

Resoluções dos exercícios

do **Caderno de Exercícios**

MAT 12 MATEMÁTICA A
12.º ANO

**EXCLUSIVO
para o
Professor**



Índice

Propostas de resolução dos exercícios do Caderno de Exercícios

Tema 1 | Cálculo Combinatório

- 1. Propriedades das operações sobre conjuntos.....2
- 2. Introdução ao cálculo combinatório.....5
- 3. Triângulo de Pascal e binómio de Newton.....12

Tema 2 | Probabilidades

- 1. Definir espaços de probabilidade.....15
- 2. Definir probabilidade condicionada.....19

Tema 3 | Funções Reais de Variável Real

- 1. Limites e continuidade.....25
- 2. Derivadas de funções reais de variável real e aplicações.....40

Tema 4 | Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas

- 1. Juros compostos e número de Neper.....65
- 2. Funções exponenciais.....67
- 3. Funções logarítmicas.....80
- 4. Resolução de problemas e modelos exponenciais.....91

Tema 5 | Trigonometria e Funções Trigonómicas

- 1. Fórmulas trigonométricas.....113
- 2. Limites e derivadas de funções trigonométricas.....121
- 3. Osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton.....137

Tema 6 | Primitivas e Cálculo Integral

- 1. Noção de primitiva.....147
- 2. Noção de integral.....153

Tema 7 | Números Complexos

- 1. Introdução aos números complexos. Operar com números complexos.....163
- 2. Forma trigonométrica de um número complexo.....174
- 3. Raízes de um número complexo.....183
- 4. Operar com números complexos e transformações geométricas. Condições em $\mathbb{C}$ e sua representação no plano complexo.....191

Tema 1 | Cálculo Combinatório

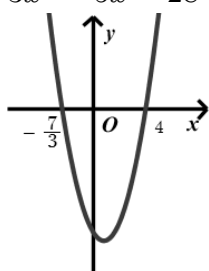
1. Propriedades das operações sobre conjuntos

1.

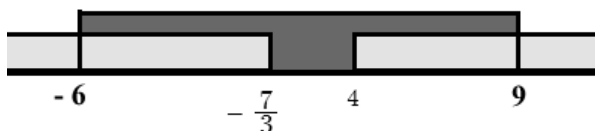
$$3x^2 - 5x - 28 \geq 0 \wedge x \in [-6, 9] \Leftrightarrow x \in [-6, -\frac{7}{3}] \cup [4, 9]$$

$$3x^2 - 5x - 28 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 3 \times (-28)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 19}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{3} \vee x = 4$$

$$3x^2 - 5x - 28 \geq 0 \wedge x \in [-6, 9] \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{7}{3}] \cup [4, +\infty[\wedge x \in [-6, 9]$$



$$A = [-6, -\frac{7}{3}] \cup [4, 9]$$



$$|\frac{x}{2} - 1| < 3 \wedge x \in [-6, 9] \Leftrightarrow \frac{x}{2} - 1 < 3 \wedge \frac{x}{2} - 1 > -3 \wedge x \in [-6, 9] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2 < 6 \wedge x - 2 > -6 \wedge x \in [-6, 9] \Leftrightarrow x < 8 \wedge x > -4 \wedge x \in [-6, 9] \Leftrightarrow x \in]-4, 8[$$

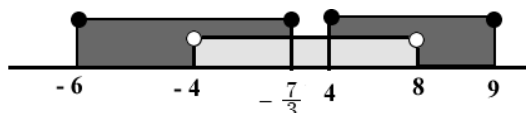


$$B =]-4, 8[$$

a) $[-6, -\frac{7}{3}] \cup [4, 9]$

b) $] -4, 8[$

c) $] -4, -\frac{7}{3}] \cup [4, 8[$



d) $[-6, 9]$

e) $[-6, -4] \cup [8, 9]$

f) $] -\frac{7}{3}, 4[$

2.

a) $p(a) = -10 \Leftrightarrow 3a^3 + a^2 - 19a + 5 = -10 \Leftrightarrow 3a^3 + a^2 - 19a + 15 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 1 & -19 & 15 \\ 1 & & 3 & 4 & -15 \\ \hline & 3 & 4 & -15 & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(3a^2 + 4a - 15) = 0 \Leftrightarrow a-1 = 0 \vee 3a^2 + 4a - 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \vee a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3 \times (-15)}}{6} \Leftrightarrow a = 1 \vee a = \frac{-4 \pm 14}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \vee a = \frac{5}{3} \vee a = -3$$

$$A = \{-3, 1, \frac{5}{3}\}$$

$$u_1 = \frac{3 \times 1 - 1}{1+1} = 1; u_2 = \frac{3 \times 2 - 1}{2+1} = \frac{5}{3}; u_3 = \frac{3 \times 3 - 1}{3+1} = 2 \quad B = \{1, \frac{5}{3}, 2\}$$

b1) $c = -3; \{-3, 1, \frac{5}{3}\} \cap \{-3, 1, \frac{5}{3}, 3\} = \{-3, 1, \frac{5}{3}\}; A \subset C$

b2) $B \subset C; c = 2$

3. $A \cap B = A \Leftrightarrow \overline{A \cap B} = \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A}$

4.

a1) $A \cap C = A$ a2) $B \cup C = C$

b1) $A \setminus B \subset A \subset A \cup B \subset C$, donde $A \setminus B \subset C$

b2) É imediato que $C = U \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset C$. Vejamos a implicação recíproca desta:
 $\overline{A \cup B} \subset C \Rightarrow \overline{C} \subset A \cup B \Rightarrow \overline{C} \cup C \subset (A \cup B) \cup C \Rightarrow U \subset C \Rightarrow C = U$

5.

a) $A \cup B \subset C \Rightarrow A \subset C \Rightarrow \overline{C} \subset \overline{A}$

b) Como $A \cap B = \emptyset$, tem-se, para qualquer $x \in U$: $x \in B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in \overline{A}$

c) $A \cup B \subset C \Rightarrow (A \cup B) \cap \overline{A} \subset C \cap \overline{A} \Rightarrow (A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A}) \subset C \cap \overline{A} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \emptyset \cup (B \cap \overline{A}) \subset C \cap \overline{A} \Rightarrow B \cap \overline{A} \subset C \cap \overline{A} \Rightarrow B \subset C \cap \overline{A} \Rightarrow B \subset C \setminus A \Rightarrow \overline{C \setminus A} \subset \overline{B}$

6.

a) $B \cup (\overline{B} \cup A) = (B \cup \overline{B}) \cup A = U \cup A = U$

b) $A \cap (B \cap A) = A \cap (A \cap B) = (A \cap A) \cap B = A \cap B$

- c) $A \cap (B \cap \bar{A}) = (B \cap \bar{A}) \cap A = B \cap (\bar{A} \cap A) = B \cap \emptyset = \emptyset$
- d) $[(A \cap B) \cap \bar{B}] \cup A = [A \cap (B \cap \bar{B})] \cup A = (A \cap \emptyset) \cup A = \emptyset \cup A = A$
- e) $A \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) = (A \cup B) \cap U = A \cup B$
- f) $\overline{[(A \cap B) \cup B]} \cap B = \overline{[(A \cap B) \cup B]} \cap B = [\overline{(A \cap B)} \cap \bar{B}] \cap B = \overline{(A \cap B)} \cap (\bar{B} \cap B) = \overline{(A \cap B)} \cap \emptyset = \emptyset$
- g) $(B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) = B \cap (A \cup \bar{A}) = B \cap U = B$
- h) $[A \cap \overline{(B \cap \bar{A})}] \cup \bar{A} = [A \cap (\bar{B} \cup A)] \cup \bar{A} = [(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap A)] \cup \bar{A} = [(A \cap \bar{B}) \cup A] \cup \bar{A} = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cup \bar{A}) = (A \cap \bar{B}) \cup U = U$

7.

- a) Falsa.
 Contraexemplo: se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4\}$, vem
 $A \cup (B \setminus A) = \{1, 2, 3\} \cup \{4\} = \{1, 2, 3, 4\} \neq B$
- b) $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{(A \cap B) \cap C} = \overline{(A \cap B)} \cup \bar{C} = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cup \bar{C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$; verdadeira.

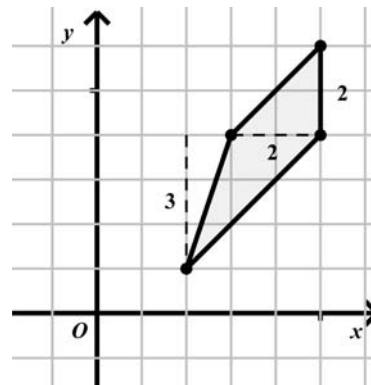
8.

- a) $A \times B = \{(-3, -2), (-3, 2), (0, -2), (0, 2), (1, -2), (1, 2)\}$
- b) Não. Por exemplo, o objeto -3 teria duas imagens: -2 e 2 .

9.

- a) $C = \{(2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6), (5, 6)\}$
- b) $D = \{(2, 1), (3, 6)\}$
- c) $E = \{(2, 1), (3, 4), (5, 6), (5, 4)\}$

$$A = \frac{2 \times 2}{2} + \frac{2 \times 3}{2} = 2 + 3 = 5$$



10.

- a) $\overline{A \setminus B} \times C = (\bar{A} \cup B) \times C = (\bar{A} \times C) \cup (B \times C)$
- b) $(A \times B) \cup (\bar{A} \times B) = (A \cup \bar{A}) \times B = U \times B$

- c) É imediato que $A = B \Rightarrow A \times C = B \times C$. Vejamos a implicação recíproca desta:
 Tem-se, para qualquer pertencente a U , $x \in A \Leftrightarrow \forall y \in C, (x, y) \in A \times C \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \forall y \in C, (x, y) \in B \times C \Leftrightarrow x \in B$
- d) $(\overline{A} \times C) \cup (\overline{B} \times C) = \overline{A} \times C \Leftrightarrow (\overline{A} \cup \overline{B}) \times C = \overline{A} \times C \Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A} \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \Leftrightarrow A \subset B$
11. Provar que $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$ equivale a provar que:
 $A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$
 Ora, $A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x, y \in U : (x, y) \in A \times B \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x, y \in U : x \in A \wedge y \in B \Leftrightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$.

2. Introdução ao cálculo combinatório

12.

$$\sqrt{|-4|} = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}_0, \text{ logo } -4 \in A; \quad \sqrt{|-3|} = \sqrt{3} \notin \mathbb{N}_0, \text{ logo } -3 \notin A$$

$$\sqrt{|-2|} = \sqrt{2} \notin \mathbb{N}_0, \text{ logo } -2 \notin A; \quad \sqrt{|-1|} = \sqrt{1} = 1 \in \mathbb{N}_0, \text{ logo } -1 \in A$$

$$\sqrt{|0|} = \sqrt{0} = 0 \in \mathbb{N}_0, \text{ logo } 0 \in A; \quad \sqrt{|1|} = \sqrt{1} = 1 \in \mathbb{N}_0, \text{ logo } 1 \in A$$

$$\sqrt{|2|} = \sqrt{2} \notin \mathbb{N}_0, \text{ logo } 2 \notin A; \quad \sqrt{|3|} = \sqrt{3} \notin \mathbb{N}_0, \text{ logo } 3 \notin A$$

$$\sqrt{|4|} = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}_0, \text{ logo } 4 \in A$$

$$A = \{-4, -1, 0, 1, 4\}$$

a) $\#(A) = 5$

b1) $\#(B) = \#(A \cup B) - \#(A) = 8 - 5 = 3$

b2) $\#(\overline{A} \cap \overline{B}) = \#(\overline{A \cup B}) = \#(U) - \#(A \cup B) = 9 - 8 = 1$

c) $\#(A \times C) = \#(A) \times \#(C) \Leftrightarrow 20 = 5 \times \#(C) \Leftrightarrow \#(C) = 4$

13.

a1) Tem-se: $\#(A) = \#(A \cap U) = \#[A \cap (B \cup \overline{B})] = \#[(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})] \stackrel{(*)}{=} \#(A \cap B) + \#(A \cap \overline{B})$

(*) Tem-se $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = (A \cap A) \cap (B \cap \overline{B}) = A \cap \emptyset = \emptyset$.

a2) Tendo em conta a alínea anterior, tem-se: $\#(A \cap \overline{B}) = \#(A) - \#(A \cap B)$
 Tem-se $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ e, como $B \subset A$, tem-se também $A \cap B = B$.
 Portanto, $\#(A \setminus B) = \#(A) - \#(B)$.

b) $\#(A) \times \#(\overline{A}) = 48 \Leftrightarrow \#(A) \times [16 - \#(A)] = 48 \Leftrightarrow -(\#(A))^2 + 16\#(A) - 48 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \#(A) = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 4 \times (-1) \times (-48)}}{-2} \Leftrightarrow \#(A) = \frac{-16 \pm 8}{-2} \Leftrightarrow \#(A) = 4 \vee \#(A) = 12$

Logo, vem que $\#(A) = 12$ e $\#(\overline{A}) = 4$.

14. $6 \times 8 = 48$

15. $4 \times 5 \times 3 = 60$

16. 4×4 (par, par) + 4×5 (par, ímpar) + 5×4 (ímpar, par) = 56

17. $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

18.

a) $7 \times 7 \times 7 = 343$

b1) 3 (escolha da posição do algarismo ímpar) $\times 3$ (escolha do algarismo par) $\times 3$ (escolha do algarismo par) $\times 4$ (escolha do algarismo ímpar) = 108

b2) $7 \times 7 \times 4 = 196$

19. $7! = 5\,040$

20. $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$

21.

a) $12! = 479\,001\,600$

b) $3 \times 11! = 119\,750\,400$

c) $3 \times 4 \times 10! = 43\,545\,600$

d) $5 \times 4 \times 10! = 72\,576\,000$

e) $4! \times 8! = 967\,680$

f) $3!$ (ordenação das coleções) $\times 5! \times 4! \times 3! = 103\,680$

g) $10 \times 9! \times 3! = 10! \times 3! = 21\,772\,800$

h) $12! - 11 \times 10! \times 2 = 12! - 11! \times 2 = 399\,168\,000$

i) $12! - 5 \times 4 \times 10!$ (os dois do meio serem da coleção *Uma Aventura*) –
 $- 4 \times 3 \times 10!$ (os dois do meio serem da coleção *Os Cinco*) –
 $- 3 \times 2 \times 10!$ (os dois do meio serem da coleção de Júlio Verne) =
 $= 341\,107\,200$

22.

a) $4! \times 6! = 17\,280$

b) $5!$ (ordenação de cinco blocos: clube A, clube B e cada um dos outros três jogadores) $\times 4! \times 3! = 17\,280$

c) $4!$ (ordenação de quatro blocos: clubes e cada um dos outros três jogadores) $\times 4!$ (ordenação dos jogadores do clube A) $\times 3!$ (ordenação dos jogadores do clube B) = 3456

Nota: os sete jogadores dos clubes A e B terão de ficar dispostos da seguinte forma: Jogador do clube A ; Jogador do clube B ; Jogador do clube A ; Jogador do clube B ; Jogador do clube A ; Jogador do clube B ; Jogador do clube A.

23. $4! \times 2^4 = 384$

24. a) $15! = 15 \times 14!$

b) $16! \times 17 = 17!$

c) $\frac{5!}{5} = \frac{5 \times 4!}{5} = 4!$

d) $\frac{9!}{8!} = \frac{9 \times 8!}{8!} = 9$

e) $\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$

25.

a) $\frac{n^2}{\frac{5!}{(6)}} = \frac{1}{(6!)} + \frac{n^2}{6!} \Leftrightarrow 6n^2 = 720 + n^2 \Leftrightarrow 5n^2 = 720 \Leftrightarrow n^2 = 144 \Leftrightarrow n = 12$

b) $\frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!} = 0,9 \Leftrightarrow \frac{(n+1) \times n! - n!}{(n+1) \times n! + n!} = 0,9 \Leftrightarrow \frac{n!(n+1-1)}{n!(n+1+1)} = 0,9 \Leftrightarrow \frac{n}{n+2} = \frac{9}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10n = 9n + 18 \Leftrightarrow n = 18$ (*) O universo é $\mathbb{N}$

26.

a) Para $n = 1$ tem-se: $\sum_{k=1}^1 \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} \Leftrightarrow 0 = 0$, o que é verdade.

Hipótese de indução: $\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!}$

Tese de indução: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

Demonstração: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} =$
 $= 1 - \frac{n+1}{(n+1)!} + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

b) Para $n = 1$ tem-se: $(1 + 1)! \geq 2^1 \Leftrightarrow 2 \geq 2$, o que é verdade.

Hipótese de indução: $(n + 1)! \geq 2^n$

Tese de indução: $(n + 2)! \geq 2^{n+1}$

Demonstração: $(n + 1)! \geq 2^n \Rightarrow (n + 2)(n + 1)! \geq (n + 2) 2^n \Rightarrow (n + 2)! \geq (n + 2) 2^n \Rightarrow$
 $\Rightarrow (n + 2)! \geq 2 \times 2^n \Rightarrow (n + 2)! \geq 2^{n+1}$

27. $8 \times 7 \times 6 = {}^8A_3 = 336$

28. ${}^5A_3 + {}^6A_4 = 420$

29.

a) 4^2 (números de dois algarismos) + 4^3 (números de três algarismos) = 80

b) ${}^4A_2 + {}^4A_3 = 36$

c) $2 \times (3 \times 1 + 3 \times 2 \times 1) = 18$

d) $(4^2 + 4^3) - ({}^4A_2 + {}^4A_3) = 44$

30.

a) $7 \times 6 \times 5 = {}^7A_3 = 210$

b1) 3 (posição do algarismo ímpar) $\times 3 \times 2 \times 4 = 72$

b2) 4 (algarismo das unidades) $\times 6 \times 5 = 120$

31.

a) $26^5 \times 10^2 = 1\,188\,137\,600$

b) ${}^{26}A_5 \times {}^{10}A_2 = 710\,424\,000$

c) $21^5 \times 10 \times 1 = 40\,841\,010$

- d) $5^3 \times 26^2 \times 3^2 = 760\,500$
- e) $5! \times 10^2 = 12\,000$
- f) $26^5 \times 12$ (os algarismos só podem ser as permutações do 7 e o 6, ou as permutações do 7 e o 8, ou as permutações do 8 e o 9, ou as permutações do 9 e o 6, ou as permutações do 9 e o 4, ou as permutações do 8 e o 5) $= 142\,576\,512$

32.

- a) 5 (o primeiro algarismo tem que ser maior ou igual a 5) $\times 7^3 = 1\,715$
- b) $5 \times {}^6A_3 = 600$
- c) $5 \times 7^3 - 5 \times {}^6A_3 = 1\,115$

33.

- a) $4 \times {}^9A_3$ (primeiro algarismo inferior a 5) $+ 5 \times {}^8A_2$ (primeiro algarismo 5 e segundo inferior a 5) $+ 5 \times 7$ (números da forma 56__) $= 2331$
- b) 4×9^3 (primeiro algarismo inferior a 5) $+ 5 \times 9^2$ (primeiro algarismo 5 e segundo inferior a 5) $+ 5 \times 9$ (números da forma 56__) $+ 9$ (números da forma 565__) $= 3375$
- c) $4 \times 10 \times 1 \times 1$ (primeiro algarismo inferior a 5) $+ 6 \times 1 \times 1$ (primeiro algarismo 5 e segundo inferior ou igual a 5) $+ 1 \times 1$ (números da forma 56__) $= 47$

- 34.** 4 (números com um algarismo) $+ {}^4A_2$ (números com dois algarismos) $+ {}^4A_3$ (números com três algarismos) $+ 4!$ (números com quatro algarismos) $= 64$

- 35.** ${}^{10}A_2$ (número de maneiras de sentar os idosos) $\times {}^8A_6$ (número de maneiras de sentar as mulheres) $\times {}^4A_2$ (número de maneiras de sentar dois dos quatro homens não idosos nos dois lugares disponíveis) $= 21\,772\,800$

36.

- a) 4 (número de imagens que o 1 pode ter) $\times 4$ (número de imagens que o 2 pode ter) $\times 4$ (número de imagens que o 3 pode ter) $= 64$
- b) $4 \times 3 \times 2 = {}^4A_3 = 24$

- 37.** ${}^{12}C_6 = 924$

- 38.**
- a) ${}^5C_2 = 10$
- b) ${}^5C_3 = 10$
- 39.**
- a) ${}^{14}C_6 = 3\,003$
- b) ${}^{10}C_6 = 210$
- 40.**
- a) ${}^7C_3 = 35$
- b) ${}^6C_2 = 15$
- c) ${}^7C_3 - 5$ (entram em simultâneo a Sofia e o Artur) $= 30$
- d) ${}^7C_3 - {}^4C_3$ (só rapazes) $- 1$ (só raparigas) $= 30$
- 41.** ${}^{10}A_5$ (canetas) $\times {}^5C_5$ (lápiz) $= 30\,240$ ou ${}^{10}C_5$ (lápiz) $\times {}^5A_5$ (canetas) $= 30\,240$
- 42.** ${}^{50}C_5 \times {}^{12}C_2 = 139\,838\,160$
- 43.**
- a) $5! \times 5! = 14\,400$
- b) ${}^5C_2 = 10$
- 44.** 5C_3 (escolha das três irmãs que levam brincos iguais) $\times {}^6A_2 = 300$
- 45.** Por exemplo ${}^{12}C_5$ (escolha das cinco crianças, de entre as doze, que vão usar as máscaras de palhaço) $\times {}^7C_4$ (escolha das quatro crianças, de entre as sete sobrantes, que vão usar as máscaras de Arlequim) $\times 3!$ (distribuição das máscaras de príncipe pelas três crianças sobrantes) $= 166\,320$
- 46.** ${}^6C_2 \times {}^9A_4$ (números que começam por 5) $+ {}^6C_3 \times 8 \times {}^8A_3$ (números que não começam por 5) $= 99\,120$
- 47.**
- a) ${}^{20}C_5 \times {}^{15}C_5 \times {}^{10}C_5 \times {}^5C_5 = 1,17 \times 10^{10}$

b1) $2^{20} = 1\,048\,576$

b2) $2^{20} - 2^{19} = 524\,288$

48. $9^6 - 9$ (todas as bolas na mesma caixa) $- {}^9A_2 \times {}^6C_5$ (cinco bolas numa caixa e uma bola noutra caixa) $= 531\,000$

49.
a) ${}^{12}C_4 \times 4 = 1\,980$

b) ${}^9C_2 \times {}^{10}C_3$ (duas figuras que não são de espadas, três espadas que não são figuras) $+ 3 \times 9 \times {}^{10}C_2 \times 30$ (uma figura de espadas, uma figura que não é de espadas, duas espadas que não são figuras e uma carta que não é de espadas nem figura) $+ {}^3C_2 \times 10 \times {}^{30}C_2$ (duas figuras de espadas, uma carta de espadas que não é figura e duas cartas que não são de espadas nem são figuras) $= 53\,820$

50.
a) ${}^{12}C_2 - 3 \times 6$ (número de arestas) $= 48$

b) $2 \times {}^6C_2 - 12$ (número de arestas das bases) $= 18$

c) $2 \times {}^6C_2 \times 6 = 180$

d) Designemos as bases por b_1 e b_2 e as faces laterais por l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 e l_6 , sendo l_1 paralela a l_4 , l_2 paralela a l_5 e l_3 paralela a l_6 . O número de maneiras de pintar o sólido é 6×1 (para as bases) $\times 5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 1 \times 1$ (para as faces laterais l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 e l_6) $= 360$

51. ${}^nC_2 - n = 20 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} - n = 20 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2} - n = 20 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 20 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow n^2 - n - 2n - 40 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 40 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times (-40)}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{3 \pm 13}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow n = 8 \vee n = -5$
 O polígono tem 8 lados, o seu perímetro é $3 \times 8 = 24$.

52. $d(n+1) - d(n) = [{}^{n+1}C_2 - (n+1)] - ({}^nC_2 - n) = \frac{(n+1)n}{2} - n - 1 - \frac{n(n-1)}{2} + n =$
 $= \frac{n^2 + n - (n^2 - n)}{2} - 1 = \frac{2n}{2} - 1 = n - 1$

53. $2^n = 4\,096 \Leftrightarrow 2^n = 2^{12} \Leftrightarrow n = 12$, o conjunto tem 12 elementos. O número de subconjuntos com seis elementos é ${}^{12}C_6 = 924$.

3. Triângulo de Pascal e binômio de Newton

54. $2^n = 1\,024 \Leftrightarrow 2^n = 2^{10} \Leftrightarrow n = 10$

a) 1 e 10

b) 11

c) ${}^{10}C_5 = 252$

55. $\begin{cases} 33\,649 + 100\,947 = b \\ 100\,947 + a = 346\,104 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 134\,596 \\ a = 245\,157 \end{cases}$

56. $1 + n + n + 1 = 26 \Leftrightarrow n = 12$. O terceiro elemento dessa linha é ${}^{12}C_2 = 66$.

57. ${}^nC_p = {}^{2017}C_{81} - {}^{2016}C_{80} \Leftrightarrow {}^nC_p = {}^{2016}C_{80} + {}^{2016}C_{81} - {}^{2016}C_{80} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow {}^nC_p = {}^{2016}C_{81} \Leftrightarrow n = 2016 ; p = 81$

58. ${}^{18}C_0 = 1 = {}^{18}C_{18} ; {}^{18}C_1 = 18 = {}^{18}C_{17} ; {}^{18}C_2 = 153 = {}^{18}C_{16} ; {}^{18}C_3 = 816 = {}^{18}C_{15} ;$
 ${}^{18}C_4 = 3\,060 = {}^{18}C_{14}$
 ${}^{18}C_5 = 8\,568 = {}^{18}C_{13}$, logo dos 19 elementos, 10 são inferiores a 4 000, portanto 9 são superiores.

59. No esquema apresentado a seguir, apresentam-se os quatro primeiros elementos de duas linhas consecutivas do triângulo de Pascal (utilizam-se letras para designar alguns destes elementos).

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & a & & b & & k & \dots \\ 1 & & a+1 & & a+b & & b+k & & \dots \end{array}$$

Tem-se:

$$1 + a + 1 + a + b + b + k = 2 + 2a + 2b + k = 2 + 2a + 2b + 2k - k =$$

$$= 2(1 + a + b + k) - k = 2s - k$$

60. ${}^nC_{59} = {}^nC_{38} \Leftrightarrow n = 59 + 38 \Leftrightarrow n = 97 ; {}^{98}C_2 = {}^{98}C_{96} = 4753$

61. A soma de todos os elementos da linha do triângulo de Pascal que contém os elementos da forma nC_p é 2^n . Esta linha tem $n + 1$ elementos, sendo o último igual a 1. Portanto, a soma dos n primeiros elementos desta linha é igual a $2^n - 1$.

A soma de todos os elementos das linhas anteriores é igual a:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 1 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$

Portanto, a soma dos n primeiros elementos da linha do triângulo de Pascal que contém os elementos da forma nC_p é igual à soma de todos os elementos das linhas anteriores.

62.

a) $(5x + 2)^3 = 1 \times (5x)^3 \times 2^0 + 3 \times (5x)^2 \times 2^1 + 3 \times (5x)^1 \times 2^2 + 1 \times (5x)^0 \times 2^3 =$
 $= 125x^3 + 150x^2 + 60x + 8$

b) $(3x + 1)^4 = 1 \times (3x)^4 \times 1^0 + 4 \times (3x)^3 \times 1^1 + 6 \times (3x)^2 \times 1^2 + 4 \times (3x)^1 \times 1^3 +$
 $+ 1 \times (3x)^0 \times 1^4 = 81x^4 + 108x^3 + 54x^2 + 12x + 1$

c) $(x - 4)^5 = 1 \times x^5 \times (-4)^0 + 5 \times x^4 \times (-4)^1 + 10 \times x^3 \times (-4)^2 + 10 \times x^2 \times (-4)^3 +$
 $+ 5 \times x^1 \times (-4)^4 + 1 \times x^0 \times (-4)^5 = x^5 - 20x^4 + 160x^3 - 640x^2 + 1280x - 1024$

d) $(2x - \frac{1}{3})^6 = 1 \times (2x)^6 \times (-\frac{1}{3})^0 + 6 \times (2x)^5 \times (-\frac{1}{3})^1 +$
 $+ 15 \times (2x)^4 \times (-\frac{1}{3})^2 + 20 \times (2x)^3 \times (-\frac{1}{3})^3 + 15 \times (2x)^2 \times (-\frac{1}{3})^4 +$
 $+ 6 \times (2x)^1 \times (-\frac{1}{3})^5 + 1 \times (2x)^0 \times (-\frac{1}{3})^6 =$
 $= 64x^6 - 64x^5 + \frac{80}{3}x^4 - \frac{160}{27}x^3 + \frac{20}{27}x^2 - \frac{4}{81}x + \frac{1}{729}$

63. $(2 + \sqrt{3})^5 = 1 \times 2^5 \times (\sqrt{3})^0 + 5 \times 2^4 \times (\sqrt{3})^1 + 10 \times 2^3 \times (\sqrt{3})^2 + 10 \times 2^2 \times (\sqrt{3})^3 +$
 $+ 5 \times 2^1 \times (\sqrt{3})^4 + 1 \times 2^0 \times (\sqrt{3})^5 = 32 + 80\sqrt{3} + 240 + 120\sqrt{3} + 90 + 9\sqrt{3} =$
 $= 362 + 209\sqrt{3}$
 $a = 362 ; b = 209$

64. $(2x + 1)^4 = 16x^4 + 30x^3 + 19x^2 + 5x + 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 1 \times (2x)^4 \times 1^0 + 4 \times (2x)^3 \times 1^1 + 6 \times (2x)^2 \times 1^2 + 4 \times (2x)^1 \times 1^3 + 1 \times (2x)^0 \times 1^4 =$
 $= 16x^4 + 30x^3 + 19x^2 + 5x + 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 = 16x^4 + 30x^3 + 19x^2 + 5x + 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x^3 + 5x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + 5x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x^2 + 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 3}}{4} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-5 \pm 1}{4} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{3}{2} \vee x = -1$

65. ${}^9C_4(3a^4)^5(-\frac{1}{a})^4 = 126 \times 243a^{20} \times \frac{1}{a^4} = 30618a^{16}$

66. O termo geral do desenvolvimento de $(2x^2 + \frac{3}{x^3})^8$ é ${}^8C_k(2x^2)^{8-k}(\frac{3}{x^3})^k =$
 $= {}^8C_k \times 2^{8-k} \times x^{16-2k} \times \frac{3^k}{x^{3k}} = {}^8C_k \times 2^{8-k} \times 3^k \times \frac{x^{16-2k}}{x^{3k}} =$
 $= {}^8C_k \times 2^{8-k} \times 3^k \times x^{16-2k-3k} = {}^8C_k \times 2^{8-k} \times 3^k \times x^{16-5k} ; 16 - 5k = 1 \Leftrightarrow k = 3$

O termo é ${}^8C_3 \times 2^{8-3} \times 3^3 \times x^{16-5 \times 3} = 48384x$, o seu coeficiente é 48384.

67. $(x^2 + 6x + 9)^5 = [(x + 3)^2]^5 = (x + 3)^{10}$. O termo geral do desenvolvimento de $(x + 3)^{10}$ é ${}^{10}C_k \times x^{10-k} \times 3^k = {}^{10}C_k \times 3^k \times x^{10-k}$; $10 - k = 6 \Leftrightarrow k = 4$

${}^{10}C_4 \times 3^4 \times x^{10-4} = 17\,010\,x^6$, o seu coeficiente é 17 010.

68.

a) $\sum_{k=0}^{10} {}^{10}C_k \times 5^{10-k} \times 3^k = 2^n \Leftrightarrow (5 + 3)^{10} = 2^n \Leftrightarrow 8^{10} = 2^n \Leftrightarrow (2^3)^{10} = 2^n \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^{30} = 2^n \Leftrightarrow n = 30$

b) $\sum_{k=0}^{12} {}^{12}C_k \times 6^{12-k} = (\sqrt{7})^n \Leftrightarrow (6 + 1)^{12} = (\sqrt{7})^n \Leftrightarrow 7^{12} = (\sqrt{7})^n \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow [(\sqrt{7})^2]^{12} = (\sqrt{7})^n \Leftrightarrow (\sqrt{7})^{24} = (\sqrt{7})^n \Leftrightarrow n = 24$

c) $\sum_{k=0}^{14} {}^{14}C_k \times 3^{28-2k} = n^{14} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{14} {}^{14}C_k \times (3^2)^{14-k} \times 1^k = n^{14} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{14} {}^{14}C_k \times 9^{14-k} \times 1^k = n^{14} \Leftrightarrow \Leftrightarrow (9 + 1)^{14} = n^{14} \Leftrightarrow 10^{14} = n^{14} \Leftrightarrow n = 10$

d) $\sum_{k=0}^n {}^nC_k \times 4^{\frac{k}{2}} = \sqrt[5]{9^{40}} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n {}^nC_k \times \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^k = 9^{\frac{40}{5}} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n {}^nC_k \times (\sqrt{4})^k = 9^8 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n {}^nC_k \times 1^{n-k} \times 2^k = (3^2)^8 \Leftrightarrow (1 + 2)^n = 3^{16} \Leftrightarrow 3^n = 3^{16} \Leftrightarrow n = 16$

69. $\sum_{p=0}^{2n} {}^{2n}C_p (-2)^p = \sum_{p=0}^{2n} {}^{2n}C_p \times 1^{2n-p} \times (-2)^p = (1 - 2)^{2n} = (-1)^{2n} = 1$

Tema 2 | Probabilidades

1. Definir espaços de probabilidade

1.
 - a) $E = \{e, c, o, p\}$
 - b) $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{e\}, \{c\}, \{o\}, \{p\}, \{e, c\}, \{e, o\}, \{e, p\}, \{c, o\}, \{c, p\}, \{o, p\}, \{e, c, o\}, \{e, c, p\}, \{e, o, p\}, \{c, o, p\}, \{e, c, o, p\}\}$
 - c) $\{e, p\}$
2.
 - a) $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
 - b1) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \}$
 - b2) $\{(1, 2), (2, 1)\}$
 - b3) $\{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$
 - b4) $\{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
 - c) $2^9 - (1 \text{ (acontecimento impossível)} + 9 \text{ (acontecimentos elementares)}) = 502$
3.
 - a) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,4 = 0,6$
 - b) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,5 = 0,5$
 - c) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,6 + 0,5 - 0,8 = 0,3$
 - d) $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,3 = 0,7$
 - e) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,3 = 0,3$
 - f) $P[\overline{A} \cup (A \cap B)] = P(\overline{A}) + P(A \cap B) - P[\overline{A} \cap (A \cap B)] = 0,4 + 0,3 - P[(\overline{A} \cap A) \cap B] = 0,7 - P(\emptyset \cap B) = 0,7 - P(\emptyset) = 0,7 - 0 = 0,7$
4.
 - a) $P(A \cup B) + P(\overline{A \cap B}) = P(A \cup B) + P(\overline{A \cap B}) = P(A \cup B) + 1 - P(A \cap B) = 1$
 - b) $P(\overline{A \cup B}) - P(A \cap B) = P(\overline{A \cap B}) - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - P(A \cap B) - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) = P(\overline{A}) - P(B)$

- c)
$$\begin{aligned} P[(A \cup B) \setminus (A \cap B)] &= P[(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})] = \\ &= P(A \cup B) + P(\overline{A \cap B}) - P[(A \cup B) \cup (\overline{A \cap B})] = \\ &= P(A \cup B) + 1 - P(A \cap B) - P[(A \cup B) \cup (\overline{A \cap B})] = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + 1 - P(A \cap B) - P[(B \cup A) \cup (\overline{A \cap B})] = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + 1 + P(B) - P(A \cap B) - P[B \cup (A \cup \overline{A}) \cup \overline{B}] = \\ &= P(A \cap \overline{B}) + 1 + P(B \cap \overline{A}) - P(B \cup E \cup \overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + 1 + P(B \cap \overline{A}) - P(E) = \\ &= P(A \cap \overline{B}) + 1 + P(B \cap \overline{A}) - 1 = P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A}) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) \end{aligned}$$
- d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$ porque $P(A \cap B) \geq 0$

5.

a) $\frac{12}{22} = \frac{6}{11}$

b) $\frac{{}^{10}C_2}{{}^{22}C_2} = \frac{45}{231} = \frac{15}{77}$

c) $1 - \frac{{}^{12}C_3 + {}^{10}C_3}{{}^{22}C_3} = 1 - \frac{340}{1540} = \frac{60}{77}$

6.

a) $\frac{\#(A)}{\#(E)} = \frac{6}{10} \Leftrightarrow \frac{12}{\#(E)} = \frac{6}{10} \Leftrightarrow \#(E) = 20$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,8 = 0,6 + P(B) - 0,25 \Leftrightarrow P(B) = 0,45$
 $\frac{\#(B)}{\#(E)} = \frac{45}{100} \Leftrightarrow \frac{\#(B)}{20} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \#(B) = 9$

7. $\frac{4 \times 1}{4 \times 4} = \frac{1}{4}$

8.

a) $\frac{{}^5C_2 \times {}^{21}C_3}{{}^{26}C_5} = \frac{665}{3289} \approx 0,20$

b) $1 - \frac{{}^{21}C_5}{{}^{26}C_5} \approx 0,69$

9. Seja x o número de raparigas, $x - 3$ é o número de rapazes, $2x - 3$ é o número total de jovens.

$$\frac{x}{2x-3} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 6x - 9 = 5x \Leftrightarrow x = 9$$

Na festa estavam 9 raparigas, 6 rapazes, e um total de 15 jovens.

Para que as raparigas fiquem todas juntas o número de maneiras é $7! \times 9! = 1\,828\,915\,200$.

10.

- a) Os casos possíveis equiprováveis são $6 \times 6 = 36$.
Nos casos favoráveis temos: branco-azul, azul-branco, branco-amarelo, amarelo-branco, azul-amarelo, amarelo-azul. O número de casos favoráveis é assim: $2 \times 1 \times 3$ (branco-azul e azul-branco) + $2 \times 1 \times 2$ (branco-amarelo e amarelo-branco) + $2 \times 3 \times 2$ (azul-amarelo e amarelo-azul) = 22. A probabilidade pedida é $\frac{22}{36} = \frac{11}{18}$.
- b) Os casos possíveis equiprováveis são $6 \times 6 = 36$.
Nos casos favoráveis temos: branco-azul, azul-branco, branco-amarelo, amarelo-branco, azul-amarelo, amarelo-azul, mas nestas duas últimas situações apenas podem sair o 3 e o 6. O número de casos favoráveis é assim: $2 \times 1 \times 3$ (branco-azul e azul-branco) + $2 \times 1 \times 2$ (branco-amarelo e amarelo-branco) + $2 \times 1 \times 1$ (6 azul-3 amarelo e 3 amarelo-6 azul) = 12. A probabilidade pedida é $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.
- c) Os casos possíveis equiprováveis são $6 \times 6 = 36$.
Nos casos favoráveis temos: branco-branco, azul-azul, amarelo-amarelo, mas como o número 4 não é divisor de 30, o número de casos favoráveis é assim: 1×1 (branco-branco) + 2×2 (azul-azul) + 2×2 (amarelo-amarelo) = 9. A probabilidade pedida é $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

11.

- a) Os casos possíveis são $8!$.
Nos casos favoráveis temos: 5A_3 (para os atletas da equipa Os Gazelas) $\times 5!$ (para os restantes atletas). A probabilidade pedida é $\frac{{}^5A_3 \times 5!}{8!} = \frac{5}{28}$.
- b) Os casos possíveis são $8!$.
Nos casos favoráveis temos: 3C_2 (escolha dos dois atletas da equipa Os Gazelas que vão ocupar as pistas 1 e 2) $\times 2$ (distribuição das pistas 1 e 2 pelos dois atletas escolhidos) $\times 5$ (número de pistas que o outro atleta da equipa Os Gazelas pode escolher) $\times 5!$ (distribuição das restantes pistas pelos restantes atletas). A probabilidade pedida é $\frac{{}^3C_2 \times 2 \times 5 \times 5!}{8!} = \frac{5}{56}$.
- c) A probabilidade pedida é $\frac{6! \times 3!}{8!} = \frac{3}{28}$.

12.

- a1) A probabilidade pedida é $\frac{{}^7A_6 + {}^{33}A_6}{{}^{40}A_6} \approx 0,29$.
- a2) A probabilidade pedida é $1 - \frac{{}^{33}A_6}{{}^{40}A_6} \approx 0,71$.
- a3) Nos casos favoráveis, uma vez que o número 10 tem que entrar, vamos começar por escolher os restantes cinco números, de entre os 30 maiores do que 10. Escolhidos os seis números, eles podem permutar entre si. A probabilidade pedida é assim $\frac{{}^{30}C_5 \times 6!}{{}^{40}A_6} \approx 0,04$.
- b) A probabilidade de ganhar o prémio com uma aposta é $\frac{1}{{}^{40}C_6} = \frac{1}{3\,838\,380}$.
 $\frac{k}{3\,838\,380} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow k > 1\,919\,190$
O jogador terá de gastar mais de 1 919 191 euros.

13. A probabilidade pedida é $\frac{{}^8C_3 - 6 \times {}^4C_3}{{}^8C_3} = \frac{4}{7}$.

14. Os casos possíveis são $9!$.

Nos casos favoráveis temos: 6C_3 (escolha de dois grupos de três rapazes cada) $\times 3!$ (distribuição dos três grupos pelos três carros) $\times 3!$ (número de maneiras de sentar três pessoas em três lugares, no primeiro carro) $\times 3!$ (número de maneiras de sentar três pessoas em três lugares, no segundo carro) $\times 3!$ (número de maneiras de sentar três pessoas em três lugares, no terceiro carro). A probabilidade pedida é $\frac{{}^6C_3 \times (3!)^4}{9!} = \frac{1}{14}$.

15. A probabilidade pedida é $\frac{2 \times 4! \times 6!}{10!} = \frac{1}{105}$.

16. Existem tantos subconjuntos de A quantas as sequências $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, com n elementos, onde cada elemento b_i da sequência é 0 ou 1. Isto porque, designando por B o conjunto das sequências, a função $f: P(A) \rightarrow B$ que a cada subconjunto X de A faz corresponder a sequência $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ de acordo com a regra:

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tem-se: $\begin{cases} b_i = 0, & \text{se } a_i \notin X \\ b_i = 1, & \text{se } a_i \in X \end{cases}$ é uma bijeção.

Assim, por exemplo, o conjunto vazio corresponde à sequência de n zeros, o conjunto A corresponde à sequência de n uns, o conjunto $\{1, 3\}$ corresponde à sequência

1 0 1 0 0 0 0 0.
 $n - 3$ zeros

Como cada elemento da sequência pode tomar um de dois valores, existem 2^n sequências.

Os casos possíveis são assim 2^n .

Casos favoráveis ao subconjunto conter o número m : Todos os outros elementos da sequência podem tomar os valores 0 ou 1, o elemento m apenas pode tomar o valor 1. Existem então 2^{n-1} casos favoráveis. A probabilidade pedida é, então, $\frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$.

Outro processo de resolução:

Casos possíveis: $\#(P(A)) = 2^n$

Casos favoráveis ao subconjunto conter o número m :

Subconjuntos com 1 elemento $\rightarrow 1$ (o conjunto $\{m\}$)

Subconjuntos com 2 elementos $\rightarrow n - 1$ (os conjuntos $\{m, i\}$ com $i \in A \setminus \{m\}$)

Subconjuntos com 3 elementos $\rightarrow {}^{n-1}C_2$ (os conjuntos $\{m, i, j\}$ com $i, j \in A \setminus \{m\}$)

Subconjuntos com 4 elementos $\rightarrow {}^{n-1}C_3$ etc.

Subconjuntos com n elementos $\rightarrow 1$ (o conjunto A)

Os casos favoráveis são assim ${}^{n-1}C_0 + {}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_2 + \dots + {}^{n-1}C_{n-1} = 2^{n-1}$ (soma de todos os elementos da linha do triângulo de Pascal que contém os elementos da forma ${}^{n-1}C_k$).

A probabilidade pedida é, então, $\frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$.

2. Definir probabilidade condicionada

17. $P(B_2|B_1)$ designa a probabilidade de a bola retirada em segundo lugar ser branca, sabendo que a bola retirada em primeiro lugar era branca. Ora, se foi retirada uma bola branca, aquando da segunda extração, restam apenas 7 bolas na caixa, das quais 3 são brancas, os casos possíveis são 7 e os favoráveis são 3, pelo que $P(B_2|B_1) = \frac{3}{7}$.
18. $P(B|A)$ designa a probabilidade de o número saído ser maior que $\sqrt{50}$, sabendo que é par. Ora, se o número saído é par, temos 6 casos possíveis (2, 4, 6, 8, 10 e 12), e como $\sqrt{50} \approx 7,1$, desses 6 apenas 3 são maiores de que $\sqrt{50}$ (8, 10 e 12). Temos, assim, 6 casos possíveis e 3 casos favoráveis, pelo que $P(B|A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
19. Designemos por x o número de fichas brancas que estavam inicialmente no saco. $P(B|A)$ designa a probabilidade de a ficha retirada do saco ser branca, sabendo que no lançamento do dado saiu o número 4. Ora, se no lançamento do dado saiu o número 4 significa que foram colocadas no saco 4 fichas azuis. O saco fica então com x bolas brancas e 4 azuis.
$$P(B|A) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x = 2x + 8 \Leftrightarrow x = 8$$

O número de fichas brancas que estavam inicialmente no saco é 8.
20. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,6 = 0,3 + 0,4 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,1$
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$
21. Designemos por A e B os acontecimentos:
 A : o aluno escolhido é do sexo feminino
 B : o aluno escolhido frequenta o ensino secundário
Sabe-se que $P(A) = 0,55$, $P(B) = 0,45$ e $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,25$.
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,25 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0,25 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0,25 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,75 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,75 \Leftrightarrow 0,55 + 0,45 - P(A \cap B) = 0,75 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,25$$

É pedida a $P(A|B)$.
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,25}{0,45} = \frac{5}{9}$$
22. a1) Ao extrair ao acaso uma bola da caixa B, a probabilidade de sair uma bola azul é dupla da probabilidade de sair uma bola branca. Portanto, o número de bola azuis é o dobro do número de bolas brancas. Assim, designando por b o número de bolas brancas, o número de bola azuis é $2b$. Portanto, o total de bolas azuis e bolas brancas é $3b$, ou seja, é um número múltiplo de 3. Se a bola verde não tivesse transitado da caixa A para a caixa B, as treze bolas que ficavam nesta caixa eram apenas bolas azuis e bolas brancas, o que é absurdo pois 13 não é múltiplo de 3. Logo, a bola verde foi uma das bolas que transitaram da caixa A para a caixa B.

- a2)** Pela alínea anterior concluímos que depois da transferência das duas bolas (da caixa A para a caixa B), a caixa B ficou com b bolas brancas, $2b$ bolas azuis e 1 bola verde, num total de 13 bolas.

$$b + 2b + 1 = 13 \Leftrightarrow 3b = 12 \Leftrightarrow b = 4$$

A caixa B ficou então com 4 bolas brancas e 8 bolas azuis.

- b)** Inicialmente a caixa A tinha 6 bolas (3 brancas, 2 azuis e 1 verde) e a caixa B tinha 11 bolas (x brancas e $11 - x$ azuis), portanto das 17 bolas que foram colocadas no saco, $x + 3$ são brancas, $13 - x$ são azuis e 1 é verde.

$$\text{Como } P(Y|X) = \frac{3}{8}, \text{ temos que } \frac{x+2}{16} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow x + 2 = 6 \Leftrightarrow x = 4.$$

Estavam inicialmente 4 bolas brancas na caixa B.

- 23.** Pelo facto de $A \subset C$, sabemos que $A \cap C = A$. Pelo facto de os acontecimentos B e C serem incompatíveis, sabemos que $B \cap C = \emptyset$.

$$P(A \cup B|C) = \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} = \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} = \frac{P(A \cup \emptyset)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C)}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{24.} \quad & \begin{cases} P(A|B) = \frac{1}{2} \\ P(A \cup B) = 3P(A \cap B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \\ P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3P(A \cap B) \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} P(A \cap B) = \frac{1}{2} P(B) \\ P(A) + P(B) = 4P(A \cap B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(A \cap B) = \frac{1}{2} P(B) \\ P(A) + P(B) = 2P(B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ P(A) = P(B) \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, os acontecimentos A e B são equiprováveis.

- 25.** Designemos por A e B os acontecimentos:

A : a bola é retirada da caixa A

B : a bola retirada é branca

Uma vez que apenas a caixa A tem bolas brancas vem que:

$$P(B) = P(B \cap A) = P(A) \times P(B|A) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10} = 0,1$$

- 26.** Designemos por A e B os acontecimentos:

A : o trabalhador escolhido é do sexo feminino

B : o trabalhador escolhido é licenciado

- a)** Sabe-se que $P(A) = \frac{1}{2}$ e que $P(B|A) = \frac{1}{3}$.

$$P(B \cap A) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

A probabilidade de ser escolhida uma mulher licenciada é $\frac{1}{6}$.

- b)** Sabe-se que $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ e que $P(B \cap \overline{A}) = \frac{1}{4}$.

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

A probabilidade pedida é $\frac{1}{2}$.

- 27.** Designemos por A e B os acontecimentos:

A : a turma escolhida é o 12.º A

B : são escolhidos dois rapazes e uma rapariga

Sabe-se que $P(A) = \frac{1}{20}$ e que $P(B|A) = \frac{{}^{16}C_2 \times {}^8C_1}{{}^{24}C_3} = \frac{120}{253}$.

A probabilidade pedida é $P(B \cap A) = P(B|A) \times P(A) = \frac{120}{253} \times \frac{1}{20} = \frac{6}{253}$.

- 28.** Designemos por A , B e C os acontecimentos:

A : sai número 4 no lançamento do dado

B : sai número 6 no lançamento do dado

C : o dado escolhido é viciado

Sabe-se que $P(C) = \frac{1}{3}$, que $P(B|C) = \frac{1}{3}$ e que $P(A|C) = \frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{15}$.

A probabilidade pedida é:

$$P(A) = P(A|C) \times P(C) + P(A|\overline{C}) \times P(\overline{C}) = \frac{2}{15} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{45}$$

- 29.** Designemos por A , B , C e V os acontecimentos:

A : a bola é retirada da caixa A

B : a bola é retirada da caixa B

C : a bola é retirada da caixa C

V : a bola retirada é verde

Sabe-se que $P(A) = \frac{1}{6}$, que $P(B) = \frac{2}{6}$ e que $P(C) = \frac{3}{6}$.

- a)** Sabe-se ainda que $P(V|A) = \frac{3}{8}$, que $P(V|B) = \frac{6}{9}$ e que $P(V|C) = \frac{2}{10}$.

A probabilidade pedida é $P(V) = P(V|A)P(A) + P(V|B)P(B) + P(V|C)P(C) =$
 $= \frac{3}{8} \times \frac{1}{6} + \frac{6}{9} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{10} \times \frac{3}{6} = \frac{277}{720} \approx 0,385$.

- b)** Designemos ainda por D o acontecimento «sai número 2 no lançamento do dado».

A probabilidade pedida é $P(D|V) = \frac{P(D \cap V)}{P(V)} = \frac{P(V|D)P(D)}{P(V)} = \frac{\frac{6}{9} \times \frac{1}{6}}{\frac{277}{720}} = \frac{80}{277} \approx 0,289$.

- 30.** Designemos por A e B os acontecimentos:

A : o aluno escolhido é do sexo feminino

B : o aluno escolhido teve nota positiva no teste

Sabe-se que $P(A) = 0,6$, que $P(B) = 0,8$ e que $P(A|\overline{B}) = 0,75$.

Sabe-se ainda que $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})$.

Logo, $0,6 = P(A|B) \times 0,8 + 0,75 \times 0,2 \Leftrightarrow P(A|B) = \frac{0,6 - 0,75 \times 0,2}{0,8} = \frac{9}{16}$.

A probabilidade pedida é $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{16} \times \frac{8}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{3}{4}$.

31. Designemos por A e B os acontecimentos:

A : o jogador escolhido é estrangeiro

B : o jogador escolhido tem mais de 25 anos

Sabe-se que $P(A) = 0,4$, que $P(B) = 0,56$ e que $P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{2}{5}$.

Mas se $P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{2}{5}$ vem que $P(B|\overline{A}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

Sabe-se ainda que $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$.

Logo, $0,56 = P(B|A) \times 0,4 + \frac{3}{5} \times 0,6 \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{0,56 - \frac{3}{5} \times 0,6}{0,4} = \frac{1}{2}$.

A probabilidade pedida é $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{1}{2} \times 0,4 = 0,2 = \frac{1}{5}$.

32. A e B são acontecimentos independentes, pelo que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Se $P(\overline{A}) = \frac{1}{4}$, vem que $P(A) = \frac{3}{4}$.

Vem, então, $\frac{3}{8} = \frac{3}{4} \times P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$.

33. $P(A \cup B) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(B) \times P(A|B) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + \frac{P(A)}{2} - \frac{P(A)}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + \frac{P(A)}{2} - \frac{P(A)}{4} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow 8P(A) + 4P(A) - 2P(A) = 5 \Leftrightarrow 10P(A) = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

Como $P(A|B) = P(A)$, os acontecimentos A e B são independentes.

34. Designemos por A , B , C e D os acontecimentos:

A : a bola retirada da urna U é azul

B : a bola retirada da urna U é branca

C : a bola retirada da urna V é azul

D : a bola retirada da urna V é branca

Sabe-se que $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, que $P(B) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, que $P(C) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ e que $P(D) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

- a) Como os acontecimentos A e D são independentes, $P(D|A) = P(D) = \frac{5}{8}$.

- b) Como os acontecimentos A e D são independentes,

$$P(D \cap A) = P(D) \times P(A) = \frac{5}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$$

- c) $P(B \cap C) + P(A \cap D) = P(B) \times P(C) + P(A) \times P(D) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{11}{24}$

35. O acontecimento contrário de «sair pelo menos uma bola verde» é «nunca sair bola verde».

Assim, a probabilidade de nunca sair bola verde (não sair bola verde na caixa A e não sair bola verde na caixa B) é $\frac{1}{3}$. Designemos por v o número de bolas verdes que existem na caixa B.

$$\frac{9}{12} \times \frac{9-v}{9} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{9-v}{12} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 9-v = 4 \Leftrightarrow v = 5$$

Existem 5 bolas verdes na caixa B.

- 36.** Designemos por A , B e R os acontecimentos:

A : a peça escolhida cumpre os requisitos do teste A

B : a peça escolhida cumpre os requisitos do teste B

R : a peça escolhida é rejeitada $R = \overline{A} \cup \overline{B}$

Se A e B são independentes, $\overline{A}$ e $\overline{B}$ também o são.

$$P(R) = P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) = \\ = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

- 37.** Designemos por A e B os acontecimentos:

A : a Ana ultrapassa a marca de 55 metros

B : a Bárbara ultrapassa a marca de 55 metros

Sabe-se que A e B são independentes, que $P(A) = 0,8$ e que $P(B) = 0,85$.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \\ = 0,8 + 0,85 - 0,8 \times 0,85 = 0,97$

- b)** Se A e B são independentes também o são A e $\overline{B}$, e $\overline{A}$ e B .

A probabilidade pedida é $P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \times P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \times P(B) = \\ = 0,8 \times (1 - 0,85) + (1 - 0,8) \times 0,85 = 0,29$.

38. $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

$A \cap B$: sai número ímpar e menor do que 3

$A \cap B$: sai o número 1

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Como $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, os acontecimentos A e B são independentes.

39. $P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A}) \times P(B) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(\overline{A}) \times P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B) \Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = (1 - P(A)) \times P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Logo, os acontecimentos A e B são independentes.

- 40.** Sabe-se que os acontecimentos A e B são independentes, pelo que A e $\overline{B}$, e $\overline{A}$ e B também o são.

$$P(A \cup B) - P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A) - P(\overline{B}) + P(A \cap \overline{B}) = \\ = P(B) - P(A)P(B) - P(\overline{B}) + P(A)P(\overline{B}) = P(B)(1 - P(A)) - P(\overline{B})(1 - P(A)) = \\ = (1 - P(A))(P(B) - P(\overline{B})) = P(\overline{A})(P(B) - 1 + P(B)) = P(\overline{A})(2P(B) - 1) = \\ = 2P(\overline{A})P(B) - P(\overline{A}) = 2P(\overline{A} \cap B) - P(\overline{A})$$

41. $P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) \Leftrightarrow P(E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A \cap E) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap E) = P(A) \times 1 \Leftrightarrow P(A \cap E) = P(A) \times P(E)$

Logo, A e E são acontecimentos independentes.

42. Se A e B fossem independentes, ter-se-ia $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Ter-se-ia então:

$$P(A \cup B) = P(A) \times P(B) + P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) \times P(B) + P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) - P(A) \times P(B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) - 2P(A) \times P(B) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)(1 - 2P(B)) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0 \vee 1 - 2P(B) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0 \vee P(B) = \frac{1}{2}, \text{ o}$$

que contradiz a hipótese.

Portanto, os acontecimentos A e B não são independentes.

3. Funções Reais de Variável Real

1. Limites e continuidade

1. a) Seja δ um número real positivo.

$$\begin{aligned} \left| u_n - \left(-\frac{2}{3} \right) \right| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{1-2n}{3n+1} + \frac{2}{3} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{3-6n+6n+2}{9n+3} \right| < \delta \Leftrightarrow \underbrace{\left| \frac{5}{9n+3} \right|}_{\text{positivo}} < \delta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{9n+3} < \delta \Leftrightarrow \frac{5-9n\delta-3\delta}{\underbrace{9n+3}_{\text{positivo}}} < 0 \Leftrightarrow 5-9n\delta-3\delta < 0 \Leftrightarrow n > \frac{5-3\delta}{9\delta} \end{aligned}$$

Então, sendo p um número natural maior do que $\frac{5-3\delta}{9\delta}$, tem-se:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| u_n + \frac{2}{3} \right| < \delta, \text{ de onde se conclui que } \lim u_n = -\frac{2}{3}.$$

b) Neste caso $\delta = 0,001$, pelo que $n > \frac{5-3\delta}{9\delta}$; logo:

$$n > \frac{5-3 \times 0,001}{9 \times 0,001} \Leftrightarrow n > \frac{4997}{9} \text{ e } \frac{4997}{9} \approx 555,22$$

A menor ordem a partir da qual os termos da sucessão pertencem à vizinhança é 555, exclusive.

2. a) Seja L um número real positivo.

$$v_n > L \Leftrightarrow 0,1n^2 - 200 > L \Leftrightarrow n^2 > 10L + 2000 \Leftrightarrow n > \sqrt{10L + 2000}$$

Então, sendo p um número natural maior do que $\sqrt{10L + 2000}$, tem-se:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow v_n > L, \text{ de onde se conclui que } \lim v_n = +\infty.$$

b) Neste caso $L = 1000$, pelo que $n > \sqrt{10L + 2000}$; logo:

$$n > \sqrt{10 \times 1000 + 2000} \Leftrightarrow n > 20\sqrt{30} \text{ e } 20\sqrt{30} \approx 109,54$$

A menor ordem a partir da qual os termos da sucessão (v_n) são maiores do que 1000 é 109, exclusive.

3. a) Seja L um número real positivo.

$$w_n < -L \Leftrightarrow 50 - 2n^3 < -L \Leftrightarrow n > \sqrt[3]{\frac{L+50}{2}}$$

Então, sendo p um número natural maior do que $\sqrt[3]{\frac{L+50}{2}}$, tem-se:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow w_n < -L, \text{ de onde se conclui que } \lim w_n = -\infty.$$

b) Neste caso $L = 1500$, pelo que $n > \sqrt[3]{\frac{L+50}{2}}$; logo:

$$n > \sqrt[3]{\frac{1500+50}{2}} \Leftrightarrow n > \sqrt[3]{775} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{775} \approx 9,19$$

A menor ordem a partir da qual os termos da sucessão (w_n) são menores do que -1500 é nove, exclusive.

4. Seja L um número real positivo.

$$2n - n > L \Leftrightarrow n > L \quad \text{e} \quad 2n + n > L \Leftrightarrow n > \frac{L}{3}$$

Então, sendo p um número natural maior do que L , ele também é maior do que $\frac{L}{3}$ e, portanto:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L, \text{ de onde se conclui que } \lim u_n = +\infty.$$

Se n é par, $u_n = 2n + n = 3n$.

$$\text{Para } n \text{ par, } u_n < 1000 \Leftrightarrow 3n < 1000 \Leftrightarrow n < \frac{1000}{3} \quad \text{e} \quad \frac{1000}{3} \approx 333,33.$$

Significa que nas condições pedidas temos tantos termos de ordem par quantos os números pares inferiores ou iguais a 333, isto é, $\frac{332}{2} = 166$.

Se n é ímpar, $u_n = 2n - n = n$.

$$\text{Para } n \text{ ímpar, } u_n < 1000 \Leftrightarrow n < 1000.$$

Significa que nas condições pedidas temos tantos termos de ordem ímpar quantos os números ímpares inferiores a 1000, isto é, $\frac{998}{2} + 1 = 500$. Temos, assim, $166 + 500 = 666$ termos da sucessão inferiores a 1000.

$$5. \quad \text{a)} \quad \lim \frac{u_n + v_n}{u_n^2} = \frac{\lim(u_n + v_n)}{\lim(u_n^2)} = \frac{\lim u_n + \lim v_n}{(\lim u_n)^2} = \frac{2-4}{2^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{b)} \quad \lim(u_n \times v_n)^{\frac{1}{3}} = \left(\lim(u_n \times v_n) \right)^{\frac{1}{3}} = (\lim u_n \times \lim v_n)^{\frac{1}{3}} = (2 \times (-4))^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$6. \quad \text{a)} \quad \lim u_n = \lim(n^2 + 2n) = +\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$\text{b)} \quad \lim v_n = \lim\left(3 + \frac{2}{n+1}\right) = 3 + 0 = 3$$

$$\text{c)} \quad \lim(1 - 2n - u_n) = \lim(1 - 2n - n^2 - 2n) = \lim(-n^2 - 4n + 1) = -\infty + (-\infty) + 1 = -\infty$$

$$\text{d) } \lim \left[(n^2 + 2n) \times \left(1 - 3 - \frac{2}{n+1} \right) \right] = \lim \left[(n^2 + 2n) \times \left(-2 - \frac{2}{n+1} \right) \right] =$$

$$= (+\infty + (+\infty)) \times (-2 - 0) = -\infty$$

$$\text{e) } \lim \frac{n^2 + 2n}{3 + \frac{2}{n+1}} = \frac{+\infty}{3} = +\infty$$

$$\text{f) } \lim \frac{v_n - 3}{1 - u_n} = \lim \frac{3 + \frac{2}{n+1} - 3}{1 - n^2 - 2n} = \lim \frac{\frac{2}{n+1}}{1 - n^2 - 2n} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$\text{g) } \lim \frac{1}{3 - v_n} = \lim \frac{1}{3 - 3 - \frac{2}{n+1}} = \lim \frac{1}{-\frac{2}{n+1}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\text{h) } \lim \frac{v_n}{1 - u_n} = \lim \frac{3 + \frac{2}{n+1}}{1 - n^2 - 2n} = \frac{3 + 0}{-\infty} = \frac{3}{-\infty} = 0$$

$$7. \text{ a) } \lim (10n^2 - 0,01n^3 + 10)_{SI+\infty+(-\infty)} = \lim \left[n^3 \left(\frac{10}{n} - 0,01 + \frac{10}{n^3} \right) \right] = +\infty \times (0 - 0,01 + 0) = -\infty$$

$$\text{b) } \lim (\sqrt{n} - \sqrt{n+2})_{SI+\infty+(-\infty)} = \lim \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+2})(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} = \lim \frac{n - n - 2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} =$$

$$= \lim \frac{-2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

$$\text{c) } \lim (\sqrt{n^2 + 2} - n)_{SI+\infty+(-\infty)} = \lim \frac{(\sqrt{n^2 + 2} - n)(\sqrt{n^2 + 2} + n)}{\sqrt{n^2 + 2} + n} = \lim \frac{n^2 + 2 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2} + n} =$$

$$= \lim \frac{2}{\sqrt{n^2 + 2} + n} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$\text{d) } \lim \frac{2n-1}{3n+2}_{SI^\infty} = \lim \frac{n \left(2 - \frac{1}{n} \right)}{n \left(3 + \frac{2}{n} \right)} = \lim \frac{2 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{2-0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

$$\text{e) } \lim \frac{n^2 - (n-1)^2}{3n+2} = \lim \frac{n^2 - n^2 + 2n - 1}{3n+2} = \lim \frac{2n-1}{3n+2} = \lim \frac{n \left(2 - \frac{1}{n} \right)}{n \left(3 + \frac{2}{n} \right)} = \lim \frac{2 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n^2+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(3+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{n\left(3+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{2-0}{+\infty(3+0)} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$\text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}}{n\left(3+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{n\left(3+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{2+0}}{3+0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-2n}{n+3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-2n}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-2n}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-2\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-2}{1+\frac{3}{n}} = \frac{\sqrt{1+0}-2}{1+0} = \frac{1-2}{1} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n^2+1} \times \frac{n+1}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+2n}{2n^2+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2\left(2+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{2}{n}}{2+\frac{2}{n^2}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{j) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2n-1} - \frac{1}{2}}{3 - \frac{3n}{n+2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+2-2n+1}{4n-2}}{\frac{3n+6-3n}{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{4n-2}}{\frac{6}{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+6}{24n-12} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{8n-4} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(8-\frac{4}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{8-\frac{4}{n}} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n^2}}{1 + \sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}} + 1 \right)}{\sqrt{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n}} \times \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}} + 1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + 1} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[6]{n^4}}{\sqrt[6]{n^3}} \times \frac{\frac{\sqrt[6]{n^3}}{\sqrt[6]{n^4}} + 1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[6]{n} \times \frac{\sqrt[6]{\frac{1}{n}} + 1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + 1} \right) = +\infty \times \frac{0+1}{0+1} = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{l) } \lim \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{3}{2} \right)^{-n} + \sqrt[n]{2} \right] = \lim \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{2}{3} \right)^n + \sqrt[n]{2} \right] = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$\text{m) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} + 3^n}{2^{n+1} + 4^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 3^n}{2^{n+1} + 4^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \left[1 + \left(\frac{3}{4} \right)^n \right]}{4^{n+1} \left[\left(\frac{2}{4} \right)^{n+1} + 1 \right]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{3}{4} \right)^n}{4 \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} + 1 \right]} = \frac{1+0}{4(0+1)} = \frac{1}{4}$$

$$\text{n) } \lim_{k=0}^n 2^{1-k} = \lim_{k=0}^n \left[2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right] = 2 \times \frac{1-0}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\begin{aligned} \text{o) } \lim_{k=1}^n \frac{1+2k}{n^2+1} &= \lim_{k=1}^n \left[\frac{1}{n^2+1} \times \sum_{k=1}^n (1+2k) \right] = \lim_{k=1}^n \left[\frac{1}{n^2+1} \times \frac{3+3+(n-1) \times 2}{2} \times n \right] = \\ &= \lim_{k=1}^n \frac{n^2+2n}{n^2+1} = \lim_{k=1}^n \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{k=1}^n \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \end{aligned}$$

8. a) $\lim(n + \underbrace{\text{tg}^2 n}_{\geq 0}) = +\infty$; por comparação pois $\forall n \in \mathbb{N}, n + \underbrace{\text{tg}^2 n}_{\geq 0} \geq n$ e $\lim n = +\infty$.

b) $\lim \frac{2-n}{3-\cos n} = -\infty$; por comparação, pois $\forall n \in \mathbb{N}, \cos n \leq 1 \Leftrightarrow -\cos n \geq -1 \Leftrightarrow 3 - \cos n \geq 2$

Pelo que $\frac{2-n}{3-\cos n} \leq \frac{2-n}{2}$ e $\lim \frac{2-n}{2} = -\infty$.

c) $\lim \left(\frac{5n+1}{n+3} \right)^n = +\infty$; por comparação, pois $\forall n \in \mathbb{N}, 5n+1 \geq 5n$ e para $n \geq 3, n+3 \leq 2n$

E quer $5n+1$ quer $n+3$ são positivos.

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow \frac{5n+1}{n+3} \geq \frac{5n}{2n}$ e $\lim \left(\frac{5}{2} \right)^n = +\infty$.

9. $\lim u_n = \lim \frac{2n+3}{n+1} = \lim \frac{n \left(2 + \frac{3}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \lim \frac{2 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{2+0}{1+0} = 2$; portanto, se a sucessão (v_n) for

convergente, tem-se $\lim v_n \leq \lim u_n$; portanto, $\lim v_n \leq 2$.

10. $\lim u_n = \lim (n + \cos n) = +\infty$, pois $\forall n \in \mathbb{N}, \cos n \geq -1$; logo, $\forall n \in \mathbb{N}, n + \cos n \geq n - 1$ e $\lim (n - 1) = +\infty$.

$\lim v_n = \lim (\sin n - n) = -\infty$, pois $\forall n \in \mathbb{N}, \sin n \leq 1$; logo, $\forall n \in \mathbb{N}, \sin n - n \leq 1 - n$ e $\lim (1 - n) = -\infty$.

11. $\lim v_n = -\infty$, pois $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq -u_n$ e $\lim(-u_n) = \lim \frac{-2n^2 - 1}{n + 2} =$
 $= \lim \frac{n^2 \left(-2 - \frac{1}{n^2}\right)}{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \lim \frac{n \left(-2 - \frac{1}{n^2}\right)}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{+\infty(-2 - 0)}{1 + 0} = -\infty$

12. $\lim v_n = -\infty$, pois $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_n}{u_n} \geq 1 \wedge u_n < 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$ e $\lim u_n = -\infty$.

13. $\lim u_n = +\infty$, pois $\sum_{k=1}^n \frac{2k^2 + n}{n} \geq \frac{2 \times 1^2 + n}{n} \times n = 2 + n$ e $\lim (2 + n) = +\infty$.

14. a) $\lim u_n = \lim \frac{2n + \cos(2n)}{n + 1} = 2$; pois, $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(2n) \leq 1$, pelo que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2n - 1}{n + 1} \leq \frac{2n + \cos(2n)}{n + 1} \leq \frac{2n + 1}{n + 1} \text{ e } \lim \frac{2n - 1}{n + 1} = \lim \frac{2n + 1}{n + 1} = 2.$$

Nota que $\lim \frac{2n - 1}{n + 1} = \lim \frac{2n}{n} = \lim 2 = 2$ e que $\lim \frac{2n + 1}{n + 1} = \lim \frac{2n}{n} = \lim 2 = 2$

b) $\lim v_n = \lim \frac{n}{2n - \sin n} = \frac{1}{2}$; pois, $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin n \leq 1$, pelo que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n}{2n + 1} \leq \frac{n}{2n - \sin n} \leq \frac{n}{2n - 1} \text{ e } \lim \frac{n}{2n + 1} = \lim \frac{n}{2n - 1} = \frac{1}{2}.$$

c) $\lim w_n = \lim \left(\frac{2n - 5}{3n + 1}\right)^n = 0$; pois $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow 0 \leq 2n - 5 \leq 2n$ e

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3n + 1 \geq 3n, \text{ pelo que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow 0 \leq w_n \leq \left(\frac{2n}{3n}\right)^n \text{ e } \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

15. Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq -2$. Como $\lim u_n = \lim \frac{1 - 2n}{n + 1} = \lim \frac{-2n}{n} = \lim(-2) = -2$, o teorema das sucessões enquadradas permite concluir que a sucessão (v_n) é convergente e $\lim v_n = -2$.

16. Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}, n \times u_n + 1 > 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \times u_n > -1 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n > -\frac{1}{n}$, pelo que

$$\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{n} < u_n < 0.$$

Como $\lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$, o teorema das sucessões enquadadas permite concluir que a sucessão (u_n) é convergente e $\lim u_n = 0$.

17. $\sum_{k=1}^n \frac{2n+1}{k+n^2} = \frac{2n+1}{1+n^2} + \frac{2n+1}{2+n^2} + \dots + \frac{2n+1}{n+n^2}$. Uma vez que, para cada valor de n

(com $n \in \mathbb{N}$), a sucessão (v_k) definida por $v_k = \frac{2n+1}{k+n^2}$ é estritamente decrescente,

então, $\sum_{k=1}^n \frac{2n+1}{n+n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{2n+1}{k+n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{2n+1}{1+n^2}$. Dado que:

- $\sum_{k=1}^n \frac{2n+1}{n+n^2} = \frac{2n+1}{n+n^2} \times n = \frac{2n^2+n}{n+n^2}$ e $\lim \frac{2n^2+n}{n+n^2} = \lim \frac{2n^2}{n^2} = 2$
- $\sum_{k=1}^n \frac{2n+1}{1+n^2} = \frac{2n+1}{1+n^2} \times n = \frac{2n^2+n}{1+n^2}$ e $\lim \frac{2n^2+n}{1+n^2} = \lim \frac{2n^2}{n^2} = 2$

o teorema das sucessões enquadadas permite concluir que $\lim \sum_{k=1}^n \frac{2n+1}{k+n^2} = 2$.

$$\begin{aligned} 18. \sum_{k=n}^{2n} \frac{n^2+k}{2k+n^3} &= \frac{n^2+n}{2n+n^3} + \frac{n^2+n+1}{2(n+1)+n^3} + \frac{n^2+n+2}{2(n+2)+n^3} + \dots + \frac{n^2+2n}{2 \times 2n+n^3} = \\ &= \frac{n^2+n}{n^3+2n} + \frac{n^2+n+1}{n^3+2n+2} + \frac{n^2+n+2}{n^3+2n+4} + \dots + \frac{n^2+2n}{n^3+4n}. (*) \end{aligned}$$

Então, para $n > 2$, tem-se $\sum_{k=n}^{2n} \frac{n^2+n}{n^3+2n} \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{n^2+k}{2k+n^3} \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{n^2+2n}{n^3+4n}$.

Dado que:

$$\bullet \sum_{k=n}^{2n} \frac{n^2+n}{n^3+2n} = \frac{n^2+n}{n^3+2n} \times (2n-n+1) = \frac{(n^2+n)(n+1)}{n^3+2n} = \frac{n^3+2n^2+n}{n^3+2n} \text{ e}$$

$$\lim \frac{n^3+2n^2+n}{n^3+2n} = \lim \frac{n^3}{n^3} = 1$$

$$\bullet \sum_{k=n}^{2n} \frac{n^2+2n}{n^3+4n} = \frac{n^2+2n}{n^3+4n} \times (2n-n+1) = \frac{(n^2+2n)(n+1)}{n^3+4n} = \frac{n^3+3n^2+2n}{n^3+4n} \text{ e}$$

$$\lim \frac{n^3+3n^2+2n}{n^3+4n} = \lim \frac{n^3}{n^3} = 1$$

o teorema das sucessões enquadadas permite concluir que $\lim \sum_{k=n}^{2n} \frac{n^2+k}{2k+n^3} = 1$.

(*) Nota que, para cada valor de n , com $n \in \mathbb{N}$ e $n > 2$, a sucessão (v_k) definida por

$v_k = \frac{n^2 + k}{2k + n^3}$ é estritamente crescente, pois:

$$\begin{aligned} v_{k+1} - v_k &= \frac{n^2 + k + 1}{2k + 2 + n^3} - \frac{n^2 + k}{2k + n^3} = \frac{2kn^2 + 2k^2 + 2k + n^5 + kn^3 + n^3 - 2kn^2 - 2k^2 - 2n^2 - 2k - n^5 - kn^3}{(2k + 2 + n^3)(2k + n^3)} = \\ &= \frac{n^3 - 2n^2}{(2k + 2 + n^3)(2k + n^3)} = \frac{n^2(n - 2)}{(2k + 2 + n^3)(2k + n^3)} = \underbrace{\frac{n^2}{(2k + 2 + n^3)(2k + n^3)}}_{\text{positivo}} \underbrace{(n - 2)}_{\text{positivo para } n > 2} \end{aligned}$$

19. Tem-se $\frac{n!}{n^n} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1}{\underbrace{n \times n \times n \times \dots \times n \times n}_{n \text{ fatores}}} = \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \dots \times \frac{2}{n} \times \frac{1}{n}.$

Atendendo a que $\frac{n}{n} = 1$ e a que os fatores $\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \dots, \frac{2}{n}$ designam números menores do que 1,

conclui-se que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}.$

Então, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$ e, dado que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, o teorema das sucessões enquadradas permite concluir que a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{n!}{n^n}$ é convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

20. Seja (x_n) uma sucessão que tende para 2 e tem os termos diferentes de zero.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - 4}{x_n} = \frac{(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^2 - 4}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{2^2 - 4}{2} = 0$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0.$

Seja (u_n) uma sucessão que tende para $+\infty$ e tem os termos diferentes de zero.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^2 - 4}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_n^2}{u_n} - \frac{4}{u_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n - \frac{4}{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n} = +\infty - \frac{4}{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$

21. Sejam (u_n) e (v_n) as sucessões definidas por $u_n = -1 - \frac{1}{n}$ e $v_n = -1 + \frac{1}{n}$. Tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 - \frac{1}{n} \right) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{1}{n} \right) = -1 \quad \text{e}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) = 2$, de onde se conclui que não existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x).$

$$22. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{(2x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^2 + 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} = \frac{-2 - 1}{1 + 1 + 1} = -1$$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -1$$

$$2x^2 + x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)$$

-1	1	0	0	1
	1	-1	1	-1
		-1	1	0

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5}-3}{x^2-2x} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)}{(x^2-2x)(\sqrt{2x+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+5-9}{(x^2-2x)(\sqrt{2x+5}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{(x^2-2x)(\sqrt{2x+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{x(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x(\sqrt{2x+5}+3)} = \\ &= \frac{2}{2(\sqrt{4+5}+3)} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-3x}{x+\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-3x}{x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3x}{x\left(1+\sqrt{\frac{x}{x^2}}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3\right)}{x\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3}{1+\sqrt{\frac{1}{x}}} = -2 \end{aligned}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty; \text{ logo, não existe } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1+\sqrt{x+1}}{x^2+x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1+\sqrt{x+1})(x-1-\sqrt{x+1})}{(x^2+x)(x-1-\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)^2-(x+1)}{x(x+1)(x-1-\sqrt{x+1})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x+1-x-1}{x(x+1)(x-1-\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-3x}{x(x+1)(x-1-\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)}{x(x+1)(x-1-\sqrt{x+1})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{(x+1)(x-1-\sqrt{x+1})} = \frac{0-3}{(0+1)(0-1-\sqrt{0+1})} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|1-3x|+4x}{|x-3|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1+3x+4x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x-1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x}{x} = 7$$

$$|1-3x| = \begin{cases} 1-3x & \text{se } 1-3x \geq 0 \\ -1+3x & \text{se } 1-3x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-3x & \text{se } x \leq \frac{1}{3} \\ -1+3x & \text{se } x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{se } x-3 \geq 0 \\ -x+3 & \text{se } x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-3 & \text{se } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|1-3x|+4x}{|x-3|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-3x+4x}{-x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-3x}{|6-2x|} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x(x-3)}{2x-6} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x(x-3)}{2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-3x}{|6-2x|} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x(x-3)}{-2x+6} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x(x-3)}{-2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$|6-2x| = \begin{cases} 6-2x & \text{se } 6-2x \geq 0 \\ -6+2x & \text{se } 6-2x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -2x+6 & \text{se } x \leq 3 \\ 2x-6 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Logo, não existe $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x}{|6-2x|}$.

$$\text{23. } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty ; \text{ por comparação, se } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) \leq \frac{x-3}{(1-x)^2} \text{ e se } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(1-x)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty, \text{ então}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty.$$

$$\text{24. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ; \text{ por comparação, atendendo a que se } \forall x \in]-\infty, 2[, f(x) \geq \frac{1-2x^2}{x-2} \text{ e se}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty, \text{ então } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

25. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, pois $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \leq 1 \Leftrightarrow \cos x - 3 \leq -2$, pelo que para $x < 0$ tem-se

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq -2x^3 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty, \text{ então } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, pois $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \leq 1 \Leftrightarrow \cos x - 3 \leq -2$, pelo que para $x > 0$ tem-se $f(x) \leq -2x^3$ e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3) = -\infty.$$

26. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$; por comparação, uma vez que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, g(x) \leq f(x)$ e atendendo a que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \text{ logo } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty.$$

27. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; por comparação, uma vez que $\forall x \in \mathbb{R}^-, f(x) \geq g(x)$ e atendendo a que se

g tem domínio $\mathbb{R}^-$ e a reta de equação $y = -2x + 1$ é assíntota ao seu gráfico então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty.$$

Pelo que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

28. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \left[(x-3) \operatorname{sen} \frac{1}{x-3} \right] = 0$ porque para $x \neq 3$ vem que $-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x-3} \leq 1$.

Quando $x \rightarrow 3^+$, vem que $-(x-3) \leq (x-3) \operatorname{sen} \frac{1}{x-3} \leq x-3$ e como

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) = 0, \text{ vem que } \lim_{x \rightarrow 3^+} \left[(x-3) \operatorname{sen} \frac{1}{x-3} \right] = 0.$$

Quando $x \rightarrow 3^-$, vem que $x-3 \leq (x-3) \operatorname{sen} \frac{1}{x-3} \leq -(x-3)$, pelo que

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3) = 0, \text{ vem que } \lim_{x \rightarrow 3^-} \left[(x-3) \operatorname{sen} \frac{1}{x-3} \right] = 0.$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 3} \left[(x-3) \operatorname{sen} \frac{1}{x-3} \right] = 0.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \operatorname{sen} x}{2\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}{\sqrt{x} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{2 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2} \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}{\sqrt{x} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{2 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x + \cos x} = \frac{2}{3}$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} \quad \text{e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\sin x + 5} + x}{2x + 1} = \frac{1}{2} \text{ porque}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq \sin x + 5 \leq 6 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{\sin x + 5} \leq \sqrt{6}, \text{ pelo que}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \quad \text{e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{6}+x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow -3} h(x) = -6, \text{ pois } \forall x \in D_h, f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + 7x + 6) = -6 \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x-3) = -6$$

$$30. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1, \text{ pois } \forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{h(x)}{x} \leq f(x) \leq g(x) \text{ e, como a reta de equação } y = -1 \text{ é assíntota ao gráfico da função } g, \text{ vem que } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1.$$

Sabemos também que a reta de equação $y = -x + 2$ é assíntota ao gráfico de h , pelo que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = -1.$$

$$31. D_f =]-3, +\infty[; \text{ para } -3 < x < 3, \text{ a função é contínua por ser o quociente de duas funções contínuas; para } x > 3, \text{ a função é contínua por ser o quociente de duas funções contínuas.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(3-x)}{\sqrt{(3-x)(3+x)}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{3-x}{\sqrt{3-x}} \times \frac{-1}{\sqrt{3+x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\sqrt{\frac{(3-x)^2}{3-x}} \times \frac{-1}{\sqrt{3+x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\sqrt{3-x} \times \frac{-1}{\sqrt{3+x}} \right) = 0 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 6x + 9}{2x^2 - 5x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)^2}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{2x+1} = \frac{0}{7} = 0$$

E, como $f(3) = 0$, podemos concluir que a função f também é contínua para $x = 3$.

Logo, a função f é contínua em todo o seu domínio.

$D_g = \mathbb{R}$; para $x < 2$, a função é contínua por ser a diferença e quociente de funções contínuas; para $x > 2$, a função é contínua.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x-2-\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-2+\sqrt{2-x})}{(x-2-\sqrt{2-x})(x-2+\sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-2+\sqrt{2-x})}{(x-2)^2 - (2-x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-2+\sqrt{2-x})}{x^2 - 4x + 4 - 2 + x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-2+\sqrt{2-x})}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-2+\sqrt{2-x})}{(x-2)(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2+\sqrt{2-x}}{x-1} = \frac{2-2+\sqrt{2-2}}{2-1} = \frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-1} = 1$, não existe limite no ponto 2, logo não é contínua para $x = 2$.

A função g não é contínua para $x = 2$.

$$\begin{aligned}32. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(1-x)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+3-4}{(1-x)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{(1-x)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{-(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{-(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$f(1) = k$, logo para que a função f seja contínua $k = -\frac{1}{2}$.

33. a) A função h é contínua em $[0,1]$, $h(0) = -1$ e $h(1) = 2$. Dado que $h(0) < 0 < h(1)$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists c \in]0,1[: h(c) = 0$.

b) $h'(x) = 4x^3 + 6x^2$; portanto, $\forall x \in]0,1[, h'(x) > 0$, de onde se conclui que h é crescente em $[0,1]$. Assim, h não pode ter mais do que um zero em $]0,1[$.

c) $h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{16} < 0$ e $h(1) > 0$; o zero referido em b) pertence ao intervalo $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

34. A função g é contínua em $[-1,4]$ por ser a diferença de duas funções contínuas nesse intervalo; $g(-1) = 1 - f(-1) = -2$ e $g(4) = 16 - f(4) = 7$. Dado que $2 \in]g(-1), g(4)[$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists x \in]-1,4[: g(x) = 2$.

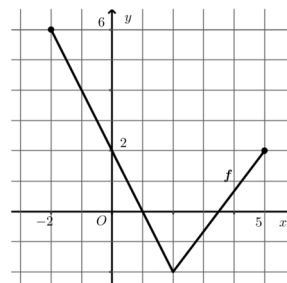
35. A função f é contínua e, portanto, é contínua no intervalo fechado de extremos a e $-a$. $f(a) = a^3 + a$ e $f(-a) = -a^3 - a$. Como $a \neq 0$, $f(a)$ e $f(-a)$ são números simétricos, portanto, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que existe pelo menos um zero de f entre a e $-a$.

36. A função g é contínua em $[-2,5]$ por ser a diferença de duas funções contínuas nesse intervalo;

- $g(-2) = f(-2) + 2 \in [-1+2, 3+2]$, ou seja, $g(-2) \in [1,5]$;
- $g(5) = f(5) - 5 \in [-1-5, 3-5]$, ou seja, $g(5) \in [-6,-2]$;

Dado que $g(-2) > 0$ e $g(5) < 0$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists c \in]-2,5[: g(c) = 0$, logo a função g tem pelo menos um zero.

37. Por exemplo, a função f representada graficamente tem domínio $[-2,5]$, é contínua, $f(-2) = 6$ e $f(5) = 2$ e tem dois zeros no intervalo $]-2,5[$.



38. Seja g a função definida por $g(x) = h(x) - x$. A função g é contínua em $[a,b]$ e uma solução da equação $h(x) = x$ é um zero da função g .

- $g(a) = h(a) - a$
- $g(b) = h(b) - b$

Dado que $h(a) > a$ e que $h(b) < b$, sabemos que

$$h(a) - a > 0 \Leftrightarrow g(a) > 0 \text{ e que } h(b) - b < 0 \Leftrightarrow g(b) < 0$$

Então, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que a função g tem pelo menos um zero em $]a,b[$, ou seja, $\exists c \in]a,b[: h(c) = c$.

39. A reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares é a reta de equação $y = x$. Vamos provar que $\exists x \in]-1,1[: f(x) = x$.

Seja g a função definida por $g(x) = f(x) - x$. Então, $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$.

Tem-se:

- $g(-1) = f(-1) - (-1) = k - k + 1 = 1$
- $g(1) = f(1) - 1 = k - k - 1 = -1$

Portanto, $g(1) < 0 < g(-1)$ e, dado que a função g é contínua em $[-1,1]$, pois a função f é uma função polinomial, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists x \in]-1,1[: g(x) = 0$.

40. Dado que a função g é contínua em $[a,b]$ e $g(a) \times g(b) < 0$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que a função g tem pelo menos um zero. Seja c um zero de g . Então, $c \in]a,b[$ e $c \notin D_f$.

41. Seja g a função definida por $g(x) = f(x) - x + 1$. A função g é contínua em $[f(a), a]$ e

$$f(x) = x - 1 \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

- $g(a) = f(a) - a + 1$; como $f(a) < a - 1$, conclui-se que $g(a) < 0$;
- $g(f(a)) = f(f(a)) - f(a) + 1 = a - f(a) + 1$ e tem-se:
 $f(a) < a - 1 \Rightarrow -f(a) > -a + 1 \Rightarrow a + 1 - f(a) > a + 1 - a + 1 \Rightarrow g(f(a)) > 2$.

Então, $g(f(a)) > 0$.

Dado que $g(a) < 0$ e $g(f(a)) > 0$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que

$$\exists x \in]f(a), a[: g(x) = 0, \text{ ou seja, } \exists x \in]f(a), a[: f(x) = x - 1.$$

42. Dado que a função é contínua no intervalo $[a, b]$, o teorema de Weierstrass permite concluir que a função admite máximo absoluto e, portanto, o contradomínio é majorado.

43. A função h é contínua e tem domínio $[a, b]$ pois a função g não tem zeros. Então, o teorema de Weierstrass permite concluir que a função admite mínimo e máximo absolutos.

44. A função g admite mínimo, m , e máximo, M , absolutos (teorema de Weierstrass). Se $k < m$ ou $k > M$, a equação $g(x) = k$ é uma equação impossível.

45. $D_f = [-6, 6]$; para $-6 \leq x < 1$, a função é contínua por o quociente de funções contínuas; para $1 < x \leq 6$, a função é contínua por ser o quociente de funções contínuas.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 3}{x^2 + 1} = \frac{1^3 + 3}{1^2 + 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{2\sqrt{x+3}-4} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(2\sqrt{x+3}+4)}{(2\sqrt{x+3}-4)(2\sqrt{x+3}+4)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(2\sqrt{x+3}+4)}{4(x+3)-16} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(2\sqrt{x+3}+4)}{4x+12-16} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(2\sqrt{x+3}+4)}{4x-4} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(2\sqrt{x+3}+4)}{4(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\sqrt{x+3}+4}{4} = \frac{2 \times 2 + 4}{4} = 2$$

$$f(1) = \frac{1^3 + 3}{1^2 + 1} = 2$$

Logo, a função é contínua em $[-6, 6]$.

O teorema de Weierstrass permite concluir que a função tem mínimo e máximo absolutos porque a função é contínua e o seu domínio é um intervalo fechado ($D_f = [-6, 6]$).

2. Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

$$46. f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 1 - (1^4 - 3 \times 1 + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 2)}{x - 1} =$$

1	1	0	0	-3	2
	1	1	1	1	-2
	1	1	1	-2	0

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x^2 + x - 2) = 1$$

$$47. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h)+3}{h^2+2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h)-(-3)}{(h+2)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h+2} \times \frac{g(2+h)-g(2)}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h+2} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \frac{1}{2} \times g'(2) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$48. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1, \text{ pois, dado que a função } f \text{ é diferenciável em } a, \text{ sabemos que é contínua em } a.$$

$$49. y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0); \text{ logo } y = -3(x - 2) + 1 \Leftrightarrow y = -3x + 7$$

$$50. 2x + 3y = 4 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}. \text{ O ponto da reta de abscissa 1 pertence ao gráfico da função; portanto,}$$

$$f(1) = -\frac{2}{3} \times 1 + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}. f'(1) \text{ é o declive da reta tangente ao gráfico de } f \text{ no ponto de abscissa 1;}$$

$$\text{assim, } f'(1) = -\frac{2}{3}.$$

$$51. a) f'(x) = \left(2x^3 + \frac{x^2}{2} + x - \sqrt{2} \right)' = 6x^2 + x + 1$$

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^3 - 2x}{2x - 3} \right)' = \frac{(x^3 - 2x)' \times (2x - 3) - (x^3 - 2x) \times (2x - 3)'}{(2x - 3)^2} = \frac{(3x^2 - 2) \times (2x - 3) - (x^3 - 2x) \times 2}{(2x - 3)^2} = \\ &= \frac{6x^3 - 9x^2 - 4x + 6 - 2x^3 + 4x}{(2x - 3)^2} = \frac{4x^3 - 9x^2 + 6}{(2x - 3)^2} \end{aligned}$$

$$\text{c) } f'(x) = \left[(x^2 + 3x)^5 \right]' = 5(x^2 + 3x)^4 \times (x^2 + 3x)' = 5(x^2 + 3x)^4 \times (2x + 3) = (10x + 15)(x^2 + 3x)^4$$

d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\sqrt{x} \times (x^2 + 1) \right]' = (\sqrt{x})' \times (x^2 + 1) + \sqrt{x} \times (x^2 + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (x^2 + 1) + \sqrt{x} \times 2x = \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x} = \\ &= \frac{x^2 + 1 + 4x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$52. f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 7x - 1 \right)' = \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{7}{2} \times 2x + 7 = x^2 - 7x + 7$$

A bissetriz dos quadrantes ímpares tem equação $y = x$, logo o seu declive é 1.

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 7 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 6}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 6$$

A equação $f'(x) = 1$ tem duas soluções, 1 e 6, que são as abcissas dos pontos em que as retas tangentes são paralelas à bissetriz dos quadrantes ímpares.

$$f(1) = \frac{1}{3} - \frac{7}{2} + 7 - 1 = \frac{17}{6} \quad \text{e} \quad f(6) = \frac{6^3}{3} - \frac{7}{2} \times 6^2 + 7 \times 6 - 1 = -13$$

As equações reduzidas dessas retas são, respetivamente, $y = x - 1 + \frac{17}{6} \Leftrightarrow y = x + \frac{11}{6}$ e $y = x - 6 - 13 \Leftrightarrow y = x - 19$.

$$53. \text{ a) } g(1) = \frac{2}{3-1} = 1, \quad g'(x) = \frac{2(3-x) - 2x \times (-1)}{(3-x)^2} = \frac{6-2x+2x}{(3-x)^2} = \frac{6}{(3-x)^2}$$

A reta r tem declive $m = \frac{2-0}{1-3} = -1$, logo, $f'(1) = -1$.

$$\text{b) } (f \times g)'(1) = f'(1) \times g(1) + f(1) \times g'(1) = -1 \times 1 + 2 \times \frac{6}{(3-1)^2} = -1 + 3 = 2$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{f} \right)'(1) = -\frac{f'(1)}{(f(1))^2} = -\frac{-1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{d) } (g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \times f'(1) = g'(2) \times (-1) = \frac{6}{(3-2)^2} \times (-1) = -6$$

$$\text{e) } (f^3)'(1) = 3(f(1))^2 \times f'(1) = 3 \times 4 \times (-1) = -12$$

$$\text{f) } (\sqrt{g})'(1) = \frac{g'(1)}{2\sqrt{g(1)}} = \frac{\frac{6}{(3-1)^2}}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{4}$$

54. a) $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = (2x^3 - 4x^2 + 5)' = 6x^2 - 8x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow (6x - 8)x = 0 \Leftrightarrow 6x - 8 = 0 \vee x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \vee x = 0$$

x	$-\infty$	0		$\frac{4}{3}$	$+\infty$
x	-	0	+	+	+
$6x - 8$	-	-	-	0	+
Sinal e zeros de f'	+	0	-	0	+
Monotonia e extremos de f	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{71}{27}$	$\nearrow$

A função f é crescente em $]-\infty, 0]$ e em $[\frac{4}{3}, +\infty[$ e é decrescente em $[0, \frac{4}{3}]$; $f(0) = 5$ é máximo relativo e $f(\frac{4}{3}) = \frac{71}{27}$ é mínimo relativo.

b) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ $g'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 - 1}\right)' = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \times 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$-2x$	+	+	+	0	-	-	-
$(x^2 - 1)^2$	+	0	+	+	+	0	+
Sinal e zeros de g'	+	n.d.	+	0	-	n.d.	-
Monotonia e extremos de g	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	0	$\searrow$	n.d.	$\searrow$

A função g é crescente em $]-\infty, -1[$ e em $]-1, 0]$ e é decrescente em $[0, 1[$ e em $]1, +\infty[$; $g(0) = 0$ é máximo relativo e não existem mínimos relativos.

c) $D_h = \mathbb{R}$; $h'(x) = ((x-1)^3)'(x-3) + (x-1)^3(x-3)' = 3(x-1)^2(x-3) + (x-1)^3 =$
 $= (x-1)^2[3(x-3) + (x-1)] = (x-1)^2(4x-10)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(4x-10) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \vee 4x-10 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{5}{2}$$

x	$-\infty$	1		$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	0	+	+	+
$4x-10$	-	-	-	0	+
Sinal e zeros de h'	-	0	-	0	+
Monotonia e extremos de h	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{27}{16}$	$\nearrow$

A função h é decrescente em $]-\infty, \frac{5}{2}]$ e é crescente em $[\frac{5}{2}, +\infty[$; $h(\frac{5}{2}) = (\frac{5}{2}-1)^2(\frac{5}{2}-3) = -\frac{27}{16}$ é mínimo relativo e não existem máximos relativos.

- 55.** A função f é decrescente em $]-\infty, 1]$ porque $\forall x \in]-\infty, 1[, f'(x) \leq 0$, sendo que só anula, neste intervalo, em -2 . A função f é crescente em $[1, +\infty[$ porque $\forall x \in [1, +\infty[, f'(x) > 0$.
A função atinge um mínimo relativo em 1 e não existem outros extremos.

56. a) $f'(x) = \left(\frac{2x - \sqrt{2}x^3 + 3}{\pi} \right)' = \frac{1}{\pi} (2x - \sqrt{2}x^3 + 3)' = \frac{1}{\pi} (2 - 3\sqrt{2}x^2)$

$$f''(x) = \left[\frac{1}{\pi} (2 - 3\sqrt{2}x^2) \right]' = \frac{1}{\pi} (-6\sqrt{2}x) = -\frac{6\sqrt{2}x}{\pi}$$

b) $f'(x) = [(3-2x)^3]' = 3(3-2x)^2(3-2x)' = -6(3-2x)^2$

$$f''(x) = [-6(3-2x)^2]' = -6 \times 2(3-2x) \times (3-2x)' = 24(3-2x) = 72 - 48x$$

c) $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+1} \right)' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-2x}{(x^2+1)^2} \right)' = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)(-2(x^2+1) + 8x^2)}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{-2x^2 - 2 + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

d) $f'(x) = \left(\sqrt{x^2+1} \right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f''(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)' = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

57. A função f' é crescente em $[a, c]$ e em $[e, +\infty[$ porque a função f'' é positiva em $]a, c[$ e em $]e, +\infty[$; a função f' é decrescente em $]-\infty, a]$ e em $[c, e]$ porque a função f'' é negativa em $]-\infty, a[$ e em $]c, e[$.

58. A função f atinge um mínimo relativo em $x=1$. Logo, $f(1)$ é um mínimo relativo.

59. $2a+b-1=0 \Leftrightarrow b=1-2a$

Portanto, $f'(x) = ax^3 + (1-2a)x^2 - 4$ e $f''(x) = 3ax^2 + 2(1-2a)x$.

Então:

- $f'(2) = a \times 2^3 + (1-2a) \times 2^2 - 4 = 8a + 4 - 8a - 4 = 0$
- $f''(2) = 3a \times 2^2 + 2(1-2a) \times 2 = 4a + 4 = 4(a+1)$; assim, $f''(2) < 0$, pois $a < -1$.

Tendo em consideração que $f'(2) = 0$ e $f''(2) < 0$, conclui-se que a função atinge um máximo no ponto 2.

60. A função atinge mínimos em -2 e em 3 porque nesses pontos a primeira derivada é zero e a segunda derivada é positiva e atinge um máximo em 0 porque nesse ponto a primeira derivada é zero e a segunda derivada é negativa.

61. O gráfico da função tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, b]$ e em $[d, +\infty[$ porque a função f' é crescente nesses intervalos e tem a concavidade voltada para baixo em $[b, d]$ porque a função f' é decrescente nesse intervalo; os pontos de abscissa b e d são pontos de inflexão do gráfico da função dado que nesses pontos muda o sentido da concavidade.

62. A afirmação é falsa, pois o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$ e, portanto, a função f' é decrescente em $\mathbb{R}^+$.

63. A função f' é crescente em $]-\infty, 0]$, pois o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima nesse intervalo e é decrescente em $[0, +\infty[$, pois o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em $[0, +\infty[$.

64. Dado que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo, a função f' é decrescente.

65. O gráfico da função f tem dois pontos de inflexão, um em 0 e outro em 2.

x	$-\infty$	0		2		3	$+\infty$
$x^2 - 2x$	+	0	-	0	+	+	+
$x^2 + 1$	+	+	+	+	+	+	+
$(x-3)^2$	+	+	+	+	+	0	+
Sinal e zeros de f''	+	0	-	0	+	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		P.I.		P.I.			

66. a) $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = (x^4 - 3x^2 + 1)' = 4x^3 - 6x$; $f''(x) = (4x^3 - 6x)' = 12x^2 - 6$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
Sinal e zeros de f''	+	0	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		P.I.		P.I.	

A concavidade está voltada para cima em $]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ e em $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$ e a concavidade está voltada para baixo em $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$; os pontos de abscissas $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$ são pontos de inflexão.

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f'(x) = \left(\frac{x^3}{x-1}\right)' = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}$

$$f''(x) = \left(\frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(6x^2 - 6x)(x-1)^2 - (2x^3 - 3x^2) \times 2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)[(6x^2 - 6x)(x-1) - (2x^3 - 3x^2) \times 2]}{(x-1)^4} = \frac{6x^3 - 6x^2 - 6x^2 + 6x - 4x^3 + 6x^2}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(x-1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^3}$$

$$x^2 - 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} \text{ Equação impossível em } \mathbb{R}.$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$2x$	-	0	+	+	+
$x^2 - 3x + 3$	+	+	+	+	+
$(x-1)^3$	-	-	-	0	+
Sinal e zeros de f''	+	0	-	n.d.	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		P.I.			

A concavidade está voltada para cima em $]-\infty, 0]$ e em $]1, +\infty[$ e a concavidade está voltada para baixo em $[0, 1[$; o ponto de abscissa 0 é ponto de inflexão.

67. 100 km = 100000 m ; 1 h = 3600 s

100000 m	3600 s
x m	1 s

$$x = \frac{100000}{3600} = \frac{250}{9}$$

$$\text{Aceleração média} = \frac{\frac{250}{9} - 0}{2,8} = 9,9 \text{ m/s}^2$$

68. Ao fim de 3 segundos a velocidade é $\frac{1}{2} \times \frac{195000}{3600} = \frac{325}{12}$ m/s.

A aceleração média nos 3 primeiros segundos é $= \frac{\frac{325}{12} - 0}{3} = \frac{325}{36} = 9,0 \text{ m/s}^2$.

Ao fim de 8 segundos a velocidade é $\frac{9}{10} \times \frac{195000}{3600} = \frac{195}{4}$ m/s.

A aceleração média entre os 3 e os 8 segundos é $= \frac{\frac{195}{4} - \frac{325}{12}}{8-3} = \frac{13}{3} = 4,3 \text{ m/s}^2$.

Ao fim de 15 segundos a velocidade é $\frac{99}{100} \times \frac{195000}{3600} = \frac{429}{8}$ m/s.

A aceleração média entre os 8 e os 15 segundos é $= \frac{\frac{429}{8} - \frac{195}{4}}{15-8} = \frac{39}{56} = 0,7 \text{ m/s}^2$.

69. a) $p'(t) = (2t^3 - 6t^2 + 9)' = 6t^2 - 12t$; $p''(t) = (6t^2 - 12t)' = 12t - 12$

$$p''(2) = 12 \times 2 - 12 = 12$$

A aceleração da partícula no instante $t = 2$ é 12 m/s^2 .

b) $p'(t) = 48 \Leftrightarrow 6t^2 - 12t = 48 \Leftrightarrow 6t^2 - 12t - 48 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-8)}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2 \pm 6}{2} \Leftrightarrow t = -2 \vee t = 4$$

$$p''(4) = 12 \times 4 - 12 = 36 \text{ m/s}^2$$

c) $p''(t) = 24 \Leftrightarrow 12t - 12 = 24 \Leftrightarrow t = 3$

$$p(3) = 2 \times 3^3 - 6 \times 3^2 + 9 = 9$$

Foi no instante $t = 3$ e a abscissa da posição da partícula é 9.

70. a) $D = \mathbb{R}$; $f'(x) = -2x^3 - 3x^2 + 1$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(-2x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x+1=0 \vee -2x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

-1	-2	-3	0	1
		2	1	-1
	-2	-1	1	0

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2) \times 1}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1 \pm 3}{-4} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -1$$

-1 é raiz dupla de f' e $\frac{1}{2}$ é raiz simples;

$$f(-1) = -\frac{(-1)^4}{2} - (-1)^3 - 1 + 2 = \frac{3}{2} \text{ e } f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{75}{32}$$

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-2x^2 - x + 1$	$-$	0	$+$	0	$-$
Sinal e zeros de f'	$+$	0	$+$	0	$-$
Monotonia e extremos de f	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{75}{32}$	$\searrow$

f é crescente em $]-\infty, \frac{1}{2}]$ e é decrescente em $[\frac{1}{2}, +\infty[$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{75}{32}$ é máximo absoluto e não existem mínimos relativos.

$$f''(x) = -6x^2 - 6x; f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow -6x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0$$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
Sinal e zeros de f''	$-$	0	$+$	0	$-$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		$\frac{3}{2}$		2	

O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1]$ e em $[0, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $[-1, 0]$; os pontos de abscissas -1 e 0 são pontos de inflexão do gráfico de f .

$$f(0) = 2 \text{ e } f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^4}{2} - x^3 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow -x^4 - 2x^3 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(-x^3 + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

	-1	-2	0	2	4
-2		2	0	0	-4
	-1	0	0	2	0

$$\Leftrightarrow (x+2)(-x^3 + 2) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \vee -x^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x^3 = 2 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \sqrt[3]{2}$$

Os pontos de coordenadas $(0, 2)$, $(-2, 0)$ e $(\sqrt[3]{2}, 0)$ são os pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados.

O gráfico da função não admite assíntotas verticais porque a função é contínua em $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{x^4}{2} - x^3 + x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x^3}{2} - x^2 + 1 + \frac{2}{x} \right) = -\infty + 1 + 0 = -\infty$$

O gráfico da função não admite assíntota não vertical quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{x^4}{2} - x^3 + x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x^3}{2} - x^2 + 1 + \frac{2}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x^3}{2} - x^2 + 1 + \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right) + 1 + \frac{2}{x} \right) + 1 = -\infty \times \left(-\frac{1}{2} - 0 \right) + 1 + 0 = +\infty \end{aligned}$$

O gráfico da função não admite assíntota não vertical quando $x \rightarrow -\infty$.

Logo, não existem assíntotas ao gráfico.

$$\text{b) } D = \mathbb{R}; g'(x) = \left(\frac{3x}{2x^2+1} \right)' = \frac{3(2x^2+1) - 3x \times 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{-6x^2+3}{(2x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-6x^2+3}{(2x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -6x^2+3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1} = \frac{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}{2 \times \frac{1}{2}+1} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}; \quad g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{2 \times \frac{1}{2}+1} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$-6x^2+3$	-	0	+	0	-
$(2x^2+1)^2$	+	+	+	+	+
Sinal e zeros de g'	-	0	+	0	-
Monotonia e extremos de g	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$

g é decrescente em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ e é crescente em $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; $g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$

é mínimo e $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ é máximo.

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\frac{-6x^2+3}{(2x^2+1)^2} \right)' = \frac{-12x(2x^2+1)^2 - (-6x^2+3) \times 2(2x^2+1) \times 4x}{(2x^2+1)^4} = \\ &= \frac{4x(2x^2+1) \left[-3(2x^2+1) - (-6x^2+3) \times 2 \right]}{(2x^2+1)^4} = \frac{4x(-6x^2-3+12x^2-6)}{(2x^2+1)^3} = \frac{4x(6x^2-9)}{(2x^2+1)^3} = \frac{12x(2x^2-3)}{(2x^2+1)^3} \end{aligned}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{12x(2x^2 - 3)}{(2x^2 + 1)^3} = 0 \Leftrightarrow 12x(2x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow 12x = 0 \vee 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \vee x = \sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \vee x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$g(0) = \frac{0}{1} = 0 ; g\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{2\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 1} = \frac{-3\sqrt{\frac{3}{2}}}{2 \times \frac{3}{2} + 1} = \frac{-3\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} = -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{6}}{8}$$

$$g\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 1} = \frac{3\sqrt{\frac{3}{2}}}{2 \times \frac{3}{2} + 1} = \frac{3\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
$12x$	-	-	-	0	+	+	+
$2x^2 - 3$	+	0	-	-	-	0	+
$(2x^2 + 1)^3$	+	+	+	+	+	+	+
Sinal e zeros de g''	-	0	+	0	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g		$-\frac{3\sqrt{6}}{8}$		0		$\frac{3\sqrt{6}}{8}$	

O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ e em $\left[0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right]$; os pontos de abscissas $-\frac{\sqrt{6}}{2}$, 0 e $\frac{\sqrt{6}}{2}$ são pontos de inflexão do gráfico de g . Os pontos de inflexão têm coordenadas $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{3\sqrt{6}}{8}\right)$, $(0, 0)$ e $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3\sqrt{6}}{8}\right)$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{2x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

O gráfico interseca os eixos coordenados na origem do referencial.

Não existem assíntotas verticais porque a função é contínua em $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2x} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é a assíntota horizontal ao gráfico da função g em $-\infty$ e em $+\infty$.

$$\text{c) } D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}; \quad h'(x) = \left(\frac{x-2}{x^2-5} \right)' = \frac{(x^2-5) - (x-2) \times 2x}{(x^2-5)^2} = \frac{x^2-5-2x^2+4x}{(x^2-5)^2} = \frac{-x^2+4x-5}{(x^2-5)^2}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x-5}{(x^2-5)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2+4x-5 = 0 \wedge x \in D_h$$

$$-x^2+4x-5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4 \times (-1) \times (-5)}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{-2} \text{ Equação impossível em } \mathbb{R}.$$

h' não tem zeros.

$-x^2+4x-5 < 0, \forall x \in D_h$ e $(x^2-5)^2 > 0, \forall x \in D_h$ logo $h'(x) < 0, \forall x \in D_h$, pelo que

h é decrescente em $]-\infty, -\sqrt{5}[$, em $]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$ e em $]\sqrt{5}, +\infty[$; não existem extremos relativos.

$$\begin{aligned} h''(x) &= \left(\frac{-x^2+4x-5}{(x^2-5)^2} \right)' = \frac{(-2x+4)(x^2-5)^2 - (-x^2+4x-5) \times 2 \times (x^2-5) \times 2x}{(x^2-5)^4} = \\ &= \frac{(x^2-5) \left[(-2x+4)(x^2-5) - (-x^2+4x-5) \times 4x \right]}{(x^2-5)^4} = \frac{-2x^3+10x+4x^2-20+4x^3-16x^2+20x}{(x^2-5)^3} = \\ &= \frac{2x^3-12x^2+30x-20}{(x^2-5)^3} \end{aligned}$$

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3-12x^2+30x-20}{(x^2-5)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x^3-12x^2+30x-20 = 0 \wedge x \in D_h \Leftrightarrow;$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-12x^2+30x-20 = 0 \wedge x \in D_h \Leftrightarrow (x-1)(2x^2-10x+20) = 0 \wedge x \in D_h \Leftrightarrow$$

1	2	-12	30	-20
		2	-10	20
	2	-10	20	0

$$\Leftrightarrow (x-1=0 \vee 2x^2-10x+20=0) \wedge x \in D_h \Leftrightarrow \left(x=1 \vee x = \frac{10 \pm \sqrt{100-4 \times 2 \times 20}}{4} \right) \wedge x \in D_h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x=1 \vee x = \underbrace{\frac{10 \pm \sqrt{-60}}{4}}_{\text{impossível em } \mathbb{R}} \right) \wedge x \in D_h \Leftrightarrow x=1$$

$$h''(x) = \frac{2x^3-12x^2+30x-20}{(x^2-5)^3} = \frac{(x-1)(2x^2-10x+20)}{(x^2-5)^3} \quad h(1) = \frac{1-2}{1^2-5} = \frac{1}{4}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		1		$\sqrt{5}$	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$2x^2-10x+20$	+	+	+	+	+	+	+
$(x^2-5)^3$	+	0	-	-	-	0	+
Sinal e zeros de g''	-	n.d.	+	0	-	n.d.	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g		n.d.		$\frac{1}{4}$		n.d.	

O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -\sqrt{5}[$ e em $[1, \sqrt{5}[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-\sqrt{5}, 1]$ e em $]\sqrt{5}, +\infty[$; o ponto de coordenadas $(1, \frac{1}{4})$ é ponto de inflexão do gráfico de h .

$$h(0) = \frac{0-2}{0^2-5} = \frac{2}{5}; \quad h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x^2-5} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

O gráfico interseja os eixos coordenados nos pontos de coordenadas $(2, 0)$ e $(0, \frac{2}{5})$.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}^-} \frac{x-2}{x^2-5} = \frac{\sqrt{5}-2}{0^-} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}^+} \frac{x-2}{x^2-5} = \frac{-\sqrt{5}-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x^2-5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

As retas de equações $x = -\sqrt{5}$ e $x = \sqrt{5}$ são as assíntotas verticais do gráfico da função e a reta de equação $y = 0$ é a assíntota horizontal ao gráfico da função h em $-\infty$ e em $+\infty$.

$$\text{d) } D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}; \quad j'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x+2} \right)' = \frac{2x \times (x+2) - (x^2-1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2+1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

$$j'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+4x+1 = 0 \wedge x \in D_j \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} \wedge x \in D_j \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} \wedge x \in D_j \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \wedge x \in D_j \Leftrightarrow x = -2 - \sqrt{3} \vee x = -2 + \sqrt{3}$$

$$j(-2-\sqrt{3}) = \frac{(-2-\sqrt{3})^2-1}{-2-\sqrt{3}+2} = \frac{4+4\sqrt{3}+3-1}{-\sqrt{3}} = \frac{-6+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-6\sqrt{3}+12}{3} = -2\sqrt{3}-4$$

$$j(-2+\sqrt{3}) = \frac{(-2+\sqrt{3})^2-1}{-2+\sqrt{3}+2} = \frac{4-4\sqrt{3}+3-1}{\sqrt{3}} = \frac{6-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}-12}{3} = 2\sqrt{3}-4$$

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{3}$		-2		$-2+\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2+4x+1	+	0	-	-	-	0	+
$(x+2)^2$	+	+	+	0	+	+	+
Sinal e zeros de j'	+	0	-	n.d.	-	0	+
Monotonia e extremos de j	$\nearrow$	$-2\sqrt{3}-4$	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	$2\sqrt{3}-4$	$\nearrow$

j é crescente em $]-\infty, -2-\sqrt{3}]$ e em $[-2+\sqrt{3}, +\infty[$ e é decrescente em $[-2-\sqrt{3}, -2[$ e em $]-2, -2+\sqrt{3}]; -2\sqrt{3}-4$ é máximo relativo e $2\sqrt{3}-4$ é mínimo relativo.

$$j''(x) = \left(\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} \right)' = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - (x^2+4x+1) \times 2(x+2)}{(x+2)^4} =$$

$$= \frac{(x+2)[(2x+4)(x+2) - (x^2+4x+1) \times 2]}{(x+2)^4} = \frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x-2}{(x+2)^3} = \frac{6}{(x+2)^3}$$

j'' não tem zeros.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Sinal e zeros de j''	-	n.d.	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de j		n.d.	

O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-2, +\infty[$; não existem pontos de inflexão.

$$j(0) = \frac{0^2-1}{0+2} = -\frac{1}{2}; \quad j(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \wedge x \in D_j \Leftrightarrow x^2=1 \wedge x \in D_j \Leftrightarrow x = \pm 1$$

O gráfico intersesta os eixos coordenados nos pontos de coordenadas $(-1,0)$, $(1,0)$ e $(0, -\frac{1}{2})$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} j(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2-1}{x+2} = \frac{4-1}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = -2$ é a única assíntota vertical ao gráfico da função.

$$\begin{array}{r} \cancel{x^2} \qquad \qquad \qquad -1 \quad \left| \begin{array}{l} x+2 \\ \hline x-2 \end{array} \right. \\ \cancel{x^2} \quad -2x \\ \hline \quad \quad \cancel{2x} \quad -1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad +4 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \quad 3 \end{array}$$

$$j(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2} = x - 2 + \frac{3}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [j(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - 2 + \frac{3}{x - 2} - x + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x - 2} = 0$$

A reta de equação $y = x - 2$ é assíntota ao gráfico da função j em $-\infty$ e em $+\infty$.

71. a) $u_3 = \sum_{k=1}^3 \frac{3}{\sqrt{18+k}} = \frac{3}{\sqrt{19}} + \frac{3}{\sqrt{20}} + \frac{3}{\sqrt{21}} > \frac{3}{\sqrt{21}} + \frac{3}{\sqrt{21}} + \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{9}{\sqrt{21}}$ Logo, $\frac{9}{\sqrt{21}} < u_3$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, seja (v_k) a sucessão de termo geral $v_k = \frac{n}{\sqrt{2n^2 + k}}$.

$$v_{k+1} - v_k = \frac{n}{\sqrt{2n^2 + k + 1}} - \frac{n}{\sqrt{2n^2 + k}} = \frac{n\sqrt{2n^2 + k} - n\sqrt{2n^2 + k + 1}}{\sqrt{(2n^2 + k + 1)(2n^2 + k)}} = \frac{n(\sqrt{2n^2 + k} - \sqrt{2n^2 + k + 1})}{\underbrace{\sqrt{(2n^2 + k + 1)(2n^2 + k)}}_{\text{positivo}}} < 0$$

$$\sqrt{2n^2 + k} - \sqrt{2n^2 + k + 1} < 0 \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2n^2 + k}}_{\text{positivo}} < \underbrace{\sqrt{2n^2 + k + 1}}_{\text{positivo}} \Leftrightarrow 2n^2 + k < 2n^2 + k + 1 \Leftrightarrow 0 < 1$$

A condição $\sqrt{2n^2 + k} - \sqrt{2n^2 + k + 1} < 0$ é universal em $\mathbb{N}$, pelo que a sucessão (v_k) é decrescente.

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{2n^2 + k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{2n^2 + n}} = \frac{n^2}{\sqrt{2n^2 + n}}$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\sqrt{2n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^2 \left(2 + \frac{1}{n} \right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n\sqrt{2 + \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}}} = \frac{+\infty}{\sqrt{2}} = +\infty.$$

c) Se existisse uma assíntota oblíqua ao gráfico de f , então $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, o que não é compatível com o facto de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = 1$, pois (u_n) é uma sucessão que tende para $+\infty$.

72. a) A função f é contínua se e só se $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$. Tem-se:

- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = \frac{1}{2}$

- $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{kx^2 - 3kx + x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{kx(x-3) + x - 3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(kx+1)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{kx+1}{x+3} = \frac{3k+1}{6}$
- $\frac{3k+1}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$

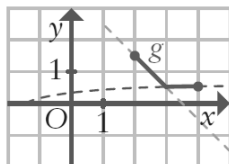
b)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{7-2x}{2} & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{\frac{2}{3}x^2 - 3 \times \frac{2}{3}x + x - 3}{x^2 - 9} & \text{se } 3 < x \leq 4 \end{cases} = \begin{cases} -x + \frac{7}{2} & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{2x^2 - 3x - 9}{3(x-3)(x+3)} & \text{se } 3 < x \leq 4 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -x + \frac{7}{2} & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-3)}{3(x-3)(x+3)} & \text{se } 3 < x \leq 4 \end{cases} = \begin{cases} -x + \frac{7}{2} & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{2x+3}{3x+9} & \text{se } 3 < x \leq 4 \end{cases} = \begin{cases} -x + \frac{7}{2} & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{2}{3} - \frac{3}{3x+9} & \text{se } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

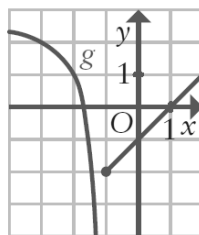
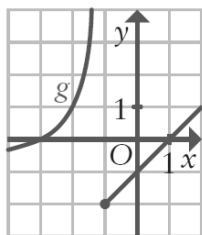
b1) A função g é contínua no intervalo fechado $[2,4]$, logo, o teorema de Weierstrass, permite concluir que a função admite mínimo e máximo absolutos.

b2) O gráfico da função g é a reunião de um segmento de reta com parte de um ramo de uma hipérbole. O máximo absoluto é $g(2) = \frac{3}{2}$ e o mínimo absoluto é $g(3) = \frac{2}{3} - \frac{3}{18} = \frac{1}{2}$.



73. Dado que o domínio é $\mathbb{R}$ e que a reta de equação $x = -1$ é assíntota ao gráfico de g , pode-se concluir que a função não é contínua em -1 ; portanto, não é possível afirmar que, «porque $g(-2)$ e $g(0)$ têm sinais contrários, a função tem pelo menos um zero no intervalo $]-2,0[$ ». No entanto, também não pode afirmar-se que a função não tem zeros nesse intervalo.

Nos referenciais seguintes apresentam-se duas situações: na da esquerda, a função g não tem zeros em $]-2,0[$ e na da direita a função tem um zero nesse intervalo.



Logo, nenhum dos alunos está a pensar corretamente.

74. Seja g a função definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = f(x) - 2 = x^4 + kx - 5$.

Então, $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$.

Tem-se $g(-2) \times g(1) < 0 \Leftrightarrow ((-2)^4 - 2k - 5) \times (1^4 + k - 5) < 0 \Leftrightarrow (11 - 2k) \times (k - 4) < 0 \Leftrightarrow$

k	$-\infty$	4		$\frac{11}{2}$	$+\infty$
$11 - 2k$	+		+	0	-
$k - 4$	-	0	+	+	+
$(11 - 2k) \times (k - 4)$	-	0	+	0	-

$$\Leftrightarrow k \in]-\infty, 4[\cup]\frac{11}{2}, +\infty[$$

Portanto, $k \in]-\infty, 4[\cup]\frac{11}{2}, +\infty[\Rightarrow g(-2) \times g(1) < 0$ e, como a função g é contínua em $[-2, 1]$, por ser a diferença de duas funções contínuas, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que a função g tem pelo menos um zero em $]-2, 1[$, ou seja, a equação $f(x) = 2$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]-2, 1[$.

75. Suponhamos que a é o maior zero de f' e que b e c são zeros de f com $a < b < c$.

Tem-se $f(b) = f(c)$ e, portanto, o teorema de Lagrange permite concluir que

$$\exists x \in]b, c[: f'(x) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = 0, \text{ o que contraria a hipótese de que } a \text{ é o maior zero de } f'.$$

76. As funções definidas por $f(x) = x$ ou $f(x) = x^4$ são exemplos em que $f''(0) = 0$ e em que f não tem um ponto de inflexão em 0; logo, $f''(a) = 0$ não é condição suficiente para que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em a .

$$\mathbf{77. a)} f'(x) = \left(\frac{k^2 x^3}{6} - \frac{kx^2}{3} + \frac{x}{6} - 1 \right)' = \frac{3k^2 x^2}{6} - \frac{2kx}{3} + \frac{1}{6} = \frac{k^2}{2} x^2 - \frac{2k}{3} x + \frac{1}{6}$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{k^2}{2} - \frac{2k}{3} + \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow 3k^2 - 4k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3}}{6} \Leftrightarrow k = \frac{4 \pm 2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{4 \pm 2}{6} \Leftrightarrow k = \frac{1}{3} \vee k = 1$$

$$\text{Se } k = \frac{1}{3}, \text{ vem que } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{18} x^2 - \frac{2k}{9} x + \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3; \quad f(1) = \frac{1}{54} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - 1 = -\frac{25}{27}; \quad f(3) = \frac{27}{54} - 1 + \frac{3}{6} - 1 = -1$$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
Sinal e zeros de f'	+	0	-	0	+
Monotonia e extremos de f	$\nearrow$	$-\frac{25}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

A função atinge um máximo $-\frac{25}{27}$ para $x = 1$.

$$\text{Se } k = 1, \text{ vem que } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{2k}{3}x + \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = 1; f(1) = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 = -1; f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{162} - \frac{1}{27} + \frac{1}{18} - 1 = -\frac{79}{81}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
Sinal e zeros de f'	+	0	-	0	+
Monotonia e extremos de f	$\nearrow$	$-\frac{79}{81}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

A função atinge um mínimo -1 para $x = 1$.

Logo, a função f atinge um máximo em 1 para $k = \frac{1}{3}$.

$$\text{b) } f''(x) = \left(\frac{k^2}{2}x^2 - \frac{2k}{3}x + \frac{1}{6} \right)' = k^2x - \frac{2k}{3}$$

$$f''(1) = 0 \Leftrightarrow k^2 - \frac{2k}{3} = 0 \Leftrightarrow k\left(k - \frac{2}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cancel{k=0} \vee k = \frac{2}{3}$$

Tem-se $k \neq 0$ porque se $k = 0$ a função seria uma função afim que não admite pontos de inflexão.

$$f''(x) = \frac{4}{9}x - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}(x-1); f(1) = \frac{9}{6} - \frac{3}{3} + \frac{1}{6} - 1 = -\frac{53}{54}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Sinal e zeros de f''	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		$-\frac{53}{54}$	

O gráfico da função f tem um ponto de inflexão em 1 para $k = \frac{2}{3}$.

$$\text{78. a) } p'(t) = (2t^3 - 15t^2 + 24t + 4)' = 6t^2 - 30t + 24$$

$$p'(t) = 60 \Leftrightarrow 6t^2 - 30t + 24 = 60 \Leftrightarrow 6t^2 - 30t - 36 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times (-6)}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{5 \pm 7}{2} \Leftrightarrow \cancel{t = -1} \vee t = 6$$

$$p''(t) = (6t^2 - 30t + 24)' = 12t - 30 ; \quad p''(6) = 42;$$

A aceleração da partícula, no instante em que a velocidade é 60 m/s, é 42 m/s^2 .

$$\text{b) } p''(t) = 0 \Leftrightarrow 12t - 30 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} ; \quad p\left(\frac{5}{2}\right) = 2\left(\frac{5}{2}\right)^3 - 15\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 24 \times \frac{5}{2} + 4 = \frac{3}{2} = 1,5$$

Como $p(0) = 4$, a partícula está 1,5 m à direita da origem do eixo, ou seja, 2,5 m à esquerda da posição inicial.

Estudemos a monotonia da função p :

$$p'(t) = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 30t + 24 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 4}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 4$$

$$p(1) = 2 \times 1^3 - 15 \times 1^2 + 24 \times 1 + 4 = 15 ; \quad p(4) = 2 \times 4^3 - 15 \times 4^2 + 24 \times 4 + 4 = -12$$

t	0		1		4	$+\infty$
Sinal e zeros de p'	+	+	0	-	0	+
Monotonia e extremos de p	4	$\nearrow$	15	$\searrow$	-12	$\nearrow$

$p(0) = 4$ e $p(1) = 15$ e a função é crescente no intervalo $[0, 1]$; logo, do instante $t = 0$ até ao instante $t = 1$ ela percorreu $15 - 4 = 11$ metros.

$p(1) = 15$ e $p\left(\frac{5}{2}\right) = 1,5$ e a função é decrescente no intervalo $\left[1, \frac{5}{2}\right]$; logo, do instante $t = 1$ até ao instante $t = \frac{5}{2}$ ela percorreu $15 - 1,5 = 13,5$ metros.

Logo, no total, ela percorreu $11 + 13,5 = 24,5$ metros.

$$79. \text{ a) } D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right)' = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \times x - \sqrt{x^2 - 1}}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{x^2 - 1}}{x^2} = \frac{\frac{x^2 - x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2} = \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}};$$

f' não tem zeros;

$\forall x \in]-\infty, -1[, f'(x) > 0$, $f'(-1)$ não existe e $f(-1) = 0$; logo, f é crescente em $]-\infty, -1]$

$\forall x \in [1, +\infty[, f'(x) > 0$, $f'(1)$ não existe e $f(1) = 0$; logo, f é crescente em $[1, +\infty[$;

$f(-1) = 0$ é máximo relativo e $f(1) = 0$ é mínimo relativo.

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \right)' = \frac{- \left(2x \sqrt{x^2 - 1} + x^2 \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \right)}{x^4 (x^2 - 1)} = \frac{-2x \sqrt{x^2 - 1} - \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^4 (x^2 - 1)} = \frac{-2x(x^2 - 1) - x^3}{x^4 (x^2 - 1)} =$$

$$= \frac{-2x^3 + 2x - x^3}{x^4 (x^2 - 1) \sqrt{x^2 - 1}} = - \frac{3x^2 - 2}{x^3 (x^2 - 1) \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3x^2 + 2}{x^3 (x^2 - 1) \sqrt{x^2 - 1}} = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2 = 0 \wedge x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \wedge x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \wedge x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

Como nem $\sqrt{\frac{2}{3}}$ nem $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ pertencem a $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, podemos concluir que f'' não tem zeros.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$-3x^2 + 2$	-	-		-	-
x^3	-	-		+	+
$x^2 - 1$	+	0		0	+
$\sqrt{x^2 - 1}$	+	0		0	+
Sinal e zeros de f''	+	n.d.		n.d.	-
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		0		0	

O gráfico tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -1]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[1, +\infty[$; não existem pontos de inflexão.

Não existem assíntotas verticais porque a função é contínua em todo o seu domínio que é $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = 1$$

As retas de equações $y = -1$ e $y = 1$ são assíntotas ao gráfico em $-\infty$ e em $+\infty$, respetivamente.

$$\text{b) } D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}; f(x) = \frac{2x^2}{|x+2|} = \begin{cases} \frac{2x^2}{-x-2} & \text{se } x < -2 \\ \frac{2x^2}{x+2} & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \left(\frac{2x^2}{-x-2}\right)' & \text{se } x < -2 \\ \left(\frac{2x^2}{x+2}\right)' & \text{se } x > -2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{4x(-x-2) - 2x^2 \times (-1)}{(-x-2)^2} & \text{se } x < -2 \\ \frac{4x(x+2) - 2x^2}{(x+2)^2} & \text{se } x > -2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-4x^2 - 8x + 2x^2}{(-x-2)^2} & \text{se } x < -2 \\ \frac{4x^2 + 8x - 2x^2}{(x+2)^2} & \text{se } x > -2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-2x^2 - 8x}{(x+2)^2} & \text{se } x < -2 \\ \frac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2} & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

$$x < -2, f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow -2x(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

$$x > -2, f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow 2x(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(-4) = \frac{32}{2} = 16 \text{ e } f(0) = \frac{0}{2} = 0$$

x	$-\infty$	-4		-2		0	$+\infty$
$-2x^2 - 8x$	$-$	0	$+$				
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$				
$2x^2 + 8x$					$-$	0	$+$
$(x+2)^2$					$+$	$+$	$+$
Sinal e zeros de f'	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
Monotonia e extremos de f	$\searrow$	16	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$

f é decrescente em $]-\infty, -4]$ e em $]-2, 0]$ e é crescente em $[-4, -2[$ e em $[0, +\infty[$; $f(-4) = 16$ e $f(0) = 0$ são mínimos relativos (0 é mínimo absoluto).

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \begin{cases} \left(\frac{-2x^2+8x}{(x+2)^2} \right)' & \text{se } x < -2 \\ \left(\frac{2x^2+8x}{(x+2)^2} \right)' & \text{se } x > -2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(4x+8)(x+2)^2 - (2x^2+8x) \times 2(x+2)}{(x+2)^4} & \text{se } x < -2 \\ \frac{(4x+8)(x+2)^2 - (2x^2+8x) \times 2(x+2)}{(x+2)^4} & \text{se } x > -2 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} \frac{4(x+2)[(x+2)(x+2) - (x^2+4x)]}{(x+2)^4} & \text{se } x < -2 \\ \frac{4(x+2)[(x+2)(x+2) - (x^2+4x)]}{(x+2)^4} & \text{se } x > -2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{4(x^2+4x+4-x^2-4x)}{(x+2)^3} & \text{se } x < -2 \\ \frac{4(x^2+4x+4-x^2-4x)}{(x+2)^3} & \text{se } x > -2 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} -\frac{16}{(x+2)^3} & \text{se } x < -2 \\ \frac{16}{(x+2)^3} & \text{se } x > -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

f'' não tem zeros; se $x < -2$, $f''(x) = -\frac{16}{\underbrace{(x+2)^3}_{\text{negativo}}} > 0$; se $x > -2$, $f''(x) = \frac{16}{\underbrace{(x+2)^3}_{\text{positivo}}} > 0$

O gráfico tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2[$ e em $]-2, +\infty[$; não existem pontos de inflexão.

$$f(x) = \frac{2x^2}{|x+2|} = \begin{cases} \frac{2x^2}{-x-2} & \text{se } x < -2 \\ \frac{2x^2}{x+2} & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2}{x+2} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2}{-x-2} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = -2$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\begin{array}{r}
 \cancel{2x^2} \quad \quad \quad -4x \\
 \hline
 \cancel{-2x^2} \quad \quad \quad \cancel{4x} \quad \quad \quad +8 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -x-2 \\
 \hline
 -2x+4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \cancel{2x^2} \quad \quad \quad -4x \\
 \hline
 \cancel{-2x^2} \quad \quad \quad \cancel{4x} \quad \quad \quad +8 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x+2 \\
 \hline
 2x-4
 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{|x+2|} = \begin{cases} \frac{2x^2}{-x-2} & \text{se } x < -2 \\ \frac{2x^2}{x+2} & \text{se } x > -2 \end{cases} = \begin{cases} -2x+4+\frac{8}{-x-2} & \text{se } x < -2 \\ 2x-4+\frac{8}{x+2} & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-2x+4)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2x+4+\frac{8}{-x-2}+2x-4 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{-x-2} = 0$$

A reta de equação $y = -2x+4$ é assíntota ao gráfico de f quando x tende para $-\infty$

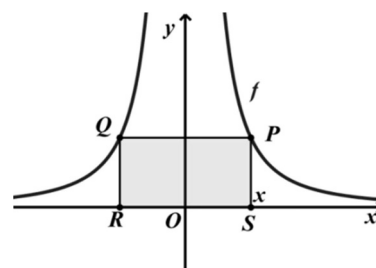
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x-4)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x-4+\frac{8}{x+2}-2x+4 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x+2} = 0$$

A reta de equação $y = 2x-4$ é assíntota ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$

80. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

As coordenadas de P são $\left(x, \frac{1}{x^2}\right)$ com $x > 0$; $\overline{RS} = 2x$

e $\overline{PS} = \frac{1}{x^2}$.



O perímetro do retângulo é dado por:

$$p(x) = 2 \times 2x + 2 \times \frac{1}{x^2} = 2 \left(2x + \frac{1}{x^2} \right)$$

Procuremos o mínimo da função perímetro.

$$p'(x) = 2 \left(2x + \frac{1}{x^2} \right)' = 2 \left(2 + \frac{-2x}{x^3} \right) = 4 \left(1 - \frac{1}{x^3} \right)$$

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \left(1 - \frac{1}{x^3} \right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1; p(1) = 2(2+1) = 6$$

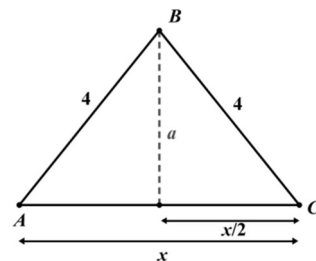
x	0	1	$+\infty$
$4x^3 - 4$	-	0	+
x^3	+	+	+
Sinal e zeros de p'	-	0	+
Monotonia e extremos de p	$\searrow$	6	$\nearrow$

Logo, o perímetro é mínimo para $x = 1$, as dimensões desse retângulo são $\overline{RS} = 2$ e $\overline{PS} = 1$.

81.

$$a^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow a^2 = 16 - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow a = \sqrt{16 - \frac{x^2}{4}}$$

$$A(x) = \frac{x\sqrt{16 - \frac{x^2}{4}}}{2}, \text{ com } 0 < x < 8$$

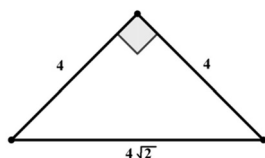


$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{16 - \frac{x^2}{4}} \right)' = \frac{1}{2} \left(\sqrt{16 - \frac{x^2}{4}} + x \frac{-\frac{x}{2}}{2\sqrt{16 - \frac{x^2}{4}}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{16 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{16 - \frac{x^2}{4}}} \right) = \\ &= \frac{4\left(16 - \frac{x^2}{4}\right) - x^2}{8\sqrt{16 - \frac{x^2}{4}}} = \frac{64 - x^2 - x^2}{8\sqrt{16 - \frac{x^2}{4}}} = \frac{32 - x^2}{4\sqrt{16 - \frac{x^2}{4}}} = \frac{32 - x^2}{2\sqrt{64 - x^2}} \end{aligned}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{32 - x^2}{2 \underbrace{\sqrt{64 - x^2}}_{\text{positivo para } 0 < x < 8}} = 0 \Leftrightarrow 32 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 32 \Leftrightarrow x = \sqrt{32} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{2}$$

$$A(4\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2} \sqrt{16 - \frac{(4\sqrt{2})^2}{4}}}{2} = 2\sqrt{2} \sqrt{16 - \frac{32}{4}} = 2\sqrt{2} \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 8$$

x	0	$4\sqrt{2}$	8
$32 - x^2$	+	0	-
$2\sqrt{64 - x^2}$	+	+	+
Sinal e zeros de A'	+	0	-
Monotonia e extremos de A	$\nearrow$	8	$\searrow$



O triângulo tem área máxima quando $\overline{AC} = 4\sqrt{2}$;

$$4^2 + 4^2 = 32 = (4\sqrt{2})^2$$

Logo, o triângulo é retângulo.

82. a) $f'(x) = (x^3 - 3x^2 - 1)' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

$\forall x \in]0, 2[, f'(x) < 0$, portanto, f é decrescente em $[0, 2]$;

$$g'(x) = (x^2 - 5)' = 2x$$

$\forall x \in]0, +\infty[, g'(x) > 0$, portanto, g é crescente em $[0, +\infty[$, de onde se conclui que é crescente em $[0, 2]$.

$$(f - g)'(x) = \underbrace{f'(x)}_{\text{negativa em }]0, 2[} - \underbrace{g'(x)}_{\text{positiva em }]0, 2[} < 0, \forall x \in]0, 2[$$

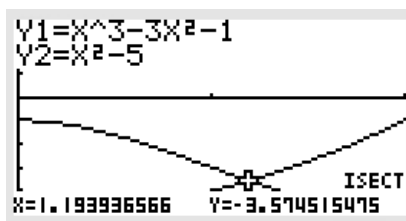
Logo, a função $f - g$ é decrescente nesse intervalo.

b) A função $f - g$ é decrescente em $]1, 1; 1, 3[$ e, portanto, não pode ter mais do que um zero.

A função $f - g$ é contínua em $[1, 1; 1, 3]$.

$$(f - g)(1, 1) = f(1, 1) - g(1, 1) = (1, 1^3 - 3 \times 1, 1^2 - 1) - (1, 1^2 - 5) = 0, 491 > 0 \text{ e}$$

$(f - g)(1, 3) = f(1, 3) - g(1, 3) = (1, 3^3 - 3 \times 1, 3^2 - 1) - (1, 3^2 - 5) = -0, 563 < 0$, concluímos que $f - g$ tem pelo menos um zero em $]1, 1; 1, 3[$. Portanto, $f - g$ tem exatamente um zero em $]1, 1; 1, 3[$, ou seja, os gráficos das funções f e g interseam-se num único ponto de abscissa pertencente ao intervalo $]1, 1; 1, 3[$.



Recorrendo a uma calculadora, concluímos que esse ponto tem coordenadas $(1, 2; -3, 6)$, com aproximação às décimas.

4. Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas

1. Juros compostos e número de Neper

1. a) $0,04 \times 60\,000 = 2\,400$ euros

b) $72\,000 = 60\,000 + 5 \times 2\,400$; portanto, a Beatriz estava a pensar que o lucro do António ia ser o mesmo todos os anos, o que não acontece. Repare-se, por exemplo, que no segundo ano o lucro do António é 4% de 62 400 euros que não é o mesmo que 4% de 60 000 euros.

$$C_5 = 60\,000 \left(1 + \frac{4}{100}\right)^5 = 72\,999,17414. \text{ O António vai ter 72\,000 euros e mais uns bons «trocós».$$

Vai ter 72 999,17 euros.

c) $0,04 \times 60\,000 \left(1 + \frac{4}{100}\right)^5 = 72\,999,17414 \times 0,04 = 2\,919,97$ euros

d) $C_1 - 60\,000 = 2\,919,97 \Leftrightarrow 60\,000 \left(1 + \frac{k}{100}\right) - 60\,000 = 2\,919,97 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 60\,000 \left(1 + \frac{k}{100} - 1\right) = 2\,919,97 \Leftrightarrow 600k = 2\,919,97 \Leftrightarrow k = 4,867\%$

2. $C_{20} = 10\,000 \left(1 + \frac{1,8}{100}\right)^{20} = 14\,287,48$ euros

3. $C_{20} = 100\,000 \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)^{10} \left(1 + \frac{2}{100}\right)^5 \left(1 + \frac{2,4}{100}\right)^5 = 144\,265$ euros

4. 5 anos corresponde a 10 semestres, logo $C_{10} = 2\,500 \left(1 + \frac{0,8}{100}\right)^{10} = 2\,707,36$ euros

5. $1,24 \times 12\,500 = 15\,500$; $C_{12} = 15\,500 \Leftrightarrow 12\,500 \left(1 + \frac{k}{100}\right)^{12} = 15\,500 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{k}{100}\right)^{12} = \frac{31}{25} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 1 + \frac{k}{100} = \sqrt[12]{\frac{31}{25}} \Leftrightarrow k = 100 \sqrt[12]{\frac{31}{25}} - 100 \Leftrightarrow k \approx 1,8$; portanto, a taxa anual aplicada foi 1,8 %.

6. a) $500\,000 - 0,05 \times 500\,000 = 475\,000$; $475\,000 - 0,05 \times 475\,000 = 451\,250$
Daqui a um ano vale 475 000 euros e daqui a dois anos vale 451 250 euros.

b) $C_n = 500\,000 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^n$

7. a) 1 ano tem 2 semestres, logo $C_2 = 50\,000 \left(1 + \frac{2,4}{100 \times 2}\right)^2 = 51\,207,20$ euros.

b) 1 ano tem 12 meses, logo $C_{12} = 50\,000 \left(1 + \frac{2,4}{100 \times 12}\right)^{12} = 51\,213,29$ euros.

- c) 1 ano tem 365 dias, 1 dia tem 24 horas, 1 hora tem 60 minutos, logo 1 ano tem

$365 \times 24 \times 60 = 525\,600$ minutos. Logo, $C_{525\,600} = 50\,000 \left(1 + \frac{2,4}{100 \times 525\,600}\right)^{525\,600} = 51\,214,52$ euros.

8. Calculemos a taxa de juro trimestral.

$$20\,225,23 \left(1 + \frac{k}{100}\right) = 20\,376,92$$

$$20\,225,23 \left(1 + \frac{k}{100}\right) = 20\,376,92 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{k}{100}\right) = \frac{20\,376,92}{20\,225,23} \Leftrightarrow 1 + \frac{k}{100} = \frac{20\,376,92}{20\,225,23} \Leftrightarrow k \simeq 0,7500$$

$$\frac{r}{4} = k \Leftrightarrow r = 4k ; \text{logo, } r \simeq 4 \times 0,7500 \simeq 3\%.$$

9. a) $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^3 = e^3$

b) $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+3} = \lim \left[\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3\right] = e^2 \times 1^3 = e^2$

c) $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

d) $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3-2n} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-2}\right] = 1^3 \times e^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

e) $\lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim \left(\frac{2n}{n+1} \right)^n &= \lim \left[2^n \times \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right] = \lim \left[2^n \times \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} \right] = \lim \left[2^n \times \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \right] = \\ &= \lim \left[2^n \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \right] = +\infty \times \frac{1}{e} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \lim \left(\frac{4n+4}{3n} \right)^{1-2n} &= \lim \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3n} \right)^{1-2n} = \lim \left[\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3n} \right)^1 \left[\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3n} \right)^n \right]^{-2} \right] = \\ &= \lim \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3n} \right) \times \lim \left[\frac{1}{\left(\frac{4}{3} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \right]^2 = \frac{4}{3} \times \lim \left(\frac{1}{+\infty \times e} \right)^2 = \frac{4}{3} \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{h) } \lim \left(\frac{2n}{3n+3} \right)^n = \lim \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n \times \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right) = \lim \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n \times \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} \right) = \lim \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \right) = 0 \times \frac{1}{e} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \lim \left(\frac{2n}{5n+2} \right)^{2-n} &= \lim \left(\frac{5n+2}{2n} \right)^{-2+n} = \lim \left(\frac{5n+2}{2n} \right)^{-2} \times \lim \left(\frac{5n+2}{2n} \right)^n = \lim \left(\frac{5n+2}{2n} \right)^{-2} \times \lim \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{n} \right)^n = \\ &= \lim \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{n} \right)^{-2} \times \lim \left(\frac{5}{2} \times \left(1 + \frac{2}{5n} \right) \right)^n = \lim \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{n} \right)^{-2} \times \lim \left(\left(\frac{5}{2} \right)^n \times \left(1 + \frac{2}{5n} \right)^n \right) = \\ &= \left(\frac{5}{2} \right)^{-2} \times \left(+\infty \times e^{\frac{2}{5}} \right) = \frac{4}{25} \times (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

2. Funções exponenciais

$$10. \text{ a) } 2^{-4} = \left(\frac{1}{2} \right)^4$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{4} \right)^{-2} = 4^2$$

$$\text{c) } \left(-\frac{3}{4} \right)^{-1} = \left(-\frac{4}{3} \right)^1$$

$$11. \text{ a) } 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{3} \right)^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{c) } 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$$

12. a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 4^3$ b) $\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{3^{-1}} = 3^{-\frac{1}{2}}$ c) $\sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{4}{3}}$

13. a) $f(0) = 2 \Leftrightarrow c \times 3^{k \times 0} = 2 \Leftrightarrow c = 2$; como f é crescente vem que $k > 0$.

b) $f(0) = 1 \Leftrightarrow c \times 3^{k \times 0} = 1 \Leftrightarrow c = 1$; como f é decrescente vem que $k < 0$.

c) $f(0) = -2 \Leftrightarrow c \times 3^{k \times 0} = -2 \Leftrightarrow c = -2$; como f é crescente vem que $k < 0$.

14. Para que a função seja crescente $3 - a > 1 \Leftrightarrow a < 2$; logo, $a \in]-\infty, 2[$.

15. $0 < \frac{k^2 - 2}{k} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k^2 - 2}{k} > 0 \\ \frac{k^2 - 2}{k} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k^2 - 2}{k} > 0 \\ \frac{k^2 - 2}{k} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k^2 - 2}{k} > 0 \\ \frac{k^2 - k - 2}{k} < 0 \end{cases}$

k	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$k^2 - 2$	+	0	-	-	-	0	+
k	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{k^2 - 2}{k}$	-	0	+	n.d.	-	0	+

$\frac{k^2 - 2}{k} > 0 \Leftrightarrow k \in]-\sqrt{2}, 0[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

k	$-\infty$	-1		0		2	$+\infty$
$k^2 - k - 2$	+	0	-	-	-	0	+
k	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{k^2 - k - 2}{k}$	-	0	+	n.d.	-	0	+

$k^2 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow k = -1 \vee k = 2$

$\frac{k^2 - k - 2}{k} < 0 \Leftrightarrow k \in]-\infty, -1[\cup]0, 2[$

Tem-se $(]-\sqrt{2}, 0[\cup]\sqrt{2}, +\infty[) \cap (]-\infty, -1[\cup]0, 2[) =]-\sqrt{2}, -1[\cup]\sqrt{2}, 2[$

O conjunto dos valores de k para os quais a função g é decrescente é $]-\sqrt{2}, -1[\cup]\sqrt{2}, 2[$.

$$16. a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x + 2^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3^x + \left(\frac{1}{2} \right)^x \right) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left(\frac{1}{5} \right)^x + 4^{-x} \right) = \lim_{y=-x, y \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{5} \right)^{-y} + 4^y \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (5^y + 4^y) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{\sqrt{3}^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{\sqrt{3} \sqrt{3}^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^x \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \times (+\infty) = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3^{-x} \times 2^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^x \times 2^x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^x = 0$$

$$17. a) \frac{2^\pi \times 4^{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{2^\pi \times (2^2)^{\sqrt{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^\pi \times 2^{2\sqrt{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\pi + 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}}$$

$$b) \frac{(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{3}} \times 2^{\sqrt{24}}}{\sqrt{6}^{2\sqrt{6}}} = \frac{3^{\sqrt{6}} \times 2^{2\sqrt{6}}}{\left(6^{\frac{1}{2}} \right)^{2\sqrt{6}}} = \frac{3^{\sqrt{6}} \times 2^{2\sqrt{6}}}{6^{\sqrt{6}}} = \frac{3^{\sqrt{6}} \times 2^{2\sqrt{6}}}{2^{\sqrt{6}} \times 3^{\sqrt{6}}} = \frac{2^{2\sqrt{6}}}{2^{\sqrt{6}}} = 2^{2\sqrt{6} - \sqrt{6}} = 2^{\sqrt{6}}$$

$$18. a) 2^{k+s} = 2^k \times 2^s = 5 \times 3 = 15$$

$$b) 2^{-s} = \frac{1}{2^s} = \frac{1}{3}$$

$$c) 2^{k+1} = 2^k \times 2 = 5 \times 2 = 10$$

$$d) 2^{2k} = (2^k)^2 = 5^2 = 25$$

$$e) 2^{\frac{s}{3}} = \sqrt[3]{2^s} = \sqrt[3]{3}$$

$$f) 6^s = 2^s \times 3^s = 3 \times 4 = 12$$

$$g) \left(\frac{2}{9} \right)^s = \frac{2^s}{(3^2)^s} = \frac{2^s}{(3^s)^2} = \frac{3}{4^2} = \frac{3}{16}$$

$$h) 3^{-sk} = \frac{1}{3^{sk}} = \frac{1}{(3^s)^k} = \frac{1}{4^k} = \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{(2^k)^2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$i) 2^{s^2} = 2^{s \times s} = (2^s)^s = 3^s = 4$$

$$j) 3^{\frac{sk}{2}} = (3^{sk})^{\frac{1}{2}} = \left((3^s)^k \right)^{\frac{1}{2}} = (4^k)^{\frac{1}{2}} = \left((2^2)^k \right)^{\frac{1}{2}} = 2^k = 5$$

19. a) $9^x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

Conjunto-solução = $\left\{\frac{1}{4}\right\}$

b) $1000^{-x} = 0,01 \Leftrightarrow 10^{3x} = 10^{-2} \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

Conjunto-solução = $\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

c) $\frac{5^x}{5} + 5 \times 5^x = 130 \Leftrightarrow 5^x + 25 \times 5^x = 650 \Leftrightarrow 26 \times 5^x = 650 \Leftrightarrow 5^x = 25 \Leftrightarrow 5^x = 5^2 \Leftrightarrow x = 2$

Conjunto-solução = $\{2\}$

d) $x \times 2^{1-x} = 4x \Leftrightarrow x \times 2^{1-x} - 4x = 0 \Leftrightarrow x \times (2^{1-x} - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2^{1-x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee 2^{1-x} = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2^{1-x} = 2^2 \Leftrightarrow x = 0 \vee 1-x = 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1;$

Conjunto-solução = $\{-1, 0\}$

e) $9^{x-1} = 108 - 3^x \Leftrightarrow \frac{9^x}{9} = 108 - 3^x \Leftrightarrow 3^{2x} = 972 - 9 \times 3^x \Leftrightarrow (3^x)^2 + 9 \times 3^x - 972 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \times (-972)}}{2} \Leftrightarrow 3^x = \frac{-9 \pm 63}{2} \Leftrightarrow \cancel{3^x = -36} \vee 3^x = 27 \Leftrightarrow 3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$

Conjunto-solução = $\{3\}$

f) $2^{2x} = 3 \times 2 \times 2^x - 8 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 6 \times 2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 8}}{2} \Leftrightarrow 2^x = \frac{6 \pm 2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x = 2 \vee 2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2 \vee 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$

Conjunto-solução = $\{1, 2\}$

g) $2^{2-x} + 3 = 2^x \Leftrightarrow \frac{2^2}{2^x} + 3 = 2^x \Leftrightarrow \frac{4}{2^x} + 3 = 2^x \Leftrightarrow 4 + 3 \times 2^x = (2^x)^2 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 3 \times 2^x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-4)}}{2} \Leftrightarrow 2^x = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \cancel{2^x = -1} \vee 2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$

Conjunto-solução = $\{2\}$

$$20. \text{ a) } 4^{x+1} > \sqrt{2}^{3x} \Leftrightarrow 4 \times 4^x > 2^{\frac{3}{2}x} \Leftrightarrow 4 \times 2^{2x} > 2^{\frac{3}{2}x} \Leftrightarrow \frac{2^{2x}}{2^{\frac{3}{2}x}} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{2x-\frac{3}{2}x} > 2^{-2} \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}x} > 2^{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x > -2 \Leftrightarrow x > -4$$

$$\text{Conjunto-solução} =]-4, +\infty[$$

$$\text{b) } 0,25^x \leq 8^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x \leq 8 \times 8^x \Leftrightarrow 4^{-x} \leq 8 \times 2^{3x} \Leftrightarrow 2^{-2x} \leq 8 \times 2^{3x} \Leftrightarrow \frac{2^{-2x}}{2^{3x}} \leq 2^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{-2x-3x} \leq 2^3 \Leftrightarrow -2x-3x \leq 3 \Leftrightarrow -5x \leq 3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{5}$$

$$\text{Conjunto-solução} = \left[-\frac{3}{5}, +\infty\right[$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > 1$$

$$\text{Conjunto-solução} =]1, +\infty[$$

$$\text{d) } 4^{x^2} > 2^x \Leftrightarrow 2^{2x^2} > 2^x \Leftrightarrow 2x^2 > x \Leftrightarrow 2x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

$$2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x^2 - x$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Conjunto-solução} =]-\infty, 0[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

$$\text{e) } 81^x \geq 27^{x^2-5} \Leftrightarrow 3^{4x} \geq 3^{3(x^2-5)} \Leftrightarrow 4x \geq 3x^2 - 15 \Leftrightarrow -3x^2 + 4x + 15 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{5}{3}, 3\right]$$

$$-3x^2 + 4x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-3) \times 15}}{-6} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 14}{-6} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\frac{5}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$		3	$+\infty$
$-3x^2 + 4x + 15$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\text{Conjunto-solução} = \left[-\frac{5}{3}, 3\right]$$

f) $2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow 2^x = 2^0 \Leftrightarrow x = 0$; $2^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2^x > 1 \Leftrightarrow 2^x > 2^0 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$2^x - 1$	-	0	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	0	-
$\frac{2^x - 1}{3 - x}$	-	0	+	n.d.	-

$$\frac{2^x - 1}{3 - x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 3[$$

Conjunto-solução = $[0, 3[$

g) $3^x + 3^{1-x} \geq 4 \Leftrightarrow 3^x + \frac{3}{3^x} \geq 4 \Leftrightarrow 3^{2x} + 3 \geq 4 \times 3^x \Leftrightarrow (3^x)^2 - 4 \times 3^x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow$ seja $y = 3^x$ $y^2 - 4y + 3 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 3$$

y	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$y^2 - 4y + 3$	+	0	-	0	+

$$3^x = 3^0 \vee 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

$$\Leftrightarrow y \leq 1 \vee y \geq 3 \Leftrightarrow 3^x \leq 1 \vee 3^x \geq 3 \Leftrightarrow 3^x \leq 3^0 \vee 3^x \geq 3^1 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 1 ;$$

Conjunto-solução = $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

h) $3^{x+1} - x^2 \times 3^x \geq 0 \Leftrightarrow 3 \times 3^x - x^2 \times 3^x \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{3^x}_{>0} (3 - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 3 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$-x^2 + 3$	-	0	+	0	-

Conjunto-solução = $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

i) $3^x \geq 4^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x \geq \left(\frac{3}{4}\right)^0 \Leftrightarrow x \leq 0$

Conjunto-solução = $]-\infty, 0]$

j) $(4^x - 2) \left(\frac{1}{3^x} - 3 \right) \geq 0 \Leftrightarrow (2^{2x} - 2) \left(\frac{1 - 3 \times 3^x}{3^x} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2^{2x} - 2)(1 - 3^{x+1})}{\underbrace{3^x}_{>0}} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
 (2^{2x} - 2)(1 - 3^{x+1}) &\geq 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\
 &2^{2x} - 2 > 0 \Leftrightarrow 2^{2x} > 2^1 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \\
 1 - 3^{x+1} &= 0 \Leftrightarrow 3^{x+1} = 1 \Leftrightarrow 3^{x+1} = 3^0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \\
 1 - 3^{x+1} &> 0 \Leftrightarrow 3^{x+1} < 1 \Leftrightarrow 3^{x+1} < 3^0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2^{2x} - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$-3^{x+1} + 1$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$(2^{2x} - 2)(1 - 3^{x+1})$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{Conjunto-solução} = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$$

$$\textbf{k)} \quad x\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4x \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4x \leq 0 \Leftrightarrow x\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4\right] \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^2 \Leftrightarrow -x = 2 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 > 0 \Leftrightarrow 2^{-x} > 2^2 \Leftrightarrow -x > 2 \Leftrightarrow x < -2$$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$x\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4\right]$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$$

$$\text{Conjunto-solução} =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$$

$$\textbf{21. a)} \quad \lim\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$$

$$\text{b) } \lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n+1} = \lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \times \lim \left(1 - \frac{2}{n}\right) = e^{-2} \times 1 = e^{-2}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{2n+1} &= \lim \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{2n} \times \lim \left(1 + \frac{2}{n+3}\right) = \lim \left(\left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^n \right)^2 \times 1 = \\ &= \left(\lim \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{n+3} \lim \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{-3} \right)^2 = (e^2 \times 1^{-3})^2 = e^4 \end{aligned}$$

$$\text{d) } \lim \left(\frac{n+2}{n+5} \right)^n = \lim \left(\frac{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{5}{n}\right)} \right)^n = \frac{\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n} = \frac{e^2}{e^5} = e^{-3}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim \left(\frac{2n+1}{2n-3} \right)^{1-3n} &= \lim \left(\frac{2n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{2n \left(1 - \frac{3}{2n}\right)} \right)^{1-3n} = \lim \left(\frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{3}{2n}} \right)^{1-3n} = \lim \left[\left(\frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{3}{2n}} \right)^{-3n} \times \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{3}{2n}} \right] = \\ &= \lim \left(\frac{1 - \frac{3}{2n}}{1 + \frac{1}{2n}} \right)^{3n} \times \lim \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{3}{2n}} = \frac{\lim \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{3n}}{\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n}} \times \frac{1}{1} = \frac{\lim \left(1 - \frac{3 \times \frac{3}{2}}{2n \times \frac{3}{2}}\right)^{3n}}{\lim \left(1 + \frac{1 \times \frac{3}{2}}{2n \times \frac{3}{2}}\right)^{3n}} = \frac{\lim \left(1 - \frac{9}{3n}\right)^{3n}}{\lim \left(1 + \frac{3}{3n}\right)^{3n}} = \frac{e^{\frac{9}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} = e^{\frac{9}{2} - \frac{3}{2}} = e^{-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim \left(\frac{n^2 - 9}{n^2} \right)^n &= \lim \left(\frac{n-3}{n} \times \frac{n+3}{n} \right)^n = \lim \left(\frac{n-3}{n} \right)^n \lim \left(\frac{n+3}{n} \right)^n = \lim \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n \lim \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \\ &= e^{-3} \times e^3 = e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \lim \left(2 + \frac{5}{n+1}\right)^{2n} &= \lim \left[2 \left(1 + \frac{\frac{5}{2}}{n+1}\right) \right]^{2n} = \lim \left[2^{2n} \left(1 + \frac{5}{2n+2}\right)^{2n} \right] = \\ &= \lim \left[2^{2n} \left(1 + \frac{5}{2n+2}\right)^{2n+2} \left(1 + \frac{5}{2n+2}\right)^{-2} \right] = \lim (2^{2n}) \times \lim \left(1 + \frac{5}{2n+2}\right)^{2n+2} \times \lim \left(1 + \frac{5}{2n+2}\right)^{-2} = \\ &= +\infty \times e^5 \times 1 = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{h) } \lim \left(\frac{2-n}{n+3} \right)^n = \lim \left(\frac{-n \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{3}{n}\right)} \right)^n = \lim \left((-1) \frac{1 - \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \right)^n = \lim \left((-1)^n \frac{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n} \right)$$

Este limite não existe porque:

A sucessão de termo geral $(-1)^n$ não tem limite (os termos desta sucessão são, alternadamente, iguais a -1 e a 1).

$$\lim \frac{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n} = \frac{\lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n} = \frac{e^{-2}}{e^3} = e^{-5} \quad \text{e} \quad \lim \frac{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n} = \frac{\lim \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n}{\lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n} = \frac{e^3}{e^{-2}} = e^5$$

Se existisse $\lim \left((-1)^n \frac{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n} \right)$, então, também existia $\lim \left((-1)^n \frac{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n} \times \frac{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n} \right)$.

Mas $(-1)^n \frac{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n} \times \frac{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n} = (-1)^n$ que não tem limite.

$$\begin{aligned} \text{i) } \lim \left(\frac{2-n}{3n+1} \right)^n &= \lim \left(\frac{-n \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3n \left(1 + \frac{1}{3n}\right)} \right)^n = \lim \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n \frac{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n} \right) = \lim \left(-\frac{1}{3} \right)^n \frac{\lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n} = \\ &= \lim \left[(-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] \frac{\lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n} = \lim \left[\underbrace{(-1)^n}_{\text{limitada}} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{infinitésimo}} \right] \frac{e^{-2}}{e^{\frac{1}{3}}} = 0 \times e^{-\frac{7}{3}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{22. a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x+2}\right)^{2x-1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x+2}\right)^{2x+4} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x+2}\right)^{-5} = \lim_{x+2 \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{3}{x+2}\right)^{x+2} \right]^2 \times 1 = \\ &= (e^{-3})^2 = e^{-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{x-3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x \left(1 - \frac{1}{2x}\right)}{2x \left(1 + \frac{3}{2x}\right)} \right)^{x-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{x-3}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{x-3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{x}\right)^{x-3}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\frac{3}{2}}{x}\right)^{x-3}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{x}\right)^x \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{x}\right)^{-3}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\frac{3}{2}}{x}\right)^x \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\frac{3}{2}}{x}\right)^{-3}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}} \times 1}{e^{\frac{3}{2}} \times 1} = e^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}} = e^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x-1}{x^2-1}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{-1} = \lim_{x+1 \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} \times 1 = e\end{aligned}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y=\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -1^-} (2+x)^{\frac{1}{x+1}} = \lim_{\substack{y=\frac{1}{x+1} \\ x=\frac{1}{y}-1}} \left(2 + \frac{1}{y} - 1\right)^y = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

$$23. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{5} \times \frac{e^{2x} - 1}{2x}\right) = \frac{2}{5} \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = \frac{2}{5} \times 1 = \frac{2}{5}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{x^2 + 3x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x(x+3)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x+3} \times \frac{e^{2x} - 1}{2x}\right) = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x+3} \times \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = -\frac{2}{3} \times 1 = -\frac{2}{3}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-e^x) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = -1 \times 1 = -1$$

$$\begin{aligned}\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x} - e^2}{x - 1} &= \lim_{\substack{y=x-1 \\ x=y+1}} \frac{e^{2(y+1)} - e^2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{2y+2} - e^2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^2(e^{2y} - 1)}{y} = \\ &= 2e^2 \lim_{2y \rightarrow 0} \frac{e^{2y} - 1}{2y} = 2e^2 \times 1 = 2e^2\end{aligned}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(e^{\frac{2}{x}} - 1 \right) \right] = \lim_{\substack{y=\frac{2}{x} \\ x=\frac{2}{y}}} \left[\frac{2}{y} (e^y - 1) \right] = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 2 \times 1 = 2$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{1 - e^{x-1}} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{e(e^{x-1} - 1)}}{\cancel{e^{x-1} - 1}} = -e$$

$$\begin{aligned}
 \text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xe^{2x} - e^2}{1-x} &= \lim_{\substack{y=x-1 \\ x=y+1}} \frac{(y+1)e^{2(y+1)} - e^2}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y+1)e^{2y+2} - e^2}{-y} = -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y+1)e^{2y}e^2 - e^2}{y} = \\
 &= -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{[(y+1)e^{2y} - 1]e^2}{y} = -2e^2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y+1)e^{2y} - 1}{2y} = -2e^2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{ye^{2y} + e^{2y} - 1}{2y} = \\
 &= -2e^2 \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2y}}{2} + \frac{e^{2y} - 1}{2y} \right) = -2e^2 \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{2y}}{2} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{2y} - 1}{2y} \right) = -2e^2 \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = -2e^2 \times \frac{3}{2} = -3e^2
 \end{aligned}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{e^x - 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \times \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x}} = +\infty \times \sqrt{1} = +\infty$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{e^{\sqrt{x}-2} - 1}{x-4} = \lim_{\substack{y=\sqrt{x}-2 \\ \sqrt{x}=y+2 \\ x=y^2+4y+4}} \frac{e^y - 1}{y^2 + 4y + 4 - 4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{(y+4)y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y+4} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{24. a) } f'(x) = \left(x^3 e^{-x} + \frac{e^x}{2} \right)' = 3x^2 e^{-x} + x^3 (-e^{-x}) + \frac{1}{2} e^x = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} + \frac{e^x}{2}$$

$$\text{b) } f'(x) = \left(\frac{e^{0,1x}}{x^2 + 1} \right)' = \frac{0,1e^{0,1x}(x^2 + 1) - e^{0,1x} \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^{0,1x}[0,1(x^2 + 1) - 2x]}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^{0,1x}(0,1x^2 - 2x + 0,1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{c) } f'(x) = \left(x^2 e^{\frac{2}{x}} \right)' = 2xe^{\frac{2}{x}} + x^2 e^{\frac{2}{x}} \times \left(\frac{2}{x} \right)' = 2xe^{\frac{2}{x}} + x^2 e^{\frac{2}{x}} \times \frac{-2}{x^2} = 2xe^{\frac{2}{x}} - 2e^{\frac{2}{x}} = (2x - 2)e^{\frac{2}{x}}$$

$$\text{25. } f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x); \quad f'(1) = 2e; \quad f(1) = 1 \times e^1 = e$$

$y = 2ex + b$, como a reta passa pelo ponto $(1, f(1)) = (1, e)$, vem que $e = 2e + b \Leftrightarrow b = -e$.

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa 1 é $y = 2ex - e$.

$$\text{26. a) } f'(x) = -1 \times e^x + (1-x)e^x = (-1+1-x)e^x = -xe^x; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Tem-se $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Se $x < 0$, vem que $-x > 0$; logo, $f'(x) > 0$. Se $x > 0$, vem que $-x < 0$; logo, $f'(x) < 0$.

Assim, f é crescente em $]-\infty, 0]$ e é decrescente em $[0, +\infty[$; $f(0) = 1$ é máximo.

$$f''(x) = (-xe^x)' = -1 \times e^x - xe^x = (-1-x)e^x; \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Tem-se $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Se $x < -1$, vem que $-1 - x > 0$; logo, $f''(x) > 0$.

Se $x > -1$, vem que $-1 - x < 0$; logo, $f''(x) < 0$.

Assim, o gráfico tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -1]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[-1, +\infty[$. $f(-1) = (1+1)e^{-1} = \frac{2}{e}$. O ponto de coordenadas $\left(-1, \frac{2}{e}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico.

b) $f'(x) = (e^{-x^2})' = e^{-x^2} \times (-2x) = -2xe^{-x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Tem-se $e^{-x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Se $x < 0$, vem que $-2x > 0$; logo, $f'(x) > 0$.

Se $x > 0$, vem que $-2x < 0$; logo, $f'(x) < 0$.

Assim, f é crescente em $]-\infty, 0]$ e é decrescente em $[0, +\infty[$. $f(0) = 1$ é máximo.

$$f''(x) = (-2xe^{-x^2})' = -2 \times e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \times (-2x) = (-2 + 4x^2)e^{-x^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
e^{-x^2}	+	+	+	+	+
$4x^2 - 2$	+	0	-	0	+
Sinal e zeros de f''	+	0	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		P.I.		P.I.	

O gráfico tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ e em $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$ e tem a

concavidade voltada para baixo em $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Os pontos de coordenadas $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ são pontos de inflexão do gráfico.

$$\text{c) } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad f'(x) = \left(x e^{\frac{1}{x}} \right)' = e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x} = e^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = e^{\frac{1}{x}} \times \frac{x+1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\text{positivo}} \times \underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow x = -1; \quad f(-1) = -e$$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$e^{\frac{1}{x}}$	+	+	+		+
$x+1$	-	0	+		+
x	-	-	-		+
Sinal e zeros de f'	+	0	-		+
Monotonia e extremos de f	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	n.d.	$\nearrow$

f é crescente em $]-\infty, -1]$ e em $]0, +\infty[$ e é decrescente em $[-1, 0[$; $f(-1) = -e$ é máximo relativo.

$$f''(x) = \left[e^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]' = e^{\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x} \right) + e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = e^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x^2} \right] = e^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right] = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\text{positivo}} = 0 \quad \text{Equação impossível, logo } f'' \text{ não se anula.}$$

Para $x < 0$, vem que $f''(x) < 0$. Para $x > 0$, vem que $f''(x) > 0$.

O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]0, +\infty[$; não existem pontos de inflexão no gráfico.

3. Funções logarítmicas

$$27. \text{ a) } D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - 3x > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{3}\right\} =]-\infty, \frac{1}{3}[$$

$$\text{b) } D_f = \{x \in \mathbb{R} : 25 - x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 25 > 0\} \underset{x^2=25}{x=\pm 5} =]-5, 5[$$

$$\text{c) } D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : (x+1)^2 > 0 \wedge \underbrace{x^2 + 1 > 0}_{\text{condição universal}}\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\text{d) } D_f = \{x \in \mathbb{R} : |1-x| - 3 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : |1-x| > 3\} = \{x \in \mathbb{R} : 1-x < -3 \vee 1-x > 3\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : x > 4 \vee x < -2\} =]-\infty, -2[\cup]4, +\infty[$$

$$\text{e) } D_f = \{x \in \mathbb{R} : 3-x > 0 \wedge 1-x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 3 \wedge x < 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\} =]-\infty, 1[$$

$$\text{f) } D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{3-x}{1-x} > 0\right\} \underset{\downarrow}{=}]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$3-x$	+	+	+	0	-
$1-x$	+	0	-	-	-
$\frac{3-x}{1-x}$	+	n.d.	-	0	+

$$28. f(x) = \frac{2-3^{x-1}}{4}; D_f = D'_{f^{-1}} = \mathbb{R}; y = \frac{2-3^{x-1}}{4} \Leftrightarrow 4y = 2-3^{x-1} \Leftrightarrow 3^{x-1} = -4y+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \log_3(2-4y) \Leftrightarrow x = \log_3(2-4y) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \log_3(2-4y) + 1 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_3(2-4x) + 1$$

$$D_{f^{-1}} = D'_f = \{x \in \mathbb{R} : 2-4x > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{2}\right\} =]-\infty, \frac{1}{2}[$$

$$\text{Logo, } D_{f^{-1}} =]-\infty, \frac{1}{2}[, D'_{f^{-1}} = \mathbb{R} \text{ e } f^{-1}(x) = 1 + \log_3(2-4x)$$

$$g(x) = 1 - 3\ln(x-2); D_g = D'_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} : x-2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\} =]2, +\infty[$$

$$y = 1 - 3\ln(x-2) \Leftrightarrow \ln(x-2) = \frac{1-y}{3} \Leftrightarrow x-2 = e^{\frac{1-y}{3}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1-y}{3}} + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g^{-1}(y) = e^{\frac{1-y}{3}} + 2 \Leftrightarrow g^{-1}(x) = e^{\frac{1-x}{3}} + 2$$

$$D'_g = D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$\text{Logo, } D_{g^{-1}} = \mathbb{R}, D'_{g^{-1}} =]2, +\infty[\text{ e } g^{-1}(x) = e^{\frac{1-x}{3}} + 2.$$

$$29. 0 < a-2 < 1 \Leftrightarrow 2 < a < 3 \Leftrightarrow a \in]2, 3[$$

30. Seja h a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $h(x) = \ln(x)$. Seja f uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $]0,1[$.

$$g = h \circ f ; D_g = D_{h \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_h\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R}$$

$$0 < f(x) < 1 \Rightarrow \ln(f(x)) \in]-\infty, 0[. \text{ Logo, } D_g = \mathbb{R} \text{ e } D'_g =]-\infty, 0[.$$

31. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \log_2(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{e}}(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_{0,1}(x-1)^2}{x} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \log(x^2)}{3 \log(x) + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 2 \log(x)}{3 \log(x) + 1} = \lim_{y = \log x, y \rightarrow +\infty} \frac{-2y + 2}{3y + 1} = -\frac{2}{3}$

32. a) $\log_3(3^7)$ **b)** $2^{\log_2(7)}$ **c)** $\ln(e^7)$ **d)** $10^{\log(7)}$

33. a) $3^{2+\log_3(2)} = 3^2 \times 3^{\log_3(2)} = 9 \times 2 = 18$

b) $e^{2\ln(5)} = e^{\ln(5^2)} = 5^2 = 25$

c) $\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = \log_5\left(\frac{1}{5^2}\right) = \log_5(5^{-2}) = -2 \log_5(5) = -2$

d) $\log(2^4 \times 4^{-2}) = \log(2^4 \times (2^2)^{-2}) = \log(2^4 \times 2^{-4}) = \log(2^0) = \log(1) = 0$

34. a) $\log_3(9 \times 3^{-x}) = \log_3(3^2 \times 3^{-x}) = \log_3(3^{2-x}) = (2-x) \log_3(3) = (2-x) \times 1 = 2-x$

b) $\ln\left(\frac{e^x}{\sqrt[3]{e^2}}\right) = \ln\left(\frac{e^x}{e^{\frac{2}{3}}}\right) = \ln\left(e^{x-\frac{2}{3}}\right) = x - \frac{2}{3}$

c) $9^{1-\log_3(\sqrt{x^2+1})} = (3^2)^{1-\log_3(\sqrt{x^2+1})} = 3^{2-2\log_3(\sqrt{x^2+1})} = \frac{3^2}{3^{2\log_3(\sqrt{x^2+1})}} = \frac{3^2}{3^{\log_3(\sqrt{x^2+1})^2}} = \frac{9}{x^2+1}$

35. a) $\log_3(6) - \log_3(2) = \log_3\left(\frac{6}{2}\right) = \log_3 3 = 1$

$$\text{b) } \log_4(32) + \frac{1}{3}\log_4(8) = \log_4(2^5) + \log_4(\sqrt[3]{8}) = \log_4(2^5) + \log_4(2) = \log_4(2^6) = \log_4(4^3) = 3$$

$$36. \text{ a) } \log(4) + 2 = \log(4) + \log(10^2) = \log(4) + \log(100) = \log(400)$$

$$\text{b) } 2\log_3(4) - 1 = \log_3(4^2) - \log_3(3) = \log_3\left(\frac{16}{3}\right)$$

$$\text{c) } \frac{\ln(9)}{2} + \log_{e^2}(4) = \frac{1}{2}\ln(9) + \frac{\ln(4)}{\ln(e^2)} = \frac{1}{2}\ln(9) + \frac{1}{2}\ln(4) = \frac{1}{2}(\ln(9) + \ln(4)) = \frac{1}{2}\ln(36) = \ln(\sqrt{36}) = \ln(6)$$

$$37. \text{ a) } \log_a(uv) = \log_a(u) + \log_a(v) = 5 + 3 = 8$$

$$\text{b) } \log_a(u^4) = 4\log_a(u) = 4 \times 5 = 20$$

$$\text{c) } \log_a\left(\frac{1}{v}\right) = -\log_a(v) = -3$$

$$\text{d) } \log_v(u) = \frac{\log_a(u)}{\log_a(v)} = \frac{5}{3}$$

$$\text{e) } \log_{\sqrt{a}}(v) = \frac{\log_a(v)}{\log_a(\sqrt{a})} = \frac{3}{\log_a\left(a^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \log_a\left(\frac{\sqrt[3]{v}}{au}\right) &= \log_a(\sqrt[3]{v}) - \log_a(au) = \log_a\left(v^{\frac{1}{3}}\right) - (\log_a(a) + \log_a(u)) = \\ &= \frac{1}{3}\log_a(v) - \log_a(a) - \log_a(u) = \frac{3}{3} - 1 - 5 = -5 \end{aligned}$$

$$38. \text{ a) } \ln(12) = \ln(2 \times 6) = \ln(2) + \ln(6) = a + b$$

$$\text{b) } \ln(36) = \ln(6^2) = 2\ln(6) = 2b$$

$$\text{c) } \ln(3) = \ln\left(\frac{6}{2}\right) = \ln(6) - \ln(2) = b - a$$

$$\text{d) } \ln(24) = \ln(2^2 \times 6) = \ln(2^2) + \ln(6) = 2\ln(2) + \ln(6) = 2a + b$$

39. $(-2, 4)$ pertencer ao gráfico de f^{-1} significa que $f^{-1}(-2) = 4 \Leftrightarrow f(4) = -2$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(1) = -1 \\ f(4) = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c + \log_k(1) = -1 \\ c + \log_k(4) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + 0 = -1 \\ c + \log_k(4) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ -1 + \log_k(4) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ \log_k(4) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ k^{-1} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ \frac{1}{k} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ k = \frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

40. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\log_4(2x+1) - \log_4(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\log_4 \left(\frac{2x+1}{x} \right) \right] = \log_4 \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x} \right) \right] = \log_4 \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x} \right) \right] =$
 $= \log_4(2) = \log_4 \left(4^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} [\log_2(x-2) - \log_2(x^2-4)] = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\log_2 \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) \right] = \log_2 \left[\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} \right) \right] =$
 $= \log_2 \left[\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x+2} \right) \right] = \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) = \log_2(2^{-2}) = -2$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x+1} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + 2) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + 2) - \ln(e^x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{e^x + 2}{e^x} \right) \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x + 2}{e^x} \right) \right] =$
 $= \ln \left[\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y+2}{y} \right) \right] = \ln \left[\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y} \right) \right] = \ln(1) = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(x)) \right] = \log_{\frac{1}{2}} \left[\lim_{x \rightarrow 1^+} (\log_2(x)) \right] = \log_{\frac{1}{2}} \left[\log_2(\lim_{x \rightarrow 1^+}(x)) \right] =$
 $= \log_{\frac{1}{2}} \left[\log_2(1^+) \right] = \log_{\frac{1}{2}}(0^+) = +\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(2x+1)}{\log(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(2x+1) - \log(x) + \log(x)}{\log(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log(2x+1) - \log(x)}{\log(x)} + 1 \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log \left(\frac{2x+1}{x} \right)}{\log(x)} + 1 \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\log \left(2 + \frac{1}{x} \right) \right]}{\lim_{x \rightarrow +\infty} [\log(x)]} + 1 = \frac{\log \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right) \right]}{\log(+\infty)} + 1 = \frac{\log(2)}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$

41. a) $3^x = 8 \Leftrightarrow x = \log_3(8)$

Conjunto-solução = $\{\log_3(8)\}$

b) $\ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

Conjunto-solução = $\{e^{-1}\}$

c) $\log_8(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 8^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = 2$

Conjunto-solução = $\{2\}$

d) $\log(x^2 - 2) = \log(1 - 2x) \Leftrightarrow x^2 - 2 = 1 - 2x \wedge x^2 - 2 > 0 \wedge 1 - 2x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \wedge x^2 - 2 > 0 \wedge x < \frac{1}{2}$

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-3)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$

1 não é menor que $\frac{1}{2}$; logo, não é solução. Vejamos se -3 verifica a condição $x^2 - 2 > 0$.

$(-3)^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow 7 > 0$, o que é verdade. Logo, a única solução é o -3 .

Conjunto-solução = $\{-3\}$

e) $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = \log_2(3) \Leftrightarrow \log_2[(x+1)(x-1)] = \log_2(3) \wedge x+1 > 0 \wedge x-1 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \wedge x+1 > 0 \wedge x-1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \wedge x > -1 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x = 2$

Conjunto-solução = $\{2\}$

f) $\log_6(x) + \log_6(x-5) = 2 \Leftrightarrow \log_6(x^2 - 5x) = \log_6(6^2) \wedge x > 0 \wedge x-5 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x = 36 \wedge x > 0 \wedge x-5 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 36 = 0 \wedge x > 5 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times (-36)}}{2} \wedge x > 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 13}{2} \wedge x > 5 \Leftrightarrow (x = 9 \vee x = -4) \wedge x > 5 \Leftrightarrow x = 9$

Conjunto-solução = $\{9\}$

g) $\log(2x-1) = 2\log(3x) - \log(5x+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log(2x-1) = \log((3x)^2) - \log(5x+2) \wedge 2x-1 > 0 \wedge 3x > 0 \wedge 5x+2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log(2x-1) = \log\left(\frac{9x^2}{5x+2}\right) \wedge 2x-1 > 0 \wedge 3x > 0 \wedge 5x+2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-1 = \frac{9x^2}{5x+2} \wedge 2x-1 > 0 \wedge 3x > 0 \wedge 5x+2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x-1)(5x+2) = 9x^2 \wedge x > \frac{1}{2} \wedge x > 0 \wedge x > -\frac{2}{5} \Leftrightarrow 10x^2 + 4x - 5x - 2 = 9x^2 \wedge x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \wedge x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2} \wedge x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \wedge x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x = 2 \vee x = -1) \wedge x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2$

Conjunto-solução = $\{2\}$

$$\text{h)} \log_3(x) + \log_9(x-8) = 2 \Leftrightarrow \log_3(x) + \frac{\log_3(x-8)}{\log_3(9)} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x) + \frac{1}{2}\log_3(x-8) = 2 \Leftrightarrow \log_3(x) + \log_3\left((x-8)^{\frac{1}{2}}\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x) + \log_3(\sqrt{x-8}) = \log_3(3^2) \Leftrightarrow \log_3(x\sqrt{x-8}) = \log_3(9) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x-8} = 9 \wedge x > 0 \wedge x-8 > 0 \Leftrightarrow x^2(x-8) = 81 \wedge x > 8 \Leftrightarrow x^3 - 8x^2 - 81 = 0 \wedge x > 8 \Leftrightarrow$$

9	1	-8	0	-81
	9	9	9	81
	1	1	9	0

$$\Leftrightarrow (x-9)(x^2+x+9) = 0 \wedge x > 8 \Leftrightarrow x-9=0 \vee x^2+x+9=0 \wedge x > 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 9 \vee x = \underbrace{\frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \times 9}}{2}}_{\text{impossível em } \mathbb{R}} \wedge x > 8 \Leftrightarrow x = 9$$

$$\text{Conjunto-solução} = \{9\}$$

$$\text{i)} \log_6(x+4) - \log_6(x-1) = 1 \Leftrightarrow \log_6\left(\frac{x+4}{x-1}\right) = \log_6(6) \wedge x+4 > 0 \wedge x-1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{x-1} = 6 \wedge x+4 > 0 \wedge x-1 > 0 \Leftrightarrow x+4 = 6x-6 \wedge x > -4 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x = 2 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Conjunto-solução} = \{2\}$$

$$\text{j)} 2\ln(x) = \ln(5) + \ln(x+1,2) \Leftrightarrow \ln(x^2) = \ln(5x+6) \wedge x > 0 \wedge x+1,2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 5x+6 \wedge x > 0 \wedge x+1,2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \wedge x > 0 \wedge x > -1,2 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times (-6)}}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 7}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 6) \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 6$$

$$\text{Conjunto-solução} = \{6\}$$

$$\text{k)} 3^{2x} = 5^{x+1} \Leftrightarrow (3^2)^x = 5 \times 5^x \Leftrightarrow \frac{9^x}{5^x} = 5 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{5}\right)^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{9}{5}}(5)$$

$$\text{Conjunto-solução} = \left\{ \log_{\frac{9}{5}}(5) \right\}$$

$$\text{l)} x^{2x} = x^3 \Leftrightarrow \frac{x^{2x}}{x^3} = 1 \Leftrightarrow x^{2x-3} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee 2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{3}{2}$$

$$\text{Conjunto-solução} = \left\{ 1, \frac{3}{2} \right\}$$

$$\text{42. a)} \log_2(2x-3) \leq \log_2(x) \Leftrightarrow 2x-3 \leq x \wedge 2x-3 > 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \leq 3 \wedge x > \frac{3}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq 3 \wedge x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left] \frac{3}{2}, 3 \right]$$

$$\text{b) } \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leq \log_{\frac{1}{3}}(4-x) \Leftrightarrow x-1 \geq 4-x \wedge x-1 > 0 \wedge 4-x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2} \wedge x > 1 \wedge x < 4 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{5}{2}, 4 \right[$$

$$\text{c) } 2\log_4(x^2-1)-1 \leq 0 \Leftrightarrow \log_4(x^2-1) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_4(x^2-1) \leq \log_4(2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-1 \leq 2 \wedge x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x^2-3 \leq 0 \wedge x^2-1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3} ; x^2-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1 ; x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x \in [-\sqrt{3}, -1[\cup]1, \sqrt{3}]$$

$$\text{d) } \log(7x-12)-2\log(x) \leq 0 \Leftrightarrow \log(7x-12) \leq \log(x^2) \wedge 7x-12 > 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x-12 \leq x^2 \wedge 7x-12 > 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x^2-7x+12 \geq 0 \wedge x > \frac{12}{7} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-7x+12 \geq 0 \wedge x > \frac{12}{7} \Leftrightarrow$$

$$x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-4 \times 12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x=4 \vee x=3$$

$$x^2-7x+12 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 3] \cup [4, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] \frac{12}{7}, 3 \right] \cup [4, +\infty[$$

$$\text{e) } 1-\ln(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=1 \Leftrightarrow x=e ; 1-\ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e \wedge x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$$

$$e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0 ; e^x-1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

x	0	e	$+\infty$
$1-\ln(x)$	+	0	-
e^x-1	+	+	+
$\frac{1-\ln(x)}{e^x-1}$	+	0	-

$$\frac{1-\ln(x)}{e^x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]0, e]$$

$$\text{f) } \log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 > \log_{\frac{1}{2}}(x^2+3) \Leftrightarrow (x-2)^2 < x^2+3 \wedge (x-2)^2 > 0 \wedge \underbrace{x^2+3 > 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4 < x^2+3 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4} \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{4}, 2 \right[\cup]2, +\infty[$$

$$\text{g) } \log_2(2-x)-1 \leq \log_4(5-x) \Leftrightarrow \log_2(2-x)-\log_2(2) \leq \frac{\log_2(5-x)}{\log_2(4)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{2-x}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\log_2(5-x) \wedge 2-x > 0 \wedge 5-x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2\left(\frac{2-x}{2}\right) \leq \log_2(5-x) \wedge 2-x > 0 \wedge 5-x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{2-x}{2} \right)^2 \leq \log_2(5-x) \wedge x < 2 \wedge x < 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-4x+x^2}{4} \leq 5-x \wedge x < 2 \Leftrightarrow 4-4x+x^2 \leq 20-4x \wedge x < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16 \leq 0 \wedge x < 2 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4 \wedge x < 2 \Leftrightarrow x \in [-4, 2[$$

$$\text{h) } x \log_{\frac{1}{2}}(3+x) + 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \left(\log_{\frac{1}{2}}(3+x) + 3 \right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(3+x) + 3 = 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(3+x) = -3 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(3+x) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+x = \left(\frac{1}{2} \right)^{-3} \wedge 3+x > 0 \Leftrightarrow 3+x = 8 \wedge x > -3 \Leftrightarrow x = 5 \wedge x > -3 \Leftrightarrow x = 5$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(3+x) + 3 > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(3+x) > -3 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(3+x) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+x < \left(\frac{1}{2} \right)^{-3} \wedge 3+x > 0 \Leftrightarrow 3+x < 8 \wedge x > -3 \Leftrightarrow x < 5 \wedge x > -3 \Leftrightarrow -3 < x < 5$$

x	-3	0		5	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\log_{\frac{1}{2}}(3+x) + 3$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x \left(\log_{\frac{1}{2}}(3+x) + 3 \right)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\Leftrightarrow x \in]-3, 0] \cup [5, +\infty[$$

$$43. \text{ a) } f'(x) = (2^x + \log_2(x))' = 2^x \ln(2) + \frac{1}{x \ln(2)}$$

$$\text{b) } f'(x) = \left(\frac{3^{2x+1}}{\ln(3)} \right)' = \frac{1}{\ln(3)} (3^{2x+1})' = \frac{1}{\ln(3)} 3^{2x+1} \times 2 \times \ln(3) = 2 \times 3^{2x+1}$$

$$\text{c) } f'(x) = (3^{\log_2(x)})' = 3^{\log_2(x)} \times (\log_2(x))' \times \ln(3) = 3^{\log_2(x)} \times \frac{1}{x \ln(2)} \times \ln(3) = \frac{3^{\log_2(x)}}{x} \times \frac{\ln(3)}{\ln(2)} =$$

$$= \frac{3^{\log_2(x)} \log_2(3)}{x}$$

$$44. f'(x) = (x \log_3(x))' = \log_3(x) + x \frac{1}{x \ln(3)} = \log_3(x) + \frac{1}{\ln(3)}$$

a) O declive da reta é $f'(1) = \log_3(1) + \frac{1}{\ln(3)} = \frac{1}{\ln(3)}$.

A reta passa pelo ponto $(1, f(1))$. $f(1) = 1 \times \log_3(1) = 0$. Logo, $0 = \frac{1}{\ln(3)} + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{\ln(3)}$.

A equação reduzida da reta é $y = \frac{1}{\ln(3)}x - \frac{1}{\ln(3)} \Leftrightarrow y = \frac{\ln(e)}{\ln(3)}x - \frac{\ln(e)}{\ln(3)}$, ou seja,
 $y = \log_3(e)x - \log_3(e)$.

b) Para que a reta seja paralela ao eixo das abcissas, o seu declive terá de ser 0.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log_3(x) + \frac{1}{\ln(3)} = 0 \Leftrightarrow \log_3(x) + \frac{\ln(e)}{\ln(3)} = 0 \Leftrightarrow \log_3(x) + \log_3(e) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(ex) = 0 \Leftrightarrow ex = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \log_3\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \log_3(e) \text{ é a ordenada na origem.}$$

Logo, a equação reduzida da reta é $y = -\frac{\log_3(e)}{e} \Leftrightarrow y = -\frac{\frac{\ln(e)}{\ln(3)}}{e} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{e \ln(3)}$.

$$45. a) f'(x) = \left(\ln \left[x(x+2)^4 \right] \right)' = \left(\ln(x) + \ln((x+2)^4) \right)' = \left(\ln(x) + 4 \ln(x+2) \right)' =$$

$$= \frac{1}{x} + 4 \times \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x} + \frac{4}{x+2}$$

b) $f'(x) = \left(\ln(\sqrt[5]{5x-2}) \right)' = \left(\frac{1}{5} \ln(5x-2) \right)' = \frac{1}{5} \times \frac{5}{5x-2} = \frac{1}{5x-2}$

46. a) $D_f = \mathbb{R}^+$; $f'(x) = (x^2 \ln(x))' = 2x \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x = x(2 \ln(x) + 1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 \ln(x) + 1) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{e}}{e}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right) = \left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right)^2 \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right) = \frac{e}{e^2} \ln\left(e^{\frac{1}{2}-1}\right) = \frac{1}{e} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$$

x	0	$\frac{\sqrt{e}}{e}$	$+\infty$
x	+	+	+
$2 \ln(x) + 1$	-	0	+
Sinal e zeros de f'	-	0	+
Monotonia e extremos de f	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$

f é decrescente em $\left]0, \frac{\sqrt{e}}{e}\right]$ e é crescente em $\left[\frac{\sqrt{e}}{e}, +\infty\right[$; $f\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right) = -\frac{1}{2e}$ é mínimo.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x(2\ln(x) + 1))' = 0 \Leftrightarrow 2\ln(x) + 1 + x \times \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow 2\ln(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e\sqrt{e}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{e}}{e^2}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{e}}{e^2}\right) = \left(\frac{\sqrt{e}}{e^2}\right)^2 \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{e^2}\right) = \frac{e}{e^4} \ln\left(e^{\frac{1}{2}-2}\right) = \frac{1}{e^3} \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2e^3}$$

x	0	$\frac{\sqrt{e}}{e^2}$	$+\infty$
Sinal e zeros de f''	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		$-\frac{3}{2e^3}$	

O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0, \frac{\sqrt{e}}{e^2}\right]$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left[\frac{\sqrt{e}}{e^2}, +\infty\right[$; o ponto de coordenadas $\left(\frac{\sqrt{e}}{e^2}, -\frac{3}{2e^3}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico.

b) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \ln(x) \neq 0\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $f'(x) = \left(\frac{x}{\ln(x)}\right)' = \frac{\ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e ; f(e) = \frac{e}{\ln(e)} = e$$

x	0	1		e	$+\infty$
$\ln(x) - 1$	-	-	-	0	+
$(\ln(x))^2$	+	0	+	+	+
Sinal e zeros de f'	-	n.d.	-	0	+
Monotonia e extremos de f		n.d.		e	

f é decrescente em $]0, 1[$ e em $]1, e]$ e é crescente em $[e, +\infty[$; $f(e) = e$ é mínimo relativo.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x}(\ln(x))^2 - (\ln(x) - 1) \times 2\ln(x) \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x} \ln(x) [\ln(x) - (2\ln(x) - 2)]}{(\ln(x))^4} = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x) - 2\ln(x) + 2}{x(\ln(x))^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{-\ln(x) + 2}{x(\ln(x))^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\ln(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = e^2 ; f(e^2) = \frac{e^2}{\ln(e^2)} = \frac{e^2}{2}$$

x	0	1		e^2	$+\infty$
$-\ln(x)+2$	+	+	+	0	-
x	+	+	+	+	+
$(\ln(x))^3$	-	0	+	+	+
Sinal e zeros de f''	-	n.d.	+	0	-
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		n.d.		$\frac{e^2}{2}$	

O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]0,1[$ e em $[e^2, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]1, e^2]$; o ponto de coordenadas $\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico.

$$47. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(e^x)^2}{3x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{e^x}{x} \right)^2 \right) = \frac{1}{3} \times (+\infty)^2 = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x+e} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{x+e}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e}{x} \right)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (xe^{\frac{1}{x}}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \right) \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 2e^x}{2e^{2x} + x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} \left(1 + \frac{2}{e^x} \right)}{e^{2x} \left(2 + \frac{x}{e^{2x}} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{e^x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{x}{e^{2x}} \right)} = \frac{1+0}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{e^{2x}} \right)} = \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}} \right)} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\lim_{2x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{2x}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2} \times 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x) - \ln(e^x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{x}{e^x}\right) \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) \right] = \\ &= \ln \left[\frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right)} \right] = \ln(0^+) = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_3(x)}{\log_5(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{\ln(3)}}{\frac{\ln(x)}{\ln(5)}} = \frac{\ln(5)}{\ln(3)} = \log_3(5)$$

4. Resolução de problemas e modelos exponenciais

48.

$$\begin{aligned} \text{a) } g'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln[(1+h)^2]}{1+h} - \frac{\ln(1^2)}{1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln[(1+h)^2] - \ln(1)}{h(1+h)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\ln(1+h)}{h(1+h)} \stackrel{\ln(1+h)=y}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y}{(e^y - 1)e^y} \stackrel{\Leftrightarrow h=e^y-1}{=} \frac{2}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0} e^y} = \frac{2}{1 \times 1} = 2 \end{aligned}$$

b) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; como g é contínua em todo o seu domínio, apenas a reta de equação $x=0$ poderá ser assíntota vertical ao gráfico de g . $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2)}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$. Uma vez que tal acontece, podemos imediatamente afirmar que a reta de equação $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} \stackrel{y=x^2}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 2 \times 0 = 0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g , quando x tende para $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} \stackrel{y=x^2}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} \stackrel{y=-x}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(-y)^2}{-y} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)^2}{y} = -2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = -2 \times 0 = 0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g , quando x tende para $-\infty$.

As assíntotas ao gráfico de g são as retas de equações $x=0$ e $y=0$.

$$c) \quad g'(x) = \left(\frac{\ln(x^2)}{x} \right)' = \frac{\frac{2x}{x^2} \times x - \ln(x^2)}{x^2} = \frac{2 - \ln(x^2)}{x^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln(x^2)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln(x^2) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) = 2 \Leftrightarrow x^2 = e^2 \Leftrightarrow x = \pm e$$

$$g(e) = \frac{\ln(e^2)}{e} = \frac{2}{e} \quad ; \quad g(-e) = \frac{\ln((-e)^2)}{-e} = \frac{\ln(e^2)}{-e} = \frac{2}{-e} = -\frac{2}{e}$$

x	$-\infty$	$-e$		0		e	$+\infty$
$2 - \ln(x^2)$	$-$	0	$+$	n.d.	$+$	0	$-$
x^2	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
Sinal e zeros de g'	$-$	0	$+$	n.d.	$+$	0	$-$
Monotonia e extremos de g	$\searrow$	$-\frac{2}{e}$	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$

g é decrescente em $]-\infty, -e]$ e em $[e, +\infty[$ e é crescente em $[-e, 0[$ e em $]0, e]$; $g(-e) = -\frac{2}{e}$ é mínimo relativo e $g(e) = \frac{2}{e}$ é máximo relativo.

$$g''(x) = \left(\frac{2 - \ln(x^2)}{x^2} \right)' = \frac{-\frac{2x}{x^2} \times x^2 - (2 - \ln(x^2)) \times 2x}{x^4} = \frac{-2x - (2 - \ln(x^2)) \times 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-2x(1 + 2 - \ln(x^2))}{x^4} = \frac{-2(3 - \ln(x^2))}{x^3} = \frac{-6 + 2\ln(x^2)}{x^3}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-6 + 2\ln(x^2)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow -6 + 2\ln(x^2) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) = 3 \Leftrightarrow x^2 = e^3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{e^3} \Leftrightarrow x = \pm e\sqrt{e}$$

$$g(-e\sqrt{e}) = \frac{\ln((-e\sqrt{e})^2)}{-e\sqrt{e}} = \frac{\ln(e^3)}{-e\sqrt{e}} = -\frac{3}{e\sqrt{e}} = -\frac{3\sqrt{e}}{e^2} \quad ; \quad g(e\sqrt{e}) = \frac{\ln((e\sqrt{e})^2)}{e\sqrt{e}} = \frac{\ln(e^3)}{e\sqrt{e}} = \frac{3}{e\sqrt{e}} = \frac{3\sqrt{e}}{e^2}$$

x	$-\infty$	$-e\sqrt{e}$		0		$e\sqrt{e}$	$+\infty$
$-6 + 2\ln(x^2)$	$+$	0	$-$	n.d.	$-$	0	$+$
x^3	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
Sinal e zeros de g''	$-$	0	$+$	n.d.	$-$	0	$+$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g		$-\frac{3\sqrt{e}}{e^2}$		n.d.		$\frac{3\sqrt{e}}{e^2}$	

O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -e\sqrt{e}]$ e em $]0, e\sqrt{e}]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[-e\sqrt{e}, 0[$ e em $[e\sqrt{e}, +\infty[$; os pontos de coordenadas $\left(-e\sqrt{e}, -\frac{3\sqrt{e}}{e^2}\right)$ e $\left(e\sqrt{e}, \frac{3\sqrt{e}}{e^2}\right)$ são pontos de inflexão do gráfico.

49.

a) $D_f = \mathbb{R}$; como f é contínua em todo o seu domínio, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 2) - x + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(e^x + 2) - \ln(e^x)}{x} + 1 \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln \frac{e^x + 2}{e^x}}{x} + 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln \left(1 + \frac{2}{e^x} \right)}{x} + 1 \right] = \frac{0}{+\infty} + 1 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + 2) - \ln(e^x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{e^x + 2}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{2}{e^x} \right) \right) =$$

$$= \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{e^x} \right) \right) = \ln(1) = 0$$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f , quando x tende para $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^x + 2)}{x} = \frac{\ln(2)}{-\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(e^x + 2)) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2) \right) = \ln(2)$$

A reta de equação $y = \ln(2)$ é assíntota horizontal ao gráfico de g , quando x tende para $-\infty$.

As assíntotas ao gráfico de g são as retas de equações $y = x$ e $y = \ln(2)$.

b) Seja a a abcissa do ponto A . Tem-se:

$$f(a) = 2a \Leftrightarrow \ln(e^a + 2) = 2a \Leftrightarrow e^a + 2 = e^{2a} \Leftrightarrow (e^a)^2 - e^a - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow e^a = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow e^a = -1 \vee e^a = 2 \Leftrightarrow a = \ln(2)$$

As coordenadas de A são $(\ln(2), 2\ln(2)) = (\ln(2), \ln(2^2)) = (\ln(2), \ln(4))$.

$$c_1) f'(x) = (\ln(e^x + 2))' = \frac{e^x}{e^x + 2} ; \quad m = f'(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)}}{e^{\ln(2)} + 2} = \frac{2}{2 + 2} = \frac{1}{2} ;$$

$$f(\ln(2)) = \ln(e^{\ln(2)} + 2) = \ln(2 + 2) = \ln(4) = 2\ln(2) ; \quad 2\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(2) + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}\ln(2)$$

A equação reduzida da reta t é $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\ln(2)$.

c₂) As coordenadas do ponto B são $\left(0, \frac{3}{2}\ln(2)\right)$.

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\ln(2) \Leftrightarrow x = -3\ln(2)$$

As coordenadas do ponto C são $(-3\ln(2), 0)$.

$$\text{A área do triângulo } [OBC] \text{ será } \frac{3\ln(2) \times \frac{3}{2}\ln(2)}{2} = \frac{9}{4}(\ln(2))^2 \text{ (u.a.)}.$$

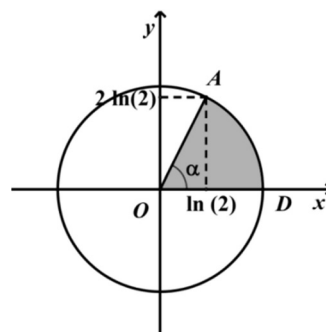
d) $A(\ln(2), \ln(4)) = (\ln(2), 2\ln(2))$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\ln(2)}{\ln(2)} = 2; \alpha = \operatorname{arctg}(2)$$

$$\overline{OA} = \sqrt{(2\ln(2))^2 + (\ln(2))^2} = \sqrt{4\ln^2(2) + \ln^2(2)} = \sqrt{5\ln^2(2)} = \sqrt{5} \ln(2)$$

A área do setor circular DOA é:

$$\frac{\operatorname{arctg}(2) \times (\sqrt{5} \ln(2))^2}{2} = \frac{5 \operatorname{arctg}(2) \times \ln^2(2)}{2} \approx 1,33 \text{ (u.a.)}$$



50.

$$f'(x) = (c \log_a(x))' = \frac{c}{x \ln(a)}$$

Designemos por b a abscissa do ponto de tangência.

$$m = f'(b) = \frac{c}{b \ln(a)}$$

Uma equação da reta t tangente será da forma $y = \frac{c}{b \ln(a)}x + d$. Como $(0,0) \in t$, vem

$$\text{que } y = \frac{c}{b \ln(a)}x.$$

Mas $(b, f(b)) \in t$ e $f(b) = c \log_a(b)$, isto é, $(b, c \log_a(b)) \in t$. Logo:

$$c \log_a(b) = \frac{c}{b \ln(a)} \times b \Leftrightarrow \log_a(b) = \frac{1}{\ln(a)} \Leftrightarrow \frac{\ln(b)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)} \Leftrightarrow \ln(b) = 1 \Leftrightarrow b = e$$

51.

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \ln^2(x) - 1 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \left(x \leq \frac{1}{e} \vee x \geq e\right)\right\} = \left]0, \frac{1}{e}\right] \cup [e, +\infty[$

$$\ln^2(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln^2(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = \pm 1 \Leftrightarrow x = e \vee x = e^{-1} \Leftrightarrow x = e \vee x = \frac{1}{e}$$

b) $f'(x) = \left(\sqrt{\ln^2(x) - 1}\right)' = \frac{2\ln(x) \times \frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln^2(x) - 1}} = \frac{\ln(x)}{x\sqrt{\ln^2(x) - 1}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x\sqrt{\ln^2(x) - 1}} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \wedge x \in \left]0, \frac{1}{e}\right] \cup [e, +\infty[\Leftrightarrow x = 1 \wedge x \in \left]0, \frac{1}{e}\right] \cup [e, +\infty[$$

Como 1 não pertence a $\left]0, \frac{1}{e}\right] \cup [e, +\infty[$, f' não se anula.

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \sqrt{\ln^2\left(\frac{1}{e}\right) - 1} = \sqrt{\left(\ln(e^{-1})\right)^2 - 1} = 0; \quad f(e) = \sqrt{\ln^2(e) - 1} = \sqrt{(\ln(e))^2 - 1} = 0$$

x	0	$\frac{1}{e}$		e	$+\infty$
$\ln(x)$	-	-		+	+
x	+	+		+	+
$\sqrt{\ln^2(x)-1}$	+	+		+	+
Sinal e zeros de f'	-	-		+	+
Monotonia e extremos	$\searrow$	0		0	$\nearrow$

A função é decrescente em $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ e é crescente em $[e, +\infty[$; 0 é mínimo absoluto e é atingido em $\frac{1}{e}$ e em e .

c) Designemos por a e b as abcissas dos pontos no gráfico de f que têm ordenada k .

$$f(a) = \sqrt{\ln^2(a)-1} = k = \sqrt{\ln^2(b)-1} = f(b)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\ln^2(a)-1} &= \sqrt{\ln^2(b)-1} \Leftrightarrow \ln^2(a)-1 = \ln^2(b)-1 \Leftrightarrow \ln^2(a) = \ln^2(b) \Leftrightarrow \ln^2(a) - \ln^2(b) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\ln(a) - \ln(b))(\ln(a) + \ln(b)) = 0 \Leftrightarrow \ln(a) - \ln(b) = 0 \vee \ln(a) + \ln(b) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b) \vee \ln(ab) = 0 \Leftrightarrow a = b \vee ab = 1 \Leftrightarrow a \times b = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = k &\Leftrightarrow \sqrt{\ln^2(x)-1} = k \Leftrightarrow \ln^2(x)-1 = k^2 \Leftrightarrow \ln^2(x) = k^2 + 1 \Leftrightarrow \ln(x) = \pm\sqrt{k^2+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = e^{\pm\sqrt{k^2+1}} \Leftrightarrow x = e^{\sqrt{k^2+1}} \vee x = e^{-\sqrt{k^2+1}} \end{aligned}$$

52.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(x) = g(x) &\Leftrightarrow 2^x - 4 = 2^{-x+5} \Leftrightarrow 2^x - 4 = \frac{2^5}{2^x} \Leftrightarrow 2^x - 4 = \frac{32}{2^x} \Leftrightarrow (2^x)^2 - 4 \times 2^x - 32 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-32)}}{2} \Leftrightarrow 2^x = \frac{4 \pm 12}{2} \Leftrightarrow 2^x = -4 \vee 2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3 \\ f(3) &= 2^3 - 4 = 4 \end{aligned}$$

As coordenadas do ponto P são $(3, 4)$.

$$\text{b)} \quad h(x) = \frac{2^{-x+5}}{2^x - 4}.$$

$$\begin{aligned} \text{b}_1) \quad D_h &= \{x \in \mathbb{R} : 2^x - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ 2^x - 4 &= 0 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

b₂) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; como h é contínua em todo o seu domínio, apenas a reta de equação $x = 2$ poderá ser assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2^{-x+5}}{2^x - 4} = \frac{2^3}{0^+} = +\infty$$

Uma vez que tal acontece, podemos imediatamente afirmar que a reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{-x+5}}{2^x - 4} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de h , quando x tende para $+\infty$.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{-x+5}}{2^x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^5}{(2^x - 4)x \times 2^x} = \lim_{\substack{y=2^{-x} \\ -x=\log_2(y) \\ x=\frac{\ln(y)}{\ln(2)}}} \frac{2^5}{\left(\frac{1}{y} - 4\right) \frac{\ln(y)}{\ln(2)} \times \frac{1}{y}} = \\ &= - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2^5}{\left(\frac{1}{y} - 4\right) \frac{1}{\ln(2)} \times \frac{\ln(y)}{y}} = -\ln(2) \times \frac{2^5}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} - 4\right) \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y}} = \frac{-\ln(2) \times 2^5}{(-4) \times 0^+} = \frac{-\ln(2) \times 2^5}{0^-} = +\infty \end{aligned}$$

O gráfico da função não admite assíntotas quando x tende para $-\infty$.

As assíntotas ao gráfico de h são as retas de equações $x = 2$ e $y = 0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{b_3)} \quad h'(x) &= \left(\frac{2^{-x+5}}{2^x - 4} \right)' = \frac{-2^{-x+5} \ln(2) (2^x - 4) - 2^{-x+5} \times 2^x \ln(2)}{(2^x - 4)^2} = \frac{-2^{-x+5} \ln(2) [2^x - 4 + 2^x]}{(2^x - 4)^2} = \\ &= \frac{-2^{-x+5} \ln(2) (2^{x+1} - 4)}{(2^x - 4)^2} \\ h'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-2^{-x+5} \ln(2) (2^{x+1} - 4)}{(2^x - 4)^2} = 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^2 \Leftrightarrow x+1 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \\ h(1) &= \frac{2^4}{2-4} = -8 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$-2^{-x+5} \ln(2)$	-	-	-	-	-
$2^{x+1} - 4$	-	0	+	+	+
$(2^x - 4)^2$	+	+	+	0	+
Sinal e zeros de h'	+	0	-	n.d.	-
Monotonia e extremos de h	$\nearrow$	-8	$\searrow$	n.d.	$\searrow$

h é crescente em $]-\infty, 1]$ e é decrescente em $[1, 2[$ e em $]2, +\infty[$; $h(1) = -8$ é máximo relativo.

53.

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{2-x} - x^2 + 3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{2-x} - 1 - x^2 + 3 + 1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{e^{2-x} - 1}{x-2} - \frac{x^2 - 4}{x-2} \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{2-x} - 1}{x-2} - \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x-2} = - \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{2-x} - 1}{2-x} - \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = - \lim_{y=2-x} \frac{e^y - 1}{y} - 4 = -1 - 4 = -5$
 $f(2) = 3 + \ln(2-1) = 3 + 0 = 3$; portanto, $f(2)$ é diferente de $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, de onde se conclui que a função não é contínua em $x = 2$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 3$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -5$, logo a reta de equação $x = 2$ não é assíntota ao gráfico da função.

Como a função é contínua, quer para $x \in]1, 2[$ quer para $x > 2$, podemos concluir que, a existir alguma assíntota vertical, tal apenas poderá acontecer no 1.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3 + \ln(x-1)) = 3 + (-\infty) = -\infty$. Uma vez que tal acontece, sabemos que a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Uma vez que o domínio de f é limitado inferiormente, a existir assíntota não vertical, tal só poderá acontecer quando x tende para $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2-x} - x^2 + 3}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{2-x}}{x^2 - 2x} - \frac{x^2 - 3}{x^2 - 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2-x}}{x^2 - 2x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2-x}}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \frac{0}{+\infty \times 1} - 1 = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{2-x} - x^2 + 3}{x-2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{2-x} - x^2 + 3 + x^2 - 2x}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{2-x} + 3 - 2x}{x-2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{2-x}}{x-2} + \frac{3-2x}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2-x}}{x-2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{x-2} = \frac{0}{+\infty} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x} = 0 - 2 = -2$$

A reta de equação $y = -x - 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f , quando x tende para $+\infty$.

As únicas assíntotas são as retas de equações $x = 1$ e $y = -x - 2$.

c) Se $1 < x \leq 2$, $f(x) = 3 + \ln(x-1)$. Logo, $f'(x) = (3 + \ln(x-1))' = \frac{1}{x-1}$, pelo que $f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\frac{3}{2}-1} = 2$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 + \ln\left(\frac{3}{2} - 1\right) = 3 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - \ln(2). \text{ Uma equação da reta } t \text{ será da forma } y = 2x + b.$$

Como o ponto de coordenadas $\left(\frac{3}{2}, 3 - \ln(2)\right)$ pertence à reta t , vem que:

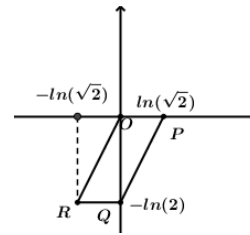
$$3 - \ln(2) = 2 \times \frac{3}{2} + b \Leftrightarrow b = -\ln(2)$$

Uma equação da reta t é $y = 2x - \ln(2)$.

$0 = 2x - \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{2} \Leftrightarrow x = \ln(\sqrt{2})$. As coordenadas de P são $(\ln(\sqrt{2}), 0)$.

As coordenadas de Q são $(0, -\ln(2))$.

As coordenadas de R são $(-\ln(\sqrt{2}), -\ln(2))$.



54.

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; como f é contínua em todo o seu domínio, apenas a reta de equação $x = 0$ poderá ser assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(2x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x(\ln(2) + \ln(x))] = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(2) + x \ln(x)) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(2)) + \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x)) = 0 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-\ln(x)}{\frac{1}{x}} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(x^{-1})}{\frac{1}{x}} \right) =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right) \underset{y = \frac{1}{x}}{=} - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(y)}{y} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \right) = \frac{0}{1 + e^{-\infty}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

Portanto, podemos afirmar que a reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de f .

Logo, o gráfico de f não admite assíntotas verticais.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \ln(2x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2x)) = +\infty$$

O gráfico de f não admite assíntotas não verticais, quando x tende para $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x(1 + e^{\frac{1}{x}})} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \right) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x - x - x e^{\frac{1}{x}}}{2(1 + e^{\frac{1}{x}})} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x(1 - e^{\frac{1}{x}})}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \right) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^{\frac{1}{x}})} \underset{y = \frac{1}{x}}{=} -\frac{1}{2} \times \frac{\lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{y} \right)}{2} = -\frac{1}{4} \times 1 = -\frac{1}{4}$$

A reta de equação $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ é assíntota não vertical do gráfico da função f quando x tende para $-\infty$. Logo, é a única assíntota ao gráfico da função f .

b) Se $x > 0$, $f'(x) = (x \ln(2x))' = \ln(2x) + x \times \frac{2}{2x} = \ln(2x) + 1$.

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(2x) + 1 = 2 \Leftrightarrow \ln(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = e \Leftrightarrow x = \frac{e}{2}$$

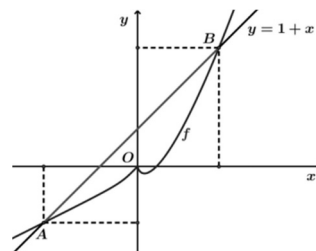
$f\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{e}{2} \ln\left(2 \frac{e}{2}\right) = \frac{e}{2}$. A equação reduzida da reta é da forma $y = 2x + b$ e passa no ponto de coordenadas $\left(\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right)$. Logo, $\frac{e}{2} = 2 \times \frac{e}{2} + b \Leftrightarrow \frac{e}{2} = e + b \Leftrightarrow b = -\frac{e}{2}$. Portanto, a equação reduzida dessa reta é $y = 2x - \frac{e}{2}$.

c) $f(x) - x = 1 \Leftrightarrow f(x) = x + 1$

As coordenadas de A são $(-2, 49; -1, 49)$.

As coordenadas de B são $(2, 16; 3, 16)$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2, 49 - 2, 16)^2 + (-1, 49 - 3, 16)^2} \approx 6,6$$



55.

a) Se $x < 1$, $f(x) = xe^x + 2x - e$.

$$f(x) = \frac{5}{2}x - e \Leftrightarrow xe^x + 2x - e = \frac{5}{2}x - e \Leftrightarrow 2xe^x + 4x = 5x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2xe^x - x = 0 \Leftrightarrow x(2e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\ln(2)$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (xe^x + 2x - e) = e + 2 - e = 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x} - x)(\sqrt{x} + x)}{(x - 1)(\sqrt{x} + x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - x^2}{(x - 1)(\sqrt{x} + x)} = -\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + x)} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x} + x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Logo, a função f não tem limite, quando x tende para 1.

c) $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{xe^x + 2x - e}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x + 2 - \frac{e}{x} \right) = 0 + 2 - 0 = 2$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x + 2x - e - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - e) = \lim_{y=-x, y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y} - e) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-\frac{y}{e^y} - e \right) = - \left(\frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} + e \right) = - \left(\frac{1}{+\infty} + e \right) = -e.$$

A equação reduzida da outra assíntota não vertical ao gráfico da função tem por equação $y = 2x - e$.

56.

a) $h(-1) = e^0 - e - 1 = 1 - e - 1 = -e$ e $h(e-1) = \frac{\ln(e-1+1)^2}{e-1} = \frac{\ln(e)^2}{e-1} = \frac{2}{e-1}$

Portanto, $h(-1) < 0$ e $h(e-1) > 0$.

Logo, $h(-1) \times h(e-1) < 0$.

b) A argumentação não é correta, pois não se pode aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy no intervalo $[-1, e-1]$ dado que a função não é contínua nesse intervalo.

Não é contínua em 0, pois:

$$h(0) = e^1 + 0 - 1 = e - 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)^2}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 2 \times 1 = 2$$

c) Para $x < 0$, a função h é contínua; para $x > 0$, a função h também é contínua.

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 2$ e como $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = e - 1$, podemos afirmar que o gráfico de h não admite assíntotas verticais.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)^2}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} \times 1 = 2 \times 0 \times 1 = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando x tende para $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{1+x} + ex - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{1+x}}{x} + e - \frac{1}{x} \right) = 0 + e - 0 = e$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - ex) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1+x} + ex - 1 - ex) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1+x} - 1) = 0 - 1 = -1$$

A reta de equação $y = ex - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h quando x tende para $-\infty$.

57.

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3 + \ln(3-x)) = 3 + \ln(1) = 3 + 0 = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (e^{x-2} + 2) = e^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ e $g(2) = 3$, logo é contínua no ponto 2.

Para que a função tenha derivada em 2 terá de existir um número real que seja igual a

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3 + \ln(3-x) - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\ln(3-x)}{x - 2} = \lim_{\substack{y = \ln(3-x) \\ 3-x = e^y \\ x = 3-e^y}} \frac{y}{1 - e^y} = - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^y - 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{x-2} + 2 - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{x-2} - 1}{x - 2} = \lim_{y=x-2} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

Não existe $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$. Logo, a função não é diferenciável em 2.

b) Se $x < 2$, $g'(x) = (3 + \ln(3 - x))' = \frac{-1}{3 - x} = -\frac{1}{3 - x}$, que não se anula.

Tem-se: $x < 2 \Leftrightarrow -x > -2 \Leftrightarrow -x + 3 > -2 + 3 \Leftrightarrow -x + 3 > 1 \Rightarrow -x + 3 > 0 \Rightarrow \frac{1}{-x + 3} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{3 - x} < 0$

Logo, para $x < 2$, $g'(x) < 0$.

Se $x > 2$, $g'(x) = (e^{x-2} + 2)' = e^{x-2}$. Logo, para $x > 2$, $g'(x) > 0$.

A função é decrescente em $]-\infty, 2]$ e é crescente em $[2, +\infty[$; $g(2) = 3$ é mínimo absoluto.

c) A condição $\ln(2 - x) + 4 \leq g(x)$ apenas está definida para $x < 2$ porque $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$. Vem então:

$$\begin{aligned} \ln(2 - x) + 4 \leq g(x) &\Leftrightarrow \ln(2 - x) + 4 \leq 3 + \ln(3 - x) \Leftrightarrow \ln(2 - x) + 1 \leq \ln(3 - x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(2 - x) + \ln(e) \leq \ln(3 - x) \Leftrightarrow \ln(2e - ex) \leq \ln(3 - x) \Leftrightarrow 2e - ex \leq 3 - x \wedge 2 - x > 0 \wedge 3 - x > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - ex \leq 3 - 2e \wedge x < 2 \wedge x < 3 \Leftrightarrow x \underbrace{(1 - e)}_{< 0} \leq 3 - 2e \wedge x < 2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{3 - 2e}{1 - e} \wedge x < 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2e - 3}{e - 1} \wedge x < 2 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2e - 3}{e - 1}, 2 \right[$$

O conjunto-solução da condição é o intervalo $\left[\frac{2e - 3}{e - 1}, 2 \right[$.

d) $x \geq 2 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-2} \geq e^0 \Leftrightarrow e^{x-2} \geq 1 \Leftrightarrow e^{x-2} + 2 \geq 1 + 2 \Leftrightarrow g(x) \geq 3$. Logo, $B = [3, +\infty[$.

Como h é crescente em $[2, +\infty[$, h é bijetiva.

$$y = e^{x-2} + 2 \Leftrightarrow y - 2 = e^{x-2} \Leftrightarrow x - 2 = \ln(y - 2) \Leftrightarrow x = \ln(y - 2) + 2 \Leftrightarrow h^{-1}(y) = 2 + \ln(y - 2)$$

Vem, então: $h^{-1}: [3, +\infty[\rightarrow [2, +\infty[$, $h^{-1}(x) = 2 + \ln(x - 2)$

58.

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0 \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

b) Uma vez que a função f é contínua em todo o seu domínio, apenas as retas de equação $x = 0$ ou $x = 1$ poderão ser assíntotas ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x - 1} = \lim_{\substack{y = \ln(x) \\ x = e^y}} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{e^y - 1} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} = 1 \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(x)}{x - 1} = \lim_{\substack{y = \ln(x) \\ x = e^y}} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{e^y - 1} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} = 1, \text{ pelo que a reta de equação } x = 1 \text{ não é assíntota}$$

ao gráfico de f .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$, pelo que a reta de equação $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Uma vez que o domínio da função é limitado inferiormente, a existirem assíntotas não verticais ao seu gráfico, tal apenas poderá ocorrer quando x tende para $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$
, pelo que a reta de equação $y=0$ é

assíntota horizontal ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$.

Assim, o gráfico de f admite duas assíntotas de equações $y=0$ e $x=0$.

c) $\frac{\ln(x)}{x-1} \geq \frac{1}{x-1} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Leftrightarrow \frac{\ln(x)-1}{x-1} \geq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
 $\ln(x)-1=0 \Leftrightarrow \ln(x)=1 \Leftrightarrow x=e$

x	0	1		e	$+\infty$
$\ln(x)-1$	-	-	-	0	+
$x-1$	-	0	+	+	+
$\frac{\ln(x)-1}{x-1}$	+	n.d.	-	0	+

Logo, $x \in]0,1[\cup]e,+\infty[$.

d) $\lim u_n = \lim \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n = \lim \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n}} \right)^n = \lim \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\lim \left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e}$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}-1} = \frac{\ln(e^{-1})}{\frac{1-e}{e}} = \frac{-1}{\frac{1-e}{e}} = -\frac{e}{1-e} = \frac{e}{e-1}$$

e) $[f(a)-f(2)] \times (a-1) = \left[\frac{\ln(a)}{a-1} - \ln(2) \right] \times (a-1) = \ln(a) - \ln(2) \times (a-1) =$
 $= \ln(a) - a\ln(2) + \ln(2) = \ln(a) + \ln(2) - \ln(2^a) = \ln(2a) - \ln(2^a) = \ln\left(\frac{2a}{2^a}\right)$

59.

a) A função f é crescente em $\mathbb{R}$, pois a função f' é positiva. O gráfico da função tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty,0]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[0,+\infty[$, pois a função f' é crescente em $]-\infty,0]$ e é decrescente em $[0,+\infty[$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f'(2)}{x - 2} = f''(2)$. $f''(2)$ é o declive da reta representada na figura.

Essa reta passa pelos pontos de coordenadas $(2,1)$ e $(0, 1 + \ln(4))$, logo o seu declive é

$$\frac{1 + \ln(4) - 1}{0 - 2} = -\frac{1}{2} \times \ln(4) = \ln\left(4^{-\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - 1}{x - 2} = f''(2) = -\ln(2)$.

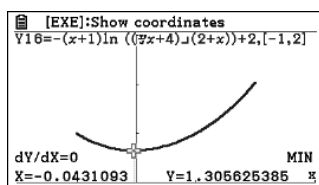
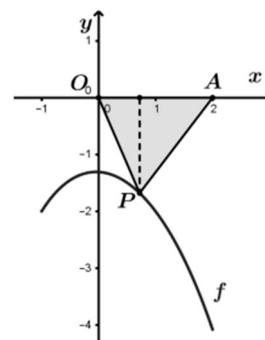
60.

Designemos as coordenadas do ponto P por $(x, f(x))$. Designemos por

A a função que nos dá a área do triângulo $[AOP]$ em função da abscissa x do ponto P .

$$A(x) = \frac{2 \times (-f(x))}{2} = -f(x) = -(x+1) \ln\left(\frac{4-x}{x+2}\right) + 2$$

O que se pretende é encontrar o mínimo da função A .



A área mínima, arredondada às décimas, é 1,3 (u.a.).

61.

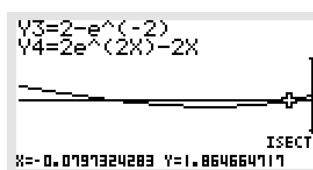
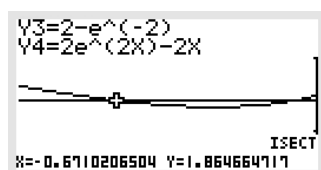
a) $f(-1) = e^{-2} - (-1)^2 = \frac{1}{e^2} - 1$; $A\left(-1, \frac{1}{e^2} - 1\right)$ e $f(0) = e^0 - 0^2 = 1$; $B(0,1)$

$$m = \frac{\frac{1}{e^2} - 1 - 1}{-1 - 0} = -\frac{1}{e^2} + 2 = 2 - e^{-2}$$

b) A função f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, em particular é contínua em $[-1,0]$ e é diferenciável em $] -1,0[$; portanto, o teorema de Lagrange permite concluir que $\exists c \in] -1,0[: f'(c) = 2 - e^{-2}$. Num ponto do gráfico cuja abscissa seja um desses valores, a reta tangente é paralela à reta AB .

c) $f'(x) = (e^{2x} - x^2)' = 2e^{2x} - 2x$

$$f'(x) = 2 - e^{-2} \Leftrightarrow 2e^{2x} - 2x = 2 - e^{-2}$$



A abscissa desse ponto poderá ser $-0,67$ ou $-0,08$.

d) $f''(x) = (2e^{2x} - 2x)' = 4e^{2x} - 2$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^{2x} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 2x = -\ln(2) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\ln(2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 4e^{2x} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 2x > -\ln(2) \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}\ln(2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > \ln\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 4e^{2x} - 2 < 0 \Leftrightarrow e^{2x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x < \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 2x < -\ln(2) \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}\ln(2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < \ln\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow x < \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow x < \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = e^{2\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} - \left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 = e^{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 = \frac{1}{2} - \left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2$$

O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), +\infty\right[$; o ponto de coordenadas $\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \frac{1}{2} - \left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2\right)$ é ponto de inflexão do gráfico da função.

62.

a) $f(0) = e^1 + e^{-1} = e + \frac{1}{e} \approx 3,1$. A altura do poste da esquerda é, aproximadamente, 3,1 metros.

b) $f(4) - f(0) = e^{-1} + e^1 - e^1 - e^{-1} = 0$. A diferença das alturas dos dois postes é 0 metros.

c) $f(x) - f(0) = 1,5 \Leftrightarrow e^{1-0,5x} + e^{0,5x-1} - e - e^{-1} = 1,5 \Leftrightarrow \frac{e}{e^{0,5x}} + \frac{e^{0,5x}}{e} - e - \frac{1}{e} = 1,5 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow e^2 + (e^{0,5x})^2 - e^2 e^{0,5x} - e^{0,5x} = 1,5 e e^{0,5x} \Leftrightarrow (e^{0,5x})^2 - e^2 e^{0,5x} - e^{0,5x} - 1,5 e e^{0,5x} + e^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (e^{0,5x})^2 + (-e^2 - 1 - 1,5e) e^{0,5x} + e^2 = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} = \frac{e^2 + 1 + 1,5e \pm \sqrt{(-e^2 - 1 - 1,5e)^2 - 4 \times e^2}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow e^{0,5x} = \frac{e^2 + 1 + 1,5e \pm \sqrt{e^4 + e^2 + 1,5e^3 + e^2 + 1 + 1,5e + 1,5e^3 + 1,5e + 2,25e^2 - 4 \times e^2}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow e^{0,5x} = \frac{e^2 + 1 + 1,5e \pm \sqrt{e^4 + 3e^3 + 0,25e^2 + 3e + 1}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 0,5x = \ln\left(\frac{e^2 + 1 + 1,5e \pm \sqrt{e^4 + 3e^3 + 0,25e^2 + 3e + 1}}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 2 \ln \left(\frac{e^2 + 1 + 1,5e + \sqrt{e^4 + 3e^3 + 0,25e^2 + 3e + 1}}{2} \right) \vee$$

$$\vee x = 2 \ln \left(\frac{e^2 + 1 + 1,5e - \sqrt{e^4 + 3e^3 + 0,25e^2 + 3e + 1}}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \approx 4,943395734 \quad \vee \quad x \approx -0,9433957339 \quad \Leftrightarrow x \approx 5.$$

A distância entre os dois postes é, aproximadamente, 5 metros.

d) Para a equação $f(x) = k$ ser possível é necessário que $k > 0$ (uma vez que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

$$f(x) = k \Leftrightarrow e^{1-0,5x} + e^{0,5x-1} = k \Leftrightarrow \frac{e}{e^{0,5x}} + \frac{e^{0,5x}}{e} = k \Leftrightarrow e^2 + (e^{0,5x})^2 - k e^{0,5x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^{0,5x})^2 - k e^{0,5x} + e^2 = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} = \frac{k e \pm \sqrt{k^2 e^2 - 4 \times e^2}}{2} \Leftrightarrow e^{0,5x} = \frac{k e \pm e \sqrt{k^2 - 4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{0,5x} = e \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2} \Leftrightarrow 0,5x = \ln \left(e \times \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right) \Leftrightarrow x = 2 \ln \left(e \times \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \left(\ln(e) + \ln \left(\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right) \right) \Leftrightarrow x = 2 \left(1 + \ln \left(\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + 2 \ln \left(\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right) \Leftrightarrow x = 2 + 2 \ln \left(\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right)$$

Por um lado tem de acontecer $\frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2} > 0 \wedge \frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} > 0$ para que existam soluções; por

outro lado, $k^2 - 4 > 0$ para que existam duas soluções; finalmente, é necessário que

$$2 + 2 \ln \left(\frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right) \geq 0 \wedge 2 + 2 \ln \left(\frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right) \geq 0.$$

$k^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow k \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$, mas como $k > 0$, vem que $k > 2$.

$$\frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2} > 0 \wedge \frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} > 0 \Leftrightarrow k + \sqrt{k^2 - 4} > 0 \wedge k - \sqrt{k^2 - 4} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 - 4} > -k \wedge \sqrt{k^2 - 4} < k$$

Como $k > 2$, vem que $\sqrt{k^2 - 4} > \underbrace{-k}_+$ é uma condição universal e $\sqrt{k^2 - 4} < k$ também é universal

porque $\sqrt{k^2 - 4} < k \Leftrightarrow k^2 - 4 < k^2 \Leftrightarrow -4 < 0$.

$$\text{Como } k > 2, \text{ vem } \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2} > 1 \Rightarrow 2 + 2 \ln \left(\frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right) > 0 \Rightarrow 2 + 2 \ln \left(\frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right) \geq 0.$$

Para $2 + 2 \ln \left(\frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right) \geq 0$, é necessário que:

$$\ln \left(\frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} \geq \frac{1}{e} \Leftrightarrow k - \sqrt{k^2 - 4} \geq \frac{2}{e} \Leftrightarrow \sqrt{k^2 - 4} \leq \underbrace{k - \frac{2}{e}}_{\text{positivo para } k > 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 4 \leq \left(k - \frac{2}{e}\right)^2 \Leftrightarrow k^2 - 4 \leq k^2 - \frac{4}{e}k + \frac{4}{e^2} \Leftrightarrow \frac{4}{e}k \leq \frac{4}{e^2} + 4 \Leftrightarrow \frac{k}{e} \leq \frac{1}{e^2} + 1 \Leftrightarrow k \leq \frac{e}{e^2} + e \Leftrightarrow k \leq e^{-1} + e$$

Portanto, $k \in]2, e + e^{-1}]$.

Outro processo de resolução:

$$f'(x) = (e^{1-0,5x} + e^{0,5x-1})' = -0,5e^{1-0,5x} + 0,5e^{0,5x-1} = -0,5(e^{1-0,5x} - e^{0,5x-1})$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,5(e^{1-0,5x} - e^{0,5x-1}) = 0 \Leftrightarrow e^{1-0,5x} - e^{0,5x-1} = 0 \Leftrightarrow e^{1-0,5x} = e^{0,5x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-0,5x = 0,5x-1 \Leftrightarrow x = 2 ; f(2) = e^0 + e^0 = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -0,5(e^{1-0,5x} - e^{0,5x-1}) > 0 \Leftrightarrow e^{1-0,5x} - e^{0,5x-1} < 0 \Leftrightarrow e^{1-0,5x} < e^{0,5x-1} \Leftrightarrow$$

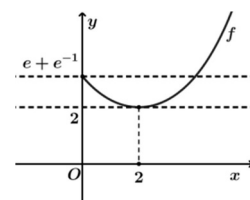
$$\Leftrightarrow 1-0,5x < 0,5x-1 \Leftrightarrow x < 2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -0,5(e^{1-0,5x} - e^{0,5x-1}) < 0 \Leftrightarrow e^{1-0,5x} - e^{0,5x-1} > 0 \Leftrightarrow e^{1-0,5x} > e^{0,5x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-0,5x > 0,5x-1 \Leftrightarrow x > 2$$

Como $x \geq 0$, a função é decrescente para $x \in [0, 2]$, crescente para $x \in [2, +\infty[$, tendo um mínimo absoluto 2 para $x = 2$. Uma vez que $f(0) = e + e^{-1}$, a equação

$f(x) = k$ tem duas soluções não negativas, quando $k \in]2, e + e^{-1}]$.



63.

a) Representa, em milhares, o n.º de litros que a empresa vende num mês, ao preço de 1,5 € por litro.

b) É o preço de venda de cada litro de sumo que proporciona a venda mensal de 10 000 litros.

$$\text{c) } L(x) = 1000 \times Q(x) \times x - 1000 \times Q(x) \times \frac{1}{2} = 1000 \times Q(x) \times \left(x - \frac{1}{2}\right) = 1000 \times (1,4 + e^{4-x}) \times \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{d) } Q(x) = N(x) \Leftrightarrow 1,4 + e^{4-x} = 1 + e^{4,2-x} \Leftrightarrow 0,4 = e^{4,2-x} - e^{4-x} \Leftrightarrow 0,4 = e^{4,2}e^{-x} - e^4e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,4 = (e^{4,2} - e^4)e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{0,4}{e^{4,2} - e^4} \Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{0,4}{e^{4,2} - e^4}\right) \Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{0,4}{e^{4,2} - e^4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{e^{4,2} - e^4}{0,4}\right) \Leftrightarrow x \approx 3,4$$

O preço de venda do litro de sumo para o qual se vendem tantos litros de uma qualidade de sumo como da outra é, aproximadamente, 3,4 euros.

64.

$$\text{a) } P(1,8) = 30 \times 10^{-0,056 \times 1,8} \approx 23,8$$

$$\text{b) } P(h) = 8 \Leftrightarrow 30 \times 10^{-0,056 \times h} = 8 \Leftrightarrow 10^{-0,056 \times h} = \frac{4}{15} \Leftrightarrow -0,056 \times h = \log\left(\frac{4}{15}\right) \Leftrightarrow h = \frac{\log\left(\frac{4}{15}\right)}{-0,056} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h \approx 10,251 \text{ km}$$

$$\text{c) } P(h) < 5 \Leftrightarrow 30 \times 10^{-0,056 \times h} < 5 \Leftrightarrow 10^{-0,056 \times h} < \frac{1}{6} \Leftrightarrow -0,056 \times h < \log\left(\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow h > \frac{\log\left(\frac{1}{6}\right)}{-0,056} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h > 13\,895,55 \text{ metros}$$

No mínimo, a 13 896 metros.

$$\text{d) } P(h+1) = k \cdot P(h) \Leftrightarrow 30 \times 10^{-0,056 \times (h+1)} = k \times 30 \times 10^{-0,056 \times h} \Leftrightarrow 10^{-0,056h-0,056} = k \times 10^{-0,056 \times h} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{-0,056h} \times 10^{-0,056} = k \times 10^{-0,056 \times h} \Leftrightarrow 10^{-0,056} = k \Leftrightarrow k \approx 0,88$$

Vem que $P(h+1) = 0,88 P(h) = (1 - 0,12)P(h) = P(h) - 0,12P(h)$, isto é, a pressão atmosférica diminui 12% por cada quilómetro de aumento de altitude.

65.

Seja (u_n) a sucessão que nos dá a quantia, em euros, que a Esperança tem ao fim de n meses.

$$u_n = 20\,000 \times 1,006^n$$

Seja (v_n) a sucessão que nos dá a quantia, em euros, do preço do carro ao fim de n meses.

$$v_n = 24\,800 \times (1 - 0,008)^n = 24\,800 \times 0,992^n$$

$$u_n \geq v_n \Leftrightarrow 20\,000 \times 1,006^n \geq 24\,800 \times 0,992^n \Leftrightarrow \frac{1,006^n}{0,992^n} \geq \frac{24\,800}{20\,000} \Leftrightarrow \left(\frac{503}{496}\right)^n \geq \frac{31}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \geq \log_{\frac{503}{496}} \frac{31}{25} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{31}{25}\right)}{\ln\left(\frac{503}{496}\right)} \Leftrightarrow n \geq 15,349$$

A Esperança poderá comprar o automóvel ao fim de 16 meses.

66.

$$\text{a) } v(0) = \frac{4000}{1 + 4e^0} = \frac{4000}{5} = 800$$

$$\text{b) } v(x) = 1500 \Leftrightarrow \frac{4000}{1 + 4e^{-0,2x}} = 1500 \Leftrightarrow \frac{4000}{1500} = 1 + 4e^{-0,2x} \Leftrightarrow e^{-0,2x} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow -0,2x = \ln\left(\frac{5}{12}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{5}{12}\right)}{-0,2} \Leftrightarrow x \approx 4,377$$

As vendas atingiram o milhar e meio no decorrer do mês de maio.

$$\text{c) } v'(x) = \left(\frac{4000}{1 + 4e^{-0,2x}}\right)' = \frac{-4000 \times 4 \times (-0,2)e^{-0,2x}}{(1 + 4e^{-0,2x})^2} = \frac{3200e^{-0,2x}}{(1 + 4e^{-0,2x})^2}, \quad 0 \leq x \leq 12$$

$$v''(x) = \left(\frac{3200e^{-0,2x}}{(1 + 4e^{-0,2x})^2}\right)' = \frac{3200 \times (-0,2)e^{-0,2x}(1 + 4e^{-0,2x})^2 - 3200e^{-0,2x} \times 2(1 + 4e^{-0,2x}) \times 4 \times (-0,2)e^{-0,2x}}{(1 + 4e^{-0,2x})^4} =$$

$$= \frac{3200 \times (-0,2) e^{-0,2x} (1 + 4e^{-0,2x}) [1 + 4e^{-0,2x} - 8e^{-0,2x}]}{(1 + 4e^{-0,2x})^4} = \frac{-640 e^{-0,2x} (1 - 4e^{-0,2x})}{(1 + 4e^{-0,2x})^3}$$

$$v''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-640 e^{-0,2x} (1 - 4e^{-0,2x})}{(1 + 4e^{-0,2x})^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - 4e^{-0,2x} = 0 \Leftrightarrow e^{-0,2x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -0,2x = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\ln(4)}{-0,2} \Leftrightarrow x \approx 7$$

$$1 - 4e^{-0,2x} > 0 \Leftrightarrow e^{-0,2x} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -0,2x < \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow x > \frac{-\ln(4)}{-0,2} \Leftrightarrow x > 7$$

$$1 - 4e^{-0,2x} < 0 \Leftrightarrow e^{-0,2x} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow -0,2x > \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow x < \frac{-\ln(4)}{-0,2} \Leftrightarrow x < 7$$

$$\text{Se } 0 \leq x \leq 7, \text{ vem que } v''(x) = \underbrace{\frac{-640 e^{-0,2x}}{(1 + 4e^{-0,2x})^3}}_{+} \underbrace{(1 - 4e^{-0,2x})}_{-} \geq 0.$$

$$\text{Se } 7 \leq x \leq 12, \text{ vem que } v''(x) = \underbrace{\frac{-640 e^{-0,2x}}{(1 + 4e^{-0,2x})^3}}_{+} \underbrace{(1 - 4e^{-0,2x})}_{+} \leq 0.$$

Se $0 \leq x \leq 7$, a concavidade do gráfico está voltada para cima, se $7 \leq x \leq 12$, a concavidade do gráfico está voltada para baixo. Para $x = 7$, o gráfico tem um ponto de inflexão.

O valor de x para o qual o ritmo de vendas começou a diminuir é 7.

67.

$$\text{a) } \frac{2}{3} \log(E) - 2,9 = 4,3 \Leftrightarrow \log(E) = \frac{54}{5} \Leftrightarrow E = 10^{\frac{54}{5}}$$

$$M_0 \times 1,6 \times 10^5 = 10^{\frac{54}{5}} \Leftrightarrow M_0 = \frac{10^{\frac{54}{5}}}{1,6 \times 10^5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_0 = \frac{1}{1,6} \times 10^{\frac{54}{5}-5} \Leftrightarrow M_0 = 0,625 \times 10^{5,8} \Leftrightarrow M_0 = 0,625 \times 10^5 \times 10^{0,8} \Leftrightarrow M_0 \approx 4 \times 10^5$$

$$\text{b) } \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \log(E_2) - 2,9 - \left[\frac{2}{3} \log(E_1) - 2,9 \right] \Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{2}{3} [\log(E_2) - \log(E_1)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \log\left(\frac{E_2}{E_1}\right) \Leftrightarrow 2 = \log\left(\frac{E_2}{E_1}\right) \Leftrightarrow 10^2 = \frac{E_2}{E_1} \Leftrightarrow E_2 = 100 E_1$$

$$\text{68. } f'(t) = (20e^{-0,01t})' = 20 \times (-0,01t)' \times e^{-0,01t} = 20 \times (-0,01) \times e^{-0,01t} = -0,01 \times 20e^{-0,01t} = -0,01f(t)$$

69.

$$\text{a)} m(t) = 50e^{-kt} ; m(1) = 49,975 \Leftrightarrow 50e^{-k} = 49,975 \Leftrightarrow e^{-k} = \frac{1999}{2000} \Leftrightarrow -k = \ln\left(\frac{1999}{2000}\right)$$

$$m(t) = 50e^{\ln\left(\frac{1999}{2000}\right) \times t} = 50\left(e^{\ln\left(\frac{1999}{2000}\right)}\right)^t = 50\left(\frac{1999}{2000}\right)^t ; m(2) = 50\left(\frac{1999}{2000}\right)^2 \approx 49,95 \text{ gramas}$$

$$\text{b)} m(t) = \frac{1}{4} \times 50 \Leftrightarrow 50\left(\frac{1999}{2000}\right)^t = \frac{1}{4} \times 50 \Leftrightarrow \left(\frac{1999}{2000}\right)^t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow t = \log_{\frac{1999}{2000}}\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{\ln\left(\frac{1999}{2000}\right)} \Leftrightarrow t \approx 2772 \text{ anos}$$

70.

$$\text{a)} m(11,3) = \frac{1}{2}m_0 \Leftrightarrow m_0e^{-11,3k} = \frac{1}{2}m_0 \Leftrightarrow e^{-11,3k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -11,3k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = \frac{\ln(2)}{11,3} \Leftrightarrow k \approx 0,06$$

Logo, $m(t) = m_0e^{-0,06t}$, sendo m_0 a massa no instante inicial.

$$\text{b)} \frac{m(t+1)}{m(t)} = \frac{m_0e^{-0,06(t+1)}}{m_0e^{-0,06t}} = \frac{e^{-0,06t-0,06}}{e^{-0,06t}} = \frac{e^{-0,06t} \times e^{-0,06}}{e^{-0,06t}} = e^{-0,06} \approx 0,94 ; m(t+1) \approx 0,94m(t)$$

A cada dia, a massa de rádio-223 reduz-se a 94% da massa do dia anterior, ou seja, perde 6% da massa que tinha.

71.

$$\text{a)} \frac{m(t+5,75)}{m(t)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m(t+5,75) = \frac{1}{2}m(t), \text{ isto é, a semivida do rádio-228 é 5,75 anos.}$$

$$\text{b)} m(t+5,75) = \frac{1}{2}m(t) \Leftrightarrow m_0e^{-k(t+5,75)} = \frac{1}{2}m_0e^{-kt} \Leftrightarrow e^{-kt-5,75k} = \frac{1}{2}e^{-kt} \Leftrightarrow e^{-kt} \times e^{-5,75k} = \frac{1}{2}e^{-kt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-5,75k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -5,75k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = \frac{\ln(2)}{5,75}$$

$$m(t) = m_0e^{-\frac{\ln(2)}{5,75}t}, \text{ então } m(23) = 12 \Leftrightarrow m_0e^{-\frac{\ln(2)}{5,75} \times 23} = 12 \Leftrightarrow m_0 = \frac{12}{e^{-\frac{\ln(2)}{5,75} \times 23}} \Leftrightarrow m_0 \approx 192$$

72.

$$\text{a)} 4 = 12e^{-k\frac{1}{2}} \Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow k = 2\ln(3); \text{ então,}$$

$$M(t) = 12 \times e^{-2\ln(3)t} = 12 \times \left(e^{\ln(3)}\right)^{-2t} = 4 \times 3 \times 3^{-2t} = 4 \times 3^{-2t+1}.$$

$$\text{b) } v_{[0,1]} = \frac{M(1) - M(0)}{1 - 0} = M(1) - M(0) = 4 \times 3^{-1} - 4 \times 3 = \frac{4}{3} - 12 = -\frac{32}{3}$$

$$v_{[1,2]} = \frac{M(2) - M(1)}{2 - 1} = M(2) - M(1) = 4 \times 3^{-3} - 4 \times 3^{-1} = \frac{4}{27} - \frac{4}{3} = -\frac{32}{27}$$

Logo, $v_{[1,2]} = \frac{1}{9} \times v_{[0,1]}$.

$$\text{c) } M'(t) = (4 \times 3^{-2t+1})' = 4 \times (-2) \times 3^{-2t+1} \times \ln(3) = -8 \ln(3) \times 3^{-2t+1}$$

$$M'(1,5) = -8 \ln(3) \times 3^{-2 \times 1,5+1} = -8 \ln(3) \times 3^{-2} = -\frac{8}{9} \ln(3)$$

$$M'(3) = -8 \ln(3) \times 3^{-2 \times 3+1} = -8 \ln(3) \times 3^{-5} = -\frac{8}{243} \ln(3)$$

d) $M'(t) = -8 \ln(3) \times 3^{-2t+1} \forall t, M'(t) < 0$, pelo que a taxa de desintegração é negativa.

$M''(t) = (-8 \ln(3) \times 3^{-2t+1})' = -8 \ln(3) \times (-2) \times 3^{-2t+1} \times \ln(3) = 16 (\ln(3))^2 \times 3^{-2t+1}; \forall t, M''(t) > 0$, pelo que a taxa de desintegração está a aumentar.
Uma vez que a taxa de desintegração está a aumentar e, como é negativa, significa que a desintegração vai sendo feita de modo cada vez mais lento.

73.

$$\text{a) } P(t) = P_0 e^{kt}; P(0) = 41\,790 \wedge P(10) = 47\,917$$

Logo:

$$P(10) = 47\,917 \Leftrightarrow 41\,790 e^{10k} = 47\,917 \Leftrightarrow e^{10k} = \frac{47\,917}{41\,790} \Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{47\,917}{41\,790}\right)}{10}$$

$$P(t) = 41\,790 e^{\frac{\ln\left(\frac{47\,917}{41\,790}\right)}{10} t}, \text{ pelo que } P(5) = 41\,790 e^{\frac{\ln\left(\frac{47\,917}{41\,790}\right)}{10} \times 5} = 41\,790 e^{\frac{\ln\left(\frac{47\,917}{41\,790}\right)}{2}} \approx 44\,748,759$$

A população em 1925 seria de 44 749 habitantes.

$$\text{b) } P(20) = 41\,790 e^{\frac{\ln\left(\frac{47\,917}{41\,790}\right)}{10} \times 20} = 41\,790 e^{2 \ln\left(\frac{47\,917}{41\,790}\right)} = \frac{(47\,917)^2}{41\,790} \approx 54\,942,304$$

$$52\,143 = p \times 54\,942 \Leftrightarrow p = \frac{52\,143}{54\,942} \Leftrightarrow p \approx 0,95$$

A percentagem de erro do modelo em relação ao valor real foi de, aproximadamente, 5%.

74.

a) A taxa de mortalidade anual é, aproximadamente, de 1,5 para cada 100 habitantes, isto é, a taxa de natalidade por habitante é 0,015.

A taxa de natalidade anual é, aproximadamente, de 2 por cada 100 habitantes, isto é, 0,02 por cada habitante. Todos os anos chegam ainda ao país cerca de 100 000 novos imigrantes.

Logo, $P(t+1) = P(t) + 0,02 \times P(t) - 0,015 P(t) + 0,1 = 1,005 P(t) + 0,1$.

b) $P(t + \Delta t) = P(t) + 0,02\Delta t P(t) - 0,015\Delta t P(t) + 0,1\Delta t = P(t) + 0,005\Delta t P(t) + 0,1\Delta t$

c) $P'(t) = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \frac{\cancel{P(t)} + 0,005\Delta t P(t) + 0,1\Delta t - \cancel{P(t)}}{\Delta t} = 0,005P(t) + 0,1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow P'(t) = 0,005P(t) + 0,1 \Leftrightarrow P'(t) = \frac{1}{200}P(t) + \frac{1}{10}$

d) $P'(t) = \frac{1}{200}P(t) + \frac{1}{10} = \frac{1}{200}[P(t) + 20] = \frac{1}{200}Q(t)$

Como $Q(t) = P(t) + 20$, vem que $Q'(t) = P'(t) + 0 = P'(t)$.

Então, $Q'(t) = \frac{1}{200}Q(t)$ e, dado que $P(0) = 35$, tem-se $Q(0) = 55$ e, portanto, $Q(t) = 55e^{\frac{1}{200}t}$.

e) $Q(t) = P(t) + 20 \Leftrightarrow P(t) = Q(t) - 20$, pelo que $P(t) = 55e^{\frac{t}{200}} - 20$.

$$P(t) = 2 \times P(0) \Leftrightarrow 55e^{\frac{t}{200}} - 20 = 2 \times 35 \Leftrightarrow 55e^{\frac{t}{200}} = 90 \Leftrightarrow e^{\frac{t}{200}} = \frac{18}{11} \Leftrightarrow \frac{t}{200} = \ln\left(\frac{18}{11}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 200 \times \ln\left(\frac{18}{11}\right) \Leftrightarrow t \approx 98,495$$

Ao fim de aproximadamente 99 anos a população duplicará.

75.

a) $T(0) = 20 + 55e^0 = 75$

A temperatura do líquido no instante em que foi colocado a arrefecer é de 75 °C.

b) $T(t) \leq 55 \Leftrightarrow 20 + 55e^{-0,155t} \leq 55 \Leftrightarrow e^{-0,155t} \leq \frac{55-20}{55} \Leftrightarrow e^{-0,155t} \leq \frac{7}{11} \Leftrightarrow -0,155t \leq \ln\left(\frac{7}{11}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{\ln\left(\frac{7}{11}\right)}{-0,155} \Leftrightarrow t \geq 3$$

Tem de esperar pelo menos 3 minutos.

c) $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (20 + 55e^{-0,155t}) = 20 + 55 \times 0 = 20$

A temperatura ambiente é 20 °C.

76. $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$, $k \in \mathbb{R}^+$, T_0 é a temperatura no instante $t=0$ e T_a é a temperatura ambiente.

$$T(t) = 25 + (100 - 25)e^{-kt} = 25 + 75e^{-kt}$$

Como ao fim de três minutos a temperatura da água atinge 72 °C, vem:

$$T(3) = 72 \Leftrightarrow 25 + 75e^{-3k} = 72 \Leftrightarrow e^{-3k} = \frac{72-25}{75} \Leftrightarrow e^{-3k} = \frac{47}{75} \Leftrightarrow -3k = \ln\left(\frac{47}{75}\right) \Leftrightarrow k = -\frac{\ln\left(\frac{47}{75}\right)}{3}$$

$$T(t) = 25 + 75e^{\frac{\ln\left(\frac{47}{75}\right)}{3}t}$$

$$\begin{aligned}
T(t) = 55 &\Leftrightarrow 25 + 75e^{\frac{\ln 47}{75}t} = 55 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln 47}{75}t} = \frac{55-25}{75} \Leftrightarrow e^{\frac{\ln\left(\frac{47}{75}\right)}{3}t} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{47}{75}\right)}{3}t = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{47}{75}\right)t = 3\ln\left(\frac{2}{5}\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow t = \frac{3\ln\left(\frac{2}{5}\right)}{\ln\left(\frac{47}{75}\right)} \Leftrightarrow t \approx 6
\end{aligned}$$

Ao fim de aproximadamente 6 minutos atingirá a temperatura de 55 °C.

Tema 5 | Trigonometria e Funções Trigonométricas

1. Fórmulas trigonométricas

1.
$$\begin{aligned}\sin \frac{7\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\sin \frac{5\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \left(\sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{2\pi}{3} \right) \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= \left(\sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right) \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \left(-\cos \frac{\pi}{3} \right) \right) \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{6}{16} - \frac{2}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

3. Tem-se $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, pelo que $\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{14} \right)^2 = 1 - \frac{27}{196} = \frac{169}{196}$.
Como $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, vem $\sin \alpha = \frac{13}{14}$.
Tem-se, então:
$$\begin{aligned}\cos \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) &= \cos \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{6} \sin \alpha = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{14} - \frac{1}{2} \times \frac{13}{14} = \frac{9}{28} - \frac{13}{28} = -\frac{4}{28} = -\frac{1}{7}\end{aligned}$$

4. Tem-se $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, pelo que $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{21}{4}} = \frac{1}{\frac{25}{4}} = \frac{4}{25}$.
Tem-se $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, pelo que $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$.
Como $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$, vem $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$ e $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$.
Tem-se $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, pelo que $\cos^2 \beta = 1 - \frac{21}{121} = \frac{100}{121}$.
Como $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, vem $\cos \beta = \frac{10}{11}$.
Tem-se, então:
$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \\ &= -\frac{2}{5} \times \frac{10}{11} + \frac{\sqrt{21}}{5} \times \frac{\sqrt{21}}{11} = -\frac{20}{55} + \frac{21}{55} = \frac{1}{55}\end{aligned}$$

5. Tem-se $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, pelo que $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{9} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
Como $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$, vem $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.
$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) + \cos(2\alpha) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\frac{\sqrt{6}}{3} \right) + \frac{6}{9} - \frac{1}{3} = \\ &= -\frac{2\sqrt{18}}{9} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{6\sqrt{2}}{9} + \frac{1}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1-2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

6. $\sin(\arcsen \frac{5}{7}) = \frac{5}{7}$ e $\cos(\arccos \frac{1}{5}) = \frac{1}{5}$.
 Designemos por α o $\arcsen \frac{5}{7}$.
 Tem-se $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, pelo que $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}$.
 Como $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, vem $\cos \alpha = \frac{\sqrt{24}}{7} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$.
 Vem, então, que $\cos(\arcsen \frac{5}{7}) = \frac{2\sqrt{6}}{7}$.
 Designemos por β o $\arccos \frac{1}{5}$.
 Tem-se $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, pelo que $\sin^2 \beta = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$.
 Como $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, vem $\sin \beta = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.
 Vem, então, que $\sin(\arccos \frac{1}{5}) = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

$$\begin{aligned} \sin(\arcsen \frac{5}{7} + \arccos \frac{1}{5}) &= \sin(\arcsen \frac{5}{7}) \times \cos(\arccos \frac{1}{5}) + \\ &+ \sin(\arccos \frac{1}{5}) \times \cos(\arcsen \frac{5}{7}) = \\ &= \frac{5}{7} \times \frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{5} \times \frac{2\sqrt{6}}{7} = \frac{1}{7} + \frac{24}{35} = \frac{29}{35} \end{aligned}$$

7.

- a)
$$\frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha - (\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha)}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} =$$
- $$= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{2 \cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \operatorname{tg} \beta$$
- b)
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\sin \beta \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin \beta \cos \beta} = \frac{2 \sin(\alpha+\beta)}{2 \sin \beta \cos \beta} = \frac{2 \sin(\alpha+\beta)}{\sin(2\beta)}$$
- c)
$$\sin(2\theta) \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}{2} = 2 \sin \theta \cos \theta \frac{1}{2 \cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \operatorname{tg} \theta$$
- d)
$$(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha = 1 - \sin(2\alpha)$$
- e)
$$1 + \frac{1 - \sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{\cos(2\alpha) + 1 - \sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} =$$
- $$= \frac{2 \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha)}{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{2 \cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$$
- f)
$$\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sin^2 x \cdot \sin x - \cos^2 x \cdot \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{(1 - \cos^2 x) \cdot \sin x - (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x}{\sin x - \cos x} =$$
- $$= \frac{\sin x - \cos^2 x \cdot \sin x - \cos x + \sin^2 x \cdot \cos x}{\sin x - \cos x} =$$
- $$= \frac{\sin x - \cos x + \sin^2 x \cdot \cos x - \cos^2 x \cdot \sin x}{\sin x - \cos x} = 1 + \frac{\sin^2 x \cdot \cos x - \cos^2 x \cdot \sin x}{\sin x - \cos x} =$$
- $$= 1 + \frac{\sin x \cos x (\sin x - \cos x)}{\sin x - \cos x} = 1 + \sin x \cos x = 1 + \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$\text{g)} \quad \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \left(2 \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} = 2 \cos \frac{x}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad \cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos(2x) \cos x - \operatorname{sen}(2x) \operatorname{sen} x = \\ &= (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{sen} x = \\ &= \cos^3 x - \operatorname{sen}^2 x \cos x - 2 \operatorname{sen}^2 x \cos x = \\ &= \cos^3 x - 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x = \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{aligned}$$

8.

$$\text{a)} \quad \frac{1 + \cos(2x)}{2} = \frac{1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{2} = \frac{2 \cos^2 x}{2} = \cos^2 x$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \text{Tem-se } \cos^2 \frac{3\pi}{8} &= \frac{1 + \cos\left(2 \times \frac{3\pi}{8}\right)}{2} = \frac{1 + \cos \frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)}{2} = \\ &= \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}, \text{ pelo que } \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{8} - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{8} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{8} &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{8} + 2k\pi \vee x = -\frac{3\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x &= 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos x &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- c) $3 \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{12} \Leftrightarrow 3 \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{3}{2\sqrt{3}} \operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{6} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \cos x = 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos x = 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- d) $\operatorname{sen} x + \cos x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x + \cos x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = -1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = -1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{4} \cos x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -x = -\frac{\pi}{4} + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - \pi - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- e) $2 \operatorname{sen} x - 2 \cos x - \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x - 2 \cos x = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{2}{2\sqrt{2}} \operatorname{sen} x - \frac{2}{2\sqrt{2}} \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cos \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- f) $1 - \operatorname{sen}(5x) = \left(\operatorname{sen} \frac{3x}{2} - \cos \frac{3x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}(5x) = \operatorname{sen}^2 \frac{3x}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2} + \cos^2 \frac{3x}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}(5x) = 1 - 2 \operatorname{sen} \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(5x) = \operatorname{sen}(3x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 5x = 3x + 2k\pi \vee 5x = \pi - 3x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x = 2k\pi \vee 8x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$
- g) $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1 - (2 \operatorname{sen} x \cos x)^2}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \operatorname{sen}^2(2x)}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}^2(2x) = 0 \wedge \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2(2x) = 1 \wedge \operatorname{sen} x \neq 0 \wedge \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \pm 1 \wedge \operatorname{sen} x \neq 0 \wedge \cos x \neq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

h) $\cos(2x) + 3 \cos x + 2[\cos(2x) + 2\sin^2 x] = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \cos(2x) + 3 \cos x + 2\cos(2x) + 4\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 3\cos(2x) + 3 \cos x + 4\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3(\cos^2 x - \sin^2 x) + 3 \cos x + 4(1 - \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) + 3 \cos x + 4(1 - \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 6\cos^2 x - 3 + 3 \cos x + 4 - 4\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{-3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \vee \cos x = -1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

10.

a) $2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos x - 2 \sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2 \times \frac{1}{2} \cos x - 2 \sin x \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3} \sin x - \cos x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\sqrt{3} \sin x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{3}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$

b) $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{11\pi}{6} \vee x = -\frac{5\pi}{3} \vee x = -\frac{5\pi}{6} \vee x = -\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{3} \vee$
 $\vee x = \frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{4\pi}{3}$

c) $\cos(2x) + 3 \sin x = 2 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 3 \sin x = 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x + 3 \sin x = 2 \Leftrightarrow -2 \sin^2 x + 3 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-2) \times (-1)}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow \sin x = \frac{-3 \pm 1}{-4} \Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{11\pi}{6} \vee x = -\frac{3\pi}{2} \vee x = -\frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{5\pi}{6}$

11.

a) $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

b) $2 \cos^2(x) - 1 = \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \Leftrightarrow \cos(2x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{8}\right) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{8} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x = \frac{5\pi}{8} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{24} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{5\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 12. \quad |\sin x \cdot \cos x| < \frac{1}{4} &\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < \sin x \cdot \cos x < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < 2 \sin x \cdot \cos x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \sin(2x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{5\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{\pi}{12} + k\pi \vee \frac{5\pi}{12} + k\pi < x < \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

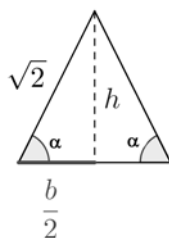
$$\begin{aligned}
 k = 0 &\rightarrow \left(-\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12} \vee \frac{5\pi}{12} < x < \frac{7\pi}{12} \right) \wedge 0 < x < \pi \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{12} \vee \frac{5\pi}{12} < x < \frac{7\pi}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k = 1 &\rightarrow \left(-\frac{\pi}{12} + \pi < x < \frac{\pi}{12} + \pi \vee \frac{5\pi}{12} + \pi < x < \frac{7\pi}{12} + \pi \right) \wedge 0 < x < \pi \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{11\pi}{12} < x < \frac{13\pi}{12} \vee \frac{17\pi}{12} < x < \frac{19\pi}{12} \right) \wedge 0 < x < \pi \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{11\pi}{12} < x < \pi
 \end{aligned}$$

$$\text{Solução: }]0, \frac{\pi}{12}[\cup]\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}[\cup]\frac{11\pi}{12}, \pi[$$

$$\begin{aligned}
 13. \quad \cos(A) \cos(B) + \cos(C) &= \sin(A) \sin(B) \Leftrightarrow \cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B) = -\cos(C) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos(A+B) = -\cos(C) \Leftrightarrow \cos(\pi - C) = -\cos(C), \text{ o que é verdade}
 \end{aligned}$$

14.

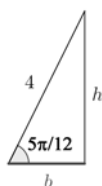


$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow h = \sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{b}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow b = 2\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \frac{b \times h}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cos \alpha \times \sqrt{2} \sin \alpha}{2} = \\
 &= 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)
 \end{aligned}$$

15.

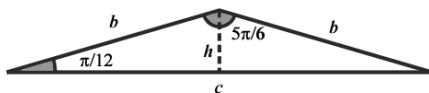


$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{h}{4} \Leftrightarrow h = 4 \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{b}{4} \Leftrightarrow b = 4 \cos \frac{5\pi}{12}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \frac{b \times h}{2} = \frac{4 \cos \frac{5\pi}{12} \times 4 \sin \frac{5\pi}{12}}{2} = 8 \sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \\
 &= 4 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2
 \end{aligned}$$

16.



Designemos por b as medidas dos dois lados iguais e por c a medida do terceiro lado do triângulo.

$$\text{Os ângulos internos iguais têm amplitude } \frac{\pi - \frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{12}, \text{ de onde concluímos que } \begin{cases} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{h}{b} \\ \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\frac{c}{2}}{b} \\ \frac{c \times h}{2} = 9 \end{cases}$$

Começemos por determinar o valor de $\sin \frac{\pi}{12}$ e posteriormente o valor de $\cos \frac{\pi}{12}$.

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

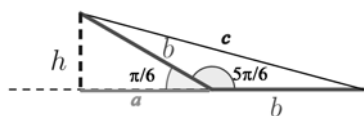
$$\text{Vem, então } \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{h}{b} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{c}{2b} \\ \frac{c \times h}{2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \times b \\ c = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \times b \\ \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \times \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \times b^2}{2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{12}}{16} - \frac{1}{8} + \frac{6}{16} - \frac{\sqrt{12}}{16} \right) b^2 = 9 \\ \frac{1}{4} b^2 = 9 \\ b^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \times 6 \\ b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6} \\ b = 6 \end{cases}$$

O perímetro do triângulo é, então, $6 + 6 + 3(\sqrt{2} + \sqrt{6}) = 12 + 3(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.

Outro processo de resolução:



$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{h}{b} \Leftrightarrow h = b \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow h = \frac{b}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Área} = 9 &\Leftrightarrow \frac{b \times h}{2} = 9 \Leftrightarrow \frac{b \times \frac{b}{2}}{2} = 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{b^2}{4} = 9 \Leftrightarrow b^2 = 36 \Leftrightarrow b = 6 \end{aligned}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a = 6 \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow a = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ e } h = \frac{6}{2} = 3$$

$$c^2 = h^2 + (a + b)^2 \Leftrightarrow c^2 = 3^2 + (3\sqrt{3} + 6)^2 \Leftrightarrow c^2 = 9 + 9(\sqrt{3} + 2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 9 + 9(3 + 4\sqrt{3} + 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 72 + 36\sqrt{3} \Leftrightarrow c^2 = 36(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow c = 6\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

O perímetro do triângulo é, então, $6 + 6 + 6\sqrt{2 + \sqrt{3}} = 12 + 6\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Vejamos que $6\sqrt{2+\sqrt{3}} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$.

$$\begin{aligned} 6\sqrt{2+\sqrt{3}} &= 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2+\sqrt{3}} = 3\sqrt{2} \times \sqrt{4+2\sqrt{3}} = 3\sqrt{2} \times \sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = \\ &= 3\sqrt{2} \times \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{2} \times (1+\sqrt{3}) = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

Outro processo de resolução:

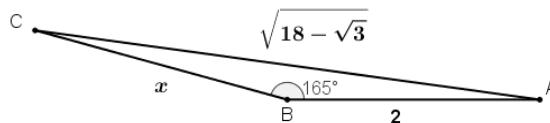
$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{h}{b} \Leftrightarrow h = b \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow h = \frac{b}{2}$$

$$\text{Área} = 9 \Leftrightarrow \frac{b \times h}{2} = 9 \Leftrightarrow \frac{b \times \frac{b}{2}}{2} = 9 \Leftrightarrow \frac{b^2}{4} = 9 \Leftrightarrow b^2 = 36 \Leftrightarrow b = 6$$

$$\begin{aligned} \text{Pela lei dos cossenos, vem que: } c^2 &= b^2 + b^2 - 2 \times b \times b \cos \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow c^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow c^2 &= 2b^2(1 - \cos \frac{5\pi}{6}) \underset{\text{como } b=6}{\Leftrightarrow} c^2 = 72\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow c^2 = 72 + 36\sqrt{3} \Leftrightarrow c^2 = 36(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow c &= 6\sqrt{2 + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

O perímetro do triângulo é, então, $6 + 6 + 6\sqrt{2 + \sqrt{3}} = 12 + 6\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

17.



$$\begin{aligned} \text{Pela lei dos cossenos vem que: } 18 - \sqrt{3} &= x^2 + 4 - 2 \times 2 \times x \cos 165^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 18 - \sqrt{3} &= x^2 + 4 - 4x \cos (180^\circ - 15^\circ) \Leftrightarrow 18 - \sqrt{3} = x^2 + 4 + 4x \cos (15^\circ) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 4 \cos (15^\circ) x + 4 - 18 + \sqrt{3} &= 0 \Leftrightarrow x^2 + 4 \cos (15^\circ) x - 14 + \sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

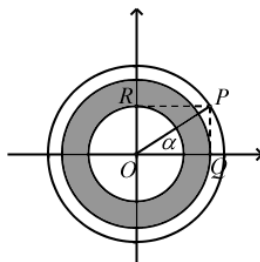
Sabemos que:

$$\begin{aligned} \cos(15^\circ) &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } x^2 + 4 \cos (15^\circ) x - 14 + \sqrt{3} &= 0 \Leftrightarrow x^2 + 4 \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) x - 14 + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{2}) x - 14 + \sqrt{3} &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times (-14+\sqrt{3})}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2} \pm \sqrt{6+2+2\sqrt{12}+56-4\sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2} \pm \sqrt{64+4\sqrt{3}-4\sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2} \pm 8}{2} \end{aligned}$$

Como $x > 0$, vem $x = \frac{8-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

18.



$P(\cos \alpha, \sin \alpha)$; $Q(\cos \alpha, 0)$; $R(0, \sin \alpha)$; $\overline{OQ} = \cos \alpha$; $\overline{OR} = \sin \alpha$
 Área da coroa circular $= \pi \cos^2 \alpha - \pi \sin^2 \alpha = \pi(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \pi \cos(2\alpha)$

2. Limites e derivadas de funções trigonométricas

19.

a)
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\pi(\sin x + \cos x)}{4x} = \frac{\pi(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4})}{4 \times \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \pi)}{x + \pi} = \frac{\cos(0 + \pi)}{0 + \pi} = \frac{\cos \pi}{\pi} = \frac{-1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}$$

c)
$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{\sin(\pi^-)} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty$$

d)
$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{1 - \cos x} = \frac{\pi - \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{1 - (-1)} = \frac{0}{2} = 0$$

e)
$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x}{1 + \cos x} = \frac{\pi}{1 + \cos \pi} = \frac{\pi}{1 + (-1)^+} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty$$

f)
$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg}((\frac{\pi}{2})^-)} = \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg}((\frac{\pi}{2})^+)} = \frac{\frac{\pi}{2}}{-\infty} = 0$$

Logo,
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 0.$$

20.

a)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x}{x} + \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 + \frac{\sin x}{x} \right) = 3 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 3 + 1 = 4$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 3 \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6x}{x} - 3 \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(6 - 3 \frac{\sin x}{x} \right) = 6 - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 6 - 3 \times 1 = 3$$

c)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + 2 \sin x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{8x}{5x} + \frac{2}{5} \times \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{8}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{8}{5} + \frac{2}{5} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{8}{5} + \frac{2}{5} \times 1 = \frac{10}{5} = 2$$

d)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 + 3x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x + 3)}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \\ &= 2 \times \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 \times 1^2 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin(6x)}{6x} = 6 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{6x} \underset{y=6x}{=} 6 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 6 \times 1 = 6$$

$$\text{g)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(8x)}{8x} = 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{8x} \underset{y=8x}{=} 2 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 2 \times 1 = 2$$

$$\text{h)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{2 \sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x}{3x}}{\frac{\sin(3x)}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x}} \underset{y=3x}{=} \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{\sin(3x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(6x)}{6x}}{\frac{\sin(3x)}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin(6x)}{6x}}{\frac{\sin(3x)}{3x}} = \frac{2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{6x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x}} \underset{y=3x; z=6x}{=} \\ &= \frac{2 \times \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z}}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}} = \frac{2 \times 1}{1} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{j)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{2x-6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{2(x-3)} \underset{y=x-3}{=} \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{k)} \quad \lim_{x \rightarrow 3\pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{3\pi - x} &\underset{y=x-3\pi; x=y+3\pi}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{y}{2})}{-y} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{y}{2}}{y} = \\ &= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} = - \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} \underset{z=\frac{y}{2}}{=} - \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = - \frac{1}{2} \times 1 = - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3x - \pi}{\sin(6x)} &\underset{y=x-\frac{\pi}{3}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3y}{\sin(6(y+\frac{\pi}{3}))} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3y}{\sin(6y+2\pi)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3y}{\sin(6y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \times 6y}{\sin(6y)} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{6y}{\sin(6y)} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin(6y)}{6y}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(6y)}{6y}} \underset{z=6y}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z}} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

21.

$$\text{a)} \quad \lim a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{4}{n}}{\frac{2}{n}} \underset{x=\frac{4}{n}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{x}{2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2 \times 1 = 2$$

$$\text{b)} \quad \lim b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{3}{2n}}{\frac{6}{5n}} \underset{x=\frac{3}{2n}; n=\frac{3}{2x}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{6}{5 \times \frac{3}{2x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{12x}{15}} = \frac{15}{12} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{5}{4} \times 1 = \frac{5}{4}$$

$$\text{c)} \quad \lim c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{2}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} \underset{x=\frac{2}{n}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{x}{2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2 \times 1 = 2$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \lim c_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{4}{3} \right)^{n+1} \sin \left[\left(\frac{3}{4} \right)^n \right] \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \left[\left(\frac{3}{4} \right)^n \right]}{\left(\frac{3}{4} \right)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \left[\left(\frac{3}{4} \right)^n \right]}{\left(\frac{3}{4} \right)^n \times \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{4}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \left[\left(\frac{3}{4} \right)^n \right]}{\left(\frac{3}{4} \right)^n} \underset{x=\left(\frac{3}{4}\right)^n}{=} \frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{4}{3} \times 1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

22.

a) Como o domínio é um conjunto limitado, a existirem assintotas do gráfico de f , elas só poderão ser verticais.

Como a função é contínua em todo o seu domínio (por ser o produto, quociente, diferença e composição de funções contínuas), apenas as retas de equação $x = 0$ e $x = \pi$ poderão ser assintotas do seu gráfico.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \operatorname{sen} x [1 + \cos(2x)]}{[1 - \cos(2x)][1 + \cos(2x)]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \operatorname{sen} x [1 + \cos(2x)]}{1 - \cos^2(2x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \operatorname{sen} x [1 + \cos(2x)]}{\operatorname{sen}^2(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(2x) \times \operatorname{sen}(2x)} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + \cos(2x)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x \operatorname{sen} x}{4x^2}}{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \times \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}} \times 2 = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{4x}}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}} \times 2 \quad \boxed{y = 2x} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y}} \times 2 = \frac{\frac{1}{4} \times 1}{1 \times 1} \times 2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left[x \times \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos(2x)} \right] = \lim_{x \rightarrow \pi^-} x \times \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos(2x)} = \\ &= \pi \times \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos(2x)} \quad \boxed{y = x - \pi} = \pi \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(y + \pi)}{1 - \cos(2(y + \pi))} = \pi \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-\operatorname{sen} y}{1 - \cos(2y + 2\pi)} = \\ &= -\pi \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{1 - \cos(2y)} = -\pi \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} y [1 + \cos(2y)]}{[1 - \cos(2y)][1 + \cos(2y)]} = \\ &= -\pi \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{1 - \cos^2(2y)} \times \lim_{y \rightarrow 0^-} [1 + \cos(2y)] = -\pi \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen}^2(2y)} \times 2 = \\ &= -2\pi \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen}(2y) \times \operatorname{sen}(2y)} = -2\pi \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\operatorname{sen} y}{4y^2}}{\frac{\operatorname{sen}(2y)}{2y} \times \frac{\operatorname{sen}(2y)}{2y}} = \\ &= -2\pi \times \frac{\frac{1}{4} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(2y)}{2y} \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(2y)}{2y}} \quad \boxed{z = 2y} = -2\pi \times \frac{\frac{1}{4} \times (-\infty) \times 1}{\lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} z}{z} \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} z}{z}} = \frac{+\infty}{1 \times 1} = +\infty\end{aligned}$$

O gráfico de f tem apenas uma assíntota vertical, de equação $x = \pi$.

b) Tem-se:

- f é contínua em todo o seu domínio, logo é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.
- $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{\pi}{6} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}{1 - \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\pi}{6} \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$, que é menor do que 1
- $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\frac{5\pi}{6} \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}}{1 - \cos \frac{5\pi}{3}} = \frac{\frac{5\pi}{6} \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5\pi}{6}$, que é maior do que 1.

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f(x) = 1$ tem, no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$, pelo menos uma solução.

23.

a)
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x^2}{1 - \cos^2 x} \times (1 + \cos x) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{1 - \cos^2 x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x} \times 2 = 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}} = \\ &= 2 \times \frac{1}{\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2} = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{bx + \operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{bx}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} = \\ &= b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{1}{\cos x} \right) = b + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} = b + 1 \times 1 = b + 1\end{aligned}$$

$$g(0) = a$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b + 1 = a \end{cases} \Leftrightarrow a = 2 \text{ e } b = 1$$

b) Como o domínio é um conjunto limitado, a existirem assíntotas do gráfico de g , elas só poderão ser verticais.

Como a função é contínua em todo o seu domínio (por ser a soma, diferença e quociente de funções contínuas), apenas as retas de equação $x = -2\pi$ e $x = \frac{\pi}{2}$ poderão ser assíntotas do seu gráfico.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{x + \operatorname{tg} x}{x} = \frac{\frac{\pi}{2} + \operatorname{tg}((\frac{\pi}{2})^-)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2} + (+\infty)}{\frac{\pi}{2}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-2\pi)^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2\pi)^+} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \frac{4\pi^2}{1 - 1^-} = \frac{4\pi^2}{0^+} = +\infty\end{aligned}$$

O gráfico de g tem duas assíntotas verticais, de equações $x = -2\pi$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

c) Tem-se $g(\frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = 1 + \frac{4}{\pi} \approx 2,3$.

Tem-se, também:

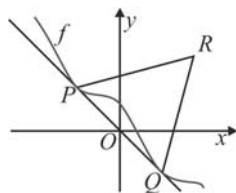
- g é contínua em todo o seu domínio, em particular é contínua em $[-\frac{2\pi}{3}, 0]$.
- $g(-\frac{2\pi}{3}) = \frac{\frac{4\pi^2}{9}}{1 - \cos(-\frac{2\pi}{3})} = \frac{\frac{4\pi^2}{9}}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{8\pi^2}{27} \approx 2,9$, que é maior do que $g(\frac{\pi}{4})$.
- $g(0) = 2$, que é menor do que $g(\frac{\pi}{4})$.

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $g(x) = g(\frac{\pi}{4})$ tem, no intervalo $[-\frac{2\pi}{3}, 0]$, pelo menos uma solução.

24.

a) $f(x + 4\pi) = 2 \cos^2(\frac{x}{2} + 2\pi) - (x + 4\pi) = 2 \cos^2(\frac{x}{2}) - x - 4\pi = f(x) - 4\pi$

b)



Começemos por determinar as coordenadas de P e de Q .

$$\begin{cases} y = 2 \cos^2(\frac{x}{2}) - x \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 2 \cos^2(\frac{x}{2}) - x \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos^2(\frac{x}{2}) = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2(\frac{x}{2}) = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\frac{x}{2}) = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ y = -x \end{cases}$$

Como $x \in [-2\pi, 2\pi]$, vem que $x = \pi \vee x = -\pi$.

Pelo que $P(-\pi, \pi)$ e $Q(\pi, -\pi)$, logo R pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Designemos por (a, a) as coordenadas de R , com $a > 0$.

$$\overline{PQ} = \sqrt{(\pi + \pi)^2 + (-\pi - \pi)^2} = \sqrt{8\pi^2} = 2\sqrt{2}\pi$$

$$\overline{PR} = 2\sqrt{2}\pi \Leftrightarrow \sqrt{(a + \pi)^2 + (a - \pi)^2} = \sqrt{8\pi^2} \Leftrightarrow (a + \pi)^2 + (a - \pi)^2 = 8\pi^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 + 2a\pi + \pi^2 + a^2 - 2a\pi + \pi^2 = 8\pi^2 \Leftrightarrow 2a^2 - 6\pi^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 3\pi^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 3\pi^2$$

Como $a > 0$, vem $a = \sqrt{3}\pi$. As coordenadas de R são $(\sqrt{3}\pi, \sqrt{3}\pi)$.

c) Tem-se:

- f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular é contínua em $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.
- $f(\frac{\pi}{3}) = 2\cos^2(\frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{3}{4} - \frac{\pi}{3} \approx 0,45$, que é maior que 0.
- $f(\frac{\pi}{2}) = 2\cos^2(\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{2} = 2 \times \frac{2}{4} - \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2} \approx -0,57$, que é menor do que 0.

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f(x) = 0$ tem, no intervalo $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$, pelo menos uma solução.

d) $D_g = \mathbb{R}^+$ $g(x) = \frac{f(x^2)}{x} = \frac{2\cos^2(\frac{x^2}{2}) - x^2}{x}$

Como o domínio é um conjunto limitado inferiormente, a existirem assíntotas do gráfico de g , elas poderão ser verticais ou não verticais (quando x tende para $+\infty$).

Como a função é contínua em todo o seu domínio (por ser a diferença, produto, quociente e composição de funções contínuas), apenas a reta de equação $x = 0$ poderá ser assíntota vertical do seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\cos^2(\frac{x^2}{2}) - x^2}{x} = \frac{2\cos^2(0)}{0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cos^2(\frac{x^2}{2}) - x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} \times 2\cos^2\left(\frac{x^2}{2}\right) - 1 \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} \times 2\cos^2\left(\frac{x^2}{2}\right) \right] - 1 \stackrel{\downarrow}{=} 0 - 1 = -1$$

$j(x) = 2\cos^2\left(\frac{x^2}{2}\right)$ é uma função limitada entre 0 e 2; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2\cos^2(\frac{x^2}{2}) - x^2}{x} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \times 2\cos^2\left(\frac{x^2}{2}\right) - x + x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \times 2\cos^2\left(\frac{x^2}{2}\right) \right] = 0$$

A reta de equação $y = -x$ é assíntota ao gráfico de g .

25.

a) $f'(2\pi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2\pi+h) - f(2\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(2\pi+h) - \sin(2\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad g'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\cos\frac{\pi}{4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos h - \sin\frac{\pi}{4}\sin h - \cos\frac{\pi}{4}}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos h - \cos\frac{\pi}{4}}{h} - \frac{\sin\frac{\pi}{4}\sin h}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos h - \cos\frac{\pi}{4}}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\frac{\pi}{4}\sin h}{h} = \\
&= -\cos\frac{\pi}{4} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-\cos h}{h} - \sin\frac{\pi}{4} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h(1+\cos h)} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 h}{h^2} \times \frac{h}{1+\cos h} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{h^2} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{1+\cos h} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \times 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

26.

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi+3h)-\sin(\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(3h)-0}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(3h)}{h} = \\
&= -3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(3h)}{3h} \underset{\boxed{y=3h}}{=} -3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = -3 \times 1 = -3
\end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad m = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3; \quad y = -3x + b$$

A reta contém o ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \pi = 0$$

Substituindo, vem $0 = -3 \times \frac{\pi}{3} + b \Leftrightarrow b = \pi$. A equação reduzida da reta é, então, $y = -3x + \pi$.

27.

$$\text{a)} \quad (2 + x + \sin x)' = 1 + \cos x$$

$$\text{b)} \quad (4 - 3x + 5x^2 - 6 \cos x)' = -3 + 10x + 6 \sin x$$

$$\text{c)} \quad (x \cos x)' = \cos x - x \sin x$$

$$\text{d)} \quad (\sin x \cos x)' = \cos x \times \cos x + \sin x(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$$

$$\text{e)} \quad \left(\frac{2 \sin x + 3 \cos x}{5}\right)' = \frac{1}{5}(2 \sin x + 3 \cos x)' = \frac{1}{5}(2 \cos x - 3 \sin x) = \frac{2 \cos x - 3 \sin x}{5}$$

$$\text{f)} \quad (\operatorname{tg} x - x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x + 1 - 1 = \operatorname{tg}^2 x$$

$$\begin{aligned}
\text{g)} \quad \left(\frac{x^6}{3} - \frac{x^4}{2} + 2x - 4 + x \operatorname{tg} x\right)' &= \frac{1}{3}(x^6)' - \frac{1}{2}(x^4)' + 2 - 0 + \operatorname{tg} x + x \times \frac{1}{\cos^2 x} = \\
&= \frac{1}{3} \times 6x^5 - \frac{1}{2} \times 4x^3 + 2 + \operatorname{tg} x + x \times \frac{1}{\cos^2 x} = 2x^5 - 2x^3 + 2 + \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

$$\text{h)} \quad \left(\frac{x + \cos x}{2}\right)' = \frac{1}{2} \times (1 - \sin x) = \frac{1 - \sin x}{2}$$

- i) $\left(\frac{x^2 + 4\operatorname{sen} x}{2}\right)' = \frac{1}{2} \times (2x + 4\cos x) = x + 2\cos x$
- j) $(\operatorname{sen}^2 x)' = 2\operatorname{sen} x \times (\operatorname{sen} x)' = 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}(2x)$
- k) $(3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x)' = 3\cos x - 3\operatorname{sen}^2 x \times (\operatorname{sen} x)' = 3\cos x - 3\operatorname{sen}^2 x \times \cos x =$
 $= 3\cos x(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 3\cos x \times \cos^2 x = 3\cos^3 x$
- l) $(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x)' = 4\operatorname{sen}^3 x \cos x + 4\cos^3 x(-\operatorname{sen} x) = 4\operatorname{sen}^3 x \cos x - 4\cos^3 x \operatorname{sen} x =$
 $= 4\operatorname{sen} x \cos x(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) = -2 \times 2\operatorname{sen} x \cos x(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) =$
 $= -2\operatorname{sen}(2x)\cos(2x) = -\operatorname{sen}(4x)$
- m) $\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)' = \frac{\cos x \times x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$
- n) $\left(\frac{x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x - x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$
- o) $\left(\frac{x + \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}\right)' = \frac{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x) - (x + \cos x) \times \cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x - x\cos x - \cos^2 x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2} =$
 $= \frac{1 - 1 - x\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2} = -\frac{x\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}$
- p) $\left(\frac{1}{1 + \cos x}\right)' = \frac{-\operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)^2}$
- q) $(2\sqrt{\cos x})' = 2 \frac{-\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}}$
- r) $(\operatorname{sen}(3x - 1))' = 3\cos(3x - 1)$
- s) $\left(\cos\left(\frac{x^6 - 3x^2}{6}\right)\right)' = -\operatorname{sen}\left(\frac{x^6 - 3x^2}{6}\right) \times \left(\frac{x^6 - 3x^2}{6}\right)' =$
 $= -\operatorname{sen}\left(\frac{x^6 - 3x^2}{6}\right) \times \frac{1}{6}(6x^5 - 6x) = (x - x^5)\operatorname{sen}\left(\frac{x^6 - 3x^2}{6}\right)$
- t) $\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x^3}{3}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{x^3}{3}\right)'}{\cos^2\left(\frac{x^3}{3}\right)} = \frac{x^2}{\cos^2\left(\frac{x^3}{3}\right)}$
- u) $(\cos^2(\frac{1}{x}))' = 2\cos(\frac{1}{x})(\cos(\frac{1}{x}))' = 2\cos(\frac{1}{x})(-\operatorname{sen}(\frac{1}{x}))(\frac{1}{x})' =$
 $= -2\cos(\frac{1}{x})\operatorname{sen}(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2} \times 2\cos(\frac{1}{x})\operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right)$
- v) $\left(\frac{x\cos(2x)}{2}\right)' = \frac{1}{2} \times (\cos(2x) + x(-2\operatorname{sen}(2x))) = \frac{\cos(2x) - 2x\operatorname{sen}(2x)}{2}$

28.

a) Tem-se: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + \frac{1}{2} \sin(2x) - \sin 0 + \sin 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[1 + \frac{\sin(2x)}{2x} \right] = 1 + 1 = 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(3x) - \sin x - \sin 0 + \sin 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\sin(3x)}{x} - \frac{\sin x}{x} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[3 \times \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin x}{x} \right] = 3 \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(3x)}{3x} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \\ &= 3 \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(3x)}{3x} - 1 = \boxed{y = 3x} \quad 3 \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} - 1 = 3 \times 1 - 1 = 2 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(0) = 2$.

b1) Se $x > 0$, $f'(x) = (\sin(3x) - \sin x)' = 3 \cos(3x) - \cos x$.

$$m = f'(2\pi) = 3 \cos(6\pi) - \cos(2\pi) = 3 - 1 = 2$$

$$y = 2x + b$$

O ponto de coordenadas $(2\pi, f(2\pi))$ pertence à reta.

$$f(2\pi) = \sin(6\pi) - \sin(2\pi) = 0$$

$$\text{Substituindo, vem } 0 = 2 \times 2\pi + b \Leftrightarrow b = -4\pi.$$

A equação reduzida da reta é $y = 2x - 4\pi$.

b2) Se $-2\pi < x < 0$, $f'(x) = (x + \frac{1}{2} \sin(2x))' = 1 + \frac{1}{2} \cos(2x) \times 2 = 1 + \cos(2x)$.

Para as retas serem paralelas os declives têm de ser iguais.

$$1 + \cos(2x) = 2 \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $x = -\pi$. O ponto P terá coordenadas $(-\pi, f(-\pi))$.

$$f(-\pi) = -\pi + \frac{1}{2} \sin(-2\pi) = -\pi$$

As coordenadas de P são então $(-\pi, -\pi)$.

29.

a) $\forall x \in D_f, f(-x) = \frac{-x - \sin(-x)}{1 + \cos(-x)} = \frac{-x + \sin x}{1 + \cos x} = -\frac{x - \sin x}{1 + \cos x} = -f(x)$

f é uma função ímpar.

b) Como o domínio é um conjunto limitado, a existirem assíntotas do gráfico de f , elas só poderão ser verticais.

Como a função é contínua em todo o seu domínio (por ser a soma, diferença e quociente de funções contínuas), apenas as retas de equação $x = -\pi$ e $x = \pi$ poderão ser assíntotas do seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow (-\pi)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\pi)^+} \frac{x - \sin x}{1 + \cos x} = \frac{-\pi - \sin(-\pi)}{1 + \cos((- \pi)^+)} = \frac{-\pi}{1 + (-1)^+} = \frac{-\pi}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{x - \sin x}{1 + \cos x} = \frac{\pi - \sin(\pi)}{1 + \cos(\pi^-)} = \frac{\pi}{1 + (-1)^+} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty$$

O gráfico de f tem duas assíntotas verticais, de equações $x = -\pi$ e $x = \pi$

c) $f'(x) = \left(\frac{x - \sin x}{1 + \cos x} \right)' = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x) - (x - \sin x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1 - \cos^2 x + x \sin x - \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} =$
 $= \frac{x \sin x}{(1 + \cos x)^2}$

No intervalo $] -\pi, \pi[$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x \sin x}{(1 + \cos x)^2} = 0 \Leftrightarrow x \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \sin x = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 0$

	$-\pi$		0		π
x	n.d.	—	0	+	n.d.
$\sin x$	n.d.	—	0	+	n.d.
$(1 + \cos x)^2$	n.d.	+	+	+	n.d.
$f'(x)$	n.d.	+	0	+	n.d.
$f(x)$	n.d.	$\nearrow$		$\nearrow$	n.d.

f é crescente em $] -\pi, \pi[$ e não tem extremos relativos.

30. $f'(x) = 3 + 2 \sin x$
 $g'(x) = 4 + 4 \sin x$

$$f'(a) = g'(a) \Leftrightarrow 3 + 2 \sin a = 4 + 4 \sin a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin a = -1 \Leftrightarrow \sin a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{\pi}{6}$$

$$f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 3 + 2 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 3 - 1 = 2 = g'\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

O declive das retas r e s é 2.

A reta r contém o ponto de coordenadas $\left(-\frac{\pi}{6}, f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ e a reta s contém o ponto de coordenadas

$$\left(-\frac{\pi}{6}, g\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + 3\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 2 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} + 4\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 4 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} - 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2\pi}{3}$$

Relativamente à reta r sabemos, então, que tem declive 2 e contém o ponto de coordenadas $\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

$y = 2x + b$, substituindo vem:

$$-\frac{\pi}{2} = 2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + b \Leftrightarrow b = -\frac{\pi}{6}$$

Uma equação da reta r é $y = 2x - \frac{\pi}{6}$. A reta r interseca o eixo Oy no ponto de ordenada $-\frac{\pi}{6}$.

$$2x - \frac{\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12}$$

A reta r interseca o eixo Ox no ponto de abscissa $\frac{\pi}{12}$.

Relativamente à reta s sabemos que tem declive 2 e contém o ponto de coordenadas $\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

$y = 2x + b$, substituindo vem:

$$-\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + b \Leftrightarrow b = -\frac{\pi}{3}$$

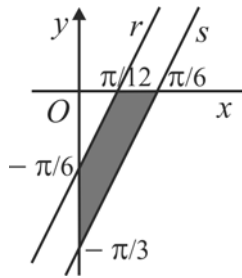
Uma equação da reta s é $y = 2x - \frac{\pi}{3}$.

A reta s interseca o eixo Oy no ponto de ordenada $-\frac{\pi}{3}$.

$$2x - \frac{\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

A reta s interseca o eixo Ox no ponto de abscissa $\frac{\pi}{6}$.

A área pretendida é a diferença entre as áreas dos dois triângulos.



$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{\frac{\pi}{6} \times \frac{\pi}{3}}{2} - \frac{\frac{\pi}{12} \times \frac{\pi}{6}}{2} = \\ &= \frac{\pi^2}{36} - \frac{\pi^2}{144} = \frac{\pi^2}{48} \end{aligned}$$

31.

- a) $h'(x) = a \cos x - b \sin x$
 $h'(x) = 0 \Leftrightarrow a \cos x - b \sin x = 0 \Leftrightarrow a \cos x = b \sin x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin x}{\cos x} \wedge x \neq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{a}{b} \wedge x \neq \frac{\pi}{2}$
 $h'(\frac{\pi}{2}) = a \cos \frac{\pi}{2} - b \sin \frac{\pi}{2} = -b \neq 0$
 Para $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\operatorname{tg} x < 0$. Como $\frac{a}{b} > 0$, concluímos que h' não se anula.
 Para $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $a \cos x < 0$ e $-b \sin x < 0$, logo $h'(x) < 0, \forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.
 h é decrescente em $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Portanto,

- o máximo da função é $h(\frac{\pi}{2}) = a \sin \frac{\pi}{2} + b \cos \frac{\pi}{2} = a + 0 = a$.
- o mínimo da função é $h(\pi) = a \sin \pi + b \cos \pi = 0 - b = -b$.

b) Tem-se:

- h é contínua em $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ por ser a soma e produto de funções contínuas.
- $h(\frac{\pi}{2}) = a$, que é maior do que 0.
- $h(\pi) = -b$, que é menor do que 0.

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a função h tem pelo menos um zero.

Como h é decrescente em $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, o zero da função h é único.

- c) Para $a = b$, tem-se $h(x) = 0 \Leftrightarrow b \sin x + b \cos x = 0 \Leftrightarrow b(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$, pelo que $C(\frac{3\pi}{4}, 0)$.

Tem-se $P(\frac{\pi}{2}, a)$ e $Q(\pi, -a)$, donde $\overrightarrow{PQ} = (\frac{\pi}{2}, -2a)$.

O declive da reta PQ é assim $\frac{-2a}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4a}{\pi}$.

$y = -\frac{4a}{\pi}x + b$. Como a reta contém, por exemplo, o ponto Q , vem:

$$-a = -\frac{4a}{\pi} \times \pi + b \Leftrightarrow b = 3a$$

Pelo que a reta PQ tem equação $y = -\frac{4a}{\pi}x + 3a$.

Como $0 = -\frac{4a}{\pi} \times \frac{3\pi}{4} + 3a$, tem-se que o ponto C pertence à reta PQ .

32.

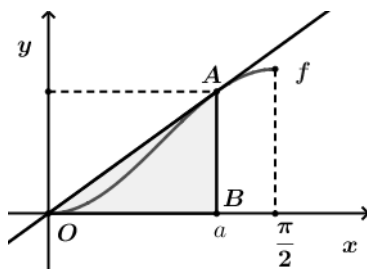
- a) $f'(x) = 2 \sin x \cos x$

Portanto, $f'(a) = 2 \sin a \cos a$, pelo que a reta r tem equação $y = (2 \sin a \cos a)x$.

Como $A(a, \sin^2 a)$ vem: $\sin^2 a = (2 \sin a \cos a)a \Leftrightarrow \sin a = 2a \cos a$, que é equivalente a $\operatorname{tg} a = 2a$.

Logo, a é solução da equação $\operatorname{tg} x = 2x$.

b)



Sabe-se que $\operatorname{tg} a = 2a \Leftrightarrow a = \frac{\operatorname{tg} a}{2}$.

$$\text{Área do triângulo } [OAB] = \frac{a \operatorname{sen}^2 a}{2} = \frac{\frac{\operatorname{tg} a}{2} \times \operatorname{sen}^2 a}{2} = \frac{\frac{\operatorname{sen} a}{2 \cos a} \times \operatorname{sen}^2 a}{2} = \frac{\operatorname{sen}^3 a}{4 \cos a}$$

33.

- a) Para $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$, f é contínua por ser a soma de duas funções contínuas.
Para $0 < x \leq \pi$, f é contínua por ser o produto e composição de funções contínuas.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{2} + \cos x \right) = 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} - x \right) \right) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$f(0) = 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$$

Logo, f é contínua em todo o seu domínio.

- b) Para $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$, $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$; $f'(x) = \frac{1}{2} - \operatorname{sen} x$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

Não existe nenhum valor de x pertencente ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 0[$ cujo seno seja $\frac{1}{2}$, portanto, no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 0[$, a derivada de f não se anula.

Para $0 < x \leq \pi$, $f(x) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} - x \right)$.

$$f'(x) = -2 \cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = 0 \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x$	+	+					
$-2 \cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right)$				-	0	+	+
$f'(x)$	+	+		-	0	+	+
$f(x)$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1

$$f \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{-\frac{\pi}{2}}{2} + \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= -\frac{\pi}{4} + 0 = -\frac{\pi}{4}$$

$$f \left(\frac{2\pi}{3} \right) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \right) =$$

$$= 2 \times \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -2$$

$$f(\pi) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} - \pi \right) =$$

$$= 2 \times \operatorname{sen} \left(-\frac{5\pi}{6} \right) = -1$$

f é crescente em $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ e em $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$ e é decrescente em $[0, \frac{2\pi}{3}]$.

f tem mínimo relativo em $-\frac{\pi}{2}$ e em $\frac{2\pi}{3}$.

Independentemente de f ter ou não derivada no ponto 0, sabemos que é contínua em 0 e que f tem máximo relativo em 0. Em π também existe máximo relativo.

- c) Tem-se:
- f é contínua, em particular é contínua em $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.
 - $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, que é menor do que 0.
 - $f(0) = 1$, que é maior do que 0.
- Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a função f tem pelo menos um zero em $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.
Como f é crescente neste intervalo, este zero é único.
- d) A equação reduzida da reta r é da forma $y = \left(\frac{1}{2} - \sin a\right)x + b$. Como o ponto de coordenadas $(a, 0)$ pertence a r , vem que $0 = \left(\frac{1}{2} - \sin a\right)a + b \Leftrightarrow b = a\left(\sin a - \frac{1}{2}\right)$.
A equação reduzida da reta r é $y = \left(\frac{1}{2} - \sin a\right)x + a\left(\sin a - \frac{1}{2}\right)$.
A ordenada do ponto de interseção desta reta com o eixo Oy é $a\left(\sin a - \frac{1}{2}\right)$.
Como a é zero da função f vem $f(a) = 0$, pelo que $\frac{a}{2} + \cos a = 0$, que é equivalente a $a = -2 \cos a$.
Portanto, a ordenada do ponto de interseção da reta r com o eixo Oy é $-2 \cos a\left(\sin a - \frac{1}{2}\right)$, que é igual a $\cos a - \sin(2a)$.

34.

- a) Para $1 < x < 2$, f é contínua por ser a soma e composição de funções contínuas. Para $2 < x \leq 8$, f é contínua por ser a soma e composição de funções contínuas.
- $$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3 + \ln(x-1)) = 3 + \ln 1 = 3 + 0 = 3$$
- $$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + \cos(x-2)) = 2 + \cos 0 = 2 + 1 = 3$$
- $$f(2) = 2 + \cos 0 = 2 + 1 = 3$$
- Logo, f é contínua em todo o seu domínio.
- b) Uma vez que o domínio de f é um conjunto majorado e minorado, o gráfico de f não admite assíntotas não verticais. Uma vez que f é contínua em $]1, 8]$, o seu gráfico, a admitir assíntota vertical, tal apenas poderá ocorrer para $x = 1$.
- $$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3 + \ln(x-1)) = 3 + \ln(0^+) = 3 + (-\infty) = -\infty$$
- O gráfico de f tem uma assíntota vertical, de equação $x = 1$.
- c) Para $x \in]2, 8]$, $f'(x) = (x + \cos(x-2))' = 1 - \sin(x-2)$.
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin(x-2) = 0 \Leftrightarrow \sin(x-2) = 1 \Leftrightarrow x-2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 2 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

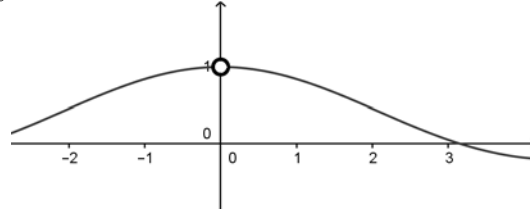
No intervalo $]2, 8]$, $f'(x)$ apenas se anula para $x = 2 + \frac{\pi}{2}$.

x	2		$2 + \frac{\pi}{2}$		8
$f'(x)$		+	0	+	+
$f(x)$	3	$\nearrow$	$2 + \frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$8 + \cos 6$

Independentemente de f ter ou não derivada no ponto 2, sabemos que é contínua em 2, e que, no intervalo dado, f tem mínimo relativo para $x = 2$.
 f é crescente em $[2, 8]$.

d) $\lim u_n = \lim \left[2 - n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right] = \lim \left[2 - \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right] \overset{y = \frac{1}{n}}{=} \\ = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(2 - \frac{\sin y}{y} \right) \underset{\downarrow}{=} 2 - 1^- = 1^+$

Gráfico de $g(x) = \frac{\sin x}{x}$



$$\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3 + \ln(x-1)) = 3 + \ln(0^+) = 3 + (-\infty) = -\infty$$

e) Para $x \in]1, 2[$, $f'(x) = (3 + \ln(x-1))' = \frac{1}{x-1}$
 $f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\frac{3}{2}-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Uma equação da reta t será do tipo $y = 2x + b$. Como a reta passa pelo ponto de coordenadas $\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$.

vem $f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 + \ln\left(\frac{3}{2} - 1\right) = 3 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - \ln(2)$

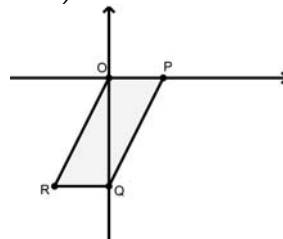
$$3 - \ln 2 = 2 \times \frac{3}{2} + b \Leftrightarrow b = -\ln 2$$

A equação reduzida da reta t será então $y = 2x - \ln(2)$.

As coordenadas de Q são $(0, -\ln(2))$.

$$0 = 2x - \ln(2) \Leftrightarrow 2x = \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln(2) \Leftrightarrow x = \ln(\sqrt{2}).$$

As coordenadas de P são $(\ln(\sqrt{2}), 0)$.



As coordenadas de R são então $(-\ln(\sqrt{2}), -\ln(2))$.

35.

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - x - a) = 1 - 0 - a = 1 - a$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - \sin(2x)) = 0 - \sin 0 = 0$$

$$g(0) = 1 - 0 - a = 1 - a$$

$$\text{Logo, } 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

b) Tem-se $g(-1) = \frac{1}{e} + 1 - 1 = \frac{1}{e} \approx 0,37$ e tem-se

• g é contínua em todo o seu domínio, em particular é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.

• $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,18$, que é menor do que $\frac{1}{e}$.

• $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - \sin(\pi) = \pi$, que é maior do que $\frac{1}{e}$.

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, a equação $g(x) = g(-1)$ tem pelo menos uma solução.

- c) A função é contínua em $\left] -\infty, \frac{3\pi}{2} \right]$, logo o seu gráfico não admite assíntotas verticais. Como o domínio é um conjunto majorado, apenas poderá existir uma assíntota não vertical do gráfico de g quando x tende para $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right) = \frac{0}{-\infty} - 1 - \frac{1}{-\infty} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x - 1 + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = 0 - 1 = -1$$

O gráfico de g tem uma assíntota oblíqua, de equação $y = -x - 1$.

- d) Para $x \leq 0$, $g'(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1$.
 $g'(\ln(\frac{2}{3})) = e^{\ln(\frac{2}{3})} - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

Para $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$, $g'(x) = (2x - \sin(2x))' = 2 - 2\cos(2x)$.

$g'(a) = 2 - 2\cos(2a)$ e $g'(a) = -\frac{1}{3} = 3$, vem então que $2 - 2\cos(2a) = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\cos(2a) = -1 \Leftrightarrow \cos(2a) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \vee 2a = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee a = \frac{2}{3}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $a \in [0, \frac{\pi}{2}]$, vem que $a = \frac{\pi}{3}$.

36. $f'(x) = 2x + 4\sin x$; $f''(x) = 2 + 4\cos x$
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + 4\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f''(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$f(x)$	n.d.		PI		n.d.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left] 0, \frac{2\pi}{3} \right]$ e voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi \right]$. O ponto de abscissa $\frac{2\pi}{3}$ é ponto de inflexão do gráfico de f .

37. $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$; $g''(x) = \frac{-2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$

Para $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, $g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sin x}{\cos^3 x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$g''(x)$	n.d.	-	0	+	n.d.
$g(x)$	n.d.		P.I.		n.d.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right]$ e voltada para cima no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$. O ponto de abscissa 0 é ponto de inflexão do gráfico de g .

38.
a1) $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$; $Q(-\cos \alpha, \sin \alpha)$; $\overline{PQ} = -2\cos \alpha$
altura = $\sin \alpha$
 $f(\alpha) = (-2\cos \alpha) \times \sin \alpha = -\sin(2\alpha)$

a2) $f(\alpha) = 1 \Leftrightarrow -\sin(2\alpha) = 1 \Leftrightarrow \sin(2\alpha) = -1 \Leftrightarrow 2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$

a3) $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right[$, $f(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -\sin(2\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2\alpha = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{6} + k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$
 $\overline{OP} = \overline{RQ} = 1$; $\overline{PQ} = -2 \cos \frac{2\pi}{3} = -2 \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$
 O perímetro é então igual a $2 + 2 = 4$.

b1) $\overline{OR} = \overline{PQ} = -2 \cos \alpha$, logo $\overline{SR} = 4 + (-2 \cos \alpha)$
 altura = $\sin \alpha$
 $g(\alpha) = \frac{4 + (-2 \cos \alpha) + (-2 \cos \alpha)}{2} \times \sin \alpha = (2 - 2 \cos \alpha) \sin \alpha = 2 \sin \alpha - \sin(2\alpha)$

b2) $g(\alpha) = 2 \sin \alpha - \sin(2\alpha)$; $g'(\alpha) = 2 \cos \alpha - 2 \cos(2\alpha)$
 $g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos \alpha - 2 \cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \cos \alpha \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2\alpha = \alpha + 2k\pi \vee 2\alpha = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \vee 3\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \vee \alpha = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
 Como $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, vem que $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Para $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right[$, $g'(\alpha) > 0$ e para $\alpha \in \left] \frac{2\pi}{3}, \pi \right[$,
 $g'(\alpha) < 0$, logo a função g tem máximo para $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

$\overline{SR} = 4 + (-2 \cos \alpha)$; $\overline{RQ} = 1$; $\overline{PQ} = -2 \cos \alpha$
 $S(-4, 0)$; $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$;
 $\overline{SP} = \sqrt{(\cos \alpha + 4)^2 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{\cos^2 \alpha + 8 \cos \alpha + 16 + \sin^2 \alpha} =$
 $= \sqrt{8 \cos \alpha + 17}$
 Perímetro = $\overline{SR} + \overline{RQ} + \overline{QP} + \overline{PS} =$
 $= 4 + (-2 \cos \frac{2\pi}{3}) + 1 - 2 \cos \frac{2\pi}{3} + \sqrt{8 \cos \frac{2\pi}{3} + 17} =$
 $= 4 + (-2(-\frac{1}{2})) + 1 - 2(-\frac{1}{2}) + \sqrt{8(-\frac{1}{2}) + 17} =$
 $= 4 + 1 + 1 + 1 + \sqrt{-4 + 17} = 7 + \sqrt{13}$

39.

a) $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$, o declive da reta OP é $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, pelo que o declive da reta t será $-\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.
 $t: y = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} x + b$
 Como $P \in t$, vem que $\sin \alpha = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cos \alpha + b \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow b = \sin \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \Leftrightarrow b = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \Leftrightarrow b = \frac{1}{\sin \alpha}$
 A equação reduzida da reta t é $y = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} x + \frac{1}{\sin \alpha}$ e $\overline{OB} = \frac{1}{\sin \alpha}$.

Determinemos a abcissa do ponto de interseção da reta t com o eixo Ox :
 $0 = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} x + \frac{1}{\sin \alpha} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\cos \alpha}$, logo $\overline{OA} = \frac{1}{\cos \alpha}$.

$f(\alpha) = \frac{\frac{1}{\cos \alpha} \times \frac{1}{\sin \alpha}}{2} = \frac{1}{\sin(2\alpha)}$

b) $f'(\alpha) = \frac{-2 \cos(2\alpha)}{\sin^2(2\alpha)}$
 $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2 \cos(2\alpha)}{\sin^2(2\alpha)} = 0 \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = 1$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	n.d.	—	0	+	n.d.
$f(x)$	n.d.	$\searrow$	1	$\nearrow$	n.d.

A área é mínima para $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e, nesse caso, a área é 1.

40.

a) $d(0) = 10 + \frac{1}{\pi} \cos 0 + 0 \times \sin 0 = 10 + \frac{1}{\pi} \approx 10,3$

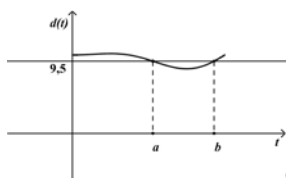
b) $d'(t) = \frac{-\pi}{\pi} \sin(\pi t) + \sin(\pi t) + \pi t \cos(\pi t) = \pi t \cos(\pi t)$
 $d'(t) = 0 \Leftrightarrow \pi t \cos(\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee \cos(\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee \pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1}{2} \vee t = \frac{3}{2}$
 $d\left(\frac{1}{2}\right) = 10 + \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10 + \frac{1}{2} = 10,5$
 $d\left(\frac{3}{2}\right) = 10 + \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{3}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 10 - \frac{3}{2} = 8,5$
 $d(2) = 10 + \frac{1}{\pi} \cos(2\pi) + 2 \sin(2\pi) = 10 + \frac{1}{\pi}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		2
$d'(t)$	0	+	0	—	0	+	+
$d(t)$	$10 + \frac{1}{\pi} \approx 10,3$	$\nearrow$	10,5	$\searrow$	8,5	$\nearrow$	$10 + \frac{1}{\pi} \approx 10,3$

A distância máxima foi atingida no instante 0,5 e foi de 10,5 m.

A distância mínima foi atingida no instante 1,5 e foi de 8,5 m.

c)



$$a \approx 1,06 ; b \approx 1,86 ; b - a \approx 0,8 \text{ minutos}; 0,8 \times 60 = 48$$

Durante 48 segundos a distância entre A e B foi inferior a 9,5 m.

41.

a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 + 0,4 e^{-0,02t} \sin t) = 1 + 0,4 \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-0,02t} \sin t) \stackrel{\downarrow}{=} 1 + 0,4 \times 0 = 1$

Tem-se que a função definida por $e^{-0,02t}$ tende para 0, quando t tende para $+\infty$.

Como a função definida por $\sin t$ é limitada, a função definida por $e^{-0,02t} \sin t$ tende para 0, quando t tende para $+\infty$. Logo, $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = 1$.

Interpretação: com o passar do tempo, a distância da esfera ao chão da sala tende a igualar 1 metro.

b) $d(t) = 1 \Leftrightarrow 1 + 0,4 e^{-0,02t} \sin t = 1 \Leftrightarrow 0,4 e^{-0,02t} \sin t = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,02t}}_{\neq 0} \sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$k = 0 \rightarrow t = 0 ; k = 1 \rightarrow t = \pi ; k = 2 \rightarrow t = 2\pi ; k = 3 \rightarrow t = 3\pi$$

$$k = 4 \rightarrow t = 4\pi \notin [0, 10]$$

Durante os primeiros dez segundos, a distância da esfera ao chão da sala foi igual a 1 metro por 4 vezes.

c)

$$d'(t) = 0 \Leftrightarrow (1 + 0,4 e^{-0,02t} \operatorname{sen} t)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 + (0,4 e^{-0,02t})' \operatorname{sen} t + 0,4 e^{-0,02t} (\operatorname{sen} t)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,4 \times 0,02 e^{-0,02t} \operatorname{sen} t + 0,4 e^{-0,02t} \cos t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,4 e^{-0,02t} (-0,02 \operatorname{sen} t + \cos t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,02 \operatorname{sen} t + \cos t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,02 \operatorname{sen} t = \cos t \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{1}{0,02} \Leftrightarrow \operatorname{tg} t = 50$$

os valores de t que anulam $\cos t$ não são soluções da equação

- d) $\operatorname{arctg}(50) \in]0, 3[$ e é o único valor que anula a derivada no intervalo $]0, 3[$ uma vez que $\operatorname{arctg}(50) + \pi \notin]0, 3[$ e $\operatorname{arctg}(50) - \pi \notin]0, 3[$.
A função d tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio e como é dito que no intervalo $]0, 3[$, a função d tem um máximo relativo, o valor de t para o qual esse máximo é atingido é $\operatorname{arctg}(50) \approx 1,55$.

3. Osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton

42.

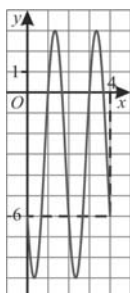
a) $D'f = [-3 - |6|, -3 + |6|] = [-9, 3]$

b) O período positivo mínimo igual a $\frac{2\pi}{|\pi|} = 2$.

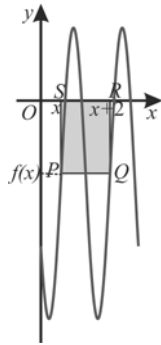
c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6 \operatorname{sen}\left(\pi x - \frac{5\pi}{6}\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\pi x - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \pi x - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \pi x - \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \pi x = \pi + 2k\pi \vee \pi x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1 + 2k \vee x = \frac{5}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$
 Como $x \in [0, 4]$, vem $x = 1 \vee x = \frac{5}{3} \vee x = 3 \vee x = \frac{11}{3}$.

d) $f\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right) - 3 = 6 \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3 = 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = -6$
 O ponto de interseção tem coordenadas $\left(\frac{2}{3}, -6\right)$.

e)



f)



$$\begin{aligned}
 T &= 2; 2 \times |f(x)| = 6 \Leftrightarrow |f(x)| = 3 \Leftrightarrow f(x) = 3 \vee f(x) = -3 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 6 \sin\left(\pi x - \frac{5\pi}{6}\right) - 3 = 3 \vee 6 \sin\left(\pi x - \frac{5\pi}{6}\right) - 3 = -3 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sin\left(\pi x - \frac{5\pi}{6}\right) = 1 \vee \sin\left(\pi x - \frac{5\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \pi x - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \pi x - \frac{5\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \pi x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \vee \pi x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} + 2k \vee x = \frac{5}{6} + k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\text{Como } x \in [0, 1], \text{ vem que } x = \frac{5}{6}.
 \end{aligned}$$

43.

a) $D'_g = [5 - |10|, 5 + |10|] = [-5, 15]$

b) Período positivo mínimo $= \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

c) $g'(x) = (10 \cos(2x + c) + 5)' = -10 \sin(2x + c) \times 2 + 0 = -20 \sin(2x + c)$
 $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -10 \Leftrightarrow -20 \sin(\pi + c) = -10 \Leftrightarrow \sin(\pi + c) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \pi + c = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \pi + c = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow c = \frac{\pi}{6} - \pi + 2k\pi \vee c = \frac{5\pi}{6} - \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow c = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee c = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 Como $c \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, vem que $c = \frac{7\pi}{6}$.

d) $g(x) = 0 \Leftrightarrow 10 \cos\left(2x + \frac{7\pi}{6}\right) + 5 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x + \frac{7\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x + \frac{7\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 Como $x \in [0, 2\pi]$, vem que $x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{3\pi}{4} \vee x = \frac{13\pi}{12} \vee x = \frac{7\pi}{4}$.

e) $T = \pi$. Designemos por x (com $x \in [0, \pi]$) a abscissa do ponto A .

As coordenadas de A são, então, $(x, g(x))$.

As coordenadas de B são, então, $(x + \pi, g(x))$.

A base $[AB]$ mede π e a altura do triângulo mede $|g(x)|$.

$$\begin{aligned}
 A_{[AOB]} &= \frac{15\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi \times |g(x)|}{2} = \frac{15\pi}{2} \Leftrightarrow |g(x)| = 15 \Leftrightarrow |10 \cos\left(2x + \frac{7\pi}{6}\right) + 5| = 15 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 10 \cos\left(2x + \frac{7\pi}{6}\right) + 5 = 15 \vee 10 \cos\left(2x + \frac{7\pi}{6}\right) + 5 = -15 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{7\pi}{6}\right) = 1 \vee \underbrace{\cos\left(2x + \frac{7\pi}{6}\right) = -2}_{\text{Condição impossível}} \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{7\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{7\pi}{6} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [0, \pi]$, vem que $x = \frac{5\pi}{12}$.

44.

a) $D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x}{3} + \frac{5\pi}{12} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
 $\frac{x}{3} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{x}{3} + \frac{5\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} + \frac{12k\pi}{12} \Leftrightarrow 4x + 5\pi = 6\pi + 12k\pi \Leftrightarrow 4x = \pi + 12k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 3k\pi$
 $D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
 $D'_h = \mathbb{R}$

b) Período positivo mínimo = $\frac{\pi}{|\frac{1}{3}|} = 3\pi$

c) $h'(x) = \left(a \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{5\pi}{12}\right) + b \right)' = a \times \frac{\frac{1}{3}}{\cos^2\left(\frac{x}{3} + \frac{5\pi}{12}\right)} + 0 = \frac{a}{3 \cos^2\left(\frac{x}{3} + \frac{5\pi}{12}\right)}$
 $h'(\pi) = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{3 \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{12}\right)} = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{3 \cos^2\frac{3\pi}{4}} = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{\frac{3}{2}} = 2 \Leftrightarrow a = 3$

$h(\pi) = 3 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{12}\right) + b = 3 \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} + b = 3(-1) + b = b - 3$

A reta de equação $y = 2x + 1 - 2\pi$ passa pelo ponto de coordenadas $(\pi, h(\pi))$, donde vem que $b - 3 = 2\pi + 1 - 2\pi \Leftrightarrow b = 4$.

d) $T = 3\pi$
 $h'(x + 3\pi) = \frac{3}{3 \cos^2\left(\frac{x+3\pi}{3} + \frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\pi + \frac{x}{3} + \frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{1}{[-\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{5\pi}{12}\right)]^2} =$
 $= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{3} + \frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{3}{3 \cos^2\left(\frac{x}{3} + \frac{5\pi}{12}\right)} = h'(x)$ logo 3π também é período da função h'

45.

a) $v(0) = 0,45 - 0,37 \cos 0 = 0,45 - 0,37 = 0,08 \text{ dm}^3$
 $v(1) = 0,45 - 0,37 \cos \frac{\pi}{2} = 0,45 - 0 = 0,45 \text{ dm}^3$

b) Período positivo mínimo = $\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{2}|} = 4$

Significado: o tempo entre duas inspirações consecutivas é 4 segundos, ou seja, um ciclo completo inspiração/expiração demora 4 segundos.

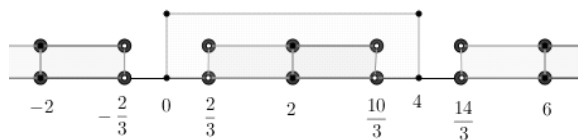
c) $D'_v = [0,45 - |-0,37|; 0,45 + |-0,37|] = [0,08, 0,82]$
 $v(t) = 0,08 \Leftrightarrow 0,45 - 0,37 \cos \frac{\pi t}{2} = 0,08 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi t}{2} = 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{\pi t}{2} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 4k, k \in \mathbb{Z}$
 $v(t) = 0,82 \Leftrightarrow 0,45 - 0,37 \cos \frac{\pi t}{2} = 0,82 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi t}{2} = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{2} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t = 2 + 4k, k \in \mathbb{Z}$

Uma inspiração demora 2 segundos.

d) $0,82 - 0,08 = 0,74 \text{ dm}^3$

e) $v(t) > 0,265 \wedge t \in [0, 4]$
 $0,45 - 0,37 \cos \frac{\pi t}{2} > 0,265 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi t}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\pi + 2k\pi < \frac{\pi t}{2} < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{3} + 2k\pi < \frac{\pi t}{2} \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -1 + 2k < \frac{t}{2} < -\frac{1}{3} + 2k \vee \frac{1}{3} + 2k < \frac{t}{2} \leq 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -2 + 4k < t < -\frac{2}{3} + 4k \vee \frac{2}{3} + 4k < t \leq 2 + 4k, k \in \mathbb{Z}$

$$-2 + 4k < t < -\frac{2}{3} + 4k \vee \frac{2}{3} + 4k < t \leq 2 + 4k, k \in \mathbb{Z} \wedge t \in [0, 4]$$



$$t \in]\frac{2}{3}, \frac{10}{3}[$$

$$\frac{10}{3} - \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,7 \text{ segundos}$$

46.

a) $D'_h = [6 - 2, 6 + 2] = [4, 8]$

A profundidade da água do mar, nesse dia e nesse local, quando ocorre uma maré alta é 8 metros.

b)
$$h(t) = 8 \Leftrightarrow 6 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) = 8 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}t + \frac{1}{3} = 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = -2 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in [0, 24[$, vem que $t = 10 \vee t = 22$.

A primeira maré alta ocorre às 10 horas.

c)
$$h(t) = 4 \Leftrightarrow 6 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) = 4 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}t + \frac{1}{3} = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 4 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in [0, 24[$, vem que $t = 4 \vee t = 16$.

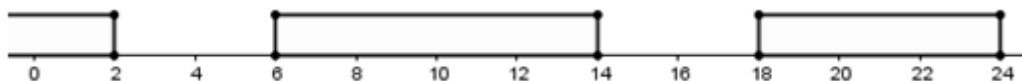
A segunda maré baixa ocorre às 16 horas.

d)
$$h(t) \geq 5 \Leftrightarrow 6 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) \geq 5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} + 2k \leq \frac{1}{6}t + \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -4 + 12k \leq t + 2 \leq 4 + 12k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6 + 12k \leq t \leq 2 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$



Como $t \in [15, 5; 24[$, nesse dia, o barco poderá sair do porto a partir das 18 horas.

47.

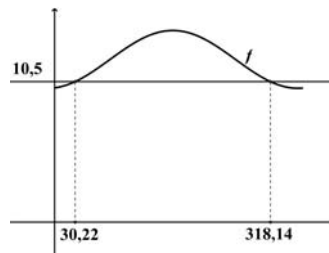
a) O dia 26 de maio é o 146.º dia do ano ($31 + 28 + 31 + 30 + 26$).

$$f(146) = 12,16 + 2,16 \sin(0,017 \times 146 + 4,893) \approx 14,0769$$

O tempo que decorre do nascer ao pôr-do-sol, no dia 26 de maio é, aproximadamente, 14 horas e 5 minutos.

O nascer do Sol, nesse dia, ocorre às 7 horas e 3 minutos (21 horas e 8 minutos – 14 horas e 5 minutos)

b)



Os dias do ano, em que o tempo que decorre do nascer ao pôr-do-sol é inferior a 10 h 30 min são:

- do dia 1 ao dia 30 (inclusive) $\rightarrow$ 30 dias $(30 - 1 + 1)$
- do dia 319 ao dia 365 (inclusive) $\rightarrow$ 47 dias $(365 - 319 + 1)$

O total é de 77 dias $(30 + 47)$.

48.

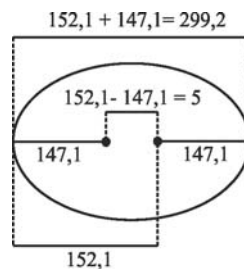
a) $t = \frac{1}{2\pi}(\pi - 0,0167 \sin \pi) = \frac{\pi - 0}{2\pi} = \frac{1}{2}$. Quando $x = \pi$, a Terra acabou de descrever metade da órbita, o que demorou meio ano.

b) $D'_d = [149,6 - 2,4983; 149,6 + 2,4983] = [147,1017; 152,0983]$

Distância máxima: 152,1 milhões de quilómetros.

Distância mínima: 147,1 milhões de quilómetros.

c)



Eixo maior: 299 milhões de quilómetros

Distância entre os focos: 5 milhões de quilómetros

d) Do dia 4 de janeiro às 14 horas ao dia 25 de fevereiro às 20 horas vão 52 dias e 6 horas, isto é, 52,25 dias.

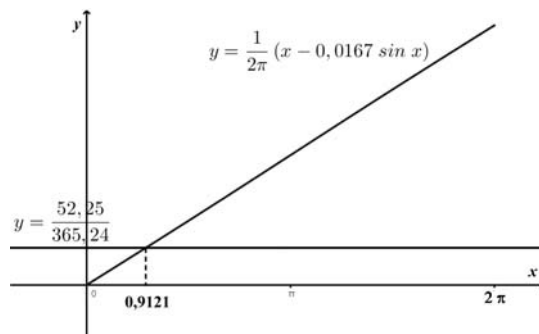
1 ano — 365,24 dias

t anos — 52,25 dias

$$t = \frac{52,25}{365,24} \text{ anos}$$

$$\frac{52,25}{365,24} = \frac{1}{2\pi}(x - 0,0167 \sin x)$$

Recorrendo à calculadora gráfica, vamos resolver esta equação.



$$d = 149,6 - 2,4983 \cos 0,9121 \approx 148,1$$

A distância a que a Terra se encontrava do Sol às 20 horas do dia 25 de fevereiro desse ano era de 148,1 milhões de quilômetros.

49.

a) Amplitude: 6 Pulsação: $\frac{\pi}{8}$ Fase: $\frac{5\pi}{4}$

b) Período: $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}} = 16$ Frequência: $\frac{1}{16}$

50.

a) Amplitude: 8 Pulsação: $\frac{\pi}{6}$ Fase: $\frac{\pi}{3}$

b) Período: $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ Frequência: $\frac{1}{12}$

c) $x(0) = 8 \cos \frac{\pi}{3} = 8 \times \frac{1}{2} = 4$

d) $x(t) = -4 \Leftrightarrow 8 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) = -4 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{6}t + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + 2k \vee \frac{1}{6}t + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t + 2 = 4 + 12k \vee t + 2 = 8 + 12k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t = 2 + 12k \vee t = 6 + 12k, k \in \mathbb{Z}$

Como $t \in [0, 20]$, vem que os instantes em que a abscissa do ponto P é igual a -4 são: 2, 6, 14 e 18 (segundos).

e) $x(t) = 0 \Leftrightarrow 8 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{6}t + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t + 2 = 3 + 6k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 1 + 6k, k \in \mathbb{Z}$

Como $t \in [0, 20]$, vem que o ponto P passa pela origem 4 vezes (nos instantes: 1, 7, 13 e 18).

f) $D' = [-8, 8]$
 $x(t) = \pm 8 \Leftrightarrow 8 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) = \pm 8 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{6}t + \frac{1}{3} = k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t + 2 = 6k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = -2 + 6k, k \in \mathbb{Z}$

Como $t \in [0, 20]$, vem que os instantes em que a distância do ponto P à origem é máxima são: 4, 10 e 16 (segundos).

$$\begin{aligned}
\text{g)} \quad x(t) < 0 &\Leftrightarrow 8 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2} + 2k < \frac{1}{6}t + \frac{1}{3} < \frac{3}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 3 + 12k < t + 2 < 9 + 12k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 1 + 12k < t < 7 + 12k, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Como $t \in [0, 20]$, vem que os intervalos de tempo em que o ponto P tem abscissa negativa são: $]1, 7[$ e $]13, 19[$.

$$\begin{aligned}
\text{h)} \quad x'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(1+h) - x(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 \cos\left(\frac{\pi}{6}(1+h) + \frac{\pi}{3}\right) - 8 \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)}{h} = \\
&= 8 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi h}{6} + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)}{h} = 8 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi h}{6} + \frac{\pi}{2}\right) - \cos \frac{\pi}{2}}{h} = \\
&= 8 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin \frac{\pi h}{6} - 0}{h} = -8 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi h}{6}}{h} = -8 \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\pi h}{6}}{\frac{\pi h}{6}} \times \frac{\pi}{6} \right) = \\
&= -\frac{4\pi}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi h}{6}}{\frac{\pi h}{6}} \stackrel{\boxed{y = \frac{\pi h}{6}}}{=} -\frac{4\pi}{3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = -\frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad x'(t) &= \left(8 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = -8 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) \times \frac{\pi}{6} = -\frac{4\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) \\
x'(t) > 0 &\Leftrightarrow -\frac{4\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \pi + 2k\pi < \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} < 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 1 + 2k < \frac{1}{6}t + \frac{1}{3} < 2 + 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 6 + 12k < t + 2 < 12 + 12k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 4 + 12k < t < 10 + 12k, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Como $t \in [0, 20]$, vem que os intervalos de tempo em que a velocidade do ponto P é positiva são: $]4, 10[$ e $]16, 20[$.

51.

a) Período: 4

$$\text{Período} = \frac{2\pi}{\text{Pulsção}} \Leftrightarrow 4 = \frac{2\pi}{\text{Pulsção}} \Leftrightarrow \text{Pulsção} = \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = A \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \phi\right)$$

$$\begin{cases} x(0) = -A \\ x(2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cos \phi = -A \\ A \cos(\pi + \phi) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \phi = -1 \\ -A \cos \phi = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \phi = -1 \\ A = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \pi \\ A = 6 \end{cases} \quad \text{Fase: } \pi \quad \text{Amplitude: } 6
\end{aligned}$$

b) Tem-se $x(t) = 6 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right)$. Portanto,

$$x(t+2) = 6 \cos\left[\frac{\pi}{2}(t+2) + \pi\right] = -6 \cos\left[\frac{\pi}{2}(t+2)\right] = -6 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = -x(t)$$

$$\text{c)} \quad x'(t) = \left(6 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right)\right)' = -6 \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) \times \frac{\pi}{2} = -3\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right)$$

$$x'(t) = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} x(t) \Leftrightarrow -3\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \times 6 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = -\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

porque os valores de t para os quais $\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = 0$ não são soluções, uma vez que não anulam $\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}t + \pi = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{2}t + 1 = -\frac{1}{3} + k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}t = -\frac{4}{3} + k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3t = -8 + 6k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = -\frac{8}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

As soluções são os valores de t que verificam: $t = -\frac{8}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z} \wedge t \in [0, 8]$

$$\text{Ou seja: } t = \frac{4}{3} \vee t = \frac{10}{3} \vee t = \frac{16}{3} \vee t = \frac{22}{3}$$

52.

a) Período = $12 - 5 = 7$; $A = \frac{5}{2}$
 Período = $\frac{2\pi}{w} \Leftrightarrow 7 = \frac{2\pi}{w} \Leftrightarrow w = \frac{2\pi}{7}$
 $f(t) = \frac{5}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{7}t + \phi\right)$ e $f(5) = \frac{5}{2}$

Vem, então:

$$\frac{5}{2} \cos\left(\frac{10\pi}{7} + \phi\right) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{10\pi}{7} + \phi\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{10\pi}{7} + \phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi = -\frac{10\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\phi \in [0, 2\pi[$, vem que $\phi = \frac{4\pi}{7}$.

A expressão analítica da função f é, assim, $f(t) = \frac{5}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{7}t + \frac{4\pi}{7}\right)$.

b) Amplitude: $\frac{5}{2}$ Pulsação: $\frac{2\pi}{7}$ Fase: $\frac{4\pi}{7}$ Período: 7 Frequência: $\frac{1}{7}$

53.

a) Tem-se $x(t) = 12 \sin\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{6}\right) = 12 \cos\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) = 12 \cos\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{5\pi}{3}\right)$.
 Portanto, trata-se de um oscilador harmónico.

b) Amplitude: 12 Pulsação: $\frac{\pi}{5}$ Fase: $\frac{5\pi}{3}$ Período = $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$
 Frequência: $\frac{1}{10}$

54.

a) $M \cos(wt) + N \sin(wt) = \frac{\sqrt{M^2+N^2}}{\sqrt{M^2+N^2}} [M \cos(wt) + N \sin(wt)] =$
 $= \sqrt{M^2 + N^2} \left[\frac{M}{\sqrt{M^2+N^2}} \cos(wt) + \frac{N}{\sqrt{M^2+N^2}} \sin(wt) \right] =$
 $= \sqrt{M^2 + N^2} [\cos \psi \cdot \cos(wt) + \sin \psi \cdot \sin(wt)] = \sqrt{M^2 + N^2} \cos(wt - \psi)$

b1) $\cos \psi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sin \psi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo $\psi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\sqrt{2} \cos(wt) + \sqrt{2} \sin(wt) = \sqrt{2+2} \cos\left(wt - \frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = 2 \cos\left(wt - \frac{\pi}{4} + 2\pi\right) =$
 $= 2 \cos\left(wt + \frac{7\pi}{4}\right)$

b2) $\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sin \psi = \frac{-1}{\sqrt{1+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, logo $\psi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\cos(wt) - \sin(wt) = \sqrt{1+1} \cos\left(wt + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(wt + \frac{\pi}{4}\right)$

b3) $\cos \psi = \frac{-1}{\sqrt{1+3}} = -\frac{1}{2}$ e $\sin \psi = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, logo $\psi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $-\cos(\omega t) - \sqrt{3} \sin(\omega t) = \sqrt{1+3} \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3} + 2\pi) = 2 \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})$

b4) $\cos \psi = \frac{-1}{\sqrt{1+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sin \psi = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo $\psi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $-\cos(\omega t) + \sin(\omega t) = \sqrt{1+1} \cos(\omega t - \frac{3\pi}{4} + 2\pi) = \sqrt{2} \cos(\omega t + \frac{5\pi}{4})$

c1) $\cos \psi = \frac{12}{\sqrt{144+25}} = \frac{12}{13}$ e $\sin \psi = \frac{5}{\sqrt{144+25}} = \frac{5}{13}$, logo $\psi \approx 0,395 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $12 \cos(3t) + 5 \sin(3t) = \sqrt{144+25} \cos(3t - 0,395 + 2\pi) = 13 \cos(3t + 5,888)$

c2) $\cos \psi = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}$ e $\sin \psi = \frac{-4}{\sqrt{9+16}} = -\frac{4}{5}$, logo $\psi \approx -0,927 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $3 \cos(\pi t) - 4 \sin(\pi t) = \sqrt{9+16} \cos(\pi t + 0,927) = 5 \cos(\pi t + 0,927)$

55.

a) $\cos \psi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sin \psi = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2+2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, logo $\psi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $x(t) = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{8}t) - \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{8}t) = \sqrt{2+2} \cos(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}) = 2 \cos(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4})$
 Portanto, trata-se de um oscilador harmônico.

b) Amplitude: 2 Pulsação: $\frac{\pi}{8}$ Fase: $\frac{\pi}{4}$ Período = $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}} = 16$ Frequência: $\frac{1}{16}$

c) $x'(t) = -2 \times \frac{\pi}{8} \sin(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4} \sin(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4})$
 $x''(t) = -\frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{8} \cos(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi^2}{32} \cos(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4})$
 $x''(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi^2}{32} \cos(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{8}t + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t + 2 = 4 + 8k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 2 + 8k, k \in \mathbb{Z}$
 Como $t \in [0, 12]$, vem que $t = 10$. Para $t \in [0, 10[$, $x''(t) > 0$ e, para $t \in]10, 12]$, $x''(t) < 0$.
 Logo, x' é crescente no intervalo $[0, 10]$, decrescente no intervalo $[10, 12]$ e tem um máximo para $t = 10$.
 O instante em que a velocidade do ponto P atinge o seu valor máximo é aos 10 segundos.

56.

a) $\cos \psi = \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\sin \psi = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, logo $\psi = 0,46 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $x(t) = 2 \cos(3,2t) + \sin(3,2t) = \sqrt{5} \cos(3,2t - 0,46 + 2\pi) = \sqrt{5} \cos(3,2t + 5,82)$
 Logo, trata-se de um oscilador harmônico.

b) Frequência = $\frac{3,2}{2\pi} \approx 0,51$

57.

a) $m = 2$; $k = 72$; $\alpha = \frac{k}{m} = \frac{72}{2} = 36$
 Logo, vem $x''(t) = -36x(t)$.

b) $w = \sqrt{\alpha} = 6$

c) $x(0) = -4$

- d) $x(t) = A \cos(6t + \phi) ; x(0) = -4 \Leftrightarrow A \cos \phi = -4$
- e) $x'(t) = (A \cos(6t + \phi))' = -6 A \sin(6t + \phi)$
- f) $x'(0) = -18$
- g) $x'(0) = -18 \Leftrightarrow -6 A \sin \phi = -18 \Leftrightarrow A \sin \phi = 3$
- h) $A \cos \phi = -4 \Rightarrow A^2 \cos^2 \phi = 16$ com $\cos \phi < 0$
 $A \sin \phi = 3 \Rightarrow A^2 \sin^2 \phi = 9$ com $\sin \phi > 0$
Sabemos, então, que $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$ e que $A^2 \cos^2 \phi + A^2 \sin^2 \phi = 16 + 9$.
 $A^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = 25 \Leftrightarrow A^2 = 25$ e, como $A > 0$, vem que $A = 5$.
- i) $x(t) = 5 \cos(6t + \phi)$ com $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$
Sabemos, também, que $5 \sin \phi = 3$, isto é, $\sin \phi = \frac{3}{5}$, pelo que $\phi \approx \pi - 0,64 \approx 2,5$.
Pelo que $x(t) = 5 \cos(6t + 2,5)$.
- j) Amplitude: 5 Pulsação: 6 Fase: 2,5
- k) Período = $\frac{2\pi}{6} \approx 1,047$ Frequência = $\frac{6}{2\pi} \approx 0,955$

58.

- a) $d(0) = 10 + 8 \sin \frac{\pi}{3} = 10 + 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10 + 4\sqrt{3} \approx 16,9 \text{ cm}$
- b) $d(t) = 6 \Leftrightarrow 10 + 8 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) = 6 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{6}t + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} + 2k \vee \frac{1}{6}t + \frac{1}{3} = \frac{7}{6} + 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t + 2 = -1 + 12k \vee t + 2 = 7 + 12k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t = -3 + 12k \vee t = 5 + 12k, k \in \mathbb{Z}$
Como $t \in [0, 20]$, vem que $t = 5 \vee t = 9 \vee t = 17$.
- c) Tem-se que a função d é contínua em todo o seu domínio, em particular, é contínua no intervalo $[7, 8]$. Tem-se que $d(7) = 10 + 8 \sin\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 10 + 8 \sin \frac{3\pi}{2} = 10 - 8 = 2$ e
 $d(8) = 10 + 8 \sin\left(\frac{8\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 10 + 8 \sin \frac{5\pi}{3} = 10 + 8 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10 - 4\sqrt{3} \approx 3,1$,
pelo que $d(7) < 2,5 < d(8)$.
Portanto, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in [7, 8] : d(c) = 2,5$.
- d) $D'_d = [10 - 8, 10 + 8] = [2, 18]$
Distância mínima: 2 cm
Distância máxima: 18 cm
- e) Ponto de equilíbrio $\rightarrow \frac{2+18}{2} = 10$
 $x(t) = d(t) - 10 = 8 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) = 8 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right) = 8 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{11\pi}{6}\right)$
Amplitude: 8 Pulsação: $\frac{\pi}{6}$ Fase: $\frac{11\pi}{6}$
Período = $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ Frequência: $\frac{1}{12}$

Tema 6 | Primitivas e Cálculo Integral

1. Noção de primitiva

1.

a) Tem-se, para qualquer x pertencente a $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= [(x-1)e^x]' = (x-1)'e^x + (e^x)'(x-1) = \\ &= e^x + e^x(x-1) = e^x + xe^x - e^x = xe^x = f(x) \end{aligned}$$

b) Como $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$, diz-se que F é uma **primitiva** de f , em $\mathbb{R}$.

2. $F(x) = x^3$ (por exemplo), porque $F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{G(x) - G(e)}{x - e} = G'(e) = g(e) = e \ln e = e$

4. O declive da reta r é $F'(1) = f(1) = \frac{2+4}{1+1} = 3$, a reta r é do tipo $y = 3x + b$ e passa no ponto A .

$$5 = 3 + b \Leftrightarrow b = 2, \text{ logo a equação reduzida da reta } r \text{ é } y = 3x + 2.$$

5. Seja f uma função ímpar, primitivável em $\mathbb{R}$ e seja F uma primitiva da função f .

Tem-se, então, para qualquer x real:

$$\begin{aligned} [F(x) - F(-x)]' &= f(x) - (-x)'f(-x) = f(x) - (-1)f(-x) = \\ &= f(x) + f(-x) = f(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

Como, para qualquer x real, $[F(x) - F(-x)]' = 0$, concluímos que a função definida em $\mathbb{R}$ por $F(x) - F(-x)$ é constante.

Portanto, existe um número real c tal que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - F(-x) = c$.

Em particular, para $x = 0$, vem: $F(0) - F(-0) = c \Leftrightarrow F(0) - F(0) = c \Leftrightarrow 0 = c$

Portanto, $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - F(-x) = 0$, pelo que $\forall x \in \mathbb{R}, F(-x) = F(x)$.

Concluimos, assim, que F é uma função par.

6.

a) Tem-se, para qualquer x pertencente a $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= (xe^{-x} + c)' = (xe^{-x})' + (c)' = (xe^{-x})' + 0 = \\ &= (xe^{-x})' = e^{-x} + xe^{-x}(-1) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x) \end{aligned}$$

b) $F(1) = 0 \Leftrightarrow e^{-1} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{e}$

7.

a) Tem-se: $F'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 3}\right)' = \frac{(x^2+3)'}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} =$
 $= \frac{x\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}\sqrt{x^2+3}} = \frac{x\sqrt{x^2+3}}{(\sqrt{x^2+3})^2} = \frac{x\sqrt{x^2+3}}{x^2+3} = f(x)$

Como $F'(x) = f(x)$, vem que F é uma primitiva de f .

b) Tem-se: $G'(x) = [\ln(x^2 + 3)]' = \frac{(x^2+3)'}{x^2+3} = \frac{2x}{x^2+3} = g(x)$

Como $G'(x) = g(x)$, vem que G é uma primitiva de g .

c) $\int h(x) dx = \int \frac{5x\sqrt{x^2+3} + 4x}{x^2+3} dx = \int \frac{5x\sqrt{x^2+3}}{x^2+3} dx + \int \frac{4x}{x^2+3} dx =$
 $= 5 \int \frac{x\sqrt{x^2+3}}{x^2+3} dx + 2 \int \frac{2x}{x^2+3} dx \underset{\substack{\text{pelas alíneas anteriores}}}{=} 5 \sqrt{x^2 + 3} + 2 \ln(x^2 + 3) + c, c \in \mathbb{R}$

8.

a) $P(5) = 5x + c, c \in \mathbb{R}$

b) $P(4x + 3) = 4P(x) + P(3) = 4 \times \frac{x^2}{2} + 3x + c = 2x^2 + 3x + c, c \in \mathbb{R}$

c) $P(6x^2 - 8x + 1) = 6P(x^2) - 8P(x) + P(1) = 6 \times \frac{x^3}{3} - 8 \times \frac{x^2}{2} + x + c =$
 $= 2x^3 - 4x^2 + x + c, c \in \mathbb{R}$

d) $P\left(\frac{1}{x^5}\right) = P(x^{-5}) = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = -\frac{x^{-4}}{4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c, c \in \mathbb{R}$

e) $P\left(\frac{x^4+1}{x^2}\right) = P(x^2) + P\left(\frac{1}{x^2}\right) = P(x^2) + P(x^{-2}) =$
 $= \frac{x^3}{3} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + c, c \in \mathbb{R}$

f) $P\left(\sqrt{x} - \frac{3}{2}\right) = P(\sqrt{x}) - P\left(\frac{3}{2}\right) = P\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{3}{2}x + c =$
 $= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{3}{2}x + c = \frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{3}{2}x + c, c \in \mathbb{R}$

g) $P\left(5\sqrt[3]{x^2} + 9\sqrt[5]{x^4}\right) = 5P\left(\sqrt[3]{x^2}\right) + 9P\left(\sqrt[5]{x^4}\right) = 5P\left(x^{\frac{2}{3}}\right) + 9P\left(x^{\frac{4}{5}}\right) =$
 $= 5 \times \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + 9 \times \frac{x^{\frac{4}{5}+1}}{\frac{4}{5}+1} + c = 5 \times \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + 9 \times \frac{x^{\frac{9}{5}}}{\frac{9}{5}} + c =$
 $= 5 \times \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + 9 \times \frac{5}{9}\sqrt[5]{x^9} + c = 3x\sqrt[3]{x^2} + 5x\sqrt[5]{x^4} + c, c \in \mathbb{R}$

h) $P\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\right) = P\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}\right) + P\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = P\left(x^{2-\frac{1}{2}}\right) + P\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) =$
 $= P\left(x^{\frac{3}{2}}\right) + P\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$
 $= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 2\sqrt{x} + c = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$

i) $P\left[(x-1)\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right] = P\left[(x-1)\frac{(x-\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}\right] =$
 $= P\left[(x-1)\frac{(x-\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}{x^2-x}\right] = P\left[(x-1)\frac{(x-\sqrt{x})^2}{x(x-1)}\right] =$

$$\begin{aligned}
&= P\left[\frac{(x-\sqrt{x})^2}{x}\right] = P\left(\frac{x^2-2x\sqrt{x}+x}{x}\right) = P(x-2\sqrt{x}+1) = \\
&= P(x) - 2P\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + P(1) = \frac{x^2}{2} - 2 \times \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + x + c = \\
&= \frac{x^2}{2} - 2 \times \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + x + c = \frac{x^2}{2} - 2 \times \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + x + c = \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + x + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

9.

a) $P[5(5x+3)^9] = \frac{(5x+3)^{10}}{10} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

b) $P[2x(x^2-5)^5] = \frac{(x^2-5)^6}{6} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

c) $P[(3x^2+4x-1)(x^3+2x^2-x-3)^6] = \frac{(x^3+2x^2-x-3)^7}{7} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

d) $P[6x(x^2-8)^{13}] = 3P[2x(x^2-8)^{13}] = 3 \times \frac{(x^2-8)^{14}}{14} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

e) $P[5x^9(x^{10}+3)^{14}] = \frac{1}{2} \times P[10x^9(x^{10}+3)^{14}] = \frac{1}{2} \times \frac{(x^{10}+3)^{15}}{15} + c =$
 $= \frac{(x^{10}+3)^{15}}{30} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

f) $P[(x+3)^2(x^3+9x^2+27x+30)^{17}] = P[(x^2+6x+9)(x^3+9x^2+27x+30)^{17}] =$
 $= \frac{1}{3} \times P[(3x^2+18x+27)(x^3+9x^2+27x+30)^{17}] =$
 $= \frac{1}{3} \times \frac{(x^3+9x^2+27x+30)^{18}}{18} + c = \frac{(x^3+9x^2+27x+30)^{18}}{54} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

g) $P\left[\frac{(\sqrt{x}+2)^{11}}{\sqrt{x}}\right] = 2 \times P\left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (\sqrt{x}+2)^{11}\right] = 2 \times \frac{(\sqrt{x}+2)^{12}}{12} + c =$
 $= \frac{(\sqrt{x}+2)^{12}}{6} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

h) $P(2\sqrt{2x+1}) = P\left(2(2x+1)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$
 $= \frac{2}{3} \sqrt{(2x+1)^3} + c = \frac{2(2x+1)\sqrt{2x+1}}{3} + c = \frac{(4x+2)\sqrt{2x+1}}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

i) $P[3x\sqrt[5]{(x^2+10)^7}] = P\left[3x(x^2+10)^{\frac{7}{5}}\right] = \frac{3}{2} \times P\left[2x(x^2+10)^{\frac{7}{5}}\right] =$
 $= \frac{3}{2} \times \frac{(x^2+10)^{\frac{7}{5}+1}}{\frac{7}{5}+1} + c = \frac{3}{2} \times \frac{(x^2+10)^{\frac{12}{5}}}{\frac{12}{5}} + c =$
 $= \frac{3}{2} \times \frac{5}{12} \times (x^2+10)^{\frac{12}{5}} + c = \frac{5}{8} \times \sqrt[5]{(x^2+10)^{12}} + c =$
 $= \frac{5}{8} \times (x^2+10)^2 \sqrt[5]{(x^2+10)^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

j) $P(x\sqrt{x^2+1} + 6x^2\sqrt[3]{x^3+2}) = P(x\sqrt{x^2+1}) + P(6x^2\sqrt[3]{x^3+2}) =$
 $= P(x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}) + P(6x^2(x^3+2)^{\frac{1}{3}}) =$
 $= \frac{1}{2} \times P(2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}) + 2 \times P(3x^2(x^3+2)^{\frac{1}{3}}) =$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2 \times \frac{(x^3+2)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2 \times \frac{(x^3+2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \sqrt{(x^2 + 1)^3} + 2 \times \frac{3}{4} \times \sqrt[3]{(x^3 + 2)^4} + c = \\
&= \frac{1}{3} \times (x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1} + \frac{3}{2} \times (x^3 + 2) \sqrt[3]{x^3 + 2} + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{k)} \quad &P\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \sqrt[3]{\sqrt{x} + \frac{x}{2}}\right) = 2 \times P\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \sqrt[3]{\sqrt{x} + \frac{x}{2}}\right) = \\
&= 2 \times P\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\right) \sqrt[3]{\sqrt{x} + \frac{x}{2}}\right) = 2 \times P\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\right) (\sqrt{x} + \frac{x}{2})^{\frac{1}{3}}\right) = \\
&= 2 \times \frac{(\sqrt{x} + \frac{x}{2})^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = 2 \times \frac{(\sqrt{x} + \frac{x}{2})^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = 2 \times \frac{3}{4} \times \sqrt[3]{(\sqrt{x} + \frac{x}{2})^4} + c = \\
&= \frac{3}{2} \times (\sqrt{x} + \frac{x}{2}) \sqrt[3]{\sqrt{x} + \frac{x}{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{l)} \quad &P[e^x(5e^x - 4)^7] = \frac{1}{5} \times P[5e^x(5e^x - 4)^7] = \frac{1}{5} \times \frac{(5e^x - 4)^8}{8} + c = \\
&= \frac{1}{40} \times (5e^x - 4)^8 + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\text{m)} \quad P[(e^x + 3x^2)(e^x + x^3)^9] = \frac{(e^x + x^3)^{10}}{10} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\text{n)} \quad &P[12(e^x + x^6) \sqrt[7]{(7e^x + x^7)^5}] = \frac{12}{7} \times P[7(e^x + x^6)(7e^x + x^7)^{\frac{5}{7}}] = \\
&= \frac{12}{7} \times P[(7e^x + 7x^6)(7e^x + x^7)^{\frac{5}{7}}] = \frac{12}{7} \times \frac{(7e^x + x^7)^{\frac{5}{7}+1}}{\frac{5}{7}+1} + c = \\
&= \frac{12}{7} \times \frac{(7e^x + x^7)^{\frac{12}{7}}}{\frac{12}{7}} + c = \sqrt[7]{(7e^x + x^7)^{12}} + c = \\
&= (7e^x + x^7) \sqrt[7]{(7e^x + x^7)^5} + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\text{o)} \quad P\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = P\left(\frac{1}{x} \times \ln(x)\right) = \frac{(\ln(x))^2}{2} + c = \frac{\ln^2(x)}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{p)} \quad P(\cos x \cdot \text{sen}^5 x) = P(\cos x \cdot (\text{sen} x)^5) = \frac{(\text{sen} x)^6}{6} + c = \frac{\text{sen}^6 x}{6} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{q)} \quad P(\cos x \cdot \text{sen} x) = \frac{(\text{sen} x)^2}{2} + c = \frac{\text{sen}^2 x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\text{r)} \quad &P\left(\frac{\cos x}{\sqrt{\text{sen} x}}\right) = P\left(\cos x (\text{sen} x)^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{(\text{sen} x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{(\text{sen} x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \\
&= 2 \times \sqrt{\text{sen} x} + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{s)} \quad &P\left(\frac{1}{4\text{sen}^2 x} - \frac{1}{4\cos^2 x}\right) = P\left(\frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{4\text{sen}^2 x \cos^2 x}\right) = P\left(\frac{\cos(2x)}{(\text{sen}(2x))^2}\right) = \\
&= P(\cos(2x) (\text{sen}(2x))^{-2}) = \frac{1}{2} \times P(2\cos(2x) (\text{sen}(2x))^{-2}) = \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{(\text{sen}(2x))^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{1}{2} \times \frac{(\text{sen}(2x))^{-1}}{-1} + c = \\
&= -\frac{1}{2\text{sen}(2x)} + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad &P(4e^x - 8x^3 + 12x^2) = P(4e^x) - P(8x^3) + P(12x^2) = \\
&= 4P(e^x) - 8P(x^3) + 12P(x^2) = \\
&= 4e^x - 8 \times \frac{x^4}{4} + 12 \times \frac{x^3}{3} + c = 4e^x - 2x^4 + 4x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

- b)** $P(3e^{3x-2}) = e^{3x-2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$
- c)** $P(x^3 e^{x^4+1}) = \frac{1}{4} \times P(4x^3 e^{x^4+1}) = \frac{1}{4} \times e^{x^4+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$
- d)** $P(2e^{-x}) = -2P(-e^{-x}) = -2e^{-x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$
- e)**
$$\begin{aligned} P\left(\frac{4x^2+\sqrt{x}}{x} e^{x^2+\sqrt{x}}\right) &= 2 \times P\left(\frac{4x^2+\sqrt{x}}{2x} e^{x^2+\sqrt{x}}\right) = \\ &= 2 \times P\left(\left(2x + \frac{\sqrt{x}}{2x}\right) e^{x^2+\sqrt{x}}\right) = 2 \times P\left(\left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) e^{x^2+\sqrt{x}}\right) = \\ &= 2e^{x^2+\sqrt{x}} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
- f)** $P(e^{\operatorname{sen} x} \cos x) = e^{\operatorname{sen} x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$
- g)** $P[(1 + \operatorname{tg}^2 x) e^{\operatorname{tg} x}] = P\left[\frac{1}{\cos^2 x} e^{\operatorname{tg} x}\right] = e^{\operatorname{tg} x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$
- h)** $P(2e^{1-\cos x} \operatorname{sen} x) = 2P(e^{1-\cos x} \operatorname{sen} x) = 2e^{1-\cos x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$
- i)**
$$\begin{aligned} P[e^{\operatorname{sen} x \cos x} \cos(2x)] &= P\left[e^{\operatorname{sen} x \cos x} \times \frac{1}{2} \times (\operatorname{sen}(2x))'\right] = \\ &= P\left[e^{\operatorname{sen} x \cos x} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x)\right)'\right] = \\ &= P\left[e^{\operatorname{sen} x \cos x} (\operatorname{sen} x \cos x)'\right] = e^{\operatorname{sen} x \cos x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
- j)**
$$\begin{aligned} P\left[e^{\operatorname{sen}^3 x} \operatorname{sen}(2x) \operatorname{sen} x\right] &= P\left[e^{\operatorname{sen}^3 x} 2 \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{sen} x\right] = \\ &= P\left[e^{\operatorname{sen}^3 x} 2 \operatorname{sen}^2 x \cos x\right] = \frac{2}{3} \times P\left[e^{\operatorname{sen}^3 x} 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x\right] = \\ &= \frac{2}{3} \times e^{\operatorname{sen}^3 x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

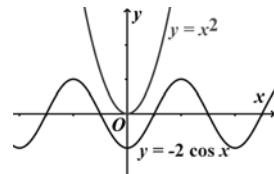
11.

- a)** $P\left(\frac{3}{x} - 2\right) = P\left(\frac{3}{x}\right) - P(2) = 3P\left(\frac{1}{x}\right) - P(2) = 3 \ln|x| - 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}$
- b)**
$$\begin{aligned} P\left(\frac{4}{3x} - \frac{3}{2x}\right) &= P\left(\frac{4}{3x}\right) - P\left(\frac{3}{2x}\right) = \frac{4}{3}P\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{3}{2}P\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{6}P\left(\frac{1}{x}\right) = \\ &= -\frac{1}{6} \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
- c)**
$$\begin{aligned} P\left(\frac{5}{3x} - \frac{3x}{5}\right) &= P\left(\frac{5}{3x}\right) - P\left(\frac{3x}{5}\right) = \frac{5}{3}P\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{3}{5}P(x) = \\ &= \frac{5}{3} \ln|x| - \frac{3}{5} \times \frac{x^2}{2} + c = \frac{5}{3} \ln|x| - \frac{3}{10} \times x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
- d)**
$$\begin{aligned} P\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) &= P\left(\frac{2}{x}\right) + P\left(\frac{3}{x^2}\right) = 2P\left(\frac{1}{x}\right) + 3P(x^{-2}) = 2 \ln|x| + 3 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \\ &= 2 \ln|x| + 3 \frac{x^{-1}}{-1} + c = 2 \ln|x| - \frac{3}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
- e)**
$$\begin{aligned} P\left[\frac{(x-5)^2}{x}\right] &= P\left(\frac{x^2-10x+25}{x}\right) = P\left(x - 10 + \frac{25}{x}\right) = P(x) - P(10) + 25P\left(\frac{1}{x}\right) = \\ &= \frac{x^2}{2} - 10x + 25 \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
- f)** $P\left(\frac{6x}{3x^2+5}\right) = \ln|3x^2 + 5| + c = \ln(3x^2 + 5) + c, \quad c \in \mathbb{R}$
- g)** $P\left(\frac{x^2-2}{x^3-6x-5}\right) = \frac{1}{3} \times P\left(\frac{3x^2-6}{x^3-6x-5}\right) = \frac{1}{3} \times \ln|x^3 - 6x - 5| + c, \quad c \in \mathbb{R}$

$$\text{h)} \quad P\left(\frac{e^{2x}-2e^{-4x}}{e^{2x}+e^{-4x}}\right) = \frac{1}{2} \times P\left(\frac{2e^{2x}-4e^{-4x}}{e^{2x}+e^{-4x}}\right) = \frac{1}{2} \times \ln |e^{2x} + e^{-4x}| + c = \\ = \frac{1}{2} \times \ln (e^{2x} + e^{-4x}) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{i)} \quad P\left(\frac{1}{x \ln x}\right) = P\left(\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right) = \ln |\ln x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{j)} \quad P\left(\frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2 + 2 \cos x}\right) = \frac{1}{2} \times P\left(\frac{2x - 2 \operatorname{sen} x}{x^2 + 2 \cos x}\right) = \frac{1}{2} \times \ln |x^2 + 2 \cos x| + c \quad \downarrow$$



x^2 é sempre maior do que $-2 \cos x$, pelo que $x^2 + 2 \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$= \frac{1}{2} \times \ln (x^2 + 2 \cos x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{k)} \quad P(1 + 2 \operatorname{tg} x) = P(1) - 2 P\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = x - 2 \ln |\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{l)} \quad P\left[\frac{1 + 2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x)}\right] = P\left[\frac{\frac{1 + 2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}}{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}\right] = P\left[\frac{\frac{1}{\cos^2 x} + 2 \operatorname{tg} x \times \frac{1}{\cos^2 x}}{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}\right] = \\ = \ln |1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{m)} \quad P[\operatorname{tg}(3x)] = P\left[\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)}\right] = -\frac{1}{3} \times P\left[\frac{-3 \operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)}\right] = \\ = -\frac{1}{3} \times \ln |\cos(3x)| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{n)} \quad P\left[\frac{\cos(2x)}{1 + \operatorname{sen}(2x)}\right] = \frac{1}{2} \times P\left[\frac{2 \cos(2x)}{1 + \operatorname{sen}(2x)}\right] = \frac{1}{2} \times \ln |1 + \operatorname{sen}(2x)| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{o)} \quad P\left[\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x) + 2 \operatorname{sen}(2x) \cos^2 x}{\cos x + \cos^2 x + \cos^4 x}\right] = -P\left[\frac{-\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(2x) - 2 \operatorname{sen}(2x) \cos^2 x}{\cos x + \cos^2 x + \cos^4 x}\right] = \\ = -P\left[\frac{-\operatorname{sen} x - 2 \cos x \operatorname{sen} x - 2 \times 2 \cos x \operatorname{sen} x \cos^2 x}{\cos x + \cos^2 x + \cos^4 x}\right] = \\ = -P\left[\frac{-\operatorname{sen} x - 2 \cos x \operatorname{sen} x - 4 \cos^3 x \operatorname{sen} x}{\cos x + \cos^2 x + \cos^4 x}\right] = \\ = -\ln |\cos x + \cos^2 x + \cos^4 x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

12.

$$\text{a)} \quad P\left(\frac{1 - \operatorname{sen} x}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} P(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{b)} \quad P\left(\frac{2 \cos x + \operatorname{sen} x}{3}\right) = \frac{2}{3} P(\cos x) + \frac{1}{3} P(\operatorname{sen} x) = \frac{2}{3} \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{c)} \quad P[4x^3 - 6 \operatorname{sen}(3x)] = 4 P(x^3) + 2 P[-3 \operatorname{sen}(3x)] = 4 \times \frac{x^4}{4} + 2 \cos(3x) + c = \\ = x^4 + 2 \cos(3x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{d)} \quad P\left(\frac{1 + \cos \frac{x}{2}}{4}\right) = P\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} P\left(\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

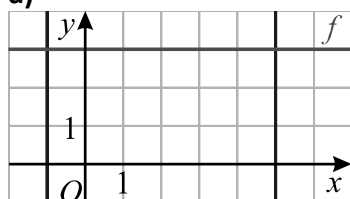
$$\text{e)} \quad P(\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x) = P((\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)) = P(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \\ = P(\cos(2x)) = \frac{1}{2} P(2 \cos(2x)) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

f)
$$\begin{aligned} P(\cos^3 x) &= P(\cos^2 x \cos x) = P((1 - \sin^2 x) \cos x) = P(\cos x - \sin^2 x \cos x) = \\ &= P(\cos x) - P(\sin^2 x \cos x) = P(\cos x) - \frac{1}{3} P(3 \sin^2 x \cos x) = \\ &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

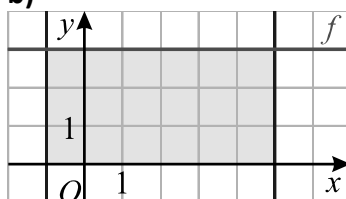
2. Noção de integral

13.

a)



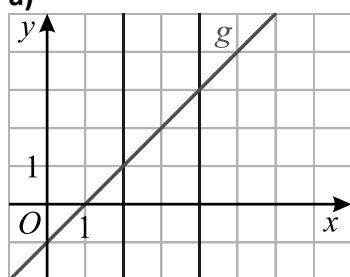
b)



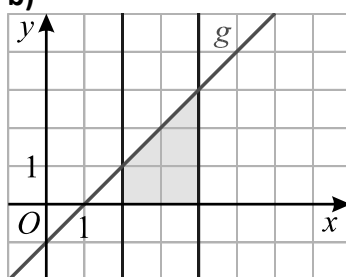
c) $\int_{-1}^5 f(x) dx = 3 \times 6 = 18$

14.

a)

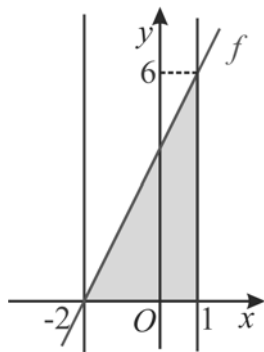


b)



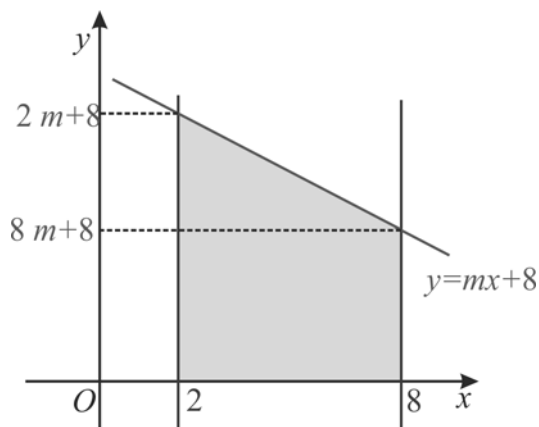
c) $\int_2^4 g(x) dx = \frac{3+1}{2} \times 2 = 4$

15.



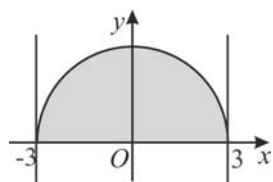
$\int_{-2}^1 (2x + 4) dx = \frac{6 \times 3}{2} = 9$

16.



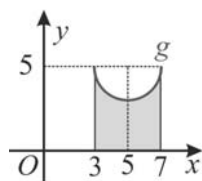
$$\frac{8m+8+2m+8}{2} \times 6 = 33 \Leftrightarrow (5m+8) \times 6 = 33 \Leftrightarrow 30m+48 = 33 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

17.



$$\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx = \frac{\pi \times 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}$$

18.



$$\int_3^7 g(x) dx = 4 \times 5 - \frac{\pi \times 2^2}{2} = 20 - 2\pi$$

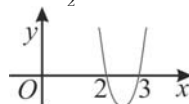
19.

a) Tem-se:

$5x - \frac{25}{4} \leq f(x) \Leftrightarrow 5x - \frac{25}{4} \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \geq 0$, o que é verdade para qualquer número real x .

$$f(x) \leq 5x - 6 \Leftrightarrow x^2 \leq 5x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2, 3]$$

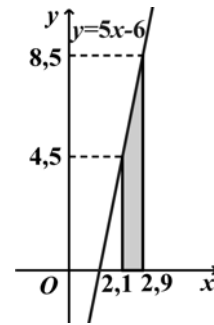
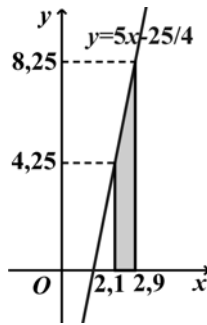
$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 6}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$



Portanto, $\forall x \in [2, 1; 2, 9]$, $5x - \frac{25}{4} \leq f(x) \leq 5x - 6$.

b) $\forall x \in [2, 1; 2, 9]$, $5x - \frac{25}{4} \leq f(x) \leq 5x - 6$, pelo que

$$\int_{2,1}^{2,9} \left(5x - \frac{25}{4}\right) dx \leq \int_{2,1}^{2,9} f(x) dx \leq \int_{2,1}^{2,9} (5x - 6) dx$$



$$\int_{2,1}^{2,9} \left(5x - \frac{25}{4}\right) dx = \frac{8,25+4,25}{2} \times 0,8 = 5 \quad \int_{2,1}^{2,9} (5x - 6) dx = \frac{8,5+4,5}{2} \times 0,8 = 5,2$$

Logo, $5 \leq \int_{2,1}^{2,9} f(x) dx \leq 5,2$.

Arredondado às unidades, vem $\int_{2,1}^{2,9} f(x) dx = 5$.

20. Tem-se, para qualquer x pertencente ao intervalo $[1, +\infty[$,
 $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x) = \ln x - \left[1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1\right] = \ln(x) - \ln(x) = 0$

21. $f'(x) = \left(\int_0^{1+\sin x} \ln(e + t^2 - 1) dt\right)' = \ln(e + (1 + \sin x)^2 - 1) \times (1 + \sin x)' =$
 $= \ln(e + (1 + \sin x)^2 - 1) \times \cos x$
 $m = f'(\pi) = \ln(e + (1 + \sin \pi)^2 - 1) \times \cos \pi = \ln(e) \times (-1) = -1$

22.

a) $\int_1^3 2x(x^2 + 1)^3 dx = \left[\frac{(x^2+1)^4}{4}\right]_1^3 = \frac{(3^2+1)^4}{4} - \frac{(1^2+1)^4}{4} = 2500 - 4 = 2496$

b) $\int_0^2 9x^2 \sqrt{9 - x^3} dx = \int_0^2 -3 \times (-3) x^2 (9 - x^3)^{\frac{1}{2}} dx = \left[-3 \times \frac{(9-x^3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^2 =$
 $= \left[-3 \times \frac{(9-x^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \left[-2(9-x^3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \left[-2\sqrt{(9-x^3)^3}\right]_0^2 =$
 $= \left[-2(9-x^3)\sqrt{9-x^3}\right]_0^2 = -2(9-2^3)\sqrt{9-2^3} + 2(9-0^3)\sqrt{9-0^3} =$
 $= -2 + 2 \times 9 \times 3 = 52$

c) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^2 -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -e^{\frac{1}{2}} + e^1 = e - \sqrt{e}$

d) $\int_1^e \frac{x+1}{x} dx = \int_1^e 1 + \frac{1}{x} dx = [x + \ln|x|]_1^e = e + \ln(e) - 1 - \ln(1) = e + 1 - 1 - 0 = e$

e) $\int_e^{e^e} \frac{1+\ln(x)}{x \ln(x)} dx = [\ln|x \ln(x)|]_e^{e^e} = \ln|e^e \ln(e^e)| - \ln|e \ln(e)| = \ln \frac{|e^e \ln(e^e)|}{|e \ln(e)|} = \ln \frac{e^e \times e \ln(e)}{e \ln(e)} =$
 $= \ln(e^e) = e \ln(e) = e \times 1 = e$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos^2 x dx =$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2(-\sin x \cos^2 x) dx = \left[-2 \times \frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$
 $= -2 \times \frac{\cos^3 \frac{\pi}{2}}{3} + 2 \times \frac{\cos^3 0}{3} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen} x \cos^{-2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} -(-\operatorname{sen} x \cos^{-2} x) dx = \left[-\frac{\cos^{-2+1} x}{-2+1} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= [\cos^{-1} x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left[\frac{1}{\cos x} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) \operatorname{sen} x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) \operatorname{sen} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 x - 1) \operatorname{sen} x dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x) dx = \left[-2\frac{\cos^3 x}{3} + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= -2\frac{\cos^3 \frac{\pi}{4}}{3} + \cos \frac{\pi}{4} + 2\frac{\cos^3 0}{3} - \cos 0 = \\ &= -\frac{2}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \times \frac{1}{3} - 1 = \\ &= \frac{-2 \times 2 \sqrt{2}}{24} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3} - 1 = \frac{-\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} = \frac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2}{6} = \\ &= \frac{2\sqrt{2} - 2}{6} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3} \end{aligned}$$

23.

$$\text{a)} \quad \int_0^6 (x^2 - 2x + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_0^6 = \frac{6^3}{3} - 6^2 + 12 - \frac{0^3}{3} + 0^2 - 0 = 48$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \cos(2x) dx &= \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{2} \times 2 \cos(2x) dx = \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) \right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad \int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1$$

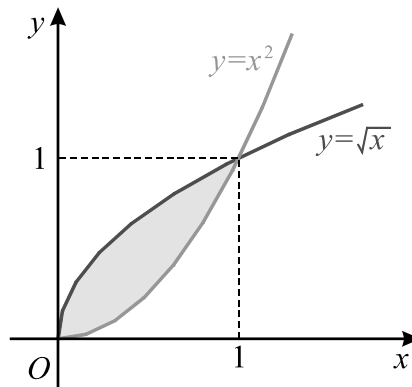
$$\text{d)} \quad \int_0^{\ln(4)} e^x dx = [e^x]_0^{\ln(4)} = e^{\ln(4)} - e^0 = 4 - 1 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = [-\ln |\cos x|]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= -\ln \left| \cos \frac{\pi}{3} \right| + \ln \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| = -\ln \left(\frac{1}{2} \right) + \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \ln \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} \right) = \ln(\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 x dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \\ \cos(2x) &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times 2 \cos(2x) \right) dx = \\ &= \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \times \operatorname{sen}(2x) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \times \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} \times \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{3\pi}{24} - \frac{6}{24} - \frac{2\pi}{24} + \frac{3\sqrt{3}}{24} = \frac{\pi + 3\sqrt{3} - 6}{24} \end{aligned}$$

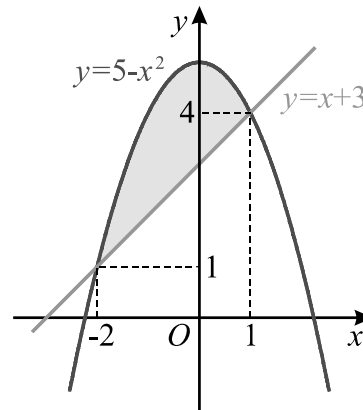
24.

a) $x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 = x \Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$



$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^1 \sqrt{x} \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \\ &= \frac{2}{3} 1^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} 0^{\frac{3}{2}} - \frac{1^3}{3} + \frac{0^3}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b) $5 - x^2 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

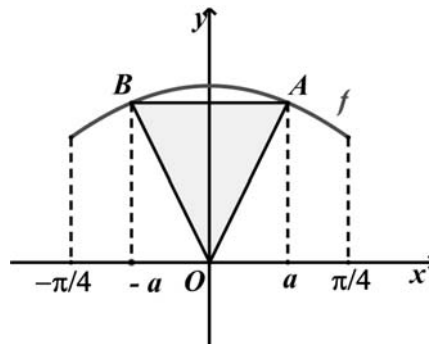


$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^1 (5 - x^2) \, dx - \int_{-2}^1 (x + 3) \, dx = \left[5x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 - \left[\frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-2}^1 = \\ &= 5 - \frac{1}{3} + 10 + \frac{-8}{3} - \frac{1}{2} - 3 + \frac{4}{2} - 6 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

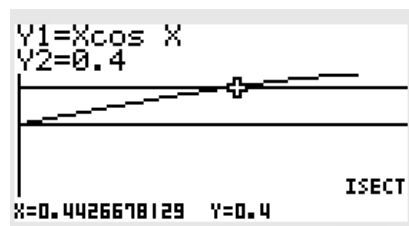
25.

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{5\sqrt{2}a}{\sqrt{5x-2}} \, dx - \int_2^4 \frac{3}{x-1} \, dx &= 5 \ln(3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_2^4 \sqrt{2}a \times 5 \times (5x-2)^{-\frac{1}{2}} \, dx - \int_2^4 3 \times \frac{1}{x-1} \, dx &= 5 \ln(3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[\sqrt{2}a \times \frac{(5x-2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_2^4 - [3 \times \ln|x-1|]_2^4 &= 5 \ln(3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[\sqrt{2}a \times 2 \times (5x-2)^{\frac{1}{2}} \right]_2^4 - [3 \times \ln|x-1|]_2^4 &= 5 \ln(3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[2\sqrt{2}a \times \sqrt{5x-2} \right]_2^4 - [3 \times \ln|x-1|]_2^4 &= 5 \ln(3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2}a \times \sqrt{18} - 2\sqrt{2}a \times \sqrt{8} - 3 \times \ln(3) + 3 \times \ln(1) &= 5 \ln(3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 12a - 8a - 3 \times \ln(3) + 0 &= 5 \ln(3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4a - 3 \ln(3) = 5 \ln(3) \Leftrightarrow 4a = 8 \ln(3) \Leftrightarrow a = 2 \ln(3) \Leftrightarrow a = \ln(9) \end{aligned}$$

26.

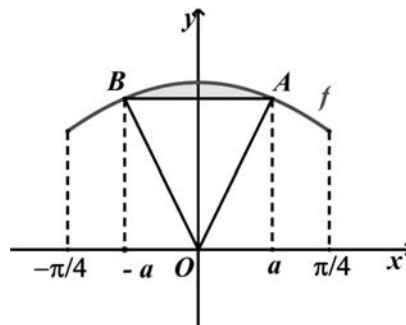


- a) $A(a, \cos a)$; $B(-a, \cos(-a)) = (-a, \cos a)$, com $a \in]0, \frac{\pi}{4}]$
 base $\rightarrow 2a$; altura $\rightarrow \cos a$, logo $\frac{2a \cos a}{2} = 0,4 \Leftrightarrow a \cos a = 0,4$.
 Vamos resolver esta equação com recurso à calculadora gráfica.



Vem que $a \approx 0,443$.

b)



A área do retângulo formado pelos pontos de coordenadas $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(a, \cos a)$ e $(-a, \cos a)$ é o dobro da área do triângulo $[OAB]$, isto é $0,8$. A área pretendida é, então,
 $\int_{-0,443}^{0,443} f(x) dx - 0,8$.

$$\int_{-0,443}^{0,443} f(x) dx - 0,8 = \int_{-0,443}^{0,443} \cos x dx - 0,8 = [\sin x]_{-0,443}^{0,443} - 0,8 = \\ = \sin 0,443 - \sin(-0,443) - 0,8 = 2 \sin 0,443 - 0,8 = 0,06$$

27. $\int_a^b [4f(x) + g(x)] dx = \int_a^b 4f(x) dx + \int_a^b g(x) dx =$
 $= 4 \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = 4 \times 8 + 2 = 34$

28. Área referida $= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b -g(x) dx =$
 $= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$

29. $\int_4^1 f(x) dx = - \int_1^4 f(x) dx = -10$

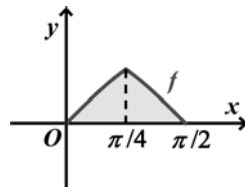
$$30. \quad \int_e^1 \frac{2}{x} dx = - \int_1^e \frac{2}{x} dx = -2 \int_1^e \frac{1}{x} dx = -2 [\ln |x|]_1^e = \\ = -2 \times (\ln(e) - \ln(1)) = -2$$

$$31. \quad \int_1^3 [f(x) + x] dx + \int_1^3 5f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 x dx + 5 \int_1^3 f(x) dx = \\ = \int_1^3 x dx + 6 \int_1^3 f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 - 6 \int_3^1 f(x) dx = \\ = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} - 6 \times (-6) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 36 = 40$$

$$32. \quad \int_0^c \frac{1}{x+e} dx + \int_c^{e^3-e} \frac{1}{x+e} dx = \int_0^{e^3-e} \frac{1}{x+e} dx = [\ln |x+e|]_0^{e^3-e} = \\ = \ln |e^3 - e + e| - \ln |0 + e| = \ln(e^3) - \ln(e) = 3 - 1 = 2$$

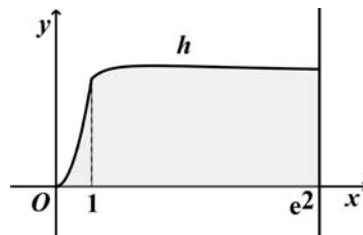
$$33. \quad \int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx = \int_{-1}^0 e^x dx + \int_0^4 (2x+1) dx = \\ = [e^x]_{-1}^0 + [x^2 + x]_0^4 = e^0 - e^{-1} + (4^2 + 4) - (0^2 + 0) = 21 - \frac{1}{e}$$

34.



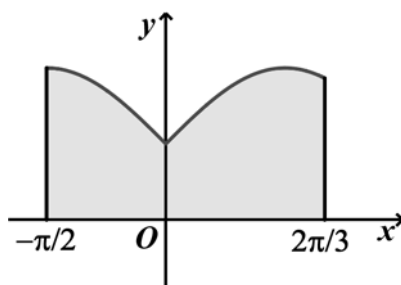
$$\int_0^{\pi/2} f(x) dx = \int_0^{\pi/4} f(x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x) dx = \\ = \int_0^{\pi/4} \sin x dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx = [-\cos x]_0^{\pi/4} + [\sin x]_{\pi/4}^{\pi/2} = \\ = -\cos \frac{\pi}{4} + \cos 0 + \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$$

35.



$$\int_0^{e^2} h(x) dx = \int_0^1 h(x) dx + \int_1^{e^2} h(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^{e^2} \left(3 + \frac{\ln(x)}{x}\right) dx = \\ = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^{e^2} \left(3 + \frac{1}{x} \ln(x)\right) dx = [x^3]_0^1 + \left[3x + \frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^{e^2} = \\ = 1^3 - 0^3 + 3e^2 + \frac{\ln^2(e^2)}{2} - 3 - \frac{\ln^2(1)}{2} = 1 + 3e^2 + \frac{(\ln e^2)^2}{2} - 3 = \\ = 1 + 3e^2 + 2 - 3 = 3e^2$$

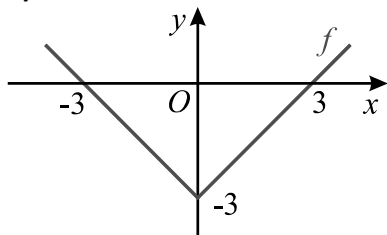
36.



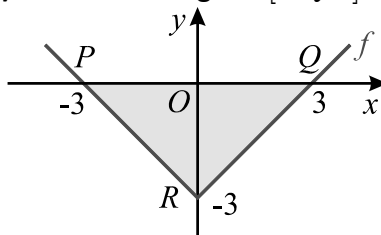
$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} (1 + \operatorname{sen}|x|) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} 1 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \operatorname{sen}|x| dx = \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} 1 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \operatorname{sen}(-x) dx + \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \operatorname{sen} x dx = \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} 1 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 -\operatorname{sen} x dx + \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \operatorname{sen} x dx = [x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} + [\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + [-\cos x]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \\
 &= \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos \frac{2\pi}{3} + \cos 0 = \frac{4\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} + 1 - 0 + \frac{1}{2} + 1 = \\
 &= \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{2} = \frac{7\pi + 15}{6}
 \end{aligned}$$

37.

a)



b) Área do triângulo $[PQR] = \frac{6 \times 3}{2} = 9$



c) -9

38.

a)
$$\begin{aligned}
 \int_4^{36} \left(\frac{1}{2} - 3\sqrt{x} \right) dx &= \int_4^{36} \left(\frac{1}{2} - 3x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \left[\frac{1}{2}x - 3 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_4^{36} = \\
 &= \left[\frac{1}{2}x - 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_4^{36} = \left[\frac{1}{2}x - 2x^{\frac{3}{2}} \right]_4^{36} = \left[\frac{1}{2}x - 2x\sqrt{x} \right]_4^{36} = 18 - 432 - 2 + 16 = -400
 \end{aligned}$$

b)
$$\int_1^5 (e - e^x) dx = [ex - e^x]_1^5 = 5e - e^5 - e + e = 5e - e^5$$

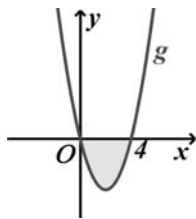
c)
$$\int_1^4 \frac{1-x}{x} dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) dx = [\ln|x| - x]_1^4 = \ln(4) - 4 - \ln(1) + 1 = \ln(4) - 3$$

d)
$$\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{\ln^3(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x} \ln^3(x) dx = \left[\frac{\ln^4|x|}{4} \right]_{\frac{1}{e}}^1 = \frac{\ln^4(1)}{4} - \frac{\ln^4(\frac{1}{e})}{4} = -\frac{(\ln(e^{-1}))^4}{4} = -\frac{1}{4}$$

e)
$$\begin{aligned}
 \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x dx &= -\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x dx = -[\cos x]_{\pi}^{2\pi} = \\
 &= -\cos(2\pi) + \cos \pi = -1 - 1 = -2
 \end{aligned}$$

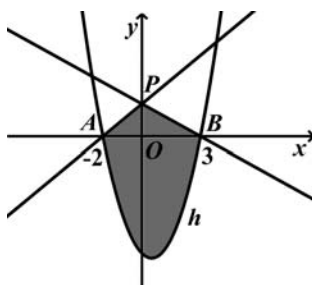
f)
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$$

39.



$$\begin{aligned}\text{Área} &= - \int_0^4 (x^2 - 4x) dx = - \left[\frac{x^3}{3} - 4 \times \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = - \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_0^4 = \\ &= - \frac{4^3}{3} + 32 = \frac{32}{3}\end{aligned}$$

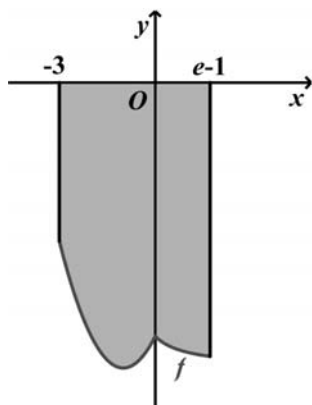
40. $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$



Designemos por a a ordenada do ponto P .

$$\begin{aligned}- \int_{-2}^3 (x^2 - x - 6) dx + \frac{5a}{2} &= 25 \Leftrightarrow - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right]_{-2}^3 + \frac{5a}{2} = 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow - \frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 18 + \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 12 + \frac{5a}{2} &= 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{125}{6} + \frac{5a}{2} = 25 \Leftrightarrow \frac{5a}{2} = \frac{25}{6} \Leftrightarrow a &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

41.



$$\begin{aligned}\text{Área} &= - \int_{-3}^0 (x^2 + 2x - 8) dx - \int_0^{e-1} \left(\frac{1}{x+1} - 9 \right) dx = \\ &= - \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 8x \right]_{-3}^0 - [\ln |x+1| - 9x]_0^{e-1} = \\ &= \frac{(-3)^3}{3} + (-3)^2 + 24 - \ln(e) + 9(e-1) + \ln(1) = \\ &= -9 + 9 + 24 - 1 + 9e - 9 = 14 + 9e\end{aligned}$$

42.

a) $f(x) = x^2 - 1$ anula-se no -1 e no 1 , mudando de sinal. Logo:

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3 (x^2 - 1) dx &= \int_{-3}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^3 = \\ &= \frac{(-1)^3}{3} - (-1) - \frac{(-3)^3}{3} + (-3) + \frac{1^3}{3} - 1 - \frac{(-1)^3}{3} + (-1) + \frac{3^3}{3} - 3 - \frac{1^3}{3} + 1 = \\ &= -\frac{(-3)^3}{3} + (-3) + \frac{3^3}{3} - 3 = \left(\frac{3^3}{3} - 3 \right) - \left(\frac{(-3)^3}{3} - (-3) \right) = 12\end{aligned}$$

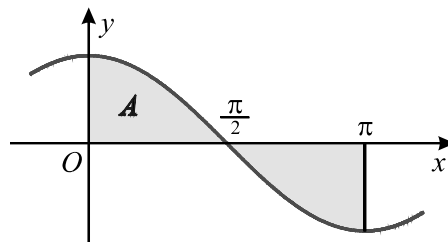
Nota que: $\int_{-3}^3 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-3}^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 3 \right) - \left(\frac{(-3)^3}{3} - (-3) \right) = 12$

b)
$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \operatorname{tg} x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1 + \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} \right) dx = [x + \ln |\cos x|]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= \frac{\pi}{3} + \ln \left| \cos \frac{\pi}{3} \right| + \frac{\pi}{6} - \ln \left| \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right| = \frac{\pi}{2} + \ln \frac{1}{2} - \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + \ln \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} + \ln \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{2} + \ln \left(\sqrt{3} \right)^{-1} = \frac{\pi}{2} - \ln (\sqrt{3})\end{aligned}$$

43. Tem-se $\int_0^\pi \cos x dx = [\operatorname{sen} x]_0^\pi = \operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} 0 = 0 - 0 = 0$

Interpretação: Seja $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$ Área da região do plano compreendida entre os eixos coordenados e o gráfico da função definida em $[0, \frac{\pi}{2}]$ por $y = \cos x$.

Tem-se $\int_0^\pi \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x dx = A + (-A) = 0$.



Tema 7 | Números complexos

1. Introdução aos números complexos. Operar com números complexos

1.

- a) $\operatorname{Re}(3 + 4i) = 3$, ou seja, a parte real de $3 + 4i$ é 3.
 $\operatorname{Im}(3 + 4i) = 4$, ou seja, a parte imaginária de $3 + 4i$ é 4.
- b) $\operatorname{Re}(\sqrt{2} - \pi i) = \sqrt{2}$, ou seja, a parte real de $\sqrt{2} - \pi i$ é $\sqrt{2}$.
 $\operatorname{Im}(\sqrt{2} - \pi i) = -\pi$, ou seja, a parte imaginária de $\sqrt{2} - \pi i$ é $-\pi$.
- c) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} + i\right) = \frac{1}{2}$, ou seja, a parte real de $\frac{1}{2} + i$ é $\frac{1}{2}$.
 $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{2} + i\right) = 1$, ou seja, a parte imaginária de $\frac{1}{2} + i$ é 1.
- d) $\operatorname{Re}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{7}{8}i\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{5}$, ou seja, a parte real de $-\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{7}{8}i$ é $-\frac{2\sqrt{3}}{5}$.
 $\operatorname{Im}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{7}{8}i\right) = -\frac{7}{8}$, ou seja, a parte imaginária de $-\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{7}{8}i$ é $-\frac{7}{8}$.
- e) $\operatorname{Re}(9i) = 0$, ou seja, a parte real de $9i$ é 0.
 $\operatorname{Im}(9i) = 9$, ou seja, a parte imaginária de $9i$ é 9.
- f) $\operatorname{Re}(-i) = 0$, ou seja, a parte real de $-i$ é 0.
 $\operatorname{Im}(-i) = -1$, ou seja, a parte imaginária de $-i$ é -1 .
- g) $\operatorname{Re}(7) = 7$, ou seja, a parte real de 7 é 7.
 $\operatorname{Im}(7) = 0$, ou seja, a parte imaginária de 7 é 0.
- h) $\operatorname{Re}\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5}$, ou seja, a parte real de $-\frac{1}{5}$ é $-\frac{1}{5}$.
 $\operatorname{Im}\left(-\frac{1}{5}\right) = 0$, ou seja, a parte imaginária de $-\frac{1}{5}$ é 0.

2.

- | | | |
|---------------|--------------------|--------------------|
| a) Imaginário | b) Imaginário | c) Imaginário puro |
| d) Real | e) Imaginário puro | f) Real |
| g) Real | h) Imaginário puro | |

3. $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = \frac{8}{15} \Leftrightarrow a + \frac{4}{3} = \frac{8}{15} \Leftrightarrow a = -\frac{4}{5}$

4. $\operatorname{Re}(w) \times \operatorname{Im}(w) = 30 \Leftrightarrow (x + 3) \times (x + 4) = 30 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3x + 12 - 30 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 + 7x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 1 \times (-18)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm 11}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-7 + 11}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -9$
Como x designa um número real positivo, vem que $x = 2$.

5. Seja $z = a + bi$, com $a < 0$ e $b < 0$.

$$\begin{cases} a = 2b \\ a \times b = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 2b^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = -5 \end{cases}$$

Logo, $z = -10 - 5i$.

6.

a) $B = \{-5, -2 + 3i, 5i\}$

b) $-2 + 3i$ e $5i$ são imaginários, sendo $5i$ imaginário puro.

7.

a) $\text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 2 = 0 \vee x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$

b) Seja $z = x + (x^3 - 4x)i$, com $x \in \mathbb{R}$, um elemento de A .
 Se z não é real, então $x \neq -2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 2$, pelo que, em particular, se tem $x \neq 0$.
 Portanto, z não é imaginário puro.

8. $x = -1 \rightarrow z = -1 + f(-1)i = -1 + 0i = -1$
 $x = 0 \rightarrow z = 0 + f(0)i = 0 + 3i = 3i$
 $x = 1 \rightarrow z = 1 + f(1)i = 1 + 6i$

a) $3i$ b) $1 + 6i$ c) -1

9. $[\text{Re}(z) - 2][\text{Im}(z) + 3] = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) - 2 = 0 \vee \text{Im}(z) + 3 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \text{Re}(z) = 2 \vee \text{Im}(z) = -3$

a) $z = 2$ b) $z = -3i$

c) $z = 2 + 5i, z = 2 - 3i, z = 1 - 3i$ (por exemplo)

10. $a + \sqrt{12}i = 2a - 3 + b\sqrt{3}i \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2a - 3 \\ \sqrt{12} = b\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \sqrt{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$
 Logo, $z = 3 + 2i$.

11.

a) $2x + y + (x - 2y)i = 1 - 7i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x - 2(1 - 2x) = -7 \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x - 2 + 4x = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 5x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = -1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad x + x^3 i &= -y + (y^3 + 16)i \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^3 = y^3 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ (-y)^3 = y^3 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ -y^3 = y^3 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 2y^3 = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y^3 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$12. \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}; a, b \in \mathbb{R} \text{ e } v = a + bi$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} z = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} i \\ w = 3a - 2bi \\ \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \\ w = z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3a - 2bi = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} i \\ \frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = \frac{x}{x+1} \\ -2b = \frac{x+1}{x} \\ x^2 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + 1} \\ -2b = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{-\frac{1}{2}} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -1 \\ -2b = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \text{Logo, } v &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

13.

$$\text{a)} \quad (8 + 9i) + (-3 + i) = 8 + 9i - 3 + i = 5 + 10i$$

$$\text{b)} \quad (-6 + 4i) + (-4 - i) - 2i = -6 + 4i - 4 - i - 2i = -10 + i$$

$$\text{c)} \quad (4 - 5i) - (6 - 2i) = 4 - 5i - 6 + 2i = -2 - 3i$$

$$\text{d)} \quad 8 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 8 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{15}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{e)} \quad \left(\frac{1}{4} - 3i\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{5}i\right) - \left(\frac{5}{6} - \frac{8}{15}i\right) = \frac{1}{4} - 3i + \frac{3}{2} - \frac{1}{5}i - \frac{5}{6} + \frac{8}{15}i = \frac{11}{12} - \frac{8}{3}i$$

$$\text{f)} \quad 2 \times (-3i) = -6i$$

$$\text{g)} \quad 8i \times (-7i) = -56i^2 = 56$$

$$\text{h)} \quad -3(4 + 9i) = -12 - 27i$$

$$\text{i)} \quad -6i(8 - 9i) = -48i + 54i^2 = -54 - 48i$$

$$\text{j)} \quad (5 - 2i)(3 + 4i) = 15 + 20i - 6i - 8i^2 = 15 + 20i - 6i + 8 = 23 + 14i$$

$$\text{k)} \quad (3 + 8i)(3 - 8i) = 3^2 - (8i)^2 = 9 - 64i^2 = 9 + 64 = 73$$

$$\begin{aligned} \text{l)} \quad \left(\frac{3}{4} + \sqrt{3}i\right)\left(\frac{5}{2} + \sqrt{12}i\right) &= \frac{15}{8} + \frac{3}{4}\sqrt{12}i + \frac{5}{2}\sqrt{3}i + \sqrt{36}i^2 = \\ &= \frac{15}{8} + \frac{3}{4} \times 2\sqrt{3}i + \frac{5}{2}\sqrt{3}i - 6 = \frac{15}{8} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i + \frac{5}{2}\sqrt{3}i - 6 = -\frac{33}{8} + 4\sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{m)} \quad & (2 - 3i)^2(3 - i) - 3i(3 + 10i) = (4 - 12i + 9i^2)(3 - i) - 9i - 30i^2 = \\
 & = (4 - 12i - 9)(3 - i) - 9i + 30 = (-5 - 12i)(3 - i) - 9i + 30 = \\
 & = -15 + 5i - 36i + 12i^2 - 9i + 30 = -15 + 5i - 36i - 12 - 9i + 30 = 3 - 40i
 \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & 2i(x + yi) - (2 - 3i) = -10 + 9i \Leftrightarrow 2xi + 2yi^2 - 2 + 3i = -10 + 9i \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 2xi - 2y - 2 + 3i = -10 + 9i \Leftrightarrow (-2y - 2) + (2x + 3)i = -10 + 9i \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 2 = -10 \\ 2x + 3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 3 \end{cases} \\
 \\
 \text{b)} \quad & (5 - 4i)(x - yi) + 2i(6 - i) = 5(-4 + i) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 5x - 5yi - 4xi - 4y + 12i + 2 = -20 + 5i \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (5x - 4y + 2) + (-5y - 4x + 12)i = -20 + 5i \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4y + 2 = -20 \\ -5y - 4x + 12 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4y = -22 \\ -4x - 5y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-22 + 4y}{5} \\ -4 \times \frac{-22 + 4y}{5} - 5y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-22 + 4y}{5} \\ \frac{88 - 16y}{5} - 5y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-22 + 4y}{5} \\ 88 - 16y - 25y = -35 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-22 + 4y}{5} \\ -41y = -123 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-22 + 12}{5} \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & 2i^3 - 3i^4 = 2 \times (-i) - 3 = -3 - 2i \\
 \\
 \text{b)} \quad & i(4i - 3) - i^5 = -4 - 3i - i^{4 \times 1 + 1} = -4 - 3i - i = -4 - 4i \\
 \\
 \text{c)} \quad & i^{27} - i^3(i - 2i^{13}) = i^{27} - i^4 + 2i^{16} = i^{4 \times 6 + 3} - 1 + 2i^{4 \times 4 + 0} = i^3 - 1 + 2i^0 = \\
 & = -i - 1 + 2 = 1 - i \\
 \\
 \text{d)} \quad & 3i^7 - 5i^{10} + 7i^{13} - 9i^{15} = 3i^{4 \times 1 + 3} - 5i^{4 \times 2 + 2} + 7i^{4 \times 3 + 1} - 9i^{4 \times 3 + 3} = \\
 & = 3i^3 - 5i^2 + 7i^1 - 9i^3 = -3i + 5 + 7i + 9i = 5 + 13i \\
 \\
 \text{e)} \quad & (9i^{17} + 2i^{42})(4i^{28} + 3i^{35}) = (9i^{4 \times 4 + 1} + 2i^{4 \times 10 + 2})(4i^{4 \times 7 + 0} + 3i^{4 \times 8 + 3}) = \\
 & = (9i - 2)(4 + 3i^3) = (9i - 2)(4 - 3i) = 36i + 27 - 8 + 6i = 19 + 42i \\
 \\
 \text{f)} \quad & (1 + 4i)^3 - (7i^{90} - 8i^{37}) = \\
 & = 1^3 + 3 \times 1^2 \times 4i + 3 \times 1 \times (4i)^2 + (4i)^3 - (7i^{4 \times 22 + 2} - 8i^{4 \times 9 + 1}) = \\
 & = 1 + 12i - 48 - 64i - (7i^2 - 8i^1) = -47 - 52i + 7 + 8i = -40 - 44i \\
 \\
 \text{g)} \quad & (1 + 2i)^2(2 - 3i)^2 = (1 + 4i - 4)(4 - 12i - 9) = (-3 + 4i)(-5 - 12i) = \\
 & = 15 + 36i - 20i + 48 = 63 + 16i
 \end{aligned}$$

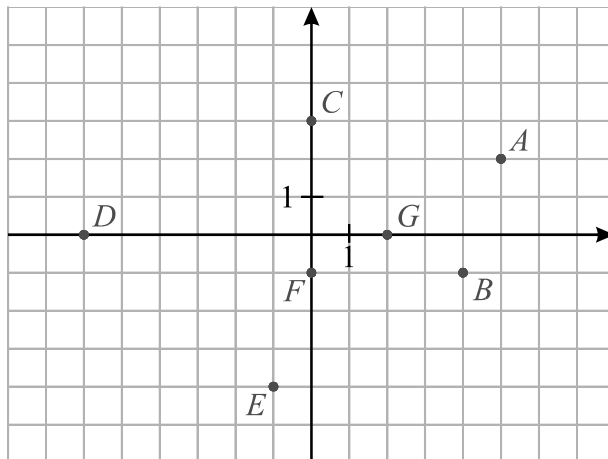
$$\text{h)} \quad (1 - 2i)^4 = 1^4 + 4 \times 1^3 \times (-2i) + 6 \times 1^2 \times (-2i)^2 + 4 \times 1 \times (-2i)^3 + (-2i)^4 = 1 - 8i - 24 + 32i + 16 = -7 + 24i$$

$$\text{i)} \quad (1 + 3i)^2(1 + 3i)^3(1 - 3i)^5 = (1 + 3i)^5(1 - 3i)^5 = [(1 + 3i)(1 - 3i)]^5 = [1 - (3i)^2]^5 = (1 + 9)^5 = 10^5 = 100\,000$$

$$\text{j)} \quad [(1 + i)^5]^2(1 - i)^{10} = (1 + i)^{10}(1 - i)^{10} = [(1 + i)(1 - i)]^{10} = (1 + 1)^{10} = 2^{10} = 1\,024$$

$$\begin{aligned} \text{k)} \quad & (2 + i)^8(3 + i)^8 \times \frac{5^{-6}}{(1+i)^5} = [(2 + i)(3 + i)]^8 \times \frac{5^{-6}}{(1+i)^5} = \\ & = (6 + 2i + 3i - 1)^8 \times \frac{5^{-6}}{(1+i)^5} = (5 + 5i)^8 \times \frac{5^{-6}}{(1+i)^5} = \\ & = [5(1 + i)]^8 \times \frac{5^{-6}}{(1+i)^5} = 5^8 \times (1 + i)^8 \times \frac{5^{-6}}{(1+i)^5} = \frac{5^8 \times (1+i)^8 \times 5^{-6}}{(1+i)^5} = \\ & = 5^2 \times (1 + i)^3 = 25 \times (1^3 + 3 \times 1^2 \times i + 3 \times 1 \times i^2 + i^3) = \\ & = 25 \times (1 + 3i - 3 - i) = 25 \times (-2 + 2i) = -50 + 50i \end{aligned}$$

16.



17.

$$\text{a)} \quad \sqrt{6} \qquad \text{b)} \quad \pi \qquad \text{c)} \quad 8 \qquad \text{d)} \quad \frac{5}{3}$$

18.

$$\text{a)} \quad \left| \sqrt{7} + 3i \right| = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + 3^2} = \sqrt{7 + 9} = \sqrt{16} = 4$$

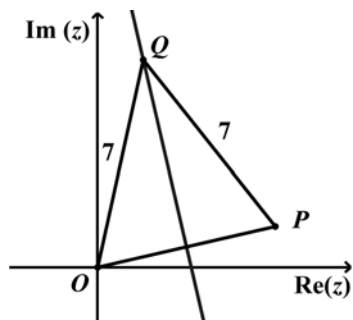
$$\text{b)} \quad \left| -8 - 6i \right| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

$$\text{c)} \quad \left| \frac{\sqrt{15}}{7} - i \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{7} \right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{15}{49} + 1} = \sqrt{\frac{64}{49}} = \frac{8}{7}$$

$$\text{d)} \quad |3i - (2\sqrt{2} + 4i)| = |3i - 2\sqrt{2} - 4i| = |-2\sqrt{2} - i| = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{8+1} = 3$$

$$\text{e)} \quad |(2-i)^2 + 5i| = |4 - 4i - 1 + 5i| = |3 + i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

19.



$$\overline{OP} + 7 + 7 = 20 \Leftrightarrow \overline{OP} = 6$$

Logo, o módulo de z é 6.

$$\begin{aligned} 20. \quad |z^2 + 2iz| = 0 &\Leftrightarrow |z(z + 2i)| = 0 \Leftrightarrow |z||z + 2i| = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \vee |z + 2i| = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 0 \vee z + 2i = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = -2i \end{aligned}$$

21.

$$\text{a)} \quad |z^3 - 4z| = |z(z^2 - 4)| = |z||z^2 - 4| = |z||z + 2||z - 2| = |z||z + 2||z - 2|$$

$$\text{b)} \quad |z^2| = |z \times z| = |z| \times |z| = |z|^2$$

$$22. \quad |z - w| = |z + (-w)| \leq |z| + |-w| = |z| + |w|$$

23.

$$\text{a)} \quad 9 - 5i \qquad \text{b)} \quad -10 + \sqrt{3}i \qquad \text{c)} \quad \frac{3}{2}i$$

$$\text{d)} \quad -\pi i \qquad \text{e)} \quad 8 \qquad \text{f)} \quad \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

24.

$$\text{a)} \quad \frac{7}{2} - 3i + \overline{\frac{7}{2} - 3i} = 2 \times \frac{7}{2} = 7$$

$$\text{b)} \quad 8 + 5i - \overline{(-3 + i)} = 8 + 5i - (-3 + i) = 8 + 5i + 3 - i = 11 + 4i$$

$$\text{c)} \quad 2 \overline{(9 + i)} + i \overline{(i - 4)} = 2(9 - i) + i(-4 - i) = 18 - 2i - 4i + 1 = 19 - 6i$$

$$\text{d)} \quad (2 + 3i) \overline{(5 + \frac{1}{2}i)} = (2 + 3i)(5 - \frac{1}{2}i) = 10 - i + 15i + \frac{3}{2} = \frac{23}{2} + 14i$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & (4 + 9i) \overline{(4 + 9i)} - \left(\sqrt{5} - \frac{1}{3}i \right) \overline{\left(\sqrt{5} - \frac{1}{3}i \right)} = |4 + 9i|^2 - \left| \sqrt{5} - \frac{1}{3}i \right|^2 = \\ & = \left(\sqrt{4^2 + 9^2} \right)^2 - \left(\sqrt{\left(\sqrt{5} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2} \right)^2 = 4^2 + 9^2 - \left(\left(\sqrt{5} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right) = \\ & = 16 + 81 - 5 - \frac{1}{9} = \frac{827}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad & (1 + 3i)^2 \overline{(-8 + 6i)} = (1 + 6i - 9) \overline{(-8 + 6i)} = (-8 + 6i) \overline{(-8 + 6i)} = \\ & = |-8 + 6i|^2 = \left(\sqrt{(-8)^2 + 6^2} \right)^2 = (-8)^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad & \sum_{k=1}^{20} \left(\sqrt{2k-1} + i \right) \overline{\left(\sqrt{2k-1} + i \right)} = \sum_{k=1}^{20} \left| \sqrt{2k-1} + i \right|^2 = \\ & = \sum_{k=1}^{20} \left(\sqrt{\left(\sqrt{2k-1} \right)^2 + 1^2} \right)^2 = \sum_{k=1}^{20} \left(\left(\sqrt{2k-1} \right)^2 + 1^2 \right) = \\ & = \sum_{k=1}^{20} (2k - 1 + 1) = \sum_{k=1}^{20} (2k) = 2 \sum_{k=1}^{20} k = 2 \times \frac{1+20}{2} \times 20 = 420 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{25.} \quad & z = x^2 - 6 - 4xi - \overline{(x + x^3 i)} = x^2 - 6 - 4xi - (x - x^3 i) = \\ & = x^2 - 6 - 4xi - x + x^3 i = (x^2 - x - 6) + (-4x + x^3) i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & z \text{ é um número real se e só se } \operatorname{Im}(z) = 0 \\ & -4x + x^3 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 2 = 0 \vee x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad z \text{ é um número imaginário puro se e só se } \operatorname{Im}(z) \neq 0 \wedge \operatorname{Re}(z) = 0.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) = 0 & \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im}(z) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2$$

$$\text{Logo, } x = 3.$$

26.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2 + yi + \overline{(3x - 4i)} = \overline{8 - 9i} \Leftrightarrow 2 + yi + 3x + 4i = 8 + 9i \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (2 + 3x) + (y + 4)i = 8 + 9i \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 3x = 8 \\ y + 4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & i^{22} + 2 \overline{(x - 3yi)} = 3 i^{51} (\sqrt{3} + 2i) \overline{(\sqrt{3} + 2i)} \Leftrightarrow i^2 + 2(x + 3yi) = 3 i^3 |\sqrt{3} + 2i|^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -1 + 2x + 6yi = -3i |\sqrt{3} + 2i|^2 \Leftrightarrow -1 + 2x + 6yi = -3i \left((\sqrt{3})^2 + 2^2 \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -1 + 2x + 6yi = -21i \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 2x = 0 \\ 6y = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{7}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad x + yi + (\overline{x - yi}) &= x^2 - 3 + 2 \times \overline{(2 + 5i)} \Leftrightarrow x + yi + x + yi = x^2 - 3 + 2 \times (2 - 5i) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2x + 2yi = x^2 - 3 + 4 - 10i \Leftrightarrow 2x + 2yi = x^2 + 1 - 10i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x^2 + 1 \\ 2y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 = 0 \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -5 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d)} \quad (x + yi)^2 + 8y + 12i &= 8 + (x + yi)(\overline{x + yi}) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x^2 + 2xyi - y^2 + 8y + 12i = 8 + |x + yi|^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 8y + (2xy + 12)i = 8 + x^2 + y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 8y = 8 + x^2 + y^2 \\ 2xy + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - 8y + 8 = 0 \\ xy + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4y + 4 = 0 \\ xy + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - 2)^2 = 0 \\ xy + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y - 2 = 0 \\ xy + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 2x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -3 \end{cases}
\end{aligned}$$

27. Seja $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad 3\bar{z} + 9 &= 6i \Leftrightarrow 3(a - bi) + 9 = 6i \Leftrightarrow 3a - 3bi + 9 = 6i \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 3a + 9 - 3bi = 6i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 9 = 0 \\ -3b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Logo, $z = -3 - 2i$.

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad z + 2\bar{z} + 5i &= 12 \Leftrightarrow a + bi + 2(a - bi) + 5i = 12 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a + bi + 2a - 2bi + 5i = 12 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 3a + (-b + 5)i = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 12 \\ -b + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}
\end{aligned}$$

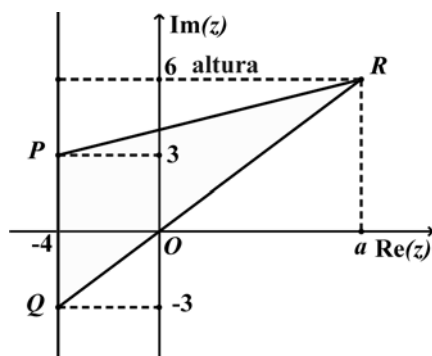
Logo, $z = 4 + 5i$.

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad z^2 + 4z - \overline{(z^2)} &= 8(-1 + 2i) \Leftrightarrow (a + bi)^2 + 4(a + bi) - \overline{(a + bi)^2} = -8 + 16i \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 + 4a + 4bi - \overline{a^2 - b^2 + 2abi} = -8 + 16i \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 + 4a + 4bi - (a^2 - b^2 - 2abi) = -8 + 16i \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 + 4a + 4bi - a^2 + b^2 + 2abi = -8 + 16i \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 4a + (4b + 4ab)i = -8 + 16i \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = -8 \\ 4b + 4ab = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ 4b - 8b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Logo, $z = -2 - 4i$.

28. $w = -4 + 3i$; $\bar{w} = -4 - 3i$; $z = a + 6i$

base $\rightarrow \overline{PQ} = 6$ altura $\rightarrow a + 4$ área $\rightarrow 36$



$$\frac{6 \times (a+4)}{2} = 36 \Leftrightarrow 6a + 24 = 72 \Leftrightarrow a = 8$$

29. $\overline{(-z)} = \overline{(-1 \times z)} = \overline{(-1)} \times \overline{(z)} = -1 \times \bar{z} = -\bar{z}$

30. A mediatriz do segmento de reta $[PQ]$ é o eixo real, que passa pela origem do referencial.

31. $|\bar{z} + \bar{w}| = |\overline{z + w}| = |z + w|$

32.

a) $(z + \bar{z})^2 - (z - \bar{z})^2 = [2 \operatorname{Re}(z)]^2 - [2i \operatorname{Im}(z)]^2 = 4 [\operatorname{Re}(z)]^2 - 4i^2 [\operatorname{Im}(z)]^2 =$
 $= 4 [\operatorname{Re}(z)]^2 + 4 [\operatorname{Im}(z)]^2 = 4 ([\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2) = 4 |z|^2$

b) $(|z| + |\bar{z}|)^2 = (|z| + |z|)^2 = (2|z|)^2 = 4|z|^2 = 4z\bar{z}$

c) $|z + i|^2 = (z + i)(\overline{z + i}) = (z + i)(\bar{z} + \bar{i}) = (z + i)(\bar{z} - i) = z\bar{z} - iz + i\bar{z} - i^2 =$
 $= |z|^2 + i(\bar{z} - z) + 1 = |z|^2 + i \times [-2i \operatorname{Im}(z)] + 1 = |z|^2 - 2i^2 \operatorname{Im}(z) + 1 =$
 $= |z|^2 + 2 \operatorname{Im}(z) + 1$

33. Tem-se $z = a - ai$, com $a \in \mathbb{R}$. Portanto, $\bar{z}i = (a + ai)i = ai + ai^2 = -a + ai$. O afixo de $-a + ai$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

34. Seja $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Tem-se:

$$z = \bar{z}i \Leftrightarrow a + bi = (a - bi)i \Leftrightarrow a + bi = ai - bi^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + bi = b + ai \Leftrightarrow a = b$$

Portanto, o afixo de z pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

- 35.** Seja $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq b$). Tem-se $\bar{z}i = (a - bi)i = ai - bi^2 = b + ai$. Assim, P tem coordenadas (a, b) e Q tem coordenadas (b, a) . A mediatriz do segmento de reta $[PQ]$ é a reta perpendicular a $[PQ]$ que passa no ponto médio de $[PQ]$. O ponto médio de $[PQ]$ tem coordenadas $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$, pelo que o ponto médio de $[PQ]$ tem coordenadas iguais. Por outro lado, tem-se $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (b, a) - (a, b) = (b - a, a - b)$. Portanto, um vetor perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ é o vetor $\vec{v} (a - b, a - b)$, que é um vetor de coordenadas iguais. A reta que passa num ponto de coordenadas iguais e tem a direção de um vetor de coordenadas iguais é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

- 36.**
a) Seja r o raio da circunferência c . Como a circunferência c está centrada no ponto O , tem-se $|z| = |w| = r$. Como $|\bar{z}| = |z|$ e $|\bar{w}| = |w|$, tem-se $|\bar{z}| = |\bar{w}| = r$, pelo que os pontos R e S pertencem à circunferência c .
b) Seja $z = a + bi$ e seja $w = c + di$. P tem coordenadas (a, b) e Q tem coordenadas (c, d) . Como o segmento de reta $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência c , o ponto médio de $[PQ]$ é a origem do referencial. Assim, tem-se $\frac{a+c}{2} = 0$ e $\frac{b+d}{2} = 0$. Por outro lado, tem-se $\bar{z} = a - bi$ e $\bar{w} = c - di$, pelo que o ponto R tem coordenadas $(a, -b)$ e o ponto S tem coordenadas $(c, -d)$. O ponto médio de $[RS]$ tem coordenadas $(\frac{a+c}{2}, \frac{-b-d}{2}) = (\frac{a+c}{2}, -\frac{b+d}{2}) = (0, 0)$. Portanto, o ponto médio de $[RS]$ é a origem do referencial. Assim, o segmento de reta $[RS]$ é um diâmetro da circunferência c .

- 37.**
a) $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1-i^2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
b) $\frac{1}{2+4i} = \frac{2-4i}{(2+4i)(2-4i)} = \frac{2-4i}{4-16i^2} = \frac{2-4i}{4+16} = \frac{2-4i}{20} = \frac{1-2i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{5}i$
c) $\frac{1}{\sqrt{2}-2i} = \frac{\sqrt{2}+2i}{(\sqrt{2}-2i)(\sqrt{2}+2i)} = \frac{\sqrt{2}+2i}{2-4} = \frac{\sqrt{2}+2i}{-2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i$
d) $\frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}i} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}i}{(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}i)(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}i)} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}i}{\frac{1}{16} + \frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}i}{\frac{25}{144}} = \frac{1}{25} - \frac{4}{25}i$
e) $\frac{1}{3i} = \frac{-3i}{3i \times (-3i)} = \frac{-3i}{9} = -\frac{1}{3}i$
f) $\frac{1}{-\frac{2}{5}i} = \frac{\frac{2}{5}i}{-\frac{2}{5}i \times \frac{2}{5}i} = \frac{\frac{2}{5}i}{\frac{4}{25}} = \frac{5}{2}i$
- 38.** $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} + \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{\bar{z}}{4} + \frac{\bar{w}}{4} = 4\bar{z} + 4\bar{w} = 4(\bar{z} + \bar{w}) = 4(\overline{z+w})$

$$39. \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} + \frac{z}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} + \frac{z}{|z|^2} = \frac{z+\bar{z}}{|z|^2} = \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2}$$

40.

$$a) \quad \frac{6i}{2+3i} = \frac{6i(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{12i+18}{4+9} = \frac{18+12i}{13} = \frac{18}{13} + \frac{12}{13}i$$

$$b) \quad \frac{5-4i}{3i} = \frac{(5-4i)(-3i)}{3i \times (-3i)} = \frac{-15i-12}{9} = \frac{-12-15i}{9} = -\frac{12}{9} - \frac{15}{9}i = -\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$$

$$c) \quad \frac{3+5i}{1+3i} = \frac{(3+5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{3-9i+5i+15}{1+9} = \frac{18-4i}{10} = \frac{18}{10} - \frac{4}{10}i = \frac{9}{5} - \frac{2}{5}i$$

$$d) \quad \frac{2+i}{-3-4i} = \frac{(2+i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)} = \frac{-6+8i-3i-4}{9+16} = \frac{-10+5i}{25} = -\frac{10}{25} + \frac{5}{25}i = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

$$e) \quad \frac{5-6i-7i^2-8i^3}{1+2i+3i^2-4i^3} = \frac{5-6i+7+8i}{1+2i-3+4i} = \frac{12+2i}{-2+6i} = \frac{(12+2i)(-2-6i)}{(-2+6i)(-2-6i)} = \frac{-24-72i-4i+12}{4+36} =$$

$$= \frac{-12-76i}{40} = -\frac{12}{40} - \frac{76}{40}i = -\frac{3}{10} - \frac{19}{10}i$$

$$f) \quad \frac{8i}{2-i} + 2i = \frac{8i(2+i)}{(2-i)(2+i)} + 2i = \frac{16i-8}{4+1} + 2i = \frac{-8+16i}{5} + 2i = -\frac{8}{5} + \frac{16}{5}i + 2i =$$

$$= -\frac{8}{5} + \frac{26}{5}i$$

$$g) \quad \frac{5-i}{5+i} - \frac{i^{26}+21i^{37}}{13} = \frac{(5-i)^2}{(5+i)(5-i)} - \frac{i^2+21i}{13} = \frac{25-10i-1}{25+1} - \frac{-1+21i}{13} =$$

$$= \frac{24-10i}{26} - \frac{-1+21i}{13} = \frac{24}{26} - \frac{10}{26}i + \frac{1}{13} - \frac{21}{13}i = \frac{12}{13} - \frac{5}{13}i + \frac{1}{13} - \frac{21}{13}i = 1 - 2i$$

$$41. \quad z = \frac{x+2i}{1-i} - (1-5i) = \frac{(x+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} - (1-5i) = \frac{x+xi+2i-2}{1+1} - (1-5i) =$$

$$= \frac{x-2+(x+2)i}{2} - (1-5i) = \frac{x-2}{2} + \frac{x+2}{2}i - 1 + 5i = \frac{x-2}{2} - 1 + \frac{x+2}{2}i + 5i =$$

$$= \frac{x-2-2}{2} + \frac{x+2+10}{2}i = \frac{x-4}{2} + \frac{x+12}{2}i$$

$$a) \quad z \text{ é um número imaginário puro} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{2} = 0 \wedge \frac{x+12}{2} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \wedge x \neq -12 \Leftrightarrow x = 4$$

$$b) \quad z \text{ é um número real} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+12}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -12$$

$$42. \quad \text{Seja } z = a + bi. \text{ Tem-se } \frac{z-i}{z+i} = \frac{a+bi-i}{a+bi+i} = \frac{a+(b-1)i}{a+(b+1)i} = \frac{[a+(b-1)i][a-(b+1)i]}{a^2+(b+1)^2} =$$

$$= \frac{a^2 - a(b+1)i + a(b-1)i + (b-1)(b+1)}{a^2+(b+1)^2} = \frac{a^2 - a(b+1)i + a(b-1)i + b^2-1}{a^2+(b+1)^2} =$$

$$= \frac{a^2 - (b+1-b+1)ai + b^2-1}{a^2+(b+1)^2} = \frac{a^2 - 2ai + b^2-1}{a^2+(b+1)^2} = \frac{(a^2+b^2-1)-2ai}{a^2+(b+1)^2} =$$

$$= \frac{a^2+b^2-1}{a^2+(b+1)^2} - \frac{2a}{a^2+(b+1)^2}i$$

Como $\frac{z-i}{z+i}$ é um número real, tem-se $-\frac{2a}{a^2+(b+1)^2} = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Como $z \neq 0$, concluímos que z é imaginário puro.

2. Forma trigonométrica de um número complexo

43.

a) $\frac{5\pi}{18}$

b) $\frac{5\pi}{18} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c₁) $\frac{5\pi}{18} + 2\pi = \frac{41\pi}{18}$

c₂) $\frac{5\pi}{18} + 4\pi = \frac{77\pi}{18}$

c₃) $\frac{5\pi}{18} - 2\pi = -\frac{31\pi}{18}$

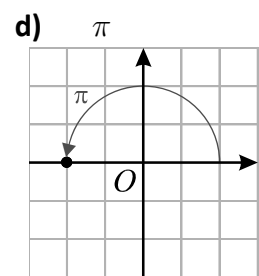
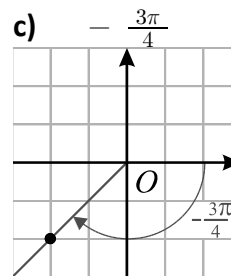
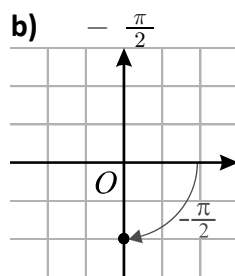
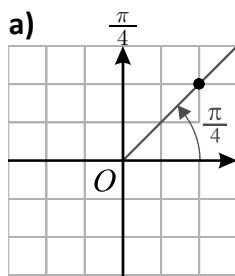
44.

a) π

b) $\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$

c) $\pi - \frac{\pi}{5} - \frac{5\pi}{8} = \frac{7\pi}{40}$; $\frac{7\pi}{40} - 2\pi = -\frac{73\pi}{40}$

45.



46.

a) $\frac{\pi}{7}$

b) $\frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c₁) $\frac{\pi}{7} + 2\pi = \frac{15\pi}{7}$

c₂) $\frac{\pi}{7} + 4\pi = \frac{29\pi}{7}$

c₃) $\frac{\pi}{7} - 2\pi = -\frac{13\pi}{7}$

47.

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{5\pi}{6}$

c) $-\frac{2\pi}{3}$

d) $-\frac{\pi}{6}$

48. $1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{9}{25}$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta + \frac{9}{25} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{16}{25}$$

Como $\theta \in]\pi, 2\pi[$ e $\operatorname{tg} \theta > 0$, vem que θ pertence ao terceiro quadrante, pelo que quer o seu seno quer o seu cosseno são negativos.

$$\cos \theta = -\frac{3}{5} \text{ e } \sin \theta = -\frac{4}{5}$$

$$z = \cos \theta + i \sin \theta = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

49. Não, pois os números complexos não nulos que têm os seus afijos pertencentes à bissetriz do primeiro quadrante têm argumento principal igual a $\frac{\pi}{4}$ e os números complexos não nulos que têm os seus afijos pertencentes à bissetriz do terceiro quadrante têm argumento principal igual a $-\frac{3\pi}{4}$.

50. Tem-se, para um certo número natural k , $\alpha = \beta + 2k\pi$. Portanto, $\frac{\alpha - \beta}{\pi} = \frac{2k\pi}{\pi} = 2k$, que é um número natural par.

51.

a) $e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

c) $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. De facto, o módulo de $-i$ é 1 e o seu argumento principal é $-\frac{\pi}{2}$.

d) $\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = e^{-i\frac{\pi}{5}}$

52.

a) $4e^{i0}$ b) $7e^{i\frac{\pi}{2}}$

c) $12e^{i\pi}$ d) $9e^{-i\frac{\pi}{2}}$

e) $3 + 3i = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

De facto, tem-se:

- $|3 + 3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

- sendo θ um argumento de $3 + 3i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{3} = 1$.

- como o afixo de $3 + 3i$ pertence ao primeiro quadrante e $\operatorname{tg} \theta = 1$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$ é $\frac{\pi}{4}$.

f) $-2 + \sqrt{12}i = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

De facto, tem-se:

- $\left| -2 + \sqrt{12}i \right| = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{12})^2} = \sqrt{16} = 4$

- sendo θ um argumento de $-2 + \sqrt{12}i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = -\frac{\sqrt{12}}{2} = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$.
- como o afixo de $-2 + \sqrt{12}i$ pertence ao segundo quadrante e $\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3}$, nestas condições o valor de θ que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$ é $\frac{2\pi}{3}$.

g) $-\sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

De facto, tem-se:

• $|\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

• sendo θ um argumento de $-\sqrt{3} - i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

• como o afixo de $-\sqrt{3} - i$ pertence ao terceiro quadrante e $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$ é $-\frac{5\pi}{6}$.

53.

a) $6e^{i\frac{\pi}{2}} = 6 \times \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = 6 \times (\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}) = 6 \times (0 + i) = 6i$

b) $5e^{i\frac{3\pi}{2}} = 5 \times \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = 5 \times (\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}) = 5 \times (0 - i) = -5i$

c) $3e^{i\pi} = 3 \times \operatorname{cis} \pi = 3 \times (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = 3 \times (-1 + 0) = -3$

d) $\sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{8} \times \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \times (\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = 2 + 2i$

e) $2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \times \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} = 2 \times (\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}) = 2 \times (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1 + \sqrt{3}i$

f) $3e^{i\frac{7\pi}{6}} = 3 \times \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6} = 3 \times (\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}) = 3 \times (-\cos \frac{\pi}{6} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}) =$
 $= 3 \times (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

54.

a) $\frac{1+i}{2i} = \frac{(1+i) \times (-2i)}{2i \times (-2i)} = \frac{2-2i}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

• $|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• Sendo θ um argumento de $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$.

• Como o afixo de $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ pertence ao quarto quadrante e $\operatorname{tg} \theta = -1$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$ é $-\frac{\pi}{4}$.

Logo, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b) $\frac{-2i}{i+1} = \frac{-2i \times (1-i)}{(1+i) \times (1-i)} = \frac{-2-2i}{1+1} = \frac{-2-2i}{2} = -1 - i$

• $|-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

• Sendo θ um argumento de $-1 - i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} = 1$.

• Como o afixo de $-1 - i$ pertence ao terceiro quadrante e $\operatorname{tg} \theta = 1$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$ é $-\frac{3\pi}{4}$.

Logo, $-1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

- c) $\frac{2+i}{3-i} = \frac{(2+i) \times (3+i)}{(3-i) \times (3+i)} = \frac{6+2i+3i-1}{9+1} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
- $\left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 - Sendo θ um argumento de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.
 - Como o afixo de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ pertence ao primeiro quadrante e $\operatorname{tg} \theta = 1$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $] -\pi, \pi]$ é $\frac{\pi}{4}$.
- Logo, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

- d) $(i-2)^3 - 9i = i^3(-2)^0 + 3i^2(-2)^1 + 3i^1(-2)^2 + i^0(-2)^3 - 9i =$
 $= -i + 6 + 12i - 8 - 9i = -2 + 2i$
- $|-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
 - Sendo θ um argumento de $-2 + 2i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = -\frac{2}{2} = -1$.
 - Como o afixo de $-2 + 2i$ pertence ao segundo quadrante e $\operatorname{tg} \theta = -1$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $] -\pi, \pi]$ é $\frac{3\pi}{4}$.
- Logo, $-2 + 2i = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

55. $z^2 = \left(\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{3}} i \right)^2 =$
 $= \sqrt{6} + \sqrt{3} - 2 \times \sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{3}} \times \sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{3}} i + (\sqrt{6} - \sqrt{3}) \times i^2 =$
 $= \sqrt{6} + \sqrt{3} - 2 \times \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{3})} i - (\sqrt{6} - \sqrt{3}) =$
 $= \sqrt{6} + \sqrt{3} - 2 \times \sqrt{6 - 3} i - \sqrt{6} + \sqrt{3} =$
 $= 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} i$
- $|2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} i| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{12 + 12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$
 - Sendo θ um argumento de $2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = -\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -1$.
 - Como o afixo de $2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} i$ pertence ao quarto quadrante e $\operatorname{tg} \theta = -1$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $] -\pi, \pi]$ é $-\frac{\pi}{4}$.
- Logo, $2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} i = 2\sqrt{6} e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

56. $|z| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (-\sqrt{3} \operatorname{Re}(z))^2} = 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + 3(\operatorname{Re}(z))^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{4(\operatorname{Re}(z))^2} = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2} = 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2} = 2 \Leftrightarrow (\operatorname{Re}(z))^2 = 4 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 2 \vee \operatorname{Re}(z) = -2$

Mas como $\operatorname{Im}(z) < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \operatorname{Re}(z) < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) > 0$; logo, $\operatorname{Re}(z) = 2$ e
 $\operatorname{Im}(z) = -\sqrt{3} \times 2 = -2\sqrt{3}$.

Vem, então, que $z = 2 - 2\sqrt{3}i$.

- $|2 - 2\sqrt{3}i| = 4$

- Sendo θ um argumento de $2 - 2\sqrt{3}i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3}$.
 - Como o afixo de $2 - 2\sqrt{3}i$ pertence ao quarto quadrante e $\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3}$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$ é $-\frac{\pi}{3}$.
- Vem, então, que $z = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

- 57.** Se α é o número real pertencente ao intervalo $[-\pi, 0]$ tal que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$, o afixo de z pertence ao terceiro quadrante, pelo que $x < 0$ e $y < 0$.
Se $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$, então $\frac{y}{x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x$.

$$\text{Se } |z| = \sqrt{52}, \text{ então } \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{52}, \text{ pelo que } x^2 + y^2 = 52 \Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 = 52 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{9}x^2 = 52 \Leftrightarrow \frac{13}{9}x^2 = 52 \Leftrightarrow x^2 = 36$$

$$\text{Como } x < 0, \text{ vem que } x = -6 \text{ e } y = \frac{2}{3} \times (-6) = -4.$$

$$\text{Logo, } z = -6 - 4i.$$

58.

$$\text{a) } z = \frac{1}{\cos \theta} e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \frac{1}{\cos \theta} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\cos \theta} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] = \\ = \frac{1}{\cos \theta} (\operatorname{sen} \theta + i \cos \theta) = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} + i \frac{\cos \theta}{\cos \theta} = \operatorname{tg} \theta + i$$

$$\text{b) } 2 + z^2 = 2 + (\operatorname{tg} \theta + i)^2 = 2 + \operatorname{tg}^2 \theta + 2i \operatorname{tg} \theta - 1 = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta + 2i \operatorname{tg} \theta = \\ = \frac{1}{\cos^2 \theta} + 2i \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} + i \frac{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} + i \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\cos^2 \theta} = \\ = \frac{1}{\cos^2 \theta} [1 + i \operatorname{sen}(2\theta)]$$

$$\text{59. } z = \frac{i - \operatorname{tg} \theta}{i + \operatorname{tg} \theta} = \frac{i - \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}}{i + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}} = \frac{i \cos \theta - \operatorname{sen} \theta}{i \cos \theta + \operatorname{sen} \theta} = \frac{-\operatorname{sen} \theta + i \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta + i \cos \theta} = \\ = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{e^{i(\frac{\pi}{2} + \theta)}}{e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)}} = e^{i[\frac{\pi}{2} + \theta - (\frac{\pi}{2} - \theta)]} = e^{2i\theta}$$

$$\text{60. } 5\left(\cos \frac{13\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{13\pi}{5}\right) = 5\left(\cos\left(\frac{13\pi}{5} - 2\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{5} - 2\pi\right)\right) = \\ = 5\left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{5}\right) = 5e^{i\frac{3\pi}{5}} \\ \rho = 5 \quad \wedge \quad \theta = \frac{3\pi}{5}$$

61.

$$\bullet \left| -6 + \sqrt{12}i \right| = \sqrt{(-6)^2 + (\sqrt{12})^2} = \sqrt{36 + 12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\bullet \text{ Sendo } \theta \text{ um argumento de } -6 + \sqrt{12}i, \text{ tem-se } \operatorname{tg} \theta = -\frac{\sqrt{12}}{6} = -\frac{2\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\bullet \text{ Como o afixo de } -6 + \sqrt{12}i \text{ pertence ao segundo quadrante e } \operatorname{tg} \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ nestas condições, o valor de } \theta \text{ que pertence ao intervalo }]-\pi, \pi] \text{ é } \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{Vem, então, que } \rho e^{i\theta} = 4\sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ logo } \rho = 4\sqrt{3} \quad \wedge \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Como se pretende } \theta \in [3\pi, 5\pi[, \text{ vem que } \theta = \frac{5\pi}{6} + 4\pi = \frac{29\pi}{6}.$$

62.

a) $6e^{i(\pi + \frac{3\pi}{5})} = 6e^{i\frac{8\pi}{5}}$

b) $6e^{-i\frac{3\pi}{5}}$

c) $(6 \times 3)e^{i(\frac{3\pi}{5} + \frac{11\pi}{15})} = 18e^{i\frac{4\pi}{3}}$

d) $\frac{3}{6}e^{i(\frac{11\pi}{15} - \frac{3\pi}{5})} = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{15}}$

e) $\frac{1e^{i0}}{6e^{i\frac{3\pi}{5}}} = \frac{1}{6}e^{i(0 - \frac{3\pi}{5})} = \frac{1}{6}e^{-i\frac{3\pi}{5}}$

f) $3^5e^{i\frac{11\pi}{15} \times 5} = 243e^{i\frac{11\pi}{3}}$

63.

a) $w = \left(\sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{36}}\right)^6 + \left(\sqrt[12]{12}e^{i\frac{5\pi}{18}}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^6e^{i\frac{5\pi}{36} \times 6} + \left(\sqrt[12]{12}\right)^6e^{i\frac{5\pi}{18} \times 6} =$
 $= 2^2e^{i\frac{5\pi}{6}} + \sqrt{12}e^{i\frac{5\pi}{3}} = 4e^{i\frac{5\pi}{6}} + 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{3}} =$

$$= 4 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} + 2\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3} = 4 \times \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right) + 2\sqrt{3} \times \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}\right) =$$

$$= 4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 2\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2\sqrt{3} + 2i + \sqrt{3} - 3i = -\sqrt{3} - i$$

• $|- \sqrt{3} - i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

• Sendo θ um argumento de $-\sqrt{3} - i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

• Como o afixo de $-\sqrt{3} - i$ pertence ao terceiro quadrante e $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$ é $-\frac{5\pi}{6}$.

Logo, $w = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

b) $w^4 = 2^4e^{-i\frac{5\pi}{6} \times 4} = 16e^{-i\frac{10\pi}{3}} = 16e^{i(-\frac{10\pi}{3} + 4\pi)} = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$16e^{i\frac{2\pi}{3}} = 16 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} = 16 \times \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right) = 16 \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -8 + 8\sqrt{3}i$$

Vem, então, que $w^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

64.

a) $\left(\sqrt{3} - 2i - \frac{1}{i}\right)^5 = \left(\sqrt{3} - 2i - \frac{-i}{i \times (-i)}\right)^5 = \left(\sqrt{3} - 2i + i\right)^5 = \left(\sqrt{3} - i\right)^5$

• $|\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

• Sendo θ um argumento de $\sqrt{3} - i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

• Como o afixo de $\sqrt{3} - i$ pertence ao quarto quadrante e $\operatorname{tg} \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$ é $-\frac{\pi}{6}$.

Logo, $\sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, pelo que $\left(\sqrt{3} - i\right)^5 = 2^5e^{-i\frac{\pi}{6} \times 5} = 32e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

$$32e^{-i\frac{5\pi}{6}} = 32 \operatorname{cis} \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 32 \times \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 32 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -16\sqrt{3} - 16i$$

b) $\left(\frac{-2i \times e^{\frac{i\pi}{6}}}{-1-\sqrt{3}i}\right)^8 = \left(\frac{2e^{-\frac{i\pi}{2}} \times e^{\frac{i\pi}{6}}}{-1-\sqrt{3}i}\right)^8 =$

- $|-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- Sendo θ um argumento de $-1-\sqrt{3}i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{3}$.
- Como o afixo de $-1-\sqrt{3}i$ pertence ao terceiro quadrante e $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{3}$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$ é $-\frac{2\pi}{3}$.

$$= \left(\frac{2e^{-\frac{i\pi}{3}}}{2e^{-\frac{2\pi}{3}}}\right)^8 = \left(e^{i(-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})}\right)^8 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^8 = e^{\frac{i\pi}{3} \times 8} = e^{\frac{8i\pi}{3}} = e^{i(\frac{8\pi}{3} - 2\pi)} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

65. $z - i^3 = 3 - 4i + i = 3 - 3i$

- $|3 - 3i| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
- Sendo θ um argumento de $3 - 3i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = -\frac{3}{3} = -1$.
- Como o afixo de $3 - 3i$ pertence ao quarto quadrante e $\operatorname{tg} \theta = -1$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$ é $-\frac{\pi}{4}$.

Logo, $z - i^3 = 3 - 3i = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Por outro lado, $-3 = 3e^{i\pi}$.

$$-3w(z - i^3) = 3e^{i\pi} \times 2e^{i\alpha} \times 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 18\sqrt{2}e^{i(\pi + \alpha - \frac{\pi}{4})} = 18\sqrt{2}e^{i(\alpha + \frac{3\pi}{4})}$$

Para que $18\sqrt{2}e^{i(\alpha + \frac{3\pi}{4})}$ seja um imaginário puro $\alpha + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\alpha + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\alpha \in [0, 2\pi[$, vem que $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} \vee \alpha = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

66. Designando o módulo de z por ρ , tem-se: $\frac{z}{z} - \frac{\bar{z}}{z} = \frac{\rho e^{i\alpha}}{\rho e^{-i\alpha}} - \frac{\rho e^{-i\alpha}}{\rho e^{i\alpha}} =$

$$= e^{2i\alpha} - e^{-2i\alpha} = \cos(2\alpha) + i\operatorname{sen}(2\alpha) - [\cos(-2\alpha) + i\operatorname{sen}(-2\alpha)] =$$

$$= \cos(2\alpha) + i\operatorname{sen}(2\alpha) - [\cos(2\alpha) - i\operatorname{sen}(2\alpha)] =$$

$$= \cos(2\alpha) + i\operatorname{sen}(2\alpha) - \cos(2\alpha) + i\operatorname{sen}(2\alpha) =$$

$$= 2\operatorname{sen}(2\alpha)i$$

67. $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

- $|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

- Sendo θ um argumento de $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

- Como o afixo de $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ pertence ao quarto quadrante e $\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3}$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$ é $-\frac{\pi}{3}$.

Logo, $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

As parcelas da soma $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ estão em progressão geométrica de razão z .

$$\begin{aligned}\text{Portanto, } z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 &= z \times \frac{1-z^6}{1-z} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \times \frac{1 - \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^6}{1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = \\ &= e^{-i\frac{\pi}{3}} \times \frac{1 - e^{-2\pi i}}{1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \times \frac{1-1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \times 0 = 0\end{aligned}$$

68.

- $\left| -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$
 - Sendo θ um argumento de $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
 - Como o afixo de $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ pertence ao segundo quadrante e $\operatorname{tg} \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $] -\pi, \pi]$ é $\frac{5\pi}{6}$.
- Logo, $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

- $\left| -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$
 - Sendo θ um argumento de $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
 - Como o afixo de $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ pertence ao terceiro quadrante e $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $] -\pi, \pi]$ é $-\frac{5\pi}{6}$.
- Logo, $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

$$\begin{aligned}\text{Tem-se, para qualquer } n \text{ natural, } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{12n+3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{12n+3} &= \\ &= \left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{12n+3} - \left(e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)^{12n+3} = e^{i\frac{60n\pi+15\pi}{6}} - e^{-i\frac{60n\pi+15\pi}{6}} = \\ &= e^{i\left(10n\pi + \frac{15\pi}{6}\right)} - e^{-i\left(10n\pi + \frac{15\pi}{6}\right)} = e^{i\left(5n \times 2\pi + \frac{5\pi}{2}\right)} - e^{-i\left(5n \times 2\pi + \frac{5\pi}{2}\right)} = \\ &= e^{i\frac{5\pi}{2}} - e^{-i\frac{5\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}} = i - (-i) = 2i\end{aligned}$$

69. $\rho e^{i\theta} \times 8e^{i\frac{3\pi}{4}} = 8\rho e^{i\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right)}$

- $\left| -\sqrt{8} - \sqrt{8}i \right| = \sqrt{\left(-\sqrt{8}\right)^2 + \left(-\sqrt{8}\right)^2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$
- Sendo θ um argumento de $-\sqrt{8} - \sqrt{8}i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = 1$.
- Como o afixo de $-\sqrt{8} - \sqrt{8}i$ pertence ao terceiro quadrante e $\operatorname{tg} \theta = 1$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $] -\pi, \pi]$ é $-\frac{3\pi}{4}$.

Logo, $-\sqrt{8} - \sqrt{8}i = 4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

$$\rho e^{i\theta} \times 8e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{8} - \sqrt{8}i \Leftrightarrow 8\rho e^{i\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right)} = 4e^{-i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\rho = 4 \quad \wedge \quad \theta + \frac{3\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \theta = -\frac{3\pi}{7} - \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \theta = -\frac{33\pi}{28} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\theta \in [2\pi, 4\pi[$, vem que $\theta = -\frac{33\pi}{28} + 4\pi = \frac{79\pi}{28}$.

Logo, $\rho = \frac{1}{2}$ e $\theta = \frac{79\pi}{28}$.

70.

- $|\sqrt{2} + \sqrt{2}i| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$
 - Sendo θ um argumento de $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.
 - Como o afixo de $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ pertence ao primeiro quadrante e $\operatorname{tg} \theta = 1$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $] -\pi, \pi]$ é $\frac{\pi}{4}$.
- Logo, $\sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)z^3 = 16e^{i\frac{7\pi}{4}} \Leftrightarrow 2e^{i\frac{\pi}{4}} \times (\rho e^{i\theta})^3 = 16e^{i\frac{7\pi}{4}} \Leftrightarrow 2e^{i\frac{\pi}{4}} \times \rho^3 e^{i3\theta} = 16e^{i\frac{7\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\rho^3 e^{i(\frac{\pi}{4}+3\theta)} = 16e^{i\frac{7\pi}{4}} \Leftrightarrow 2\rho^3 = 16 \quad \wedge \quad \frac{\pi}{4} + 3\theta = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^3 = 8 \quad \wedge \quad 3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \rho = 2 \quad \wedge \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, vem que $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi = \frac{7\pi}{6}$.

Logo, $\rho = 2$ e $\theta = \frac{7\pi}{6}$.

71. Seja $z = \rho e^{i\theta}$.

a) $|z|z^3 = -16 \Leftrightarrow \rho(\rho e^{i\theta})^3 = 16e^{i\pi} \Leftrightarrow \rho\rho^3 e^{i3\theta} = 16e^{i\pi} \Leftrightarrow \rho^4 e^{i3\theta} = 16e^{i\pi} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \rho^4 = 16 \quad \wedge \quad 3\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \rho = 2 \quad \wedge \quad \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, vem $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Para $k = 1$, vem $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi = \pi$.

Para $k = 2$, vem $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi = \frac{5\pi}{3}$.

As soluções são: $2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $2e^{i\pi}$ e $2e^{i\frac{5\pi}{3}}$

b) $z^3 = 9\bar{z} \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^3 = 9\rho e^{-i\theta} \Leftrightarrow \rho^3 e^{i3\theta} = 9\rho e^{-i\theta} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \rho^3 = 9\rho \quad \wedge \quad 3\theta = -\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \rho^3 - 9\rho = 0 \quad \wedge \quad 4\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\rho^2 - 9)\rho = 0 \quad \wedge \quad \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\rho^2 - 9 = 0 \quad \vee \quad \rho = 0) \quad \wedge \quad \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\rho^2 = 9 \quad \vee \quad \rho = 0) \quad \wedge \quad \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Como $\rho \geq 0$, vem que $\rho = 3 \quad \vee \quad \rho = 0$.

Para $k = 0$, vem $\theta = 0$.

Para $k = 1$, vem $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Para $k = 2$, vem $\theta = \pi$.

Para $k = 3$, vem $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

As soluções são: 0 , $3e^{i0}$, $3e^{i\frac{\pi}{2}}$, $3e^{i\pi}$ e $3e^{i\frac{3\pi}{2}}$

c) $z^5 = -8|z|\bar{z} \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^5 = 8e^{i\pi}\rho\rho e^{-i\theta} \Leftrightarrow \rho^5 e^{i5\theta} = 8\rho^2 e^{i(\pi-\theta)} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \rho^5 = 8\rho^2 \quad \wedge \quad 5\theta = \pi - \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \rho^5 - 8\rho^2 = 0 \quad \wedge \quad 6\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\rho^3 - 8)\rho^2 = 0 \quad \wedge \quad \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\rho^2 = 0 \quad \vee \quad \rho^3 - 8 = 0) \quad \wedge \quad \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\rho = 0 \quad \vee \quad \rho = 2) \quad \wedge \quad \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, vem $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Para $k = 1$, vem $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$.

Para $k = 2$, vem $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$.

Para $k = 3$, vem $\theta = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$.

Para $k = 4$, vem $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$.

Para $k = 5$, vem $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$.

As soluções são: 0 , $2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $2e^{i\frac{7\pi}{6}}$, $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$ e $2e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

d)
$$\begin{aligned} z^3 &= 3i(\bar{z})^2 \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^3 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}(\rho e^{-i\theta})^2 \Leftrightarrow \rho^3 e^{i3\theta} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}\rho^2 e^{-i2\theta} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho^3 e^{i3\theta} = 3\rho^2 e^{i(\frac{\pi}{2}-2\theta)} \Leftrightarrow \rho^3 = 3\rho^2 \wedge 3\theta = \frac{\pi}{2} - 2\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho^3 - 3\rho^2 = 0 \wedge 5\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\rho - 3)\rho^2 = 0 \wedge \theta = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\rho^2 = 0 \vee \rho - 3 = 0) \wedge \theta = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\rho = 0 \vee \rho = 3) \wedge \theta = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Para $k = 0$, vem $\theta = \frac{\pi}{10}$.

Para $k = 1$, vem $\theta = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$.

Para $k = 2$, vem $\theta = \frac{\pi}{10} + \frac{4\pi}{5} = \frac{9\pi}{10}$.

Para $k = 3$, vem $\theta = \frac{\pi}{10} + \frac{6\pi}{5} = \frac{13\pi}{10}$.

Para $k = 4$, vem $\theta = \frac{\pi}{10} + \frac{8\pi}{5} = \frac{17\pi}{10}$.

As soluções são: 0 , $3e^{i\frac{\pi}{10}}$, $3e^{i\frac{\pi}{2}}$, $3e^{i\frac{9\pi}{10}}$, $3e^{i\frac{13\pi}{10}}$ e $3e^{i\frac{17\pi}{10}}$.

3. Raízes de um número complexo

72.
$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$z_k = \sqrt[3]{64} e^{i\frac{\frac{6\pi}{5} + 2k\pi}{3}} = 4e^{i\frac{6\pi+10k\pi}{15}}, k = 0, 1, 2$$

Para $k = 0$, vem $z_0 = 4e^{i\frac{6\pi}{15}} = 4e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

Para $k = 1$, vem $z_1 = 4e^{i\frac{6\pi+10\pi}{15}} = 4e^{i\frac{16\pi}{15}}$.

Para $k = 2$, vem $z_2 = 4e^{i\frac{6\pi+20\pi}{15}} = 4e^{i\frac{26\pi}{15}}$.

As raízes cúbicas de $64e^{i\frac{6\pi}{5}}$ são: $4e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $4e^{i\frac{16\pi}{15}}$ e $4e^{i\frac{26\pi}{15}}$.

73.

•
$$\left| -\frac{81}{2} + \frac{81\sqrt{3}}{2}i \right| = \left| 81\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \right| = |81| \times \left| -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right|$$

$$= 81 \times \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 81 \times \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 81$$

 • Sendo θ um argumento de $-\frac{81}{2} + \frac{81\sqrt{3}}{2}i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = -\frac{\frac{81\sqrt{3}}{2}}{\frac{81}{2}} = -\sqrt{3}$.

• Como o afixo de $-\frac{81}{2} + \frac{81\sqrt{3}}{2}i$ pertence ao segundo quadrante e $\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3}$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$ é $\frac{2\pi}{3}$.

Logo, $-\frac{81}{2} + \frac{81\sqrt{3}}{2}i = 81e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$z_k = \sqrt[4]{81} e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}} = 3e^{i\frac{2\pi+6k\pi}{12}} = 3e^{i\frac{\pi+3k\pi}{6}}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} \text{Para } k=0, \text{ vem } z_0 &= 3e^{i\frac{\pi}{6}} = 3 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} = 3 \times \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } k=1, \text{ vem } z_1 &= 3e^{i\frac{\pi+3\pi}{6}} = 3e^{i\frac{2\pi}{3}} = 3 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} = 3 \times \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right) = \\ &= 3 \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } k=2, \text{ vem } z_2 &= 3e^{i\frac{\pi+6\pi}{6}} = 3e^{i\frac{7\pi}{6}} = 3 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6} = 3 \times \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} \right) = \\ &= 3 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } k=3, \text{ vem } z_3 &= 3e^{i\frac{\pi+9\pi}{6}} = 3e^{i\frac{5\pi}{3}} = 3 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3} = 3 \times \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} \right) = \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

As raízes quartas de $-\frac{81}{2} + \frac{81\sqrt{3}}{2}i$ são:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i; \quad -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i; \quad -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \quad \text{e} \quad \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

74.

a) $z^3 = \frac{16}{z} \Leftrightarrow z^4 = 16 \wedge z \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16} e^{i\frac{0+2k\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \Leftrightarrow z = 2e^{i\frac{k\pi}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Para $k=0$, vem $z = 2e^{i0}$.

Para $k=1$, vem $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Para $k=2$, vem $z = 2e^{i\pi}$.

Para $k=3$, vem $z = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

As soluções da equação são: $2e^{i0}$, $2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $2e^{i\pi}$ e $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

b) $z^5 - zi = 0 \Leftrightarrow z(z^4 - i) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^4 - i = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^4 = i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[4]{1} e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = e^{i\frac{\pi+4k\pi}{8}}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Para $k=0$, vem $z = e^{i\frac{\pi}{8}}$.

Para $k=1$, vem $z = e^{i\frac{5\pi}{8}}$.

Para $k=2$, vem $z = e^{i\frac{9\pi}{8}}$.

Para $k=3$, vem $z = e^{i\frac{13\pi}{8}}$.

As soluções da equação são: 0 , $e^{i\frac{\pi}{8}}$, $e^{i\frac{5\pi}{8}}$, $e^{i\frac{9\pi}{8}}$ e $e^{i\frac{13\pi}{8}}$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad z^3 + 64e^{i\frac{3\pi}{5}} &= 0 \Leftrightarrow z^3 = -64e^{i\frac{3\pi}{5}} \Leftrightarrow z^3 = 64e^{i\pi} e^{i\frac{3\pi}{5}} \Leftrightarrow z^3 = 64e^{i(\pi+\frac{3\pi}{5})} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z^3 = 64e^{i\frac{8\pi}{5}} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{64} e^{i\frac{8\pi}{5} + \frac{2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2 \Leftrightarrow z = 4e^{i\frac{8\pi}{15} + \frac{10k\pi}{15}}, \quad k = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

Para $k = 0$, vem $z = 4e^{i\frac{8\pi}{15}}$.

Para $k = 1$, vem $z = 4e^{i\frac{18\pi}{15}} = 4e^{i\frac{6\pi}{5}}$.

Para $k = 2$, vem $z = 4e^{i\frac{28\pi}{15}}$.

As soluções da equação são: $e^{i\frac{8\pi}{15}}$, $e^{i\frac{6\pi}{5}}$ e $e^{i\frac{28\pi}{15}}$

$$\text{d)} \quad (z^2 + 9)(z^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 9 = 0 \vee z^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -9 \vee z^3 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{9} e^{i\frac{\pi+2k\pi}{2}}, \quad k = 0, 1 \vee z = \sqrt[3]{8} e^{i\frac{0+2k'\pi}{3}}, \quad k' = 0, 1, 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 3e^{i\frac{\pi+2k\pi}{2}}, \quad k = 0, 1 \vee z = 2e^{i\frac{2k'\pi}{3}}, \quad k' = 0, 1, 2 \Leftrightarrow$$

Para $k = 0$, vem $z = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Para $k = 1$, vem $z = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Para $k' = 0$, vem $z = 2e^{i0}$.

Para $k' = 1$, vem $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Para $k' = 2$, vem $z = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

As soluções da equação são: $3e^{i\frac{\pi}{2}}$, $3e^{i\frac{3\pi}{2}}$, $2e^{i0}$, $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ e $2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

- 75.** Uma vez que não conseguimos escrever $-21 + 20i$ na forma trigonométrica, porque não conhecemos o valor exato do ângulo cuja tangente é $-\frac{20}{21}$, vamos trabalhar na forma algébrica. Vejamos quais os valores reais de x e de y para os quais $(x + yi)^2 = -21 + 20i$.

x não pode ser zero porque se tal acontecesse $(x + yi)^2$ era um número real.

$$(x + yi)^2 = -21 + 20i \Leftrightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = -21 + 20i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -21 + 20i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -21 \\ 2xy = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -21 \\ xy = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -21 \\ y = \frac{10}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{100}{x^2} = -21 \\ y = \frac{10}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 100 = -21x^2 \\ y = \frac{10}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 21x^2 - 100 = 0 \\ y = \frac{10}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4 \times (-100)}}{2} \\ y = \frac{10}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{-21 \pm \sqrt{841}}{2} \\ y = \frac{10}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{-21 \pm 29}{2} \\ y = \frac{10}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{8}{2} \vee \underbrace{x^2 = \frac{-50}{2}}_{\text{condição impossível}} \\ y = \frac{10}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \frac{10}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \vee x = -2 \\ y = \frac{10}{x} \end{cases}$$

Se $x = 2$, vem que $y = 5$.

Se $x = -2$, vem que $y = -5$.

As raízes quadradas de $-21 + 20i$ são: $2 + 5i$ e $-2 - 5i$

- 76.** Sabe-se que existem n raízes índice n de um complexo e que todas têm o mesmo módulo e os seus argumentos estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$.

As raízes índice 6 de w são 6, todas elas com módulo $\frac{1}{3}$ -

Os seus argumentos são $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{15}$, $\frac{8\pi}{15} + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{15}$,

$$\frac{13\pi}{15} + \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi}{5}, \quad \frac{6\pi}{5} + \frac{\pi}{3} = \frac{23\pi}{15}, \quad \frac{23\pi}{15} + \frac{\pi}{3} = \frac{28\pi}{15}$$

As restantes raízes sextas de w são: $\frac{1}{3} e^{i\frac{8\pi}{15}}$, $\frac{1}{3} e^{i\frac{13\pi}{15}}$, $\frac{1}{3} e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $\frac{1}{3} e^{i\frac{23\pi}{15}}$ e $\frac{1}{3} e^{i\frac{28\pi}{15}}$

77.
$$\frac{\bar{w}}{-4w} = \frac{8e^{i\frac{2\pi}{3}}}{4e^{i\pi} \times 8e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{8e^{i\frac{2\pi}{3}}}{32e^{i(\pi - \frac{2\pi}{3})}} = \frac{8e^{i\frac{2\pi}{3}}}{32e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

As raízes quadradas de $\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{3}}$ são:

$$\sqrt{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2}}, \text{ com } k \in \{0, 1\} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi + 6k\pi}{6}}, \text{ com } k \in \{0, 1\}$$

Para $k = 0$, vem $z = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) =$
 $= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$

Para $k = 1$, vem $z = \frac{1}{2} e^{i\frac{7\pi}{6}} = \frac{1}{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6} = \frac{1}{2} \times \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} \right) =$
 $= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$

As raízes quadradas do número complexo $\frac{\bar{w}}{-4w}$ são :

$$\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$$

78.
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{z+w}{5-\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{5-\sqrt{6}i-\sqrt{6}+5i}{5-\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{5-\sqrt{6}+(5-\sqrt{6})i}{5-\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times (1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

• $\left| \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \times |1+i| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$

• Sendo θ um argumento de $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

• Como o afixo de $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ pertence ao primeiro quadrante e $\operatorname{tg} \theta = 1$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $] -\pi, \pi]$ é $\frac{\pi}{4}$.

Logo, $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

As raízes cúbicas de $e^{i\frac{\pi}{4}}$ são:

$$\sqrt[3]{1} e^{i\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}}, \text{ com } k \in \{0, 1, 2\} = e^{i\frac{\pi + 8k\pi}{12}}, \text{ com } k \in \{0, 1, 2\}$$

Para $k = 0$, vem $z = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Para $k = 1$, vem $z = e^{i\frac{9\pi}{12}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Para $k = 2$, vem $z = e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

As raízes cúbicas do número complexo $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{z+w}{5-\sqrt{6}}$ são: $e^{i\frac{\pi}{12}}$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ e $e^{i\frac{17\pi}{12}}$

79.

a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{i\frac{11\pi}{12}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i(\frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \text{cis } \frac{3\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $z_2 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \text{cis } \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

c) Trabalhando na forma algébrica:

$$\begin{aligned} \frac{z_3}{z_2} &= \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)}{(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{\sqrt{6}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

Trabalhando na forma trigonométrica:

$$z_3 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

- $|\sqrt{2} + \sqrt{2}i| = \sqrt{2} \times |1 + i| = \sqrt{2} \times \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

- Sendo θ um argumento de $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, tem-se $\text{tg } \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.

- Como o afixo de $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ pertence ao primeiro quadrante e $\text{tg } \theta = 1$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $] -\pi, \pi]$ é $\frac{\pi}{4}$.

Logo, $\sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$\frac{z_3}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = 2e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = 2e^{i\frac{\pi}{12}} = 2 \text{cis } \frac{\pi}{12} = 2 \times (\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}) \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} &= \cos \frac{\pi}{6} = \cos (2 \times \frac{\pi}{12}) = \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos^2 \frac{\pi}{12} - (1 - \cos^2 \frac{\pi}{12}) = \\ &= 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1 \end{aligned}$$

Mas se $2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, vem que $4 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Como $\cos \frac{\pi}{12}$ é positivo, logo $\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{3}+\frac{1}{2}}}{2} =$

$$= \frac{\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{1}}{2})^2}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{1}}{2}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1) \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Como } \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \text{ e } \sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\pi}{12} + \frac{2+\sqrt{3}}{4} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{4-2-\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Como } \sin \frac{\pi}{12} \text{ é positivo, logo } \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$(*) \quad 2 \times \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i \right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i$$

d) Pela alínea a), sabemos que $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Pela alínea c), sabemos que $\frac{z_3}{z_2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i$.

$$z = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_3}{z_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

e) $z^4 = w$

$$z = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$\bullet |z| = \left| \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i \right| = \frac{\sqrt{6}}{2} \times |1+i| = \frac{\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{1^2+1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

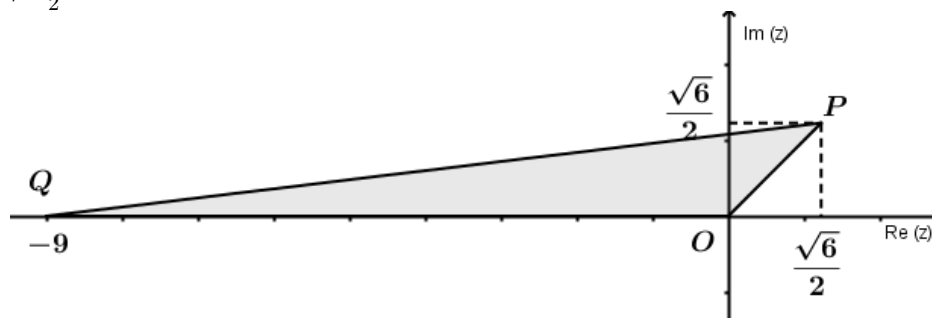
$$\bullet \text{ Sendo } \theta \text{ um argumento de } \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i, \text{ tem-se } \operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = 1.$$

$$\bullet \text{ Como o afixo de } \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i \text{ pertence ao primeiro quadrante e } \operatorname{tg} \theta = 1, \text{ nestas condições, o valor de } \theta \text{ que pertence ao intervalo }]-\pi, \pi] \text{ é } \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Logo, } \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$w = z^4 = \left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^4 = \left(\sqrt{3} \right)^4 e^{i\frac{\pi}{4} \times 4} = 9e^{i\pi} = -9$$

f) $z = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$ e $w = -9$



$$\text{Base} \rightarrow \overline{QO} = 9$$

$$\text{Altura} \rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$A_{[OPQ]} = \frac{9 \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{4}$$

80.

a) As raízes índice n de $\rho e^{i\theta}$ são da forma $z = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Ora, $\frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{\sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2(k+1)\pi}{n}}}{\sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}} = e^{i\left(\frac{\theta+2(k+1)\pi}{n} - \frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, o que prova o pretendido.

b) Como as raízes de índice n de $\rho e^{i\theta}$ estão em progressão geométrica de razão $e^{i\frac{2\pi}{n}}$, tem-se:

$$z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} = z_0 \times \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = z_0 \times \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = z_0 \times \frac{1 - 1}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

$$\begin{aligned} c) \quad z_0 \times z_1 \times \dots \times z_{n-1} &= \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}} \times \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2\pi}{n}} \times \dots \times \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}} = \\ &= \left(\sqrt[n]{\rho}\right)^n e^{i\frac{\theta+(\theta+2\pi)+\dots+(\theta+2(n-1)\pi)}{n}} \underset{\substack{\text{Soma dos } n \text{ primeiros termos de uma progressão aritmética de primeiro termo } \theta \text{ e razão } 2\pi}}{\downarrow} \rho e^{i\frac{\theta + \frac{\theta+(n-1) \times 2\pi \times n}{2}}{n}} = \rho e^{i\frac{\theta+\theta+2(n-1)\pi}{2} \times n} = \\ &= \rho e^{i\frac{2\theta+2(n-1)\pi}{2}} = \rho e^{i[\theta+(n-1)\pi]} = (\rho e^{i\theta}) \times e^{i(n-1)\pi} = (\rho e^{i\theta}) \times (e^{i\pi})^{n-1} = \\ &= w \times (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1} w \end{aligned}$$

81.

a)

$$\bullet \left| \sqrt{3} + i \right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\bullet \text{ Sendo } \theta \text{ um argumento de } \sqrt{3} + i, \text{ tem-se } \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

• Como o afixo de $\sqrt{3} + i$ pertence ao primeiro quadrante e $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, nestas condições, o valor de θ que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$ é $\frac{\pi}{6}$.

$$\text{Logo, } \sqrt{3} + i = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

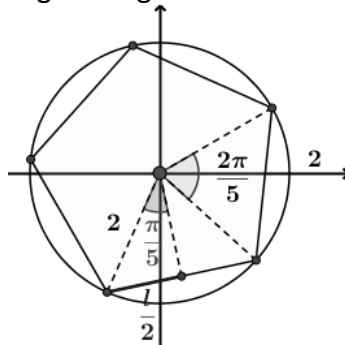
Sabe-se que existem n raízes índice n de um complexo e que todas têm o mesmo módulo e os seus agumentos estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$.

As raízes índice 5 de w são 5, todas elas com módulo 2.

$$\text{Os seus argumentos são } \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5} = \frac{17\pi}{30}, \frac{17\pi}{30} + \frac{2\pi}{5} = \frac{29\pi}{30}, \frac{29\pi}{30} + \frac{2\pi}{5} = \frac{41\pi}{30}, \frac{41\pi}{30} + \frac{2\pi}{5} = \frac{53\pi}{30}$$

As raízes quintas de w são: $2 e^{i\frac{\pi}{6}}, 2 e^{i\frac{17\pi}{30}}, 2 e^{i\frac{29\pi}{30}}, 2 e^{i\frac{41\pi}{30}} \text{ e } 2 e^{i\frac{53\pi}{30}}$

b) Seja l a medida do lado do pentágono regular.

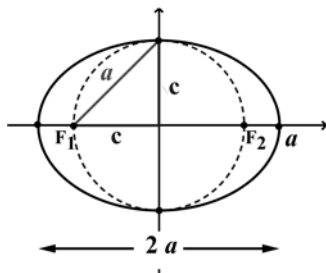


$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{5} = \frac{\frac{l}{2}}{2} = \frac{l}{4}$$

Logo, $l = 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$.

$$\text{Perímetro do pentágono} = 5l = 5 \times 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{5} = 20 \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$$

82.



$$\begin{aligned}
 c^2 + c^2 &= a^2 \Leftrightarrow 2c^2 = a^2 \Leftrightarrow c^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow c = \frac{a}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt[4]{a} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4 \Leftrightarrow a = \frac{a^4}{4} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow a\left(1 - \frac{a^3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{a^3}{4} = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{a^3}{4} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow a^3 = 4 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{4}
 \end{aligned}$$

Outro processo:

$a = a e^{i2\pi}$, com a maior do que 1.

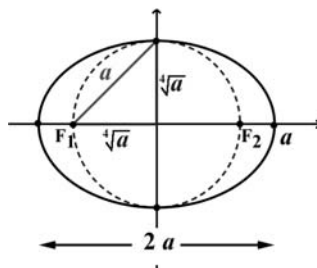
$$\sqrt[4]{a} e^{i2\pi} = \sqrt[4]{a} e^{i\frac{2\pi + 2k\pi}{4}} \text{ com } k \in \{0, 1, 2, 3\} = \sqrt[4]{a} e^{i\frac{\pi + k\pi}{2}} \text{ com } k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Para $k = 0$, vem $\sqrt[4]{a} e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt[4]{a} i$ cujo afixo é o ponto de coordenadas $(0, \sqrt[4]{a})$.

Para $k = 1$, vem $\sqrt[4]{a} e^{i\pi} = -\sqrt[4]{a}$ cujo afixo é o ponto de coordenadas $(-\sqrt[4]{a}, 0)$.

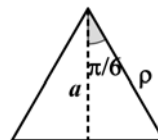
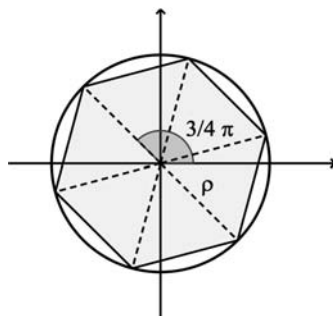
Para $k = 2$, vem $\sqrt[4]{a} e^{i\frac{3\pi}{2}} = -\sqrt[4]{a} i$ cujo afixo é o ponto de coordenadas $(0, -\sqrt[4]{a})$.

Para $k = 3$, vem $\sqrt[4]{a} e^{i2\pi} = \sqrt[4]{a}$ cujo afixo é o ponto de coordenadas $(\sqrt[4]{a}, 0)$.



$$\begin{aligned}
 (\sqrt[4]{a})^2 + (\sqrt[4]{a})^2 &= a^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{a} = a^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{a} = a^2 \Leftrightarrow (2\sqrt{a})^2 = (a^2)^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 4a = a^4 \Leftrightarrow 4a - a^4 = 0 \Leftrightarrow (4 - a^3)a = 0 \Leftrightarrow 4 - a^3 = 0 \vee a = 0 \Leftrightarrow a^3 = 4 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow a = \sqrt[3]{4} \quad \text{como } a > 1
 \end{aligned}$$

83.



O hexágono é formado por seis triângulos equiláteros; portanto, a área de cada um deles é $\sqrt{3}$. Designemos por ρ a medida dos lados de cada triângulo e por a a sua altura.

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{a}{\rho} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\rho} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}\rho}{2}$$

$$\text{Vem, então, que } \sqrt{3} = \frac{\rho \times \frac{\sqrt{3}\rho}{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{\rho \times \sqrt{3}\rho}{4} \Leftrightarrow \sqrt{3}\rho^2 = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \rho^2 = 4 \Leftrightarrow \rho = 2.$$

Então, uma raiz índice 6 de z é $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

$$\text{Logo, } z = \left(2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^6 = 2^6 e^{i\frac{3\pi \times 6}{4}} = 64 e^{i\frac{9\pi}{2}} = 64 e^{i\frac{\pi}{2}} = 64i.$$

84.

a) $b^2 - 4ac = 36 - 4 \times 18 = -36 < 0$

$$z^2 - 6z + 18 = 0 \Leftrightarrow z_1 = \frac{6 - i\sqrt{36}}{2} = 3 - 3i \text{ e } z_2 = \frac{6 + i\sqrt{36}}{2} = 3 + 3i$$

b) $b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 5 \times 2 = -36 < 0$

$$5z^2 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{36}}{10} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \text{ e } z_2 = \frac{-2 + i\sqrt{36}}{10} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

c) $b^2 - 4ac = 3 - 4 \times 7 = -25 < 0$

$$z^2 + \sqrt{3}z + 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{-\sqrt{3} - i\sqrt{25}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i \text{ e } z_2 = \frac{-\sqrt{3} + i\sqrt{25}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$

85. Tem-se $(-2)^3 + 6 \times (-2) + 20 = 0$, pelo que -2 é uma raiz do polinómio. Dividindo o polinómio $x^3 + 6x + 20$ por $x + 2$, vem:

-2	1	0	6	20
	-2	4	-20	
	1	-2	10	0

$$x^3 + 6x + 20 = (x + 2)(x^2 - 2x + 10)$$

$$x^2 - 2x + 10 = 0$$

$$b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 10 = -36 < 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{2 - i\sqrt{36}}{2} = 1 - 3i \text{ e } z_2 = \frac{2 + i\sqrt{36}}{2} = 1 + 3i$$

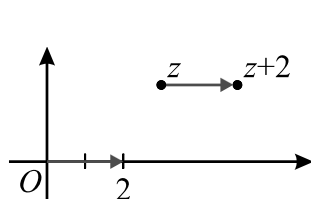
As restantes as raízes do polinómio são $1 + 3i$ e $1 - 3i$.

4. Operar com números complexos e transformações geométricas.

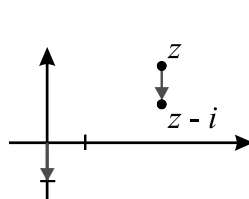
Condições em $\mathbb{C}$ e sua representação no plano complexo

86.

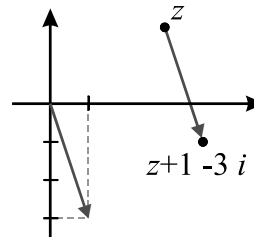
a)



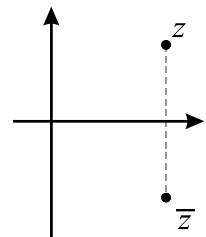
b)



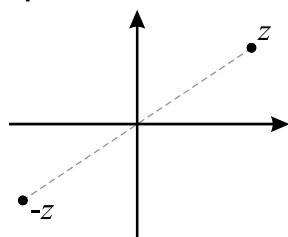
c)



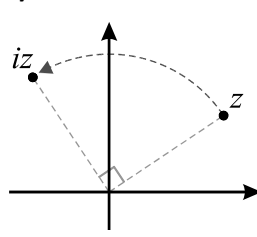
d)



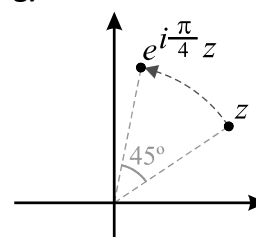
e)



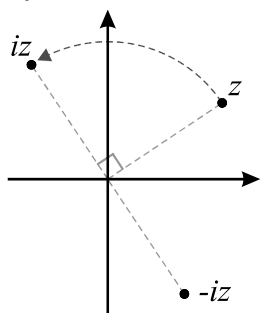
f)



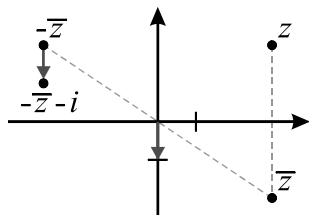
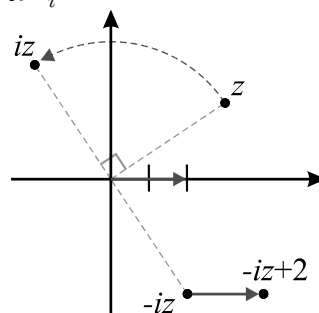
g)



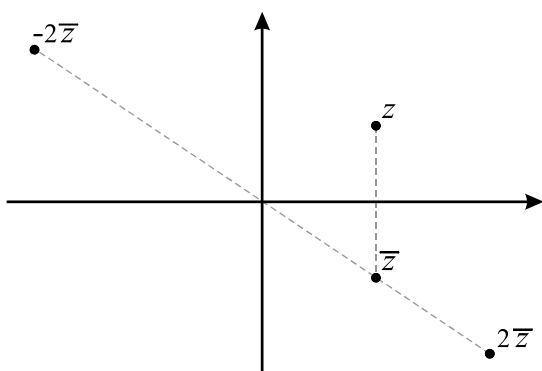
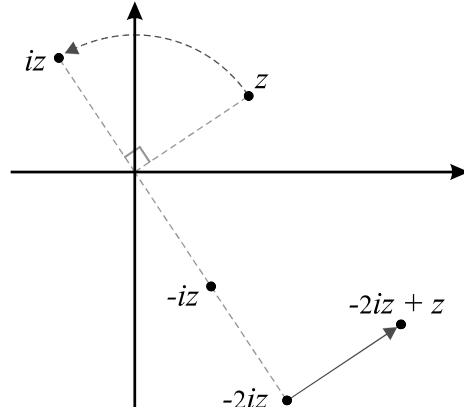
h)



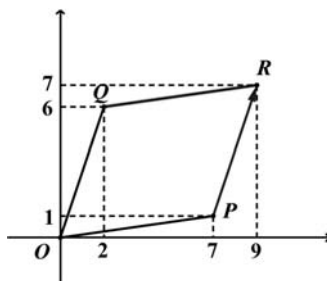
i)

j) $\frac{z}{i} + 2 = -iz + 2$ 

k)

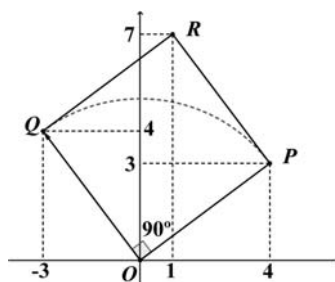
l) $(1 - 2i) = z - 2iz = -2iz + z$ 

87.



$$7 + i + 2 + 6i = 9 + 7i$$

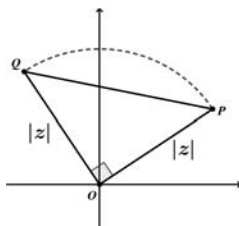
88.

a) 90°

$$\text{b) } w = i(4 + 3i) = -3 + 4i ; z + w = 4 + 3i - 3 + 4i = 1 + 7i$$

$$\text{c) } |z|^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

89.

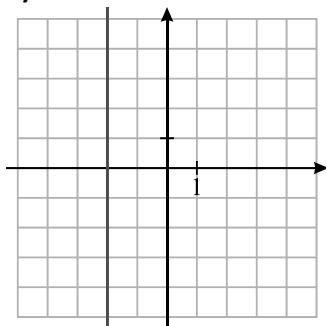


a) $\frac{|z| \times |z|}{2} = 8 \Leftrightarrow |z|^2 = 16 \Leftrightarrow |z| = 4$

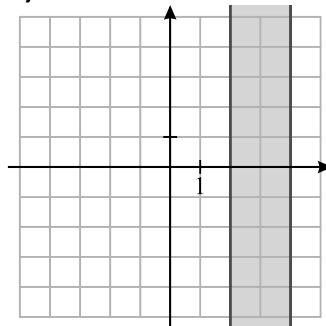
b) $|z + \bar{z}|^2 + |z - \bar{z}|^2 = |2 \operatorname{Re} z|^2 + |2 \operatorname{Im} z|^2 = 4 \operatorname{Re}^2 z + 4 \operatorname{Im}^2 z = 4 |z|^2 = 4 \times 16 = 64$

90.

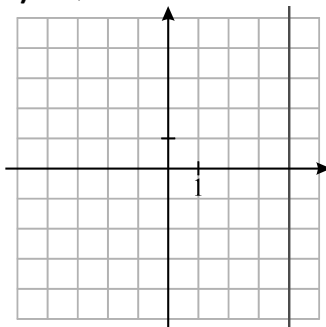
a)



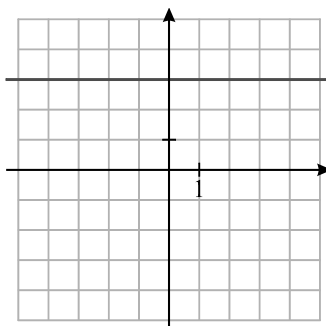
b)



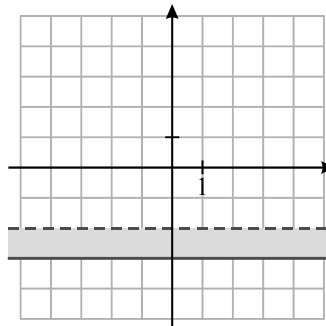
c) $z + \bar{z} = 8 \Leftrightarrow 2 \operatorname{Re} z = 8 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 4$



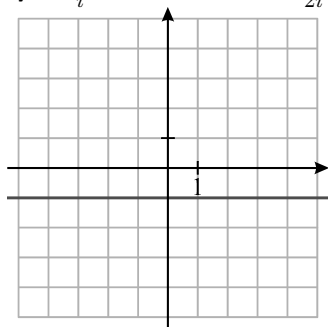
d)



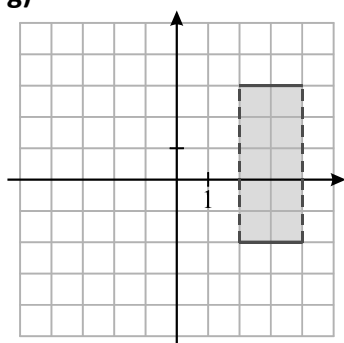
e)



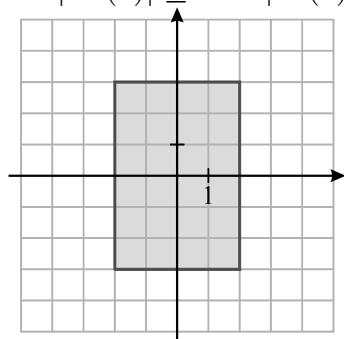
f) $\frac{2z-2\bar{z}}{i} = -4 \Leftrightarrow \frac{4z-4\bar{z}}{2i} = -4 \Leftrightarrow \frac{z-\bar{z}}{2i} = -1 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = -1$



g)

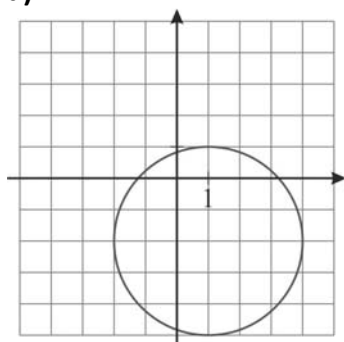


h) $|-3\operatorname{Re}(z)| \leq 6 \wedge |i\operatorname{Im}(z)| \leq 3 \Leftrightarrow 3|\operatorname{Re}(z)| \leq 6 \wedge |i||\operatorname{Im}(z)| \leq 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |\operatorname{Re}(z)| \leq 2 \wedge |\operatorname{Im}(z)| \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge -3 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 3$

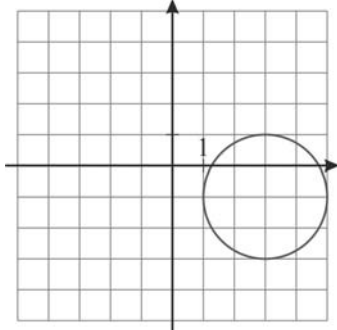


91.

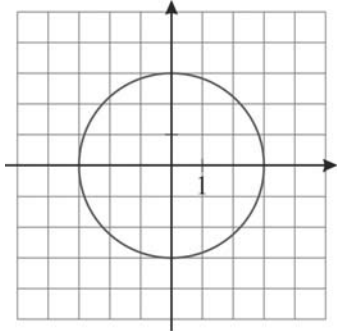
a)



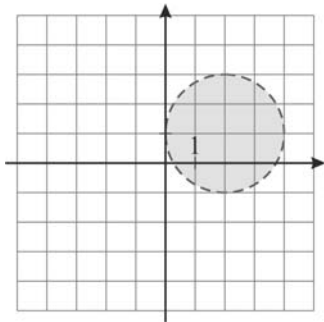
b) $2|z - 3 + i| + 5 = 9 \Leftrightarrow |z - (3 - i)| = 2$



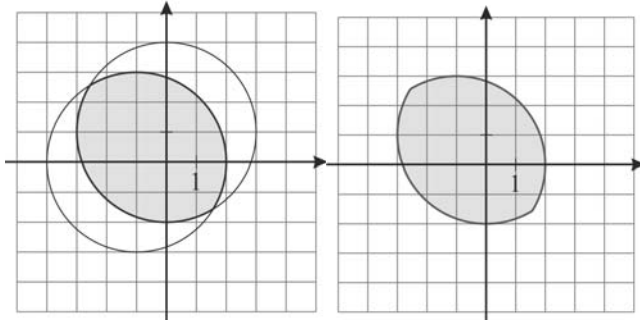
c) $|2z| = 6 \Leftrightarrow 2|z| = 6 \Leftrightarrow |z - (0 + 0i)| = 3$



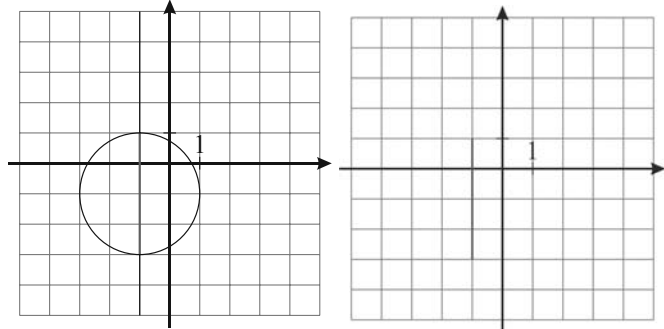
d)



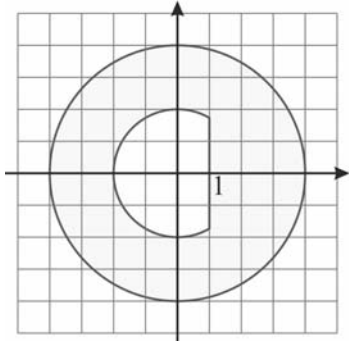
e) $|z - (0 + i)| \leq 3 \wedge |z - (-1 + 0i)| \leq 3$



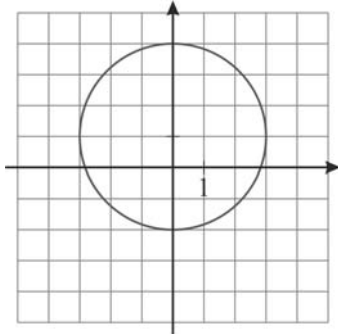
f) $|z + 1 + i| \leq 2 \wedge \operatorname{Re}(z) = -1 \Leftrightarrow |z - (-1 - i)| \leq 2 \wedge \operatorname{Re}(z) = -1$



g) $\left(\left|\frac{z}{2}\right| \geq 1 \vee \operatorname{Re}(z) \geq 1\right) \wedge |z| \leq 4 \Leftrightarrow \left(\left|\frac{z}{2}\right| \geq 1 \vee \operatorname{Re}(z) \geq 1\right) \wedge |z| \leq 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (|z - (0 + 0i)| \geq 2 \vee \operatorname{Re}(z) \geq 1) \wedge |z - (0 + 0i)| \leq 4$

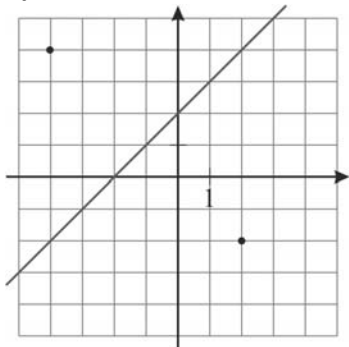


h) $(z - i)\overline{(z - i)} = 9 \Leftrightarrow |z - i|^2 = 9 \Leftrightarrow |z - i| = 3 \Leftrightarrow |z - (0 + i)| = 3$

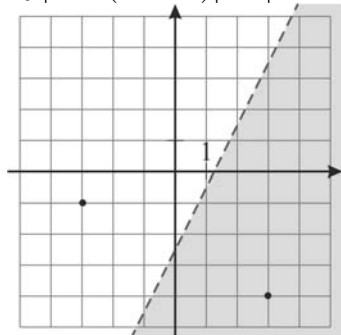


92.

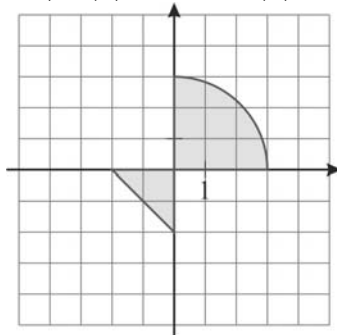
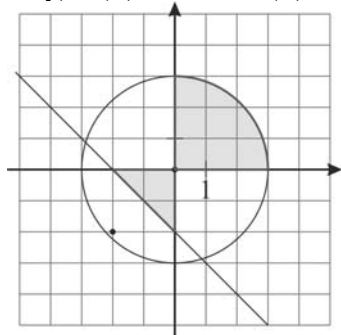
a)



b) $|z - (3 - 4i)| < |z - (-3 - i)|$

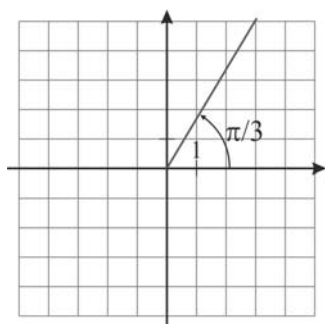


c) $|z + 2 + 2i| \geq |z| \wedge |z| \leq 3 \wedge \operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Im}(z) \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |z - (-2 - 2i)| \geq |z - (0 + 0i)| \wedge |z - (0 + 0i)| \leq 3 \wedge$
 $\wedge [(\operatorname{Re}(z) \geq 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq 0) \vee (\operatorname{Re}(z) \leq 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 0)]$

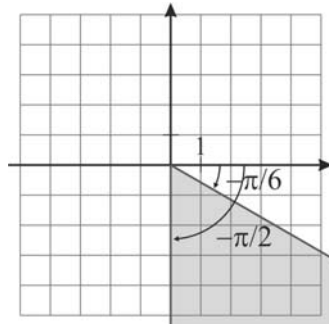


93.

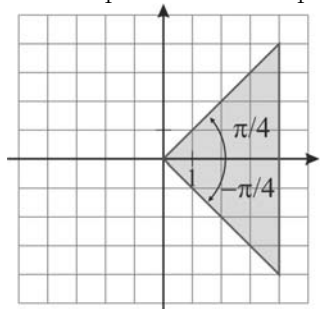
a)



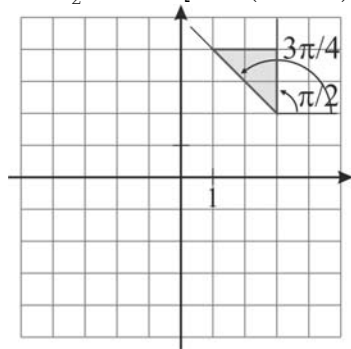
b)



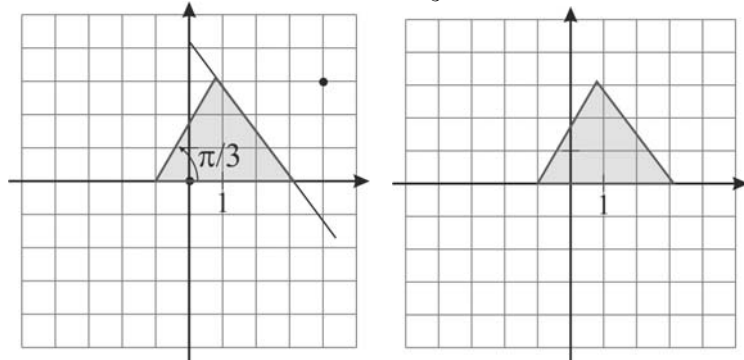
c) $|\operatorname{Arg}(z)| \leq \operatorname{Arg}(3 + 3i) \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 4 \Leftrightarrow |\operatorname{Arg}(z)| \leq \frac{\pi}{4} \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{4} \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 4$



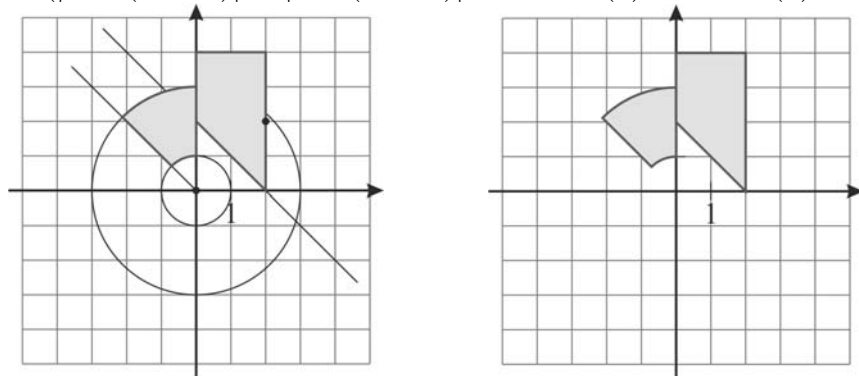
d) $\text{Arg}(8i) \leq \text{Arg}[z - (3 + 2i)] \leq \frac{3\pi}{4} \wedge \text{Im}(z) \leq 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}[z - (3 + 2i)] \leq \frac{3\pi}{4} \wedge \text{Im}(z) \leq 4$



e) $0 \leq \text{Arg}(z - (-1 + 0i)) \leq \frac{\pi}{3} \wedge |z - (4 + 3i)| \geq |z - (0 + 0i)|$



f) $(\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{3\pi}{4} \wedge 1 \leq |z| \leq 3) \vee$
 $\vee (|z - (0 + 0i)| \geq |z - (2 + 2i)| \wedge 0 \leq \text{Re}(z) \leq 2 \wedge \text{Im}(z) \leq 4)$



94. Por exemplo:

a) $|z - (3 + 2i)| \leq 1 \vee (2 \leq \text{Re}(z) \leq 4 \wedge -3 \leq \text{Im}(z) \leq 2)$

b) $(|z| \leq 3 \wedge \text{Re}(z) \geq 0 \wedge \text{Im}(z) \leq 0) \vee (|z| \leq |z - (-3 + 3i)| \wedge \text{Re}(z) \leq 0 \wedge \text{Im}(z) \geq 0)$

95.

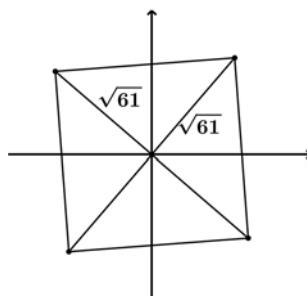
a) $|z_1 - z_2| = |5 + 6i - 13 - 12i| = |-8 - 6i| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$

b)

$$\begin{aligned}
 & \frac{z_1 - i}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}} - \frac{5\sqrt{3}}{2} + \overline{z_2} + \frac{i}{2} = \frac{5+6i-i}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}} - \frac{5\sqrt{3}}{2} + 13 - 12i + \frac{i}{2} = \\
 & = \frac{5+5i}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}} - \frac{5\sqrt{3}}{2} + 13 - 12i + \frac{1}{2}i = \frac{5\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}} - \frac{5\sqrt{3}}{2} + 13 - 12i + \frac{1}{2}i = \\
 & = 5 e^{i\frac{\pi}{6}} - \frac{5\sqrt{3}}{2} + 13 - 12i + \frac{1}{2}i = 5 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) - \frac{5\sqrt{3}}{2} + 13 - 12i + \frac{1}{2}i = \\
 & = 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) - \frac{5\sqrt{3}}{2} + 13 - 12i + \frac{1}{2}i = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i - \frac{5\sqrt{3}}{2} + 13 - 12i + \frac{1}{2}i = \\
 & = \frac{5}{2}i + 13 - 12i + \frac{1}{2}i = 13 - 12i + 3i = 13 - 9i
 \end{aligned}$$

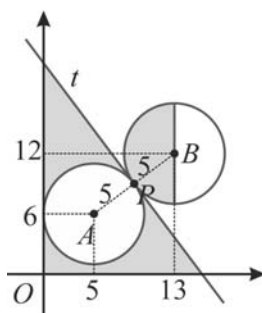
- c) As raízes índice 4 de z_1^4 são 4, sendo uma delas z_1 , e os seus afijos são os vértices de um quadrado centrado na origem.

$$|z_1| = |5 + 6i| = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$$



A área do quadrado é $4 \times \frac{\sqrt{61} \times \sqrt{61}}{2} = 2 \times 61 = 122$.

- d)



$$\begin{aligned}
 & [\operatorname{Re}(z) \geq 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq 0 \wedge |z - (5 + 6i)| \leq |z - (13 + 12i)| \wedge |z - (5 + 6i)| \geq 5] \vee \\
 & \vee [|z - (13 + 12i)| \leq 5 \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 13]
 \end{aligned}$$



AMOSTRA NÃO COMERCIALIZÁVEL

De acordo com o artigo 21.º da Lei n.º 47/2006, de 28 de agosto, este exemplar destina-se ao órgão da escola competente para a adoção de manuais escolares.

 www.leya.com	 www.texto.pt	978-111-11-4442-5
		 9 781111 144425

