ têm sinais contrários e, portanto, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que a função h tem pelo menos um zero entre $-k$ e k , ou seja, o gráfico da função f intersear a bissetriz dos quadrantes pares.

Questão de aula 10

1. $f'(-1) = \frac{(-1)^2 + 2 \times (-1)}{((-1)^2 + 2 \times (-1) + 2)^2} = -1$; então, dado que $f'(-1) = 0$ e $f''(-1) < 0$, conclui-se

que a função f atinge um máximo relativo em -1 .

2. O gráfico da função g tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0]$, pois a função g' é crescente nesse intervalo, e tem a concavidade voltada para baixo em $[0, +\infty[$, pois a função g' é decrescente nesse intervalo. O ponto de abscissa 0 é um ponto de inflexão do gráfico da função g .

3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; $f'(x) = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2}$ e $f''(x) = \frac{2x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$; o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2[$ e em $[0, 2[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-2, 0]$ e em $]2, +\infty[$; o ponto de abscissa 0 é ponto de inflexão do gráfico da função f .

Questão de aula 11

1.

a) $12500 \times \left(1 + \frac{2,1}{100}\right)^6 \approx 14160$

A Miquelina acumulou, aproximadamente, 14 160 euros.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 12500 \times \left(1 + \frac{r}{100 \times 2}\right)^{12} &= 14169 \Leftrightarrow 1 + \frac{r}{200} = \sqrt[12]{\frac{14169}{12500}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r = 200 \left(\sqrt[12]{\frac{14169}{12500}} - 1 \right) \Leftrightarrow r \approx 2,1 \end{aligned}$$

O Asdrúbal aceitou uma taxa nominal de 2,1%.

$$2. \quad C_0 \times \left(1 + \frac{1,8}{100}\right)^{11} = 18800 \Leftrightarrow C_0 = \frac{18800}{1,018^{11}} \Leftrightarrow C_0 \approx 15450.$$

O António tinha depositado, aproximadamente, 15 450 euros.

$$3. \quad \lim x_n = \lim \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

$$\lim x_n = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \times \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^1 = e \times 1 = e$$

Então, aplicando o teorema das sucessões enquadadas, pode concluir-se que a sucessão (u_n) é convergente e $\lim u_n = e$.

Questão de aula 12

1.

$$\text{a)} \quad 4^{1-2x} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^{2-4x} = 2^{-3} \Leftrightarrow 2 - 4x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{5}{4} \right\}$$

$$\text{b)} \quad \left(\frac{1}{2} \right)^{2x} < \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2} \Leftrightarrow 2x > x^2 \Leftrightarrow 2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 2$$

$$\text{C.S.} =]0, 2[$$

$$\text{c)} \quad 3^{x+2} - 4 \times 3^x - 45 = 0 \Leftrightarrow 3^x (3^2 - 4) = 45 \Leftrightarrow 3^x = \frac{45}{5} \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{C.S.} = \{2\}$$

$$\text{d)} \quad 3^x - 3^{2-x} \leq 8 \Leftrightarrow 3^x - \frac{3^2}{3^x} \leq 8 \Leftrightarrow \underset{3^x=y}{y} - \frac{9}{y} - 8 \leq 0 \Leftrightarrow y^2 - 8y - 9 \leq 0$$

Cálculos auxiliares:

$$y^2 - 8y - 9 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 9$$

Portanto:

$$3^x - 3^{2-x} \leq 8 \Leftrightarrow \underbrace{3^x \geq -1}_{\text{condição universal}} \wedge 3^x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 2$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 2]$$

2.

a) $m(2) = 3,28 \times e^{-0,12 \times 2} \approx 2,58$

Aproximadamente, 2,58 gramas.

b) $\frac{m(t+5,8)}{m(t)} = \frac{3,28e^{-0,12(t+5,8)}}{3,28e^{-0,12t}} = e^{-0,12 \times 5,8} \approx 0,5$; a cada 5800 anos, a massa de carbono-14

reduz-se a metade, ou seja, a semivida do carbono-14 é aproximadamente 5800 anos.

Questão de aula 13

1.

a) $\log_3(2x+3)+1=0 \Leftrightarrow 2x+3=3^{-1} \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{4}{3} \right\}$$

b) $2\log_2(3-x) \leq 2 + \log_2(x) \Leftrightarrow \log_2(3-x)^2 \leq \log_2(4) + \log_2(x) \wedge 3-x > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_2(3-x)^2 \leq \log_2(4x) \wedge x < 3 \Leftrightarrow (3-x)^2 \leq 4x \wedge x < 3 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 - 6x + x^2 - 4x \leq 0 \wedge x \in]0, 3[\Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 \leq 0 \wedge x \in]0, 3[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1 \wedge x \leq 9 \wedge x \in]0, 3[\Leftrightarrow x \in [1, 3[$$

$$\text{C.S.} = [1, 3[$$

c) $\log_9(1-2x) - \frac{1}{2} = \log_3(x) \Leftrightarrow \frac{\log_3(1-2x)}{\log_3(9)} - \frac{1}{2} = \log_3(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3(1-2x)}{2} - \frac{1}{2} = \log_3(x) \Leftrightarrow \log_3(1-2x) - 1 = 2\log_3(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(1-2x) = \log_3(3) + \log_3(x^2) \wedge x > 0 \Leftrightarrow \log_3(1-2x) = \log_3(3x^2) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-2x = 3x^2 \wedge 1-2x > 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = \frac{1}{3}) \wedge x < \frac{1}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

$$d) \frac{1 - \ln(x)}{\log_2(5-x) - 1} \geq 0$$

Construindo um quadro de variação de sinal, tendo em consideração que o domínio da expressão é $]0, 5[\setminus \{3\}$ e que 1 e 3 são, respetivamente, os valores que anulam o numerador e o denominador, obtém-se:

$$c.s. =]0, e] \cup]3, 5[$$

$$2. \quad v_{n+1} - v_n = f(u_{n+1}) - f(u_n) = \ln(\sqrt{u_{n+1}}) - \ln(\sqrt{u_n}) = \ln \sqrt{\frac{u_{n+1}}{u_n}} = \ln(\sqrt{e}) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

A sucessão (v_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$.

Questão de aula 14

1.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} 3 \times \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \times 1 = 3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} - 1}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} 3 \times \lim_{3x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{3x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 3 \times (+\infty) - 0 = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 3\ln(x)}{x - 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x - 1} + 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{x - 1} \right) = 0 + 3(0 \times 1) = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{x-1}) \stackrel{\infty \times 0}{=} e^{-1} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} e^{-1} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{e^y} = \frac{e^{-1}}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^2}} = \frac{e^{-1}}{+\infty} = 0$$

2.

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - e^{1-x}}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y=x-1} \frac{y+1 - e^{-y}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{y} - \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{-y} - 1}{y} =$$

$$= 1 + \lim_{z=-y} \frac{e^z - 1}{z} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y=\ln(x)} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{1} = 1$$

Dado que os limites laterais em 1 são diferentes, a função não é contínua no ponto 1.

b) Dado que a função não é contínua no ponto 1, conclui-se que não é diferenciável nesse ponto.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{xe^{1-x} - 1}{(x-1)^2} & \text{se } x < 1 \\ \frac{x-1-x\ln(x)}{x(x-1)^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Questão de aula 15

1.

- $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$; a função não tem zeros.
- A função é contínua; portanto, só as retas de equações $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$ poderão ser assíntotas verticais.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{\ln(x^2)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln(x^2)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x^2)} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

Assim, concluímos que as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são as únicas assíntotas verticais.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x^2)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x^2)} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2\ln(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Não existe assíntota não vertical ao gráfico da função em $+\infty$ e, de modo análogo, se mostra que não existe assíntota não vertical ao gráfico da função em $-\infty$ (nesse caso,

$$\ln(x^2) = 2\ln(-x)).$$

$$\bullet \quad f'(x) = \left(\frac{x}{\ln(x^2)} \right)' = \frac{1 \times \ln(x^2) - x \times \frac{2x}{x^2}}{\ln^2(x^2)} = \frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) - 2 = 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow x^2 = e^2 \wedge x \in D \Leftrightarrow x = -e \vee x = e$$

x	$-\infty$	$-e$		-1		0		1		e	$+\infty$
$\ln(x^2) - 2$	+	0	—	—	—	n.d.	—	—	—	0	+
$\ln^2(x^2)$	+	+	+	+	+	n.d.	+	+	+	+	+
f'	+	0	—	n.d.	—	n.d.	—	n.d.	—	0	+
f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

A função f é crescente em $]-\infty, -e]$ e em $[e, +\infty[$ e é decrescente em $[-e, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ e em $]1, e]$.

$$f(-e) = \frac{-e}{\ln(e^2)} = -\frac{e}{2} \text{ é máximo relativo e } f(e) = \frac{e}{\ln(e^2)} = \frac{e}{2} \text{ é mínimo relativo.}$$

Questão de aula 16

1.

a) $8 \times e^{-0,0462 \times 10} = 8 \times e^{-0,462} \approx 5$

Aproximadamente 5 gramas.

b) $e^{-0,0462t} = 0,5 \Leftrightarrow -0,0462t = \ln(0,5) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,5)}{-0,0462}$

$$t \approx 15$$

A semivida do fósforo é 15 dias.

2. $3,125\% \left(\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} \right) \times 100 \right)$

3. $1 \text{ min } 15 \text{ s} = 1,25 \text{ min} = \frac{5}{4} \text{ min}$

$$87 = 25 + 75e^{-k \times \frac{5}{4}} \Leftrightarrow e^{-k \times \frac{5}{4}} = \frac{87 - 25}{75} \Leftrightarrow e^{-k \times \frac{5}{4}} = \frac{62}{75} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -k \times \frac{5}{4} = \ln\left(\frac{62}{75}\right) \Leftrightarrow k = -\frac{4}{5} \ln\left(\frac{62}{75}\right)$$

$$45 = 25 + 75e^{\frac{4}{5} \ln\left(\frac{62}{75}\right)t} \Leftrightarrow \frac{20}{75} = e^{\frac{4}{5} \ln\left(\frac{62}{75}\right)t} \Leftrightarrow \frac{4}{5} \ln\left(\frac{62}{75}\right)t = \ln\left(\frac{4}{15}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{4}{15}\right)}{\ln\left(\frac{62}{75}\right)} \times \frac{5}{4}$$

$$t \approx 9$$

Ao fim de, aproximadamente, 9 minutos.

Questão de aula 17

1. Seja $\alpha = \arccos \frac{3}{5}$.

A ordenada do ponto B é $\sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{6}\right)$.

$$\sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin \alpha \cos \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{5\pi}{6} \cos \alpha$$

Tem-se $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ e, dado que o ponto A pertence ao 1.º quadrante,

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Então, } \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{sen} \alpha \cos \frac{5\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \cos \alpha = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}.$$

2.

a) A função é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, não existem assíntotas verticais ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x}$$

Dado que, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} \leq \frac{1}{x}$ e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$, conclui-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = 0.$$

$$\text{Então, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 + 1 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{sen}(2x) + x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sen}(2x).$$

Ora, como não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sen}(2x)$, conclui-se que não existem assíntotas não verticais ao

gráfico de f em $+\infty$ e, de modo análogo, se conclui que não existem assíntotas não verticais ao gráfico de f em $-\infty$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x}{3}\right)}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{x}{3}}{5x} = \frac{1}{5} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2x}{3}\right)}{x} + \frac{1}{15} = \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} \times \lim_{\frac{2x}{3} \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2x}{3}\right)}{\frac{2x}{3}} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15} \times 1 + \frac{1}{15} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(a) + f(b) &= \operatorname{sen}(2a) + a + \operatorname{sen}(2b) + b = \operatorname{sen}(2a) + \operatorname{sen}(2b) + \pi = \\ &= \operatorname{sen}(2a) + \operatorname{sen}(2(\pi - a)) + \pi = \operatorname{sen}(2a) + \operatorname{sen}(2\pi - 2a) + \pi = \\ &= \operatorname{sen}(2a) + \operatorname{sen}(-2a) + \pi = \operatorname{sen}(2a) - \operatorname{sen}(2a) + \pi = \pi \end{aligned}$$

$$\text{d) } h(\theta) = \operatorname{sen}(2\theta) + \theta - \theta = \operatorname{sen}(2\theta)$$

$$\cos(4\theta) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2\cos^2(2\theta) - 1 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos^2(2\theta) = \frac{2}{3}$$

$$\text{Então, } \operatorname{sen}^2(2\theta) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ e } \operatorname{sen}(2\theta) = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

$$\text{Dado que } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \text{ tem-se que } 2\theta \in [\pi, 2\pi] \text{ e, portanto, } \operatorname{sen}(2\theta) = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Questão de aula 18

1.

$$\text{a) } \overline{OQ} = \overline{OP} \Leftrightarrow \overline{OQ} = \overline{OP} \Leftrightarrow \overline{OP} = \frac{1}{\overline{OQ}}$$

$$d = \overline{OP} - \overline{OA} = \frac{1}{\overline{OQ}} - 1 = \frac{1 - \overline{OQ}}{\overline{OQ}} = f(x)$$

$$\text{b) } \overline{OP} = 2 \Leftrightarrow d = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - \overline{OQ}}{\overline{OQ}} = 1 \Leftrightarrow \overline{OQ} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{OQ} = \frac{1}{2} \wedge x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{c) } f'(x) = \left(\frac{1 - \overline{OQ}}{\overline{OQ}} \right)' = \frac{(1 - \overline{OQ})' \overline{OQ} - (1 - \overline{OQ})(\overline{OQ})'}{(\overline{OQ})^2} =$$

$$= \frac{-\cos x \overline{OQ} - (1 - \overline{OQ}) \cos x}{\overline{OQ}^2} = \frac{-\cos x}{\overline{OQ}^2}$$

No intervalo $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, tem-se $\cos x > 0$ e, portanto, nesse intervalo, $f'(x) < 0$.

Conclui-se, então, que f é decrescente. Assim, quanto maior é o valor de x , menor é o valor de d .

d) A área do triângulo é dada por $\frac{d \times y_Q}{2}$, sendo y_Q a ordenada do ponto Q .

$\widehat{POQ} = \frac{\pi}{2} - x$ e, portanto, a ordenada do ponto Q é $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Então:

$$A(x) = \frac{\frac{1 - \overline{OQ}}{\overline{OQ}} \times \cos x}{2} = \frac{\cos x - \overline{OQ} \cos x}{2 \overline{OQ}} = \frac{2 \cos x - 2 \overline{OQ} \cos x}{4 \overline{OQ}} = \frac{2 \cos x - \sin(2x)}{4 \overline{OQ}}$$

$$\text{e) } A'(x) = \left(\frac{2 \cos x - \sin(2x)}{4 \overline{OQ}} \right)' = \frac{1}{4} \times \frac{(2 \cos x - \sin(2x))' \overline{OQ} - (2 \cos x - \sin(2x))(\overline{OQ})'}{\overline{OQ}^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{(-2 \sin x - 2 \cos(2x)) \overline{OQ} - (2 \cos x - \sin(2x)) \cos x}{\overline{OQ}^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{-2 \overline{OQ} \sin x - 2 \cos(2x) \overline{OQ} - 2 \cos^2 x + \sin(2x) \cos x}{\overline{OQ}^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{-2(\overline{OQ} \sin x + \cos(2x) \overline{OQ}) - \cos(2x) \overline{OQ} + \sin(2x) \cos x - \cos(2x) \overline{OQ} \sin x}{\overline{OQ}^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{-2 - \cos(2x) \overline{OQ} + \sin(2x - x)}{\overline{OQ}^2} = \frac{-2 - \cos(2x) \overline{OQ} + \sin x}{4 \overline{OQ}^2}$$

Questão de aula 19

- $$\frac{5i^5 - (2+i)^3}{1-2i} = \frac{5i - (2+i)^2 \times (2+i)}{1-2i} = \frac{5i - (4+4i-1) \times (2+i)}{1-2i} = \frac{5i - (3+4i) \times (2+i)}{1-2i} =$$

$$= \frac{5i - (2+11i)}{1-2i} = \frac{-2-6i}{1-2i} = \frac{(-2-6i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{10-10i}{1+4} = 2-2i$$
- O afixo deste número pertence à bissetriz do 3.º quadrante e não coincide com a origem se e só se a parte real e a parte imaginária são iguais e negativas.

$$\frac{(2a-i)i-3i}{1-ai} = \frac{1+(2a-3)i}{1-ai} = \frac{(1+(2a-3)i)(1+ai)}{(1-ai)(1+ai)} = \frac{(1-2a^2+3a)+(a+2a-3)i}{1+a^2} =$$

$$= \frac{(1-2a^2+3a)+(3a-3)i}{1+a^2}$$

$$1-2a^2+3a = 3a-3 \wedge 3a-3 < 0 \Leftrightarrow 2a^2 = 4 \wedge a < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a = -\sqrt{2} \vee a = \sqrt{2}) \wedge a < 1 \Leftrightarrow a = -\sqrt{2}$$
- $2i^3 = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$
 - $\frac{3e^{i\pi} + i}{i} + \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{-3+i}{i} + \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3i + 1 - 1 - i = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

Questão de aula 20

- $(z_1)^2 \times \bar{z}_2 = 4e^{i\frac{5\pi}{3}} \times \rho e^{-i\theta} = 4\rho e^{i(\frac{5\pi}{3}-\theta)}$

O afixo de $(z_1)^2 \times \bar{z}_2$ pertence à região indicada se e só se

$$0 < 4\rho \leq \sqrt{2} \wedge \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{3} - \theta \leq \pi + 2k\pi.$$

$$0 < 4\rho \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < \rho \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{3} - \theta \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \geq -\frac{5\pi}{3} + \theta \geq -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \geq \theta \geq \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$$

Portanto, $\rho \in \left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$ e $\theta \in \left[\frac{11\pi}{12}, \frac{7\pi}{6}\right]$.

2.

a) $w_2 = \sqrt{5}e^{i\frac{-17\pi}{12}} = \sqrt{5}e^{i\frac{-17\pi}{12}+2\pi} = \sqrt{5}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$, portanto, os outros vértices são os afijos dos números $\sqrt{5}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{5}e^{i\frac{13\pi}{12}}$ e $\sqrt{5}e^{i\left(\frac{13\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{5}e^{i\frac{19\pi}{12}}$

b) O polígono é um quadrado, cuja diagonal mede $2\sqrt{5}$. Então, o lado do quadrado mede

$\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}$ e o seu perímetro é $4\sqrt{10}$.

3. w_1 e w_2 são raízes de ordem n do mesmo número complexo se $(w_1)^n = (w_2)^n$.

$$(w_1)^n = (w_2)^n \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^n \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n e^{i\frac{3n\pi}{4}} = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{5n\pi}{6}}$$

$$(\sqrt{2})^n e^{i\frac{3n\pi}{4}} = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{5n\pi}{6}} \text{ se e só se } \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{3n\pi}{4} = \frac{5n\pi}{6} + 2k\pi.$$

$$\frac{3n\pi}{4} = \frac{5n\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow 9n = 10n + 24k \Leftrightarrow n = -24k$$

Então, w_1 e w_2 são raízes de ordem n do mesmo número complexo se n for múltiplo natural de 24.

Pergunta 1

Das expressões seguintes, qual não está correta?

(A) $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(B) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{3}{7}\right\} \subset \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

(C) $\{1\} \in \mathbb{N}$

(D) $\sqrt{9} \in \mathbb{Q}$

Resposta correta: (C)

Pergunta 2

Dados os conjuntos $A = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ é múltiplo de } 3\}$ e $B = \{n \in \mathbb{Z} : |n-2| \leq 5\}$, os conjuntos $A \cap B$ e $B \setminus A$ são, respetivamente:

(A) $\{-3, 0, 3\}$ e $\{-2, -1, 1, 2, 4\}$

(B) $\{-3, 0, 3, 6\}$ e $\{-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 7\}$

(C) $\{-3, 0, 3, 6\}$ e $\{-2, -1, 1, 2, 4, 5, 7\}$

(D) $\{0, 3, 6\}$ e $\{-2, -1, 1, 2, 4, 5\}$

Resposta correta: (C)

Pergunta 3

Considera, em $\mathbb{R}$, os subconjuntos A e B definidos da seguinte forma:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \text{ e } B = [0, 1[$$

e as afirmações seguintes:

I. $\frac{\sqrt{2}}{2} \in B \setminus A$

II. $A \subset B$

Qual das opções é correta?

(A) I e II são ambas verdadeiras.

(B) I é verdadeira e II é falsa.

(C) I é falsa e II é verdadeira.

(D) I e II são ambas falsas.

Resposta correta: (B)

Pergunta 4

Considera o universo U dos números naturais não superiores a 20. Sejam A , B e C os seguintes subconjuntos de U :

$$A = \{n \in U : n \text{ é primo}\}$$

$$B = \{n \in U : n \text{ é divisor de } 18\}$$

$$C = \{n \in U : n \text{ é quadrado perfeito}\}$$

Então $B \setminus (A \cup C)$, $C \cup (A \cap B)$ e $\overline{A} \setminus (B \cap C)$ são, respetivamente:

- (A) $\{6\}$, $\{1, 2, 3, 4, 9\}$ e $\{6, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 20\}$
- (B) $\{6\}$, $\{2, 3, 4, 9, 16\}$ e $\{4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$
- (C) $\{6, 18\}$, $\{1, 2, 3, 4, 9, 16\}$ e $\{6, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 20\}$
- (D) $\{6, 18\}$, $\{1, 2, 3, 4, 9, 16\}$ e $\{4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$

Resposta correta: (D)

Pergunta 5

Considera, no universo $\mathbb{R}$, os seguintes subconjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x - 24 \leq 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 4\}$$

Então, $(A \cap B) \cup C$, $\overline{A} \setminus C$ e $\overline{B} \setminus (A \cap C)$ são, respetivamente:

- (A) $[-3, -1] \cup [1, 8] \cup \{-4\}$, $] -\infty, -3[\setminus \{-4\} \cup]8, +\infty[$ e $] -1, 1[$
- (B) $[-3, -1] \cup [1, 8]$, $] -\infty, -3[\cup]8, +\infty[$ e $] -1, 1[$
- (C) $[-3, -1] \cup [1, 8]$, $] -\infty, -3[\cup]8, +\infty[$ e $[-3, -1] \cup [1, 4]$
- (D) $[-3, -1] \cup [1, 8] \cup \{-4\}$, $] -\infty, -3[\setminus \{-4\} \cup]8, +\infty[$ e $[-3, -1] \cup [1, 4]$

Resposta correta: (A)

Pergunta 6

Sejam A e B subconjuntos de um universo U tais que $A \cap B = \emptyset$. O que podes concluir?

- (A) $A \subset \overline{B}$
- (B) $A \cup B = U$
- (C) $B \setminus A = \emptyset$
- (D) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = U$

Resposta correta: (A)

Pergunta 7

Sejam A e B subconjuntos disjuntos de um universo U . O que podes concluir?

- (A) $A \cap B = A \cup B$
- (B) $\overline{A \cap B} \cap B = B$
- (C) $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$
- (D) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = U$

Resposta correta: (B)

Pergunta 8

Sejam A , B e C subconjuntos de um universo U . Qual a propriedade da interseção de conjuntos que permite escrever $A \cap B \cap C$ com o mesmo significado de $(A \cap B) \cap C$?

- (A) Comutativa
- (B) Associativa
- (C) Transitiva
- (D) Distributiva

Resposta correta: (B)

Pergunta 9

Sejam A e B subconjuntos de um universo U . Qual dos seguintes conjuntos não é necessariamente igual a U ?

- (A) $\overline{A \cap \overline{A}}$
- (B) $\overline{B} \cup (\overline{\overline{A \cap B}})$
- (C) $\overline{\overline{B} \cap (A \cap B)}$
- (D) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

Resposta correta: (D)

Pergunta 10

Sejam A , B e C subconjuntos de um universo U . Considera as afirmações seguintes:

- I. $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$
- II. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Indica a opção correta.

- (A) I e II são ambas verdadeiras.
- (B) I é verdadeira e II é falsa.
- (C) I é falsa e II é verdadeira.
- (D) I e II são ambas falsas.

Resposta correta: (A)

Pergunta 11

Num inquérito feito a 200 pessoas, 58 consideraram-se apreciadoras de José Saramago, 65 de Fernando Pessoa e 70 de Eça de Queirós. 24 gostam de Saramago e de Pessoa, 14 de Saramago e de Eça, 10 de Pessoa e de Eça e 4 gostam dos três escritores. Os restantes inquiridos confessaram não apreciar nenhum deles. Quantos inquiridos gostam, no máximo, de um destes escritores?

- (A) 160
- (B) 109
- (C) 113
- (D) 193

Resposta correta: (A)

Pergunta 12

Quantos números naturais existem que sejam múltiplos de cinco e que tenham menos de quatro algarismos todos diferentes?

- (A) 155
- (B) 164
- (C) 154
- (D) 145

Resposta correta: (C)

Pergunta 13

Um conjunto tem exatamente 32 768 subconjuntos. Quantos desses subconjuntos têm cardinal maior ou igual a 4 e menor do que 6?

- (A) $^{16}C_5$
- (B) $^{16}C_4 + ^{16}C_5$
- (C) $^{15}C_4 + ^{15}C_5 + ^{15}C_6$
- (D) $^{15}C_5 + ^{15}C_6$

Resposta correta: (A)

Pergunta 14

Num baralho de cinquenta e duas cartas, quantos conjuntos de seis cartas são constituídos por três ases e pelo menos duas figuras?

- (A) $^4C_3 \times ^{12}C_3$
- (B) $^4C_3 \times ^{12}C_3 + ^4C_3 \times ^{12}C_2$
- (C) $144 \ ^{12}C_2 + 4 \ ^{12}C_3$
- (D) $^4C_3 \times ^{12}C_2 \times 36$

Resposta correta: (C)

Pergunta 15

Quantas diagonais tem um heptadecágono (polígono de 17 lados) regular?

- (A) 136
- (B) 272
- (C) 265
- (D) 119

Resposta correta: (D)

Pergunta 16

O número de anagramas das palavras FLORA e MORDOMO é, respetivamente:

- (A) 60 e 420
- (B) 120 e 420
- (C) 120 e 5040
- (D) 5 e 7

Resposta correta: (B)

Pergunta 17

Doze bonecos – cinco cães, quatro gatos e três patos – vão ser colocados na montra de uma loja de brinquedos, numa prateleira com divisórias formando 15 compartimentos iguais. Em cada um desses compartimentos cabe um e um só boneco. Os cães são todos iguais entre si, o mesmo acontece com os gatos e com os patos. Com quantas aparências diferentes pode ficar a prateleira, sabendo que ficam vazios os compartimentos para os quais não há boneco?

- (A) 12 612 600
- (B) 75 675 600
- (C) 103 680
- (D) 70 980

Resposta correta: (A)

Pergunta 18

Um clube vai apresentar-se a uma prova de atletismo com 40 dos seus 200 atletas. Nesse clube há dez treinadores, cinco massagistas, dois médicos e três enfermeiros. De quantas maneiras diferentes pode ser feita a escolha da equipa, sabendo que, além dos atletas, têm de ir massagistas (4), treinadores (pelo menos 3 e no máximo 5) e um médico ou um enfermeiro?

- (A) $14550 \cdot {}^{200}A_{40}$
- (B) $14550 \cdot {}^{200}C_{40}$
- (C) $180000 \cdot {}^{200}C_{40}$
- (D) $180000 \cdot {}^{200}A_{40}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 19

Tomando sete pontos distintos de uma circunferência, quantos polígonos convexos se podem formar com vértices nesses pontos?

- (A) $1 + {}^8C_4 + {}^8C_6$
- (B) ${}^7A_3 + {}^7A_4 + {}^7A_5 + {}^7A_6 + {}^7A_7$
- (C) 5
- (D) $\sum_{p=2}^7 {}^7C_p$

Resposta correta: (A)

Pergunta 20

A expressão $\frac{p \cdot {}^nC_p + {}^nC_{p+1} + p \cdot {}^nC_{p+1} + {}^nC_p}{{}^nC_p + n \cdot {}^nC_p}$ (onde n e p são inteiros absolutos e $n > p$) é igual a

qual das expressões?

(A) $\frac{n+1}{p+1}$

(B) $\frac{p+1}{n+1}$

(C) $\frac{1}{n+1}$

(D) ${}^{n+1}C_{n+1}$

Resposta correta: (D)

Pergunta 21

O antepenúltimo elemento de uma linha do triângulo de Pascal é 210. Qual o terceiro elemento da mesma linha?

(A) 1

(B) 210

(C) 1140

(D) 1330

Resposta correta: (B)

Pergunta 22

Uma linha do triângulo de Pascal tem 80 elementos. Qual a soma dos três primeiros elementos dessa linha com os dois últimos da linha seguinte?

(A) 3240

(B) 3242

(C) 3323

(D) 6323

Resposta correta: (B)

Pergunta 23

Qual o número de subconjuntos com cardinal menor ou igual a 5 de um conjunto com 10 elementos?

- (A) 428
- (B) 637
- (C) 638
- (D) 1024

Resposta correta: (C)

Pergunta 24

Sendo n e p números naturais ($n \geq p$), $\sum_{p=1}^n {}^nC_p$ é igual a qual das expressões?

- (A) 2^n
- (B) $2^n - 1$
- (C) $2n - 1$
- (D) 2^{n-1}

Resposta correta: (B)

Pergunta 25

A soma de todos os elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é 65 536. Qual o quarto elemento da linha seguinte?

- (A) 120
- (B) 560
- (C) 680
- (D) 2380

Resposta correta: (C)

Pergunta 26

Considera as duas afirmações seguintes:

- I. Se o produto dos dois últimos elementos de uma determinada linha do triângulo de Pascal é 15, então a linha tem 15 elementos.
- II. Existe uma linha do triângulo da Pascal tal que a soma de todos os seus elementos é igual a 196 608.

Então, quanto ao valor lógico destas afirmações, o que se pode dizer?

- (A) I e II são verdadeiras.
- (B) I é verdadeira e II é falsa.
- (C) I é falsa e II é verdadeira.
- (D) I e II são falsas.

Resposta correta: (D)

Pergunta 27

Sendo n e p números inteiros não negativos ($n \geq p + 2$),

$$2 {}^{n+1}C_{p+2} + {}^nC_p + {}^nC_{p+2} + {}^nC_{p+1} + {}^nC_{p+3}$$

é igual a qual expressão?

- (A) ${}^{n+3}C_{p+2}$
- (B) ${}^{n+1}C_{p+1}$
- (C) ${}^{n+2}C_{p+1}$
- (D) ${}^{n+3}C_{p+3}$

Resposta correta: (D)

Pergunta 28

O polinómio que resulta do desenvolvimento, pelo binómio de Newton, de $(x^5 + 1)^n$ tem:

- (A) grau n e $n+1$ termos.
- (B) grau $5n$ e $n+1$ termos.
- (C) grau $5n$ e n termos.
- (D) grau n e $n-1$ termos.

Resposta correta: (B)

Pergunta 29

No desenvolvimento, pelo binómio de Newton, de $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$, o termo de grau 9 é:

- (A) $56x^9$
- (B) $\frac{7}{4}x^9$
- (C) $\frac{1}{256}x^9$
- (D) $\frac{1}{32}x^9$

Resposta correta: (B)

Pergunta 30

O número de soluções reais distintas da equação, em x , $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\left(\sum_{p=0}^6 {}^6C_p x^p\right) = 0$ é:

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 6
- (D) 9

Resposta correta: (A)

Pergunta 31

Consideremos a experiência aleatória que consiste no lançamento de uma moeda quatro vezes e na anotação das faces que ficam voltadas para cima. Nesta experiência aleatória, qual o cardinal do espaço amostral?

- (A) 2
- (B) 4
- (C) 8
- (D) 16

Resposta correta: (D)

Pergunta 32

Consideremos a experiência aleatória que consiste no lançamento de dois dados equilibrados e na anotação do número de vezes em que o número total de pintas é par e, simultaneamente, pelo menos num dos dados também o número de pintas é par. Qual o cardinal do espaço amostral desta experiência?

- (A) 6
- (B) 18
- (C) 27
- (D) 36

Resposta correta: (A)

Pergunta 33

Consideremos a experiência aleatória que consiste no lançamento de um dado equilibrado e na anotação do número da face que fica voltada para cima. Sejam A , B e C os acontecimentos seguintes:

A : sair um número primo

B : sair um número par

C : sair um divisor de 6

Qual a afirmação verdadeira?

- (A) $A \cap B$ é o acontecimento impossível.
- (B) $A \cup B$ é o acontecimento certo.
- (C) $B \cap C$ é um acontecimento elementar.
- (D) $A \cup B \cup C$ é o acontecimento certo.

Resposta correta: (D)

Pergunta 34

Consideremos a experiência aleatória que consiste no lançamento de dois dados e na anotação dos números das faces que ficam voltadas para cima. Qual o cardinal do acontecimento «sair um número par em pelo menos um deles»?

- (A) 9
- (B) 18
- (C) 27
- (D) 36

Resposta correta: (C)

Pergunta 35

Na experiência aleatória que consiste na extração de uma carta de um baralho completo, qual a probabilidade de se «extrair um rei ou um valete»?

- (A) $\frac{1}{13}$
- (B) $\frac{2}{13}$
- (C) $\frac{1}{26}$
- (D) $\frac{1}{52}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 36

Um ladrão pretende assaltar o cofre da empresa em que é funcionário e sabe que o código é constituído por quatro letras distintas do alfabeto português (vinte e seis letras). Descobriu, ainda, que a primeira e a última letras são vogais e que as outras duas são consoantes. Qual é a probabilidade de o ladrão conseguir abrir o cofre, à primeira tentativa?

- (A) $\frac{1}{4 \times 5 \times 20 \times 21}$
- (B) 1
- (C) $\frac{1}{5^2 \times 21^2}$
- (D) $\frac{1}{5 \times 21}$

Resposta correta: (A)

Pergunta 37

Um saco tem seis cartões tendo, cada um, uma das letras A, E, U, G, R e S. Tirando sucessivamente os cartões e dispondo-os seguidos, qual é a probabilidade de consoantes e vogais ficarem em posições alternadas?

- (A) $\frac{1}{20}$
- (B) $\frac{1}{10}$
- (C) $\frac{1}{120}$
- (D) $\frac{1}{720}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 38

De um baralho de 52 cartas extraíram-se, simultaneamente e ao acaso, cinco cartas. Considera os acontecimentos seguintes:

F : as cartas são todas figuras

R : das cinco cartas, três são reis e duas são damas

P : pelo menos uma das cartas é de paus

As probabilidades de F , de R e de P são, respetivamente:

(A) $\frac{{}^{12}A_5}{{}^{52}A_5}$, $\frac{{}^4A_3 {}^4A_2}{{}^{52}C_5}$, $1 - \frac{{}^{39}A_5}{{}^{52}A_5}$

(B) $\frac{{}^{12}A_5}{{}^{52}A_5}$, $\frac{{}^4C_3 {}^4C_2}{{}^{52}C_5}$, $1 - \frac{{}^{39}C_5}{{}^{52}C_5}$

(C) $\frac{12}{{}^{52}C_5}$, $\frac{{}^4A_3 {}^4A_2}{{}^{52}A_5}$, $1 - \frac{{}^{39}A_5}{{}^{52}A_5}$

(D) $\frac{{}^{12}C_5}{{}^{52}C_5}$, $\frac{{}^4A_3 {}^4A_2}{{}^{52}A_5}$, $\frac{{}^{13}C_1 {}^{39}C_4}{{}^{52}C_5}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 39

Uma caixa contém 15 bolas brancas e dez bolas pretas indistinguíveis ao tato. Tiram-se, ao acaso e sem reposição, três bolas da caixa. Qual é a probabilidade de a terceira bola ser branca, sabendo que as duas primeiras saíram pretas?

(A) $\frac{3}{5}$

(B) $\frac{15}{23}$

(C) $\frac{10}{25} \times \frac{9}{24} \times \frac{15}{23}$

(D) $\frac{10}{25} \times \frac{9}{25} \times \frac{15}{25}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 40

De um baralho de 52 cartas retirou-se uma carta ao acaso. A probabilidade de esta carta ser de paus ou uma dama é:

- (A) $\frac{17}{52}$
- (B) $\frac{13}{52} + \frac{4}{51}$
- (C) $\frac{4}{13}$
- (D) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{13}$

Resposta correta: (C)

Pergunta 41

Colocaram-se numa urna 20 bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 20. Retirou-se uma bola da urna, registou-se o número e repôs-se a bola na urna. Tirando outra bola da urna, qual é a probabilidade de esta bola ter um número primo, sabendo que a bola inicialmente retirada tinha o número 7?

- (A) $\frac{7}{20}$
- (B) $\frac{2}{5}$
- (C) $\frac{9}{20}$
- (D) $\frac{8}{19}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 42

A Carlota acha que a probabilidade de acertar uma questão de escolha múltipla é de 90%. Amanhã haverá um teste em que terá de responder a sete dessas questões. Nessas condições, a probabilidade de acertar as cinco primeiras e errar as outras duas é:

- (A) $0,9^5 \times 0,1^2$
- (B) $0,9^5 + 0,1^2$
- (C) $5 \times 0,9 + 2 \times 0,1$
- (D) $0,09^7$

Resposta correta: (A)

Pergunta 43

Lança-se cinco vezes um dado equilibrado. Qual a probabilidade de sair, pelo menos quatro vezes, a face com três pintas voltada para cima?

(A) $\frac{5}{6^5}$

(B) $\frac{31}{6^5}$

(C) $\frac{1}{6^4}$

(D) $\frac{25}{6^4}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 44

O João e o Augusto, dois adeptos do jogo do pica-pau, vão defrontar-se amanhã no café central da vila em que vivem. Qualquer deles pode ganhar ou perder; o empate também é possível. Estatísticas, feitas pelos apostadores do costume, revelam que a probabilidade de o João ganhar é tripla de empatar e que a probabilidade de empatar é dupla da de perder. Nestas condições, a probabilidade que o Augusto tem de não perder é:

(A) $\frac{1}{9}$

(B) $\frac{2}{9}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{1}{3}$

Resposta correta: (D)

Pergunta 45

Lançam-se dois dados viciados. Num dos dados, a probabilidade de sair a face com duas pintas é $\frac{3}{8}$ e qualquer das outras faces tem a mesma probabilidade de sair. No outro, a probabilidade de sair a face com cinco pintas é dupla da de qualquer outra face, tendo estas igual probabilidade de sair. A probabilidade de que a soma do número de pintas das faces saídas nos dois dados seja 7 ou 8 é:

- (A) $\frac{19}{56}$
- (B) $\frac{1}{6}$
- (C) $\frac{2}{9}$
- (D) $\frac{1}{7}$

Resposta correta: (A)

Pergunta 46

Lançou-se um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6. Qual é a probabilidade de ter saído uma face com um número primo, sabendo que a face que ficou voltada para cima tem um número ímpar?

- (A) $\frac{1}{3}$
- (B) 1
- (C) $\frac{1}{2}$
- (D) $\frac{2}{3}$

Resposta correta: (D)

Pergunta 47

A Marta e a Judite, alunas da disciplina de Física e Química, vão fazer uma prova prática que pode ser de Física ou de Química. À entrada da sala está uma caixa com sete cartões: quatro têm a letra F e três a letra Q. As letras indicam o tema da prova (F – Física e Q – Química). A Judite retira um dos cartões ficando com ele na mão e, a seguir, a Marta tira outro cartão. Qual é a probabilidade de sair um Q à Marta, sabendo que à Judite saiu F?

- (A) $\frac{3}{7}$
- (B) $\frac{3}{6} \times \frac{4}{7}$
- (C) $\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}$
- (D) $\frac{1}{2}$

Resposta correta: (D)

Pergunta 48

A Ana fez um teste de matemática com quatro questões independentes. A probabilidade de a Ana errar as questões é 0,2; 0,4; 0,3; 0,36, respetivamente. A probabilidade de a Ana errar apenas uma questão é:

- (A) 0,12096
- (B) 0,14336
- (C) 0,21504
- (D) 0,41024

Resposta correta: (D)

Pergunta 49

Numa empresa, 160 funcionários têm conhecimentos de informática e 40 não têm conhecimentos nessa área. Tendo em vista reestruturar a empresa e com base nas necessidades desta, o departamento de recursos humanos propôs renovar o contrato a 64 dos primeiros e a 12 dos segundos. Escolhendo um funcionário ao acaso, qual é a probabilidade de este não ter conhecimentos de informática, sabendo que está proposto para a renovação do contrato?

- (A) $\frac{5}{19}$
- (B) $\frac{3}{19}$
- (C) $\frac{1}{2}$
- (D) $\frac{3}{50}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 50

Lançam-se dois dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6. Qual é a probabilidade de nenhuma das faces voltadas para cima ter o número 3, sabendo que o produto dos números dessas faces é múltiplo de 3?

(A) $\frac{8}{20}$

(B) $\frac{9}{20}$

(C) $\frac{4}{9}$

(D) $\frac{25}{36}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 51

O Bernardo, que gosta muito de culinária e sonha vir a ser um cozinheiro famoso, ficou apurado para um concurso que o pode tornar conhecido. A concorrência é grande e o Bernardo tem consciência de que seria muito bom frequentar previamente uma ação de formação. Surgiu uma oportunidade; o Bernardo tem 50% de probabilidade de conseguir frequentar essa ação. No caso de frequentar essa ação, a probabilidade de ganhar o concurso é 90%, sendo de 40% no caso de não conseguir frequentar a ação. O concurso terminou ontem e o Bernardo ganhou. Qual é a probabilidade de ter frequentado a ação de formação?

(A) $\frac{1}{9}$

(B) $\frac{9}{10}$

(C) $\frac{9}{13}$

(D) $\frac{9}{20}$

Resposta correta: (C)

Pergunta 52

Numa turma de trinta alunos, dezoito tem olhos castanhos, nove usam óculos e seis têm olhos castanhos e usam óculos. As probabilidades de «nem ter olhos castanhos nem usar óculos» e de «ter olhos castanhos, sabendo que usa óculos» são, respetivamente:

(A) $0,3$ e $\frac{2}{3}$

(B) $0,7$ e $\frac{2}{3}$

(C) $0,3$ e $\frac{2}{5}$

(D) $0,3$ e $\frac{2}{3}$

Resposta correta: (A)

Pergunta 53

Numa mesa estão duas caixas com bolas. Uma é azul e a outra é branca. Na caixa azul estão 15 bolas vermelhas e 10 bolas pretas e na caixa branca estão 14 bolas vermelhas e 10 bolas pretas. Vai ser sorteada uma bola escolhendo ao acaso uma caixa e retirando uma bola da caixa escolhida. Sabendo que a probabilidade de ser escolhida a caixa azul é tripla da de ser escolhida a caixa branca, qual é a probabilidade de a bola sorteada ser vermelha e ter saído da caixa azul?

(A) $\frac{3}{5}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{9}{20}$

(D) $\frac{2}{5}$

Resposta correta: (C)

Pergunta 54

Sejam A e B dois acontecimentos independentes de um mesmo espaço amostral. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $P(A) + P(B) = 1$

(B) $P(\bar{A}) + P(\bar{B}) = 1$

(C) $P(A \cup B) - P(A) \times P(B) = 1$

(D) $P(A \cup B) + P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = 1$

Resposta correta: (D)

Pergunta 55

Uma fábrica produz dois tipos de rolhas de cortiça: rolhas para garrafas de champanhe e rolhas para garrafas de vinho do Porto. Estudos de análise de qualidade revelaram que a probabilidade de uma rolha ser defeituosa se for de champanhe é de 0,003, enquanto se for de vinho do Porto é apenas de 0,001. Num contentor encontram-se misturadas 500 rolhas dos dois tipos. Sabe-se que 300 são de champanhe. Tirando deste contentor uma rolha ao acaso, qual é a probabilidade de essa rolha ter defeito?

- (A) 0,0019
- (B) 0,0020
- (C) 0,0022
- (D) 0,0023

Resposta correta: (C)

Pergunta 56

Considera a sucessão real (u_n) . Sabe-se que $u_n = 5n + 1$ se $n < 1000$ e que $5 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 5 + \frac{1}{n}$ se $n > 1000$. O que se pode concluir?

- (A) (u_n) não tem limite.
- (B) $(u_n) \rightarrow 5$
- (C) $(u_n) \rightarrow +\infty$
- (D) Nada de se pode concluir quanto à existência de limite de (u_n) .

Resposta correta: (B)

Pergunta 57

Sejam (u_n) e (v_n) as sucessões reais seguintes:

$$u_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ par} \\ -2 & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases} \quad v_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n \leq 1000 \\ -2 & \text{se } n > 1000 \end{cases}$$

Qual das afirmações é verdadeira?

- (A) (u_n) e (v_n) são divergentes.
- (B) (u_n) e (v_n) são convergentes.
- (C) (u_n) é convergente e (v_n) é divergente.
- (D) (u_n) é divergente e (v_n) é convergente.

Resposta correta: (D)

Pergunta 58

Considera as sucessões reais:

$$u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \quad v_n = (-1)^n \times \frac{1}{2^n}$$

- (A) (u_n) e (v_n) são divergentes.
- (B) (u_n) e (v_n) são convergentes.
- (C) $(u_n \times v_n)$ é divergente.
- (D) $(u_n \times v_n)$ é limitada.

Resposta correta: (D)

Pergunta 59

Sejam (u_n) e (v_n) sucessões reais. A sucessão (v_n) é convergente para 1, sabendo-se ainda que $n \geq 300 \Rightarrow u_n \leq v_n$.

Qual das afirmações é verdadeira?

- (A) (u_n) é convergente e $\lim u_n \leq 1$.
- (B) (u_n) pode ser divergente.
- (C) Se (u_n) for convergente, então $\lim u_n < 1$.
- (D) (u_n) pode convergir para 2.

Resposta correta: (B)

Pergunta 60

Considera as duas afirmações seguintes a respeito de sucessões reais.

- I. A soma de duas sucessões divergentes é necessariamente divergente.
- II. A soma de uma sucessão convergente com uma sucessão divergente é necessariamente divergente.

Das afirmações anteriores:

- (A) I e II são verdadeiras.
- (B) I é verdadeira e II é falsa.
- (C) I é falsa e II é verdadeira
- (D) I e II são falsas.

Resposta correta: (C)

Pergunta 61

Considera as duas afirmações seguintes a respeito de sucessões reais.

- I. O produto de duas sucessões divergentes é necessariamente divergente.
- II. O produto de uma sucessão convergente por uma sucessão divergente é necessariamente divergente.

Das afirmações anteriores:

- (A) I e II são verdadeiras.
- (B) I é verdadeira e II é falsa.
- (C) I é falsa e II é verdadeira
- (D) I e II são falsas.

Resposta correta: (D)

Pergunta 62

Considera as duas afirmações seguintes a respeito de sucessões reais.

- I. A sucessão dos módulos de qualquer sucessão não limitada é um infinitamente grande positivo.
- II. Toda a sucessão convergente é monótona (em sentido lado).

Das afirmações anteriores:

- (A) I e II são verdadeiras.
- (B) I é verdadeira e II é falsa.
- (C) I é falsa e II é verdadeira
- (D) I e II são falsas.

Resposta correta: (D)

Pergunta 63

Seja f uma função, em $\mathbb{R}$, definida pela expressão $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$.

Qual das afirmações é verdadeira?

- (A) $\left(f\left(3+\frac{1}{n}\right)\right) \rightarrow +\infty$, $\left(f\left(3-\frac{1}{n}\right)\right) \rightarrow -\infty$ e $\left(f\left(3+(-1)^n \frac{1}{n}\right)\right)$ é divergente.
- (B) $\left(f(n^2)\right) \rightarrow 2$, $\left(f(-n^2)\right) \rightarrow -2$ e $\left(f\left(3+\frac{1}{n}\right)\right) \rightarrow +\infty$
- (C) $\left(f(n^2)\right) \rightarrow 2$, $\left(f(-n^2)\right) \rightarrow -2$ e $\left(f\left(3+(-1)^n \frac{1}{n}\right)\right) \rightarrow -\infty$
- (D) $\left(f(n^2)\right) \rightarrow +\infty$, $\left(f(-n^2)\right) \rightarrow -\infty$ e $\left(f\left(3+\frac{1}{n}\right)\right) \rightarrow 3$

Resposta correta: (A)

Pergunta 64

Seja f uma função real de variável real de contradomínio $[-5, 10]$, então:

- (A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 2x + 1} = 0$
- (B) pode não existir $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 2x + 1}$.
- (C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 2x + 1}$ pode ser 10.
- (D) não há dados suficientes para calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 2x + 1}$.

Resposta correta: (A)

Pergunta 65

Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{6x^2 + 5x + 1}{x^2 - 6x + 9}$.

Considera uma função g , real e de domínio $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, tal que $g(x) - f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Qual das opções é verdadeira?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 6$
- (B) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = +\infty$
- (C) $\lim_{x \rightarrow 3} (g - f)(x) = 0$
- (D) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$

Resposta correta: (B)

Pergunta 66

Seja $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, o contradomínio de f pode ser:

- (A) $[-8, 8] \setminus \{0\}$
- (B) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- (C) $[-8, 8]$
- (D) $] -8, 8[$

Resposta correta: (C)

Pergunta 67

Considera uma função $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(-2) = -5$, $f(2) = 5$ e que não tem zeros.

O que se pode concluir em relação a f ?

- (A) f pode ser ímpar.
- (B) f é descontínua.
- (C) f é negativa em $[-2, 0[$ e positiva em $]0, 2]$.
- (D) f é positiva em $[-2, 0[$ e positiva em $]0, 2]$.

Resposta correta: (B)

Pergunta 68

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 1$ e $f(-2) = -5$. O que se pode garantir?

- (A) f tem pelo menos um zero em $] -2, 1[$.
- (B) f não tem zeros em $] -2, 1[$.
- (C) f pode ser constante.
- (D) Se f for contínua, então existe um número real cuja imagem, por f , é -3.

Resposta correta: (D)

Pergunta 69

Considera as duas afirmações seguintes a respeito de funções reais de variável real contínuas.

- I. Uma função $f :]-2, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ pode ser sobrejetiva.
- II. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ter contradomínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Então:

- (A) I e II são verdadeiras.
- (B) I é verdadeira e II é falsa.
- (C) I é falsa e II é verdadeira
- (D) I e II são falsas.

Resposta correta: (B)

Pergunta 70

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e sobrejetiva. O que se pode dizer a respeito de D ?

- (A) D pode ser $[-1, 1]$.
- (B) D pode ser $] -1, 1[$.
- (C) D tem que ser $\mathbb{R}$.
- (D) D tem que ser um intervalo.

Resposta correta: (B)

Pergunta 71

Acerca de uma função f polinomial de grau 3 sabe-se que $f(-1) = -3$, $f(0) = 5$, $f(1) = 7$ e que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$. O que se pode afirmar?

- (A) f tem, pelo menos, um zero em $] -2, 1[$.
- (B) f tem pelo menos dois zeros mas não se pode saber se tem mais algum.
- (C) f tem exatamente dois zeros.
- (D) f pode ter apenas um zero.

Resposta correta: (A)

Pergunta 72

Seja f uma função real de variável real contínua, de contradomínio $[-5, 10]$. Então:

- (A) o contradomínio de $\frac{1}{f}$ é $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right]$.
- (B) pode aplicar-se a $\frac{1}{f}$ o teorema de Bolzano-Cauchy.
- (C) pode aplicar-se a $\frac{1}{f}$ o teorema de Weierstrass.
- (D) $\frac{1}{f}$ não toma o valor 0,01.

Resposta correta: (D)

Pergunta 73

Considera a família de funções reais $(f_k)_{k \in \mathbb{R}}$, de domínio $[2, 10]$, tais que, para cada $k \in \mathbb{R}$:

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 3} & \text{se } x \neq 3 \\ k & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

A qual das opções se pode aplicar o teorema de Weierstrass?

(A) $f_{\frac{1}{2}}$.

(B) $f_{-\frac{1}{2}}$.

(C) f_0 .

(D) A nenhuma.

Resposta correta: (A)

Pergunta 74

Considere f e g funções reais de variável real, de domínio $[-6, 6]$. Sabe-se que $f + g$ é uma função contínua, que $(f + g)(-6) < 0$ e que $(f + g)(-6) > 0$. Qual das opções é a correta?

(A) Pode concluir-se que f e g têm pelo menos um zero.

(B) Pode concluir-se que f ou g tem pelo menos um zero.

(C) Pode concluir-se que nem f nem g têm zeros.

(D) Nada se pode concluir sobre a existência de zeros nem de f nem de g .

Resposta correta: (D)

Pergunta 75

Sejam f e g funções reais de variável real, contínuas, de domínio $[-6, 6]$. Sabe-se que $f(-6)$, $f(6)$ e $g(6)$ são positivos e que $g(-6)$ é negativo. O que se pode concluir?

(A) f e g têm zeros.

(B) $f + g$ tem pelo menos um zero.

(C) $f \times g$ tem pelo menos um zero.

(D) $\frac{f}{g}$ não tem zeros.

Resposta correta: (C)

Pergunta 76

Seja f definida por $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x & \text{se } x < 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Então, $f'(x)$ é definida por:

(A) $\begin{cases} 6x & \text{se } x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} 6x & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 6x+1 & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 6x+1 & \text{se } x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Resposta correta: (D)

Pergunta 77

Seja f definida por $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Então, $f'(x)$ é definida por:

(A) $\begin{cases} 3x^2 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ 2x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} 3x^2 & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 3x^2 & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 3x^2 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 2x+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Resposta correta: (C)

Pergunta 78

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f'(x) = x^2 - 6x + 5$. Então:

- (A) f atinge um máximo relativo em 3.
- (B) o gráfico de f tem um ponto de inflexão com abscissa 3.
- (C) f é decrescente em $]-\infty, 3[$.
- (D) o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 3]$ e a concavidade voltada para baixo em $[3, +\infty[$.

Resposta correta: (B)

Pergunta 79

Considera as duas afirmações seguintes a respeito de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

- I. Se uma função é diferenciável num ponto, então é contínua nesse ponto.
- II. Toda a função contínua em $[-1, 1]$ é diferenciável em $] -1, 1[$.

Então, quanto ao valor lógico destas afirmações, pode-se dizer que:

- (A) I e II são verdadeiras.
- (B) I é verdadeira e II é falsa.
- (C) I é falsa e II é verdadeira.
- (D) I e II são falsas.

Resposta correta: (B)

Pergunta 80

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabe-se que $f(3) = 5$ e que $f'(3) = 2$.

Acerca do limite $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 5}{x^2 - 8x + 15}$, qual das afirmações é verdadeira?

- (A) Não se pode calcular por falta de dados.
- (B) Não existe.
- (C) É -1.
- (D) É 0.

Resposta correta: (C)

Pergunta 81

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Sabe-se que $f(1) = 1$ e que $f'(1) = 2$.

Acerca do limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 9x^2 + 15x - 7}{f(x) - 1}$, qual das afirmações é verdadeira?

- (A) Não se pode calcular por falta de dados.
- (B) Não existe.
- (C) É -3.
- (D) É 0.

Resposta correta: (D)

Pergunta 82

Acerca de uma função f , polinomial de grau 3, sabe-se que:

- o ponto de coordenadas $(0, 0)$ pertence ao gráfico de f ;
- o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(0, 0)$ é 4;
- o ponto de coordenadas $(2, -8)$ é ponto de inflexão do gráfico de f .

Então, o polinómio que define f :

- (A) tem coeficiente de grau 3 igual a 1 e coeficiente de grau 1 igual a 4.
- (B) tem coeficiente de grau 2 igual a -6 e termo independente igual a 1.
- (C) tem coeficiente de grau 3 igual a 1 e coeficiente de grau 2 igual a 0.
- (D) tem coeficientes de grau 2 e de grau 1 iguais a -6.

Resposta correta: (A)

Pergunta 83

A figura representa um vitral formado por dois triângulos equiláteros e um retângulo. O perímetro do vitral é 20 metros. Indica a afirmação verdadeira.

- (A) Quando a largura do vitral é 5 m, a área do vitral é máxima.
- (B) A área é máxima para $x = \frac{40 + 10\sqrt{3}}{13}$.
- (C) A expressão que representa a área do vitral é $10x - x^2 + \sqrt{3}x^2$.
- (D) Quando a largura do vitral é 5,5 m, a área do vitral é máxima.

Resposta correta: (D)



Pergunta 84

Considera as duas afirmações seguintes a respeito de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

- I. A função módulo de uma qualquer função diferenciável é diferenciável.
- II. A função módulo de uma qualquer função não diferenciável é não diferenciável.

Então, quanto ao valor lógico destas afirmações, pode-se dizer que:

- (A) I e II são verdadeiras.
- (B) I é verdadeira e II é falsa.
- (C) I é falsa e II é verdadeira.
- (D) I e II são falsas.

Resposta correta: (D)

Pergunta 85

Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ pela expressão $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^4 - 5x^3 + 6x^2}$.

Qual das afirmações é verdadeira?

- (A) f tem apenas um zero e as retas de equações $x = 0$ e $x = 3$ são as únicas assíntotas verticais ao gráfico de f .
- (B) f tem dois zeros e as retas de equações $x = 0$ e $x = 3$ são as únicas assíntotas verticais ao gráfico de f .
- (C) f tem não tem zeros e as retas de equações $x = 0$, $x = 2$ e $x = 3$ são as únicas assíntotas verticais ao gráfico de f .
- (D) f tem dois zeros e as retas de equações $x = 0$, $x = 2$ e $x = 3$ são as únicas assíntotas verticais ao gráfico de f .

Resposta correta: (A)

Pergunta 86

Quando o Francisco nasceu, o avô abriu-lhe uma conta e depositou 800 euros, à taxa anual de 3%. Supondo que a taxa se mantém, qual será o capital acumulado quando o Francisco completar 18 anos?

- (A) 961,95 euros
- (B) 1261,95 euros
- (C) 1322,28 euros
- (D) 1361,95 euros

Resposta correta: (D)

Pergunta 87

Qual a taxa anual de um depósito que triplicou ao fim de 20 anos?

- (A) 4,79%
- (B) 5,02%
- (C) 5,65%
- (D) 6,56%

Resposta correta: (C)

Pergunta 88

Considera um depósito de 2000 euros à taxa anual de 3,3%, em regime de juro composto, em que os juros foram pagos quadrimestralmente e capitalizados. Quanto rendeu ao fim de um ano?

- (A) 50,21 euros
- (B) 66,73 euros
- (C) 67,23 euros
- (D) 89,46 euros

Resposta correta: (B)

Pergunta 89

Quando o João fez 15 anos, a tia Helena depositou-lhe numa conta 5000 euros. O depósito foi feito em regime de juros compostos pagos anualmente e capitalizados. Ao completar 18 anos, o João tinha na conta, que nunca movimentou, 5591,93 euros. Qual a taxa anual aplicada a esse depósito?

- (A) 3,2%
- (B) 3,8%
- (C) 4,5%
- (D) 5,8%

Resposta correta: (B)

Pergunta 90

A Sofia dispõe de 10 000 euros para investir. Quatro bancos apresentaram-lhe as seguintes propostas, todas com juros compostos capitalizáveis, para um depósito de 4 anos:

Banco A – juros pagos mensalmente à taxa anual de 2,0%

Banco B – juros pagos trimestralmente à taxa anual de 2,5%

Banco C – juros pagos quadrimestralmente à taxa anual de 2,8%

Banco D – juros pagos anualmente à taxa anual de 3,0%

A Sofia analisou as propostas e decidiu-se pela mais favorável. Qual foi a opção da Sofia?

(A) Banco A

(B) Banco B

(C) Banco C

(D) Banco D

Resposta correta: (D)

Pergunta 91

A que corresponde o número de Neper?

(A) A 2,718.

(B) A 27,18.

(C) Ao limite da sucessão de termo geral $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

(D) Ao limite da sucessão de termo geral $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

Resposta correta: (D)

Pergunta 92

Em relação à sucessão $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, qual das opções está correta?

(A) u_n não é estritamente monótona mas é limitada.

(B) u_n não é limitada mas é estritamente monótona.

(C) u_n tem limite irracional.

(D) u_n converge para 1.

Resposta correta: (C)

Pergunta 93

Em relação ao número de Neper, o que se pode afirmar?

- (A) É um número racional entre 2,71 e 2,72.
- (B) É um número irracional entre 2,72 e 2,73.
- (C) É um número irracional entre 2 e 3.
- (D) É número que se pode representar por 2718×10^{-3} .

Resposta correta: (C)

Pergunta 94

Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - e^2}{e - x} & \text{se } x \neq e \\ -2e & \text{se } x = e \end{cases}$$

Considera as duas afirmações seguintes:

- I. O único zero de f é $-e$.
- II. f é descontínua em e .

Então, o que podes dizer em relação ao valor lógico das afirmações?

- (A) I e II são ambas verdadeiras.
- (B) I é verdadeira e II é falsa.
- (C) I é falsa e II é verdadeira.
- (D) I e II são ambas falsas.

Resposta correta: (B)

Pergunta 95

Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, pela expressão $\frac{1}{x - e}$.

Considera a sucessão $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. O que podes dizer sobre $f(u_n)$?

- (A) Tende para e .
- (B) Tende para $-\infty$.
- (C) Tende para $+\infty$.
- (D) Tende para $\frac{1}{1 - e}$.

Resposta correta: (B)

Pergunta 96

Sabendo que a é um número real tal que $3^a = 7$, qual o valor da expressão $9^{-a+\frac{1}{2}}$?

- (A) $\frac{9}{49}$
- (B) $\frac{148}{49}$
- (C) $\frac{3}{49}$
- (D) $\frac{442}{49}$

Resposta correta: (C)

Pergunta 97

Sendo b um número real tal que $2^{3b+1} = 10$, qual o valor da expressão $2^{4b} + 1$?

- (A) $10\sqrt[3]{5}$
- (B) $1+5\sqrt[3]{5}$
- (C) $5^{\frac{4}{3}}$
- (D) $1+5\sqrt{5}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 98

Em $\mathbb{R}$, a equação $7^{|x^2-3x|} = 49$ é equivalente a que opção?

- (A) $x = 1 \vee x = 2$
- (B) $x = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$
- (C) $x = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \vee x = 1 \vee x = 2$
- (D) $x = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \vee x = 1 \vee x = 2$

Resposta correta: (D)

Pergunta 99

Qual o conjunto-solução, em $\mathbb{R}$, da inequação $5^{|x-2|} \leq 125$?

- (A) $[-1, 5]$
- (B) $]-\infty, -1] \cup [5, +\infty[$
- (C) $\emptyset$
- (D) $] -1, 5[$

Resposta correta: (A)

Pergunta 100

Indica o domínio da função definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{-2^{2x} + 10 \times 2^x - 16}}{x^2 - 4}$$

- (A) $[4, 8]$
- (B) $[2, 8] \setminus \{2\}$
- (C) $]2, 3]$
- (D) $[1, 3] \setminus \{2\}$

Resposta correta: (C)

Pergunta 101

Os limites das sucessões $\left(\frac{4n+1}{2n+3}\right)^n$, $\left(\frac{2n+1}{4n+3}\right)^n$ e $\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n$ são, respetivamente:

- (A) $0, +\infty$ e e^{-2} .
- (B) $+\infty, 0$ e e^{-2} .
- (C) $+\infty, 0$ e e^2 .
- (D) $+\infty, 0$ e e .

Resposta correta: (B)

Pergunta 102

Os limites das sucessões $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$ e $\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+1}\right)^n$ são, respetivamente:

- (A) 1 e e^2
- (B) 1 e e^3
- (C) 0 e e^3
- (D) 1 e e

Resposta correta: (B)

Pergunta 103

Considera, para cada $k \in \mathbb{R}$, a função f_k definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{3x}}{4x} & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Para que a função seja contínua em 0 , o valor de k terá de ser:

- (A) $-\frac{3}{4}$
- (B) $\frac{3}{4}$
- (C) 3
- (D) 1

Resposta correta: (A)

Pergunta 104

Considera a função real f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Quais são as assíntotas paralelas aos eixos do gráfico?

- (A) $x = 0 \vee y = 0$
- (B) $x = 0 \vee y = 1$
- (C) $y = 0$ e $y = 1$
- (D) $x = 0$, $y = 0$ e $y = 1$

Resposta correta: (D)

Pergunta 105

O que se pode dizer em relação ao gráfico da função definida pela seguinte função?

$$f(x) = \frac{5}{1 + 4e^{-x}}$$

- (A) Não tem assíntotas.
- (B) Tem duas assíntotas horizontais.
- (C) Tem uma assíntota oblíqua.
- (D) Tem uma assíntota vertical e outra horizontal.

Resposta correta: (B)

Pergunta 106

Qual o domínio da função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \frac{\ln(x+2)-1}{e^{x^2-3}-e}$?

- (A) $] -2, 2[\cup] 2, +\infty[$
- (B) $] 2, +\infty[$
- (C) $] -2, +\infty[$
- (D) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

Resposta correta: (A)

Pergunta 107

Qual o domínio da função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \ln(|x^2 - 5x| - 6)$?

- (A) $] -\infty, -1] \cup [2, 3] \cup [6, +\infty[$
- (B) $] -\infty, -1[\cup] 2, 3[\cup] 6, +\infty[$
- (C) $] -1, 6[$
- (D) $] 2, 3[$

Resposta correta: (B)

Pergunta 108

Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \ln(x^2 - 9)$.

Qual das afirmações é verdadeira?

- (A) É estritamente decrescente.
- (B) f tem exatamente três zeros.
- (C) O gráfico de f não tem assíntotas.
- (D) O gráfico de f tem duas assíntotas verticais.

Resposta correta: (D)

Pergunta 109

Sendo f a função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = -3 - \ln(x+1)$, a função inversa de f pode ser definida por qual expressão?

- (A) $e^{-x+3} - 1$
- (B) $e^{-x-3} - 1$
- (C) $-\frac{1}{3 + \ln(x+1)}$
- (D) $\frac{1}{3 + \ln(x+1)}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 110

Os limites $\lim_{x \rightarrow 4^-} \ln(16 - x^2)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(x+2) - \ln(8x+3)]$ são, respetivamente:

- (A) $-\infty$ e $-\ln(8)$
- (B) $-\infty$ e $\ln(8)$
- (C) 0 e $\ln(8)$
- (D) 0 e $-\ln(8)$

Resposta correta: (A)

Pergunta 111

Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 + e^{\frac{1}{x^2}}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Considera as afirmações seguintes:

- I. f é descontínua em 0.
- II. A reta de equação $y = \ln 2$ é a única assíntota do gráfico de f .

Então, a respeito do valor lógico das afirmações, o que se pode dizer?

- (A) I e II são verdadeiras.
- (B) I é verdadeira e II é falsa.
- (C) I e II são falsas.
- (D) I é falsa e II é verdadeira.

Resposta correta: (D)

Pergunta 112

Sendo f a função real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x-1)}{x^2-x-2} & \text{se } x > 2 \\ \frac{1}{3} & \text{se } x = 2 \\ \frac{e^{x-2}-1}{3x-6} & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Considera as afirmações seguintes:

- I. Dado um intervalo fechado e limitado qualquer, pode aplicar-se o teorema de Weierstrass à restrição de f a esse intervalo.
- II. A reta de equação $y = 0$ é assíntota do gráfico de f .

Então, a respeito do valor lógico das afirmações, o que se pode dizer?

- (A) I e II são verdadeiras.
- (B) I é verdadeira e II é falsa.
- (C) I e II são falsas.
- (D) I é falsa e II é verdadeira.

Resposta correta: (A)

Pergunta 113

Qual das seguintes afirmações a respeito da função f definida pela expressão $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$ é falsa?

- (A) O único zero de f é 0.
- (B) f é estritamente decrescente.
- (C) O gráfico de f não tem assíntotas.
- (D) $(0, 0)$ é ponto de inflexão do gráfico de f .

Resposta correta: (C)

Pergunta 114

Em relação à função real f tal que $f(x) = \ln(|\ln x|)$, considera as afirmações seguintes:

- I. O domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- II. f é diferenciável e $f'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$.
- III. O gráfico de f tem um único ponto de inflexão: o ponto $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$.
- IV. O gráfico de f tem apenas uma assíntota vertical.

Quais são as afirmações verdadeiras?

- (A) I e II
- (B) II e IV
- (C) III e IV
- (D) II e III

Resposta correta: (D)

Pergunta 115

Considera a função real de variável real f tal que $f(x) = \ln(|x^2 - 1|)$ e as afirmações seguintes:

- I. f tem um máximo relativo em 0 com valor 0.
- II. f tem três zeros.
- III. O gráfico de f tem duas assíntotas verticais.
- IV. f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$.

Quais são as afirmações verdadeiras?

- (A) I e II
- (B) II e IV
- (C) I, II e III
- (D) II, III e IV

Resposta correta: (C)

Pergunta 116

Uma loja de bicicletas fez uma campanha publicitária para promover a venda de bicicletas. O número de bicicletas vendidas em cada dia, t dias após terminada a campanha publicitária, é modelado, aproximadamente, pela função $b(t) = 32 + 58e^{-0,15t}$. Qual das opções está correta?

- (A) Ao fim de 10 dias, a loja vendeu 15 bicicletas.
- (B) 18 dias após o fim da campanha publicitária, a loja vendeu, nesse dia, mais de 40 bicicletas.
- (C) No instante em que terminou a campanha publicitária, a loja vendeu 32 bicicletas.
- (D) Se não houver mais nenhuma campanha publicitária, a loja tenderá a vender diariamente 32 bicicletas.

Resposta correta: (D)

Pergunta 117

O lucro L , em euros, obtido com a venda de uma bicicleta depende do número x de unidades produzidas mensalmente pelo fabricante. Considera que a função que representa esta relação é $L(x) = \ln(950x^2 + 1)$. Qual das opções está correta?

- (A) Se a produção mensal for de 500 bicicletas, então o lucro unitário será, aproximadamente, 9 €.
- (B) Para ter um lucro unitário de 20 €, devem ser produzidas mensalmente 140 bicicletas.
- (C) Se em algum mês não houver produção, a empresa tem prejuízo.
- (D) A empresa terá 12,4 € de lucro unitário se produzir, aproximadamente, 16 unidades mensalmente.

Resposta correta: (D)

Pergunta 118

Admite que o número de formigas existentes num formigueiro é dado por uma função da família de $F(t) = \log_3(a + bt)$, com t em dias e $F(t)$ em milhares de formigas. No início da contagem existiam 3000 formigas no formigueiro e, passados nove dias, o número já tinha triplicado. Quais são os valores de a e b ?

- (A) $a = 3$, $b = 3$
- (B) $a = 9$, $b = 1$
- (C) $a = 27$, $b = 21$
- (D) $a = 27$, $b = 2184$

Resposta correta: (D)

Pergunta 119

O preço de um parque de estacionamento é modelado pela função $P(t) = 1,2 + 2,1 \ln(t^2)$, onde t representa o número de horas de estacionamento e P o valor a pagar em euros. Qual o preço de uma hora de estacionamento?

- (A) 1 €
- (B) 1,1 €
- (C) 1,2 €
- (D) 1,3 €

Resposta correta: (C)

Pergunta 120

A valorização de uma certa joia é dada pela função $V(x) = 7500 \times 1,04^x$, em que V é o valor da joia ao fim de x anos após a sua criação. Ao fim de quantos anos, após a criação, o valor da joia é superior ao triplo do valor inicial?

- (A) 10 anos
- (B) 14 anos
- (C) 20 anos
- (D) 29 anos

Resposta correta: (D)

Pergunta 121

Qual o valor exato da expressão $2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$?

- (A) $-\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$
- (B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- (C) $\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$
- (D) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Resposta correta: (C)

Pergunta 122

Sendo $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\sin\left(-\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$, qual o valor da expressão $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) - \cos(\alpha - 3\pi)$?

- (A) $\frac{1}{3} + \sqrt{2}$
- (B) $\frac{1}{3} - 2\sqrt{2}$
- (C) $\frac{1}{3} + 2\sqrt{2}$
- (D) $\frac{1}{3} - \sqrt{2}$

Resposta correta: (C)

Pergunta 123

Qual o contradomínio da função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{1}{2} + 3\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$?

- (A) $[-1, 1]$
- (B) $\left[-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$
- (C) $[-3, 3]$
- (D) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Resposta correta: (B)

Pergunta 124

Quais os zeros da função g definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = \operatorname{sen}^2 x - 1$?

- (A) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (B) $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (C) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (D) $\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 125

Qual o período fundamental da função h definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = 1 + \cos(3x)$?

- (A) $\frac{\pi}{2}$
- (B) 2π
- (C) $\frac{2\pi}{3}$
- (D) π

Resposta correta: (C)

Pergunta 126

Qual o valor exato de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$?

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- (C) $\sqrt{2}$
- (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 127

Qual o valor exato de $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - \frac{1}{2}$?

- (A) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$
- (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (C) $\sqrt{3}$
- (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Resposta correta: (D)

Pergunta 128

Qual o valor exato de $\frac{1}{\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\left(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)} \times \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)$?

- (A) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
- (B) $\frac{1}{2}$
- (C) 2
- (D) 1

Resposta correta: (B)

Pergunta 129

Sabendo que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$, qual o valor exato de $\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2$?

- (A) $\frac{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$
- (B) $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$
- (C) $\frac{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$
- (D) $\frac{1 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$

Resposta correta: (C)

Pergunta 130

Qual a expressão equivalente a $\frac{2\operatorname{sen}(2x)}{1 + \cos(2x)}$?

- (A) $2\operatorname{tg}x$
- (B) $\operatorname{tg}x$
- (C) $\operatorname{tg}(2x)$
- (D) $2\operatorname{tg}(2x)$

Resposta correta: (A)

Pergunta 131

Sabendo que $\cos(\alpha) = -\frac{3}{5}$ e que $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$, qual o valor exato de $\cos(2\alpha)$?

- (A) $\frac{7}{25}$
- (B) $-\frac{7}{25}$
- (C) $\frac{7}{5}$
- (D) $-\frac{7}{5}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 132

Qual o valor de $1 + \left(\frac{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right)} \right)^2$?

- (A) $\operatorname{tg}\left(\frac{9}{20}\pi\right)$
- (B) $\left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{9}{20}\pi\right)\right)^{-1}$
- (C) $\cos^2\left(\frac{9}{20}\pi\right)$
- (D) 1

Resposta correta: (B)

Pergunta 133

Quais são as soluções da equação $(2 + 2\cos(2x))\operatorname{sen}x = \cos x$, em $[0, 2\pi[$?

- (A) $x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12} \vee x = \frac{13\pi}{12} \vee x = \frac{17\pi}{12}$
- (B) $x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12} \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{13\pi}{12} \vee x = \frac{3\pi}{2} \vee x = \frac{17\pi}{12}$
- (C) $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{11\pi}{6} \vee x = \frac{3\pi}{2}$
- (D) $x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 134

Qual o valor da área de um triângulo retângulo, em que a hipotenusa tem 100 metros e um dos ângulos agudos tem 15° de amplitude?

- (A) 750 m^2
- (B) 1000 m^2
- (C) 1250 m^2
- (D) 1500 m^2

Resposta correta: (C)

Pergunta 135

Qual o valor de $\sin\left(\frac{13}{12}\pi\right) + \cos\left(\frac{11}{12}\pi\right)$?

- (A) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{4} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$
- (B) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$
- (C) 0
- (D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 136

Qual dos seguintes limites não existe?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
- (B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$
- (C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$
- (D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x}$

Resposta correta: (C)

Pergunta 137

Qual o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{\tan^2(5x)}$?

- (A) $\frac{3}{5}$
- (B) $\frac{9}{25}$
- (C) 1
- (D) Não existe.

Resposta correta: (B)

Pergunta 138

Considera, para cada $k \in \mathbb{R}$, a função f_k definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{4x} & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Para que a função seja contínua em 0, qual o valor que k terá de tomar?

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 4

Resposta correta: (A)

Pergunta 139

A que limite corresponde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2}$?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$
- (B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
- (C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
- (D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x}$

Resposta correta: (C)

Pergunta 140

O único prolongamento contínuo da função real definida, para $x \neq 0$, por $\frac{1 - \cos(7x)}{4x^2}$ toma, em zero, qual valor?

- (A) $\frac{7}{8}$
- (B) $\frac{1}{4}$
- (C) $\frac{49}{4}$
- (D) $\frac{49}{8}$

Resposta correta: (D)

Pergunta 141

Considera a família de funções $(f_k)_{k \in \mathbb{R}}$ definidas em $\mathbb{R}$ por:

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{8\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ k-5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

A qual das funções da família pode aplicar-se o teorema de Bolzano-Cauchy em $[-2\pi, 2\pi]$?

- (A) f_0
- (B) f_2
- (C) f_7
- (D) f_{13}

Resposta correta: (C)

Pergunta 142

Sejam f e g funções definidas, em $\mathbb{R}$, respetivamente por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(2x)-1}{2x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) & \text{se } x > 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Considera as afirmações seguintes:

- I. Pode aplicar-se o teorema de Weierstrass à restrição de f a $[-2\pi, 2\pi]$.
- II. Pode aplicar-se o teorema de Bolzano-Cauchy à restrição de g a $\left[\frac{-2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Então, em relação ao valor lógico das afirmações, o que se pode dizer?

- (A) I e II são verdadeiras.
- (B) I é verdadeira e II é falsa.
- (C) I e II são falsas.
- (D) I é falsa e II é verdadeira.

Resposta correta: (B)

Pergunta 143

Indica o número de assíntotas ao gráfico da função $f: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x^4} + \operatorname{tg} x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3

Resposta correta: (D)

Pergunta 144

Indica as assíntotas ao gráfico de f , função real de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- (A) $y = 0$ e $x = 0$
- (B) $y = 0, y = 1$ e $x = 0$
- (C) $y = 0$ e $y = 1$
- (D) $y = 1$ e $x = 0$

Resposta correta: (B)

Pergunta 145

Considera a família de funções $(f_k)_{k \in \mathbb{R}}$ reais, de domínio $]2 - \pi, 2[$, tais que:

$$\forall k \in \mathbb{R}, f_k(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{\operatorname{sen}(2 - x)} & \text{se } x < 2 \\ k & \text{se } x = 2 \\ \cos(\pi x) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Indica a opção correta.

- (A) f é contínua em 2 se e somente se k for igual a 0.
- (B) f é contínua em 2 se e somente se k for igual a 2.
- (C) f é descontínua em 2 qualquer que seja o valor de k .
- (D) f é contínua em 2 se e somente se k for igual a 1.

Resposta correta: (D)

Pergunta 146

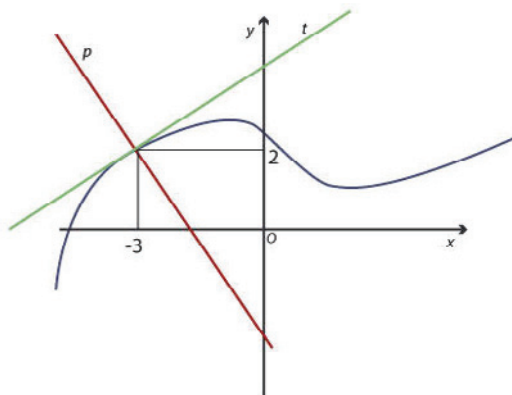
Considera a função definida, em $\mathbb{R}$, por $\cos(2x) + x - 1$. Quantas são as retas tangentes horizontais ao gráfico da função, em que o ponto de tangência tem abscissa em $[-2\pi, 2\pi]$?

- (A) 4
- (B) 6
- (C) 7
- (D) 8

Resposta correta: (D)

Pergunta 147

Na figura está representada parte do gráfico de uma função f . A reta t é tangente ao gráfico de f no ponto $(-3, 2)$ e a reta p , que tem ordenada na origem -2 , é a reta perpendicular à reta t no ponto de tangência.



O valor de $f'(-3)$ é:

- (A) $\frac{3}{4}$
- (B) $-\frac{3}{4}$
- (C) $\frac{4}{3}$
- (D) $-\frac{4}{3}$

Resposta correta: (A)

Pergunta 148

A derivada da função definida por $\sin^3(2x)$ é definida por:

- (A) $6\sin^3(2x)$
- (B) $3\sin(4x)\sin(2x)$
- (C) $6\sin(4x)\sin^2(2x)$
- (D) $3\sin^2(2x)$

Resposta correta: (B)

Pergunta 149

Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ pela expressão $\sin x + \cos x$. O conjunto das soluções da equação

$f(x) - f'(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ em $[-\pi, \pi]$ é:

- (A) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$
- (B) $\left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$
- (C) $\left\{\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right\}$
- (D) $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

Resposta correta: (A)

Pergunta 150

O $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x - \frac{1}{2}}{\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}}$ é:

- (A) 1
- (B) -1
- (C) $+\infty$
- (D) 0

Resposta correta: (D)

Pergunta 151

Considera a função f definida em $\mathbb{R}$ por:

$$\begin{cases} 4x - \sin(3x) & \text{se } x < 0 \\ x - \cos(3x) + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0 é a reta de equação:

- (A) $y = x$
- (B) $y = 0$
- (C) $y = -1$
- (D) $y = -2$

Resposta correta: (A)

Pergunta 152

Sendo f a função definida, em $\mathbb{R}$, por $\sin x - \sqrt{3} \cos x$, os zeros de $f'(x) - 1$ são os números reais da forma:

- (A) $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (B) $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (C) $\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (D) $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e $\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 153

Os pontos de inflexão do gráfico da função real de domínio $\mathbb{R}$ definida por: $x + \cos(2x)$ são os pontos de coordenadas da forma:

- (A) $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
- (B) $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$
- (C) $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$
- (D) $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 154

Uma equação da reta tangente ao gráfico da função definida pela expressão:

$$\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{tg} x}$$

no ponto de abscissa $\frac{\pi}{4}$ é:

(A) $y = -2\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

(B) $y = 2\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}$

(C) $y = 2\sqrt{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}$

(D) $y = -2\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}$

Resposta correta: (D)

Pergunta 155

Uma função f toma o valor $\frac{\sqrt{2}}{2}$ em $\frac{\pi}{4}$. A derivada de f é definida por: $1 + \operatorname{tg}^2(x) - \operatorname{sen} x$.

Então uma expressão que define f é:

(A) $\operatorname{tg} x - \cos x$

(B) $\operatorname{tg} x - \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

(C) $\frac{\operatorname{sen} x - \cos^2(x)}{\cos x} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

(D) $\operatorname{tg} x + \cos x - 1$

Resposta correta: (D)

Pergunta 156

Indica o período positivo mínimo da função definida, em $\mathbb{R}$ por $7\sin\left(\frac{3}{5}x\right)$.

- (A) $\frac{10}{3}$
- (B) $\frac{10}{3}\pi$
- (C) 7
- (D) $\frac{3}{5}\pi$

Resposta correta: (B)

Pergunta 157

Indica o período positivo mínimo da função definida, em $\mathbb{R}$, por $2\cos(-5x + 3\pi) + 8$.

- (A) $-\frac{2}{5}\pi$
- (B) $\frac{8}{5}\pi$
- (C) $\frac{2}{5}\pi$
- (D) π

Resposta correta: (C)

Pergunta 158

Indica um dos períodos da função definida, em $\mathbb{R}$, por $\cos(4x) + \sin(2x) + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

- (A) $\frac{\pi}{2}$
- (B) π
- (C) 3π
- (D) 4π

Resposta correta: (D)

Pergunta 159

Indica como se obtém, a partir do gráfico da função cosseno, o gráfico da função definida, em $\mathbb{R}$, por $\cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$.

- (A) Através de uma translação horizontal associada ao vetor $\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$.
- (B) Através de uma contração horizontal segundo o fator $\frac{8}{\pi}$.
- (C) Através de uma dilatação horizontal segundo o fator $\frac{\pi}{8}$.
- (D) Através de uma translação horizontal associada ao vetor $\left(-\frac{\pi}{8}, 0\right)$.

Resposta correta: (D)

Pergunta 160

Indica como se pode obter o gráfico da função $y = \cos x$ a partir do gráfico da função $y = \sin x$.

- (A) Através de uma translação associada ao vetor $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
- (B) Através de uma translação associada ao vetor $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$.
- (C) Através de uma translação associada ao vetor $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, seguida de uma reflexão no eixo das abcissas.
- (D) Através de uma reflexão no eixo das abcissas.

Resposta correta: (C)

Pergunta 161

Considera a função real f , de domínio $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = a \sin(x+b) + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Sabe-se que o gráfico de f se pode obter a partir do gráfico da função seno através (sucessivamente) de:

- uma translação associada ao vetor $\left(\frac{\pi}{5}, 0\right)$;
- uma contração vertical de fator $\frac{1}{2}$;
- uma translação associada ao vetor $(0, -3)$.

Então, $f(x)$ pode ser:

- (A) $\frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) - 3$
- (B) $\frac{1}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) - 3$
- (C) $\frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) + 3$
- (D) $-3 \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}$

Resposta correta: (A)

Pergunta 162

Indica o domínio e o contradomínio da função real de variável real definida por $-3 \sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

- (A) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{15}\right\}$ e $D' = [-3, 0]$
- (B) $D = \mathbb{R}$ e $D' = [-2, 4]$
- (C) $D = \mathbb{R}$ e $D' = [-4, 2]$
- (D) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{15} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $D' = [-4, 2]$

Resposta correta: (C)

Pergunta 163

Indica o domínio e o contradomínio da função real de variável real definida por $-\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$.

- (A) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $D' = \mathbb{R}$
- (B) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $D' = \mathbb{R}$
- (C) $D = \mathbb{R}$ e $D' =]-\infty, 2]$
- (D) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $D' =]-\infty, 2]$

Resposta correta: (A)

Pergunta 164

O gráfico da função definida, em $\mathbb{R}$, por $\operatorname{tg}(0,4x + 6)$ pode obter-se a partir do gráfico da função tangente de que forma?

- (A) Através de uma dilatação horizontal segundo fator 2,5, seguida duma translação associada ao vetor $(15, 0)$.
- (B) Através de uma dilatação horizontal segundo fator 2,5, seguida duma translação associada ao vetor $(-15, 0)$.
- (C) Através de uma dilatação vertical segundo fator 2,5, seguida duma translação associada ao vetor $(-6, 0)$.
- (D) Através de uma dilatação vertical segundo fator 2,5, seguida duma translação associada ao vetor $(6, 0)$.

Resposta correta: (B)

Pergunta 165

Considera a função real f , de domínio $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = a \cos(bx + c) + d$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Sabe-se que o gráfico de f se pode obter a partir do gráfico da função cosseno através (sucessivamente) de:

- uma contração horizontal segundo fator $\frac{1}{4}$;
- uma translação associada ao vetor $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$;
- uma dilatação vertical de fator 2;
- uma translação associada ao vetor $(0, -7)$.

Indica a opção correta.

(A) $a = 2$, $b = 4$, $c = -3$ e $d = 7$

(B) $a = 2$, $b = 4$, $c = -\frac{3}{4}$ e $d = -7$

(C) $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$, $c = 3$ e $d = -7$

(D) $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$ e $d = -7$

Resposta correta: (D)

Pergunta 166

Um ponto desloca-se sobre uma reta numérica de tal modo que a sua abcissa $x(t)$ é dada por $7 \cos(4\pi t + 1)$, t segundos após um certo instante inicial. A pulsação e a frequência deste oscilador harmónico são, respetivamente:

(A) 4π e $\frac{1}{2}$

(B) 4π e 2

(C) 7 e 2

(D) 7 e $\frac{1}{2}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 167

Considera o movimento de um ponto P numa reta numérica, no intervalo $[0, 6]$, como sendo um oscilador harmónico de amplitude 5, pulsação 2 e fase $\frac{\pi}{3}$. Os instantes, com aproximação às centésimas, para os quais a abscissa de P é -5 são:

- (A) $t \in \{1,67; 3,67\}$
- (B) $t \in \{0,67; 2,67; 4,67\}$
- (C) $t \in \{1,05; 4,19\}$
- (D) $t \in \{2,09; 5,24\}$

Resposta correta: (C)

Pergunta 168

O movimento de um ponto P numa reta numérica, no intervalo $[0, 4]$, é um oscilador harmónico de amplitude 4, período 2 e fase $\frac{\pi}{6}$. Os instantes, com aproximação às centésimas, para os quais a abscissa de P é nula são:

- (A) $t \in \{0,83; 1,83; 2,83; 3,83\}$
- (B) $t \in \{0,33; 1,33; 2,33\}$
- (C) $t \in \{1,83; 2,83; 3,83; 4,83\}$
- (D) $t \in \{1,33; 2,33; 3,33\}$

Resposta correta: (A)

Pergunta 169

Um ponto desloca-se sobre uma reta numérica de tal modo que a sua abscissa $x(t)$ é dada por $\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$, t segundos após um certo instante inicial. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Trata-se de um oscilador harmónico de amplitude $\sqrt{2}$, frequência $\frac{1}{12}$ e fase $\frac{7\pi}{4}$.
- (B) Trata-se de um oscilador harmónico de amplitude $\sqrt{2}$, frequência $\frac{1}{12}$ e fase $-\frac{\pi}{4}$.
- (C) Trata-se de um oscilador harmónico de amplitude 1, frequência $\frac{1}{2}$ e fase $\frac{7\pi}{4}$.
- (D) Não se trata de um oscilador harmónico.

Resposta correta: (A)

Pergunta 170

Um ponto P desloca-se sobre uma reta numérica. Trata-se de um oscilador harmónico de amplitude 5, frequência $\frac{3}{8}$ e fase $\frac{4}{3}\pi$. A abcissa de P , t segundos após um certo instante inicial, pode ser dada, para todo o t , pela expressão:

(A) $\frac{1}{5} \cos\left(\frac{3\pi}{4}t + \frac{\pi}{6}\right)$

(B) $5 \cos\left(\frac{3\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)$

(C) $5 \sin\left(\frac{3\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)$

(D) $\frac{1}{5} \sin\left(\frac{3\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)$

Resposta correta: (C)

Pergunta 171

A abcissa $x(t)$ de um ponto que se desloca sobre uma reta numérica é $2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) - 1$,

t segundos após um certo instante inicial.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) Trata-se de um oscilador harmónico de amplitude 2, período 8 e fase $\frac{\pi}{3}$.

(B) Trata-se de um oscilador harmónico de amplitude 1, período 4 e fase $\frac{2\pi}{3}$.

(C) Trata-se de um oscilador harmónico de amplitude 2, frequência $\frac{2\pi}{3}$ e fase $\frac{\pi}{8}$.

(D) Não se trata de um oscilador harmónico.

Resposta correta: (B)

Pergunta 172

Sabendo que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{3}$ e que um ponto se desloca sobre uma reta numérica de tal modo que a sua abcissa $x(t)$ é dada por $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\cos(3t) + \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\sin(3t)$, t segundos após um certo instante inicial, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Trata-se de um oscilador harmónico de amplitude 4, período $\frac{2\pi}{3}$ e fase $\frac{\pi}{8}$.
- (B) Trata-se de um oscilador harmónico de amplitude 2, período $\frac{2\pi}{3}$ e fase $\frac{15\pi}{8}$.
- (C) Trata-se de um oscilador harmónico de amplitude 2, período $\frac{2\pi}{3}$ e fase $\frac{\pi}{8}$.
- (D) Não se trata de um oscilador harmónico.

Resposta correta: (B)

Pergunta 173

Uma solução da equação diferencial $f''(x) = -4f(x)$ é $f(x)$, onde $f(x)$ é definida por qual das opções?

- (A) $-6\cos(2x)\sin(2x)$
- (B) $-6\cos(2x) - 3\sin(2x)$
- (C) $6\cos(2x)\sin(2x)$
- (D) $6\cos(2x) + 3\sin(2x)$

Resposta correta: (D)

Pergunta 174

Um ponto P desloca-se numa reta numérica, no intervalo de tempo $[0, 8]$. Para cada $t \in [0, 8]$, a abcissa de t é dada por $5\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$. Os valores de t para os quais a abcissa de P dista 2,5 unidades da origem são:

- (A) $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- (B) $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- (C) $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$
- (D) $t \in \{0, 1, 3, 4, 6, 7\}$

Resposta correta: (D)

Pergunta 175

Uma mola encontra-se suspensa numa extremidade. Na outra extremidade tem um corpo C. Após ter sido alongado na vertical, a mola inicia um movimento oscilatório no instante $t = 0$. A distância, em metros, do corpo C ao solo é dada, em cada instante t (em segundos) do intervalo $[0, 18[$ por

$D(t) = 5 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \pi\right)$. Em que momentos está C a 6 metros do solo?

- (A) Aos 4, 8, 12 e 16 segundos.
- (B) Aos 4, 8 e 16 segundos.
- (C) Aos 4, 10 e 16 segundos.
- (D) Aos 6 e 12 segundos.

Resposta correta: (B)

Pergunta 176

A derivada de uma certa função f é dada pela expressão $f'(x) = 6x + 5$. Sabendo que a função f se anula em 1, qual é o valor de $f(-1)$?

- (A) -10
- (B) -2
- (C) -1
- (D) 0

Resposta correta: (A)

Pergunta 177

Uma primitiva da função f tal que $f(x) = \cos(2x) + \sin x$ toma o valor 2 em π . Que valor toma essa primitiva para $x = 0$?

- (A) -1
- (B) 0
- (C) 1
- (D) π

Resposta correta: (B)

Pergunta 178

Uma primitiva da função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ e definida por $f(x) = \frac{x+9}{x-1}$, toma o valor 5 quando $x = 2$. Qual é o valor dessa primitiva no ponto $e+1$?

- (A) 3
- (B) $e+4$
- (C) 14
- (D) $e+14$

Resposta correta: (D)

Pergunta 179

Uma primitiva da função f , de domínio $] -1, +\infty[$ e definida por $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$, toma o valor $\ln(2)$ em 0. Que valor toma essa primitiva quando $x = 1$?

- (A) $-\ln\left(\frac{2}{3}\right)$
- (B) 0
- (C) $-\ln(3) + \ln(8)$
- (D) $-\ln(3)$

Resposta correta: (C)

Pergunta 180

A família das primitivas da função definida por $x \ln(x)$ é:

- (A) $\frac{1}{2}(x^2 \ln(x) - 1) + C, C \in \mathbb{R}$
- (B) $(x^2 \ln(x) - 1) + C, C \in \mathbb{R}$
- (C) $\frac{1}{2}\left(x^2 \ln(x) - \frac{x}{2}\right) + C, C \in \mathbb{R}$
- (D) $\frac{1}{2}\left(x^2 \ln(x) - \frac{1}{2}\right) + C, C \in \mathbb{R}$

Resposta correta: (D)

Pergunta 181

$\int_2^3 2x \, dx$ representa a área de qual dos polígonos convexos cujos vértices (num referencial ortonormado) são os indicados?

- (A) (2, 0), (3, 0), (2, 4) e (3, 4)
- (B) (2, 0), (3, 0), (2, 4) e (3, 6)
- (C) (0, 0), (3, 0) e (3, 6)
- (D) (2, 4), (3, 4) e (3, 6)

Resposta correta: (B)

Pergunta 182

Seja f uma função não negativa. Sabe-se que $\int_{-1}^1 f(x) \, dx = 7$. Indica o valor de $\int_4^6 f(x-5) \, dx$.

- (A) 2
- (B) 7
- (C) -7
- (D) Não há dados suficientes para o calcular.

Resposta correta: (B)

Pergunta 183

Seja f uma função não negativa. Sabe-se que $\int_1^2 f(x) \, dx = 9$. Indica o valor de $\int_0^1 f(-x-1) \, dx$.

- (A) -9
- (B) 1
- (C) 9
- (D) Não há dados suficientes para o calcular.

Resposta correta: (C)

Pergunta 184

Seja f uma função real contínua em $[-5, 5]$ e g a função definida por $2f(x) + 5$. Sabendo que

$$\int_{-5}^5 f(x) dx = 4, \text{ indica o valor de } \int_{-5}^5 g(x) dx.$$

- (A) 13
- (B) 8
- (C) 58
- (D) 43

Resposta correta: (C)

Pergunta 185

Indica o valor de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t \cos t dt$.

- (A) $-\frac{1}{4}$
- (B) $-\frac{1}{2}$
- (C) $\frac{1}{2}$
- (D) $\frac{1}{4}$

Resposta correta: (D)

Pergunta 186

Indica o valor de $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 t - 1) dt$.

- (A) -1
- (B) 0
- (C) 1
- (D) 2

Resposta correta: (C)

Pergunta 187

Indica o valor de $\int_0^3 |t^2 - 4| dt$.

- (A) $-\frac{23}{3}$
- (B) 3
- (C) $\frac{23}{3}$
- (D) 13

Resposta correta: (B)

Pergunta 188

Indica o valor de $\int_{-4}^4 (|t-2| + |t+2|) dt$.

- (A) 13
- (B) 24
- (C) 32
- (D) 40

Resposta correta: (A)

Pergunta 189

A medida da área delimitada pela bissetriz dos quadrantes ímpares e o gráfico da função definida pela expressão x^3 é:

- (A) 0
- (B) 1
- (C) $\frac{1}{2}$
- (D) $\frac{1}{4}$

Resposta correta: (C)

Pergunta 190

A medida da área delimitada pelo eixo das abcissas, pelas retas de equações $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \pi$ e

pelo gráfico da função cosseno é:

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4

Resposta correta: (C)

Pergunta 191

Selecione a opção correta.

Do ponto de vista histórico, os (hoje) chamados números complexos surgiram:

- (A) na Escola Pitagórica.
- (B) no século XVIII para dar solução à equação $x^2 = -1$.
- (C) no século XVI a propósito da resolução de equações de terceiro grau.
- (D) no início do século XIX, depois dos trabalhos de Robert Argand.

Resposta correta: (C)

Pergunta 192

Qual é o número complexo z tal que $\operatorname{Re}(z) = -2\sqrt{2}$ e $\operatorname{Im}(z) = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$?

- (A) $2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{12}\pi}{3}i$
- (B) $-2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{12}}{3}\pi i$
- (C) $-2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{12}\pi}{3}i$
- (D) $2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{12}}{3}\pi i$

Resposta correta: (B)

Pergunta 193

O módulo e o conjugado de $-\frac{\pi e}{2}i$ são, respetivamente:

(A) $-\frac{\pi e}{2}$ e $-\frac{\pi e}{2}i$

(B) $\frac{\pi e}{2}$ e $-\frac{\pi e}{2}i$

(C) $\frac{\pi e}{2}$ e $\frac{\pi e}{2}i$

(D) $-\frac{\pi e}{2}$ e $\frac{\pi e}{2}i$

Resposta correta: (C)

Pergunta 194

O número complexo $(x^2 - 16) + (1 - y^2)i$ é um imaginário puro se:

(A) $x = 4 \wedge y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(B) $x = \pm 4 \wedge y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(C) $x = 4 \wedge y \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

(D) $x = \pm 4 \wedge y \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Resposta correta: (D)

Pergunta 195

Qual o conjugado do simétrico do inverso de $2 + 3i$?

(A) $\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

(B) $-\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$

(C) $\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$

(D) $-\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

Resposta correta: (B)

Pergunta 196

Considera as afirmações seguintes:

- I. A soma de um número complexo com o seu conjugado é sempre um número real.
- II. O produto de um número complexo pelo seu conjugado nem sempre é um número real.

Então, em relação ao valor lógico das afirmações, o que se pode dizer?

- (A) I e II são verdadeiras.
- (B) I é verdadeira e II é falsa.
- (C) I e II são falsas.
- (D) I é falsa e II é verdadeira.

Resposta correta: (B)

Pergunta 197

Seja $z = a + bi$ um número complexo. A expressão $(z + \bar{z})^2 + z\bar{z}$ é equivalente a qual expressão?

- (A) $5a^2 + 2abi + b^2$
- (B) $5a^2 - 2abi + b^2$
- (C) $5a^2 - b^2$
- (D) $5a^2 + b^2$

Resposta correta: (D)

Pergunta 198

Sendo n um número natural, qual o valor da expressão $i^{n+3} + i^{n+11} + 2i^{n+1}$?

- (A) $4i$
- (B) $-i$
- (C) 0
- (D) Depende de n .

Resposta correta: (C)

Pergunta 199

O que se pode dizer em relação ao afixo de um complexo z tal que $\operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Im}(z) \leq 0$?

- (A) Pertence ao primeiro quadrante ou ao terceiro quadrante.
- (B) Pertence ao segundo quadrante ou ao quarto quadrante.
- (C) Pertence ao eixo real ou ao eixo imaginário.
- (D) Pertence ao primeiro quadrante.

Resposta correta: (B)

Pergunta 200

Qual é o conjunto dos afixos dos complexos z tais que $|z| \leq 1$?

- (A) Um quadrado.
- (B) $\{-1, 1\}$
- (C) $\{-1, -i, 1, i\}$
- (D) Um círculo.

Resposta correta: (D)

Pergunta 201

Considera os seguintes números complexos:

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_2 = \frac{5}{3+4i}, \quad z_3 = \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad z_4 = \cos \frac{\pi}{5} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}.$$

Quais são os complexos unitários?

- (A) z_1 e z_4
- (B) z_1, z_2 e z_4
- (C) z_1, z_3 e z_4
- (D) z_1 e z_2

Resposta correta: (B)

Pergunta 202

Qual dos valores indicados não é argumento de $1 - \sqrt{3}i$?

- (A) $\frac{8\pi}{3}$
- (B) $-\frac{\pi}{3}$
- (C) $\frac{5\pi}{3}$
- (D) $-\frac{7\pi}{3}$

Resposta correta: (A)

Pergunta 203

Na forma trigonométrica, o complexo $2(\sin \theta - i \cos \theta)$ pode representar-se por qual expressão?

- (A) $e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$
- (B) $e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$
- (C) $2e^{i\left(-\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$
- (D) $2e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$

Resposta correta: (D)

Pergunta 204

Os complexos, não nulos, com afixo na bissetriz do terceiro quadrante têm argumento principal igual a que valor?

- (A) $\frac{5\pi}{4}$
- (B) $\frac{3\pi}{4}$
- (C) $-\frac{3\pi}{4}$
- (D) $-\frac{\pi}{4}$

Resposta correta: (C)

Pergunta 205

Uma representação na forma trigonométrica de $3 - 3 \sum_{k=0}^{26} i^k$ é:

- (A) $3e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)}$
- (B) $3\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)}$
- (C) $3\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$
- (D) $3e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 206

Qual pode ser a representação algébrica do complexo $e^{i\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$?

- (A) $(\sqrt{5}-1) + (\sqrt{5}+\sqrt{5})i$
- (B) $(\sqrt{5}-1) - (\sqrt{5}+\sqrt{5})i$
- (C) $-\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{4}i$
- (D) $\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{4}i$

Resposta correta: (D)

Pergunta 207

Qual é o valor de $\text{Arg}(-\sqrt{6} - \sqrt{18}i)$?

- (A) $\frac{4\pi}{3}$
- (B) $\frac{2\pi}{3}$
- (C) $-\frac{5\pi}{6}$
- (D) $-\frac{2\pi}{3}$

Resposta correta: (D)

Pergunta 208

No plano de Argand, o afixo do número complexo $e^{i\left(\frac{104\pi}{5}\right)}$ está em que quadrante?

- (A) Primeiro quadrante.
- (B) Segundo quadrante.
- (C) Terceiro quadrante.
- (D) Quarto quadrante.

Resposta correta: (B)

Pergunta 209

Sendo $z_1 = 2e^{i\frac{6\pi}{5}}$ e $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, qual o valor de $\text{Arg}\left(\frac{z_1 \times z_2}{i}\right)$?

- (A) $\frac{11\pi}{30}$
- (B) $-\frac{11\pi}{30}$
- (C) $-\frac{19\pi}{30}$
- (D) $\frac{19\pi}{30}$

Resposta correta: (C)

Pergunta 210

O valor de $\frac{(1 + \sqrt{3})^7}{e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \times (1 - \sqrt{3}i)^4}$ é igual a que valor?

- (A) $4\sqrt{3} - 4i$
- (B) $4\sqrt{3} + 4i$
- (C) $4 + 4\sqrt{3}i$
- (D) $4 - 4\sqrt{3}i$

Resposta correta: (A)

Pergunta 211

Uma raiz quadrada do número complexo $z = -7 + 24i$ é $3 + 4i$. O que podes concluir?

- (A) Outra raiz quadrada de z é $3 - 4i$.
- (B) Outra raiz quadrada de z é $-3 + 4i$.
- (C) Outra raiz quadrada de z é $-3 - 4i$.
- (D) z não tem mais nenhuma raiz quadrada.

Resposta correta: (C)

Pergunta 212

Considera as afirmações seguintes:

- I. Em $\mathbb{R}$, qualquer número tem uma e uma só raiz quadrada.
- II. Em $\mathbb{C}$, qualquer número diferente de 0 tem duas raízes quadradas.

Identifica a opção verdadeira.

- (A) I e II são verdadeiras.
- (B) I é verdadeira e II é falsa.
- (C) I e II são falsas.
- (D) I é falsa e II é verdadeira.

Resposta correta: (D)

Pergunta 213

Qual o perímetro do polígono convexo cujos vértices, no plano complexo, são os afijos das raízes quartas de um complexo unitário?

- (A) 2
- (B) $\frac{4\sqrt{2}}{2}$
- (C) 4
- (D) $4\sqrt{2}$

Resposta correta: (D)

Pergunta 214

Quais as raízes cúbicas do seguinte complexo $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}$?

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ e i
- (B) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e $-i$
- (C) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e i
- (D) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $-i$

Resposta correta: (A)

Pergunta 215

Qual a área do polígono convexo cujos vértices, no plano complexo, são os afijos das raízes sextas da unidade?

- (A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- (B) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
- (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$
- (D) π

Resposta correta: (A)

Pergunta 216

Uma das raízes cúbicas de um número complexo é $\sqrt{3} - i$. Quais são as outras?

- (A) $\sqrt{3} + i$ e $-\sqrt{3} + i$
- (B) $\sqrt{3} + i$ e $-2i$
- (C) $-\sqrt{3} - i$ e $2i$
- (D) $-\sqrt{3} - i, \sqrt{3} + i$ e 2

Resposta correta: (C)

Pergunta 217

Sabe-se que 1 , i e $2i$ são raízes de um certo polinómio. Qual pode ser o polinómio?

- (A) $z^2 - 2iz + 1$
- (B) $z^3 + (-3i - 1)z^2 + (3i - 2)z + 1$
- (C) $z^4 + (-3i - 1)z^3 + (3i - 2)z^2 + 2z$
- (D) $z^3 - 2iz^2 + z$

Resposta correta: (C)

Pergunta 218

Qual é o conjunto-solução da equação $z^3|z| + 8iz = 0$, em $\mathbb{C}$?

- (A) $\{\sqrt{2} - \sqrt{2}i, -\sqrt{2} + \sqrt{2}i\}$
- (B) $\{0, \sqrt{2} - \sqrt{2}i, -\sqrt{2} + \sqrt{2}i\}$
- (C) $\{0, \sqrt{2} - \sqrt{2}i\}$
- (D) $\{0, \sqrt{2} - \sqrt{2}i, -\sqrt{2} - \sqrt{2}i\}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 219

Qual é o conjunto-solução da equação $z^3 + (-3i - 2)z^2 + 6iz = 0$, em $\mathbb{C}$?

- (A) $\{0, 1, 3\}$
- (B) $\left\{0, 2, 3e^{i\frac{\pi}{2}}\right\}$
- (C) $\left\{0, -2, 3e^{i\frac{\pi}{2}}\right\}$
- (D) $\left\{1, 2, 3e^{i\frac{\pi}{2}}\right\}$

Resposta correta: (B)

Pergunta 220

Seja $z = -64\sqrt{2} - 128\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Considera as afirmações seguintes:

- I. As raízes de ordem 7 de z são, no máximo, sete e os seus afijos distam duas unidades da origem.
- II. As raízes de ordem 7 de z são, no mínimo, sete e o argumento principal de uma delas é $-\frac{27}{28}\pi$.

Selecione a opção verdadeira.

- (A) I e II são verdadeiras.
- (B) I é verdadeira e II é falsa.
- (C) I e II são falsas.
- (D) I é falsa e II é verdadeira.

Resposta correta: (A)

Pergunta 221

Qual das seguintes condições na variável complexa define uma semicircunferência?

- (A) $2|z| = 8 \wedge \operatorname{Re}(z) \leq -1$
- (B) $2|z| \leq 8 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 0$
- (C) $2|z| = 8 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 0$
- (D) $2|z| \leq 8 \wedge \operatorname{Re}(z) \leq -1$

Resposta correta: (C)

Pergunta 222

No plano de Argand, o conjunto dos afijos dos complexos z tais que $\frac{1}{|z|} \geq 4$ corresponde a qual das opções?

- (A) O círculo fechado de centro em $(0, 0)$ e raio $\frac{1}{4}$.
- (B) O círculo fechado de centro em $(0, 0)$ e raio $\frac{1}{2}$.
- (C) Um círculo fechado exceto o conjunto formado por um ponto.
- (D) A parte do plano exterior ao círculo aberto centrado na origem e de raio $\frac{1}{4}$.

Resposta correta: (C)

Pergunta 223

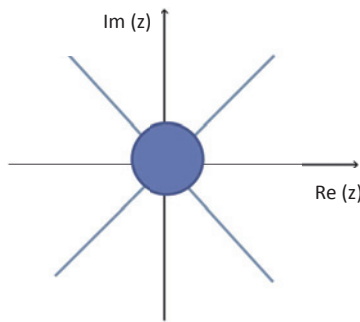
Considera condição, em $\mathbb{C}$, $8 + 2|z| \leq 8$. O que define esta condição no plano de Argand?

- (A) O conjunto vazio.
- (B) Um conjunto singular.
- (C) Um círculo fechado.
- (D) O próprio plano.

Resposta correta: (B)

Pergunta 224

Qual das condições seguintes pode definir o subconjunto do plano complexo representado a azul na figura?

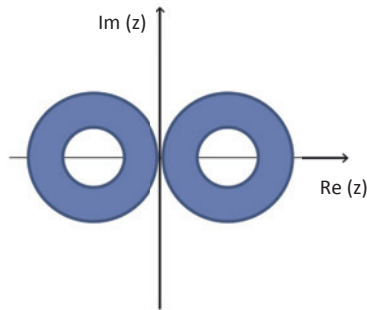


- (A) $|z| \leq 1 \vee \text{Arg}(z) = \frac{k\pi}{4}, k \in (\mathbb{Z} \cap [-3, 4])$
- (B) $|z| \leq 1 \wedge \text{Arg}(z) = \frac{k\pi}{4}, k \in (\mathbb{Z} \cap [-3, 4])$
- (C) $|z| \leq 2 \vee \text{Arg}(z) = \frac{k\pi}{3}, k \in (\mathbb{Z} \cap [-2, 2])$
- (D) $|z| \leq 2 \wedge \text{Arg}(z) = \frac{k\pi}{3}, k \in (\mathbb{Z} \cap [-2, 2])$

Resposta correta: (A)

Pergunta 225

Qual das condições seguintes pode definir o subconjunto do plano complexo representado a azul na figura?

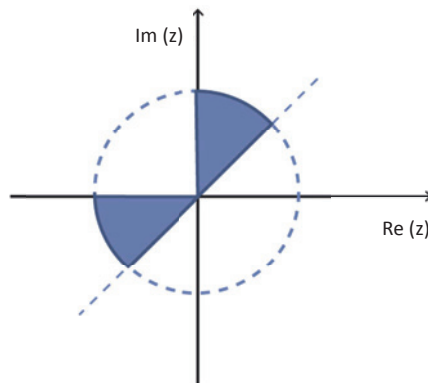


- (A) $(1 \leq |z + 2| \leq 2) \vee (1 \leq |z + 2i| \leq 2)$
- (B) $(1 \leq |z + 2| \leq 2) \vee (1 \leq |z - 2i| \leq 2)$
- (C) $(1 \leq |z - 2| \leq 2) \wedge (1 \leq |z + 2| \leq 2)$
- (D) $(1 \leq |z - 2| \leq 2) \vee (1 \leq |z + 2| \leq 2)$

Resposta correta: (D)

Pergunta 226

Qual das condições seguintes pode definir o subconjunto do plano complexo representado a azul na figura?



- (A) $(|z| \leq 1) \wedge (|z - i| \leq |z - 1|) \wedge (\operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Im}(z) \geq 0)$
- (B) $(|z| \leq 1) \wedge (|z - i| \geq |z - 1|) \wedge \operatorname{Re}(z) \geq 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq 0$
- (C) $(|z| \geq 1) \wedge (|z - i| \geq |z - 1|) \wedge (\operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Im}(z) \geq 0)$
- (D) $(|z| \geq 1) \wedge (|z - i| \leq |z - 1|) \wedge \operatorname{Re}(z) \geq 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq 0$

Resposta correta: (A)

Pergunta 227

Qual das condições seguintes define, no plano de Argand, um segmento de reta?

(A) $|z + 2 - 2i| \leq 2 \wedge (|z - 2| \leq |z - 2i|)$

(B) $|z - 2 - 2i| \leq 2 \wedge (|z - 2| = |z - 2i|)$

(C) $\operatorname{Re}(z) \geq 1 \wedge \operatorname{Im}(z) = 0$

(D) $\operatorname{Arg}(z - i) = \pi$

Resposta correta: (B)

Pergunta 228

Considera as afirmações seguintes:

I. A condição, em $\mathbb{C}$, $-\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z - i) \leq \frac{\pi}{4} \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 1$ define, no plano de Argand, um triângulo retângulo isósceles.

II. A condição, em $\mathbb{C}$, $|\operatorname{Re}(z)| \leq 1 \wedge |\operatorname{Im}(z)| \leq 2$ define, no plano de Argand, um quadrado.

Selecione a opção verdadeira.

(A) I e II são verdadeiras.

(B) I é verdadeira e II é falsa.

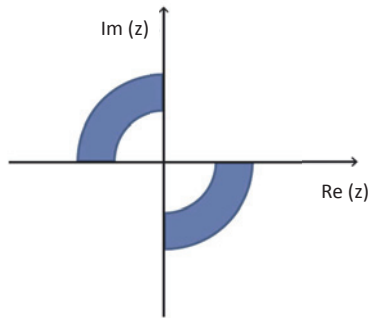
(C) I e II são falsas.

(D) I é falsa e II é verdadeira.

Resposta correta: (B)

Pergunta 229

Qual das condições seguintes pode definir o subconjunto do plano complexo representado a azul na figura?



- (A) $(1 \leq |z| \leq 2) \wedge \left(-\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(z) \leq 0 \vee \frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(z) \leq \pi \right)$
- (B) $(1 \leq |z| \leq 2) \vee \left(-\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(z) \leq 0 \vee \frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(z) \leq \pi \right)$
- (C) $(1 \leq |z| \leq 2) \wedge (\text{Re}(z) \times \text{Im}(z)) \geq 0$
- (D) $(1 \leq |z| \leq 2) \wedge (\text{Re}(z) \leq 0 \wedge \text{Im}(z) \geq 0)$

Resposta correta: (A)

Pergunta 230

A condição, em $\mathbb{C}$, $\left(-\pi \leq \text{Arg}(z+i) \leq -\frac{\pi}{6} \vee \frac{5\pi}{6} \leq \text{Arg}(z+i) \leq \pi \right) \wedge \text{Re}(z) \geq -3$ define, no

plano de Argand, qual das opções?

- (A) Um ângulo com vértice no afixo de $-i$.
- (B) Um ângulo com vértice no afixo de i .
- (C) Um triângulo não equilátero.
- (D) Um ângulo com vértice no afixo de -3 .

Resposta correta: (D)

AMOSTRA NÃO COMERCIALIZÁVEL

De acordo com o artigo 21.º da Lei n.º 47/2006, de 28 de agosto, este exemplar destina-se ao órgão da escola competente para a adoção de manuais escolares.

 www.leya.com	 www.texto.pt	978-111-11-4444-9
		 9 781111 144449

