

Resoluções dos exercícios

do **Manual**

MAT 12 MATEMÁTICA A
12.º ANO

**EXCLUSIVO
para o
Professor**



Texto

Índice

Tema 1 - Cálculo Combinatório

Exercícios propostos.....	2
+Exercícios propostos	25

Tema 2 - Probabilidades

Exercícios propostos.....	33
+Exercícios propostos	63

Tema 3 - Funções Reais de Variável Real

Exercícios propostos.....	76
+Exercícios propostos	125

Tema 4 - Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas

Exercícios propostos.....	155
+Exercícios propostos	241

Tema 5 - Trigonometria e Funções Trigonômicas

Exercícios propostos.....	274
+Exercícios propostos	308

Tema 6 - Primitivas e Cálculo Integral

Exercícios propostos.....	347
---------------------------	-----

Tema 7 - Números Complexos

Exercícios propostos.....	370
+Exercícios propostos	403

Propostas de resolução dos exercícios do Manual

Tema 1 | Cálculo Combinatório

1. Propriedades das operações sobre conjuntos

Pág. 6

Será que...? Inclusão de conjuntos

1.

a) Verdade.

b) $A \cap B = \{1, 2, 3\} = A$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} = B$

2.

a) Verdade.

b) $A \cap B = [2, 5] = A$; $A \cup B = [1, +\infty[= B$

3. a) Falso.

b) $A \cap B = \{4, 5\}$; $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Pretende-se que o aluno refira que: Se $A \subset B$ então $A \cap B = A$ e $A \cup B = B$.

Pág. 7

1. Começamos por provar que $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$.

Suponhamos, então, por hipótese, que $A \subset B$ e provemos que $A \cup B = B$, ou seja, que $B \subset A \cup B$ (i) e que $A \cup B \subset B$ (ii).

(i) $x \in B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

(ii) $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in B \Rightarrow x \in B$

Vamos agora provar que $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$.

Suponhamos, então, por hipótese, que $A \cup B = B$ e provemos que $A \subset B$.

Tem-se $x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$.

Pág. 8

2. Comutatividade da união

Tem-se, para qualquer $x \in U$:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A$$

Associatividade da união

Tem-se, para qualquer $x \in U$:

$$\begin{aligned}x \in (A \cup B) \cup C &\Leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)\end{aligned}$$

Idempotência da união

Como $A \subset A$, tem-se que $A \cup A = A$.

Elemento neutro da união

Como $\emptyset \subset A$, tem-se que $A \cup \emptyset = A$.

Elemento absorvente da união

Como $A \subset U$, tem-se que $A \cup U = U$.

Distributividade da união em relação à interseção

Tem-se, para qualquer $x \in U$:

$$\begin{aligned}x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)\end{aligned}$$

Será que...? Completando igualdades

1.

a) $A \cap B = \{1\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

b) $\overline{A \cap B} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; $\overline{A \cup B} = \{4, 6\}$

c) $\overline{A} = \{3, 4, 5, 6\}$; $\overline{B} = \{2, 4, 6\}$

2. a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Pretende-se que o aluno refira que sim.

Pág. 9

3. Tem-se, para qualquer $x \in U$:

$$\begin{aligned}x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \sim (x \in A \cup B) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow \sim (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow \sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}\end{aligned}$$

4. Tem-se, para qualquer $x \in V$ e para qualquer $y \in U$:

$$\begin{aligned}(x, y) \in C \times (A \cup B) &\Leftrightarrow x \in C \wedge y \in A \cup B \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow x \in C \wedge (y \in A \vee y \in B) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (x \in C \wedge y \in A) \vee (x \in C \wedge y \in B) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (x, y) \in C \times A \vee (x, y) \in C \times B \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (x, y) \in (C \times A) \cup (C \times B)\end{aligned}$$

Pág. 10

5. a) $(\overline{A} \cup B) \cup A = (B \cup \overline{A}) \cup A = B \cup (\overline{A} \cup A) = B \cup U = U$

b) $(A \cap B) \cup \overline{A} = (A \cup \overline{A}) \cap (B \cup \overline{A}) = U \cap (B \cup \overline{A}) = B \cup \overline{A}$

c) $B \cap (\overline{A \cup B}) = B \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = B \cap (\overline{B} \cap \overline{A}) = (B \cap \overline{B}) \cap \overline{A} = \emptyset \cap \overline{A} = \emptyset$

d) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup B = \emptyset \cup B = B$

6. $(A \setminus B) \cap B = (A \cap \overline{B}) \cap B = A \cap (\overline{B} \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset$

7. Como $A \subset B$, tem-se $A \cup B = B$, donde vem que $(A \cup B) \cap \overline{B} = B \cap \overline{B} = \emptyset$.

Pág. 11

8. $(\overline{A} \times C) \cup (\overline{B} \times C) = (\overline{A} \cup \overline{B}) \times C = (\overline{A \cap B}) \times C$

Como $A \subset B$, tem-se $A \cap B = A$, donde vem que $(\overline{A \cap B}) \times C = \overline{A} \times C$.

9. a) Como $A \subset B$, tem-se, para qualquer $x \in U$, $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Portanto, $x \in A \cup C \Rightarrow x \in A \vee x \in C \Rightarrow x \in B \vee x \in C \Rightarrow x \in B \cup C$.

b) Como $A \subset B$, tem-se $\overline{B} \subset \overline{A}$, pelo que $\overline{B} \cup B \subset \overline{A} \cup B$, ou seja, $U \subset \overline{A} \cup B$.

Como $\overline{A} \cup B \subset U$, tem-se $\overline{A} \cup B = U$.

Pág. 13

10. a) $A \cap B = \{x : x \text{ é múltiplo de 6 e divisor de 30}\}$

Múltiplos de 6 $\rightarrow \{6, 12, 18, 24, 30, 36, \dots\}$

Divisores de 30 $\rightarrow \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

$A \cap B = \{6, 30\}$

b) $A \cup B = \{x : x \text{ é múltiplo de 6 ou divisor de 30}\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 15, 18, 24, 30, 36, 42, \dots\}$

$\overline{C} = \{x : x \leq 20\}$

$(A \cup B) \cap \overline{C} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 15, 18\}$

c) $B \cap C = \{x : x \text{ é divisor de 30 e maior do que 20}\} = \{30\}$

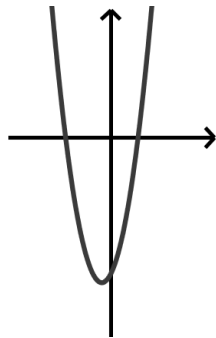
$(B \cap C) \times \{1, 2\} = \{30\} \times \{1, 2\} = \{(30, 1), (30, 2)\}$

$$\begin{aligned} \text{d) } A \cap \overline{C} &= \{x : x \text{ é múltiplo de 6 e menor ou igual a } 20\} = \{6, 12, 18\} \\ B \cap C &= \{x : x \text{ é divisor de 30 e maior do que } 20\} = \{30\} \\ (A \cap \overline{C}) \times (B \cap C) &= \{6, 12, 18\} \times \{30\} = \{(6, 30), (12, 30), (18, 30)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \quad x^3 &= x^2 + 2x \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2 \\ A &= \{-1, 0, 2\} \end{aligned}$$

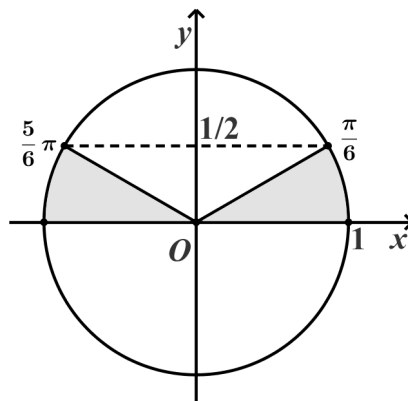
$$\begin{aligned} x^2 + 2x &\leq 15 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-5, 3] \\ x^2 + 2x - 15 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-15)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 8}{2} \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 3 \end{aligned}$$

$$y = x^2 + 2x - 15$$



$$B = [-5, 3]$$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} x &\leq 1 \wedge 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5}{6}\pi, \pi\right] \\ 2 \operatorname{sen} x &= 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



$$C = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5}{6}\pi, \pi\right]$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+1}+1=x &\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=x-1 \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1})^2=(x-1)^2 \wedge 2x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x+1=x^2-2x+1 \wedge \left(x \geq -\frac{1}{2} \wedge x \geq 1\right) \Leftrightarrow x^2-4x=0 \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(x-4)=0 \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow (x=0 \vee x=4) \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow x=4\end{aligned}$$

$$D = \{4\}$$

$$\text{a) } A \cup B = \{-1, 0, 2\} \cup [-5, 3] = [-5, 3]$$

$$\text{b) } A \cap C = \{-1, 0, 2\} \cap \left([0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5}{6}\pi, \pi]\right) = \{0\}$$

$$\text{c) } B \cap C = [-5, 3] \cap \left([0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5}{6}\pi, \pi]\right) = [0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5}{6}\pi, 3]$$

$$\text{d) } B \cup C = [-5, 3] \cup \left([0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5}{6}\pi, \pi]\right) = [-5, \pi]$$

$$\text{e) } \overline{B} \cap C = (]-\infty, -5[\cup]3, +\infty[) \cap \left([0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5}{6}\pi, \pi]\right) =]3, \pi]$$

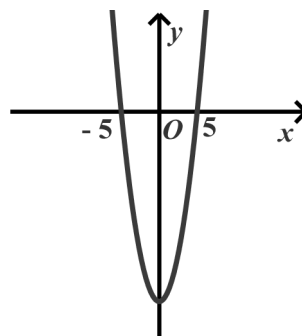
$$\text{f) } A \cup D = \{-1, 0, 2\} \cup \{4\} = \{-1, 0, 2, 4\}$$

$$(A \cup D) \times \{5, 6\} = \{(-1, 5), (-1, 6), (0, 5), (0, 6), (2, 5), (2, 6), (4, 5), (4, 6)\}$$

$$\text{g) } D \times D = \{(4, 4)\}$$

$$\begin{aligned}\text{h) } (A \setminus \mathbb{N}) \times (B \cap \mathbb{N}) &= \{-1, 0\} \times \{1, 2, 3\} = \\ &= \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\}\end{aligned}$$

$$12. x^2 \geq 25 \Leftrightarrow x^2 - 25 \geq 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+5) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -5] \cup [5, +\infty[$$



$$A \cap \overline{B} = \{-4, -1, 0, 1, 4\}$$

$$\overline{B} =]-5, 5[$$

13.

$$\text{a) } (A \cup B) \setminus B = (A \cup B) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup \emptyset = A \cap \overline{B} = A \setminus B$$

$$\text{b) } (A \setminus B) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \setminus (B \cup C)$$

$$\text{c) } (A \setminus B) \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = (A \cup B) \cap U = A \cup B$$

14. $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \Leftrightarrow A \subset \overline{B} \Leftrightarrow B \subset \overline{A}$

15. Se $A \subset B$, então $A \cap B = A$. Como $A \cap B = \emptyset$, vem $A = \emptyset$.

16. Tem-se, para qualquer $x \in V$ e para qualquer $y \in U$,
 $(x, y) \in C \times (A \cap B) \Leftrightarrow x \in C \wedge y \in A \cap B \Leftrightarrow x \in C \wedge (y \in A \wedge y \in B) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x \in C \wedge x \in C) \wedge (y \in A \wedge y \in B) \Leftrightarrow (x \in C \wedge y \in A) \wedge (x \in C \wedge y \in B) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x, y) \in C \times A \wedge (x, y) \in C \times B \Leftrightarrow (x, y) \in (C \times A) \cap (C \times B)$

17. Vamos provar que:

(i) $A \cup B = U \Rightarrow \overline{B} \subset A$

(ii) $\overline{B} \subset A \Rightarrow A \cup B = U$

(i) $A \cup B = U \Rightarrow (A \cup B) \cap \overline{B} = U \cap \overline{B} \Rightarrow (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = \overline{B} \Rightarrow (A \cap \overline{B}) \cup \emptyset = \overline{B} \Rightarrow$
 $\Rightarrow A \cap \overline{B} = \overline{B} \Rightarrow \overline{B} \subset A$

(ii) $\overline{B} \subset A \Rightarrow \overline{B} \cup B \subset A \cup B \Rightarrow U \subset A \cup B \Rightarrow A \cup B = U$

18. Vamos provar que:

(i) $A = \emptyset \Rightarrow$ existe um conjunto B contido em U tal que $B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

(ii) existe um conjunto B contido em U tal que $B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \Rightarrow A = \emptyset$

Tem-se:

(i) Se $A = \emptyset$, tem-se, para qualquer conjunto B contido em U :

$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (\emptyset \cap \overline{B}) \cup (U \cap B) = \emptyset \cup B = B$

(ii) Admitamos agora que existe um conjunto B contido em U tal que $B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Vamos provar que $A = \emptyset$.

Comecemos por mostrar que, se $B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$, então $B \subset \overline{A} \cap B$.

Tem-se, para qualquer $x \in U$:

$$x \in B \Rightarrow x \in (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \Rightarrow \underbrace{x \in A \cap \overline{B}}_{\text{impossível, pois } x \in B} \vee x \in \overline{A} \cap B \Rightarrow x \in \overline{A} \cap B$$

Como se tem, para qualquer $x \in U$, $x \in B \Rightarrow x \in \overline{A} \cap B$, está provado que $B \subset \overline{A} \cap B$.

Por outro lado, tem-se sempre $\overline{A} \cap B \subset B$.

Conclui-se, assim, que $\overline{A} \cap B = B$, pelo que $B \subset \overline{A}$, donde vem $A \subset \overline{B}$.

Vem, então:

$B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \Leftrightarrow B = A \cup (\overline{A} \cap B) \Leftrightarrow B = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow B = U \cap (A \cup B) \Leftrightarrow B = A \cup B \Leftrightarrow A \subset B$

Concluimos, assim, que $A \subset \overline{B}$ e que $A \subset B$, donde vem $A \subset \overline{B} \cap B$, ou seja, $A \subset \emptyset$.

Como $\emptyset \subset A$, vem, finalmente, $A = \emptyset$.

2. Introdução ao cálculo combinatório

Pág. 14

Será que...? Casadas e casados

Pretende-se que o aluno refira que o número de mulheres casadas é igual ao número de homens casados.

Pág. 16

19. $2 \times 6 = 12$

Pág. 17

20. $3 \times 2 \times 4 = 24$

21. a) $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

b) $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$

Pág. 18

22.

a) $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$

b) $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\,240$

c) $3 \times 10 \times 10 \times 10 \times 7 = 21\,000$

23.

a) $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 9\,000\,000$

b) $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 544\,320$

c) $8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 5 = 268\,800$ - o último tem de ser ímpar, o primeiro tem de ser escolhido de entre os quatro algarismos pares (2, 4, 6, 8) ou os restantes quatro algarismos ímpares, o segundo dígito pode ser escolhido de entre os oito algarismos sobrantes, etc.

24. $7 \times 9 \times 8 \times 7$ (com quatro algarismos, sendo o primeiro escolhido de entre os sete que são superiores ou iguais a 3) + $1 \times 5 \times 8 \times 7 \times 6$ (com cinco algarismos, sendo o primeiro o 1, o segundo escolhido no conjunto {0, 2, 3, 4, 5}, o terceiro escolhido entre os oito restantes, etc.) + $1 \times 1 \times 4 \times 7 \times 6$ (com cinco algarismos, sendo o primeiro o 1, o segundo o 6, o terceiro escolhido no conjunto {0, 2, 3, 4}, o quarto escolhido entre os sete restantes, etc.) = 5376

Pág. 19

25. 3×5 (anel e pulseira) + 3×7 (anel e colar) + 5×7 (pulseira e colar) = 71

Pág. 20

26. ${}^3A'_{13} = 3^{13} = 1\,594\,323$

27. ${}^2A'_8 = 2^8 = 256$

28. ${}^6A'_{10} = 6^{10} = 60\,466\,176$

Pág. 21

Será que...? Cardinal do conjunto das partes de um conjunto

a) $A = \{a, b\}$; $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$; $\#\mathcal{P}(A) = 4$

b) $B = \{a, b, c\}$; $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$; $\#\mathcal{P}(B) = 8$

c) $C = \{a, b, c, d\}$;
 $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\},$
 $\{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$; $\#\mathcal{P}(C) = 16$

Pretende-se que o aluno refira que se o cardinal de um conjunto é n , o cardinal das partes desse conjunto é 2^n .

Pág. 22

29. $A = \{2, 3, 5, 7\}$; $\#A = 4$; $\#\mathcal{P}(A) = 2^4 = 16$

30. $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$; $\#B = 8$; $\#\mathcal{P}(B) = 2^8$

Subconjunto com 0 elementos é apenas o conjunto vazio; subconjuntos com um elemento são 8, logo o número de subconjuntos do conjunto B que têm pelo menos dois elementos é $2^8 - 1 - 8 = 247$.

Será que...? Um estudo da universidade de Cambridge

Pretende-se que o aluno refira que a palavra «grande» pode escrever-se de 24 maneiras ($1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1$).

Pág. 23

31.

a) $9! = 362\,880$

b) $4! \times 5! = 2880$

c) $4! \times 5! + 5! \times 4! = 4! \times 5! \times 2 = 5760$ (primeiro os do Astérix e depois os do Tintim ou primeiro os do Tintim e depois os do Astérix)

d) $6! \times 4! = 17\,280$ ($6!$ para ordenar o bloco dos livros do Astérix e os cinco livros do Tintim, $4!$ para ordenar os quatro livros do Astérix)

e) $4! \times 5! = 2880$ (como são cinco livros do Tintim e quatro do Astérix, tem de começar e acabar com um livro do Tintim, os livros do Astérix podem ficar colocados de $4!$ maneiras e os do Tintim de $5!$ maneiras)

Pág. 24

32.

a) $8! = 40\,320$

b) $2 \times 4! \times 4! = 1152$ (rapazes do lado direito da mesa e raparigas do lado esquerdo ou vice-versa)

c) $4! \times 4! \times 2^4 = 9216$ ($4!$ para ordenar os rapazes, $4!$ para ordenar as raparigas, cada par rapaz-rapariga pode trocar $2 \times 2 \times 2 \times 2$)

d) $8! - 4 \times 2 \times 6! = 34\,560$ (todas as possibilidades menos aquelas em que a Ana e o Rui ficam um em frente do outro)

Pág. 25

33. a) $5! = 120$

b) $3! + 3! \times 2 = 18$ ($3!$ para os começados por 4, $3! \times 2$ para os começados por 5)

34. a) $5! = 120$

b) $2! \times 3! = 12$ (a ordem das consoantes e das vogais é fixa: consoante - vogal - consoante - vogal - consoante, $2!$ para ordenar as vogais, $3!$ para ordenar as consoantes)

35. a) $302! = 302 \times 301 \times 300!$

b) $(n - 3)! \times (n - 2) = (n - 2)!$

Pág. 26

36.

$$\text{a)} \frac{100!}{99! + 98!} = \frac{100 \times 99 \times 98!}{99 \times 98! + 98!} = \frac{100 \times 99 \times 98!}{98!(99 + 1)} = \frac{100 \times 99}{100} = 99$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \left(\frac{1}{9!} + \frac{1}{8!} \right) \times 7! + \frac{4! + 7}{{}^6A'_2} &= \frac{7!}{9!} + \frac{7!}{8!} + \frac{4! + 7}{6^2} = \frac{7!}{9 \times 8 \times 7!} + \frac{7!}{8 \times 7!} + \frac{24 + 7}{6^2} = \\ &= \frac{1}{72} + \frac{1}{8} + \frac{31}{36} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \frac{(n+2)! - n!}{(n+1)!} - \frac{(2n+1)!}{(2n)!(n+1)} &= \frac{(n+2)(n+1)n! - n!}{(n+1)!} - \frac{(2n+1)(2n)!}{(2n)!(n+1)} = \\ &= \frac{n![(n+2)(n+1) - 1]}{(n+1)n!} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{(n+2)(n+1) - 1}{n+1} - \frac{2n+1}{n+1} = \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2 - 1 - 2n - 1}{n+1} = \frac{n^2 + n}{n+1} = \frac{n(n+1)}{n+1} = n \end{aligned}$$

37. Para $n = 1$ tem-se: $\sum_{k=1}^1 \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} \Leftrightarrow \frac{1-1}{1!} = 1 - 1 \Leftrightarrow 0 = 0$, o que é verdade

Hipótese de indução: $\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!}$

Tese de indução: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

$$\begin{aligned} \text{Demonstração: } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} + \frac{n+1-1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} = 1 + \frac{n}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \\ &= 1 + \frac{n}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} = 1 + \frac{n-n-1}{(n+1)!} = 1 + \frac{-1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Pág. 27

38. ${}^{26}A_4 = 358\,800$

Pág. 28

39. $1 \times {}^6A_3 = 120$

40. $3 \times 5! \times {}^{10}A_3 = 259\,200$ (3 - escolha da fila horizontal, 5! - permutação dos tons de azul, ${}^{10}A_3$ - escolha dos três quadrados que ficam pintados com as outras três cores)

41. ${}^{52}A_3 = 132\,600$

Pág. 30

42.

a) ${}^{12}C_6 = 924$

b) ${}^5C_2 \times {}^4C_2 \times {}^3C_2 = 180$

c) ${}^{10}C_4 = 210$

d) ${}^8C_6 = 28$

e) ${}^3C_2 \times {}^9C_4$ (dois de José Saramago) + ${}^3C_3 \times {}^9C_3$ (três de José Saramago) = 462

Pág. 31

43. ${}^{13}C_4 \times {}^7C_1$ (quatro homens e uma mulher) + ${}^{13}C_3 \times {}^7C_2$ (três homens e duas mulheres) = 11 011

Pág. 32

44. ${}^{18}C_6 \times {}^{12}A_4 = 220\,540\,320$

45. ${}^{52}C_{13} \times {}^{39}C_{13} \times {}^{26}C_{13} \times {}^{13}C_{13} \approx 5,36 \times 10^{28}$

46. $2^n = 512 \Leftrightarrow 2^n = 2^9 \Leftrightarrow n = 9$; ${}^9C_7 + {}^9C_8 + {}^9C_9 = 46$

Pág. 33

47.

a) ${}^7C_3 \times {}^4C_3 = 140$

b) ${}^6C_3 \times {}^3C_2 = 60$ (o algarismo das unidades tem de ser 2)

48. ${}^8C_3$ (letra *i*) $\times$ ${}^5C_2$ (letra *n*) $\times 3! = 3360$

49. ${}^7C_4 \times {}^3C_3$ (quatro empates, três vitórias da Bárbara) + ${}^7C_4 \times {}^3C_2$ (quatro empates, duas vitórias da Bárbara, uma vitória do Afonso) = 140

Pág. 34

50. Designemos por n o cardinal de A e por m o cardinal de B , vem que ${}^m A_n = 60$ e ${}^m C_n = 10$.

$$\frac{{}^m A_n}{n!} = {}^m C_n \Leftrightarrow \frac{60}{n!} = 10 \Leftrightarrow n! = 6 \Leftrightarrow n = 3$$

$${}^m A_3 = 60 \Leftrightarrow m(m-1)(m-2) = 60 \Leftrightarrow m^3 - 3m^2 + 2m - 60 = 0 \Leftrightarrow$$

	1	-3	2	-60
5		5	10	60
	1	2	12	0

$$\Leftrightarrow (m-5)(m^2+2m+12) = 0 \Leftrightarrow m-5 = 0 \vee m^2+2m+12 = 0 \Leftrightarrow m = 5$$

De B em A existem ${}^3 A'_5 = 3^5 = 243$ funções.

51. Quando se unem dois quaisquer vértices de um polígono obtém-se uma diagonal ou um lado. Logo, o número de diagonais de um polígono com n lados é ${}^n C_2 - n$.

$${}^n C_2 - n = 104 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} - n = 104 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 104 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 208 = 0 \Leftrightarrow n = 16$$

Pág. 36

52. $5 \times 10 \times 21 = 1050$

53. $8 \times 6 \times 4 = 192$

54. $5 \times 10^3 = 5000$

55. $28^3 \times 25^2 \times 23 \times 22 = 694\,232 \times 10^4$

56. $4 \times 3 \times 2 = 24$

57. $10^2 \times 5 = 500$

58. $5 \times 6 \times 2 = 60$

59. $8 \times 10 \times 9 \times 7 = 5040$

60. $10 \times 9^3 = 7290$

61. $10^3 \times 9 = 9000$

62. $1 \times 1 \times 10 \times 10 \times 4 = 400$

63. $1 \times 10 \times 10 \times 1 \times 1 \times 1 = 100$

64. a) $1 \times 25 \times 24 = 600$

b) $3 \times 25 \times 24 = 1800$

65. $1 \times 5 \times 4$ (ímpar - par - par) + $1 \times 5 \times 4$ (ímpar - ímpar - ímpar) = 40

66. $4 \times 8 \times 7 \times 2 = 448$;

$5 \times 8 \times 7 \times 1$ (terminam em zero) + $4 \times 8 \times 7 \times 1$ (terminam em 5) = 504

Pág. 37

67. 4×3 (dois programas de meia hora) + $6 \times 5 \times 4$ (três programas de 20 minutos) = 132

68. ${}^{26}A'_{10} = 26^{10} \approx 1,4 \times 10^{14}$

69. $n^5 > 1\,000\,000 \Leftrightarrow n > \sqrt[5]{1\,000\,000} \Leftrightarrow n > 15,85$. O número mínimo é 16.

70. ${}^9A'_5 = 9^5 = 59\,049$

71. ${}^{52}A'_4 = 52^4 = 7\,311\,616$

72. $A = \{a, b, c\}$; $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

73. $2^5 = 32$

74. Seja n o número de elementos do conjunto.

$$2^n - 1 \text{ (conjunto vazio)} - n \text{ (número de subconjuntos com 1 elemento)} = 4083$$



$$n = 12$$

75.

$$\begin{cases} 2^n = x \\ 2^m = 8x \\ m + n = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^n = x \\ 2^m = 8 \times 2^n \\ m + n = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^n = x \\ 2^m = 2^3 \times 2^n \\ m + n = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^n = x \\ 2^m = 2^{3+n} \\ m + n = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ m = 3 + n \\ m + n = 21 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ n = m - 3 \\ m + n = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ n = m - 3 \\ m + m - 3 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ n = m - 3 \\ 2m = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ m = 12 \end{cases}$$

76. $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$

77. Por exemplo: $(1, 2, x, y, z), (1, 2, x, z, y), (2, 1, x, y, z)$; $5! = 120$

78. $5! = 120$

79.

a) $3! + 7! = 6 + 5040 = 5046 \neq 10! = 3628800$

b) $2 \times 3! = 2 \times 6 = 12 \neq 6! = 720$

c) $3! \times 4! = 6 \times 24 = 144 \neq 12! = 479001600$

80.

a) $1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6! = 720$

b) $5 \times 4 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 5! = 120$

Pág. 38

81.

a) $8! = 40320$

b) $2 \text{ (escolha da prateleira onde são colocados os livros de Matemática)} \times 4! \text{ (ordenação dos livros de Matemática)} \times 4! \text{ (ordenação dos restantes livros)} = 1152$

c) $3!$ (ordenação das disciplinas) $\times 4!$ (ordenação dos livros de Matemática) $\times 2!$ (ordenação dos livros de Química) $\times 2!$ (ordenação dos livros de Biologia) $= 576$

82. $4! = 24$

83. a) $\frac{9!}{5!}$ b) $\frac{200!}{197!}$ c) $\frac{13!}{9!}$ d) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

84. a) ${}^7A_3$ b) ${}^{100}A_3$ c) ${}^{201}A_4$ d) ${}^nA_3$
e) ${}^{11}A_2$ f) ${}^{k+1}A_3$ g) ${}^{19}A_{14}$ h) ${}^{91}A_{62}$

85.

a) $20 \times 19 \times 18 \times 17$ (nota que $20 - 17 + 1 = 4$)

b) $r \times (r - 1) \times (r - 2)$ (nota que $r - (r - 2) + 1 = 3$)

c) $100 \times 99 \times \dots \times 52 \times 51$ (nota que $100 - 51 + 1 = 50$)

86. ${}^5A_3$ (número de maneiras de sentar as raparigas) $\times 7!$ (número de maneiras de sentar os rapazes) $= 302\,400$

87.

a) ${}^8A_6 = 20\,160$

b) $1 \times {}^7A_5 = 2520$

c) 6 (número de maneiras de escolher a face que fica pintada de verde) $\times {}^7A_5$ (restantes faces) $= 15\,120$

88.

a) ${}^{13}A_5 = 154\,440$

b) $1 \times {}^{12}A_4 = 11\,880$

c) ${}^5A_3$ (número de maneiras de escolher os lugares das figuras) $\times {}^{10}A_2$ (número de maneiras de escolher as cartas que vão ocupar os dois lugares sobranes) $= 5400$

89.

a) 2 (o primeiro dígito só pode ser 1 ou 2) $\times {}^9A_4 = 6048$

b) 2 (escolha do primeiro dígito) $\times {}^8A_3 \times 2$ (escolha do último dígito) $= 1344$

c) ${}^9A_4$ (para os que começam por 2) + 1 (começam por 1) $\times$ 4 (número de maneiras de colocar o 2) $\times$ ${}^8A_3 = 4368$

Pág. 39

$$\begin{aligned} 90. {}^nA_2 + 3n + 1 &= 100 \Leftrightarrow n(n-1) + 3n - 99 = 0 \Leftrightarrow n^2 - n + 3n - 99 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^2 + 2n - 99 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-99)}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm 20}{2} \Leftrightarrow n = 9 \text{ (porque } n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

91.

a) ${}^{20}C_5 = 15\,504$

b) ${}^{12}C_3$ (escolha dos rapazes) $\times$ ${}^8C_2$ (escolha das raparigas) = 6160

92. ${}^{20}C_{10}$ (número de maneiras de colocar as dez peças brancas nos 20 lugares disponíveis) $\times$ ${}^{10}A_5$ (número de maneiras de colocar as cinco peças coloridas nos 10 lugares sobranes) = 5 587 021 440 .

93. ${}^{12}C_3 = 220$

94. ${}^{50}C_5 \times {}^{11}C_2 = 116\,531\,800$

95.

a) ${}^{52}C_{13} \approx 6,35 \times 10^{11}$

b) ${}^{13}C_5$ (número de maneiras de escolher cinco copas de entre as 13 copas) $\times$ ${}^{39}C_8$ (número de maneiras de escolher as restantes oito cartas de entre as 39 cartas que não são de copas) $\approx 7,92 \times 10^{10}$

c) ${}^{39}C_{13}$ (número de «mãos» sem paus) + $13 \times {}^{39}C_{12}$ (número de «mãos» com apenas uma carta de paus) + ${}^{13}C_2 \times {}^{39}C_{11}$ (número de «mãos» com duas cartas de paus) $\approx 1,90 \times 10^{11}$

d) ${}^4C_3$ (número de maneiras de escolher três dos quatro reis) $\times$ ${}^4C_2$ (número de maneiras de escolher dois dos quatro ases) $\times$ ${}^{44}C_8$ (número de maneiras de escolher as restantes oito cartas de entre as 44 cartas que não são reis nem ases) = 4 253 583 048

96. ${}^5C_2$ (número de maneiras de colocar os algarismos «3») $\times$ ${}^3C_2$ (número de maneiras de colocar os algarismos «2») $\times$ 1 = 30

97. ${}^6C_4$ (número de lotes que não têm meias azuis) $+ 4 \times {}^6C_3$ (número de lotes que têm um par de meias azuis) $= 95$

98. ${}^3C_2 \times {}^9C_4$ (dois livros de Isabel Allende) $+ {}^3C_3 \times {}^9C_3$ (três livros de Isabel Allende) $= 462$

99. $8 \times {}^8C_2$ (número de maneiras de colocar as duas torres, numa das oito filas) $\times {}^{56}A_2$ (número de maneiras de colocar o rei e a dama num dos $64 - 8 = 56$ lugares das outras filas) $= 689\,920$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{100.} \quad {}^nC_2 = 91 &\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = 91 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2} = 91 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 91 \Leftrightarrow n^2 - n - 182 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-182)}}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 27}{2} \Leftrightarrow n = 14 \text{ (porque } n \in \mathbb{N})
 \end{aligned}$$

3. Triângulo de Pascal e Binómio de Newton

Pág. 42

101. Sejam a e b o segundo e terceiro elementos de uma linha do triângulo de Pascal. Tal como se pode observar na figura junta, o terceiro elemento da linha seguinte é $a + b$. Ora, uma vez que $1 + a + b = x$, vem $a + b = x - 1$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & a & & b & & \dots \\ & 1 & & 1 + a & & a + b & & \dots & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{102.} \quad {}^{998}C_{123} + 2 \times {}^{998}C_{124} + {}^{998}C_{125} &= {}^{998}C_{123} + {}^{998}C_{124} + {}^{998}C_{124} + {}^{998}C_{125} = \\ &= {}^{999}C_{124} + {}^{999}C_{125} = {}^{1000}C_{125} \end{aligned}$$

103. Como o primeiro elemento da linha é 1, o segundo elemento dessa linha é 50, trata-se da linha que contém as combinações da forma ${}^{50}C_k$. A linha anterior é a linha que contém as combinações da forma ${}^{49}C_k$. O terceiro elemento da linha anterior é ${}^{49}C_2 = 1\,176$.

104. Designemos por n o segundo elemento da linha, o penúltimo elemento dessa linha também é n .

$n^2 = 676 \Leftrightarrow n = 26$. Trata-se da linha que contém as combinações da forma ${}^{26}C_k$ que tem 27 elementos.

$$\begin{aligned} \mathbf{105.} \quad 1 + n + {}^nC_2 &= 154 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = 154 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2} &= 154 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 154 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 + 2n + n^2 - n &= 308 \Leftrightarrow n^2 + n - 306 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-306)}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n &= \frac{-1 \pm 35}{2} \Leftrightarrow n = 17 \text{ (porque } n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

A linha que contém as combinações da forma ${}^{17}C_k$ tem 18 elementos, e os maiores elementos dessa linha são ${}^{17}C_8$ e ${}^{17}C_9$.

$${}^{17}C_8 + {}^{17}C_9 = 48\,620$$

Pág. 43

Será que...? Soma dos elementos de uma linha do triângulo de Pascal

Linha	0	1	2	3	4	5	6	7
Soma dos seus elementos	1	2	4	8	16	32	64	128

Pretende-se que o aluno refira que a soma dos elementos da linha de ordem n é 2^n .

$$106. \sum_{k=0}^8 {}^8C_k = 2^8 = 256$$

Pág. 44

107. Trata-se da linha de ordem 84, que tem 85 elementos, sendo o maior deles o ${}^{84}C_{42}$.

Será que...? Potência de um binómio

Pretende-se que o aluno refira que:

$$(a + b)^4 = 1 a^4 b^0 + 4 a^3 b^1 + 6 a^2 b^2 + 4 a^1 b^3 + 1 a^0 b^4$$

Pág. 46

108.

$$a) (4x + 3)^3 = 1 (4x)^3 3^0 + 3 (4x)^2 3^1 + 3 (4x)^1 3^2 + 1 (4x)^0 3^3 = 64x^3 + 144x^2 + 108x + 27$$

$$b) (3a - 1)^4 = 1 (3a)^4 (-1)^0 + 4 (3a)^3 (-1)^1 + 6 (3a)^2 (-1)^2 + 4 (3a)^1 (-1)^3 + 1 (3a)^0 (-1)^4 = 81a^4 - 108a^3 + 54a^2 - 12a + 1$$

$$c) (3a + 2b)^5 = 1 (3a)^5 (2b)^0 + 5 (3a)^4 (2b)^1 + 10 (3a)^3 (2b)^2 + 10 (3a)^2 (2b)^3 + 5 (3a)^1 (2b)^4 + 1 (3a)^0 (2b)^5 = 243a^5 + 810a^4b + 1080a^3b^2 + 720a^2b^3 + 240ab^4 + 32b^5$$

$$109. (3 + 2\sqrt{5})^3 = 1 \times 3^3 (2\sqrt{5})^0 + 3 \times 3^2 (2\sqrt{5})^1 + 3 \times 3^1 (2\sqrt{5})^2 + 1 \times 3^0 (2\sqrt{5})^3 = 27 + 54\sqrt{5} + 36 \times 5 + 40\sqrt{5} = 207 + 94\sqrt{5}$$

$$110. {}^{12}C_7 \times (3x)^{12-7} \times (-2)^7 = {}^{12}C_7 \times (3x)^5 \times (-2)^7 = -24\,634\,368 x^5$$

$$111. {}^7C_k \times (2a)^{7-k} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^k = {}^7C_k \times a^{7-k} \times 2^{7-k} \times (-2^{-2})^k = (-1)^k \times {}^7C_k \times a^{7-k} \times 2^{7-k} \times 2^{-2k} = (-1)^k \times {}^7C_k \times 2^{7-k-2k} \times a^{7-k} =$$

$$= (-1)^k \times {}^7C_k \times 2^{7-3k} \times a^{7-k}$$

Para que o expoente de a seja 4 vem:

$$7 - k = 4 \Leftrightarrow k = 3 \rightarrow (-1)^3 \times {}^7C_3 \times 2^{7-3 \times 3} \times a^4 = -\frac{35}{4}a^4$$

O coeficiente de $-\frac{35}{4}a^4$ é $-\frac{35}{4}$.

112. Tem-se: $(1 - 1)^n = 0^n = 0$

Por outro lado, desenvolvendo $(1 - 1)^n$, tem-se:

$$(1 - 1)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + {}^nC_4 - {}^nC_5 + \dots$$

Portanto, ${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + {}^nC_4 - {}^nC_5 + \dots = 0$, donde vem:

$${}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \dots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + \dots$$

O primeiro membro dá a soma do número de subconjuntos com 0, 2, 4, ... elementos.

O segundo membro dá a soma do número de subconjuntos com 1, 3, 5, ... elementos.

Portanto, o primeiro membro dá o número de subconjuntos com um número par de elementos e o segundo membro dá o número de subconjuntos com um número ímpar de elementos.

Como o primeiro membro é igual ao segundo membro, está provado que qualquer conjunto de cardinal n ($n \in \mathbb{N}$), tantos subconjuntos com um número par de elementos como com um número ímpar de elementos.

Pág. 50

$$\mathbf{113.} (x + 1)^3 = 1 \times x^3 \times 1^0 + 3 \times x^2 \times 1^1 + 3 \times x^1 \times 1^2 + 1 \times x^0 \times 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

114.

$$\mathbf{a)} \quad {}^nC_8 = {}^nC_{20} \Leftrightarrow 20 = n - 8 \Leftrightarrow n = 28$$

$$\mathbf{b)} \quad {}^{50}C_2 = {}^{50}C_p \Leftrightarrow p = 50 - 2 \Leftrightarrow p = 48$$

115.

$$\mathbf{a)} \quad {}^{15}C_2 + {}^{15}C_3 = {}^{16}C_3$$

$$\mathbf{b)} \quad {}^{20}C_6 + {}^{20}C_7 = {}^{21}C_7$$

$$\mathbf{c)} \quad {}^{50}C_{20} - {}^{49}C_{20} = {}^{49}C_{19}$$

116.

$$\mathbf{a)} \quad {}^{100}C_{30} + {}^{100}C_{31} = {}^nC_p \Leftrightarrow {}^{101}C_{31} = {}^nC_p \Leftrightarrow n = 101 \wedge (p = 31 \vee p = 70)$$

$$\mathbf{b)} \quad {}^{158}C_p + {}^{158}C_{p+1} = {}^nC_{40} \Leftrightarrow {}^{159}C_{p+1} = {}^nC_{40} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n = 159 \wedge (p + 1 = 40 \vee 159 - p - 1 = 40) \Leftrightarrow n = 159 \wedge (p = 39 \vee p = 118)$$

$$\mathbf{c)} \quad {}^{40}C_{20} - {}^{39}C_{20} = {}^nC_p \Leftrightarrow {}^{39}C_{19} = {}^nC_p \Leftrightarrow n = 39 \wedge (p = 19 \vee p = 20)$$

117.

a) ${}^nC_5 = {}^nC_{12} \Leftrightarrow 12 = n - 5 \Leftrightarrow n = 17$

b) ${}^{20}C_3 = {}^{20}C_p \Leftrightarrow p = 3 \vee p = 20 - 3 \Leftrightarrow p = 3 \vee p = 17$

c) ${}^{100}C_{2p-1} = {}^{100}C_{5+p} \Leftrightarrow 5 + p = 2p - 1 \vee 5 + p = 100 - 2p + 1 \Leftrightarrow p = 6 \vee 3p = 96 \Leftrightarrow p = 6 \vee p = 32$

118.

a) 51 elementos, trata-se da linha que contém as combinações da forma ${}^{50}C_k$. O maior elemento dessa linha é ${}^{50}C_{25}$.

b) O maior elemento da linha que contém as combinações da forma ${}^{24}C_p$ é ${}^{24}C_{12}$, pelo que $p = 12$.

119. Tem-se: $1 + n + {}^nC_2 + 19\,600 = 20\,876 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} - 1276 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} - 1\,276 = 0 \Leftrightarrow 2 + 2n + n^2 - n - 2\,552 = 0 \Leftrightarrow n^2 + n - 2\,550 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2\,550)}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm 101}{2} \Leftrightarrow n = 50 \text{ (porque } n \in \mathbb{N})$

O terceiro elemento da linha seguinte é ${}^{51}C_2 = 1275$.

120. A soma dos elementos da linha seguinte é $2M$ e a soma dos elementos da linha anterior é $\frac{M}{2}$.

121. a) O termo geral é ${}^7C_k a^{7-k} b^k$, portanto o valor da soma dos expoentes em cada parcela é $k + 7 - k = 7$.

b) O termo geral é ${}^{195}C_k a^{195-k} b^k$, portanto o valor da soma dos expoentes em cada parcela é $k + 195 - k = 195$.

122. a) $8 + 1 = 9$

b) $5 + 1 = 6$

c) $20 + 1 = 21$

123.

a) 1.º termo: $1 \times (x^2)^5 \times \left(-\frac{y}{x}\right)^0 = x^{10}$; 2.º termo: $5 \times (x^2)^4 \times \left(-\frac{y}{x}\right)^1 = -5x^7y$;

3.º termo: $10 \times (x^2)^3 \times \left(-\frac{y}{x}\right)^2 = 10x^4y^2$; 4.º termo: $10 \times (x^2)^2 \times \left(-\frac{y}{x}\right)^3 = -10x^2y^3$

b) 1.º termo: $1 \times \left(\frac{x}{y}\right)^6 \times \left(-\frac{y}{x}\right)^0 = \frac{x^6}{y^6}$; 2.º termo: $6 \times \left(\frac{x}{y}\right)^5 \times \left(-\frac{y}{x}\right)^1 = -6 \frac{x^4}{y^4}$;
 3.º termo: $15 \times \left(\frac{x}{y}\right)^4 \times \left(-\frac{y}{x}\right)^2 = 15 \frac{x^2}{y^2}$; 4.º termo: $20 \times \left(\frac{x}{y}\right)^3 \times \left(-\frac{y}{x}\right)^3 = -20$

c) 1.º termo: $1 \times \left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)^{10} \times 1^0 = \frac{1024}{y^5}$;
 2.º termo: $10 \times \left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)^9 \times 1^1 = \frac{5120}{y^4 \sqrt{y}} = \frac{5120 \sqrt{y}}{y^5}$;
 3.º termo: $45 \times \left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)^8 \times 1^2 = \frac{11\,520}{y^4}$;
 4.º termo: $120 \times \left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)^7 \times 1^3 = \frac{15\,360}{y^3 \sqrt{y}} = \frac{15\,360 \sqrt{y}}{y^4}$

d) 1.º termo: $1 \times x^5 \times (-y^2)^0 = x^5$; 2.º termo: $5 \times x^4 \times (-y^2)^1 = -5x^4y^2$;
 3.º termo: $10 \times x^3 \times (-y^2)^2 = 10x^3y^4$; 4.º termo: $10 \times x^2 \times (-y^2)^3 = -10x^2y^6$

Pág. 51

124.

a) Último termo: $1 \times (2y^2)^0 \times \left(-\frac{1}{y}\right)^7 = -\frac{1}{y^7}$
 Penúltimo termo: $7 \times (2y^2)^1 \times \left(-\frac{1}{y}\right)^6 = \frac{14}{y^4}$;
 Antepenúltimo termo: $21 \times (2y^2)^2 \times \left(-\frac{1}{y}\right)^5 = -\frac{84}{y}$
 Ante antepenúltimo termo: $35 \times (2y^2)^3 \times \left(-\frac{1}{y}\right)^4 = 280y^2$

b) Último termo: $1 \times x^0 \times (-a^2)^{15} = -a^{30}$;
 Penúltimo termo: $15 \times x^1 \times (-a^2)^{14} = 15a^{28}x$
 Antepenúltimo termo: $105 \times x^2 \times (-a^2)^{13} = -105a^{26}x^2$
 Ante antepenúltimo termo: $455 \times x^3 \times (-a^2)^{12} = 455a^{24}x^3$

125.

a) ${}^{10}C_6 \times \left(\frac{1}{x^2}\right)^4 \times \left(\frac{x}{2}\right)^6 = \frac{105}{32x^2}$
b) ${}^8C_6 \times x^2 \times \left(\frac{1}{x}\right)^6 = \frac{28}{x^4}$
c) ${}^9C_6 \times \left(\frac{x}{3}\right)^3 \times \left(-\frac{x^2}{2}\right)^6 = \frac{7x^{15}}{144}$
d) ${}^7C_6 \times (x^3)^1 \times \left(\frac{2}{x}\right)^6 = \frac{448}{x^3}$

126.

$$(a+b)^4 - (a-b)^4 = (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) - (a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4) = 8a^3b + 8ab^3 = 8ab(a^2 + b^2)$$

127. $(2 + \sqrt{3})^5 =$

$$= 2^5 + 5 \times 2^4 \times \sqrt{3} + 10 \times 2^3 \times (\sqrt{3})^2 + 10 \times 2^2 \times (\sqrt{3})^3 + 5 \times 2 \times (\sqrt{3})^4 + (\sqrt{3})^5 = 32 + 80\sqrt{3} + 80 \times 3 + 40 \times 3\sqrt{3} + 10 \times 9 + 9\sqrt{3} = 362 + 209\sqrt{3}$$

128. ${}^nC_k \times x^{n-k} \times (\sqrt{y})^k = {}^nC_k \times x^{n-k} \times y^{\frac{k}{2}}$

De ${}^nC_k \times x^{n-k} \times y^{\frac{k}{2}} = 28x^6y$ vem que ${}^nC_k = 28$ e $n - k = 6$ e $\frac{k}{2} = 1$
 $k = 2$ e $n = 8$ e ${}^8C_2 = 28$. Logo, $n = 8$.

129. (B)

Termo geral: ${}^6C_k \times x^{6-k} \times 2^k$

$$6 - k = 4 \Leftrightarrow k = 2$$

$${}^6C_2 \times x^4 \times 2^2 = 60x^4$$

130. ${}^8C_k \times x^{8-k} \times \left(\frac{1}{x}\right)^k = {}^8C_k \times x^{8-k-k} = {}^8C_k \times x^{8-2k}$

$$8 - 2k = 2 \Leftrightarrow k = 3$$

É o termo ${}^8C_3 \times x^2 = 56x^2$.

131. ${}^{11}C_k \times (x\sqrt{x})^{11-k} \times \left(\frac{1}{x^4}\right)^k = {}^{11}C_k \times x^{11-k} \times x^{\frac{11-k}{2}} \times x^{-4k} = {}^{11}C_k \times x^{11-k+\frac{11-k}{2}-4k} =$
 $= {}^{11}C_k \times x^{\frac{33-11k}{2}}$

$$\frac{33-11k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 3$$

É o termo ${}^{11}C_3 = 165$.

132. ${}^{10}C_k \times x^{10-k} \times a^k$; $10 - k = 8 \Leftrightarrow k = 2$

$${}^{10}C_2 \times x^{10-2} \times a^2 = 90x^8 \Leftrightarrow 45x^8 \times a^2 = 90x^8 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

133. $g(a) = g((a-1)+1) = ((a-1)+2)^4 = (a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$

+ Exercícios propostos

Pág. 52

134. (D)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, \dots\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \{12\}$$

$$A \cap \overline{B} = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge \sqrt{|x|} \text{ é racional} \wedge x \in]-5, 5[\} = \{-4, -1, 0, 1, 4\}$$

135. (C)

$$\left(\overline{A \setminus B}\right) \cup B = \left(\overline{A \cap \overline{B}}\right) \cup B = (\overline{A} \cup B) \cup B = \overline{A} \cup (B \cup B) = \overline{A} \cup B$$

136. (A)

$$A = A \cap U = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cap B) \cup A$$

Se $A = (A \cap B) \cup A$, vem que $A \cap B = \emptyset$.

137. (A)

Número de bandeiras que não têm nenhuma tira azul: $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = {}^8A_5$

Número de bandeiras que têm uma tira azul: 5 (escolha da tira azul) $\times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 5 \times {}^8A_4$

Número de bandeiras que têm duas tiras azuis: $({}^5C_2 - 4)$ (escolha das duas tiras azuis) $\times 8 \times 7 \times 6 = ({}^5C_2 - 4) \times {}^8A_3$

Número de bandeiras que têm três tiras azuis: 1 (com três tiras azuis elas têm obrigatoriamente de ser a 1ª, 3ª e última) $\times 8 \times 7 = 1 \times {}^8A_2$

$${}^8A_5 + 5 \times {}^8A_4 + ({}^5C_2 - 4) \times {}^8A_3 + 1 \times {}^8A_2 = 17\,192$$

138. (D)

$$5 \text{ (ímpar)} \times 5 \text{ (ímpar)} \times 5 \text{ (ímpar)} \times 5 \text{ (par)} = 625$$

139. (A)

$$5 \text{ (posição do algarismo 9)} \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 20\,480$$

140. (B)

Números com dois algarismos: $9 \times 9 = 9^2$

Números com três algarismos: $9 \times 9 \times 8 = 9^2 \times 8$

Números com quatro algarismos: $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 9^2 \times {}^8A_2$

Números com cinco algarismos: $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 9^2 \times {}^8A_3$

Números com seis algarismos: $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 9^2 \times {}^8A_4$

$$9^2 + 9^2 \times 8 + 9^2 \times {}^8A_2 + 9^2 \times {}^8A_3 + 9^2 \times {}^8A_4 = 168\,561$$

Pág. 53

141. (B)

$$3! \times 9! = 2\,177\,280$$

142. (D)

$$\begin{aligned} &4! \text{ (ordenação dos casais)} \times 2 \text{ (troca de posições de um casal)} \times 2 \text{ (troca de posições de outro} \\ &\text{casal)} \times 2 \text{ (troca de posições de outro casal)} \times 2 \text{ (troca de posições de outro casal)} = \\ &= 4! \times 2^4 = 384 \end{aligned}$$

143. (D)

$$5! \text{ (ordenação de 5 blocos - 1 casal e 4 filhos)} \times 2 \text{ (troca de posições do casal)} = 240$$

144. (C)

$$3 \text{ (condutor)} \times 2 \text{ (lugar ao lado do condutor)} \times 3 \times 2 \times 1 = 36$$

145. (C)

$$1 \times 3! \times {}^9A_3 = 3024$$

146. (C)

$${}^{12}C_2 = 66$$

147. (A)

$${}^6C_2 \text{ (escolha da posição dos zeros)} \times {}^9A_4 = 45\,360$$

Pág. 54

148. (A)

Se a linha tem nove elementos ela é formada pelos elementos da forma ${}^8C_k$; o quarto elemento é ${}^8C_3$.

149. (C)

O último elemento é 1 e o penúltimo é 16. A linha é formada pelos elementos da forma ${}^{16}C_k$. A soma dos três primeiros é $1 + 16 + {}^{16}C_2 = 137$.

150. (C)

A linha tem 1001 elementos, 10 dos quais são menores ou iguais a ${}^{1000}C_4$ (os 5 primeiros e os 5 últimos), logo $1001 - 10 = 991$ são maiores do que ${}^{1000}C_4$.

151. (A)

Se a linha tem 15 elementos ela é formada pelos elementos da forma ${}^{14}C_k$, o maior elemento é o que ocupa a posição central, é ${}^{14}C_7$.

152. (D)

$${}^{2000}C_{100} + {}^{2000}C_{101} = {}^{2001}C_{101}$$

153. (A)

$$1\,771 + a = 10\,626 \Leftrightarrow a = 8\,855 ; 8\,855 + 33\,649 = b \Leftrightarrow b = 42\,504$$

154. (D)

$$\begin{aligned} (x+1)^5 &= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 &= x^5 + 5x^4 + 10x^2 + 1 \Leftrightarrow 10x^3 + 5x = 0 \end{aligned}$$

155. (D)

$$1001^{126} = (1000 + 1)^{126} = 1000^{126} + 126 \times 1000^{125} + \dots + 1 > 1000^{126} + 126000$$

156. (A)

$$n = 6 + 8 = 14$$

Pág. 55

$$157. A = \{-2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$B = \{2, 3, 4, \dots\}$$

$$A \setminus B = \{-2, -1, 0, 1\}$$

$$x^3 + x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -3$$

$$C = \{-3, 0, 2\}$$

$$B \cap C = \{2\}$$

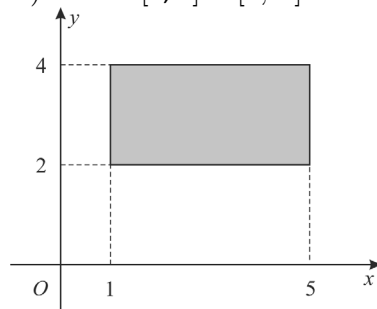
$$(A \setminus B) \cup (B \cap C) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

158.

$$\text{a) } \overline{A \cup I} = \overline{A} \cap \overline{I} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cap \{x : x \text{ é par}\} = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$\text{b) } \overline{\overline{I \cup P}} = \overline{I} \cap P = \{x : x \text{ é par}\} \cap \{x : x \text{ é primo}\} = \{2\}$$

159. $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C = [1, 5] \times [2, 4]$



160. Vamos provar que: **(i)** $B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = A \setminus B$ **(ii)** $A \cup B = A \setminus B \Rightarrow B = \emptyset$

(i) $B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = A \wedge A \setminus B = A \Rightarrow A \cup B = A \setminus B$

(ii) $A \cup B = A \setminus B \Rightarrow A \cup B = A \cap \overline{B} \Rightarrow (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (A \cap \overline{A}) \cup B = [(A \cap \overline{B}) \cap \overline{A}] \cup [(A \cap \overline{B}) \cap B] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \emptyset \cup B = [(\overline{B} \cap A) \cap \overline{A}] \cup [A \cap (\overline{B} \cap B)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = [\overline{B} \cap (A \cap \overline{A})] \cup (A \cap \emptyset) \Rightarrow B = (\overline{B} \cap \emptyset) \cup \emptyset \Rightarrow B = \emptyset \cup \emptyset \Rightarrow B = \emptyset$$

161. a) $1 \times 10 \times 10 \times 10 = 1000$

b) $1 \times 9 \times 9 \times 9 = 729$

c) ${}^4C_3$ (número de maneiras de escolher os lugares para onde vão os algarismos «2») $\times 9 = 36$

162. 2 (o algarismo das centenas só pode ser o 2 ou o 3) $\times 5 \times 4 = 40$; $1 \times 4 \times 2$ (o algarismo das centenas é 2) $+ 1 \times 4 \times 3$ (o algarismo das centenas é 3) $= 20$

163. $3!$ (ordenação das cores) $\times 12!$ (ordenação das bolas brancas) $\times 13!$ (ordenação das bolas azuis) $\times 14!$ (ordenação das bolas amarelas) $\approx 1,56 \times 10^{30}$

164. $9 \times 8 \times 7 = {}^9A_3 = 504$

Pág. 56

165. ${}^{20}C_2 = 190$

166. ${}^{12}C_3 = 220$

167. 4×3 (com um ponto em cada reta) $+ 2 = 14$

$$\begin{aligned}
 168. {}^n A_2 &= {}^n C_2 + 435 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} + 435 \Leftrightarrow n(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} + 435 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow n^2 - n = \frac{n^2 - n}{2} + 435 \Leftrightarrow 2n^2 - 2n = n^2 - n + 870 \Leftrightarrow n^2 - n - 870 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-870)}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 59}{2} \Leftrightarrow n = 30 \text{ (porque } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2)
 \end{aligned}$$

169. Os divisores de 210 são:

1 $\rightarrow$ 1 divisor

2, 3, 5, 7 $\rightarrow$ 4 divisores

$2 \times 3 = 6$, $2 \times 5 = 10$, $2 \times 7 = 14$, $3 \times 5 = 15$, $3 \times 7 = 21$, $5 \times 7 = 35 \rightarrow$ 6 divisores

$2 \times 3 \times 5 = 30$, $2 \times 3 \times 7 = 42$, $2 \times 5 \times 7 = 70$, $3 \times 5 \times 7 = 105 \rightarrow$ 4 divisores

$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210 \rightarrow$ 1 divisor

Existem tantos divisores quantos os subconjuntos do conjunto $\{2, 3, 5, 7\}$, logo existem $2^4 = 16$ divisores.

170.

a) Apenas de uma maneira.

b) De duas maneiras.

c) De $3! = 6$ maneiras.

d) De ${}^5 C_2$ (escolha dos lugares das letras r) $\times 3! = 60$ maneiras.

e) De ${}^{11} C_3$ (escolha dos lugares das letras i) $\times {}^8 C_2$ (escolha dos lugares das letras n) $\times 6! = 3\,326\,400$ maneiras.

171.

a) $(2x + 3 = 9 - x \vee 2x + 3 = 12 - 9 + x) \wedge 2x + 3 \leq 12 \wedge 9 - x \leq 12 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 0$

b) $(2x + 1 = 2x + 3 \vee 2x + 1 = 40 - 2x - 3) \wedge 2x + 1 \leq 40 \wedge 2x + 3 \leq 40 \Leftrightarrow x = 9$

c) ${}^{21} C_{2x} = {}^{20} C_{x+12} + {}^{20} C_{x+11} \Leftrightarrow {}^{21} C_{2x} = {}^{21} C_{x+12}$
 $(2x = x + 12 \vee 2x = 21 - x - 12) \wedge 2x \leq 21 \wedge x + 12 \leq 21 \Leftrightarrow (x = 12 \vee x = 3) \wedge x \leq 9 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 3$

172. ${}^6 C_2 + {}^6 C_3 + {}^7 C_4 + {}^8 C_5 = {}^7 C_3 + {}^7 C_4 + {}^8 C_5 = {}^8 C_4 + {}^8 C_5 = {}^9 C_5$; $n = 9$ e $p = 5$ ou $p = 4$

$$173. \sum_{k=1}^n {}^n C_k = \sum_{k=0}^n {}^n C_k - {}^n C_0 = 2^n - 1$$

174. $n^2 = 144 \Leftrightarrow n = 12$, trata-se da linha em que cada elemento é da forma ${}^{12} C_k$.
O quarto elemento da linha anterior é ${}^{11} C_3 = 165$.

175. $2^n = 512 \Leftrightarrow 2^n = 2^9 \Leftrightarrow n = 9$, trata-se da linha em que cada elemento é da forma ${}^9C_k$.
O maior elemento da linha seguinte é ${}^{10}C_5 = 252$.

Pág. 57

176. $({}^6C_0 + {}^6C_1) + ({}^6C_2 + {}^6C_3) + ({}^6C_4 + {}^6C_5) + {}^6C_6 = 2^6 \Leftrightarrow {}^7C_1 + {}^7C_3 + {}^7C_5 + {}^6C_6 = 2^6 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow {}^7C_1 + {}^7C_3 + {}^7C_5 + {}^7C_7 = 2^6$
Logo, $n = 6$.

177.

a) ${}^9C_3 \times t^6 \times \left(\frac{2}{t}\right)^3 = 672t^3$

b) Termo geral: ${}^{10}C_k \times a^{10-k} \times \left(\frac{1}{2a}\right)^k = {}^{10}C_k \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times a^{10-k} \times \left(\frac{1}{a}\right)^k =$
 $= {}^{10}C_k \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times a^{10-k} \times a^{-k} = {}^{10}C_k \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times a^{10-2k}$

$10 - 2k = 6 \Leftrightarrow k = 2$

Vem, então, ${}^{10}C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times a^6 = \frac{45}{4}a^6$

178. $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = 2 + 6x^2$

179.

a) ${}^6C_3 \times (\sqrt{2a})^3 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)^3 = -{}^6C_3 = -20$

b) ${}^{2n}C_n \times 1^n \times x^n = \frac{(2n)!}{(2n-n)! \times n!} x^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$

180.

a) Termo geral: ${}^{12}C_k \times (\sqrt{x})^{12-k} \times \left(-\frac{2}{x}\right)^k = {}^{12}C_k \times (-2)^k \times x^{\frac{12-k}{2}} \times \left(\frac{1}{x}\right)^k =$
 $= {}^{12}C_k \times (-2)^k \times x^{\frac{12-k}{2}} \times x^{-k} = {}^{12}C_k \times (-2)^k \times x^{\frac{12-k}{2}-k}$

$\frac{12-k}{2} - k = 0 \Leftrightarrow 12 - k - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 4$

O termo independente é ${}^{12}C_4 \times (-2)^4 = 7920$.

b) Termo geral: ${}^{12}C_k \times (\sqrt{x})^{12-k} \times \left(-\frac{2}{x}\right)^k = {}^{12}C_k \times (-2)^k \times x^{\frac{12-k}{2}} \times \left(\frac{1}{x}\right)^k =$
 $= {}^{12}C_k \times (-2)^k \times x^{\frac{12-k}{2}} \times x^{-k} = {}^{12}C_k \times (-2)^k \times x^{\frac{12-k}{2}-k}$

$\frac{12-k}{2} - k = 2 \Leftrightarrow 12 - k - 2k = 4 \Leftrightarrow k = \frac{8}{3} \notin \mathbb{N}$, logo não existe termo em x^2 .

181. Consideremos o esquema: _ E _ E _ E _ E _ E _ E _

As 9 cartas de espadas podem permutar entre si.

Escolhem-se quatro dos dez espaços (representados por _) para colocar as quatro cartas de copas.

Resposta: $9! \times {}^{10}A_4 = 1\,828\,915\,200$

182.	Peças quadradas	Peças retangulares	Total de peças	Número de configurações
	14	0	14	1
	12	1	13	${}^{13}C_1$
	10	2	12	${}^{12}C_2$
	8	3	11	${}^{11}C_3$
	6	4	10	${}^{10}C_4$
	4	5	9	${}^9C_5$
	2	6	8	${}^8C_6$
	0	7	7	1

$$1 + {}^{13}C_1 + {}^{12}C_2 + {}^{11}C_3 + {}^{10}C_4 + {}^9C_5 + {}^8C_6 + 1 = 610$$

183. $5!$ (com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5) + ${}^5C_2 \times 3!$ (com os algarismos 1, 1, 4, 5, 6) + ${}^5C_2 \times 3!$ (com os algarismos 1, 1, 3, 5, 8) + ${}^5C_3 \times 2$ (com os algarismos 2, 2, 2, 3, 5) = 260

$$\begin{aligned} \text{184. } {}^{2n+1}C_3 + {}^{2n+1}C_4 - {}^{2n+3}C_5 + {}^{2n+2}C_{n+1} &= 0 \Leftrightarrow {}^{2n+1}C_3 + {}^{2n+1}C_4 + {}^{2n+2}C_{n+1} = {}^{2n+3}C_5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow {}^{2n+2}C_4 + {}^{2n+2}C_{n+1} &= {}^{2n+3}C_5 \Leftrightarrow {}^{2n+2}C_4 + {}^{2n+2}C_{n+1} = {}^{2n+2}C_4 + {}^{2n+2}C_5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow {}^{2n+2}C_{n+1} &= {}^{2n+2}C_5 \Leftrightarrow n+1 = 5 \vee n+1+5 = 2n+2 \Leftrightarrow n = 4 \vee n = 4 \Leftrightarrow n = 4 \end{aligned}$$

185. De acordo com o enunciado, seja x o terceiro elemento de uma linha do triângulo de Pascal. Seja a o segundo elemento dessa linha. Tem-se, então, que os três primeiros elementos dessa linha e os três primeiros elementos da linha seguinte são:

$$\begin{array}{cccc} 1 & a & x & \dots \\ 1 & a+1 & a+x & \dots \end{array}$$

Ainda de acordo com o enunciado, tem-se:

$$1 + a + x = y \quad \text{e}$$

$$1 + a + 1 + a + x = z \quad (\text{em qualquer linha do triângulo de Pascal, a soma dos três últimos elementos é igual à soma dos três primeiros elementos}).$$

Vem, então:

$$1 + a + x = y \Leftrightarrow a = y - x - 1$$

$$1 + a + 1 + a + x = z \Leftrightarrow z = x + 2a + 2 \Leftrightarrow z = x + 2(y - x - 1) + 2 \Leftrightarrow z = 2y - x$$

186. Para $n \geq 3$, tem-se: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$

$$= 1 + {}^nC_1 \times 1^{n-1} \times \left(\frac{1}{n}\right)^1 + {}^nC_2 \times 1^{n-2} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n \times \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2n^2} + \dots + \frac{1}{n^n} = 2 + \frac{n-1}{2n} + \dots + \frac{1}{n^n}$$

Portanto, para $n \geq 3$, tem-se: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2 + \frac{n-1}{2n}$

Vamos mostrar que, para $n \geq 3$, se tem $2 + \frac{n-1}{2n} > 2,3$

Tem-se, para qualquer n natural:

$$2 + \frac{n-1}{2n} > 2,3 \Leftrightarrow \frac{n-1}{2n} > 0,3 \Leftrightarrow n-1 > 0,6n \Leftrightarrow 0,4n > 1 \Leftrightarrow n > 2,5$$

Conclusão: para $n \geq 3$, tem-se: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2 + \frac{n-1}{2n}$ e $2 + \frac{n-1}{2n} > 2,3$

Portanto, se $n \geq 3$ então $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2,3$.

187. Provar que $2^n > n$ equivale a provar que, sendo $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ e sendo $\mathcal{P}(A)$ o conjunto dos subconjuntos de A , se tem $\#\mathcal{P}(A) > n$ (pois $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$).

Ora, $\#\mathcal{P}(A) = \#\left(\left\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}, \dots\right\}\right) \geq n+1 > n$.

Tema 2 | Probabilidades

1. Definir espaços de probabilidade

Pág. 60

Será que...? Um problema de probabilidades

Na tabela da página 60 pode observar-se o espaço de resultados e os casos correspondentes à vitória da Inês.

Então, dado que os resultados possíveis são todos equiprováveis, a probabilidade de a Inês vencer uma jogada é igual, de acordo com a regra de Laplace, a:

$$\frac{\text{Número de casos favoráveis a que a Inês vença}}{\text{Número de casos possíveis}} = \frac{15}{36}$$

Pág. 63

1. **a₁)** {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

a₂) Por exemplo: {5}

a₃) Por exemplo: {1, 4, 9}

a₄) O cardinal do espaço de resultados é igual a 12, pelo que o cardinal do espaço de acontecimentos é igual a 2^{12} , ou seja, 4096.

b₁) {1, 2, 3}

b₂) {3, 6, 9, 12}

b₃) {6, 7}

b₄) $\emptyset$

c₁) Sair número ímpar (por exemplo).

c₂) Sair número múltiplo de 4 (por exemplo).

c₃) Sair número primo (por exemplo).

c₄) Sair número maior do que 7 (por exemplo).

d₁) $B \cup A$

d₂) «Sair 10 ou 12» equivale a afirmar «Sair número par maior ou igual a 10», o que se pode expressar por $B \cap \bar{A}$.

d₃) «Sair 11» equivale a afirmar «Sair número ímpar maior ou igual a 10», o que se pode expressar por $\bar{B} \cap \bar{A}$.

e) Por exemplo: $\{1, 2, 3, 4\}$ e $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, ou, em linguagem corrente, por exemplo: «Sair número par» e «Sair número ímpar».

f) Por exemplo: $\{1, 2, 3, 4\}$ e $\{9, 10, 11, 12\}$, ou, em linguagem corrente, por exemplo: «Sair número quadrado perfeito» e «Sair número maior do que 10».

Pág. 64

2. a) $\{(1, p), (1, e), (2, p), (2, e), (3, p), (3, e), (4, p), (4, e), (5, p), (5, e), (6, p), (6, e)\}$

b₁) $\{(6, p), (6, e)\}$

b₂) $\{(2, e), (4, e), (6, e)\}$

b₃) $\{(1, p), (1, e), (2, p), (3, p), (4, p), (5, p), (6, p)\}$

c₁) Sair face europeia e número menor do que 3.

c₂) Sair número maior do que 4.

Pág. 67

3. a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$ | $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 0,7$
 $= 0,4 + 0,7 - 0,3 = 0,8$

b) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) =$ | $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,6$
 $= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - (0,6 + 0,3 - 0,2) = 1 - 0,7 = 0,3$

4. a)

$$P(A \cap B) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(A \cap B) + P(\overline{A \cap B}) = \\ = P(A \cap B) + 1 - P(A \cap B) = 1$$

b)

$$P(A) + P(\bar{A} \cup B) = P(B) + P(A \cup \bar{B}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A) + P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) = \\ = P(B) + P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 + P(B) - P(\bar{A} \cap B) = \\ = 1 + P(A) - P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 + P(A \cap B) = 1 + P(A \cap B)$$

5.

a) O mínimo valor de $P(A \cup B)$ ocorre no caso em que $B \subset A$, pelo que, como neste caso se tem $A \cup B = A$, vem $P(A \cup B) = P(A) = 0,7$.

Por outro lado, como $P(A) + P(B) > 1$, A e B não podem ser incompatíveis. Então, o máximo valor de $P(A \cup B)$ ocorre no caso em que $A \cup B = E$.

Neste caso, tem-se $P(A \cup B) = P(E) = 1$.

Então, $0,7 \leq P(A \cup B) \leq 1$.

b) Como $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 1,1 - P(A \cup B)$, tem-se que o máximo valor de $P(A \cap B)$ ocorre no caso em que $P(A \cup B)$ é mínimo e vice-versa.

Então, $1,1 - 1 \leq P(A \cap B) \leq 1,1 - 0,7$, ou seja, $0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,4$.

6. Tem-se $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$.

O máximo valor de $P(\bar{A} \cap B)$ ocorre no caso em que $\bar{A} \subset B$.

Neste caso, tem-se $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) = 0,4$.

Por outro lado, como $P(\bar{A}) + P(B) = 0,9$, $\bar{A}$ e B podem ser incompatíveis, caso em que $P(\bar{A} \cap B) = 0$.

Então, $0 \leq P(\bar{A} \cap B) \leq 0,4$.

Pág. 68

7.

Trata-se de provar, por indução, que, sendo $A_1, A_2, \dots, A_n$ acontecimentos tais que, dados quaisquer dois, a sua interseção é vazia, se tem:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \end{aligned}$$

Para $n = 1$, vem $P(A_1) = P(A_1)$, que é verdade.

Hipótese de indução: sendo $A_1, A_2, \dots, A_n$ acontecimentos tais que, dados quaisquer dois, a sua interseção é vazia, tem-se:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \end{aligned}$$

Tese de indução: sendo $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ acontecimentos tais que, dados quaisquer dois, a sua interseção é vazia, tem-se:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}) &= \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + P(A_{n+1}) \end{aligned}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}) &= \\ &= P[(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}] \stackrel{*}{=} \\ &= P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) + P(A_{n+1}) \stackrel{**}{=} \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + P(A_{n+1}) \end{aligned}$$

*Estamos a admitir que $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ são acontecimentos tais que, dados quaisquer dois, a sua interseção é vazia. Portanto,

$$\begin{aligned} & (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1} = \\ &= (A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1}) = \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \cup \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

Vem, então, pelo axioma 3 da axiomática de Kolmogorov, que:

$$\begin{aligned} & P[(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}] = \\ &= P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) + P(A_{n+1}) \end{aligned}$$

**Aplicando a hipótese de indução.

Pág. 70

8. Número de chaves possíveis: ${}^{49}C_5 \times {}^{13}C_1$

Número de chaves favoráveis a que uma dada aposta simples coincida com a chave vencedora: 1

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{1}{{}^{49}C_5 \times 13} = \frac{1}{24\,789\,492}$$

9. Há 6^3 possibilidades diferentes para os números observados nos dados das três pessoas.

a) Número de casos possíveis: 6^3

Número de casos favoráveis: 10 (três possibilidades, saindo 1, 1 e 4, seis possibilidades, saindo 1, 2 e 3 e uma possibilidade, saindo 2, 2 e 2)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}$$

b) Número de casos possíveis: 6^3

Número de casos favoráveis: 6

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

c) Número de casos possíveis: 6^3

Número de casos favoráveis: $6 \times 5 \times 4$

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{6 \times 5 \times 4}{6^3} = \frac{5}{9}$$

d) Número de casos possíveis: 6^3

Número de casos favoráveis: 15 (as cinco possíveis escolhas de um número diferente de 6 para cada um dos três dados)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{15}{6^3} = \frac{5}{72}$$

Pág. 71

10. Há 10^6 diferentes códigos.

a) Número de casos possíveis: 10^6

Número de casos favoráveis: ${}^{10}A_6$

Probabilidade pedida: $\frac{{}^{10}A_6}{10^6} = 0,1512$

b) Número de casos possíveis: 10^6

Número de casos favoráveis: ${}^6C_2 \times 9^4$ (para cada escolha das duas posições ocupadas pelos dois zeros, há 9^4 diferentes sequências de quatro algarismos escolhidos de entre nove)

Probabilidade pedida: $\frac{{}^6C_2 \times 9^4}{10^6} = 0,098\,415$

c) Número de casos possíveis: 10^6

Número de casos favoráveis: $10^6 - 9^6$ (a diferença entre o número total de códigos e o número daqueles que não têm qualquer zero)

Probabilidade pedida: $\frac{10^6 - 9^6}{10^6} = 0,468\,559$

11. Há $7!$ maneiras diferentes de os sete amigos ocuparem os sete lugares.

a) Número de casos possíveis: $7!$

Número de casos favoráveis: $2 \times 3! \times 4!$ (o grupo de raparigas pode ficar à direita ou à esquerda do grupo de rapazes e, para cada um desses casos, as três raparigas, bem como os quatro rapazes, podem permutar entre si)

Probabilidade pedida: $\frac{2 \times 3! \times 4!}{7!} = \frac{2}{35}$

b) Número de casos possíveis: $7!$

Número de casos favoráveis: $5 \times 3! \times 4!$ (o grupo de raparigas tem cinco diferentes maneiras de escolher as suas três cadeiras e, para cada um desses casos, podem, bem como os quatro rapazes, permutar entre si)

Probabilidade pedida: $\frac{5 \times 3! \times 4!}{7!} = \frac{1}{7}$

c) Número de casos possíveis: $7!$

Número de casos favoráveis: $3! \times 4!$ (existe uma única maneira de escolher as cadeiras onde ficam as raparigas e as cadeiras onde ficam os rapazes, sendo que as três raparigas, bem como os quatro rapazes, podem permutar entre si)

Probabilidade pedida: $\frac{3! \times 4!}{7!} = \frac{1}{35}$

d) Número de casos possíveis: $7!$

Número de casos favoráveis: $7! - 6 \times 2! \times 5!$ (a diferença entre o número total de diferentes maneiras de os sete amigos ocuparem os sete lugares e o número de diferentes maneiras de os sete amigos ocuparem esses lugares ficando a Ana e a Bárbara ao lado uma da outra)

Probabilidade pedida: $\frac{7! - 6 \times 2! \times 5!}{7!} = \frac{5}{7}$

12. Há ${}^{13}A_6$ diferentes sequências que se podem obter.

a) Número de casos possíveis: ${}^{13}A_6$

Número de casos favoráveis: $1 \times 3! \times {}^9A_6$

Probabilidade pedida: $\frac{1 \times 3! \times {}^9A_6}{{}^{13}A_6} = \frac{1}{2860}$

b) Número de casos possíveis: ${}^{13}A_6$

Número de casos favoráveis: ${}^{10}A_6$

Probabilidade pedida: $\frac{{}^{10}A_6}{{}^{13}A_6} = \frac{35}{286}$

c) Número de casos possíveis: ${}^{13}A_6$

Número de casos favoráveis: ${}^9C_6 \times 1$ (para cada escolha de seis das nove cartas numeradas, só existe uma maneira de as ordenar por ordem crescente da esquerda para a direita)

Probabilidade pedida: $\frac{{}^9C_6}{{}^{13}A_6} = \frac{7}{102\,960}$

13. Um prisma pentagonal tem 10 vértices.

a) Número de casos possíveis: ${}^{10}C_2$

Número de casos favoráveis: ${}^5C_2 \times 2$ (as diferentes maneiras de escolher dois vértices pertencentes à mesma base do prisma)

Probabilidade pedida: $\frac{{}^5C_2 \times 2}{{}^{10}C_2} = \frac{4}{9}$

b) Número de casos possíveis: ${}^{10}C_3$

Número de casos favoráveis: $5 \times {}^8C_1$ (dois dos três pontos escolhidos têm que pertencer à mesma aresta lateral do prisma e o terceiro ponto pode ser qualquer um dos outros oito vértices)

Probabilidade pedida: $\frac{5 \times {}^8C_1}{{}^{10}C_3} = \frac{1}{3}$

c) Número de casos possíveis: 5^2

Número de casos favoráveis: 10 (o prisma tem 10 diagonais faciais, pelo que existem 10 diferentes maneiras de escolher um vértice em cada base de modo que estes dois pontos definam uma diagonal facial do prisma)

Probabilidade pedida: $\frac{10}{5^2} = \frac{2}{5}$

Pág. 73

14.

Provar que no saco há pelo menos uma bola azul com o número 1 equivale a provar que, ao tirar ao acaso uma bola do saco, é possível o acontecimento «a bola extraída é azul e tem o número 1».

Em relação à experiência aleatória «tirar, ao acaso, uma bola do saco», sejam os acontecimentos:

A : a bola é azul

B : a bola tem o número 1

Sabe-se que $P(A) = 0,7$ e $P(B) = 0,4$.

Como $P(A \cap B) \leq 1$, tem-se:

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$, ou seja,

$0,7 + 0,4 - P(A \cap B) \leq 1$, donde vem

$P(A \cap B) \geq 0,1$.

Como $P(A \cap B) \neq 0$, o acontecimento $A \cap B$ é possível, ou seja, é possível o acontecimento «a bola extraída é azul e tem o número 1».

Portanto, no saco há pelo menos uma bola azul com o número 1.

Pág. 74

15.

a) Seja n o número de vezes que se espera que saia a face 6. Como a probabilidade de, num lançamento, sair a face 6 é igual a $\frac{1}{6}$, tem-se $\frac{n}{6000} \approx \frac{1}{6}$, pelo que $n \approx 1000$.

b) Seja n o número de vezes que se espera que saia face com número par. Como a probabilidade de, num lançamento, sair número par é igual a $\frac{1}{2}$, tem-se $\frac{n}{6000} \approx \frac{1}{2}$, pelo que $n \approx 3000$.

c) Seja n o número de vezes que se espera que saia face com número maior do que 4. Como a probabilidade de, num lançamento, sair número maior do que 4 é igual a $\frac{1}{3}$, tem-se $\frac{n}{6000} \approx \frac{1}{3}$, pelo que $n \approx 2000$.

Pág. 75

16. Seja n o número de vezes que se espera que o Bruno ganhe a aposta. Como a probabilidade de, numa aposta, o Bruno ganhar é igual a $\frac{4}{37}$, tem-se $\frac{n}{740} \approx \frac{4}{37}$, ou seja, $n \approx 80$, pelo que se espera que o Bruno ganhe em 80 das 740 apostas.

Para apostar 740 vezes, o Bruno gasta 7400 euros.

Em cada aposta em que ganha, o Bruno recebe 90 euros; portanto, em 80 apostas ganhas, recebe 7200 euros.

Então, é de esperar que, no final, o Bruno tenha perdido 200 euros.

Pág. 80

17. a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; há oito bolas no saco e a bola com o número 5 pode sair à primeira ou à oitava bola.

c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; há cinco bolas com número ímpar no saco, pelo que poderá ser necessário extrair até seis bolas antes de sair a primeira bola com número par.

d) $\{(S, S), (S, N), (N, S), (N, N)\}$

e) $\{(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)\}$

18. Tem-se, no espaço de resultados $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

a) $A = \{1, 4\}$

b) $B = \{1, 2, 4\}$

c) $C = \{3, 6\}$

19. Seja p o acontecimento «sair face portuguesa num lançamento» e seja e o acontecimento «sair face europeia num lançamento».

Então, tem-se $A = \{(p, e, p), (e, p, e)\}$.

20. Seja M o acontecimento «O filho é rapaz» e seja F o acontecimento «O filho é rapariga».

Então, tem-se:

a)

$A = \{(M, M, M, F), (M, M, F, M), (M, F, M, M), (F, M, M, M)\}$

b)

$B = \{(M, M, F, F), (M, F, M, F), (M, F, F, M), (F, M, M, F), (F, M, F, M), (F, F, M, M)\}$

21. a) O acontecimento não é elementar porque é formado por mais do que um elemento do espaço amostral: aquele que traduz o caso em que saem duas bolas azuis e aquele que traduz o caso em que saem duas bolas verdes.

b) O acontecimento é elementar porque é formado por um único elemento do espaço amostral: aquele que traduz o caso em que saem a bola amarela e a bola vermelha.

c) O acontecimento é elementar porque é formado por um único elemento do espaço amostral: aquele que traduz o caso em que saem a bola amarela e uma das duas bolas verdes.

22. No espaço de resultados das somas possíveis, ou seja, para $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, tem-se $A = \{4, 8, 12\}$ e $B = \{6, 12\}$. Então:

a) $A \cup B = \{4, 6, 8, 12\}$

b) $A \cap B = \{12\}$

23.

É uma afirmação falsa. Por exemplo, no lançamento de um dado, os acontecimentos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{4, 6\}$ são incompatíveis, mas pode não se realizar nem A nem B (se sair, por exemplo, 3).

24. Num espaço E , se os acontecimentos A e B são contrários, a não realização de A implica a realização de B .

Pág. 81

25. Por exemplo, $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 5, 6\}$, ou, por exemplo, A : sair n.º par e B : sair 3 ou 5; tem-se, em ambos os casos, que A e B são incompatíveis, pois $A \cap B = \emptyset$, mas não são contrários, pois $A \cup B \neq E$.

26. Tem-se $A = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)\}$; portanto:

a) $(2, 5, 6) \notin A$ pelo que $(2, 5, 6) \in \bar{A}$.

b) $(3, 4, 4) \notin A$ pelo que $(3, 4, 4) \in \bar{A}$.

27. Tem-se $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 2\}$; portanto:

a) $\bar{B} = \{3, 4, 5, 6\}$

b) $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$, pelo que $\overline{A \cup B} = \{3, 5\}$.

c) $A \cap \bar{B} = \{4, 6\}$, pelo que $\overline{A \cap \bar{B}} = \{1, 2, 3, 5\}$.

d) $B \setminus A = \{1\}$, pelo que $\overline{B \setminus A} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

28. a) $A \cap B = \emptyset$. Se $A \cap B = \emptyset$, tem-se $A \subset \bar{B}$, pelo que, como $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, vem $A \setminus B = A$.

b) $A \subset B$. Se $A \subset B$, tem-se $A \cap \bar{B} = \emptyset$, pelo que, como $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, vem $A \setminus B = \emptyset$.

$$\begin{aligned} 29. \text{ a) } \overline{A \cap B} &= && | \text{Leis de de Morgan} \\ &= \bar{A} \cup \bar{B} = && | \text{Acontecimento complementar do complementar} \\ &= \bar{A} \cup B = && | \text{Comutatividade de } \cup \\ &= B \cup \bar{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \overline{A \cap B \cap C} &= && | \text{Associatividade de } \cap \\ &= \overline{(A \cap B) \cap C} = && | \text{Leis de de Morgan} \\ &= \overline{A \cap B} \cup \bar{C} = && | \text{Leis de de Morgan} \\ &= (\bar{A} \cup \bar{B}) \cup \bar{C} = && | \text{Associatividade de } \cup \\ &= \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \end{aligned}$$

$$30. \text{ a) } \overline{A \cup B} = \overline{A \cap B} = \bar{\emptyset} = E$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A \cap (B \cup \bar{A}) &= (A \cap B) \cup (A \cap \bar{A}) = \\ &= \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

31. Como $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ e $P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, tem-se, neste caso, $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$, pelo que, pelo axioma 3, A e B não são incompatíveis.

32. a) Para que A e B sejam incompatíveis, tem de se ter $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Tem-se $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \left(1 - \frac{2}{3}\right) + P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$.

b) $P(A) + P(B) = \frac{2}{3} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$, pelo que, como $\frac{17}{12} > 1$, $P(A) + P(B)$ não pode ser igual a $P(A \cup B)$.

33. Como $A \cap B = \emptyset$, tem-se $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, pelo que:
 $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B)] = 1 - P(A) - P(B) = P(\bar{A}) - P(B)$

34. Sejam A e C os acontecimentos «sair ás» e «sair copas», respetivamente.
Tem-se:

$$\bullet P(A) = \frac{4}{52} \qquad \bullet P(C) = \frac{13}{52}$$

$$\bullet P(A \cap C) = P(\text{«sair ás de copas»}) = \frac{1}{52}$$

$$\text{Portanto, } P(\text{«sair ás ou copas»}) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52}$$

35. a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + (1 - 0,3) - 0,3 = 0,8$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,9 = 0,6 + 0,7 - P(A \cap B) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,4$; portanto, $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,4 = 0,6$

36.

a) O mínimo valor de $P(A \cup B)$ ocorre no caso em que $B \subset A$, pelo que, como neste caso se tem $A \cup B = A$, vem $P(A \cup B) = P(A) = 0,7$.

Por outro lado, como $P(A) + P(B) > 1$, A e B não podem ser incompatíveis. Então, o máximo valor de $P(A \cup B)$ ocorre no caso em que $A \cup B = E$.

Neste caso, tem-se $P(A \cup B) = P(E) = 1$.

Então, $0,7 \leq P(A \cup B) \leq 1$.

Como $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 1,1 - P(A \cup B)$, tem-se que o máximo valor de $P(A \cap B)$ ocorre no caso em que $P(A \cup B)$ é mínimo e vice-versa.

Então, $1,1 - 1 \leq P(A \cap B) \leq 1,1 - 0,7$, ou seja, $0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,4$.

b) Tem-se $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$.

O máximo valor de $P(\bar{A} \cap B)$ ocorre no caso em que $\bar{A} \subset B$.

Neste caso, tem-se $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) = 0,4$.

Por outro lado, como $P(\bar{A}) + P(B) = 0,9$, $\bar{A}$ e B podem ser incompatíveis, caso em que $P(\bar{A} \cap B) = 0$.

Então, $0 \leq P(\bar{A} \cap B) \leq 0,4$.

Pág. 82

37. a)

$$\begin{aligned} P(A \cap B) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) &= \\ &= P(A \cap B) + P(\overline{A \cap B}) = \\ &= P(A \cap B) + 1 - P(A \cap B) = 1 \end{aligned}$$

b) $P(A \cup \bar{B}) + P(B) = P(A) + P(\bar{A} \cup B) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) + P(B) = P(A) + P(\bar{A} \cup B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) + P(B) = P(\bar{A} \cup B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cup B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{A \cap \bar{B}}) = P(\bar{A} \cup B)$$

38. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,6 + 0,7 - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 1,3 - P(A \cup B)$$

Como $P(A \cup B) \leq 1$, tem-se, neste caso, $P(A \cap B) \geq 0,3$, pelo que $A \cap B \neq \emptyset$.

39.

$$\begin{aligned}
 P(\bar{A}) + P(\bar{B}) &\leq 1 + P(\overline{A \cup B}) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 1 - P(A) + 1 - P(B) &\leq 1 + 1 - P(A \cup B) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -P(A) - P(B) &\leq -P(A \cup B) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(A) + P(B) &\geq P(A \cup B) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cup B) &\geq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(A \cap B) &\geq 0, \text{ o que é verdade.}
 \end{aligned}$$

40. a) A tabela ao lado é a que traduz a experiência que consiste no lançamento de dois dados equilibrados e adicionar os números saídos.

$$P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

b) $P = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

c) A tabela ao lado é a que traduz a experiência que consiste no lançamento de dois dados equilibrados e multiplicar os números saídos.

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

d) $P = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

41. Há 6^3 possibilidades diferentes para os números observados nos três dados.

a) Número de casos possíveis: 6^3

Número de casos favoráveis: 6 (sair 1 nos três dados, ou sair 2 nos três dados, ..., ou sair 6 nos três dados)

Probabilidade pedida: $\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$

b) Número de casos possíveis: 6^3

Número de casos favoráveis: ${}^6A_3$

Probabilidade pedida: $\frac{{}^6A_3}{6^3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6^3} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

42. Há ${}^{15}C_2$, ou seja, 105 possibilidades diferentes para as duas bolas tiradas.

a) Número de casos possíveis: 105

Número de casos favoráveis: 4 (sair 1 e 9, ou sair 2 e 8, ou sair 3 e 7, ou sair 4 e 6)

Probabilidade pedida: $\frac{4}{105}$

b) Número de casos possíveis: 105

Número de casos favoráveis: ${}^7C_2 + {}^8C_2$ (a soma é par se ambos os números forem pares ou se ambos forem ímpares)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{{}^7C_2 + {}^8C_2}{105} = \frac{49}{105} = \frac{7}{15}$$

c) Número de casos possíveis: 105

Número de casos favoráveis: 3 (sair 1 e 12, ou sair 2 e 6, ou sair 3 e 4)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{3}{105} = \frac{1}{35}$$

d) Número de casos possíveis: 105

Número de casos favoráveis: 6 (sair 1 e 2, ou sair 1 e 3, ou sair 1 e 5, ou sair 1 e 7, ou sair 1 e 11, ou sair 1 e 13)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{6}{105} = \frac{2}{35}$$

e) Número de casos possíveis: 105

Número de casos favoráveis: 8 (sair 9 e qualquer outro número entre 1 e 8 inclusive)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{8}{105}$$

43. Há 7! possibilidades diferentes de distribuir os sete bilhetes pelos sete jovens.

a) Número de casos possíveis: 7!

Número de casos favoráveis: $4! \times 3!$ (só existe uma maneira de escolher os quatro lugares que vão ser ocupados pelas raparigas)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{4! \times 3!}{7!} = \frac{1}{35}$$

b) Número de casos possíveis: 7!

Número de casos favoráveis: $2 \times 4! \times 3!$ (existem duas maneiras de escolher os quatro lugares que vão ser ocupados pelas raparigas: os quatro lugares da esquerda ou os quatro lugares da direita)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{2 \times 4! \times 3!}{7!} = \frac{2}{35}$$

c) Número de casos possíveis: 7!

Número de casos favoráveis: $5 \times 4! \times 3!$ (existem cinco maneiras de escolher os três lugares que vão ser ocupados pelos rapazes:

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{5 \times 4! \times 3!}{7!} = \frac{1}{7}$$

d) Número de casos possíveis: 7!

Número de casos favoráveis: $7! - 6 \times 2! \times 5!$ (existem $6 \times 2! \times 5!$ maneiras de os sete amigos ocuparem os sete lugares de modo que a Ana e o Bruno fiquem juntos)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{7! - 6 \times 2! \times 5!}{7!} = \frac{5}{7}$$

44. Há 10^4 códigos de multibanco diferentes.

a) Número de casos possíveis: 10^4

Número de casos favoráveis: ${}^{10}A_4$

Probabilidade pedida: $\frac{{}^{10}A_4}{10^4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{10\,000} = 0,504$

b) Número de casos possíveis: 10^4

Número de casos favoráveis: ${}^4C_2 \times 9^2$ (existem ${}^4C_2$ maneiras de selecionar os dois lugares ocupados pelos dois algarismos 5 e, para cada uma delas, existem 9^2 diferentes maneiras de escolher os restantes dois algarismos, ambos diferentes de 5)

Probabilidade pedida: $\frac{{}^4C_2 \times 9^2}{10^4} = 0,0486$

c) Número de casos possíveis: 10^4

Número de casos favoráveis: ${}^{10}C_4$ (os algarismos têm de ser todos diferentes; para cada escolha de quatro algarismos diferentes existe uma única forma de os colocar por ordem crescente)

Probabilidade pedida: $\frac{{}^{10}C_4}{10^4} = 0,021$

45. Há ${}^{12}C_6$ diferentes equipas de seis daqueles doze elementos. Constituída uma delas, outra fica também determinada.

Existem, portanto, $\frac{{}^{12}C_6}{2}$ diferentes modos de dividir o conjunto de doze elementos em duas equipas de seis.

Número de casos possíveis: $\frac{{}^{12}C_6}{2}$

Número de casos favoráveis: 1 (só existe uma maneira de repartir aqueles doze elementos em duas equipas em que uma é só de rapazes e a outra é só de raparigas)

Probabilidade pedida: $\frac{1}{\frac{{}^{12}C_6}{2}} = \frac{2}{{}^{12}C_6} = \frac{1}{462}$

46. Há $26^3 \times 10^4$ códigos de acesso diferentes.

a) Número de casos possíveis: $26^3 \times 10^4$

Número de casos favoráveis: $(26^3 - 26) \times 10$ (existem 26 sequências de três letras iguais, pelo que existem $26^3 - 26$ sequências de três letras com pelo menos duas letras diferentes)

Probabilidade pedida: $\frac{(26^3 - 26) \times 10}{26^3 \times 10^4} = 0,000\,9985$

b) Número de casos possíveis: $26^3 \times 10^4$

Número de casos favoráveis: $3 \times 25^2 \times {}^4C_2 \times 9^2$ (existem 3 lugares diferentes que podem ser ocupados pelo K, 25 maneiras diferentes de escolher uma letra para cada um dos outros dois lugares, ${}^4C_2$ maneiras diferentes de escolher os dois lugares preenchidos com 1 e 9 maneiras diferentes de escolher um algarismo para cada um dos outros dois lugares)

Probabilidade pedida: $\frac{3 \times 25^2 \times {}^4C_2 \times 9^2}{26^3 \times 10^4} = 0,005\,1846$

Pág. 83

47. Há $9 \times 9 \times 8 \times 7$, ou seja, 4536 números naturais que se escrevem com quatro algarismos diferentes.

a) Número de casos possíveis: 4536

Número de casos favoráveis: $9 \times 8 \times 7 \times 1 + 8 \times 8 \times 7 \times 1$ (existem $9 \times 8 \times 7 \times 1$ desses números terminados em 0 e existem $8 \times 8 \times 7 \times 1$ desses números terminados em 5)

Probabilidade pedida: $\frac{9 \times 8 \times 7 \times 1 + 8 \times 8 \times 7 \times 1}{4536} = \frac{17}{81}$

b) Número de casos possíveis: 4536

Número de casos favoráveis: $5 \times 5 \times 4 \times 3 + 3 \times (5 \times 4 \times 4 \times 3)$

- se o algarismo ímpar for o dos milhares: $5 \times 5 \times 4 \times 3$

- se o algarismo ímpar for o das centenas, ou o das dezenas, ou o das unidades: $5 \times 4 \times 4 \times 3$

Probabilidade pedida: $\frac{5 \times 5 \times 4 \times 3 + 3 \times (5 \times 4 \times 4 \times 3)}{4536} = \frac{1020}{4536} = \frac{85}{378}$

c) Número de casos possíveis: 4536

Número de casos favoráveis: $1 \times 3 \times 8 \times 7 + 3 \times 9 \times 8 \times 7$

- se o número for maior do que 4000: $1 \times 3 \times 8 \times 7$

- se o número for menor do que 4000: $3 \times 9 \times 8 \times 7$

Probabilidade pedida: $\frac{1 \times 3 \times 8 \times 7 + 3 \times 9 \times 8 \times 7}{4536} = \frac{1680}{4536} = \frac{10}{27}$

48. Há $9 \times 10 \times 10 \times 1 \times 1$, ou seja, 900 capicuas de cinco algarismos.

Número de casos possíveis: 900

Número de casos favoráveis: $5 \times 5 \times 5 \times 1 \times 1$

Probabilidade pedida: $\frac{125}{900} = \frac{5}{36}$

49. Há $15 \times 14 \times 13$ modos diferentes de extrair, sem reposição, três bolas.

Número de casos possíveis: $15 \times 14 \times 13$

Número de casos favoráveis: $5 \times 4 \times 3 + 8 \times 7 \times 6$ (para que as três bolas tenham a mesma cor, é necessário que sejam todas vermelhas ou todas brancas)

Probabilidade pedida: $\frac{5 \times 4 \times 3 + 8 \times 7 \times 6}{15 \times 14 \times 13} = \frac{66}{455}$

50. Há 40×39 diferentes sequências de duas cartas que se podem obter.

a) Número de casos possíveis: 40×39

Número de casos favoráveis: 4×3

Probabilidade pedida: $\frac{12}{40 \times 39} = \frac{1}{130}$

b) Número de casos possíveis: 1560

Número de casos favoráveis: 40×30

Probabilidade pedida: $\frac{40 \times 30}{40 \times 39} = \frac{30}{39} = \frac{10}{13}$

51. Há $15 \times 14 \times 13$ diferentes sequências de três das quinze bolas.

a) Número de casos possíveis: $15 \times 14 \times 13$

Número de casos favoráveis: $5 \times 4 \times 3 + 10 \times 9 \times 8$ (as três bolas são da mesma cor se forem todas vermelhas ou, em alternativa, todas azuis)

Probabilidade pedida: $\frac{5 \times 4 \times 3 + 10 \times 9 \times 8}{15 \times 14 \times 13} = \frac{2}{7}$

b) É impossível as três bolas serem de cores diferentes, pois só há bolas de duas cores.

Probabilidade pedida: 0

c) Número de casos possíveis: $15 \times 14 \times 13$

Número de casos favoráveis: $3 \times (5 \times 4 \times 10 + 10 \times 9 \times 5)$ (a bola da cor diferente das outras duas pode sair em qualquer uma das três extrações; em alternativa, podem extrair-se duas bolas vermelhas e uma azul ou duas azuis e uma vermelha)

Probabilidade pedida: $\frac{3 \times (5 \times 4 \times 10 + 10 \times 9 \times 5)}{15 \times 14 \times 13} = \frac{5}{7}$

52. • Ganhando se as bolas tiverem cores diferentes:

Extração sem reposição

Há $6 \times 5 \times 4$ diferentes sequências de três das seis bolas.

Número de casos possíveis: $6 \times 5 \times 4$

Número de casos favoráveis: $3 \times 2 \times 1 \times 3!$

Probabilidade pedida: $\frac{3 \times 2 \times 1 \times 3!}{6 \times 5 \times 4} = \frac{3}{10}$

Extração com reposição

Há $6 \times 6 \times 6$ diferentes sequências de três das seis bolas.

Número de casos possíveis: $6 \times 6 \times 6$

Número de casos favoráveis: $3 \times 2 \times 1 \times 3!$

Probabilidade pedida: $\frac{3 \times 2 \times 1 \times 3!}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{6}$

Como $\frac{3}{10} > \frac{1}{6}$, é mais favorável extrair sem reposição.

• Ganhando se as bolas tiverem a mesma cor:

Extração sem reposição

Há $6 \times 5 \times 4$ diferentes sequências de três das seis bolas.

Número de casos possíveis: $6 \times 5 \times 4$

Número de casos favoráveis: $3 \times 2 \times 1$ (saída das três bolas verdes)

Probabilidade pedida: $\frac{3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{20}$

Extração com reposição

Há $6 \times 6 \times 6$ diferentes sequências de três das seis bolas.

Número de casos possíveis: $6 \times 6 \times 6$

Número de casos favoráveis: $3 \times 3 \times 3 + 2 \times 2 \times 2 + 1$ (saída, em alternativa, de três vezes uma das bolas verdes ou de três vezes uma das bolas brancas ou de três vezes a bola amarela)

Probabilidade pedida: $\frac{3 \times 3 \times 3 + 2 \times 2 \times 2 + 1}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{6}$

Como $\frac{1}{6} > \frac{1}{20}$, é mais favorável extrair com reposição.

53. Há ${}^{52}A_3 = 52 \times 51 \times 50$ diferentes sequências de três das 52 cartas.

a) Número de casos possíveis: $52 \times 51 \times 50$

Número de casos favoráveis: $13 \times 12 \times 11$ (há ${}^{13}A_3$ diferentes sequências de três cartas de copas)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{13 \times 12 \times 11}{52 \times 51 \times 50} = \frac{11}{850}$$

b) Número de casos possíveis: $52 \times 51 \times 50$

Número de casos favoráveis: $3 \times 39 \times 13 \times 12$ (há três diferentes posições para a carta que não é de copas e 39 cartas que não são de copas; para cada uma destas opções, há 13×12 sequências de duas cartas de copas para as duas restantes posições)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{3 \times 39 \times 13 \times 12}{52 \times 51 \times 50} = \frac{117}{850}$$

c) O acontecimento «saírem não mais do que duas copas» é o acontecimento contrário de «saírem três copas» pelo que a probabilidade pedida é igual a $1 - \frac{11}{850}$, ou seja, $\frac{839}{850}$.

54. Número de casos possíveis: $6!$

Número de casos favoráveis: $3! \times 2! \times 2! \times 2!$ (há $3!$ maneiras de ordenar os três casais e, para cada uma delas, há $2!$ maneiras de cada casal se sentar nas respetivas cadeiras)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{3! \times 2! \times 2! \times 2!}{6!} = \frac{1}{15}$$

55. Há, na escola, 60 raparigas e 20 rapazes.

Há ${}^{80}C_4$ diferentes escolhas de 4 dos 80 alunos

a) Número de casos possíveis: ${}^{80}C_4$

Número de casos favoráveis: ${}^{60}C_2 \times {}^{20}C_2$

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{{}^{60}C_2 \times {}^{20}C_2}{{}^{80}C_4} \approx 0,21$$

b) Número de casos possíveis: ${}^{80}C_4$

Número de casos favoráveis: ${}^{60}C_3 \times {}^{20}C_1 + {}^{60}C_4$ (há mais raparigas do que rapazes no conjunto dos quatro alunos se houver três raparigas e um rapaz ou se houver quatro raparigas)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{{}^{60}C_3 \times {}^{20}C_1 + {}^{60}C_4}{{}^{80}C_4} \approx 0,74$$

56. Há ${}^{28}C_3$ diferentes escolhas de 3 dos 28 alunos.

a) Número de casos possíveis: ${}^{28}C_3$

Número de casos favoráveis: ${}^{16}C_2 \times {}^{12}C_1$

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{{}^{16}C_2 \times {}^{12}C_1}{{}^{28}C_3} = \frac{40}{91}$$

b) Número de casos possíveis: ${}^{28}C_3$

Número de casos favoráveis: 26 (há 26 diferentes escolhas para o aluno que é escolhido para além do Tiago e da Leonor)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{26}{{}^{28}C_3} = \frac{1}{126}$$

57. a) Há ${}^9C_5$ diferentes formas de distribuir as cinco peças vermelhas no tabuleiro. Para cada uma delas, as quatro peças amarelas podem ficar colocadas de modo único nas quatro casas restantes.

b₁) Número de casos possíveis: ${}^9C_5$

Número de casos favoráveis: 2×6 (há duas escolhas para a diagonal que fica só com peças amarelas e, para cada uma delas, há seis escolhas para a casa onde ficará colocada a peça amarela restante; para cada uma delas, as cinco peças vermelhas podem ficar colocadas de modo único nas cinco casas restantes)

Probabilidade pedida: $\frac{2 \times 6}{{}^9C_5} = \frac{2}{21}$

b₂) Número de casos possíveis: ${}^9C_5$

Número de casos favoráveis: $2 \times {}^6C_2 - 1$ (escolhida uma diagonal a preencher com três peças vermelhas, há ${}^6C_2$ modos de escolher as duas casas a ocupar com as duas restantes peças vermelhas)

Probabilidade pedida: $\frac{2 \times {}^6C_2 - 1}{{}^9C_5} = \frac{29}{126}$

58. a) Há ${}^8C_2$ retas que se podem definir escolhendo dois dos vértices do cubo.

Para além destas, há 6 retas que se podem definir escolhendo o ponto I e um vértice do cubo, há 6 retas que se podem definir escolhendo o ponto J e um vértice do cubo, há 6 retas que se podem definir escolhendo o ponto L e um vértice do cubo e há as retas IJ e IL .

Total de retas: ${}^8C_2 + 3 \times 6 + 2 = 48$

b) Número de casos possíveis: ${}^{11}C_3$

Número de casos favoráveis: 67

Há ${}^4C_3$ escolhas de três pontos que definem um plano que contém a face $[ADEF]$.

Há ${}^4C_3$ escolhas de três pontos que definem um plano que contém a face $[DCHE]$.

Há ${}^4C_3$ escolhas de três pontos que definem um plano que contém a face $[EFGH]$.

Há ${}^5C_3$ escolhas de três pontos da face $[ABCD]$; destas, uma corresponde à escolha de três pontos colineares, pelo que não define um plano. Portanto, há ${}^5C_3 - 1$ escolhas de três pontos que definem um plano que contém a face $[ABCD]$.

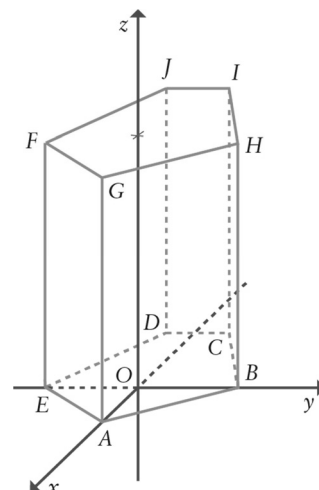
Há ${}^6C_3$ escolhas de três pontos da face $[BCHG]$; destas, ${}^4C_3$, ou seja, 4, correspondem à escolha de três pontos colineares, pelo que não definem um plano. Portanto, há ${}^6C_3 - 4$ escolhas de três pontos que definem um plano que contém a face $[BCHG]$.

Há ${}^7C_3$ escolhas de três pontos da face $[ABGF]$; destas, $1 + {}^4C_3$, ou seja, 5, correspondem à escolha de três pontos colineares, pelo que não definem um plano. Portanto, há ${}^7C_3 - 5$ escolhas de três pontos que definem um plano que contém a face $[ABGF]$.

Total de planos: $3 \times {}^4C_3 + ({}^5C_3 - 1) + ({}^6C_3 - 4) + ({}^7C_3 - 5) = 67$

Probabilidade pedida: $\frac{67}{{}^{11}C_3} = \frac{67}{165}$

59. Na figura, está representado o prisma $[ABCDEFGHIJ]$ nas condições do enunciado.



a) Número de casos possíveis: $^{10}C_2$
 Número de casos favoráveis: $^4C_2$ (há quatro vértices que pertencem ao plano yOz)
 Probabilidade pedida: $\frac{^4C_2}{^{10}C_2} = \frac{2}{15}$

b) Número de casos possíveis: 5×5
 Número de casos favoráveis: 4 (as retas FE , FB , HE e HB)
 Probabilidade pedida: $\frac{4}{25}$

c) Número de casos possíveis: $^{10}C_3$
 Número de casos favoráveis: $^5C_2 \times 2 \times 2$ (para cada escolha de dois vértices em qualquer das duas bases, há dois vértices na outra que permitem definir, cada um com aqueles dois, um plano perpendicular a xOy)
 Probabilidade pedida: $\frac{^5C_2 \times 2 \times 2}{^{10}C_3} = \frac{1}{3}$

d) Número de casos possíveis: $^5C_2 \times 5$
 Número de casos favoráveis: 4 (as escolhas dos pontos E, B, F ou E, B, H ou C, D, J ou C, D, I)
 Probabilidade pedida: $\frac{4}{^5C_2 \times 5} = \frac{2}{25}$

60. a) Número de casos possíveis: 8×6
 Número de casos favoráveis: 4 (as escolhas dos pontos I, B ou I, D ou N, H ou N, F)
 Probabilidade pedida: $\frac{4}{8 \times 6} = \frac{1}{12}$

b) Número de casos possíveis: $^{14}C_3$
 Número de casos favoráveis: 12 (há dois ternos de pontos colineares em cada face do cubo)
 Probabilidade pedida: $\frac{12}{^{14}C_3} = \frac{3}{91}$

2. Definir probabilidade condicionada

Pág. 85

Será que...? Bolas numa caixa

Sabemos que a primeira bola retirada era preta. Como esta bola não foi repostada na caixa, ficaram, para a segunda extração, seis bolas brancas e três bolas pretas na caixa.

Então, na segunda extração, existiam nove casos possíveis, dos quais seis são favoráveis ao acontecimento «a segunda bola extraída ser branca».

Então, a probabilidade pedida é igual a $\frac{6}{9}$, ou seja $\frac{2}{3}$.

Pág. 87

61. Tem-se: $P(\bar{A}|B) = 0,4 \Leftrightarrow \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = 0,4 \Leftrightarrow \frac{P(\bar{A} \cap B)}{0,5} = 0,4 \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = 0,2$

Como $P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$, vem:

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) \Leftrightarrow 0,3 = 0,2 + P(\bar{A} \cap \bar{B}) \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,1$$

Pág. 88

62. Dado que $A \subset B$, tem-se $A \cap \bar{B} = \emptyset$, pelo que $P(A \cap \bar{B}) = P(\emptyset) = 0$ e, portanto,

$$P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0.$$

63. a) $P(N) = \frac{1}{5}$

b) $P(\bar{M}) = 0,58$

c) $P(M \cap N) = 0,07$

d) $P(\bar{M}|N) = 0,65$

e) $P(N|M) = \frac{1}{6}$

64. a)

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cup \bar{B}) &= P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \\ &= 1 - P(A) \times \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - P(A) \times P(B|A) \end{aligned}$$

b) Sejam A e B os acontecimentos:

A : o atleta pratica futebol

B : o atleta pratica voleibol

Tem-se, $P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B|A) = \frac{1}{2}$.

O acontecimento «o atleta não pratica pelo menos um destes dois desportos» pode ser traduzido por $\bar{A} \cup \bar{B}$.

De acordo com a igualdade da alínea anterior, tem-se $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

Pág. 89

65.

$P(Y|X)$ é a probabilidade de, no final da experiência, ficarem mais bolas na caixa A do que na caixa B, sabendo que saiu o número 3 no primeiro lançamento do dado. Ora, se saiu o número 3 no primeiro lançamento do dado, foram transferidas três bolas da caixa A para a caixa B. A caixa A ficou com três bolas e a caixa B ficou com onze bolas. Seja x o número saído no segundo lançamento. Dizer que, no final da experiência, ficam mais bolas na caixa A do que na caixa B, equivale a dizer que $3 + x > 11 - x$, ou seja, $x > 4$.

A probabilidade de, ao lançar um dado, sair um número maior do que 4 é igual a $\frac{1}{3}$.

Portanto, $P(Y|X) = \frac{1}{3}$.

Pág. 90

66. Seja b o número de bolas brancas existentes inicialmente na caixa.

Sejam B_1 e B_2 os acontecimentos:

B_1 : a primeira bola extraída é branca

B_2 : a segunda bola extraída é branca

Sabe-se que $P(B_1 \cap B_2) = \frac{5}{68}$.

Tem-se: $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_1|B_2) = \frac{b}{17} \times \frac{b-1}{16} = \frac{b^2-b}{272}$

Ora, $\frac{b^2-b}{272} = \frac{5}{68} \Leftrightarrow 68b^2 - 68b - 1360 = 0 \Leftrightarrow b^2 - b - 20 = 0 \Leftrightarrow b = -4 \vee b = 5$

Portanto, existem inicialmente na caixa, cinco bolas brancas.

67. Sejam B e V os acontecimentos:

B : tirar uma bola da caixa B

V : tirar uma bola vermelha

Tem-se:

$$P(V) = P(V \cap B) + \underbrace{P(V \cap \bar{B})}_0 = P(V \cap B) = P(B) \times P(V|B) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{21}$$

68. a)

Tem-se $A \cap B \subset A$, pelo que:

$$P(A \cap B) \leq P(A)$$

Como $P(A \cap B) > 0$, vem $P(A) > 0$.

b)

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P[(A \cap B) \cap C] = \\ &= P(A \cap B) \times P(C|A \cap B) = \\ &= P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B) \end{aligned}$$

c) Sejam A , B e C os acontecimentos:

A : a primeira bola extraída é branca

B : a segunda bola extraída é branca

C : a terceira bola extraída é branca

Pretende-se determinar o valor de $P(A \cap B \cap C)$.

Ora, $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(B|A) = \frac{2}{5}$ e $P(C|A \cap B) = \frac{1}{4}$.

De acordo com a igualdade da alínea anterior, tem-se:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

Pág. 91

69. Sejam E e V os acontecimentos:

E : o iogurte está estragado

V : o iogurte está no prazo de validade

Tem-se:

$$P(E) = P(E \cap V) + P(E \cap \bar{V}) = \underbrace{P(V)}_{\frac{3}{4}} \times \underbrace{P(E|V)}_{0,01} + \underbrace{P(\bar{V})}_{\frac{1}{4}} \times \underbrace{P(E|\bar{V})}_{0,7} = 0,0075 + 0,175 = 0,1825$$

Pág. 92

70. Sejam O_1 e O_2 os acontecimentos:

O_1 : a primeira carta é de ouros

O_2 : a segunda carta é de ouros

Tem-se:

$$\begin{aligned} P(O_2) &= P(O_2 \cap O_1) + P(O_2 \cap \bar{O}_1) = \underbrace{P(O_1)}_{\frac{13}{52}} \times \underbrace{P(O_2|O_1)}_{\frac{12}{51}} + \underbrace{P(\bar{O}_1)}_{\frac{39}{52}} \times \underbrace{P(O_2|\bar{O}_1)}_{\frac{13}{51}} = \\ &= \frac{1}{17} + \frac{13}{68} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

71. Sejam V e S os acontecimentos:

V : o dado é viciado

S : a face obtida é 6

Sabe-se, então, que $P(V) = \frac{1}{3}$ e $P(S|V) = \frac{1}{3}$ e pretende-se determinar o valor de $P(V|S)$.

Tem-se:

$$P(V|S) = \frac{P(V \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S|V) \times P(V)}{P(S|V) \times P(V) + P(S|\bar{V}) \times P(\bar{V})} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

Pág. 94

72. Sejam A , B , C e D os acontecimentos:

A : a peça é produzida pela máquina A

B : a peça é produzida pela máquina B

C : a peça é produzida pela máquina C

D : a peça é defeituosa

Sabe-se, então, que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{4}$, $P(D|A) = 0,015$, $P(D|B) = 0,02$ e $P(D|C) = 0,03$.

a) Pretende-se determinar o valor de $P(D)$.

Tem-se, de acordo com o teorema da probabilidade total generalizado:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = \\ &= P(A) \times P(D|A) + P(B) \times P(D|B) + P(C) \times P(D|C) = \frac{1}{2} \times 0,015 + \frac{1}{4} \times 0,02 + \frac{1}{4} \times 0,03 = \\ &= 0,0075 + 0,005 + 0,0075 = 0,02 \end{aligned}$$

b) Pretende-se determinar o valor de $P(C|D)$.

Tem-se:

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C) \times P(D|C)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{4} \times 0,03}{0,02} = 0,375$$

Pág. 96

73. Sejam H e A os acontecimentos:

H : o funcionário é homem

A : o funcionário vai de automóvel

Vamos preencher a tabela seguinte:

	H	$\bar{H}$	Total
A			
$\bar{A}$			
Total			1

Saber que o número de homens é o dobro do número das mulheres permite-nos obter o seguinte preenchimento:

	H	$\bar{H}$	Total
A			
$\bar{A}$			
Total	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Para além disso, saber que metade dos funcionários vai de automóvel para o trabalho permite-nos obter o seguinte preenchimento:

	H	$\bar{H}$	Total
A			$\frac{1}{2}$
$\bar{A}$			$\frac{1}{2}$
Total	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Para além disso, saber que *dos funcionários que não vão de automóvel para o trabalho, 60% são mulheres* permite-nos obter o seguinte preenchimento:

$$|0,6 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

	H	$\bar{H}$	Total
A			$\frac{1}{2}$
$\bar{A}$		$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$
Total	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Pode agora obter-se, então, a seguinte tabela totalmente preenchida:

	H	$\bar{H}$	Total
A	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$
$\bar{A}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$
Total	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Pretende-se determinar o valor de $P(H|A)$.

Tem-se $P(H|A) = \frac{P(H \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{15}}{\frac{1}{2}} = \frac{14}{15}$.

Será que...? Lançamento de um dado e de uma moeda

$P(F|E)$ significa *probabilidade de sair face 4 no lançamento do dado, sabendo que saiu face europeia no lançamento da moeda*.

Ora, a probabilidade de sair face 4 no lançamento do dado é igual a $\frac{1}{6}$, qualquer que tenha sido o resultado do lançamento da moeda, pelo que $P(F|E) = \frac{1}{6}$.

De outro modo:

O espaço de resultados, S , associado à experiência é:

$$S = \{\{N, 1\}, \{N, 2\}, \{N, 3\}, \{N, 4\}, \{N, 5\}, \{N, 6\}, \{E, 1\}, \{E, 2\}, \{E, 3\}, \{E, 4\}, \{E, 5\}, \{E, 6\}\}$$

Tem-se: $E = \{\{E, 1\}, \{E, 2\}, \{E, 3\}, \{E, 4\}, \{E, 5\}, \{E, 6\}\}$ e $F \cap E = \{\{E, 4\}\}$

Portanto, como $P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}$, tem-se $P(F|E) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$.

Pág. 98

74.

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) - P(A) \times P(B) = P(A) [1 - P(B)] = \\ &= P(A) \times P(\bar{B}) \end{aligned}$$

75. a) Sejam A e B os acontecimentos:

A : sair 5 no dado

B : sair a bola com o número 7

Pretende-se determinar o valor de $P(A \cap B)$.

Ora, os acontecimentos A e B são independentes, pois a ocorrência de um deles não influencia a probabilidade de realização do outro.

Portanto, tem-se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{72}$.

b) Sejam A e B os acontecimentos:

A : sair número par no dado

B : sair a bola com número primo

Pretende-se determinar o valor de $P(A \cap B)$.

Ora, os acontecimentos A e B são independentes, pois a ocorrência de um deles não influencia a probabilidade de realização do outro.

Portanto, tem-se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{5}{12} = \frac{15}{72} = \frac{5}{24}$.

Pág. 99

76.

$$\begin{aligned} P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A|B) &= 1 - P(\overline{A}|\overline{B}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A|B) &= P(A|\overline{B}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} &= \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} &= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\overline{B})} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(\overline{B}) \times P(A \cap B) &= \\ &= P(B) \times P(A) - P(B) \times P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(\overline{B}) \times P(A \cap B) + P(B) \times P(A \cap B) &= \\ &= P(B) \times P(A) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) \times [P(\overline{B}) + P(B)] &= \\ &= P(B) \times P(A) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) \times 1 &= P(B) \times P(A) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) &= P(B) \times P(A) \end{aligned}$$

Pág. 104

77. a) No saco existem quatro bolas brancas num total de oito bolas, pelo que a probabilidade de a primeira bola ser branca é igual a $\frac{1}{2}$.

b) Ora, se a primeira bola extraída era branca, após a primeira extração, ficaram, no saco três bolas brancas e quatro bolas pretas pelo que a probabilidade pedida é igual a $\frac{4}{7}$.

c) De acordo com o exposto na alínea anterior, conclui-se que a probabilidade pedida é igual a $\frac{3}{7}$.

- 78. a)** A probabilidade de uma rapariga da turma jogar ténis é 8%.
b) A probabilidade de um aluno da turma ser rapaz dado que esse aluno joga futebol é 90%.
c) A probabilidade de um praticante de natação ser uma rapariga é 50%.

79. Seja n o número de bolas com número ímpar existentes inicialmente no saco.
 Dado que a primeira bola extraída tinha um número ímpar, após a primeira extração ficaram no saco $n - 1$ bolas com número ímpar.
 Para que na segunda extração a probabilidade de a bola ter número par ser $\frac{1}{2}$, tinham de estar no saco tantas bolas com número par quantas as bolas com número ímpar. Portanto, $n - 1 = 7$, ou seja, $n = 8$.
 Então, inicialmente havia 15 bolas no saco.

80. Tem-se: $S = \{2, 4, 6\}$, $M = \{5, 6\}$ e $R = \{2, 3, 5\}$.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(S|R) &= \frac{P(S \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} & | S \cap R = \{2\} \\ \text{b) } P(R|M) &= \frac{P(R \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} & | R \cap M = \{5\} \\ \text{c) } P(M|S) &= \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} & | M \cap S = \{6\} \end{aligned}$$

81. Começemos por preencher totalmente a tabela referente à população descrita:

	H	M	Total
F	18	5	23
$\bar{F}$	12	15	27
Total	30	20	50

$$\begin{aligned} \text{a) } P(F) &= \frac{23}{50} \text{ e } P(F|H) = \frac{P(F \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{18}{50}}{\frac{30}{50}} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} \\ \text{b) } P(M|F) &= \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{5}{50}}{\frac{23}{50}} = \frac{5}{23} \\ \text{c) } P(M|\bar{F}) &= \frac{P(M \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{\frac{15}{50}}{\frac{27}{50}} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

82. Sejam D e S os acontecimentos:

D : os números saídos serem diferentes

S : a soma dos números saídos ser par

a) Pretende-se determinar o valor de $P(S|D)$.

Começemos por construir a tabela que traduz a experiência que consiste no lançamento de dois dados e registar a soma dos números saídos e por deixar visíveis somente as células correspondentes ao acontecimento «os números saídos serem diferentes».

	1	2	3	4	5	6
1		3	4	5	6	7
2	3		5	6	7	8
3	4	5		7	8	9
4	5	6	7		9	10
5	6	7	8	9		11
6	7	8	9	10		

Tem-se: $P(S|D) = \frac{P(S \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{12}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

b) Pretende-se determinar o valor de $P(D|S)$.

Começamos por construir a tabela que traduz a experiência que consiste no lançamento de dois dados e registar a soma dos números saídos e por deixar visíveis somente as células correspondentes ao acontecimento «a soma dos números saídos ser par».

	1	2	3	4	5	6
1	2		4		6	
2		4		6		8
3	4		6		8	
4		6		8		10
5	6		8		10	
6		8		10		12

Tem-se: $P(D|S) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{12}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

83. a) $P(A \cap B) = 0,02$

b) $P(A|B) = 0,1$

c) $P(\bar{B}|A) = 0,005$

Pág. 105

$$84. P(X|Y) + \frac{P(\bar{X}) - P(\bar{X} \cap \bar{Y})}{P(Y)} = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} + \frac{1 - P(X) - P(\bar{X} \cap \bar{Y})}{P(Y)} = \frac{P(X \cap Y) + 1 - P(X) - [1 - P(X \cup Y)]}{P(Y)} =$$

$$= \frac{P(X \cap Y) + 1 - P(X) - 1 + P(X \cup Y)}{P(Y)} = \frac{P(X \cap Y) - P(X) + P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(Y)}{P(Y)} = 1$$

85. Tem-se $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow 0,25 = \frac{0,1}{P(B)} \Leftrightarrow P(B) = \frac{0,1}{0,25} \Leftrightarrow P(B) = 0,4$, pelo que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,8 = P(A) + 0,4 - 0,1 \Leftrightarrow P(A) = 0,5$$

Portanto, como $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, vem $P(\bar{A}) = 0,5$, pelo que se tem $P(A) = P(\bar{A})$.

86. $P(B|A)$ significa probabilidade de ficarem pelo menos dez bolas na caixa, sabendo que saiu 4 no primeiro lançamento. Dado que saiu 4 no primeiro lançamento, tiraram-se quatro bolas da caixa, pelo que ficaram oito bolas na caixa antes do segundo lançamento. Para que fiquem pelo menos dez bolas na caixa após o segundo lançamento, têm de colocar-se na caixa pelo menos duas bolas. Como só se colocam bolas na caixa se sair número ímpar, tem de sair 3 ou 5. A probabilidade de sair 3 ou 5 é $\frac{2}{6}$, ou seja, $\frac{1}{3}$.

87. Sejam A_1 , A_2 , V_1 e V_2 os acontecimentos

A_1 : a primeira bola é amarela

A_2 : a segunda bola é amarela

V_1 : a primeira bola é vermelha

V_2 : a segunda bola é vermelha

a₁) Dado que a primeira bola extraída é reposta, os acontecimentos A_1 e V_2 são independentes, pelo que se tem $P(A_1 \cap V_2) = P(A_1) \times P(V_2) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$

$$\mathbf{a_2)} P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$$

$$\mathbf{a_3)} P(A_1 \cap V_2) + P(V_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(V_2) + P(V_1) \times P(A_2) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$$

$$\mathbf{b_1)} P(A_1 \cap V_2) = P(A_1) \times P(V_2|A_1) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

$$\mathbf{b_2)} P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b_3)} P(A_1 \cap V_2) + P(V_1 \cap A_2) &= P(A_1) \times P(V_2|A_1) + P(V_1) \times P(A_2|V_1) = \\ &= \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \end{aligned}$$

88. Sejam N e C os acontecimentos:

N : ter namorada

C : pensar casar

Tem-se $P(N \cap C) = P(N) \times P(C|N) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

89. Sejam A , U_1 e U_2 os acontecimentos:

A : tirar bola amarela

U_1 : tirar bola da urna U_1

U_2 : tirar bola da urna U_2

$$\mathbf{a)} P(A) = P(A \cap U_1) + P(A \cap U_2) = \underbrace{P(U_1)}_{\frac{1}{2}} \times \underbrace{P(A|U_1)}_{\frac{2}{6}} + \underbrace{P(U_2)}_{\frac{1}{2}} \times \underbrace{P(A|U_2)}_{\frac{1}{6}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{b)} P(A) = \underbrace{P(U_1)}_{\frac{1}{6}} \times \underbrace{P(A|U_1)}_{\frac{2}{6}} + \underbrace{P(U_2)}_{\frac{5}{6}} \times \underbrace{P(A|U_2)}_{\frac{1}{6}} = \frac{7}{36}$$

90.

$$P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$P(B|A) = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$P(A \cap B) = 0,4 \times 0,8 = 0,32$$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0,4 \times 0,2 = 0,08$$

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{0,42}{0,6} = 0,7$$

$$P(B|\bar{A}) = 0,3$$

$$P(B \cap \bar{A}) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$$

Pág. 106

91. Sejam C , A e B os acontecimentos:

C : ter pouco contraste

A : a máquina A fazer o trabalho

B : a máquina B fazer o trabalho

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B) \times P(C|B)}{P(B) \times P(C|B) + P(A) \times P(C|A)} = \frac{0,68 \times 0,06}{0,68 \times 0,06 + 0,32 \times 0,02} \approx 0,86$$

Portanto $P(B|C) \approx 86\%$.

92. Começemos por construir a tabela que traduz a experiência que consiste no lançamento de dois dados e registar a soma dos números saídos e por colorir as células correspondentes ao acontecimento S .

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

As células correspondentes ao acontecimento D são as da diagonal principal da tabela.

a) $P(D|S) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e $P(S|D) = \frac{P(D \cap S)}{P(D)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

b) Tem-se $P(D|S) = \frac{1}{3}$ e $P(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Portanto, D e S não são independentes.

c) Tem-se $P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}$ e $P(B) = \frac{1}{6}$. Portanto, B e D são independentes.

93. Sejam A e B os acontecimentos:

A : ganhar o prémio A

B : ganhar o prémio B

O acontecimento «ganhar pelo menos um prémio» é o acontecimento $A \cup B$.

Tem-se:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \\ &= 0,12 + 0,03 - 0,12 \times 0,03 = 0,1464 \end{aligned}$$

94. Sejam M e C os acontecimentos:

M : acertar na idade da Maria

C : acertar na idade da Cristina

O acontecimento «acertar apenas na idade de uma das duas raparigas» é o acontecimento $(M \cap \bar{C}) \cup (\bar{M} \cap C)$.

Como os acontecimentos $M \cap \bar{C}$ e $\bar{M} \cap C$ são incompatíveis, tem-se:

$$P[(M \cap \bar{C}) \cup (\bar{M} \cap C)] = P(M \cap \bar{C}) + P(\bar{M} \cap C)$$

Então, como os acontecimentos M e C são independentes, tem-se:

$$\begin{aligned} P[(M \cap \bar{C}) \cup (\bar{M} \cap C)] &= P(M \cap \bar{C}) + P(\bar{M} \cap C) = P(M) \times P(\bar{C}) + P(\bar{M}) \times P(C) = \\ &= 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,6 = 0,48 \end{aligned}$$

$$\mathbf{95.} \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,1 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0,1 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,9$$

$$\mathbf{a)} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow 0,9 = P(A) + 0,4 \Leftrightarrow P(A) = 0,5$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \quad P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,9 = P(A) + 0,4 - P(A) \times 0,4 \Leftrightarrow 0,5 = 0,6 P(A) \Leftrightarrow P(A) = \frac{0,5}{0,6} \Leftrightarrow P(A) = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

+Exercícios Propostos

Pág. 107

96. (B)

97. (C)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,7 + 0,9 - P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A \cup B) = 1,6 - P(A \cap B)$$

Portanto, como $P(A \cup B) \leq 1$, $P(A \cap B) \geq 0,6$; portanto as opções (A) e (B) estão excluídas
Tem-se $P(A \cap B) \leq 0,7$, pois $P(A \cap B) \leq P(A)$; portanto a opção (D) está excluída.

98. (D)

Como sempre ficam à vista uma página par e uma página ímpar, o produto dos números das duas páginas é, de certeza, par.

99. (A)

Número de casos possíveis: $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

$$\text{Número de casos favoráveis: } \underbrace{{}^4C_2}_{\substack{\text{n.º de possíveis} \\ \text{escolhas para os dois} \\ \text{lugares ocupados} \\ \text{pelos dois zeros}}} \times \underbrace{{}^9A'_2}_{\substack{\text{n.º de sequências} \\ \text{de dois algarismos} \\ \text{escolhidos de entre} \\ \text{os restantes nove}}} = 6 \times 9 \times 9 = 468$$

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{468}{10\,000} = 0,0468$$

100. (A)

Número de casos possíveis: ${}^{15}C_4 = 1365$

Número de casos favoráveis: $1 \times {}^{11}C_3 = 165$ (sair o número 12 e outros três menores ou iguais a 11)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{165}{1365} = \frac{11}{91}$$

101. (C)

Número de casos possíveis: $6!$

$$\text{Número de casos favoráveis: } 6! - \left(\underbrace{5}_{\substack{\text{escolhas de dois} \\ \text{lugares juntos de} \\ \text{entre os seis}}} \times \underbrace{2}_{\substack{\text{maneiras de a} \\ \text{Ana e a Bárbara} \\ \text{ocuparem esses} \\ \text{dois lugares}}} \times \underbrace{4!}_{\substack{\text{maneiras de os res-} \\ \text{tantes amigos ocu-} \\ \text{parem os restantes} \\ \text{quatro lugares}}} \right)$$

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{6! - (5 \times 2 \times 4!)}{6!} = \frac{480}{720} = \frac{2}{3}$$

102. (C)

Dado que a soma dos dois primeiros elementos é 10, o segundo elemento é 9, pelo que esta linha tem dez elementos.

Número de casos possíveis: $^{10}C_2 = 45$

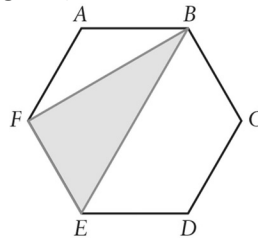
Número de casos favoráveis: 5 (existem, nesta linha, cinco pares de elementos iguais)

Probabilidade pedida: $\frac{5}{45} = \frac{1}{9}$

Pág. 108**103. (D)**

Número de casos possíveis: $^6C_3 = 20$

Número de casos favoráveis: $6 \times 2 = 12$ (tal como a figura abaixo pretende ilustrar, para cada par de vértices consecutivos, por exemplo, os vértices E e F , existem dois outros, neste caso B e C , que definem, cada um deles com os outros dois, um triângulo retângulo; assim, os triângulos $[EFB]$ e $[EFC]$ são retângulos).



Probabilidade pedida: $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

104. (A)

Número de casos possíveis: $^{10}C_2 = 45$ (um prisma pentagonal tem dez vértices)

Número de casos favoráveis: 15 (um prisma pentagonal tem quinze arestas)

Probabilidade pedida: $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

105. (A)

$P(Y|X)$ é a probabilidade de sair uma bola amarela sabendo que sai face com número par no lançamento do dado. Ora, se sai número par, não sai 1, pelo que a bola é extraída da caixa B. Como há, na caixa B, uma bola verde e três bolas amarelas, a probabilidade de sair bola amarela é igual a $\frac{3}{4}$.

106. (A)

Seja n o número de bolas pretas existentes inicialmente na caixa.

$P(B_2|B_1)$ é a probabilidade de a bola retirada em segundo lugar ser branca sabendo que a bola retirada em primeiro lugar é branca. Ora, se a bola retirada em primeiro lugar é branca, ficam, na caixa, antes da segunda extração, quatro bolas brancas e n bolas pretas, pelo que a probabilidade de sair bola branca é igual a $\frac{4}{4+n}$.

$$\frac{4}{4+n} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow n = 8$$

107. (D)

$P(B|A)$ é a probabilidade de a bola retirada da caixa 2 ser branca sabendo que as bolas retiradas da caixa 1 têm a mesma cor. Ora, se as bolas retiradas da caixa 1 têm a mesma cor, são ambas pretas, pelo que ficam, na caixa 2, antes da segunda extração, duas bolas brancas e duas bolas pretas e, portanto, a probabilidade de a bola retirada ser branca é igual a $\frac{1}{2}$.

Pág. 109**108. (D)**

Os dados do problema permitem preencher a seguinte tabela:

	A Ser rapariga	$\bar{A}$ Ser rapaz	Total
B Ter 15 anos	15	9	24
$\bar{B}$ Ter 16 anos	3	3	6
Total	18	12	30

$$\text{Tem-se, então, } P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{15}{30}}{\frac{18}{30}} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}.$$

109. (B)

$$\text{Tem-se } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{n-7}}{\frac{n}{n-7}} \quad | \quad A \cap B : \text{«a bola extraída ter o número 8 ou o número 9»}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{n-7}}{\frac{n}{n-7}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{n-7} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow n = 13$$

110. (D)

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{P(A)}{3} + P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{P(A)}{3} = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{3}P(A) \end{aligned}$$

$$\text{Então, } P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3}P(A)}{P(A)} = \frac{2}{3}.$$

111. (D)

Sejam T_1 e T_2 os acontecimentos:

T_1 : conseguir realizar a primeira tarefa

T_2 : conseguir realizar a segunda tarefa

Tem-se: $P(T_1) = 0,6$, $P(T_2) = 0,7$ e $P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2) = 0,2$

$$\bullet P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2) = 0,2 \Leftrightarrow P(\bar{T}_1 \cup \bar{T}_2) = 0,2 \Leftrightarrow P(T_1 \cup T_2) = 0,8$$

$$\bullet P(T_1 \cup T_2) = 0,8 \Leftrightarrow P(T_1) + P(T_2) - P(T_1 \cap T_2) = 0,8 \Leftrightarrow 0,6 + 0,7 - P(T_1 \cap T_2) = 0,8 \Leftrightarrow P(T_1 \cap T_2) = 0,5$$

$$\text{Então, tem-se } P(T_2|T_1) = \frac{P(T_2 \cap T_1)}{P(T_1)} = \frac{0,5}{0,6} = \frac{5}{6}.$$

112. (B)

Sejam R e C os acontecimentos:

R : serem escolhidas duas raparigas

C : serem escolhidos dois alunos da turma C

$$\text{Tem-se, } P(R \cap C) = P(C) \times P(R|C) = \frac{1}{5} \times \frac{105}{378} = \frac{21}{378} = \frac{1}{18}.$$

113. (A)

Sejam N e S os acontecimentos:

N : a bola extraída ser preta

S : a bola ser extraída do saco

$$\text{Tem-se, } P(N) = P(N \cap S) + P(N \cap \bar{S}) = \underbrace{P(S)}_{\frac{2}{6}} \times \underbrace{P(N|S)}_{\frac{3}{7}} + \underbrace{P(\bar{S})}_{\frac{4}{6}} \times \underbrace{P(N|\bar{S})}_{\frac{6}{7}} = \frac{1}{7} + \frac{4}{7} = \frac{5}{7}.$$

Pág. 110**114. (B)**

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \\ &= 0,2 + 0,4 - 0,2 \times 0,4 = 0,52 \end{aligned}$$

115. (B)

Como A e B são acontecimentos independentes tem-se

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

Como $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$, $P(A) \times P(B) \neq 0$, pelo que $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$

Portanto, a afirmação (B) é falsa.

116.

a)

$$\#E = 21; \# \mathcal{G}(E) = 2^{21} = 2\,097\,152$$

b₁)

$$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}\}$$

b₂)

$$\{\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}\}$$

b₃)

$$\{\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}\}$$

117.

Como A e B são incompatíveis, tem-se que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= 4P(B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) = 4P(B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A) = 3P(B) \end{aligned}$$

118.

Tem-se:

- $P(A) = P(B)$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 3P(A \cap B)$, pelo que $P(A \cup B) = 1 - 3P(A \cap B)$
- $P(\bar{B}) = P(\bar{B} \cap \bar{A}) + P(\bar{B} \cap A) = 4P(A \cap B)$, pelo que $P(B) = 1 - 4P(A \cap B)$

Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - 3P(A \cap B) = 2P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - 2P(A \cap B) = 2P(B) \Leftrightarrow 1 - 2P(A \cap B) = 2 \times [1 - 4P(A \cap B)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - 2P(A \cap B) = 2 - 8P(A \cap B) \Leftrightarrow 6P(A \cap B) = 1 \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Então, } P(A) = P(B) = 1 - 4P(A \cap B) = 1 - 4 \times \frac{1}{6} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

119.

$$P(A \cap B) + P(\bar{A}) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) \leq 1 - P(\bar{A}) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq P(A),$$

o que é verdade, pois $A \cap B \subset A$.

Pág. 111

120. Há 100 números de três algarismos começados por 2.

a) Número de casos possíveis: 100

Número de casos favoráveis: $2 \times 5 \times 5$ (para que a soma dos algarismos seja ímpar, tem de ser o das dezenas ímpar e o das unidades par, ou vice-versa)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

b) Número de casos possíveis: 100

Número de casos favoráveis: ${}^9A_2$

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{{}^9A_2}{100} = \frac{9 \times 8}{100} = \frac{72}{100} = 0,72$$

c) Número de casos possíveis: 100

Número de casos favoráveis: 3 (para que a soma dos algarismos seja superior a 18, a soma dos algarismos das dezenas com o das unidades tem de ser superior a 16; tal só acontece no caso dos números 289, 298 e 299)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{3}{100} = 0,03$$

121. Número de casos possíveis: ${}^5A_3$

Número de casos favoráveis: 3×2 (para cada algarismo ímpar existem duas maneiras de saírem os dois algarismos pares)

$$\text{Probabilidade pedida: } \frac{3 \times 2}{{}^5A_3} = \frac{3 \times 2}{5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{10}$$

122. Número de casos possíveis: ${}^5A'_4 = 5^4 = 625$ (diferentes listas que traduzem as possíveis escolhas dos filmes)

Número de casos favoráveis: $5^4 - 5$ (diferença entre o número de todas as diferentes listas que traduzem as possíveis escolhas dos filmes e o número de casos em que os quatro amigos escolhem todos o mesmo filme)

Probabilidade pedida: $\frac{625-5}{625} = \frac{620}{625} = \frac{124}{125}$

123. Número de casos possíveis: $1 \times 5 \times {}^8A_2$ (o algarismo dos milhares é sempre 1, o das unidades pode ser escolhido de entre os cinco algarismos pares e, para cada uma destas escolhas, existem ${}^8A_2$ sequências de dois algarismos diferentes escolhidos de entre os oito restantes)

Número de casos favoráveis: 4 (para que a soma dos quatro algarismos seja 6, o algarismo das unidades, sendo par, só pode ser 0, 2 ou 4. Se for 0, os números nas condições enunciadas são 1230 e 1320; se for 2, são 1032 e 1302; se for 4, não existe nenhum)

Probabilidade pedida: $\frac{4}{1 \times 5 \times {}^8A_2} = \frac{4}{5 \times 8 \times 7} = \frac{1}{70}$

124. Há $5!$ alinhamentos diferentes dos cinco cartões (as letras dos cartões são todas diferentes)

a) Número de casos possíveis: $5!$

Número de casos favoráveis: 1 (só há um alinhamento que corresponde à palavra AMIGO)

Probabilidade pedida: $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$

b) Número de casos possíveis: $5!$

Número de casos favoráveis: $3! \times 2!$ (a sequência tem de ser VCVCV, pelo que existem $3!$ modos de as três vogais ocuparem os seus três lugares e $2!$ modos de as duas consoantes ocuparem os seus dois lugares)

Probabilidade pedida: $\frac{3! \times 2!}{5!} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$

125. Número de casos possíveis: $6!$

Número de casos favoráveis: $4 \times 3! \times 3!$ (existem 4 diferentes escolhas das três cadeiras onde se sentam os três amigos referidos; para cada uma delas, esses três amigos podem ocupar essas três cadeiras de $3!$ maneiras diferentes e os restantes três amigos podem ocupar as restantes três cadeiras de $3!$ maneiras diferentes)

Probabilidade pedida: $\frac{4 \times 3! \times 3!}{6!} = \frac{1}{5}$

126. a) Há ${}^9A_3$ diferentes maneiras de distribuir as peças no tabuleiro (são as sequências de três algarismos diferentes, dos nove algarismos que designam as casas do tabuleiro)

b) Número de casos possíveis: ${}^9A_3$

Número de casos favoráveis: $3! + {}^5A_3$ (as peças podem ficar na segunda fila, de $3!$ maneiras diferentes, ou na terceira fila, de ${}^5A_3$ maneiras diferentes)

Probabilidade pedida: $\frac{3! + {}^5A_3}{{}^9A_3} = \frac{66}{504} = \frac{11}{84}$

c) Dado que se sabe que a soma dos números das casas que as peças ocupam é par, então as peças ocupam três casas pares ou, alternativamente, uma casa par e duas ímpares. Como há, no tabuleiro, quatro casas pares e cinco casas ímpares, existem, então, ${}^4A_3 + 4 \times {}^5C_2 \times 3!$ casos possíveis.

Destes, o número de casos favoráveis a que as peças fiquem na fila de baixo é ${}^3C_2 \times 2 \times 3!$

Probabilidade pedida: $\frac{{}^3C_2 \times 2 \times 3!}{{}^4A_3 + 4 \times {}^5C_2 \times 3!} = \frac{36}{264} = \frac{3}{22}$

127. Número de casos possíveis: 4^3

Número de casos favoráveis: 6 (são os casos: 1, 1, 2 ; 1, 2, 3 ; 1, 3, 4 ; 2, 1, 3 ; 2, 2, 4 ; 3, 1, 4)

Probabilidade pedida: $\frac{6}{4^3} = \frac{3}{32}$

Pág. 112

128. Número de casos possíveis: ${}^7A'_2$

Número de casos favoráveis: ${}^3A'_2 + {}^4A'_2$ (os vértices escolhidos pela Ana e pela Teresa podem pertencer ambos ao triângulo ou, em alternativa, ao quadrado)

Probabilidade pedida: $\frac{{}^3A'_2 + {}^4A'_2}{{}^7A'_2} = \frac{3^2 + 4^2}{7^2} = \frac{25}{49}$

129. Número de casos possíveis: ${}^8C_3$

Número de casos favoráveis: $6 \times {}^4C_3$ (existem seis faces no cubo e, para cada uma delas, existem ${}^4C_3$ diferentes escolhas de três os seus quatro vértices)

Probabilidade pedida: $\frac{6 \times {}^4C_3}{{}^8C_3} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$

130.

$P(B|A)$ significa «probabilidade de a Catarina e o Diogo se sentarem ao lado um do outro, sabendo que a Ana, a Bárbara e a Catarina estão sentados em lugares consecutivos, com a Bárbara no meio». Assim, existem cinco lugares possíveis para o Diogo se sentar, dos quais apenas um fica ao lado da Catarina. Portanto, $P(B|A) = \frac{1}{5}$.

131. a) Tem-se $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow 0,4 = \frac{0,2}{P(A)} \Leftrightarrow P(A) = 0,5$, pelo que

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,6 = 0,5 + P(B) - 0,2 \Leftrightarrow P(B) = 0,3$

b) Tem-se $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 4P(A \cap B) = 2P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5P(A \cap B) = 2P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{5}P(A)$, pelo que $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{5}P(A)}{P(A)} = \frac{2}{5} = 0,4$

c) Tem-se:

$$\bullet P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{P(A \cap B)}{0,3} \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,06$$

$$\bullet P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \Leftrightarrow 0,4 = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{0,7} \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,28 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,72, \text{ pelo que}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,72 = P(A) + 0,3 - 0,06 \Leftrightarrow P(A) = 0,48$$

Portanto,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,06}{0,48} = \frac{1}{8} = 0,125$$

132. a)

$$\begin{aligned} P(\overline{(A \cap B)}|B) &= P((A \cup \bar{B})|B) = \\ &= \frac{P((A \cup \bar{B}) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup (\bar{B} \cap B))}{P(B)} = \\ &= \frac{P((A \cap B) \cup \emptyset)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 1 - P(A|B) \times P(B) - P(A \cap \bar{B}) &= \\ = 1 - P(A \cap B) - P(A \cap \bar{B}) &= \\ = 1 - [P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})] &= \\ = 1 - P(A) = P(\bar{A}) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{P(A \cup B)}{P(B)} &= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A) + P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} + \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A)}{P(B)} + P(\bar{A}|B) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cap B}|B) + P(A|B) &= \\ = 1 - P(A \cap B|B) + P(A|B) &= \\ = 1 - \frac{P((A \cap B) \cap B)}{P(B)} + P(A|B) &= \\ = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + P(A|B) &= \\ = 1 - P(A|B) + P(A|B) &= 1 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
 P(B|A) &\geq 1 - \frac{P(\bar{B})}{P(A)} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} &\geq 1 - \frac{P(\bar{B})}{P(A)} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(\bar{B})}{P(A)} &\geq 1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B) + P(\bar{B})}{P(A)} &\geq 1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(A \cap B) + P(\bar{B}) &\geq P(A) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(A \cap B) + 1 - P(B) &\geq P(A) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(A \cap B) - P(B) - P(A) &\geq -1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -P(A \cap B) + P(B) + P(A) &\leq 1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) &\leq 1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(A \cup B) &\leq 1, \text{ o que é verdade.}
 \end{aligned}$$

133. a)

$$\begin{aligned}
 P(A) \times [P(B|A) - 1] &= P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cup \bar{B}) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(A) \times \left[\frac{P(A \cap B)}{P(A)} - 1 \right] &= \\
 &= 1 - P(A) - P(\overline{A \cap B}) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(A \cap B) - P(A) &= \\
 &= 1 - P(A) - [1 - P(A \cap B)] \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(A \cap B) - P(A) &= \\
 &= 1 - P(A) - 1 + P(A \cap B) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(A \cap B) - P(A) &= P(A \cap B) - P(A), \\
 \text{o que é verdade.}
 \end{aligned}$$

Pág. 113

b)

Sejam A e B os acontecimentos:

A : o jovem escolhido é rapaz

B : o jovem escolhido é português

Tem-se:

- dos rapazes participantes no encontro, 10% são portugueses, ou seja, $P(B|A) = 0,1$;
- a probabilidade de ser estrangeiro ou do sexo feminino é 0,94, ou seja, $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,94$.

Pretende-se determinar a probabilidade do jovem escolhido ser do sexo masculino, ou seja, $P(A)$.

Aplicando a igualdade da alínea anterior, vem:

$$\begin{aligned}
P(A) \times (0,1 - 1) &= P(\bar{A}) - 0,94 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow -0,9P(A) &= 1 - P(A) - 0,94 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 0,1P(A) &= 0,06 \Leftrightarrow P(A) = 0,6
\end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade pedida é 0,6.

134. Sejam H e L os acontecimentos:

H : o funcionário ser homem

L : o funcionário ser licenciado

Os dados do problema permitem preencher a seguinte tabela:

	H	$\bar{H}$	Total
L	0,1	0,2	0,3
$\bar{L}$	0,49	0,21	0,7
Total	0,59	0,41	1

Tem-se, então, $P(L|\bar{H}) = \frac{P(L \cap \bar{H})}{P(\bar{H})} = \frac{0,2}{0,41} = \frac{20}{41}$.

135. Sejam F e E os acontecimentos:

F : a moeda lançada é falsa

E : a face saída é a face europeia

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{P(F) \times P(E|F)}{P(E \cap F) + P(E \cap \bar{F})} = \frac{P(F) \times P(E|F)}{\underbrace{P(F)}_{0,5} \times \underbrace{P(E|F)}_{0,6} + \underbrace{P(\bar{F})}_{0,5} \times \underbrace{P(E|\bar{F})}_{0,5}} = \frac{0,3}{0,3 + 0,25} = \frac{0,3}{0,55} = \frac{6}{11}$$

136. Seja p , $p \in]0, 1]$, a probabilidade $P(A)$.

Tem-se:

- $P(B) = p$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = p \times p = p^2$
- $P(A \cup B) = 5P(A \cap B) = 5p^2$

Portanto:

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 5p^2 = p + p - p^2 \Leftrightarrow 6p^2 - 2p = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow p(6p - 2) = 0 \Leftrightarrow p = 0 \vee p = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Como se tem $p \neq 0$, pode concluir-se que $p = \frac{1}{3}$.

137. Tem-se:

- Determinação de $P(A)$:

Um número é múltiplo de 5 se e só se o seu algarismo das unidades for 0 ou 5. Como, neste caso, o algarismo não pode ser 0, tem-se $P(A) = \frac{1}{9}$.

• Determinação de $P(B)$:

Número de casos possíveis: ${}^9A'_3$

Número de casos favoráveis: ${}^9A_3$

Probabilidade pedida: $\frac{{}^9A_3}{{}^9A'_3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{9^3} = \frac{56}{9^2}$

• Determinação de $P(A \cap B)$:

$A \cap B$ é o acontecimento «o número escolhido é múltiplo de 5 e tem os algarismos todos diferentes».

Número de casos possíveis: ${}^9A'_3$

Número de casos favoráveis: ${}^8A_2$ (o algarismo das unidades pode ser escolhido de modo único (tem de ser 5) e os algarismos das dezenas e das centenas não podem ser 5)

Probabilidade pedida: $\frac{{}^8A_2}{{}^9A'_3} = \frac{8 \times 7}{9^3} = \frac{56}{9^3}$

Então, tem-se $P(A) \times P(B) = \frac{1}{9} \times \frac{56}{9^2} = \frac{56}{9^3} = P(A \cap B)$, pelo que A e B são independentes.

138. Seja p , $p \in [0,1]$, a probabilidade $P(A)$.

Tem-se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow 0,2 = p \times P(B) \Leftrightarrow p(B) = \frac{0,2}{p}$ e, então,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,7 = p + \frac{0,2}{p} - 0,2 \Leftrightarrow p + \frac{0,2}{p} - 0,9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2 - 0,9p + 0,2 = 0 \Leftrightarrow p = 0,4 \vee p = 0,5$

Para $p = 0,4$, vem $p(B) = \frac{0,2}{0,4} = \frac{2}{4} = 0,5$; portanto, 0,4 não é solução do problema.

Para $p = 0,5$, vem $p(B) = \frac{0,2}{0,5} = \frac{2}{5} = 0,4$; portanto, $P(A) = 0,5$.

Pág. 114

«Os três mais»

139.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : a resposta está certa

B : o aluno sabia a resposta

Tem-se:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})} = \\ &= \frac{P(B) \times P(A|B)}{P(B) \times P(A|B) + P(\bar{B}) \times P(A|\bar{B})} = \\ &= \frac{\frac{m}{n} \times 1}{\frac{m}{n} \times 1 + \frac{n-m}{n} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n} + \frac{n-m}{4n}} = \\ &= \frac{\frac{m}{n}}{\frac{4m}{4n} + \frac{n-m}{4n}} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{n+3m}{4n}} = \frac{m}{n} \times \frac{4n}{n+3m} = \\ &= \frac{4m}{n+3m} \end{aligned}$$

140. O esquema seguinte pretende ilustrar a experiência traduzida no enunciado:

$\overbrace{\quad\quad\quad}^{1.ª \text{ extração}} \quad , \quad \overbrace{\quad\quad\quad}^{2.ª \text{ extração}} \quad , \quad \overbrace{\quad\quad\quad}^{3.ª \text{ extração}} \quad , \quad \overbrace{\quad\quad\quad}^{4.ª \text{ extração}}$

Número de casos possíveis: ${}^8C_2 \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2$ (há ${}^8C_2$ possíveis escolhas de duas da oito bolas para a primeira extração, há, para cada uma delas, para a segunda extração, ${}^6C_2$ possíveis escolhas de duas das seis bolas restantes, há, para a terceira extração, ${}^4C_2$ possíveis escolhas de duas das quatro bolas restantes e uma só possibilidade para as duas últimas bolas)

Número de casos favoráveis: $4 \times {}^3C_2 \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2$ (4 é o número de maneiras de escolher a extração em que saem duas bolas pretas; ${}^3C_2$ é o número de possíveis escolhas de duas das três bolas pretas saídas nessa extração; ${}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2$ é o número de maneiras de realizar as restantes três extrações)

Número de casos favoráveis: $4 \times {}^3C_2 \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2$

Probabilidade pedida: $\frac{4 \times {}^3C_2 \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2}{{}^8C_2 \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2} = \frac{4 \times {}^3C_2}{{}^8C_2} = \frac{4 \times 3}{28} = \frac{3}{7}$

141.

Deve dizer-se o que são os acontecimentos A , B , C e X de acordo com a sugestão.

Tem-se $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
 P(A|X) &= \frac{P(A \cap X)}{P(X)} = \\
 &= \frac{P(A \cap X)}{P(A \cap X) + P(B \cap X) + P(C \cap X)} = \\
 &= \frac{P(A) \times P(X|A)}{P(A) \times P(X|A) + P(B) \times P(X|B) + P(C) \times P(X|C)} \stackrel{*}{=} \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(B|X) &= \frac{P(B \cap X)}{P(X)} = \\
 &= \frac{P(B \cap X)}{P(A \cap X) + P(B \cap X) + P(C \cap X)} = \\
 &= \frac{P(B) \times P(X|B)}{P(A) \times P(X|A) + P(B) \times P(X|B) + P(C) \times P(X|C)} \stackrel{*}{=} \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Como $P(B|X) > P(A|X)$, o concorrente não deve manter a escolha inicial.

Após a intervenção do apresentador, é duas vezes mais provável que o automóvel esteja atrás da porta B do que atrás da porta A.

* O concorrente começa por escolher a porta A. Portanto, tem-se:

- se o automóvel estiver atrás da porta A, o apresentador pode abrir a porta B ou a porta C, pelo que $P(X|A) = \frac{1}{2}$;
- se o automóvel estiver atrás da porta B, o apresentador tem de abrir a porta C, pelo que $P(X|B) = 1$;
- se o automóvel estiver atrás da porta C, o apresentador tem de abrir a porta B, pelo que $P(X|C) = 0$.

Tema 3 | Funções Reais de Variável Real

1. Limites e continuidade

Pág. 7

1. a)

Seja δ um qualquer número real positivo.

$$\left| \frac{3n-1}{2n+5} - \frac{3}{2} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{6n-2-6n-15}{4n+10} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-17}{4n+10} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{17}{4n+10} < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{\delta} < 4n+10 \Leftrightarrow \frac{17-10\delta}{\delta} < 4n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{17-10\delta}{4\delta}$$

Portanto, sendo p um número natural maior do que $\frac{17-10\delta}{4\delta}$, tem-se:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| u_n - \frac{3}{2} \right| < \delta, \text{ ou seja,}$$

$$\lim u_n = \frac{3}{2}.$$

b)

Seja L um qualquer número real positivo.

$$\frac{\sqrt{2}n-1}{3} > L \Leftrightarrow \sqrt{2}n > 3L+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{3L+1}{\sqrt{2}}$$

Portanto, sendo p um número natural maior do que $\frac{3L+1}{\sqrt{2}}$, tem-se:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow v_n > L, \text{ ou seja,}$$

$$\lim v_n = +\infty.$$

c)

Seja L um qualquer número real positivo.

$$\frac{5-3n}{2} < -L \Leftrightarrow 5-3n < -2L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n-5 > 2L \Leftrightarrow n > \frac{2L+5}{3}$$

Portanto, sendo p um número natural maior do que $\frac{2L+5}{3}$, tem-se:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow w_n < -L, \text{ ou seja,}$$

$$\lim w_n = -\infty.$$

$$2. \text{ a) } \lim(1 - 2n^2) = \lim(1) - \lim(2n^2) = 1 - (+\infty) = -\infty$$

$$\text{b) } \lim\left(\frac{1}{2n+3}\right) = \frac{\lim(1)}{\lim(2n+3)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{c) } \lim[(2n-1)(3-n)] = \lim(2n-1) \times \lim(3-n) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

$$\text{d) } \lim\left(\frac{2n-1}{n+3}\right) = \lim\left(2 - \frac{5}{n+3}\right) = \lim(2) - \lim\left(\frac{5}{n+3}\right) = 2 - \frac{\lim(5)}{\lim(n+3)} = 2 - \frac{5}{+\infty} = 2 - 0 = 2$$

Pág. 8

$$3. \text{ a) } \lim(10n - 2n^2) \stackrel{\infty-\infty}{\cong} \lim(-2n^2) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim(\sqrt{4n+3} - 2\sqrt{n}) &\stackrel{\infty-\infty}{\cong} \lim \frac{(\sqrt{4n+3}-2\sqrt{n})(\sqrt{4n+3}+2\sqrt{n})}{\sqrt{4n+3}+2\sqrt{n}} = \lim \frac{4n+3-4n}{\sqrt{4n+3}+2\sqrt{n}} = \\ &= \lim \frac{3}{\sqrt{4n+3}+2\sqrt{n}} = \frac{3}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim(3^n - 2^{n-1} - 5^{-n}) &\stackrel{\infty-\infty}{\cong} \lim\left(3^n - \frac{1}{2} \times 2^n - \frac{1}{5^n}\right) = \lim\left[3^n \left(1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{15^n}\right)\right] = \\ &= +\infty \times \left(1 - \frac{1}{2} \times 0 - 0\right) = +\infty \times 1 = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{d) } \lim \frac{2n^2-1}{n^3+3n+10} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\cong} \lim \frac{2n^2}{n^3} = \lim \frac{2}{n} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$\text{e) } \lim \frac{2n}{\sqrt{9n^2+4n}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\cong} \lim \frac{2n}{\sqrt{9n^2} \sqrt{1+\frac{4}{9n}}} = \lim \frac{2n}{3n \sqrt{1+\frac{4}{9n}}} = \lim \frac{2}{3 \sqrt{1+\frac{4}{9n}}} = \frac{2}{3\sqrt{1+0}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{f) } \lim \frac{3^n - 2^{2n-1}}{2^{2n} + 3^{n+1}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\cong} \lim \frac{3^n - \frac{1}{2} \times 4^n}{4^n + 3 \times 3^n} = \lim \frac{4^n \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{2}\right]}{4^n \left[1 + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]} = \lim \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{2}}{1 + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{0 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \times 0} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n+10}}} &\stackrel{\frac{0}{0}}{\cong} \lim \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \times \frac{n}{\sqrt{n+10}}\right) = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+11n+10}} = \lim \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2+11n+10}} = \lim \sqrt{\frac{n^2}{n^2+11n+10}} = \\ &= \sqrt{\lim \frac{n^2}{n^2+11n+10}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\cong} \sqrt{\lim \frac{n^2}{n^2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{h) } \lim \left(\frac{2n^2-1}{n^3+10} \times \frac{n+1}{4}\right) \stackrel{0 \times \infty}{\cong} \lim \frac{2n^3+2n^2-n-1}{4n^3+40} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\cong} \lim \frac{2n^3}{4n^3} = \frac{1}{2}$$

Será que...? A afirmação falsa

A afirmação falsa é a apresentada na alínea a).

Provemos a proposição enunciada na alínea b).

Tem-se, por hipótese:

- $\exists p_1 \in \mathbb{N} : n > p_1 \Rightarrow v_n \geq u_n$ e
- $\forall L > 0, \exists p_2 \in \mathbb{N} : n > p_2 \Rightarrow u_n > L$

Então, sendo, para cada $L > 0$, $p = \max\{p_1, p_2\}$, tem-se, para esse valor de L , $n > p \Rightarrow v_n \geq u_n > L$.

Portanto, $\forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow v_n > L$, o que significa que $\lim v_n = +\infty$.

Para completar a hipótese da afirmação apresentada na alínea a) de modo a obter uma proposição verdadeira, basta acrescentar a condição « (v_n) é uma sucessão convergente».

Pág. 9

4. a) Tem-se $\frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow n^2 + 1 > n^2$.

Portanto, como $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1 > n^2$, a proposição dada é verdadeira.

b) Tem-se $\frac{n+1}{n^2} < \frac{2n}{n^2} \Leftrightarrow n + 1 < 2n \Leftrightarrow n > 1$.

Portanto, como a proposição « $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$ » é falsa, a proposição dada é falsa.

c) Tem-se $\frac{n+1}{2n+1} \geq \frac{n}{3n} \Leftrightarrow \frac{n+1}{2n+1} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3n+3-2n-1}{6n+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{n+2}{6n+3} \geq 0$

Portanto, como $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+2}{6n+3} \geq 0$, a proposição é verdadeira.

5. a) Tem-se $\frac{1}{2n-1} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{n-2n+1}{n(2n-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-n+1}{n(2n-1)} < 0 \Leftrightarrow -n+1 < 0 \Leftrightarrow n > 1$.

Ora, o menor valor natural de p para o qual se tem $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow n > 1$ é 2.

b) Tem-se $\frac{n+5}{n^2} < \frac{3n}{n^2} \Leftrightarrow n + 5 < 3n \Leftrightarrow n > \frac{5}{2}$.

Ora, o menor valor natural de p para o qual se tem $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow n > \frac{5}{2}$ é 3.

c) Tem-se $\frac{n+4}{n^2+1} < \frac{2n}{n^2} \Leftrightarrow \frac{n+4}{n^2+1} < \frac{2}{n} \Leftrightarrow \frac{n^2+4n-2n^2-2}{n^3+n} < 0 \Leftrightarrow \frac{-n^2+4n-2}{n^3+n} < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n^2 - 4n + 2 > 0 \Leftrightarrow \quad | n^2 - 4n + 2 = 0 \Leftrightarrow n = 2 - \sqrt{2} \vee n = 2 + \sqrt{2}$$

($n \in \mathbb{N}$)

$$\Leftrightarrow n < 2 - \sqrt{2} \vee n > 2 + \sqrt{2} \Leftrightarrow n < 1 \vee n > 3 \Leftrightarrow n > 3$$

Ora, o menor valor natural de p para o qual se tem $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow n > 3$ é 4.

6.

Seja $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_1 \Rightarrow u_n \leq v_n$ e seja L um qualquer número real positivo.

Dado que $\lim v_n = -\infty$, existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_2 \Rightarrow v_n < -L$.

Então, se $p = \text{máximo}\{p_1, p_2\}$, tem-se:

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n \leq v_n < -L$, ou seja,

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$,

de onde se conclui que $\lim u_n = -\infty$.

7.

$\lim v_n = -\infty$, pois $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq -u_n$ e $-u_n \rightarrow -\infty$.

8. a) Tem-se: $-1 \leq \cos n \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\cos n \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - \cos n \leq 3 \Leftrightarrow$

$n \leq n(2 - \cos n) \leq 3n$

Portanto, como se tem $\forall n \in \mathbb{N}, n(2 - \cos n) \geq n$ e $\lim n = +\infty$, pode-se concluir que $\lim[n(2 - \cos n)] = +\infty$.

b) Tem-se $\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n > 2^n$

Portanto, como se tem $\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n > 2^n$ e $\lim 2^n = +\infty$, pode-se concluir que

$\lim \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n = +\infty$.

c) Tem-se $\frac{3n+2}{n+1} = 3 - \frac{1}{n+1}$, pelo que se pode concluir que a sucessão de termo geral $\frac{3n+2}{n+1}$ é estritamente crescente e portanto, todos os seus termos são maiores ou iguais ao primeiro, que é igual a $\frac{5}{2}$

Portanto, como se tem $\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^n > \left(\frac{5}{2}\right)^n$ e $\lim \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty$, pode-se concluir que

$\lim \left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^n = +\infty$.

9. a) Tem-se $\frac{3n-1}{2n+4} > 1,4 \Leftrightarrow \frac{3n-1-2,8n-5,6}{2n+4} > 0 \Leftrightarrow \frac{0,2n-6,6}{2n+4} > 0 \Leftrightarrow 0,2n - 6,6 > 0 \Leftrightarrow n > 33$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 34 \Rightarrow u_n > 1,4$

b) Como se tem, para $n \geq 34$, $\left(\frac{3n-1}{2n+4}\right)^n > 1,4^n$ e $\lim 1,4^n = +\infty$, pode-se concluir que

$\lim \left(\frac{3n-1}{2n+4}\right)^n = +\infty$.

Pág. 11

10. a) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt[3]{n^4+k}} \geq \frac{n^2}{\sqrt[3]{n^4+n}}$ e $\lim \frac{n^2}{\sqrt[3]{n^4+n}} = +\infty$; portanto, $\lim \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt[3]{n^4+k}} = +\infty$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \frac{1-\sqrt{n}}{n+k} \leq \frac{n(1-\sqrt{n})}{2n}$ e $\lim \frac{n(1-\sqrt{n})}{2n} = -\infty$; portanto, $\lim \sum_{k=1}^n \frac{1-\sqrt{n}}{n+k} = -\infty$.

Pág. 13

11. a) Tem-se $\frac{2n-1}{4n} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$, pelo que se pode concluir que:

- a sucessão de termo geral $\frac{2n-1}{4n}$ é estritamente crescente e, portanto, todos os seus termos são maiores ou iguais ao primeiro, que é igual a $\frac{1}{4}$;

- $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2n-1}{4n} < \frac{1}{2}$

Portanto, como se tem $\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \left(\frac{2n-1}{4n}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $\lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, pode-se concluir que $\lim \left(\frac{2n-1}{4n}\right)^n = 0$.

b) Tem-se $0 \leq \cos^2 n \leq 1 \Leftrightarrow n \leq n + \cos^2 n \leq n + 1 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \leq \frac{n+\cos^2 n}{n+1} \leq 1$.

Portanto, como se tem $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n}{n+1} \leq \frac{n+\cos^2 n}{n+1} \leq 1$ e $\lim \frac{n}{n+1} = \lim 1 = 1$, pode-se concluir que $\lim \frac{n+\cos^2 n}{n+1} = 1$.

c) Tem-se $-1 \leq \sin n \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{\sin n}{2} \leq \frac{1}{2}$; então, $\left|\frac{\sin n}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$.

Portanto, como se tem $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \left|\frac{\sin n}{2}\right|^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, conclui-se que $\lim \left|\frac{\sin n}{2}\right|^n = 0$.

Dado que $\left|\frac{\sin n}{2}\right|^n = \left|\left(\frac{\sin n}{2}\right)^n\right|$, conclui-se também que $\lim \left|\left(\frac{\sin n}{2}\right)^n\right| = 0$ e, portanto, $\lim \left(\frac{\sin n}{2}\right)^n = 0$.

d) Tem-se $-1 \leq \cos(2n) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq \frac{\cos(2n)}{3} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} + \frac{\cos(2n)}{3} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2n)}{3}\right)^n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$

Portanto, como se tem $\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{1}{6}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2n)}{3}\right)^n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$ e $\lim \left(\frac{1}{6}\right)^n = \lim \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$, pode-se concluir que $\lim \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2n)}{3}\right)^n = 0$.

Pág. 14

12. a) w_n é a soma de n parcelas, das quais a menor é aquela em que i toma o valor n , ou seja, $\frac{2n}{3n^2+n}$, e a maior é aquela em que i toma o valor 1 , ou seja, $\frac{2n}{3n^2+1}$.

Então, tem-se $n \times \frac{2n}{3n^2+n} \leq w_n \leq n \times \frac{2n}{3n^2+1}$.

Portanto, como se tem $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2n^2}{3n^2+n} \leq w_n \leq \frac{2n^2}{3n^2+1}$ e $\lim \frac{2n^2}{3n^2+n} = \lim \frac{2n^2}{3n^2+1} = \frac{2}{3}$, pode-se concluir que $\lim w_n = \frac{2}{3}$.

b) w_n é a soma de $2n + 1$ parcelas, das quais a menor é aquela em que k toma o valor $2n$, ou seja, $\frac{5}{\sqrt[3]{n^3+2n}}$, e a maior é aquela em que k toma o valor 0 , ou seja, $\frac{5}{\sqrt[3]{n^3+0}} = \frac{5}{n}$.

Então, tem-se $(2n + 1) \times \frac{5}{\sqrt[3]{n^3+2n}} \leq w_n \leq (2n + 1) \times \frac{5}{n}$.

Portanto, como se tem $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{10n+5}{\sqrt[3]{n^3+2n}} \leq w_n \leq \frac{10n+5}{n}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n+5}{\sqrt[3]{n^3+2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n+5}{n} = 10$, pode-se concluir que $\lim w_n = 10$.

13.

a) Seja (u_n) uma qualquer sucessão que tende para 2 .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3u_n}{(u_n)^2+1} = \frac{1-3\lim u_n}{(\lim u_n)^2+1} = \frac{1-3 \times 2}{4+1} = -1. \text{ Portanto, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-3x}{x^2+1} = -1.$$

b) Seja (u_n) uma qualquer sucessão que tende para $-\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [u_n - 3(u_n)^2] = \lim u_n - 3(\lim u_n)^2 = -\infty - 3 \times (+\infty) = -\infty.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 3x^2) = -\infty$.

Pág. 15

14. Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+2)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x}{x+1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Portanto, de acordo com o teorema das funções encaixadas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Pág. 15

15. $\forall x \in D, 0 < 2 \cos x \leq 1$, portanto, $\forall x \in D, \frac{1-x^2}{2 \cos x} < \frac{f(x)}{2 \cos x} \leq \frac{1+x^2}{2 \cos x}$. Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2}{2 \cos x} = \frac{1}{2}, \text{ conclui-se que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2 \cos x} = \frac{1}{2}.$$

16. a) Como $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$, tem-se $m \leq f(x) \leq M \Leftrightarrow \frac{m}{x^2+1} \leq \frac{f(x)}{x^2+1} \leq \frac{M}{x^2+1}$, pelo que a proposição é verdadeira.

b) A proposição é falsa, pois, por exemplo, para $x = -2$, obtém-se

$$-\frac{1}{3}m \leq -\frac{1}{3}f(x) \leq -\frac{1}{3}M, \text{ que é uma proposição falsa.}$$

17. Tem-se:

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, \frac{x+1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x}{x} \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$$

pelo que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

18. Para $x > 1$, tem-se $x + \sin x > 0$, $x - 1 > 0$ e $x + 1 > 0$, pelo que, como

$$x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1, \text{ vem } \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x+\sin x} \leq \frac{1}{x-1}.$$

Então, de $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x+\sin x} \leq \frac{1}{x-1}$ e de $x - 1 \leq x - \sin x \leq x + 1$, pode concluir-se que, para $x > 1$,

$$\text{se tem } \frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x-\sin x}{x+\sin x} \leq \frac{x+1}{x-1}.$$

Portanto, como:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$$

pode concluir-se que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = 1$$

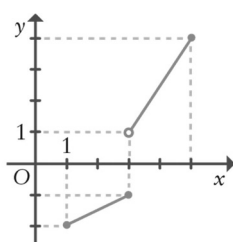
Pág. 17

Será que...? Arrefecimento de um pudim

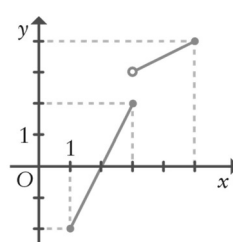
Sim, dado que é razoável admitir que a temperatura do pudim passou continuamente de 70 °C a 12 °C, há-de ter ocorrido um instante em que ela era 65 °C.

Será que...? Missão possível ou missão impossível?

1.



2.



3. Não.

Não, não é possível. Tal impossibilidade sobressai dos gráficos esboçados em 1 e 2.

Pág. 19

19. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que é contínua em $[-1, 0]$ e em $[0, 2]$.

$$f(-1) = 1 + 1 - 1 = 1, \quad f(0) = 0 - 0 - 1 = -1 \quad \text{e} \quad f(2) = 16 - 8 - 1 = 7$$

Portanto, dado que $f(0) < 0 < f(-1)$ e $f(0) < 0 < f(2)$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite garantir que f tem pelo menos um zero em $] -1, 0[$ e tem pelo menos um zero em $] 0, 2[$.

20. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que é contínua em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

O teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que f tem pelo menos um zero em $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ se e só se $f(-1)$ e $f(0)$ têm sinais contrários, ou seja, se e só se $f(-1) \times f(0) < 0$.

$$\text{Ora, } f(-1) \times f(0) < 0 \Leftrightarrow (a - 1 + a) \times a < 0 \Leftrightarrow (2a - 1) \times a < 0 \Leftrightarrow a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[.$$

21.

Seja f a função definida por

$$f(x) = \sin x - \operatorname{tg} x; \quad f \text{ é contínua em } \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right],$$

$$f(\pi) = 0 \quad \text{e} \quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1.$$

$$\text{Portanto, } f(\pi) \leq 1 \leq f\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

Assim, o teorema de Bolzano-Cauchy permite

$$\text{concluir que } \exists x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] : \sin x - \operatorname{tg} x = 1.$$

Pág. 20

22.

Seja f a função definida por

$$f(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{2}; \quad \text{a função } f \text{ dá a área do triângulo } [APB] \text{ em função da abcissa } x \text{ do ponto } P.$$

Tem-se:

$$f(2) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad f(3) = \sqrt{2}; \quad \text{portanto, } f(2) \leq 1 \leq f(3).$$

Dado que a função f é contínua em $[2, 3]$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists x \in]2, 3[: f(x) = 1$.

23.

Seja h a função definida por $h(x) = f(x) - g(x)$; a função h é contínua em $[a, b]$ porque é diferença de duas funções contínuas.

$h(a) = f(a) - g(a)$; portanto, $h(a) < 0$, pois $f(a) < g(a)$.

$h(b) = f(b) - g(b)$; portanto, $h(b) > 0$, pois $f(b) > g(b)$.

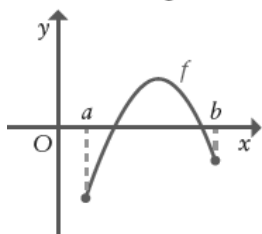
Então, $h(a) < 0 < h(b)$ e o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que:

$$\exists c \in]a, b[: h(c) = 0$$

Dado que $h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = g(c)$, conclui-se que os gráficos de f e g se intersectam no ponto de abscissa c .

24.

Por exemplo:



A função tem dois zeros e $f(a) \times f(b) > 0$.

Pág. 21

25. Dado que a função f é contínua em $[a, b]$, a função g também é contínua em $[a, b]$. O teorema de Bolzano-Cauchy permite garantir que g tem pelo menos um zero em $]a, b[$ se e só se $g(a) \times g(b) < 0$.

Ora, $g(a) \times g(b) < 0 \Leftrightarrow [2f(a) - k] \times [2f(b) - k] < 0 \Leftrightarrow (4 - k)(-10 - k) < 0 \Leftrightarrow k \in]-10, 4[$

26.

Seja g a função definida por $g(x) = f(x) - 2x$; a função g é contínua em $[0, 1]$.

$$g(0) = \frac{1}{2} \text{ e } g(1) = -\frac{2}{3}$$

Portanto, $g(1) < 0 < g(0)$ e o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que

$\exists c \in]0, 1[: g(c) = 0$, ou seja,

$\exists c \in]0, 1[: f(c) = 2c$.

Pág. 22

27.

$f(0) = 1$, $f(1) = -3$ e a função f é contínua em $[0, 1]$. Portanto, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que a função f tem pelo menos um zero em $]0, 1[$.

Por outro lado, $f'(x) = -3x^2 - 3$; então, f' é negativa em $\mathbb{R}$ e, portanto, f é decrescente.

Assim, não pode ter mais do que um zero.

28. De acordo com o método da bissecção descrito no manual:

• $f(1) = -1$ e $f(1,2) = 0,328$; portanto, o zero de f pertence ao intervalo $]1; 1,2[$;

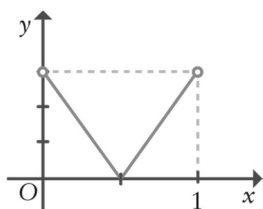
• $\frac{1+1,2}{2} = 1,1$ e $f(1,1) = -0,369$; portanto, o zero de f pertence ao intervalo $]1,1; 1,2[$.

Então, como $1,2 - 1,1 = 0,1$ e $\frac{0,1}{2} = 0,05$, $1,15$ é um valor aproximado do zero de f a menos de $0,05$.

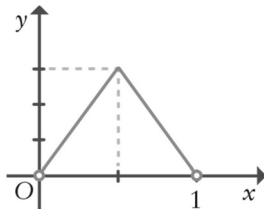
Pág. 23

Será que...? Máximos e mínimos

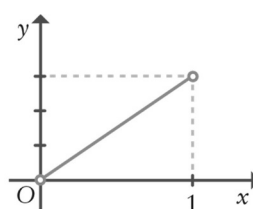
1. a)



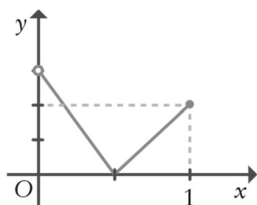
b)



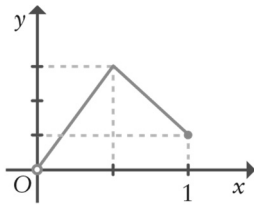
c)



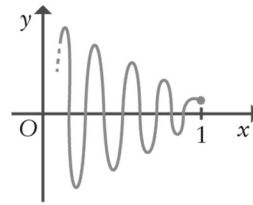
2. a)



b)



c)



3. Não é possível apresentar exemplo para qualquer das alíneas.

Não, não é possível para a situação 3.

29. Como a função é contínua em $[a, b] \cup [c, d]$, é contínua em $[a, b]$ e em $[c, d]$; logo, pelo teorema de Weierstrass, conclui-se que a função f tem máximo e mínimo absolutos quer em $[a, b]$, quer em $[c, d]$. Portanto, o maior destes máximos e o menor destes mínimos são, respetivamente, máximo e mínimo absolutos da função f .

Pág. 24

30. a) O valor procurado é o valor de k para o qual f é uma função contínua em 1 , ou seja, o valor de k para o qual se tem:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

Tem-se:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1 + 3 - k = 4 - k$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{2 - \sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(2 + \sqrt{x+3})}{(2 - \sqrt{x+3})(2 + \sqrt{x+3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(2 + \sqrt{x+3})}{(2 - \sqrt{x+3})(2 + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(2 + \sqrt{x+3})}{4 - (x+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(2 + \sqrt{x+3})}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} [-x(2 + \sqrt{x+3})] = -4 \end{aligned}$$

$$\bullet 4 - k = -4 \Leftrightarrow k = 8$$

$$\text{b) } f'(x) = (x^3 + 3x - k)' = 3x^2 + 3$$

Então, $\forall x \in]-2, 1[$, $f'(x) > 0$, pelo que f é crescente em $[-2, 1]$.

Portanto, $f(-2) = -14 - k$ é mínimo absoluto e $f(1) = 4 - k$ é máximo absoluto.

Pág. 28

31. a)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1) - 1}{3(n+1) + 2} - \frac{2n - 1}{3n + 2} = \\ &= \frac{2n + 1}{3n + 5} - \frac{2n - 1}{3n + 2} = \\ &= \frac{(2n + 1)(3n + 2) - (2n - 1)(3n + 5)}{(3n + 5)(3n + 2)} = \\ &= \frac{7}{(3n + 5)(3n + 2)} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{7}{(3n + 5)(3n + 2)} > 0$$

Portanto, (u_n) é monótona crescente.

$$v_1 = -\frac{1}{2}, v_2 = \frac{1}{4} \text{ e } v_3 = -\frac{1}{8}; \text{ portanto,}$$

$$v_1 < v_2 \wedge v_2 > v_3.$$

Logo, (v_n) não é monótona: não é crescente, nem é decrescente.

$$\text{b) } \lim u_n = \lim \frac{2n-1}{3n+2} = \lim \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}; \text{ portanto } (u_n) \text{ é convergente.}$$

$$\lim v_n = \lim \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0; \text{ portanto } (v_n) \text{ é convergente.}$$

c) Ambas as sucessões são limitadas, pois qualquer sucessão convergente é limitada.

32. a) $p \Rightarrow q$: «Se uma sucessão é monótona, então é limitada»

A proposição é falsa: por exemplo, a sucessão de termo geral n é crescente e não é limitada.

b) $r \Rightarrow p$: «Se uma sucessão é convergente, então é monótona»

A proposição é falsa: por exemplo, a sucessão de termo geral $(-1)^n \times \frac{1}{n}$ é crescente e não é monótona.

c) $p \wedge q \Rightarrow r$: «Se uma sucessão é monótona e limitada, então é convergente»

A proposição é verdadeira.

d) $\sim q \Rightarrow \sim r$: «Se uma sucessão não é limitada, então não é convergente»

A proposição é verdadeira: a proposição é equivalente a $r \Rightarrow q$: «Se uma sucessão é convergente, então é limitada».

e) $\sim r \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$: «Se uma sucessão não é convergente, então não é monótona ou não é limitada»

A proposição é verdadeira: $[\sim r \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)] \Leftrightarrow [\sim r \Rightarrow \sim (p \wedge q)] \Leftrightarrow [p \wedge q \Rightarrow r]$

$$\mathbf{33. a)} \lim \frac{1-n+n^2-n^3}{2} = \lim \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n^3 \right) \stackrel{\infty-\infty}{\cong} \lim \left(-\frac{1}{2}n^3 \right) = -\infty$$

$$\mathbf{b)} \lim \frac{(1-n^2)^2 - n^4}{n^2+1} \stackrel{\infty-\infty}{\cong} \lim \frac{1-2n^2+n^4-n^4}{n^2+1} = \lim \frac{1-2n^2}{n^2+1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\cong} \lim \frac{-2n^2}{n^2} = -2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c)} \lim (\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+1}) &\stackrel{\infty-\infty}{\cong} \lim \frac{(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}} = \\ &= \lim \frac{n^2+2n-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}} = \lim \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\cong} \lim \frac{2n-1}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}+n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \lim \frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{d)} \lim \frac{2^{n+1}}{3^n} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\cong} \lim \frac{2 \times 2^n}{3^n} = \lim \left[2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n \right] = 2 \times 0 = 0$$

$$\mathbf{e)} \lim (2^{3n} - 3^{2n}) \stackrel{\infty-\infty}{\cong} \lim (8^n - 9^n) = \lim \left[9^n \left[\left(\frac{8}{9} \right)^n - 1 \right] \right] = +\infty \times (0 - 1) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f)} \lim \frac{|100-n|+2n}{2n+5} &\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\cong} \\ &= \lim \frac{n-100+2n}{2n+5} = \lim \frac{3n-100}{2n+5} = \lim \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \text{Para } n \geq 100, \text{ tem-se } |100-n| = n-100$$

g) Tem-se:

$$\sum_{k=1}^n \frac{4k-1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+1} \times \sum_{k=1}^n (4k-1) = \frac{1}{n^2+1} \times \left(\frac{3+4n-1}{2} \times n \right) = \frac{2n^2+n}{n^2+1}$$

Então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4k-1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2$$

h)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3} \right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \right] = \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \times 3 \times (1 - 0) = 2$$

34.

Seja u_p o menor termo da sucessão (u_n) .

Dado que se tem $u_n^n \geq u_p^n$, se $\lim u_p^n = +\infty$, pode concluir-se, de acordo com o teorema das sucessões enquadadas, que $\lim u_n^n = +\infty$.

Ora, $\lim u_p^n = +\infty$ se e só se $a > 1$.

35. Nas condições enunciadas, tem que se ter $\lim v_n = -\infty$.

Ora, a única opção em que se tem $\lim v_n = -\infty$ é a a opção (D).

36. Tem-se $\lim(3 - v_n) = 3 - (-\infty) = +\infty$, pelo que, de acordo com o teorema das sucessões enquadadas, se pode concluir que $\lim u_n = +\infty$.

37.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\cos n - n^2}{3n+2} \leq \frac{1-n^2}{3n+2}$ e $\lim \frac{1-n^2}{3n+2} = -\infty$; portanto, $\lim \frac{\cos n - n^2}{3n+2} = -\infty$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow \frac{3n+1}{n+2} \geq \frac{3n}{2n}$ e $\left(\frac{3n}{2n} \right)^n = \left(\frac{3}{2} \right)^n \rightarrow +\infty$ (porque $\frac{3}{2} > 1$).

Portanto, $\lim \left(\frac{3n+1}{n+2} \right)^n = +\infty$.

c) $\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{n}}{n+i} \geq n \times \frac{\sqrt{n}}{n+n}$ e $\lim \frac{n\sqrt{n}}{2n} = \lim \frac{\sqrt{n}}{2} = +\infty$.

Portanto, $\lim \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{n}}{n+i} = +\infty$.

38. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ os limites das sucessões (v_n) e (u_n) , respectivamente.

Tem-se:

$$\begin{cases} \lim(v_n + u_n) = 5 \\ \lim(v_n - u_n) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 6 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}, \text{ pelo que}$$

$$\lim(u_n + 2) = \lim u_n + 2 = 4 \text{ e } \lim(v_n + 1) = \lim v_n + 1 = 4.$$

Portanto, de acordo com o teorema das sucessões enquadadas, $\lim w_n = 4$.

Pág. 29

39. a) Tem-se, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \leq 1$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{3n+2} \leq \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3n+2} \leq \frac{1}{3n+2}$.

Portanto, como $\lim\left(-\frac{1}{3n+2}\right) = \lim\frac{1}{3n+2} = 0$, pode concluir-se, de acordo com o teorema das sucessões enquadadas, que $\lim\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3n+2} = 0$.

b) Dado que $\frac{2n+1}{5n} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5n}$, tem-se, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{2}{5} \leq \frac{2n+1}{5n} \leq \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$, pelo que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{2}{5}\right)^n \leq \left(\frac{2n+1}{5n}\right)^n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Portanto, como $\lim\left(\frac{2}{5}\right)^n = \lim\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$, pode concluir-se, de acordo com o teorema das sucessões enquadadas, que $\lim\left(\frac{2n+1}{5n}\right)^n = 0$.

c) Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \frac{2n+1}{3n-10}$.

Tem-se $\frac{2n+1}{3n-10} = \frac{2}{3} + \frac{23/3}{3n-10}$, pelo que, para $n \geq 4$, (u_n) é decrescente e $u_n > 0$.

$$\text{Então, como } u_{12} = \frac{25}{26}, \text{ tem-se } \forall n \geq 12, 0 < \left(\frac{2n+1}{3n-10}\right)^n \leq \left(\frac{25}{26}\right)^n.$$

Portanto, como $\lim\left(\frac{25}{26}\right)^n = 0$, pode concluir-se, de acordo com o teorema das sucessões enquadadas, que $\lim\left(\frac{2n+1}{3n-10}\right)^n = 0$.

d) Seja (w_n) a sucessão definida por $w_n = \sum_{i=0}^n \frac{2n}{n^2+i}$.

w_n é a soma de $n+1$ parcelas, das quais a menor é aquela em que i toma o valor n , ou seja, $\frac{2n}{n^2+n}$, o que é igual a $\frac{2}{n+1}$, e a maior é aquela em que i toma o valor 0 , ou seja, $\frac{2n}{n^2}$, o que é igual a $\frac{2}{n}$.

$$\text{Então, tem-se } (n+1) \times \frac{2}{n+1} \leq w_n \leq (n+1) \times \frac{2}{n}.$$

Portanto, como se tem $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+2}{n+1} \leq w_n \leq \frac{2n+2}{n}$ e $\lim\frac{2n+2}{n+1} = \lim\frac{2n+2}{n} = 2$, pode concluir-se que $\lim w_n = 2$.

e) Seja (w_n) a sucessão definida por $w_n = (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}) \times (\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \times \dots \times (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})$.

w_n é o produto de n fatores, todos menores do que 1 , dos quais o menor é $\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}$ e o maior é $\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2}$.

$$\text{Então, tem-se } (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})^n \leq w_n \leq (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})^n.$$

Ora, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[2n+1]{2} \geq 1$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\sqrt[2n+1]{2} \leq -1$ e, então,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2} \leq \sqrt{2} - 1.$$

Portanto, como se tem $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})^n \leq w_n \leq (\sqrt{2} - 1)^n$ e

$$\lim(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})^n = \lim(\sqrt{2} - 1)^n = 0, \text{ pode concluir-se que } \lim w_n = 0.$$

$$40. a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3x}{(x+1)^2} = \frac{2^2+6}{3^2} = \frac{10}{9}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+5} = \sqrt{4} = 2$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+3x}{2} = -\frac{\infty}{2} = -\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x(3-x)} = \frac{2}{+\infty \times (-\infty)} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x}{(x-1)^2} = \frac{1-3}{0^+} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0} = \infty$$

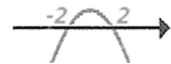
Determinemos os limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0^+} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

Portanto, não existe o limite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2-x}$.

$$g) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x}{4-x^2} = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

| Tem-se: $\lim_{x \rightarrow 2^-} (4-x^2) = 0^+$



$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{(x-1)^3} = \frac{4}{0} = \infty$$

Determinemos os limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{(x-1)^3} = \frac{4}{0^-} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{(x-1)^3} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Portanto, não existe o limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{(x-1)^3}$.

$$41. a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x}{(2x+1)^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x}{4x^2+4x+1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^3-8} \stackrel{\frac{0}{0}}{=}$$

| Tem-se:

1	0	0	-8
2	2	4	8
1	2	4	0 = R

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2+2x+4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2-3x}-2}{x^2-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2-3x}-2)(\sqrt{x^2-3x}+2)}{(x^2-1)(\sqrt{x^2-3x}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-3x-4}{(x^2-1)(\sqrt{x^2-3x}+2)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x^2-3x}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-4}{(x-1)(\sqrt{x^2-3x}+2)} = \frac{-5}{-2 \times 4} = \frac{5}{8}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{2x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1-\frac{2}{x})}}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{2} = \frac{-\sqrt{1-0}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3x}{x+1} - x \right) \stackrel{\infty-\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3x-x^2-x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x+1} \stackrel{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x} = -4$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2-2x|}{|x-3| \times x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \quad \text{Para } x < 0, \text{ tem-se } x^2 - 2x > 0 \text{ e } x - 3 < 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-2x}{(-x+3) \times x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-2x}{-x^2+3x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2-x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}{x-(2x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}) \right] = -2 \times \frac{3}{2} \times 2 = -6 \end{aligned}$$

$$\text{h) Tem-se: } |x+3| = \begin{cases} -(x+3) & \text{se } x \leq -3 \\ x+3 & \text{se } x > -3 \end{cases}$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2+3x}{|x+3|} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x(x+3)}{-(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3^-} -x = 3 \quad \text{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2+3x}{|x+3|} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x(x+3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3^+} x = -3, \text{ pelo que não existe o limite } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+3x}{|x+3|}.$$

$$\begin{aligned} \text{42. a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{2}}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{\sqrt{2}}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{1+0}-0}{1-0} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{b) Não existe o limite } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{x\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1-2}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sin \frac{x\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Portanto, como } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ tem-se } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

43. a) Tem-se:

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \cos^2 x \leq 1, \text{ pelo que } \forall x \in \mathbb{R}, 3 \leq 3 + \cos^2 x \leq 4 \text{ e, portanto}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 3x^2 \leq x^2(3 + \cos^2 x) \leq 4x^2.$$

$$\text{Então, para } x > -50, \text{ tem-se } \frac{3x^2}{x+50} \leq \frac{x^2(3+\cos^2 x)}{x+50} \leq \frac{4x^2}{x+50}.$$

$$\text{Portanto, como, para } x > -50, \text{ se tem } \frac{x^2(3+\cos^2 x)}{x+50} \geq \frac{3x^2}{x+50} \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x+50} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x) = +\infty, \text{ pode concluir-se que}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(3+\cos^2 x)}{x+50} = +\infty.$$

b) Tem-se:

$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \cos^2 x \leq 1$, pelo que $\forall x \in \mathbb{R}, 3x^2 \leq x^2(3 + \cos^2 x) \leq 4x^2$

Então, para $x < -50$, tem-se $\frac{4x^2}{x+50} \leq \frac{x^2(3+\cos^2 x)}{x+50} \leq \frac{3x^2}{x+50}$.

Portanto, como para $x < -50$, se tem $\frac{x^2(3+\cos^2 x)}{x+50} \leq \frac{3x^2}{x+50}$ e

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x+50} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x) = -\infty$, pode concluir-se que

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(3+\cos^2 x)}{x+50} = -\infty$.

c) Tem-se:

$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$, pelo que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 - 2x \leq \sin x - 2x \leq 1 - 2x$ e,

então, para $x > \frac{1}{2}$, tem-se $\frac{1}{1-2x} \leq \frac{1}{\sin x - 2x} \leq \frac{1}{-1-2x}$, pelo que

$\frac{3x^2}{1-2x} \leq \frac{3x^2}{\sin x - 2x} \leq \frac{3x^2}{-1-2x}$.

Portanto, como para $x > \frac{1}{2}$, se tem $\frac{3x^2}{\sin x - 2x} \leq \frac{3x^2}{-1-2x}$ e

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{-1-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3x}{2}\right) = -\infty$, pode concluir-se que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{\sin x - 2x} = -\infty$.

44. a) Tem-se:

$\forall x \in \mathbb{R}^+, -x \leq x \cos x \leq x$, pelo que $\forall x \in \mathbb{R}^+, -\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x \cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$.

Portanto, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$, pode concluir-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1} = 0$.

b) Tem-se:

$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq -\sin(2x) \leq 1$, pelo que $\forall x \in \mathbb{R}, 3x^2 - 1 \leq 3x^2 - \sin(2x) \leq 3x^2 + 1$ e, então,

$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{3x^2-1}{x^2+5} \leq \frac{3x^2-\sin(2x)}{x^2+5} \leq \frac{3x^2+1}{x^2+5}$.

Portanto, como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-1}{x^2+5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+1}{x^2+5} = 3$, pode concluir-se que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-\sin(2x)}{x^2+5} = 3$.

c) Tem-se:

• $\forall x \in \mathbb{R}, -1 + (x-1) \leq \cos x + (x-1) \leq 1 + (x-1)$, ou seja,

$\forall x \in \mathbb{R}, x-2 \leq x + \cos x - 1 \leq x$. (1)

• $\forall x \in \mathbb{R}, -1 + (2x+2) \leq -\cos x + (2x+2) \leq 1 + (2x+2)$, ou seja,

$\forall x \in \mathbb{R}, 2x+1 \leq 2x - \cos x + 2 \leq 2x+3$. (2)

Para $x > 2$, todos os termos das expressões (1) e (2) são sempre positivos, pelo que se tem

$\forall x \in]2, +\infty[, \frac{1}{2x+3} \leq \frac{1}{2x-\cos x+2} \leq \frac{1}{2x+1}$ e, portanto,

$\forall x \in]2, +\infty[, \frac{x-2}{2x+3} \leq \frac{x+\cos x-1}{2x-\cos x+2} \leq \frac{x}{2x+1}$.

Portanto, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}$, pode concluir-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\cos x-1}{2x-\cos x+2} = \frac{1}{2}$.

45. Como $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+x-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+2x-1}{x+2} = -2$, pode concluir-se que $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)}{x^2+1} = -2$ e, portanto, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -4$.

46. Tem-se:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=}$$

| Cálculo aux.

	2	-3	-2
2		4	2
	2	1	$0 = R$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+1) = 5$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=}$$

| Cálculo aux.

	3	-7	2
2		6	-2
	3	-1	$0 = R$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x-1) = 5$$

Portanto, como $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2} = 5$, pode concluir-se que $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 5$.

47. Para garantir que a função f é contínua, resta assegurar que se tem:

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

Ora,

$$\bullet f(2) = 2k^2 - 4$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (k^2x - 4) = 2k^2 - 4$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4-x^2}{x^2-2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2-x)(2+x)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(2+x)}{x} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\text{Portanto: } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2k^2 - 4 = -2 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = -1 \vee k = 1$$

48.

A função é contínua em $]-\infty, -1[$ porque é uma função racional e é contínua em $]-1, +\infty[$ porque é o quociente entre uma função polinomial e a diferença entre uma função constante e a raiz quadrada de uma função polinomial e é contínua em -1 , pois:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = \frac{3}{5}$$

Pág. 30

49. (B)

A função g é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que é contínua em qualquer intervalo fechado de números reais.

$$\bullet g(-3) = (-3)^3 + (-3) - 1 = -31 < -8$$

$$\bullet g(-2) = (-2)^3 + (-2) - 1 = -11 < -8$$

$$\bullet g(-1) = (-1)^3 + (-1) - 1 = -3 > -8$$

$$\bullet g(0) = -1 > -8$$

$$\bullet g(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1 > -8$$

Portanto, só na opção (B) é que se tem -8 pertencente ao intervalo fechado cujos extremos são as imagens dos extremos do intervalo referido nessa opção. Logo, só nessa opção é que o teorema de Bolzano-Cauchy permite garantir, no intervalo dado, uma solução da equação $g(x) = -8$.

50. (A)

Em qualquer das opções, a função g é contínua em $[-2, 2]$. Tem-se:

• Opção (A):

$$g(-2) = -2 + f(-2) = -2 + 1 = -1 < 0$$

$$g(2) = 2 + f(2) = 2 + 3 = 5 > 0$$

• Opção (B):

$$g(-2) = -2 - f(-2) = -2 - 1 = -3 < 0$$

$$g(2) = 2 - f(2) = 2 - 3 = -1 < 0$$

• Opção (C):

$$g(-2) = (-2)^2 + f(-2) = 4 + 1 = 5 > 0$$

$$g(2) = 2^2 + f(2) = 4 + 3 = 7 > 0$$

• Opção (D):

$$g(-2) = (-2)^2 - f(-2) = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$g(2) = 2^2 - f(2) = 4 - 3 = 1 > 0$$

Portanto, só na opção (A) é que se tem 0 pertencente ao intervalo fechado cujos extremos são $g(-2)$ e $g(2)$. Logo, só nessa opção é que o teorema de Bolzano-Cauchy permite garantir a existência de um zero no intervalo $] - 2, 2[$.

51. Seja g a função definida por $g(x) = f(x) - x - 1$. A equação $f(x) = x + 1$ é equivalente à equação $g(x) = 0$.

Tem-se $g(1) = f(1) - 1 - 1 = -1$ e $g(2) = f(2) - 2 - 1 = 2$. Dado que a função g é contínua em $[1, 2]$ e que $g(1) < 0 < g(2)$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists x \in]1, 2[: g(x) = 0$.

52. Qualquer que seja o valor de k , a função f é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que é contínua em $[-1, k]$. Então, uma condição que traduz o problema é $f(-1) \times f(k) < 0$.

Tem-se:

• $f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) + k = k + 2$

• $f(k) = k^3 - 3k + k = k^3 - 2k$

Portanto, $f(-1) \times f(k) = (k + 2)(k^3 - 2k) = k(k + 2)(k^2 - 2)$.

Tem-se o seguinte quadro de sinais:

	$-\infty$	-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
k	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$k + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$k^2 - 2$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	
$f(-1) \times f(k)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	

Portanto, $f(-1) \times f(k) < 0 \Leftrightarrow k \in] - 2, -\sqrt{2}[\cup] 0, \sqrt{2}[$.

53.

A função g é contínua em $[1, 2]$ porque resulta de operações algébricas sobre funções contínuas.

$$g(1) = 2f(1) - f(1) = f(1) \text{ e}$$

$$g(2) = 2f(2) - f(1) = 2f(2) - 3f(2) = -f(2)$$

Dado que f é negativa em $[1, 2]$, sabe-se que $f(1) < 0$ e que $-f(2) > 0$.

Então, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists x \in]1, 2[: g(x) = 0$.

54.

Seja g a função definida por $g(x) = f(x) - x$.

$g(-1) = f(-1) - (-1)$; portanto, $g(-1) < 0$,
pois $f(-1) < -1$.

$g(3) = f(3) - 3$; portanto, $g(3) > 0$, pois
 $f(3) > 3$.

Dado que g é contínua em $[-1, 3]$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que
 $\exists c \in]1, 3[: g(c) = 0$ e $g(c) = 0$ é equivalente
a $f(c) = c$.

55.

Seja g a função definida por

$$g(x) = f(x) - f(x+a).$$

A função g é contínua em $[-a, 0]$ e

$$g(-a) = f(-a) - f(-a+a) = f(a) - f(0); \text{ portanto,}$$

$$g(-a) > 0, \text{ pois } f(a) > f(0).$$

$$g(0) = f(0) - f(a)$$

Portanto, $g(0) < 0$, pois $f(a) > f(0)$.

Então, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists c \in]-a, 0[: g(c) = 0$ e, assim, a equação $f(x) = f(x+a)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]-a, 0[$.

56.

Dado que a função f é contínua em $[a, b]$
e que $0 \in]-1, 3]$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists c \in]a, b[: f(c) = 0$.
Então, $c \notin D_g$.

57.

Temos de provar que:

$$\exists x \in [1, 5] : f(x) = x^2$$

Seja g a função definida por $g(x) = f(x) - x^2$;

g é contínua em $[1, 5]$,

$$g(1) = f(1) - 1^2 = 2 - 1 = 1 \text{ e}$$

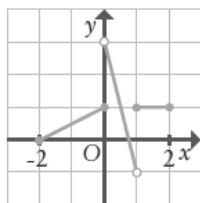
$$g(5) = f(5) - 5^2 = 4 - 25 = -21.$$

Portanto, $\exists x \in]1, 5[: g(x) = 0$, ou seja,

$$\exists x \in]1, 5[: f(x) = x^2.$$

58.

É, necessariamente, uma função não contínua como, por exemplo, a função que representamos graficamente.

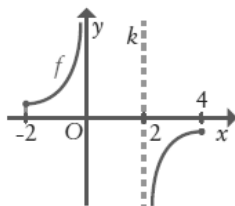


59.

Não; por exemplo, a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{se } x \in [-2, 0[\\ \frac{1}{2-x} & \text{se } x \in]2, 4] \end{cases}$$

é contínua e não tem máximo nem tem mínimo absolutos.



2. Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

Pág. 31

60. a) A , B e C são três pontos do gráfico de f tais que a abscissa de A é menor do que a abscissa de B e esta é menor do que a abscissa de C e tais que $m_{AB} = \frac{5-3}{3-2} = 2$ e $m_{BC} = \frac{7-5}{5-3} = 1$; portanto, como $m_{AB} > m_{BC}$, o gráfico de f não pode ter a concavidade voltada para cima.

b) Não. Para tal é necessário garantir que $m_{AB} < m_{BC}$, para qualquer ponto C do gráfico de f cuja abscissa seja maior do que a abscissa de A e menor do que a abscissa de B .

Pág. 32

61. a) $m = \frac{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\sqrt{2}} = -1$; $y - \sqrt{2} = -1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -x + \sqrt{2} + \frac{1}{2}$

b)

Dado que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left[\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right]$, o gráfico fica abaixo da reta que passa nos pontos do gráfico de abscissa $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{2}$.

A proposição é falsa porque a ordenada do ponto da reta de abscissa 1 é $-1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2}$ que é um número menor do que 1.

62. a) Representa a derivada da função f no ponto 2.

b) Representa a derivada da função f no ponto -1 .

Pág. 33

63. a)

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 4(1+h) + 1 - (-2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 2) = -2 \end{aligned}$$

b) $f(1) = 1^2 - 4 + 1 = -2$; $y - (-2) = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 2 - 2 \Leftrightarrow y = -2x$

Pág. 36

64. • $f'(x) = (x^4 - 3x^3 + 1)' = 4x^3 - 9x^2$

$$f''(x) = (4x^3 - 9x^2)' = 12x^2 - 18x$$

$$f''(1) = 12 - 18 = -6$$

- $g'(x) = [(2x - 1)^3]' = 3(2x - 1)^2(2x - 1)' = 3(2x - 1)^2 \times 2 = 6(2x - 1)^2$
 $g''(x) = [6(2x - 1)^2]' = 6 \times 2(2x - 1)(2x - 1)' = 6 \times 2(2x - 1) \times 2 = 48x - 24$
 $g''(1) = 48 - 24 = 24$
- $h'(x) = \left(\frac{2x}{x+1}\right)' = \frac{(2x)'(x+1) - 2x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$
 $h''(x) = \left(\frac{2}{(x+1)^2}\right)' = \frac{2'(x+1)^2 - 2[(x+1)^2]'}{(x+1)^4} = \frac{-2[2(x+1)(x+1)']}{(x+1)^4} = \frac{-4(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-4}{(x+1)^3}$
 $h''(1) = \frac{-4}{(1+1)^3} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

Pág. 37

65. $f'(x) = (6x - x^3 + 1)' = 6 - 3x^2$; portanto, $f'(\sqrt{2}) = 6 - 3 \times 2 = 0$
 $f''(x) = (6 - 3x^2)' = -6x$; portanto, $f''(\sqrt{2}) = -6\sqrt{2} < 0$
Então, como $f'(\sqrt{2}) = 0$ e $f''(\sqrt{2}) < 0$, f atinge um máximo em $\sqrt{2}$.

66. Para $a = 0$:

Tem-se $g(x) = x^2 + 2$, caso em que a função g não atinge um mínimo no ponto $-\frac{2}{3}$ (o gráfico de g é uma parábola de eixo vertical e concavidade voltada para cima e cujo vértice é o ponto de coordenadas $(0, 2)$).

Para $a \neq 0$:

$$g'(x) = (ax^3 + x^2 + 2)' = 3ax^2 + 2x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(3ax + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{2}{3a}$$

Portanto, a função g atinge um extremo relativo no ponto $-\frac{2}{3}$ se e só se $a = 1$.

Vejamos, nesse caso, se o extremo é um máximo ou um mínimo.

Para $a = 1$, tem-se $g'(x) = 3x^2 + 2x$.

Então, $g''(x) = (3x^2 + 2x)' = 6x + 2$, pelo que $g''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = -4 + 2 = -2 < 0$.

Portanto, para $a = 1$, a função g atinge um máximo relativo no ponto $-\frac{2}{3}$.

Portanto, não existe qualquer valor real de a para o qual a função g atinja um mínimo relativo no ponto $-\frac{2}{3}$.

Pág. 38

Será que...? Concavidade do gráfico da função e monotonia da derivada

1. Sejam m_A , m_B e m_C os declives das retas tangentes, respetivamente, nos pontos A , B e C .

Gráfico I $\rightarrow$ função g

Gráfico II $\rightarrow$ função j

Gráfico III $\rightarrow$ função f

Gráfico IV $\rightarrow$ função h

Justificação:

Gráfico I: tem-se $0 < m_A < m_B < m_C$, condição que só é verificada pela função g .

Gráfico II: tem-se $m_A > m_B > m_C > 0$, condição que só é verificada pela função j .

Gráfico III: tem-se $0 > m_A > m_B > m_C$, condição que só é verificada pela função f .

Gráfico IV: tem-se $m_A < m_B < m_C < 0$, condição que só é verificada pela função h .

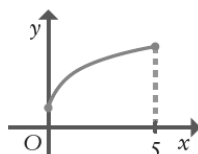
2. a) (...) cima (...) ~~crescentes~~/~~decrecentes~~

b) (...) II e III (...) ~~crescentes~~/~~decrecentes~~

Sim, as conjecturas são compatíveis com o teorema.

Pág. 39

67. Para que a função derivada seja decrescente basta garantir que a segunda derivada seja negativa, ou seja, que o gráfico tenha a concavidade voltada para baixo. Por exemplo:



Pág. 40

$$68. f'(x) = \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + x^2 - 1 \right)' = \frac{4}{12}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right)' = x^2 - 3x + 2$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

Tem-se o seguinte quadro de sinais de f'' :

	$-\infty$	1		2	$+\infty$
Sinal e zeros de f''		0	–	0	+

Portanto, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $] -\infty, 1]$ e em $[2, +\infty[$.

Pág. 41

69. Tem de se ter $g''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

$$g'(x) = \left(kx^5 - \frac{x^2}{4} + 1 \right)' = 5kx^4 - \frac{1}{2}x$$

$$g''(x) = \left(5kx^4 - \frac{1}{2}x \right)' = 20kx^3 - \frac{1}{2}$$

$$g''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 20k\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{20}{8}k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}$$

Pág. 42

Será que...? Uma viagem de automóvel

O Tiago está a pedir ao pai para aumentar a velocidade do automóvel.

Pág. 43

70. $v(0) = 0 \text{ km/h} = 0 \text{ m/s}$

$$v(2,46) = 100 \text{ km/h} = 100\,000 \text{ m/h} = \frac{100\,000}{3\,600} \text{ m/s} \approx 27,77 \text{ m/s}$$

$$\text{Aceleração média em } [0; 2,46] = \frac{27,77 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}}{2,46 \text{ s}} = \frac{27,77}{2,46} \text{ m/s}^2 \approx 11,3 \text{ m/s}^2$$

71. $\frac{v(0,01) - v(0)}{0,01 - 0} = 3 \Leftrightarrow \frac{v(0,01) - 1000}{0,01} = 3 \Leftrightarrow v(0,01) - 1000 = 0,03 \Leftrightarrow v(0,01) = 1000,03 \text{ m/s}$

72. Tem-se $s'(t) = (2 + 3t + 5t^2)' = 3 + 10t$ e $s''(t) = (3 + 10t)' = 10$.

Portanto, como $s''(t) = 10$, a aceleração é constante, pelo que o movimento se diz «uniformemente variado».

Pág. 46

Será que...? Nem tudo o que parece é!

Relativamente à função definida por $a(x) = \frac{x^2}{x-1}$:

- o domínio não é $\mathbb{R}$, mas, sim, $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- a função não é ímpar; basta notar que $-1 \in D_a$, mas $1 \notin D_a$.
- a função não é crescente; basta notar de que a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de a e que se tem $\lim_{x \rightarrow 1^-} a(x) = -\infty$.

Relativamente à função definida por $b_2(x) = \sin(-40x)$:

- o gráfico de b_2 pode ser obtido a partir do gráfico de b_1 por meio de uma reflexão de eixo Oy composta com uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{40}$, pelo que o período de b_2 é a quadragésima parte do período de b_1 .

Relativamente à função definida por $c(x) = x - 40$:

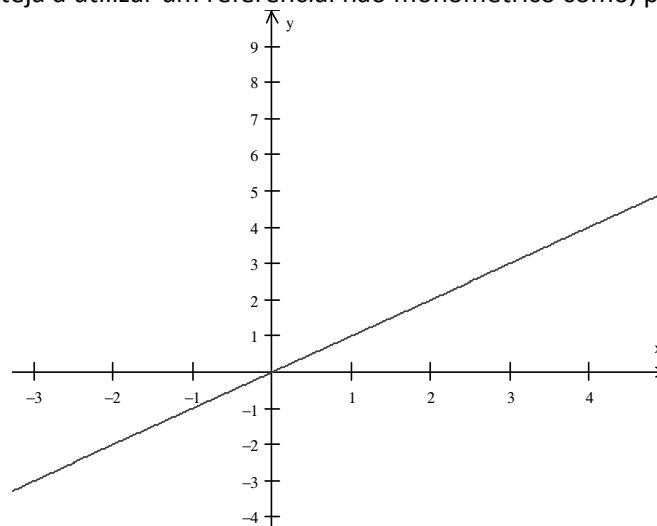
- o gráfico de c é a reta cuja equação reduzida é $y = x - 40$, que não é uma reta paralela ao eixo Ox e, portanto, a função c não é uma função constante.

Relativamente à função definida por $d(x) = x^3 + 10x^2$:

- a função d não é uma função quadrática, pelo que o seu gráfico não é uma parábola. A função d não é par porque não se tem, por exemplo, $d(-1) = d(1)$.

Não; como se viu, nenhuma das conclusões sugeridas é correta.

73. É provável que se esteja a utilizar um referencial não monométrico como, por exemplo:



74.

(A) $[-100, 100] \times [-100, 100]$

(C) $[-0,5; 0,5] \times [-100, 100]$

(D) $[-1, 1] \times [-3,1; 3,1]$

Pág. 48

75. • Domínio

Tem-se $D_f = \mathbb{R}$, pois $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$

• Pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados

$f(0) = \frac{0}{0+1} = 0$, pelo que o gráfico interseja ambos os eixos no ponto de coordenadas $(0, 0)$.

• Intervalos de monotonia e extremos relativos

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1} \right)' = \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \wedge x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$-x^2 + 1$	$-$	0	$+$	0	$-$
$(x^2 + 1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Sinal e zeros de f'	$-$	0	$+$	0	$-$
Variação e extremos de f	$\searrow$	Mín. relativo	$\nearrow$	Máx.. relativo	$\searrow$

$$f(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

f é decrescente em $] -\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e é crescente em $[-1, 1]$.

f atinge um mínimo relativo igual a $-\frac{1}{2}$ em -1 e atinge um máximo relativo igual a $\frac{1}{2}$ em 1 .

• Pontos de inflexão e sentido das concavidades do gráfico

$$f''(x) = \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \right)' = \frac{(1-x^2)'(x^2+1)^2 - (1-x^2)[(x^2+1)^2]'}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)[2(x^2+1)2x]}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(x^2+1) - (1-x^2)4x}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 0 \wedge x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$2x$	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 3$	+	0	-	-	-	0	+
$(x^2 + 1)^3$	+	+	+	+	+	+	+
Sinal e zeros de f''	-	0	+	0	-	0	+
Sentido da concavidade de f		P. I.		P. I.		P. I.	
		$f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$		$f(0) = 0$		$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $] -\infty, -\sqrt{3}]$ e em $[0, \sqrt{3}]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[-\sqrt{3}, 0]$ e em $[\sqrt{3}, +\infty[$.

Os pontos de inflexão do gráfico são os pontos de coordenadas $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $(0, 0)$ e $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

• Assíntotas ao gráfico

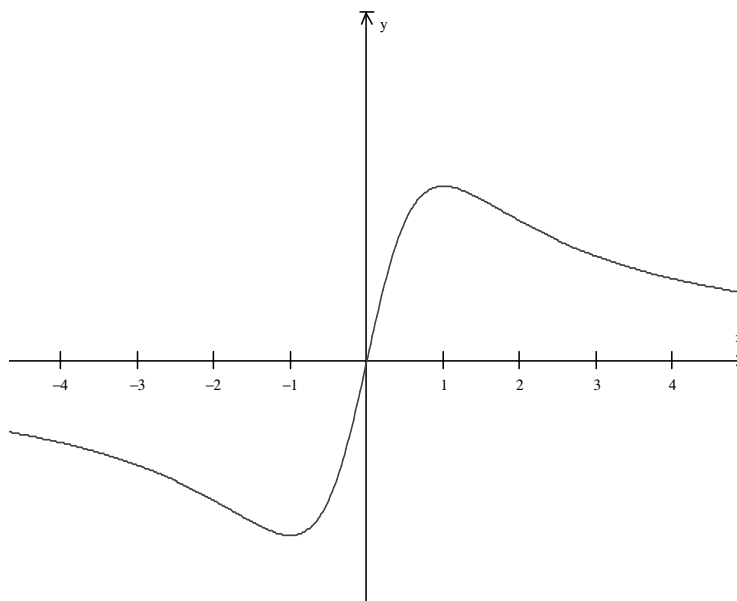
Assíntotas verticais: a função tem domínio $\mathbb{R}$ e é contínua, pelo que não existem assíntotas verticais

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$ e em $+\infty$

• Esboço do gráfico



76. • Domínio

Tem-se $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

• Pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados

$f(0) = \frac{0-0}{2-0} = 0$, pelo que o gráfico interseja ambos os eixos no ponto de coordenadas $(0, 0)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x}{2-x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$, pelo que o gráfico também interseja o eixo das abcissas no ponto de coordenadas $(1, 0)$.

• Intervalos de monotonia e extremos relativos

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-x}{2-x}\right)' = \frac{(x^2-x)'(2-x) - (x^2-x)(2-x)'}{(2-x)^2} = \frac{(2x-1)(2-x) - (x^2-x)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x-2}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x-2}{(2-x)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 2 = 0 \wedge 2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2} \vee x = 2 + \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{2}$		2		$2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$-x^2 + 4x - 2$	—	0	+	+	+	0	—
$(2-x)^2$	+	+	+	0	+	+	+
Sinal e zeros de f'	—	0	+	n.d.	+	0	—
Variação e extremos de f	$\searrow$	Mín. relativo	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	Máx. relativo	$\searrow$

$$f(2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 3$$

$$f(2 + \sqrt{2}) = -2\sqrt{2} - 3$$

f é decrescente em $] - \infty, 2 - \sqrt{2}]$ e em $[2 + \sqrt{2}, +\infty[$ e é crescente em $[2 - \sqrt{2}, 2[$ e em $]2, 2 + \sqrt{2}]$.

f atinge um mínimo relativo igual a $2\sqrt{2} - 3$ em $2 - \sqrt{2}$ e atinge um máximo relativo igual a $-2\sqrt{2} - 3$ em $2 + \sqrt{2}$.

• Pontos de inflexão e sentido das concavidades do gráfico

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-x^2+4x-2}{(2-x)^2}\right)' = \frac{(-x^2+4x-2)'(2-x)^2 - (-x^2+4x-2)[(2-x)^2]'}{(2-x)^4} = \\ &= \frac{(-2x+4)(2-x)^2 - (-x^2+4x-2)[-2(2-x)]}{(2-x)^4} = \frac{(-2x+4)(2-x)^2 + 2(-x^2+4x-2)(2-x)}{(2-x)^4} = \\ &= \frac{(-2x+4)(2-x) + 2(-x^2+4x-2)}{(2-x)^3} = \frac{-4x+2x^2+8-4x-2x^2+8x-4}{(2-x)^3} = \frac{4}{(2-x)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{(2-x)^3} = 0 \Leftrightarrow 4 = 0 \wedge 2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow (2-x)^3 < 0 \Leftrightarrow 2-x < 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow (2-x)^3 > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]2, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $] - \infty, 2[$.

O gráfico não tem pontos de inflexão.

• Assíntotas ao gráfico

Assíntotas verticais: a função é contínua, pelo que só a reta de equação $x = 2$ poderá ser assíntota vertical ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-x}{2-x} = \frac{2}{0^+} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-x}{2-x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2-x}{2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x}{2x-x^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

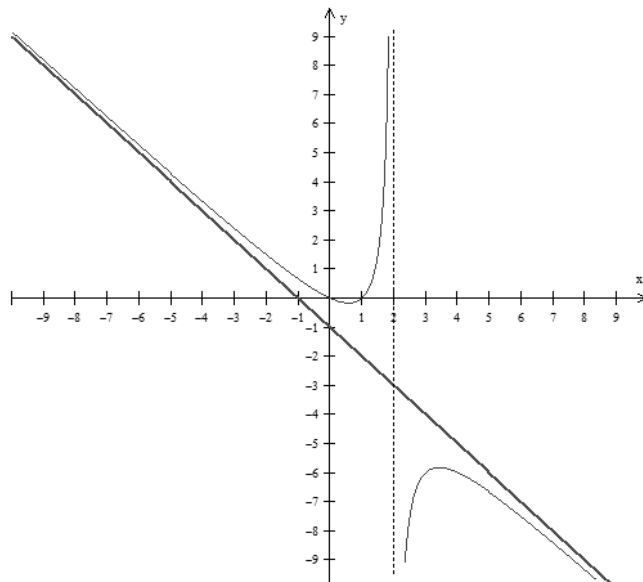
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-1) \times x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - x}{2 - x} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 2x - x^2}{2 - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

Portanto, a reta de equação $y = -x - 1$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

De modo análogo se prova que a reta de equação $y = -x - 1$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

• Esboço do gráfico



Pág. 53

77. • Domínio

Tem-se $D_f = \mathbb{R}$, pois $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 4 > 0$.

• Pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados

$f(0) = 3 - \sqrt{0^2 + 4} = 3 - 2 = 1$, pelo que o gráfico intersesta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, 1)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{x^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 9 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$, pelo que o gráfico intersesta o eixo das abcissas nos pontos de coordenadas $(-\sqrt{5}, 0)$ e $(\sqrt{5}, 0)$.

• Intervalos de monotonia e extremos relativos

$$f'(x) = (3 - \sqrt{x^2 + 4})' = (-\sqrt{x^2 + 4})' = -\frac{(x^2 + 4)'}{2\sqrt{x^2 + 4}} = -\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \wedge \sqrt{x^2 + 4} \neq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 4}} < 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

| Tem-se: $\sqrt{x^2 + 4} > 0, \forall x \in D_f$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 4}} > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

f é decrescente em $[0, +\infty[$, é crescente em $] -\infty, 0]$, atinge um máximo absoluto igual a 1 em 0 e não tem mínimos relativos.

• Pontos de inflexão e sentido das concavidades do gráfico

$$f''(x) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + 4}} \right)' = \frac{(-x)' \sqrt{x^2 + 4} - (-x)(\sqrt{x^2 + 4})'}{(\sqrt{x^2 + 4})^2} = \frac{-\sqrt{x^2 + 4} + x \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}}{x^2 + 4} = \frac{-4}{(x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 4}}$$

Portanto, como se tem $f''(x) < 0, \forall x \in D_f$, pode concluir-se que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo e não existem pontos de inflexão

• Assíntotas ao gráfico

Assíntotas verticais: a função tem domínio $\mathbb{R}$ e é contínua, pelo que não existem assíntotas verticais

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 4}}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{x^2}} - \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} \right) = 0 - \sqrt{1 + 0} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-1) \times x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [3 - \sqrt{x^2 + 4} + x] \stackrel{-\infty + \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} [3 + x - \sqrt{x^2 + 4}] =$$

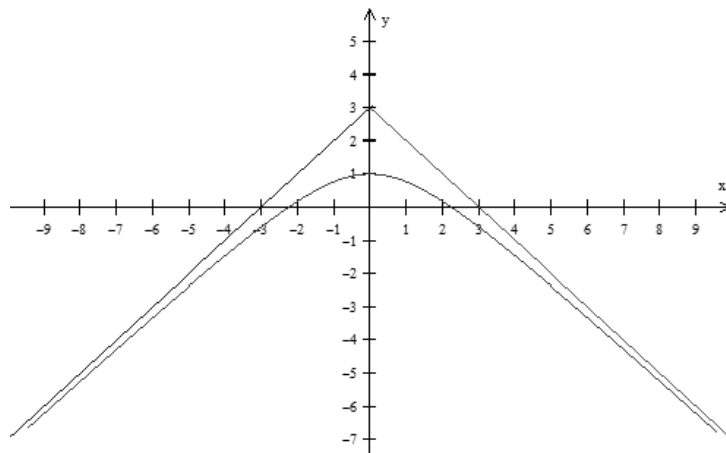
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3+x-\sqrt{x^2+4})(3+x+\sqrt{x^2+4})}{3+x+\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3+x)^2 - (\sqrt{x^2+4})^2}{3+x+\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9+6x+x^2-x^2-4}{3+x+\sqrt{x^2+4}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+5}{3+x+\sqrt{x^2+4}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+5}{3+x+x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6+\frac{5}{x}}{\frac{3}{x}+1+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \frac{6+0}{0+1+\sqrt{1+0}} = 3$$

Portanto, a reta de equação $y = -x + 3$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

De modo análogo se prova que a reta de equação $y = x + 1$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

• Esboço do gráfico



Pág. 55

78. Tem-se:
$$f(x) = \frac{|x-2|}{2x} = \begin{cases} \frac{-x+2}{2x} & \text{se } x < 2 \wedge x \neq 0 \\ \frac{x-2}{2x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

• Domínio

Tem-se $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• Pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados

Dado que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, o gráfico de f não intersesta o eixo das ordenadas.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{|x-2|}{2x} = 0 \Leftrightarrow |x-2| = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 2$, pelo que o gráfico intersesta o eixo das abcissas no ponto de coordenadas $(2, 0)$.

• Intervalos de monotonia e extremos relativos

Para $x < 2 \wedge x \neq 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{-x+2}{2x} \right)' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{x} \right)' = \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Para $x > 2$:

$$f'(x) = \left(\frac{x-2}{2x} \right)' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right)' = \left(-\frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{x^2}$$

Para $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{-x+2}{2x} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{2x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{x-2}{2x}-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{2x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2x} = \frac{1}{4}$$

Portanto a função não é diferenciável no ponto 2.

Concluindo:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{se } x < 2 \wedge x \neq 0 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Como, $\forall x \in]-\infty, 2[\setminus \{0\}, f'(x) < 0$ e $\forall x \in]2, +\infty[, f'(x) > 0$, pode concluir-se que a função é decrescente em $] -\infty, 0[$ e em $]0, 2[$ e que é crescente em $]2, +\infty[$.

f atinge um máximo absoluto igual a 0 em 2.

● Pontos de inflexão e sentido das concavidades do gráfico

Para $x < 2 \wedge x \neq 0$:

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{-(x^2)'}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

Para $x > 2$:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-(x^2)'}{x^4} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

Concluindo:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{se } x < 2 \wedge x \neq 0 \\ -\frac{2}{x^3} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$\frac{2}{x^3}$	—	n.d.	+		
$-\frac{2}{x^3}$					—
Sinal e zeros de f''	—	n.d.	+	n.d.	—
Concavidade e pontos de inflexão		n.d.		P.I.	

O gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo em $] -\infty, 0[$ e em $]2, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]0, 2[$.

O ponto de coordenadas (2, 0) é ponto de inflexão do gráfico.

● Assíntotas ao gráfico

Assíntotas verticais: a função é contínua, pelo que só a reta de equação $x = 0$ poderá ser assíntota vertical ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x-2|}{2x} = \frac{2}{0^-} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x-2|}{2x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical.

Assíntotas não verticais:

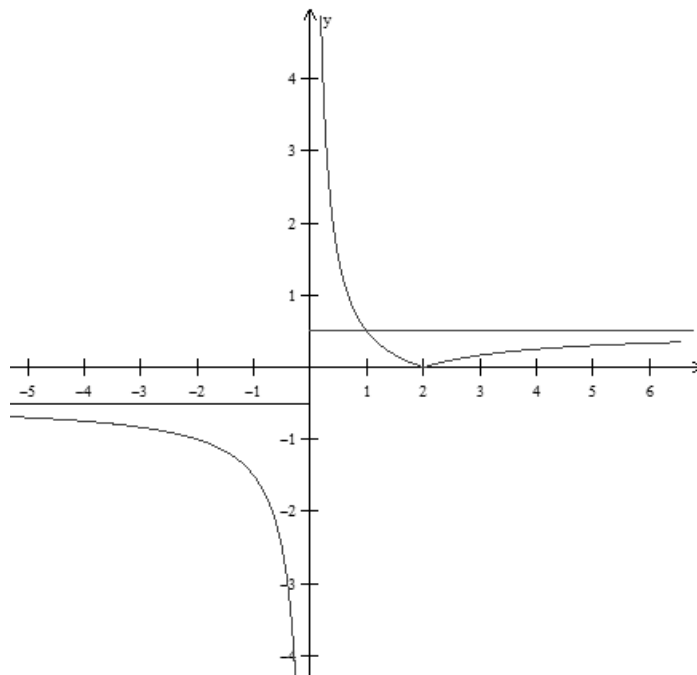
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-2|}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{2x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Portanto, a reta de equação $y = \frac{1}{2}$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-2|}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+2}{2x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

Portanto, a reta de equação $y = -\frac{1}{2}$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$.

• Esboço do gráfico



Pág. 56

79.

A função f' é contínua em $[1, 3]$ porque é diferenciável (pois f é duas vezes diferenciável).

Então, dado que $f'(1) \times f'(3) < 0$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite afirmar que:

$$\exists c \in]1, 3[: f'(c) = 0$$

Portanto, visto que $f''(c) < 0$, conclui-se que a função f atinge um máximo em c .

Pág. 57

80.

Seja h a função definida por

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 2x^2 - 1.$$

A função h é contínua em $\left[-2, -\frac{3}{2}\right]$,

$$h(-2) = -1 \text{ e } h\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{8}.$$

O teorema de Bolzano-Cauchy permite, portanto, concluir que

$$\exists c \in \left]-2, -\frac{3}{2}\right[: h(c) = 0 \text{ e}$$

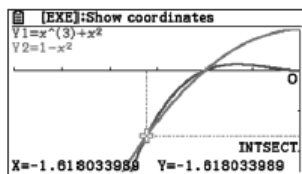
$$h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = g(c).$$

Então, os gráficos de f e g interseitam-se num ponto de abscissa entre -2 e $-\frac{3}{2}$.

Esse ponto é único, pois h' é positiva em

$\left[-2, -\frac{3}{2}\right]$ e, portanto, a função h é crescente nesse intervalo.

A abscissa do ponto, arredondada às décimas, é $-1,6$.



Pág. 58

81. Seja $x = \overline{AC}$, para $x > 2$.

Designemos por P o ponto médio de $[AC]$.

Então: $\overline{AP} = \frac{x}{2}$ e $\overline{AD} = \frac{\overline{AC} - \overline{DG}}{2} = \frac{x-2}{2}$

Tem-se $\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{ED}}$.

Ora, $\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{ED}} \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x-2}{2}} = \frac{\overline{BP}}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} = \frac{\overline{BP}}{2} \Leftrightarrow \overline{BP} = \frac{2x}{x-2}$.

Portanto, área do triângulo $= \frac{\overline{AC} \times \overline{BP}}{2} = \frac{x \times \frac{2x}{x-2}}{2} = \frac{x^2}{x-2}$

$$\left(\frac{x^2}{x-2}\right)' = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

x	2		4	$+\infty$
$x^2 - 4x$		—	0	+
$(x-2)^2$		+	+	+
$\frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$	n.d.	—	n.d.	+
Variação e extremos da área	n.d.	↘	Mín.	↗

A área do triângulo é a menor possível quando $\overline{AC} = 4$.

82.

Suponhamos que a função tinha dois zeros. Então, pelo teorema de Lagrange, podia concluir-se que a derivada tinha, pelo menos, um zero entre os dois zeros da função. Ora, isso é absurdo, pois a derivada da função não tem zeros. Portanto, a função não pode ter dois zeros, ou seja, tem, no máximo, um zero.

Pág. 64

83. Tem-se $m_{AB} = \frac{6-2}{5-1} = 1$ e $m_{BC} = \frac{k-6}{6-5} = k-6$.

Então: $m_{AB} > m_{BC} \Leftrightarrow 1 > k-6 \Leftrightarrow k < 7 \Leftrightarrow k \in]-\infty, 7[$

$$\begin{aligned}
84. f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - 1}{x+1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} = \frac{1}{2} \\
g'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+h-3} - \frac{2}{-2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{h-2} + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2+h-2}{h-2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(h-2)} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h-2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$85. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{5h} = \frac{1}{5} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{1}{5} \times f'(-2) = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned}
86. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)+1}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-(-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{g(x)-g(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = g'(1) \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

b) Tem-se que o declive da reta é igual a $g'(1)$ e que a reta passa no ponto de coordenadas $(1, -1)$, pelo que a reta é definida por $y - (-1) = g'(1)(x - 1)$.

$$y - (-1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y + 1 = -3(x - 1) \Leftrightarrow y = -3x + 2$$

A equação reduzida da reta é $y = -3x + 2$.

87.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3 \Leftrightarrow f'(1) = 3;$$

dado que a função f é par, a função f' é ímpar e, portanto, $f'(-1) = -3$.

De outro modo:

$$\begin{aligned}
f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \stackrel{(f \text{ é par})}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \stackrel{(k=-h)}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(1+k) - f(1)}{-k} = \\
&= -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(1+k) - f(1)}{k} = -f'(1) = -3
\end{aligned}$$

$$88. \text{ a) } f'(x) = (1 - 3x)' = -3$$

$$\text{ b) } f'(x) = (3x^2 - x^3 + \pi^4)' = 6x - 3x^2$$

$$\text{ c) } f'(x) = \left(\frac{x^4 - 2x + \sqrt{2}}{5} \right)' = \frac{(x^4 - 2x + \sqrt{2})'}{5} = \frac{4x^3 - 2}{5}$$

$$\text{ d) } f'(x) = (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{3x} + \sqrt[4]{4x})' = (\sqrt{2x})' + (\sqrt[3]{3x})' + (\sqrt[4]{4x})' = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9x^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{64x^3}}$$

$$\text{ e) } f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{5x-3} \right)' = \frac{(x^2+1)'(5x-3) - (5x-3)'(x^2+1)}{(5x-3)^2} = \frac{2x(5x-3) - 5(x^2+1)}{(5x-3)^2} = \frac{10x^2 - 6x - 5x^2 - 5}{(5x-3)^2} = \frac{5x^2 - 6x - 5}{(5x-3)^2}$$

$$\text{ f) } f'(x) = [(2x+1)^4]' = 4(2x+1)^3(2x+1)' = 8(2x+1)^3$$

$$g) f'(x) = \left[\left(\frac{1}{2x} \right)^3 \right]' = 3 \left(\frac{1}{2x} \right)^2 \left(\frac{1}{2x} \right)' = 3 \left(\frac{1}{2x} \right)^2 \left(-\frac{(2x)'}{(2x)^2} \right) = 3 \left(\frac{1}{2x} \right)^2 \left(-\frac{2}{4x^2} \right) = -\frac{6}{16x^4} = -\frac{3}{8x^4}$$

$$h) f'(x) = (\sqrt{x^2+1})' = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$i) f'(x) = [(2x+1)(3x+1)^4]' = (2x+1)'(3x+1)^4 + (2x+1)[(3x+1)^4]' = \\ = 2(3x+1)^4 + (2x+1) \times 4(3x+1)^3(3x+1)' = 2(3x+1)^4 + (2x+1) \times 12(3x+1)^3 = \\ = 2(3x+1)^3[(3x+1) + 6(2x+1)] = 2(3x+1)^3(15x+7)$$

$$j) f'(x) = [x^2(x^2+1)^3]' = (x^2)'(x^2+1)^3 + x^2[(x^2+1)^3]' = \\ = 2x(x^2+1)^3 + x^2 \times 3(x^2+1)^2(x^2+1)' = 2x(x^2+1)^3 + 3x^2(x^2+1)^2(2x) = \\ = 2x(x^2+1)^2[(x^2+1) + 3x^2] = 2x(x^2+1)^2(4x^2+1)$$

$$89. a) f'(x) = \left(\frac{2x-1}{3-x} \right)' = \frac{(2x-1)'(3-x) - (3-x)'(2x-1)}{(3-x)^2} = \frac{2(3-x) - (-1)(2x-1)}{(3-x)^2} = \frac{5}{(3-x)^2};$$

$$\text{portanto } f'(-2) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

$g'(-2) = m_r$; como a reta r passa nos pontos de coordenadas $(-2, 2)$ e $(0, 5)$, tem-se

$$g'(-2) = \frac{5-2}{0-(-2)} = \frac{3}{2}.$$

$$b) (f \times g)'(-2) = f'(-2) \times g(-2) + f(-2) \times g'(-2) = \quad | f(-2) = -\frac{5}{5} = -1 \text{ e } g(-2) = 2 \\ = \frac{1}{5} \times 2 + (-1) \times \frac{3}{2} = -\frac{11}{10}$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(-2) = \frac{f'(-2) \times g(-2) - f(-2) \times g'(-2)}{[g(-2)]^2} = \frac{\frac{1}{5} \times 2 - (-1) \times \frac{3}{2}}{2^2} = \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{2}}{4} = \frac{19}{40}$$

$$c) (f \circ g)'(-2) = g'(-2) \times f'[g(-2)] = \frac{3}{2} \times f'(2) = \frac{15}{2} \quad | f'(2) = \frac{5}{1^2} = 5$$

Pág. 65

$$90. a) f'(x) = (x^2 - x^3 + 1)' = 2x - 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	0		$2/3$	$+\infty$
Sinal e zeros de f'	—	0	+	0	—
Variação e extremos de f		Mín. relativo	↗	Máx. relativo	↘
		$f(0) = 1$		$f(2/3) = 31/27$	

f é decrescente em $] -\infty, 0]$ e em $[\frac{2}{3}, +\infty[$ e é crescente em $[0, \frac{2}{3}]$.

f atinge um mínimo relativo igual a 1 em 0 e atinge um máximo relativo igual a $\frac{31}{27}$ em $\frac{2}{3}$.

$$b) f'(x) = \left(\frac{x^2+3}{x+2} \right)' = \frac{(x^2+3)'(x+2) - (x^2+3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{2x(x+2) - (x^2+3)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2-3}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-3}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4x-3}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 3 = 0 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = -2 - \sqrt{7} \vee x = -2 + \sqrt{7}$$

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{7}$		-2		$-2 + \sqrt{7}$	$+\infty$
$x^2 + 4x - 3$	+	0	-	-	-	0	+
$(x+2)^2$	+	+	+	0	+	+	+
Sinal e zeros de f'	+	0	-	n.d.	-	0	+
Variação e extremos de f	$\nearrow$	Máx. relativo	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	Mín. relativo	$\nearrow$

f é decrescente em $] -2 - \sqrt{7}, -2[$ e em $] -2, -2 + \sqrt{7}[$.

f é crescente em $] -\infty, -2 - \sqrt{7}[$ e em $] -2 + \sqrt{7}, +\infty[$.

f atinge um máximo em $-2 - \sqrt{7}$ e atinge um relativo mínimo relativo em $-2 + \sqrt{7}$.

91. Tem-se $f'(x) = \left(\frac{x}{x^2-9}\right)' = \frac{(x)'(x^2-9) - x(x^2-9)'}{(x^2-9)^2} = \frac{x^2-9-x \times 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{-x^2-9}{(x^2-9)^2}$

Então, dado que

$$\forall x \in D_f, -x^2 - 9 < 0 \wedge (x^2 - 9)^2 > 0,$$

$$\text{tem-se } \forall x \in D_f, f'(x) < 0.$$

A função f é decrescente em $] -\infty, -3[$, em $] -3, 3[$ e em $] 3, +\infty[$, mas não é decrescente no domínio. Repara que, se f fosse decrescente no domínio, ter-se-ia:

$$\forall a, b \in D_f, a < b \implies f(a) > f(b)$$

No entanto, por exemplo, -4 é menor do que 4 e $f(-4)$ também é menor do que $f(4)$.

92. Partindo do quadro apresentado no enunciado, podemos acrescentar-lhe uma linha referente à variação e extremos de f .

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
f'	-	0	+	0	-	0	-
Variação e extremos de f	$\searrow$	Mín. relativo	$\nearrow$	Máx. relativo	$\searrow$		$\searrow$

f é decrescente em $] -\infty, 1[$ e em $[2, +\infty[$ e é crescente em $[1, 2]$

f atinge um mínimo relativo em 1 e atinge um máximo relativo em 2.

93. a) $f'(x) = \left(\frac{3x^2+x^4-6x}{2}\right)' = \frac{(3x^2+x^4-6x)'}{2} = \frac{6x+4x^3-6}{2}$

$$f''(x) = \left(\frac{6x+4x^3-6}{2}\right)' = \frac{(6x+4x^3-6)'}{2} = \frac{6+12x^2}{2} = 3 + 6x^2$$

b) $f'(x) = [(2x+1)^3]' = 3(2x+1)^2(2x+1)' = 6(2x+1)^2$

$$f''(x) = [6(2x+1)^2]' = 12(2x+1)(2x+1)' = 24(2x+1) = 48x + 24$$

c) $f'(x) = \left(\frac{2}{x-1}\right)' = \frac{-2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$

$$f''(x) = \left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right)' = \frac{-(-2)[(x-1)^2]'}{(x-1)^4} = \frac{2 \times 2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4} = \frac{4(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

$$\text{d) } f'(x) = \left(\frac{x}{2x-3}\right)' = \frac{x'(2x-3) - x(2x-3)'}{(2x-3)^2} = \frac{2x-3-2x}{(2x-3)^2} = \frac{-3}{(2x-3)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{-3}{(2x-3)^2}\right)' = \frac{-(-3)[(2x-3)^2]'}{(2x-3)^4} = \frac{3 \times 2(2x-3)(2x-3)'}{(2x-3)^4} = \frac{12(2x-3)}{(2x-3)^4} = \frac{12}{(2x-3)^3}$$

$$94. f'(x) = \left(\frac{3x}{x+1}\right)' = \frac{(3x)'(x+1) - 3x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{3(x+1) - 3x}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{3}{(x+1)^2}\right)' = \frac{-3[(x+1)^2]'}{(x+1)^4} = \frac{-3 \times 2(x+1)(x+1)'}{(x+1)^4} = \frac{-6(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-6}{(x+1)^3}$$

A reta passa no ponto de coordenadas $(1, f'(1))$, ou seja, no ponto de coordenadas $(1, \frac{3}{4})$ e tem

declive igual a $f''(1) = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$, pelo que é definida por $y - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}(x - 1)$.

$$y - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}(x - 1) \Leftrightarrow y - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$

A equação reduzida da reta é $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$.

$$95. \text{ Tem-se } f'(x) = (ax^3 + bx^2 - 3)' = 3ax^2 + 2bx \text{ e } f''(x) = (3ax^2 + 2bx)' = 6ax + 2b$$

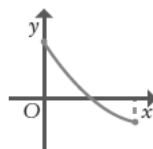
$$\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f''(-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ -6a + 2b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2}a \\ -6a + 2 \times \frac{3}{2}a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2}a \\ -6a + 3a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2}a \\ -3a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2}a \\ a \geq 0 \end{cases}$$

$$96. \text{ a) } f''(c) \leq 0$$

b) $f(c)$ é mínimo relativo da função.

97. Para que a função derivada seja crescente basta garantir que a segunda derivada seja positiva, ou seja, que o gráfico tenha a concavidade voltada para cima. Por exemplo:



$$98. \text{ a) } D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+3)'(x^2+1) - (x^2+3)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - (x^2+3)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3-6x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{-4x}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{(-4x)'(x^2+1)^2 - (-4x)[(x^2+1)^2]'}{(x^2+1)^4} = \frac{-4(x^2+1)^2 + 4x[2(x^2+1) \times 2x]}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{-4(x^2+1)^2 + 16x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{-4(x^2+1)[(x^2+1) - 4x^2]}{(x^2+1)^4} = \frac{-4(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3} = \frac{4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \wedge x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$3x^2 - 1$	+	0	-	0	+
$(x^2 + 1)^3$	+	+	+	+	+
Sinal e zeros de f''	+	0	-	0	+
Sentido da concavidade de f		P. I.		P. I.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$ e em $[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$.

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)' = \frac{(x^2)'(x^2-2) - x^2(x^2-2)'}{(x^2-2)^2} = \frac{2x(x^2-2) - x^2 \times 2x}{(x^2-2)^2} = \frac{2x^3 - 4x - 2x^3}{(x^2-2)^2} = \frac{-4x}{(x^2-2)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{-4x}{(x^2-2)^2}\right)' = \frac{(-4x)'(x^2-2)^2 - (-4x)[(x^2-2)^2]'}{(x^2-2)^4} = \frac{-4(x^2-2)^2 + 4x[2(x^2-2) \times 2x]}{(x^2-2)^4} =$$

$$= \frac{-4(x^2-2)^2 + 16x^2(x^2-2)}{(x^2-2)^4} = \frac{-4(x^2-2)[(x^2-2) - 4x^2]}{(x^2-2)^4} = \frac{-4(-3x^2-2)}{(x^2-2)^3} = \frac{4(3x^2+2)}{(x^2-2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4(3x^2+2)}{(x^2-2)^3} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2 = 0 \wedge x^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$3x^2 + 2$	+	+	+	+	+
$(x^2 - 2)^3$	+	0	-	0	+
Sinal e zeros de f''	+	n.d.	-	n.d.	+
Sentido da concavidade de f		n.d.		n.d.	

O sinal de $(x^2 - 2)^3$ é igual ao sinal de $x^2 - 2$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -\sqrt{2}[$ e em $]\sqrt{2}, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

Pág. 66

99. (C)

Se fosse $h''(x) = (x-1)^2$ ou $h''(x) = (x+1)^2$, ter-se-ia $h''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que o gráfico da função h teria a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$; isto exclui as opções (A) e (B).

Se fosse $h''(x) = 1 - x^2$, h'' teria dois zeros, -1 e 1 , e seria positiva no intervalo $]-1, 1[$, pelo que h teria a concavidade voltada para cima no intervalo $[-1, 1]$; isto exclui a opção (D).

O estudo do sinal da função definida por $x^2 - 1$ permite confirmar que se pode ter $h''(x) = x^2 - 1$.

100.

Tem-se $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo a , b e c números reais, com $a \neq 0$.

Então, $f''(x) = 2a$ e, portanto,

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0 \Leftrightarrow a > 0$.

101. a) Como o ponto de coordenadas $(2, -3)$ pertence ao gráfico de f , tem-se $f(2) = -3$.

Como o gráfico de f tem um ponto de inflexão para $x = 2$, tem-se $f''(2) = 0$.

Ora, $f'(x) = (2x^3 + ax^2 + 2b + 1)' = 6x^2 + 2ax$ e $f''(x) = (6x^2 + 2ax)' = 12x + 2a$.

Portanto,

$$\begin{cases} f(2) = -3 \\ f''(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 + 4a + 2b + 1 = -3 \\ 24 + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -20 \\ a = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 28 \\ a = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 14 \\ a = -12 \end{cases}$$

b) Tem-se $f''(x) = 12x - 24$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 12x - 24 < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x - 24 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Portanto, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $] -\infty, 2]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[2, +\infty[$.

102. (B)

Dado que a primeira deriva é positiva em $\mathbb{R}$, a função é crescente; dado que a segunda deriva é negativa em $\mathbb{R}^-$ e é positiva em $\mathbb{R}^+$, o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^-$ e tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}^+$. Somente o gráfico da opção (B) está nestas condições.

103. Para que a função atinja um extremo em 1 igual a 6 tem de se ter $g(1) = 6$ e $g'(1) = 0$.

Para que o gráfico da função tenha um ponto de inflexão com abcissa igual a 3, tem de se ter

$$g''(3) = 0.$$

$$\text{Ora, } g'(x) = (x^3 + ax^2 + bx + c)' = 3x^2 + 2ax + b \text{ e } f''(x) = (3x^2 + 2ax + b)' = 6x + 2a$$

Portanto,

$$\begin{cases} g(1) = 6 \\ g'(1) = 0 \\ g''(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a + b + c = 6 \\ 3 + 2a + b = 0 \\ 18 + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 5 \\ 2a + b = -3 \\ a = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 + b + c = 5 \\ b = 15 \\ a = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ b = 15 \\ a = -9 \end{cases}$$

104. (C)

O ponto A é um ponto de inflexão do gráfico de f , pelo que $f''(4) = 0$.

105. a)

A função é contínua porque é diferenciável e atinge dois extremos relativos porque a derivada tem dois zeros onde muda de sinal.

b)

Existe $c \in]0, a[$ tal que a função derivada é crescente em $[0, c]$ e decrescente em $[c, a]$; portanto, o gráfico de f tem um ponto de inflexão no ponto de abcissa c .

106.

A função f atinge um mínimo em $x = -2$, pois f' anula em -2 e passa de negativa a positiva. O gráfico de f tem dois pontos de inflexão: um de abscissa -1 e outro de abscissa 1 pois, nestes pontos, f' atinge, respetivamente, um máximo e um mínimo relativos.

107. (C)

Tem-se $g'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que a função g é crescente; isto exclui as opções (A) e (B).

Tem-se $g''(x) = [(x+3)^2]' = 2(x+3)(x+3)' = 2(x+3)$.

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

$$g''(x) < 0 \Leftrightarrow 2(x+3) < 0 \Leftrightarrow x < -3$$

$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow 2(x+3) > 0 \Leftrightarrow x > -3$$

Portanto, o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $] -\infty, -3]$, tem a concavidade voltada para cima em $[-3, +\infty[$ e tem um ponto de inflexão com abscissa igual a -3 .

108. a) • Domínio

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

• Pontos de interseção do gráfico com os eixos

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \wedge x \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \wedge x \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$$

O gráfico interseção o eixo Ox no ponto de coordenadas $(-1, 0)$.

$$f(0) = \frac{0^2 + 0 + 1}{2 \times 0 + 1} = 1$$

O gráfico interseção o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 1)$.

• Intervalos de monotonia e extremos relativos

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 1}\right)' = \frac{(x^2 + 2x + 1)' \times (2x + 1) - (x^2 + 2x + 1) \times (2x + 1)'}{(2x + 1)^2} =$$

$$= \frac{(2x + 2)(2x + 1) - 2(x^2 + 2x + 1)}{(2x + 1)^2} = \frac{4x^2 + 6x + 2 - 2x^2 - 4x - 2}{(2x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x}{(2x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 2x}{(2x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x = 0 \wedge x \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x(x + 1) = 0 \wedge x \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
$2x^2 + 2x$	+	0	-	-	-	0	+
$(2x + 1)^2$	+	+	+	0	+	+	+
Sinal e zeros de f'	+	0	-	n.d.	-	0	+
Variação e extremos de f	$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	Mín. rel.	$\nearrow$

f é crescente em $] -\infty, -1]$ e em $[0, +\infty[$ e é decrescente em $[-1, -\frac{1}{2}[$ e em $]-\frac{1}{2}, 0]$.

f atinge um máximo relativo em $x = -1$ e atinge um mínimo relativo em $x = 0$.

● Pontos de inflexão e sentido das concavidades do gráfico

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(\frac{2x^2 + 2x}{(2x+1)^2} \right)' = \frac{(2x^2 + 2x)' \times (2x+1)^2 - (2x^2 + 2x) \times [(2x+1)^2]'}{(2x+1)^4} = \\
 &= \frac{(4x+2) \times (2x+1)^2 - (2x^2 + 2x) \times [2(2x+1) \times 2]}{(2x+1)^4} = \frac{2(2x+1) \times (2x+1)^2 - (2x^2 + 2x) \times [4(2x+1)]}{(2x+1)^4} = \\
 &= \frac{(2x+1)[2(2x+1)^2 - 4(2x^2 + 2x)]}{(2x+1)^4} = \frac{2(4x^2 + 4x + 1) - 4(2x^2 + 2x)}{(2x+1)^3} = \frac{8x^2 + 8x + 2 - 8x^2 - 8x}{(2x+1)^3} = \frac{2}{(2x+1)^3} \\
 f''(x) &= 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(2x+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \\
 f''(x) &< 0 \Leftrightarrow (2x+1)^3 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \\
 f''(x) &> 0 \Leftrightarrow (2x+1)^3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $] -\infty, -\frac{1}{2}[$, tem a concavidade voltada para cima em $] -\frac{1}{2}, +\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

● Assíntotas ao gráfico

Assíntotas verticais:

A função é contínua; portanto, só a reta de equação $x = -\frac{1}{2}$ poderá ser assíntota vertical ao seu

gráfico. Tem-se $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

Portanto, a reta de equação $x = -\frac{1}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Tem-se, ainda: $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

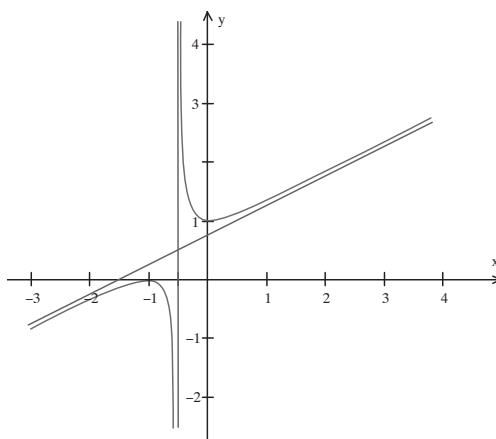
Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 + x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 1} - \frac{x}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 4x + 2 - 2x^2 - x}{2(2x + 1)} \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{4x + 2} &\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

De modo idêntico, se obtém $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \frac{3}{4}$.

Portanto, a reta de equação $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f em $-\infty$ e em $+\infty$.

● Esboço do gráfico



b) • Domínio

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

• Pontos de interseção do gráfico com os eixos

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 3x = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = 0$$

O gráfico intersesta o eixo Ox e o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 0)$.

• Intervalos de monotonia e extremos relativos

$$f'(x) = \left(\frac{3x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(3x)' \times (x-1)^2 - 3x \times [(x-1)^2]'}{(x-1)^4} = \frac{3(x-1)^2 - 3x \times 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3(x-1) - 6x}{(x-1)^3} = \frac{-3x-3}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3x-3}{(x-1)^3} = 0 \Leftrightarrow -3x-3 = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = -1$$

	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$-3x-3$	+	0	-	-	-
$(x-1)^3$	-	-	-	0	+
Sinal e zeros de f'	-	0	+	n.d.	-
Variação e extremos de f	$\searrow$	Mín. rel.	$\nearrow$	n.d.	$\searrow$

A função é decrescente em $] -\infty, -1]$ e em $]1, +\infty[$ e é crescente em $[-1, 1[$.

$f(-1) = -\frac{3}{4}$ é mínimo relativo e não existem máximos relativos.

• Pontos de inflexão e sentido das concavidades do gráfico

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-3x-3}{(x-1)^3}\right)' = \left(-\frac{3x+3}{(x-1)^3}\right)' = -\frac{(3x+3)' \times (x-1)^3 - (3x+3) \times [(x-1)^3]'}{(x-1)^6} = \\ &= -\frac{3(x-1)^3 - (3x+3) \times 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = -\frac{3(x-1)^3 - (3x+3) \times 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = -\frac{3(x-1) - (3x+3) \times 3}{(x-1)^4} = \\ &= -\frac{3x-3-9x-9}{(x-1)^4} = -\frac{-6x-12}{(x-1)^4} = \frac{6x+12}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x+12}{(x-1)^4} = 0 \Leftrightarrow 6x+12 = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = -2$$

	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$6x+12$	-	0	+	+	+
$(x-1)^4$	+	+	+	0	+
Sinal e zeros de f''	-	0	+	n.d.	+
Sentido da concavidade e pontos de inflexão de f		p.i.		n.d.	

O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $] -\infty, -2]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[-2, 1[$ e em $]1, +\infty[$.

O ponto de coordenadas $\left(-2, -\frac{2}{3}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico.

• Assíntotas ao gráfico

Assíntotas verticais:

A função é contínua; portanto, só a reta de equação $x = 1$ poderá ser assíntota vertical ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x}{(x-1)^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\text{Tem-se, ainda: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x}{(x-1)^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

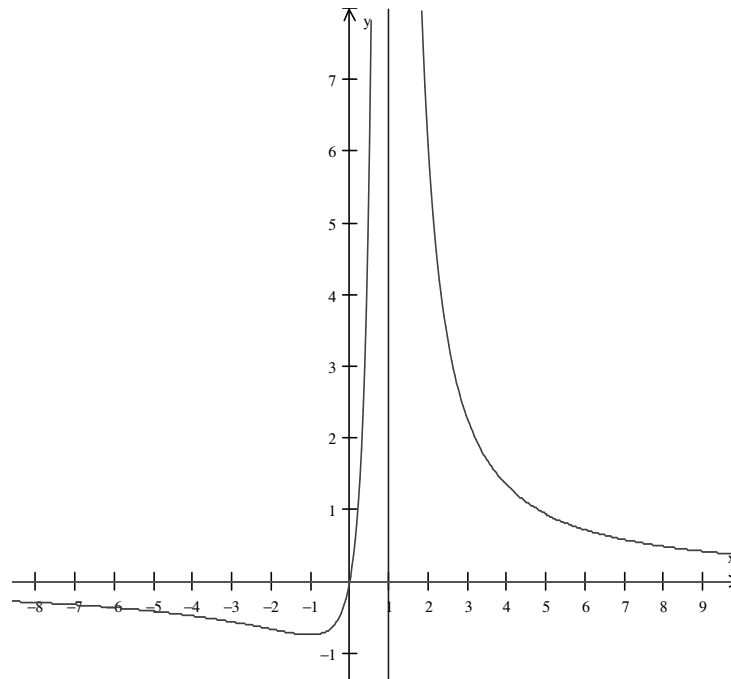
Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{(x-1)^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x^2 - 2x + 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$ e em $+\infty$.

• Esboço do gráfico



c) • Domínio

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

• Pontos de interseção do gráfico com os eixos

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = 0$$

O gráfico intersesta o eixo Ox e o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 0)$.

• Intervalos de monotonia e extremos relativos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{x^2-1} \right)' = \frac{x' \times (x^2-1) - x \times (x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2-1) - x \times (2x)}{(x^2-1)^2} = \\ &= \frac{(x^2-1) - x \times (2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+1=0}_{\text{eq. impossível}} \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Tem-se $f'(x) < 0$, $\forall x \in D_f$ pelo que a função é decrescente em $] -\infty, -1[$, em $] -1, 1[$ e em $] 1, +\infty[$.

A função não tem extremos

• Pontos de inflexão e sentido das concavidades do gráfico

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} \right)' = -\frac{(x^2+1)' \times (x^2-1)^2 - (x^2+1) \times [(x^2-1)^2]'}{(x^2-1)^4} = \\ &= -\frac{2x(x^2-1)^2 - (x^2+1) \times 2(x^2-1) \times 2x}{(x^2-1)^4} = -\frac{(x^2-1)[2x(x^2-1) - 4x(x^2+1)]}{(x^2-1)^4} = -\frac{2x(x^2-1) - 4x(x^2+1)}{(x^2-1)^3} = \\ &= -\frac{2x^3 - 2x - 4x^3 - 4x}{(x^2-1)^3} = -\frac{-2x^3 - 6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2+3) = 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee \underbrace{x^2+3=0}_{\text{eq. impossível}} \right) \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = 0$$

	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 + 3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x^2 - 1)^3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Sinal e zeros de f''	$-$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.	$+$
Sentido da concavidade e pontos de inflexão de f		n.d.		P.I.		n.d.	

O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $] -\infty, -1[$ e em $[0, 1[$ e tem a concavidade voltada para cima em $] -1, 0]$ e em $] 1, +\infty[$.

O ponto de coordenadas $(0, 0)$ é ponto de inflexão do gráfico.

● Assíntotas ao gráfico

Assíntotas verticais:

A função é contínua; portanto, só as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ poderão ser assíntotas verticais ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\text{Tem-se, ainda: } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\text{Tem-se, ainda: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

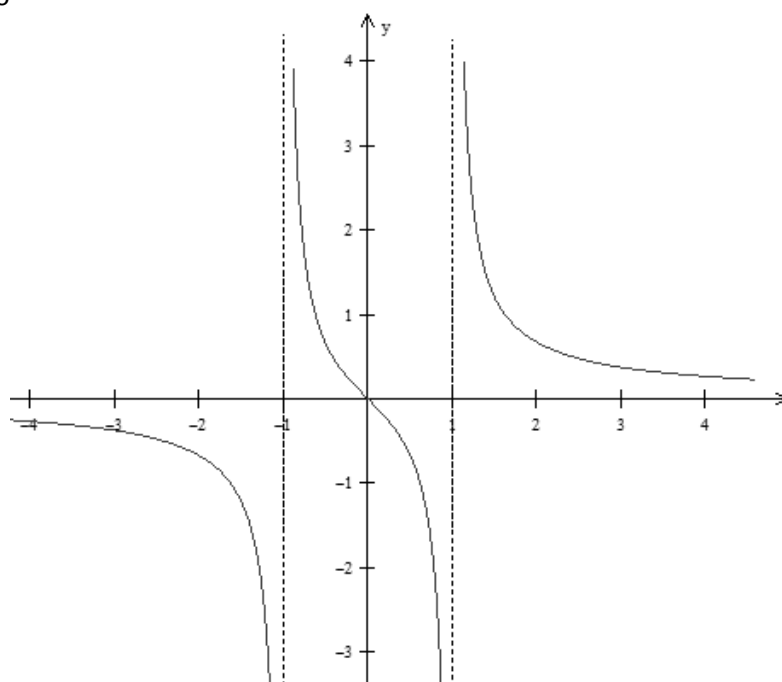
Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\infty - 0} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\infty - 0} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$ e em $+\infty$.

● Esboço do gráfico



d) Tem-se $f(x) = \frac{x}{|x-2|} = f(x) = \begin{cases} \frac{x}{-x+2} & \text{se } x < 2 \\ \frac{x}{x-2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

• Domínio

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

• Pontos de interseção do gráfico com os eixos

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{|x-2|} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x = 0$$

O gráfico intersesta o eixo Ox e o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 0)$.

• Intervalos de monotonia e extremos relativos

Para $x < 2$:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{-x+2}\right)' = \frac{x' \times (-x+2) - x \times (-x+2)'}{(-x+2)^2} = \frac{-x+2+x}{(-x+2)^2} = \frac{2}{(-x+2)^2}$$

Tem-se que, para $x < 2$, f' é sempre positiva, pelo que f é crescente em $] -\infty, 2[$.

Para $x > 2$:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x-2}\right)' = \frac{x' \times (x-2) - x \times (x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2}$$

Tem-se que, para $x > 2$, f' é sempre negativa, pelo que f é decrescente em $]2, +\infty[$.

Não existem extremos.

• Pontos de inflexão e sentido das concavidades do gráfico

Para $x < 2$:

$$f''(x) = \left(\frac{2}{(-x+2)^2}\right)' = \frac{-2 \times [(-x+2)^2]'}{(-x+2)^4} = \frac{-2 \times 2(-x+2)(-x+2)'}{(-x+2)^4} = \frac{4}{(-x+2)^3}$$

Tem-se que, para $x < 2$, f'' é sempre positiva, pelo que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $] -\infty, 2[$.

Para $x > 2$:

$$f''(x) = \left(\frac{-2}{(x-2)^2}\right)' = \frac{2 \times [(x-2)^2]'}{(x-2)^4} = \frac{2 \times 2(x-2)(x-2)'}{(x-2)^4} = \frac{4}{(x-2)^3}$$

Tem-se que, para $x > 2$, f'' é sempre positiva, pelo que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]2, +\infty[$.

Não existem pontos de inflexão do gráfico.

• Assíntotas ao gráfico

Assíntotas verticais:

A função é contínua; portanto, só a reta de equação $x = 2$ poderá ser assíntota vertical ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{-x+2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\text{Tem-se, ainda: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

Assíntotas não verticais:

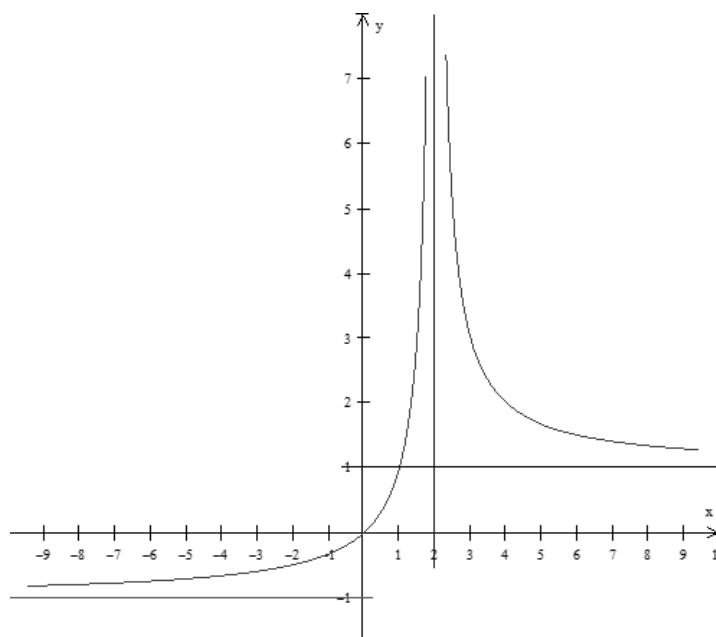
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x+2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

Portanto, a reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Portanto, a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$.

• Esboço do gráfico



e) • Domínio

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

• Pontos de interseção do gráfico com os eixos

Dado que $0 \notin D_f$, o gráfico não intersesta o eixo Oy .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge \sqrt{x^2-1} \neq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Dado que a função não tem zeros, o gráfico não intersesta o eixo Ox .

• Intervalos de monotonia e extremos relativos

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right)' = \frac{x' \times \sqrt{x^2-1} - x \times (\sqrt{x^2-1})'}{x^2-1} = \frac{\sqrt{x^2-1} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{\sqrt{x^2-1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
-3	—				—
$x^2 - 1$	+				+
$\sqrt{x^2 - 1}$	+				+
Sinal e zeros de f'	—				—
Variação e extremos de f	$\searrow$				$\searrow$

A função é decrescente em $] -\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$.

Não existem extremos.

• Pontos de inflexão e sentido das concavidades do gráfico

$$f''(x) = \left(\frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} \right)' = \frac{[(x^2-1)\sqrt{x^2-1}]'}{[(x^2-1)\sqrt{x^2-1}]^2} = \frac{[(x^2-1)\sqrt{x^2-1}]'}{(x^2-1)^2(x^2-1)} = \frac{(x^2-1)'\sqrt{x^2-1} + (x^2-1)(\sqrt{x^2-1})'}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{2x\sqrt{x^2-1} + (x^2-1)\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{(x^2-1)^3} = \frac{2x\sqrt{x^2-1} + \frac{x(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}}{(x^2-1)^3} = \frac{\frac{2x(x^2-1) + x(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}}{(x^2-1)^3} = \frac{3x(x^2-1)}{(x^2-1)^3\sqrt{x^2-1}} = \frac{3x}{(x^2-1)^2\sqrt{x^2-1}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{(x^2-1)^2\sqrt{x^2-1}} = 0 \Leftrightarrow 3x = 0 \wedge x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$3x$	—				+
$(x^2 - 1)^2 \sqrt{x^2 - 1}$	+				+
Sinal e zeros de f''	—				+
Sentido da concavidade e pontos de inflexão de f	$\cap$				$\cup$

O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $] -\infty, -1[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]1, +\infty[$.

Não existem pontos de inflexão do gráfico.

• Assíntotas ao gráfico

Assíntotas verticais:

A função é contínua; portanto, só as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ poderão ser assíntotas verticais ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 0x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = -1 \end{aligned}$$

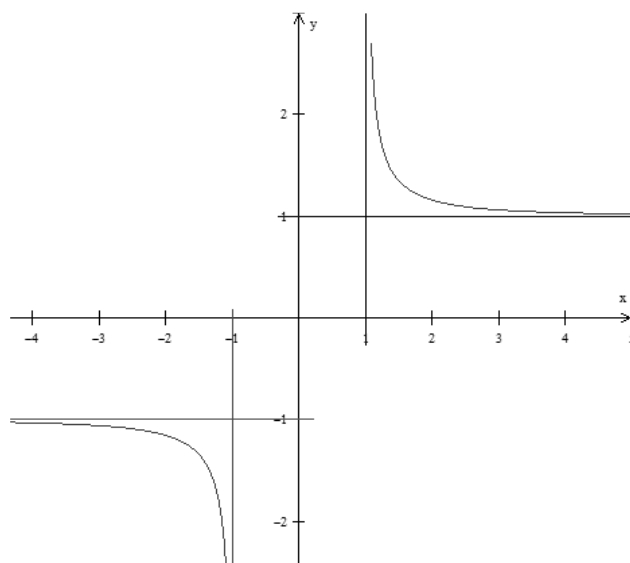
Portanto, a reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 1 \end{aligned}$$

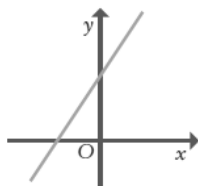
Portanto, a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$.

• Esboço do gráfico



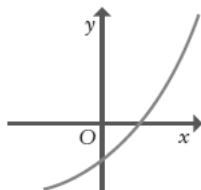
109. a) Dado que a primeira derivada é sempre positiva, a função f é crescente e dado que a segunda derivada é sempre nula, a primeira derivada é constante.

Um possível gráfico da função f é:



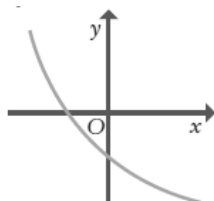
b) Dado que a primeira derivada é sempre positiva, a função f é crescente e dado que a segunda derivada é sempre positiva, o gráfico da função f tem a concavidade sempre voltada para cima.

Um possível gráfico da função f é:



c) Dado que a primeira derivada é sempre negativa, a função f é decrescente e dado que a segunda derivada é sempre positiva, o gráfico da função f tem a concavidade sempre voltada para cima.

Um possível gráfico da função f é:



110. a) Tem-se:

- $f(-1) = \frac{(-1)^3 - 1}{-1 + 2} = -2$, pelo que A é o ponto de coordenadas $(-1, -2)$.

- $f(0) = \frac{0^3 - 1}{0 + 2} = -\frac{1}{2}$, pelo que B é o ponto de coordenadas $(0, -\frac{1}{2})$.

- $m = \frac{-2 - (-\frac{1}{2})}{-1 - 0} = \frac{3}{2}$

b)

A função é diferenciável e contínua em $[-1, 0]$; portanto, o teorema de Lagrange permite concluir que:

$$\exists c \in]-1, 0[: f'(c) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{3}{2}$$

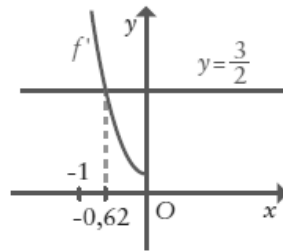
No ponto de abscissa c , a reta tangente tem declive igual ao da reta AB .

c) Uma condição que traduz o problema é $f'(x) = \frac{3}{2} \wedge x \in]-1, 0[$.

Tem-se:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3 - 1}{x + 2} \right)' = \frac{(x^3 - 1)'(x + 2) - (x^3 - 1)(x + 2)'}{(x + 2)^2} = \frac{3x^2(x + 2) - (x^3 - 1)}{(x + 2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3 + 1}{(x + 2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2 + 1}{(x + 2)^2}$$

Com auxílio da calculadora gráfica, pode obter-se a solução da condição, conforme ilustrado na figura seguinte.



111.

Entre dois zeros de P há pelo menos um zero de P' (é uma consequência do teorema de Lagrange). Portanto, P' tem, pelo menos, quatro zeros e não pode ter mais do que quatro zeros porque a função é definida por um polinómio de grau 4.

112.

Suponhamos que c é o maior zero da função derivada e suponhamos que a e b são zeros da função, ambos maiores do que c . Então, entre a e b tem de existir um zero de f' e esse zero é maior do que c , o que é absurdo, pois c é o maior zero da função f' .

+Exercícios Propostos

Pág. 68

113. (C)

Tem-se:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{1-2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{-2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{2}\right) = -\infty$; este resultado permite excluir a opção (A).
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{n}\right) = 0$; este resultado permite excluir a opção (B).
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{+\infty} = 0$; este resultado permite excluir a opção (D).
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$, pelo que, como $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq x_n$, se pode concluir que $\lim u_n = +\infty$.

114. (C)

Dado que $\lim f(x_n) = -\infty$, pode concluir-se que $\lim x_n = +\infty$, pelo que, como $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq x_n$, se pode concluir que $\lim u_n = +\infty$.

115. (C)

Tem-se $-1 \leq -\cos x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - \cos x \leq 3$, pelo que $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2-\cos x} \geq \frac{1}{3}$.

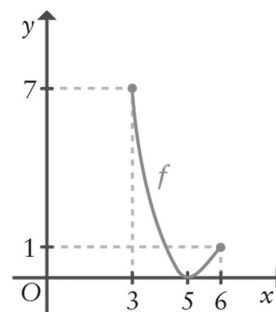
Ora, para $f(x) > 0$, tem-se $\frac{1}{2-\cos x} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{2-\cos x} \geq \frac{f(x)}{3}$.

Como, $\forall x \in \mathbb{R}^-, f(x) > 0$, a opção correta é (C).

116. (D)

O teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que a afirmação da opção (D) é verdadeira.

Na figura ao lado está representado o gráfico de uma função f nas condições do enunciado, para a qual as afirmações das opções (A), (B) e (C) são falsas.



Pág. 69

117. (A)

Dado que a função f é contínua, tem-se $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

Ora,

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{3-\sqrt{9-x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(3+\sqrt{9-x})}{(3-\sqrt{9-x})(3+\sqrt{9-x})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(3+\sqrt{9-x})}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} (3 + \sqrt{9-x}) = 6$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [k(x-2)] = -2k = f(0)$
- $-2k = 6 \Leftrightarrow k = -3$

118. (D)

● Opção (A)

A função f é contínua em $[-2, -1]$.

$$f(-2) = -8 + 2 + 1 = -5 < 2$$

$$f(-1) = -1 + 1 + 1 = -1 < 2$$

O teorema de Bolzano-Cauchy não permite garantir que a equação $f(x) = 2$ tem pelo menos uma solução em $] -2, -1[$.

● Opção (B)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 - x + 1) = 1$$

$$f(0) = 0 + 0 + 3 = 3$$

A função f não é contínua em $[-1, 0]$.

O teorema de Bolzano-Cauchy não permite garantir que a equação $f(x) = 2$ tem pelo menos uma solução em $] -1, 0[$.

● Opção (C)

$$f(0) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + x + 3) = 3$$

A função f é contínua em $[0, 1]$

$$f(0) = 3 > 2$$

$$f(1) = 1 - 1 + 5 = 3 > 2$$

O teorema de Bolzano-Cauchy não permite garantir que a equação $f(x) = 2$ tem pelo menos uma solução em $]0, 1[$.

● Opção (D)

A função f é contínua em $[1, 2]$.

$$f(1) = 3 > 2$$

$$f(2) = 2 - 8 + 5 = -1 < 2$$

O teorema de Bolzano-Cauchy permite garantir que a equação $f(x) = 2$ tem pelo menos uma solução em $]1, 2[$.

119. (B)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x) + 2}{x^2 - 4} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x) - (-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \left[\frac{g(x) - g(-2)}{x - (-2)} \times \frac{1}{x-2} \right] = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x) - g(-2)}{x - (-2)}}_{g'(-2)} \times \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} = g'(-2) \times \frac{1}{-4} = -2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

120. (B)

Nas figuras abaixo estão representados os gráficos de duas funções nas condições do enunciado.

Na figura 1 está representado o gráfico de uma função que permite concluir que as opções (A) e (C) são falsas.

Na figura 2 está representado o gráfico de uma função que permite concluir que a opção (D) é falsa.

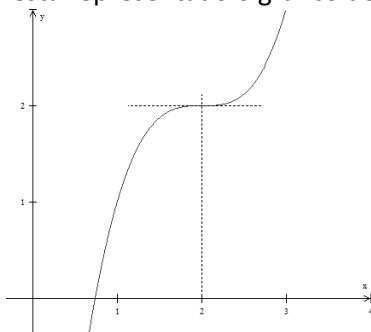


Figura 1

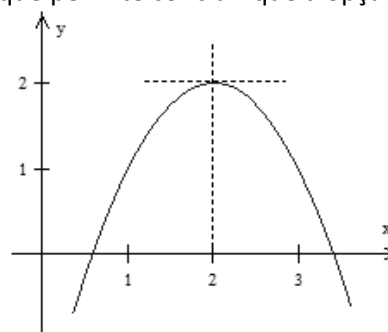
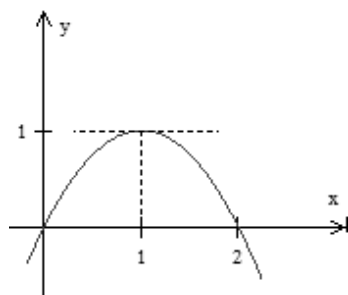


Figura 2

Na verdade, se uma função tem derivada finita (em particular, derivada nula) num ponto, então é contínua nesse ponto.

121. (C)

Na figura abaixo está representado o gráfico de uma função nas condições do enunciado e que permite concluir que as opções (A), (B) e (C) são falsas.



Pág. 70

122. (C)

• Opção (A)

Tem-se $f'(a) > 0$ e $f''(a) = 0$, pelo que $f'(a) \cdot f''(a) = 0$.

• Opção (B)

Tem-se $f'(a) < 0$ e $f''(a) < 0$, pelo que $f'(a) \cdot f''(a) > 0$.

• Opção (C)

Tem-se $f'(a) > 0$ e $f''(a) < 0$, pelo que $f'(a) \cdot f''(a) < 0$.

• Opção (D)

Tem-se $f'(a) > 0$ e $f''(a) > 0$, pelo que $f'(a) \cdot f''(a) > 0$.

123. (C)

Tem-se $g(a) > 0$, $g'(a) < 0$ e $g''(a) < 0$, pelo que $g(a) \cdot g''(a) < 0$

124. (B)

Para $n = 1$, vem $f'(x) = x - 1$, pelo que se tem o seguinte quadro de variação de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Sinal e zeros de $f'(x)$		0	+
Variação e extremos de f		↘ Mín. abs.	↗

Para $n = 2$, vem $f'(x) = (x - 1)^2$, pelo que, se tem o seguinte quadro de variação de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Sinal e zeros de $f'(x)$		0	+
Variação e extremos de f		↗	↗

As opções (A) e (D) estão excluídas.

Ora, $f''(x) = [(x - 1)^n]' = n(x - 1)^{n-1}(x - 1)' = n(x - 1)^{n-1}$

Para $n = 2$, vem $f''(x) = 2(x - 1)$, pelo que se tem o seguinte quadro de sentido de concavidades do gráfico de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Sinal e zeros de $f''(x)$		0	+
Sentido de concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	↖	P. I.	↗

Para $n = 3$, vem $f''(x) = 3(x - 1)^2$, pelo que se tem o seguinte quadro de sentido de concavidades do gráfico de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Sinal e zeros de $f''(x)$		0	+
Sentido de concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f			

A opção (C) está excluída.

125. a) O teorema 2. de comparação para sucessões permite concluir que a proposição é verdadeira.

b) A proposição é falsa.

Tem-se, por exemplo, para $a_n = n^2$ e $u_n = -n$: $\lim a_n = +\infty$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < a_n$, mas u_n não tende para $+\infty$.

c) A proposição é falsa.

Tem-se, por exemplo, para $b_n = -n$ e $u_n = -n + 1$: $\lim b_n = -\infty$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > b_n$, mas u_n tende para $-\infty$.

d) O teorema 3. de comparação para sucessões permite concluir que a proposição é verdadeira.

Pág. 71

126. a) A proposição é falsa.

Tem-se, por exemplo, para $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = -1 - \frac{1}{n}$ e $c_n = \frac{(-1)^n}{2}$: $a = 1$, $b = -1$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq c_n \leq b_n$, mas (c_n) não é convergente.

b) A proposição é falsa.

Tem-se, por exemplo, para $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = -1 - \frac{1}{n}$ e $c_n = 1 - \frac{1}{n}$: $a = 1$, $b = -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq c_n \leq b_n$, (c_n) é convergente mas $\lim c_n \neq \frac{-1+1}{2} = 0$.

c) O teorema 1. de comparação para sucessões permite concluir que a proposição é verdadeira.

127. a) $\lim \frac{3n+1}{n+3} = \lim \frac{3n}{n} = 3$

b) Tem-se $\frac{3n+1}{n+3} = 3 - \frac{8}{n+3}$ pelo que a sucessão de termo geral $\frac{3n+1}{n+3}$ é crescente; então, tem-se $\forall n \geq 2$, $\frac{3n+1}{n+3} \geq \frac{3 \times 2 + 1}{2+3} = \frac{7}{5}$

Portanto, como se tem $\forall n \geq 2$, $\left(\frac{3n+1}{n+3}\right)^n > \left(\frac{7}{5}\right)^n$ e $\lim \left(\frac{7}{5}\right)^n = +\infty$, pode-se concluir que

$$\lim \left(\frac{3n+1}{n+3}\right)^n = +\infty.$$

c) Tem-se $\sin n \geq -1 \Leftrightarrow n + \sin n \geq n - 1 \Leftrightarrow \frac{n + \sin n}{2} \geq \frac{n-1}{2}$.

Portanto, como se tem $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n + \sin n}{2} \geq \frac{n-1}{2}$ e $\lim \frac{n-1}{2} = +\infty$, pode-se concluir que $\lim \frac{n + \sin n}{2} = +\infty$.

d) $\lim \frac{n^2+1}{1-2n^2} = \lim \frac{n^2}{-2n^2} = -\frac{1}{2}$

e) $\lim \frac{2^{n+1} + \pi}{3^n} = \lim \frac{2 \times 2^n}{3^n} + \lim \frac{\pi}{3^n} = \lim \left[2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] + \lim \frac{\pi}{3^n} = 2 \times 0 + 0 = 0$

f) Tem-se:

$$\sum_{i=1}^n \frac{2i-3}{2n^2+1} = \frac{1}{2n^2+1} \times \sum_{i=1}^n (2i-3) = \frac{1}{2n^2+1} \times \left(\frac{-1+2n-3}{2} \times n \right) = \frac{n^2-2n}{2n^2+1}$$

Então:

$$\lim \sum_{k=1}^n \frac{2i-3}{2n^2+1} = \lim \frac{n^2-2n}{2n^2+1} = \lim \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

g) Seja (w_n) a sucessão definida por $w_n = \sum_{i=0}^n \frac{n}{n^2+2i}$.

w_n é a soma de $n+1$ parcelas, das quais a menor é aquela em que i toma o valor n , ou seja, $\frac{n}{n^2+2n}$, o que é igual a $\frac{1}{n+2}$, e a maior é aquela em que i toma o valor 0 , ou seja, $\frac{n}{n^2}$, o que é igual a $\frac{1}{n}$.

Então, tem-se $(n+1) \times \frac{1}{n+2} \leq w_n \leq (n+1) \times \frac{1}{n}$.

Portanto, como se tem $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq w_n \leq \frac{n+1}{n}$ e $\lim \frac{n+1}{n+2} = \lim \frac{n+1}{n} = 1$, pode-se concluir que $\lim w_n = 1$.

h) Tem-se:

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 + \cos n \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1 + \cos n}{3} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 0 \leq \left(\frac{1 + \cos n}{3} \right)^n \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

Portanto, como se tem $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \left(\frac{1 + \cos n}{3} \right)^n \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n$ e $\lim 0 = \lim \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$, pode-se concluir que $\lim \left(\frac{1 + \cos n}{3} \right)^n = 0$.

i) Como $1 - 2n^2 < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, tem-se $\frac{n^2+1}{1-2n^2} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Por outro lado, tem-se $\frac{n^2+1}{1-2n^2} = -\frac{1}{2} + \frac{3/2}{1-2n^2} = -\frac{1}{2} - \frac{3/2}{2n^2-1}$, pelo que a sucessão de termo geral $\frac{n^2+1}{1-2n^2}$ é crescente; então, tem-se $\forall n \geq 2, \frac{n^2+1}{1-2n^2} \geq -\frac{5}{7}$.

Portanto, $\forall n \geq 2, -\frac{5}{7} \leq \frac{n^2+1}{1-2n^2} < 0$ e, então, $\forall n \geq 2, \left| \frac{n^2+1}{1-2n^2} \right| \leq \frac{5}{7}$.

Portanto, como se tem $\forall n \geq 2, 0 < \left| \frac{n^2+1}{1-2n^2} \right| \leq \left(\frac{5}{7} \right)^n$ e $\lim \left(\frac{5}{7} \right)^n = 0$, pode-se concluir que

$\lim \left| \frac{n^2+1}{1-2n^2} \right| = 0$ e, portanto, $\lim \left(\frac{n^2+1}{1-2n^2} \right)^n = 0$.

j) Tem-se:

$$\sum_{i=0}^n \frac{2^n}{2^i} = 2^n \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} = 2^n \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Ora,

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

é a soma dos $n + 1$ primeiros termos da progressão geométrica cujo primeiro termo é $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ e cuja razão é igual a $\frac{1}{2}$, pelo que:

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2 - \frac{2}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{2^n}{2^i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^n \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2^n \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{n+1} - 1) = +\infty$$

128. Tem-se $2^n \geq n^2 \Leftrightarrow \frac{n^2}{3^n} \leq \frac{2^n}{3^n} \Leftrightarrow \frac{n^2}{3^n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Portanto, como se tem $\forall n \geq 4, 0 \leq \frac{n^2}{3^n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, pode-se concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$.

129.

De $f(x) = \frac{1}{x}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$, conclui-se que $x_n \rightarrow 0^+$.

Então, dado que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq x_n$, o teorema das sucessões encastradas permite concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

130. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{x^2 + 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2} = \frac{1 + 1}{0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 3x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{x} = \frac{6}{3} = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}\right) = -\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{2x-1}}{x^3-1} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{2x-1})(1 + \sqrt{2x-1})}{(x^3-1)(1 + \sqrt{2x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - (2x-1)}{(x^3-1)(1 + \sqrt{2x-1})} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)}{(x^3-1)(1 + \sqrt{2x-1})} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)(1 + \sqrt{2x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x^2+x+1)(1 + \sqrt{2x-1})} = \frac{-2}{3 \times 2} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{4-x^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Pág. 72

131.

Dado que a função f é limitada, existe $M > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$.

$$|f(x)| \leq M \implies |f(x)| \times |g(x)| \leq M \times |g(x)| \iff$$

$$\iff |f(x) \times g(x)| \leq M \times |g(x)|$$

Seja h a função definida por $h(x) = M \times |g(x)|$.

Tem-se $|f(x) \times g(x)| \leq h(x)$, ou seja,

$$-h(x) \leq f(x) \times g(x) \leq h(x) \text{ com}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} (M \times |g(x)|) =$$

$$= M \times \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = M \times 0 = 0.$$

Por aplicação do teorema das funções encastradas, conclui-se que:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = 0$$

132. a)

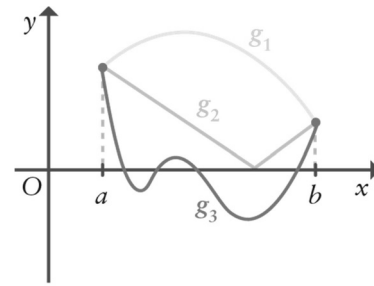
$$\forall x < 0, \frac{2x^2}{x + \sin x} \leq \frac{2x^2}{x-1} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = -\infty, \quad \text{portanto,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x + \sin x} = -\infty$$

b)

$$\forall x > 1, \frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x + \sin x}{x + \cos x} \leq \frac{x+1}{x-1}; \text{ então, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = 1 \text{ pois } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$$

133. a₁) Por aplicação do corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, pode-se concluir que g tem pelo menos um zero em $]a, b[$.

a₂) Tal como a figura ao lado pretende ilustrar, nada se pode concluir relativamente ao número de zeros da função: as funções g_1 , g_2 e g_3 estão, todas, nas condições do enunciado e, em $]a, b[$, g_1 não tem zeros, g_2 tem um zero e g_3 tem quatro zeros.



b₁) Por aplicação do corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, pode-se concluir que g tem pelo menos um zero em $]a, b[$; por outro lado, como a função g é injetiva, ela tem, no máximo um zero no intervalo. Portanto g tem um e um só zero em $]a, b[$.

b₂) Como a função g é injetiva, tem que ser $g(a) \neq g(b)$; suponhamos, por exemplo, que se tem $0 < g(a) < g(b)$.

Se, neste caso, g admitisse um zero, x_0 , em $]a, b[$, então, por aplicação do teorema de Bolzano-Cauchy, poder-se-ia concluir que existiria pelo menos um $c \in]x_0, b[$ para o qual se teria $g(c) = g(a)$, o que é absurdo pois g é injetiva. Portanto, g não tem zeros em $]a, b[$.

134. a)

Dado que $g(1) = -2$, $g(2) = 3$ e que a função é contínua em $[1, 2]$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que a função tem pelo menos um zero no intervalo $]1, 2[$.

Dado que $g'(x) = 3x^2 - 2$, a derivada é positiva em $[1, 2]$ e, portanto, a função não pode ter mais do que um zero no intervalo $]1, 2[$.

b)

$g(1,5) = -0,625$; portanto, o zero da função pertence ao intervalo $]1,5; 2[$;

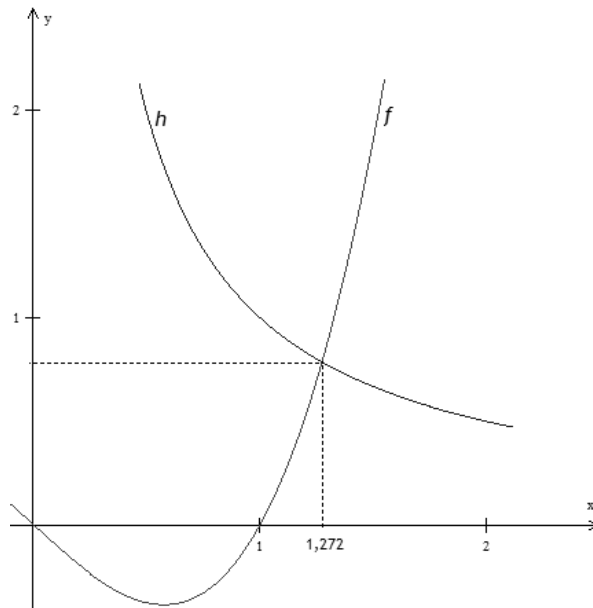
$g(1,7) = 0,513$; portanto o zero da função pertence ao intervalo $]1,5; 1,7[$. Então, 1,6 é um valor aproximado do zero de g com erro inferior a 0,1.

135. a)

Seja g a função definida por

$g(x) = x^3 - x - \frac{1}{x}$. A função g é contínua em $[1, 2]$, $g(1) = -1$ e $g(2) = \frac{11}{2}$; portanto, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists x \in]1, 2[: g(x) = 0$, ou seja, $\exists x \in]1, 2[: f(x) = \frac{1}{x}$.

b) Esboçando, sobrepostos, os gráficos da função f e da função h , definida por $h(x) = \frac{1}{x}$, pode obter-se a abscissa, x_0 , do ponto de interseção; tem-se $x_0 \approx 1,3$.

**136.**

Seja h a função definida por

$h(x) = g(x) - x - 1$. Tem-se:

- $h(a) = g(a) - a - 1 > 0$, pois $g(a) > a + 1$
- $h(g(a)) = g(g(a)) - g(a) - 1 = a - g(a) - 1 < 0$,
pois $g(a) > a + 1 \Leftrightarrow g(a) - a > 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -g(a) + a < -1 \Leftrightarrow -g(a) + a - 1 < -2$

Como a função h é contínua em $[a, g(a)]$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists x \in]a, g(a)[: h(x) = 0$, ou seja, a equação $g(x) = x + 1$ é possível no intervalo $]a, g(a)[$.

137.

O teorema de Weierstrass permite concluir que a função atinge um máximo e um mínimo em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, pois é contínua nesse intervalo.

Com efeito,

• a função é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, pois resulta de operações entre funções contínuas;

• a função é contínua em $\frac{\pi}{4}$, pois

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} \frac{x}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\pi}{4}}{+\infty} = 0 \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} 0 = 0$$

Pág. 73

138. a)

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2}}{x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2 - \sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}(x+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \times \\ &\times \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(2 - \sqrt{1-x})(2 + \sqrt{1-x})}{(x+3)(2 + \sqrt{1-x})} = \\ &= \frac{1}{4} \times \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4 - (1-x)}{(x+3)(2 + \sqrt{1-x})} = \\ &= \frac{1}{4} \times \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3+x}{(x+3)(2 + \sqrt{1-x})} = \\ &= \frac{1}{4} \times \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(2 + \sqrt{1-x})} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

b) Tem-se $f(-3) = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$, pelo que a reta passa pelo ponto de coordenadas $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$.

$$m = f'(-3) = \frac{1}{16}$$

$$y - f(-3) = f'(-3)[x - (-3)] \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{1}{16}(x + 3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{16}x + \frac{11}{16}$$

139. a) • Tem-se $f'(x) = \left(x^3 - \frac{2}{x}\right)' = 3x^2 - 2\left(\frac{1}{x}\right)' = 3x^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3x^2 + \frac{2}{x^2}$, pelo que $f'(1) = 3 + 2 = 5$.

• O ponto de coordenadas $(1, g(1))$ pertence à reta de equação $y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$; portanto, $g(1) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2$.

• $g'(1)$ é o declive da reta de equação $y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$; portanto, $g'(1) = \frac{1}{2}$.

$$\text{b) } (f \times g)'(1) = f'(1) \times g(1) + f(1) \times g'(1) = 5 \times (-2) + (-1) \times \frac{1}{2} = -10 - \frac{1}{2} = -\frac{21}{2}$$

$$\text{c) } (g^3)'(1) = 3g^2(1) \times g'(1) = 3 \times (-2)^2 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$\text{d) } (f \circ g)'(1) = g'(1) \times f'[g(1)] = g'(1) \times f'(-2) = \frac{1}{2} \times \left(12 + \frac{1}{2}\right) = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\text{140. a) } f'(x) = \left(\frac{5x^2 - x^3}{3}\right)' = \left(\frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{10}{3}x - x^2$$

$$f''(x) = \left(\frac{10}{3}x - x^2\right)' = \frac{10}{3} - 2x$$

$$\text{b) } f'(x) = \left(\frac{2x}{x+1}\right)' = \frac{(2x)'(x+1) - 2x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \left[\frac{2}{(x+1)^2}\right]' = \frac{-2[(x+1)^2]'}{(x+1)^4} = \frac{-2 \times 2(x+1)}{(x+1)^4} = -\frac{4}{(x+1)^3}$$

$$\text{c) } f'(x) = (\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f''(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)' = \frac{x'(\sqrt{x^2 + 1}) - x(\sqrt{x^2 + 1})'}{(\sqrt{x^2 + 1})^2} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{\frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{d) } f'(x) = \left(\frac{3-x}{x^2+1}\right)' = \frac{(3-x)'(x^2+1) - (3-x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x^2+1) - 2x(3-x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-1-6x+2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-6x-1}{(x^2+1)^2}$$

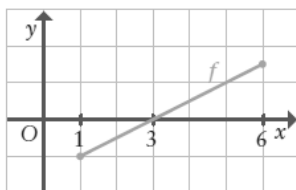
$$f''(x) = \left(\frac{x^2-6x-1}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{(x^2-6x-1)'(x^2+1)^2 - (x^2-6x-1)[(x^2+1)^2]'}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(2x-6)(x^2+1)^2 - (x^2-6x-1)[2(x^2+1)(x^2+1)']}{(x^2+1)^4} = \frac{(2x-6)(x^2+1)^2 - (x^2-6x-1)[4x(x^2+1)]}{(x^2+1)^4} =$$

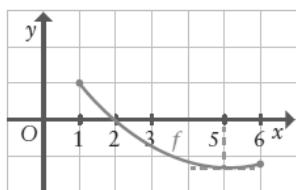
$$= \frac{(2x-6)(x^2+1) - 4x(x^2-6x-1)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3+2x-6x^2-6-4x^3+24x^2+4x}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^3+18x^2+6x-6}{(x^2+1)^3}$$

141.

a) Por exemplo:



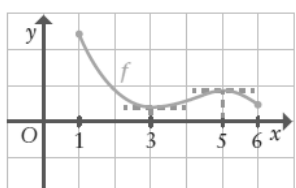
b) Por exemplo:



c)

Não é possível, pois entre dois zeros da função teria de existir pelo menos um zero da derivada.

d) Por exemplo:



142. $P'(x) = (18x^6 - 3x^4 + 0,1)' = 108x^5 - 12x^3$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 108x^5 - 12x^3 = 0 \Leftrightarrow 12x^3(9x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 = 0 \vee 9x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{3}$$

Quadro de variação e extremos de P em $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$:

x	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$
$12x^3$	+	+	+
$9x^2 - 1$	0	+	+
Sinal e zeros de P'	0	+	+
Variação e extremos de P	Mínimo absoluto	↗	Máximo absoluto

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3^4} + 0,1 > 0$$

Como P é crescente em $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ e $P\left(\frac{1}{3}\right) > 0$, P não tem zeros em $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

143. a) Uma condição que traduz o problema é $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$

Ora, $f'(x) = (ax^3 + bx^2 - 3x + 1)' = 3ax^2 + 2bx - 3$.

Portanto, tem-se:

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b - 3 = 0 \\ -a + b + 4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 3 \\ -a + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 3 \\ -3a + 3b = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ b = -6 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -6 \\ -a - 6 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6 \\ a = -3 \end{cases}$$

b) • Intervalos de monotonia e extremos relativos

$$f'(x) = -9x^2 - 12x - 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -9x^2 - 12x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
Sinal e zeros de f'		0	$+$	0	
Variação e extremos de f		Mín. relativo $f(-1) = 1$		Máx. relativo $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$	

f é decrescente em $] -\infty, -1]$ e em $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$ e é crescente em $\left[-1, -\frac{1}{3}\right]$.

f atinge um mínimo relativo igual a 1 em -1 e atinge um máximo relativo igual a $\frac{13}{9}$ em $-\frac{1}{3}$.

• Pontos de inflexão e sentido das concavidades do gráfico

$$f''(x) = (-9x^2 - 12x - 3)' = -18x - 12$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -18x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow -18x - 12 < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -18x - 12 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right[$ e tem a concavidade voltada para cima em $] -\infty, -\frac{2}{3}]$.

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{11}{9}$; o ponto de coordenadas $\left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{9}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico.

Pág. 74

144. $D_g = \mathbb{R}$; g é contínua em $\mathbb{R}$ pelo que o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

$g(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1} = 2 - \frac{1}{x^2+1}$, pelo que, como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 2$, a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de g , tanto em $-\infty$ quanto em $+\infty$, tendo-se, para além disso,
 $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 2$.

Ora:

$$g'(x) = \left(2 - \frac{1}{x^2+1}\right)' = -\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = -\left(-\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\right) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \wedge x^2 + 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} (x^2+1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ 2x < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x < 0$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

g é decrescente em $] -\infty, 0]$ e é crescente em $[0, +\infty[$.

g atinge um mínimo absoluto igual a 1 em 0 .

Portanto, tem-se $D'_g = [1, 2[$.

145. a) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$

b)

x	$-\infty$	0		2		6	$+\infty$
Sinal e zeros de f	—	0	—	—	—	0	+
Sinal e zeros de f''	—	—	—	0	+	+	+
Sinal e zeros de $f \times f''$	+	0	+	0	—	0	+

$f(x) \times f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2] \cup [6, +\infty[$

146. a) Dos pontos assinalados, aquele que tem maior ordenada é x_1 , pelo que, de entre esses valores, é para x_1 que h' toma o maior valor.

b) Dos pontos assinalados, aqueles em que se tem h' se anula, trocando de sinal, são x_4 e x_6 .

c) Dos pontos assinalados, aqueles em que h'' é positiva, são aqueles em que a reta tangente ao gráfico de h' tem declive positivo, ou seja, x_6 e x_7 .

147.

O gráfico da função tem um ponto de inflexão com abcissa igual a 2, pois 2 é zero da função f'' e f'' muda de sinal em 2; f' é crescente em $]-\infty, 2]$ e é decrescente em $[2, +\infty[$; portanto, f' tem, no máximo, um zero em cada um destes intervalos. Assim, a função f não pode ter mais do que um mínimo relativo e um máximo relativo (pode não ter nem mínimo nem máximo).

Pág. 75

148. a) A aceleração é dada por $\frac{5000 \text{ m s}^{-1} - 1000 \text{ m s}^{-1}}{0,001 \text{ s}} = 4\,000\,000 \text{ m s}^{-2} = 4 \times 10^6 \text{ m s}^{-2}$

b) $e = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 1000 \text{ m s}^{-1} \times 0,001 \text{ s} + \frac{1}{2} \times 4 \times 10^6 \text{ m s}^{-2} \times 0,001^2 \text{ s}^2 =$
 $= (1000 \times 0,001) \text{ m} + 2 \times 10^6 \times 10^{-6} \text{ m} = 1 \text{ m} + 2 \text{ m} = 3 \text{ m}$

149. a) • Domínio

Tem-se $D_f = \mathbb{R}$, pois f é uma função polinomial.

• Pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados

$f(0) = \frac{0}{4} - 0 + 4 = 4$, pelo que o gráfico interseja o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 4)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4 = 0 \xLeftrightarrow[y=x^2]{\frac{1}{4}y^2 - 2y + 4 = 0} \Leftrightarrow y = 4 \xLeftrightarrow[y=x^2]{x^2 = 4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$, pelo que o gráfico interseja o eixo Ox nos pontos de coordenadas $(-2, 0)$ e $(2, 0)$.

• Intervalos de monotonia e extremos relativos

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4\right)' = x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Sinal e zeros de f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Variação e extremos de f	$\searrow$	Mín. absoluto	$\nearrow$	Máx. relativo	$\searrow$	Mín. absoluto	$\nearrow$

$$f(-2) = 0$$

$$f(0) = 4$$

$$f(2) = 0$$

f é decrescente em $] -\infty, -2]$ e em $[0, 2]$ e é crescente em $[-2, 0]$ e em $[2, +\infty[$.

f atinge um mínimo absoluto igual a 0 em -2 e em 2 e atinge um máximo relativo igual a 4 em 0 .

• Pontos de inflexão e sentido das concavidades do gráfico

$$f''(x) = (x^3 - 4x)' = 3x^2 - 4$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
Sinal e zeros de f''	$+$	0	$-$	0	$+$
Sentido da concavidade de f		P.I.		P.I.	

$$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{28}{9}$$

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{28}{9}$$

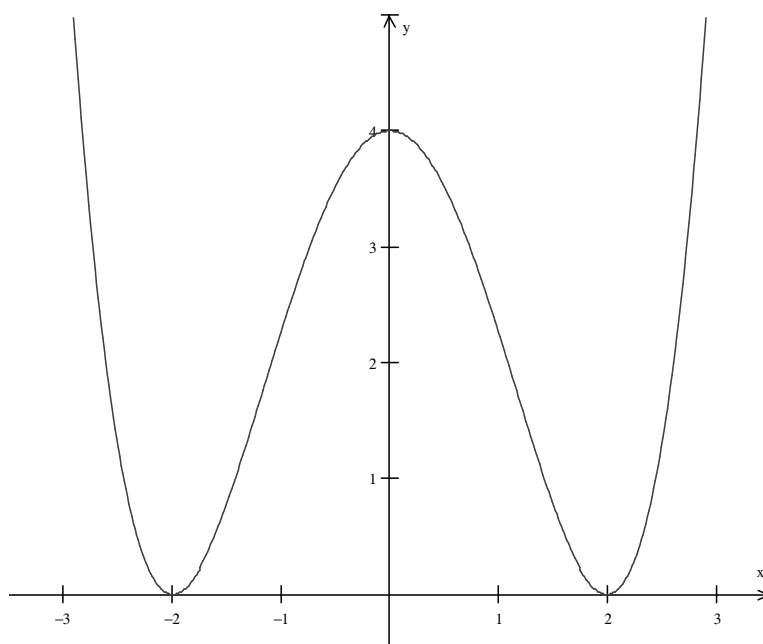
O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}]$ e em $[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}]$

Os pontos de coordenadas $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{28}{9})$ e $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{28}{9})$ são pontos de inflexão do gráfico.

• Assíntotas ao gráfico

f é uma função polinomial de grau superior ao primeiro, pelo que não existem assíntotas verticais ao gráfico.

• Esboço do gráfico



b) • Domínio

Tem-se $D_f = \mathbb{R}$, pois $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$.

• Pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados

$f(0) = \frac{4 \times 0}{1+0} = 0$, pelo que o gráfico interseja ambos os eixos no ponto de coordenadas $(0, 0)$.

• Intervalos de monotonia e extremos relativos

$$f'(x) = \left(\frac{4x}{x^2+1} \right)' = \frac{(4x)'(x^2+1) - 4x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2+4-8x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 4 = 0 \wedge x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$-4x^2 + 4$	$-$	0	$+$	0	$-$
$(x^2 + 1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Sinal e zeros de f'	$-$	0	$+$	0	$-$
Variação e extremos de f	$\searrow$	Mín. relativo	$\nearrow$	Máx. relativo	$\searrow$

$$f(-1) = -2$$

$$f(1) = 2$$

f é decrescente em $] -\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e é crescente em $[-1, 1]$.

f atinge um mínimo relativo igual a -2 em -1 e atinge um máximo relativo igual a 2 em 1 .

• Pontos de inflexão e sentido das concavidades do gráfico

$$f''(x) = \left(\frac{4-4x^2}{(x^2+1)^2} \right)' = \frac{(4-4x^2)'(x^2+1)^2 - (4-4x^2)[(x^2+1)^2]'}{(x^2+1)^4} = \frac{-8x(x^2+1)^2 - (4-4x^2)[2(x^2+1)2x]}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-8x(x^2+1)^2 - (4-4x^2)4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{-8x(x^2+1) - (4-4x^2)4x}{(x^2+1)^3} = \frac{8x^3-24x}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8x^3-24x}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow 8x^3 - 24x = 0 \wedge x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow 8x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$8x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x^2 + 1)^3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Sinal e zeros de f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Sentido da concavidade de f		P.I.		P.I.		P.I.	
$f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$ $f(0) = 0$ $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$							

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $] -\infty, -\sqrt{3}]$ e em $[0, \sqrt{3}]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[-\sqrt{3}, 0]$ e em $[\sqrt{3}, +\infty[$.

Os pontos de coordenadas $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $(0, 0)$ e $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ são pontos de inflexão do gráfico.

● Assíntotas ao gráfico

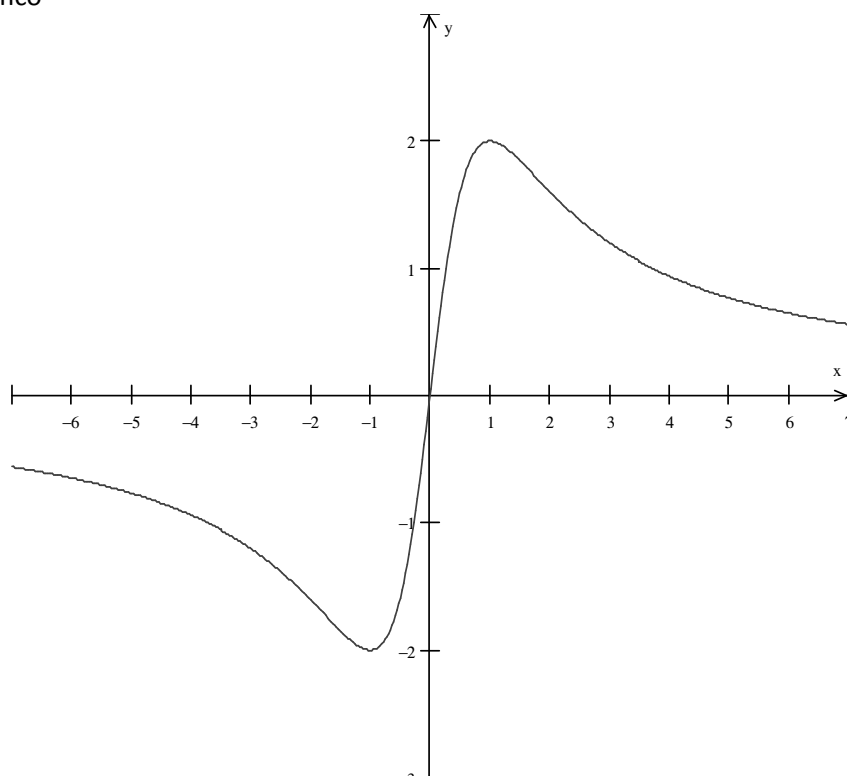
Assíntotas verticais: a função tem domínio $\mathbb{R}$ e é contínua, pelo que não existem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$ e em $+\infty$.

● Esboço do gráfico



c) • Domínio

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 > 0\} =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

• Pontos de interseção do gráfico com os eixos

Dado que $0 \notin D_f$, o gráfico não intersesta o eixo Oy .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge \sqrt{x^2-4} \neq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Dado que a função não tem zeros, o gráfico não intersesta o eixo Ox .

• Intervalos de monotonia e extremos relativos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} \right)' = \frac{(x^2)' \times \sqrt{x^2-4} - x^2 \times (\sqrt{x^2-4})'}{x^2-4} = \frac{2x \sqrt{x^2-4} - x^2 \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{2x \sqrt{x^2-4} - \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \\ &= \frac{\frac{2x(x^2-4) - x^3}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{x^3 - 8x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} = \frac{x(x^2-8)}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x^2-8)}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} = 0 \Leftrightarrow x(x^2-8) = 0 \wedge x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2\sqrt{2} \vee x = 2\sqrt{2}$$

	$-\infty$	$-2\sqrt{2}$		-2		2		$2\sqrt{2}$	$+\infty$
x	—	—	—				+	+	+
$x^2 - 8$	+	0	—				—	0	+
$x^2 - 4$	+	+	+				+	+	+
$\sqrt{x^2 - 4}$	+	+	+				+	+	+
Sinal e zeros de f'	—	0	+				—	0	+
Variação e extremos de f	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$				$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

$$f(-2\sqrt{2}) = 4$$

$$f(2\sqrt{2}) = 4$$

A função é decrescente em $]-\infty, -2\sqrt{2}]$ e em $]2, 2\sqrt{2}]$ e é crescente em $[-2\sqrt{2}, -2[$ e em $[2\sqrt{2}, +\infty[$.

A função atinge um mínimo absoluto igual a 4 em $-2\sqrt{2}$ e em $2\sqrt{2}$.

• Pontos de inflexão e sentido das concavidades do gráfico

$$f''(x) = \left(\frac{x^3 - 8x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} \right)'$$

$$= \frac{(x^3-8x)'(x^2-4)\sqrt{x^2-4} - (x^3-8x)[(x^2-4)\sqrt{x^2-4}]'}{(x^2-4)^3} = \quad \quad \quad |[(x^2-4)\sqrt{x^2-4}]' = [(x^2-4)^{\frac{3}{2}}]' =$$

$$= \frac{3}{2}(x^2-4)^{\frac{1}{2}} \times (2x) = 3x\sqrt{x^2-4}$$

$$= \frac{(3x^2-8)(x^2-4)\sqrt{x^2-4} - (x^3-8x)(3x\sqrt{x^2-4})}{(x^2-4)^3} = \frac{\sqrt{x^2-4} \times [(3x^2-8)(x^2-4) - 3x(x^3-8x)]}{(x^2-4)^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-4} \times (4x^2+32)}{(x^2-4)^3} = \frac{4x^2+32}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+32}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} = 0 \Leftrightarrow 4x^2+32 = 0 \wedge x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in D_f$$

O gráfico tem a concavidade voltada para cima no seu domínio e não existem pontos de inflexão do gráfico.

• Assíntotas ao gráfico

Assíntotas verticais:

A função é contínua; portanto, só as retas de equações $x = -2$ e $x = 2$ poderão ser assíntotas verticais ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -2$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

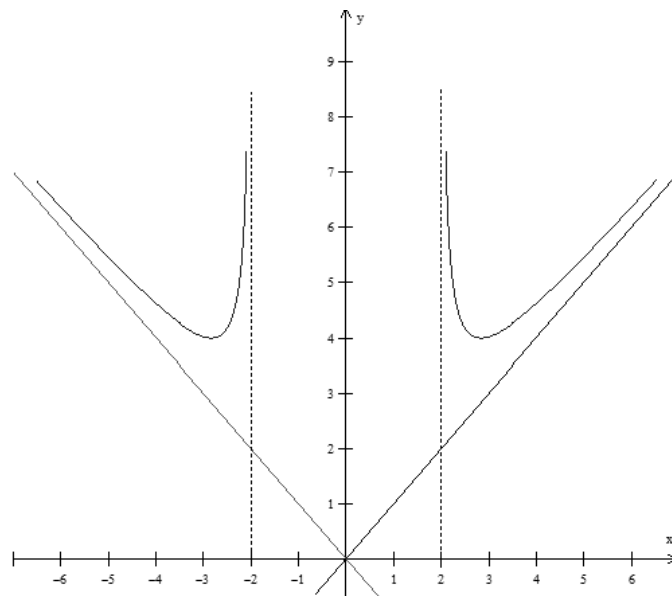
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-1)x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} + x \right] \stackrel{\infty - \infty}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4} + x}{\sqrt{x^2 - 4}} \right) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^4}{x^2 - 4}} + x \right) \left(\sqrt{\frac{x^4}{x^2 - 4}} - x \right)}{\sqrt{\frac{x^4}{x^2 - 4}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^4}{x^2 - 4} - x^2}{\sqrt{\frac{x^4}{x^2 - 4}} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4x^2}{x^2 - 4}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^2 - 4}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{16}{x^2 - 4}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^2 - 4}} - x} = \frac{4 + 0}{+\infty - (-\infty)} = \frac{4}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = -x$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$.

De modo idêntico se pode concluir que a reta de equação $y = x$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$.

● Esboço do gráfico



d) ● Domínio

Tem-se $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

● Pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados

$f(0) = \frac{0^2 - 1}{2 - 0} = -\frac{1}{2}$, pelo que o gráfico intersesta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, -\frac{1}{2})$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{2 - x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$, pelo que o gráfico intersesta o eixo das abcissas nos pontos de coordenadas $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

● Intervalos de monotonia e extremos relativos

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{2 - x} \right)' = \frac{(x^2 - 1)'(2 - x) - (x^2 - 1)(2 - x)'}{(2 - x)^2} = \frac{2x(2 - x) - (x^2 - 1)(-1)}{(2 - x)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 1}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x-1}{(2-x)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2+4x-1 = 0 \wedge 2-x \neq 0 \Leftrightarrow x = 2-\sqrt{3} \vee x = 2+\sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$	$+\infty$
$-x^2+4x-2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(2-x)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
Sinal e zeros de f'	$-$	0	$+$	n.d.	$+$	0	$-$
Variação e extremos de f	$\searrow$	Mín. relativo	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	Máx. relativo	$\searrow$

$$f(2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}-4$$

$$f(2+\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}-4$$

f é decrescente em $] -\infty, 2-\sqrt{3}]$ e em $[2+\sqrt{3}, +\infty[$ e é crescente em $[2-\sqrt{3}, 2[$ e em $]2, 2+\sqrt{3}]$.

f atinge um mínimo relativo igual a $2\sqrt{3}-4$ em $2-\sqrt{3}$ e atinge um máximo relativo igual a $-2\sqrt{3}-4$ em $2+\sqrt{3}$.

• Pontos de inflexão e sentido das concavidades do gráfico

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-x^2+4x-1}{(2-x)^2} \right)' = \frac{(-x^2+4x-1)'(2-x)^2 - (-x^2+4x-1)[(2-x)^2]'}{(2-x)^4} = \\ &= \frac{(-2x+4)(2-x)^2 - (-x^2+4x-1)[-2(2-x)]}{(2-x)^4} = \frac{(-2x+4)(2-x)^2 + 2(-x^2+4x-1)(2-x)}{(2-x)^4} = \\ &= \frac{(-2x+4)(2-x) + 2(-x^2+4x-1)}{(2-x)^3} = \frac{-4x+2x^2+8-4x-2x^2+8x-2}{(2-x)^3} = \frac{6}{(2-x)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{(2-x)^3} = 0 \Leftrightarrow 6 = 0 \wedge 2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow (2-x)^3 < 0 \Leftrightarrow 2-x < 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow (2-x)^3 > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]2, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $] -\infty, 2[$.

O gráfico não tem pontos de inflexão.

• Assíntotas ao gráfico

Assíntotas verticais: a função é contínua, pelo que só a reta de equação $x = 2$ poderá ser assíntota vertical ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-1}{2-x} = \frac{3}{0^+} = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-1}{2-x} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical.

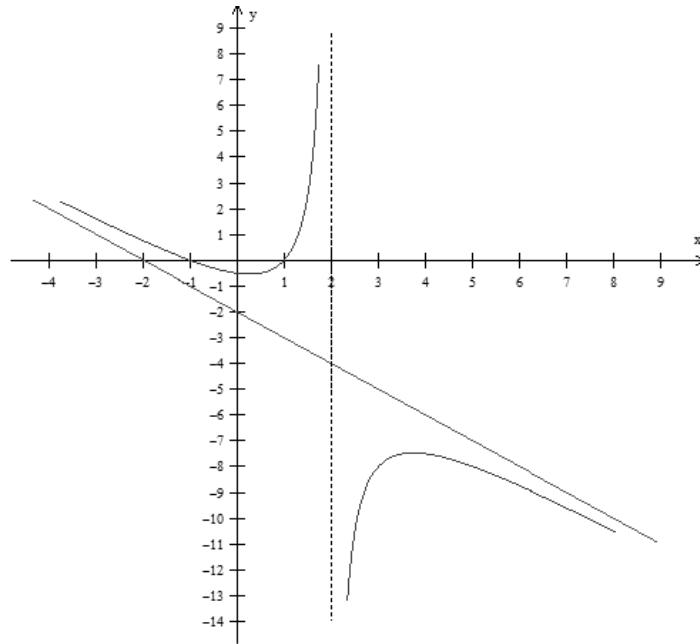
Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2-1}{2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{2x-x^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-1) \times x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2-1}{2-x} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1+2x-x^2}{2-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1+2x}{2-x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-x} = -2 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = -x \pm$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

De modo análogo se prova que a reta de equação $y = -x - 2$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

• Esboço do gráfico



e) • Domínio

Tem-se $D_f = \{x \in \mathbb{R} : (2-x)^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

• Pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados

$f(0) = \frac{2 \times 0^3}{(0-2)^2} = 0$, pelo que o gráfico interseja ambos os eixos no ponto de coordenadas $(0, 0)$.

• Intervalos de monotonia e extremos relativos

$$f'(x) = \left(\frac{2x^3}{(x-2)^2} \right)' = \frac{(2x^3)'(x-2)^2 - 2x^3[(x-2)^2]'}{(x-2)^4} = \frac{6x^2(x-2)^2 - 4x^3(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{6x^2(x-2) - 4x^3}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{6x^3 - 12x^2 - 4x^3}{(x-2)^3} = \frac{2x^3 - 12x^2}{(x-2)^3} = \frac{2x^2(x-6)}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2(x-6)}{(x-2)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x^2(x-6) = 0 \wedge (x-2)^3 \neq 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$$

x	$-\infty$	0		2		6	$+\infty$
$2x^2$	+	0	+	+	+	+	+
$x-6$	-	-	-	-	-	0	+
$(x-2)^3$	-	-	-	0	+	+	+
Sinal e zeros de f'	+	0	+	n.d.	-	0	+
Variação e extremos de f	$\nearrow$		$\nearrow$	n.d.	$\searrow$	Mín. relativo	$\nearrow$

$$f(6) = 27$$

f é crescente em $] -\infty, 2[$ e em $[6, +\infty[$ e é decrescente em $]2, 6]$.

f atinge um mínimo relativo igual a 27 em 6 e não admite máximos relativos.

• Pontos de inflexão e sentido das concavidades do gráfico

$$f''(x) = \left(\frac{2x^3 - 12x^2}{(x-2)^3} \right)' = \frac{(2x^3 - 12x^2)'(x-2)^3 - (2x^3 - 12x^2)[(x-2)^3]'}{(x-2)^6} =$$

$$= \frac{(6x^2 - 24x)(x-2)^3 - (2x^3 - 12x^2) \times 3(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{(6x^2 - 24x)(x-2) - (2x^3 - 12x^2) \times 3}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{6x^3 - 12x^2 - 24x^2 + 48x - 6x^3 + 36x^2}{(x-2)^4} = \frac{48x}{(x-2)^4}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{48x}{(x-2)^4} = 0 \Leftrightarrow 48x = 0 \wedge x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \in 0$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 48x < 0 \wedge x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x < 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x < 0$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 48x > 0 \wedge x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x \neq 2$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $] -\infty, 0]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[0, 2[$ e em $]2, +\infty[$.

O ponto de coordenadas $(0, 0)$ é ponto de inflexão do gráfico.

• Assíntotas ao gráfico

Assíntotas verticais: a função é contínua, pelo que só a reta de equação $x = 2$ poderá ser assíntota vertical ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^3}{(x-2)^2} = \frac{16}{0^+} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^3}{(x-2)^2} = \frac{16}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^3}{(x-2)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4x + 4} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

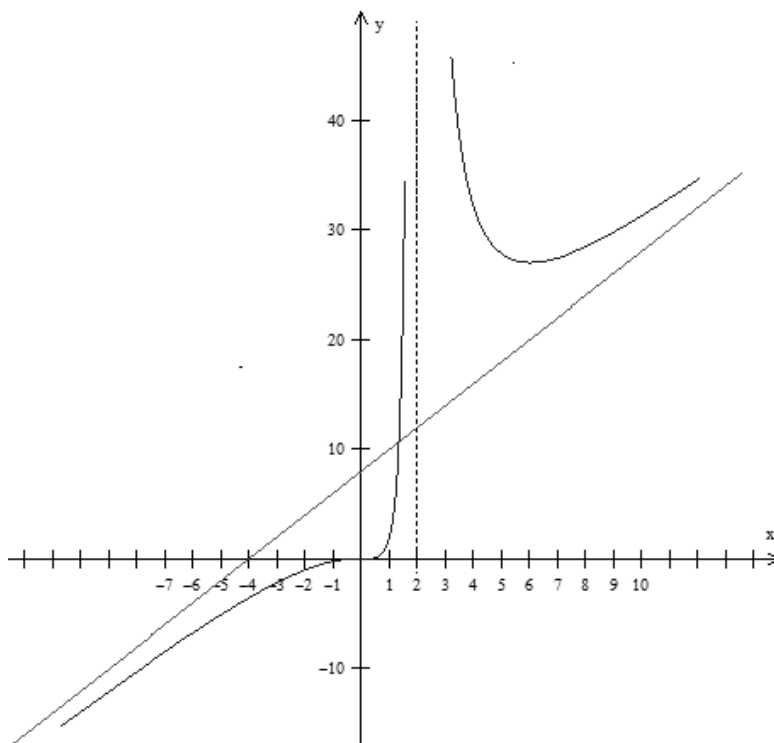
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^3}{(x-2)^2} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 - 4x + 4} - 2x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 - 8x}{x^2 - 4x + 4} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2}{x^2} = 8$$

Portanto, a reta de equação $y = 2x + 8$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

De modo análogo se prova que esta reta também é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

• Esboço do gráfico



f) • Domínio

Tem-se $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2 + x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}$.

• Pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados

$f(0) = \frac{0^2}{2+0^2} = 0$, pelo que o gráfico interseja ambos os eixos no ponto de coordenadas $(0, 0)$.

• Intervalos de monotonia e extremos relativos

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{2+x^2} \right)' = \frac{(x^2)'(2+x^2) - x^2(2+x^2)'}{(2+x^2)^2} = \frac{2x(2+x^2) - x^2(2x)}{(2+x^2)^2} = \frac{4x}{(2+x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{(2+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \wedge 2 + x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x < 0 \wedge 2 + x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x > 0 \wedge 2 + x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x > 0$$

f é decrescente em $] -\infty, 0]$ e é crescente em $[0, +\infty[$.

f atinge um mínimo absoluto igual a 0 em 0 e não admite máximos relativos.

● Pontos de inflexão e sentido das concavidades do gráfico

$$f''(x) = \left(\frac{4x}{(2+x^2)^2} \right)' = \frac{(4x)'(2+x^2)^2 - 4x[(2+x^2)^2]'}{(2+x^2)^4} = \frac{4(2+x^2)^2 - 4x[2(2+x^2) \times (2x)]}{(2+x^2)^4} =$$

$$= \frac{4(4+4x^2+x^4) - 16x^2(2+x^2)}{(2+x^2)^4} = \frac{16+16x^2+4x^4-32x^2-16x^4}{(2+x^2)^4} = \frac{-12x^4-16x^2+16}{(2+x^2)^4} =$$

$$|-12a^2 - 16a + 16 = 0 \Leftrightarrow a = -2 \vee x = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{-12(x^2+2)(x^2-\frac{2}{3})}{(2+x^2)^4} = \frac{-12x^2+8}{(2+x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-12x^2+8}{(2+x^2)^3} = 0 \Leftrightarrow -12x^2+8=0 \wedge 2+x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \vee x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2/3}$		$\sqrt{2/3}$	$+\infty$
$-12x^2+8$	-	0	+	0	-
$(2+x^2)^3$	+	+	+	+	+
Sinal e zeros de f''	-	0	+	0	-
Sentido da concavidade de f		P. I.		P. I.	
		$f(-\sqrt{2/3}) = 1/4$		$f(\sqrt{2/3}) = 1/4$	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}]$ e em $[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}]$.

Os pontos de coordenadas $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{4})$ e $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{4})$ são pontos de inflexão do gráfico.

● Assíntotas ao gráfico

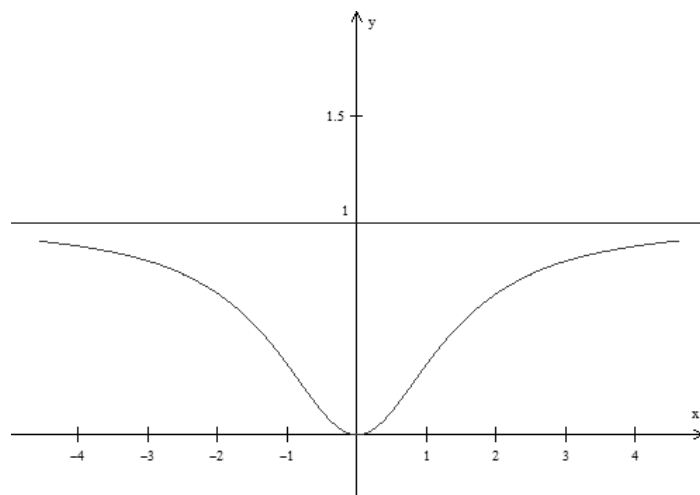
Assíntotas verticais: a função é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que o gráfico não admite qualquer assíntota vertical.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2+x^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Portanto, a reta de equação $y = 1$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$ e em $+\infty$.

● Esboço do gráfico



150. • A função tem que ser contínua no ponto 2, pelo que tem de ser

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2).$$

Ora,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - b) = 4 - b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax - 3) = 2a - 3$$

$$f(2) = 2a - 3$$

$$\text{Portanto, } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4 - b = 2a - 3 \Leftrightarrow b = 7 - 2a.$$

• Para que exista derivada de f em 2 tem que ser $f'(2^-) = f'(2^+)$.

Ora,

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - b - (2a - 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - (7 - 2a) - 2a + 3}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax - 3 - (2a - 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax - 2a}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} a = a$$

$$\text{Portanto, } f'(2^-) = f'(2^+) \Leftrightarrow a = 4.$$

Como $b = 7 - 2a$, tem-se $b = -1$.

$$\mathbf{151. a)} x^4 - x^2 - 1 = k \Leftrightarrow x^4 - x^2 - (1 + k) = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - x^2 - (1 + k) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4(1 + k)}}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{4k + 5}}{2}$$

Para $k \geq -\frac{5}{4}$, a expressão $\frac{1 + \sqrt{4k + 5}}{2}$ representa um número real positivo, pelo que a condição

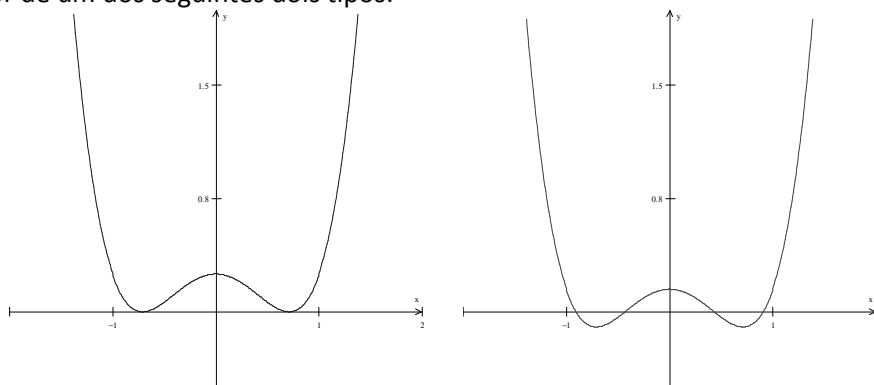
$$x^2 = \frac{1 + \sqrt{4k + 5}}{2} \text{ é possível}$$

Portanto, a equação é impossível para $4k + 5 < 0$, ou seja, para $k \in]-\infty, -\frac{5}{4}[$.

$$\mathbf{b)} x^4 - x^2 - 1 > a \Leftrightarrow x^4 - x^2 - (1 + a) > 0$$

Para cada valor real de a , a função g definida por $g(x) = x^4 - x^2 - (1 + a)$ é uma função polinomial de grau 4 e é uma função par.

Portanto, o conjunto solução da condição $g(x) > 0$ é a reunião de três intervalos disjuntos se e só se o seu gráfico for de um dos seguintes dois tipos:



Ou seja: tal acontece se e só se g tem exatamente dois zeros ou exatamente quatro zeros.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - (1 + a) \Leftrightarrow x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{4a + 5}}{2}, \text{ pelo que:}$$

• g tem exatamente dois zeros se e só se $4a + 5 = 0$, ou seja, se e só se $a = -\frac{5}{4}$.

• g tem exatamente quatro zeros se e só se $0 < 4a + 5 < 1$, ou seja, se e só se $-\frac{5}{4} < a < -1$.

Portanto, $a \in \left[-\frac{5}{4}, -1\right[$.

152. a)

$$f'(a-1) = 1 - 3(a-1)^2 \text{ e } g'(a) = 6a^2;$$

as retas r e s são perpendiculares se e só se $f'(a-1) \times g'(a) = -1$;

$$f'(a-1) \times g'(a) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6a^2 - 18a^2(a-1)^2 = -1.$$

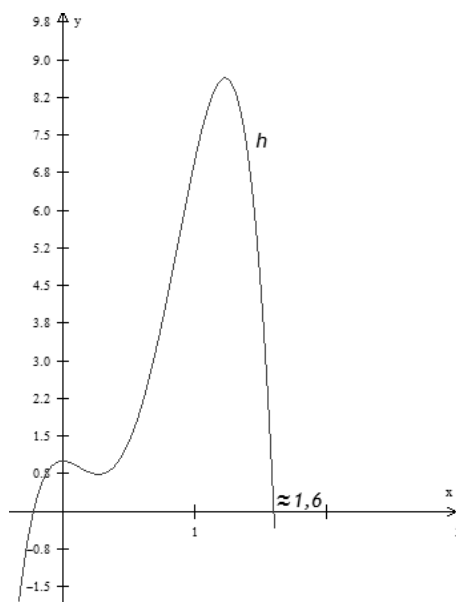
Seja h a função definida por

$$h(a) = 6a^2 - 18a^2(a-1)^2 + 1$$

$$h(1) = 7 \text{ e } h(2) = -47$$

Dado que a função h é contínua em $[1, 2]$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que a equação $h(a) = 0$ tem solução no intervalo $]1, 2[$.

b) $h(x) = 6x^2 - 18x^2(x-1)^2 + 1$



Pág. 76

153.

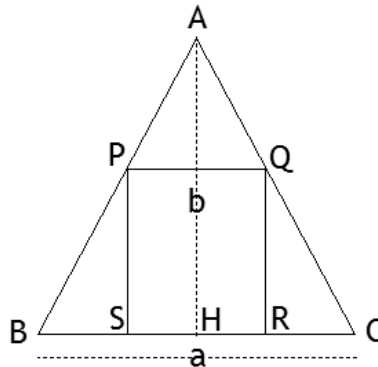
Qualquer reta que passe em A e esteja nas condições do enunciado admite uma equação do tipo $y = m(x-4) + 2$, com $m < 0$; as interseções das retas desta família com os eixos são os pontos de coordenadas $(0, -4m+2)$ e $(\frac{4m-2}{m}, 0)$. A área dos triângulos referidos no enunciado é dada por $A(m) = -\frac{(4m-2)^2}{2m}$ que atinge o mínimo em $-\frac{1}{2}$.

Portanto, a reta correspondente tem declive $-\frac{1}{2}$ e é paralela à reta que passa nos pontos de coordenadas $(0, 2)$ e $(4, 0)$, pois essa reta também tem declive $-\frac{1}{2}$ $\left(m = \frac{0-2}{4-0} = -\frac{1}{2}\right)$.

154. Tem-se, de acordo com a figura abaixo:

Área da janela = $\overline{SR} \times \overline{PS}$

Seja $x = \overline{SH}$ e, para cada valor de x , designemos por $A(x)$ a área da janela.



Tem-se:

- $\overline{SR} = 2x$
- $\frac{\overline{PS}}{\overline{BS}} = \frac{b}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PS}}{\frac{a}{2}-x} = \frac{b}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PS}}{\frac{a}{2}-x} = \frac{2b}{a} \Leftrightarrow \overline{PS} = \left(\frac{a}{2}-x\right)\frac{2b}{a} \Leftrightarrow \overline{PS} = b - \frac{2b}{a}x$

Ora,

- $A(x) = \overline{SR} \times \overline{PS} = 2x \times \left(b - \frac{2b}{a}x\right) = 2bx - \frac{4b}{a}x^2$
- $A'(x) = \left(2bx - \frac{4b}{a}x^2\right)' = 2b - \frac{8b}{a}x$
- $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2b - \frac{8b}{a}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$

Portanto, as dimensões da janela que tem área máxima são:

- $\overline{SR} = 2 \times \frac{a}{4} = \frac{a}{2}$
- $\overline{PS} = b - \frac{2b}{a} \times \frac{a}{4} = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$

155.

$$\text{Tem-se } w_n = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2+i} = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}.$$

$$\underbrace{\frac{1}{n^2+n} + \frac{2}{n^2+n} + \dots + \frac{n}{n^2+n}}_{u_n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2+i} \leq \underbrace{\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+1}}_{v_n}$$

$$v_n = \frac{1}{n^2+1} \times \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n^2+1} \times \frac{1+n}{2} \times n = \frac{n^2+n}{2n^2+2}$$

$$u_n \times \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n^2+n} \times \frac{1+n}{2} \times n = \frac{n^2+n}{2n^2+2n}$$

$$\text{Então, } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{n^2+n}{2n^2+2n} \leq w_n \leq \frac{n^2+n}{2n^2+2}.$$

E, dado que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{2n^2+2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{2n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$, o teorema das sucessões encastradas

permite concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \frac{1}{2}$

156.

Seja t a hora do dia e sejam f_1 e f_2 as funções que dão a distância do montanhista ao abrigo A no primeiro e no segundo dia, respetivamente. Pretende-se, portanto, provar que:

$$\exists t \in]8, 14[: f_1(t) = f_2(t),$$

que é equivalente a

$$\exists t \in]8, 14[: f_1(t) - f_2(t) = 0.$$

Seja f a função definida por $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$.

A função f é contínua em $[8, 14]$ e tem-se:

$$f(8) = f_1(8) - f_2(8) = 0 - f_2(8) = -f_2(8); \text{ portanto, } f(8) < 0.$$

$$f(14) = f_1(14) - f_2(14) = f_1(14) - 0 = f_1(14); \text{ portanto, } f(14) > 0.$$

Por aplicação do teorema de Bolzano-Cauchy, pode concluir-se que $\exists t \in]8, 14[: f(t) = 0$, que é equivalente a $\exists t \in]8, 14[: f_1(t) = f_2(t)$ pois $f(t) = 0 \iff f_1(t) - f_2(t) = 0$.

157. a)

Sejam $f(x_1)$ e $f(x_2)$ dois valores positivos e suponhamos que $f(x_1) < f(x_2)$.

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) \times f(x_1) < f(x_1) \times f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x_1))^2 < f(x_1) \times f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) < \sqrt{f(x_1) \times f(x_2)}$$

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) \times f(x_2) < f(x_2) \times f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) \times f(x_2) < (f(x_2))^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{f(x_1) \times f(x_2)} < f(x_2)$$

A função é contínua em $[x_1, x_2]$ e

$$f(x_1) < \sqrt{f(x_1) \times f(x_2)} < f(x_2),$$

então, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que:

$$\exists c \in]x_1, x_2[: f(c) = \sqrt{f(x_1) \times f(x_2)}$$

b)

Basta aplicar o resultado de a), atendendo a que a solução positiva da equação é a média geométrica de dois valores da função, ambos positivos.

158.

Seja $y = \frac{1}{x}$; se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow +\infty$ e tem-se $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(xE\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{E(y)}{y}$

De acordo com o enunciado, sabe-se que $E(y) \leq y \leq E(y) + 1$.

Então, $\frac{E(y)}{E(y)} \leq \frac{y}{E(y)} \leq \frac{E(y)+1}{E(y)}$, ou seja, $1 \leq \frac{y}{E(y)} \leq 1 + \frac{1}{E(y)}$. Se $y \rightarrow +\infty$, também

$E(y) + 1 \rightarrow +\infty$ e, portanto, $E(y) \rightarrow +\infty$.

Assim, $\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{E(y)} \right) = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$.

Então, por aplicação do teorema do limite das funções encastradas, conclui-se que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{E(y)} = 1 \text{ e, portanto, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(xE\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 1.$$

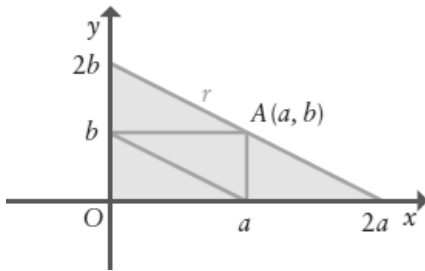
159.

Qualquer reta que passe em A e esteja nas condições do enunciado admite uma equação do tipo $y = m(x - a) + b$, com $m < 0$; as interseções das retas desta família com os eixos são os pontos de coordenadas $(0, b - am)$ e $(\frac{am - b}{m}, 0)$.

A área dos triângulos referidos no enunciado é dada por $A(m) = -\frac{(am - b)^2}{2m}$ que atinge o mínimo em $-\frac{b}{a}$.

Portanto, a reta correspondente tem declive $m = -\frac{b}{a}$ e é paralela à reta que passa nos pontos de coordenadas $(0, b)$ e $(a, 0)$, pois essa reta também tem declive $-\frac{b}{a}$ ($m = \frac{0 - b}{a - 0} = -\frac{b}{a}$).

A reta r intersesta os eixos nos pontos de coordenadas $(2a, 0)$ e $(0, 2b)$; os triângulos referidos no item são triângulos retângulos cujos catetos medem a e b .



$$160. a) f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -\left(\frac{-(x^2)'}{x^4}\right) = -\left(\frac{-2x}{x^4}\right) = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = \frac{-2(x^3)'}{x^6} = \frac{-6x^2}{x^6} = -\frac{6}{x^4}$$

b) É compreensível produzir a seguinte conjectura: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

Demonstração de que a igualdade é válida para todo o número natural n :

Para $n = 1$, obtém-se a proposição

$f^{(1)}(x) = \frac{-1 \times 1!}{x^{1+1}}$, que é verdadeira pois

$$\frac{-1 \times 1!}{x^{1+1}} = -\frac{1}{x^2} \text{ e } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Hipótese de indução: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

Tese de indução: $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}}$

Seja n um qualquer número natural.

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\right)'$$

$$= (-1)^n n! \left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)'$$

$$= (-1)^n \cdot n! (x^{-n-1})' =$$

$$= (-1)^n \cdot n! \cdot (-n-1)x^{-n-2} =$$

$$= (-1)^n \cdot (-1) \cdot n!(n+1) \frac{1}{x^{n+2}} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!}{x^{n+2}}$$

Tema 4 | Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas

1. Juros compostos e número de Neper

Pág. 81

Será que...? Juros compostos

- Decorrido um ano, o capital é igual a $C_0 + 0,02 \times C_0$ euros, ou seja:

$$C_1 = C_0(1 + 0,02) = C_0 \times 1,02$$

- Decorridos dois anos, o capital é igual a $C_1 + 0,02 \times C_1$, ou seja:

$$C_2 = C_1(1 + 0,02) = C_1 \times 1,02 = C_0 \times 1,02 \times 1,02 = C_0 \times 1,02^2$$

- Decorridos três anos, o capital é igual a $C_2 + 0,02 \times C_2$, ou seja:

$$C_3 = C_2(1 + 0,02) = C_2 \times 1,02 = C_0 \times 1,02^2 \times 1,02 = C_0 \times 1,02^3$$

- Decorridos n anos, o capital é igual a $C_n + 0,02 \times C_n$, ou seja:

$$C_n = C_{n-1}(1 + 0,02) = C_{n-1} \times 1,02 = C_0 \times 1,02^{n-1} \times 1,02 = C_0 \times 1,02^n$$

1. Ao fim de um ano, o capital acumulado é igual a $500 \times 1,025$.

Ao fim de dois anos, o capital acumulado é igual a $(500 \times 1,025) \times 1,025 = 500 \times 1,025^2$.

Ao fim de três anos, o capital acumulado é igual a $(500 \times 1,025) \times 1,025 = 500 \times 1,025^2$.

Ao fim de quatro anos, o capital acumulado é igual a $500 \times 1,025^4 \approx 551,91$ euros.

Pág. 82

2. a) $800 \times 1,019 \approx 815,20$ euros

b) $800 \times 1,019^3 - 800 \approx 46,47$ euros

c) $800 \times 1,019^n, n \in \mathbb{N}_0$

d) $800 \times 1,019^n > 1000 \Leftrightarrow 1,019^n > 1,25$

Tem-se $1,019^{11} \approx 1,230$ e $1,019^{12} \approx 1,253$, pelo que a resposta é «Ao fim de doze anos.»

3. Decorreram exatamente dois anos, pelo que uma condição que traduz o problema é

$$2400 \times (1 + t)^2 = 2521,5, \quad t > 0.$$

$$\text{Tem-se: } 2400 \times (1 + t)^2 = 2521,5 \Leftrightarrow (1 + t)^2 = 1,050625 \Leftrightarrow 1 + t = 1,025 \Leftrightarrow t = 0,025$$

A taxa foi de 2,5%.

$$4. C_0 \times 1,02^n > 2C_0 \Leftrightarrow 1,02^n > 2$$

Tem-se $1,02^{35} \approx 1,999$ e $1,02^{36} \approx 2,039$, pelo que são necessários 36 anos

Será que...? Dividindo uma taxa anual

Vejamos o capital acumulado ao fim de um ano com a taxa de 4% ao ano:

$$C_1 = 1000 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right)^1 = 1000 \times 1,04^1 = 1040$$

Portanto, neste caso, teria acumulado 1040€.

Vejamos o capital acumulado ao fim de um ano com a taxa de 1% ao trimestre.

No fim do primeiro trimestre teria acumulado:

$$C_1 = 1000 \times \left(1 + \frac{1}{100}\right)^1 = 1000 \times 1,01^1 = 1010$$

No fim do segundo trimestre teria acumulado:

$$C_2 = 1000 \times \left(1 + \frac{1}{100}\right)^2 = 1000 \times 1,01^2 = 1020,10$$

No fim do terceiro trimestre teria acumulado:

$$C_3 = 1000 \times \left(1 + \frac{1}{100}\right)^3 = 1000 \times 1,01^3 \approx 1030,30$$

No fim do quarto trimestre teria acumulado:

$$C_4 = 1000 \times \left(1 + \frac{1}{100}\right)^4 = 1000 \times 1,01^4 \approx 1040,60$$

Concluimos, assim, que a proposta da Beatriz é a mais vantajosa, ainda que seja uma vantagem muito pequena.

Pág. 83

$$5. 0,15\% \times 12 = 1,8\%$$

6. Tem-se $10\,000 \times \left(1 + \frac{0,02}{12}\right)^{12} \approx 10\,201,84$ euros e $10\,000 \times \left(1 + \frac{0,021}{2}\right)^2 \approx 10\,211,10$ euros, pelo que a segunda modalidade é mais vantajosa.

Pág. 84

$$7. a) 7500 \times \left(1 + \frac{0,018}{4}\right)^{40} \approx 8975,51 \text{ euros}$$

$$b) 7500 \times \left(1 + \frac{0,018}{2}\right)^{20} \approx 8971,90 \text{ euros}$$

Será que...? Taxa de juro ao segundo

1 ano tem:

- 2×6 meses
- 12 meses
- 365 dias
- $365 \times 24 = 8760$ horas
- $8760 \times 60 = 525\,600$ minutos
- $525\,600 \times 60 = 31\,536\,000$ minutos

$$C_2 = 100 \times \left(1 + \frac{100}{100 \times 2}\right)^2 = 100 \times \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 225$$

$$C_{12} = 100 \times \left(1 + \frac{100}{100 \times 12}\right)^{12} = 100 \times \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 261,30$$

$$C_{365} = 100 \times \left(1 + \frac{100}{100 \times 365}\right)^{365} = 100 \times \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \approx 271,46$$

$$C_{8760} = 100 \times \left(1 + \frac{100}{100 \times 8760}\right)^{8760} = 100 \times \left(1 + \frac{1}{8760}\right)^{8760} \approx 271,81$$

$$C_{525600} = 100 \times \left(1 + \frac{100}{100 \times 525600}\right)^{525600} = 100 \times \left(1 + \frac{1}{525600}\right)^{525600} \approx 271,83$$

$$\begin{aligned} C_{31536000} &= 100 \times \left(1 + \frac{100}{100 \times 31536000}\right)^{31536000} = \\ &= 100 \times \left(1 + \frac{1}{31536000}\right)^{31536000} \approx 271,83 \end{aligned}$$

Podemos, então, preencher a tabela:

T	n	Capital disponível no fim do ano (em euros, arredondado ao cêntimo)
6 meses	2	225
1 mês	12	261,30
1 dia	365	271,46
1 hora	8760	271,81
1 minuto	525 600	271,83
1 segundo	31536000	271,83

Da observação da tabela, aparentemente, os 100 euros depositados pela Beatriz pelo período de um ano nunca chegam a atingir os 272 €.

Pág. 86

8. $\lim \left[100 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 100 \times \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 100e \approx 271,83$

9. a) $\lim \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$

b) $\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2-n} = \frac{\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2}{\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e}$

c) $\lim \left(2 + \frac{2}{n} \right)^n = 2^{+\infty}$

Pág. 87

10. (D)

O capital acumulado ao fim de n anos é dado por $C_0 \times 1,013^n$, termo geral de uma progressão geométrica de razão 1,013.

11. a) $1000 \times \left(1 + \frac{0,08}{2} \right)^2 = 1081,60$ euros

b) $1000 \times \left(1 + \frac{0,08}{6} \right)^6 \approx 1082,71$ euros

c) $1000 \times \left(1 + \frac{0,08}{12} \right)^{12} \approx 1083,00$ euros

12. $C_0 \times (1 + t)^{18} = 2C_0 \Leftrightarrow (1 + t)^{18} = 2 \Leftrightarrow 1 + t = \sqrt[18]{2} \Leftrightarrow t = \sqrt[18]{2} - 1$

Portanto $t \approx 0,039$.

A taxa foi aproximadamente igual a 3,9%.

13. Uma condição que traduz o problema é $C_0 \times (1 - 0,02)^n = 0,8C_0$.

$C_0 \times (1 - 0,02)^n = 0,8C_0 \Leftrightarrow 0,98^n = 0,8$

Tem-se $0,98^{11} \approx 0,801$ e $0,98^{12} \approx 0,785$, pelo que deve decorrer um pouco mais do que 11 anos.

14. Seja n o número de carregamentos procurado.

Uma condição que traduz o problema é $130 \times (1 - 0,1)^{\frac{n}{20}} < 24$.

$$120 \times (1 - 0,1)^{\frac{n}{20}} < 24 \Leftrightarrow 0,9^{\frac{n}{20}} < 0,1846$$

Tem-se $0,9^{\frac{320}{20}} \approx 0,1853$ e $0,9^{\frac{321}{20}} \approx 0,1843$, pelo que a bateria pode ser carregada até 320 vezes.

15. Uma condição que traduz o problema é $C_0 \times \left(1 + \frac{t}{12}\right)^{12} = 2C_0$.

$$C_0 \times \left(1 + \frac{t}{12}\right)^{12} = 2C_0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{t}{12}\right)^{12} = 2 \Leftrightarrow 1 + \frac{t}{12} = \sqrt[12]{2} \Leftrightarrow t = 12 (\sqrt[12]{2} - 1)$$

Dado que $12 (\sqrt[12]{2} - 1) \approx 0,7136$, o valor mínimo procurado é 72%.

16. a) $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^3 = e^3$

b) $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} = e^{-1}$

De outro modo: $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1}$

c) $\lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2-n} = \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-2} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-2} = \frac{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{e}{1} = e$

d) $\lim \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

e) $\lim \left(\frac{3+3n}{n}\right)^{n+1} = 3^{+\infty} = +\infty$

f) $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n-3} = \frac{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}}{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} = \frac{\lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2}{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} = \frac{e^2}{1} = e^2$

17. (A)

Tem-se $\lim u_n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^-$.

Ora, só para a função da opção (A) é que se tem $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = +\infty$.

2. Funções exponenciais

Pág. 89

18. a) $3^{-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3$

19. a) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

b) $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

20. a) $\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{3^{-1}} = 3^{-\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}} = \sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{2}{3}}$

Pág. 90

21. a) $16 = 4^2$

b) $8 = 2^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

c) $1 = (-2)^0$

d) $8 = 2^3 = \sqrt{4^3} = 4^{\frac{3}{2}}$

e) $0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

f) $0,04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2}$

Pág. 92

Será que...? O número 2^π

1. $u_5 = 3,14159$ e $v_5 = 3,14160$

2.

$$x_1 = 2^{3,1} \approx 8,57419$$

$$x_2 = 2^{3,14} \approx 8,81524$$

$$x_3 = 2^{3,141} \approx 8,82135$$

$$x_4 = 2^{3,1415} \approx 8,82444$$

$$x_5 = 2^{3,14159} \approx 8,82496$$

$$x_6 = 2^{3,141592} \approx 8,82497$$

$$y_1 = 2^{3,2} \approx 9,18959$$

$$y_2 = 2^{3,15} \approx 8,87656$$

$$y_3 = 2^{3,142} \approx 8,82747$$

$$y_4 = 2^{3,1416} \approx 8,82502$$

$$y_5 = 2^{3,14160} \approx 8,82502$$

$$y_6 = 2^{3,141593} \approx 8,82498$$

Como as sucessões (u_n) e (v_n) são sucessões de números convergentes para π , as sucessões (x_n) e (y_n) são convergentes para 2^π .

22. A função é decrescente para $0 < 2 - k < 1$, ou seja, para $k \in]1, 2[$.

23. a) $4^{\sqrt{2}} = (2^2)^{\sqrt{2}} = 2^{2\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{8}}$; portanto, $4^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{5}}$.

b) $8^{\sqrt{8}} = (2^3)^{\sqrt{8}} = 2^{3\sqrt{8}}$; portanto, $2^{3\pi} > 2^{3\sqrt{8}}$, pois $\pi > \sqrt{8}$.

c) $\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$; portanto, $\frac{1}{9} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ (repara que $0 < \frac{1}{3} < 1$).

Pág. 93

24. a) Função f : gráfico azul; função g : gráfico verde; função h : gráfico vermelho

b₁) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 0$; conjunto-solução = $\{0\}$

b₂) $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \geq 0$; conjunto-solução = $[0, +\infty[$

b₃) $h(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \leq 0$; conjunto-solução = $] -\infty, 0]$

Pág. 94

25. Tem-se $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x} = f(-x)$; portanto, o gráfico de qualquer uma das funções pode obter-se aplicando ao gráfico da outra a reflexão de eixo Oy .

26. a) $4^{x+1} = 4^x \times 4 = 6 \times 4 = 24$

b) $4^{x-2} = \frac{4^x}{4^2} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

c) $4^{2x} = (4^x)^2 = 6^2 = 36$

d) $2^x = \sqrt{4^x} = \sqrt{4^x} = \sqrt{6}$

e) $4^{-x} = (4^x)^{-1} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$

27. a) $2^{x+1} = 16 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^4 \Leftrightarrow x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$

b) $8^{x+1} = 4^x \Leftrightarrow (2^3)^{x+1} = (2^2)^x \Leftrightarrow 2^{3x+3} = 2^{2x} \Leftrightarrow 3x + 3 = 2x \Leftrightarrow x = -3$

c) $5^x = 0,04 \Leftrightarrow 5^x = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 5^x = 5^{-2} \Leftrightarrow x = -2$

d) $5 \times 5^x = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5^{x+1} = 5^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

e) $4^{x+1} - 4^x = 24 \Leftrightarrow 4^x(4 - 1) = 24 \Leftrightarrow 4^x = 8 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

f) $12 \times 3^x - 3^{2x} = 27 \Leftrightarrow -(3^x)^2 + 12 \times 3^x - 27 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -y^2 + 12y - 27 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 108}}{-2} \Leftrightarrow y = 3 \vee y = 9 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3^x = 3 \vee 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$ $|3^x = y$

$$\begin{aligned}
 \text{g)} \quad 2^{3+x} - 2^{1-x} &= 6 \Leftrightarrow 8 \times 2^x - \frac{2}{2^x} - 6 = 0 \Leftrightarrow 8 \times (2^x)^2 - 2 - 6 \times 2^x = 0 \Leftrightarrow |2^x = y \\
 &\Leftrightarrow 8y^2 - 6y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{16} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4} \vee y = 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{2^x = -\frac{1}{4}}_{\text{eq. imp.}} \vee 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0
 \end{aligned}$$

Pág. 96

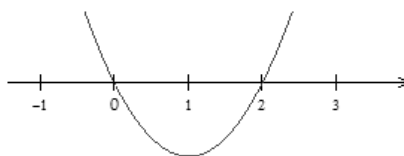
$$28. \text{ a)} \quad 3^{1-x} > 9 \Leftrightarrow 3^{1-x} > 3^2 \Leftrightarrow 1-x > 2 \Leftrightarrow x < -1$$

$$\text{b)} \quad 2^x \geq 3^x \Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x} \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$$

$$\text{c)} \quad 2^{-x+1} > 4^{3x} \Leftrightarrow 2^{-x+1} > 2^{6x} \Leftrightarrow -x+1 > 6x \Leftrightarrow x < \frac{1}{7}$$

$$\text{d)} \quad 5^{x+1} \geq \frac{1}{\sqrt{5}^x} \Leftrightarrow 5^{x+1} \geq 5^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow x+1 \geq -\frac{x}{2} \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e)} \quad 3^{x^2} < 9^x &\Leftrightarrow 3^{x^2} < 3^{2x} \Leftrightarrow x^2 < 2x \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 2
 \end{aligned}$$



Cálc. aux:

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x &= 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2
 \end{aligned}$$

Cálc. aux:

$$\begin{aligned}
 \text{f)} \quad 2^{\frac{1}{x}} &\leq 4 \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x}} \leq 2^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq 2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{x} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x < 0 \vee x \geq \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	$-\infty$
$1-2x$	+	+	+	0	-
x	-	0	+	+	+
$\frac{1-2x}{x}$	-	n.d.	+	0	-

Cálc. aux:

$$\begin{aligned}
 \text{g)} \quad \frac{1-3^x}{2^{x-8}} &\leq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \leq 0 \vee x > 3
 \end{aligned}$$

	$-\infty$	0		3	$-\infty$
$1-3^x$	+	0	-	-	-
2^{x-8}	-	-	-	0	+
$\frac{1-3^x}{2^{x-8}}$	-	0	+	n.d.	-

$$29. \text{ a}_1) \quad 3^x = 10 - 3^{2-x} \Leftrightarrow 3^x - 10 + \frac{3^2}{3^x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 10 \times 3^x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$|3^x = y$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 10y + 9 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 1 \vee 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Como $f(0) = 3^0 = 1$ e $f(2) = 3^2 = 9$, os pontos de interseção dos gráficos das duas funções são os pontos de coordenadas $(0, 1)$ e $(2, 9)$.

$$a_2) f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow 3^x \geq 10 - 3^{2-x} \Leftrightarrow 3^x - 10 + \frac{3^2}{3^x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 10 \times 3^x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow$$

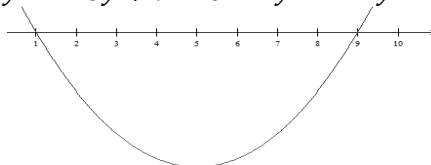
$$\Leftrightarrow y^2 - 10y + 9 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y \leq 1 \vee y \geq 9 \Leftrightarrow$$

$$|3^x = y$$

Cálc. aux:

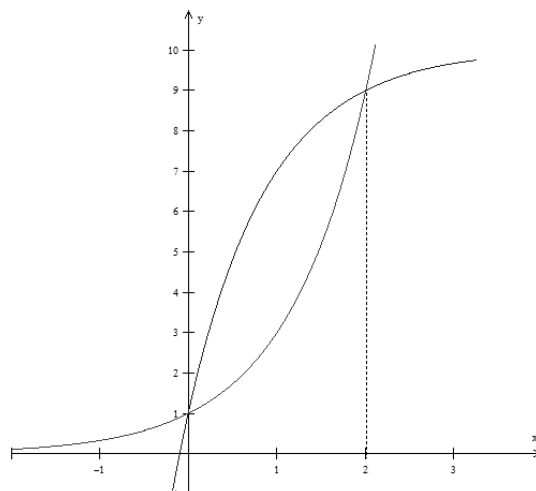
$$y^2 - 10y + 9 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 9$$



$$\Leftrightarrow 3^x \leq 1 \vee 3^x \geq 9 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 2$$

$$\text{Conjunto-solução} =] -\infty, 0] \cup [2, +\infty[$$

a₃)



Pág. 97

$$30. 1 + \frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y} > 0 \Leftrightarrow$$

Cálc. aux:

	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$y+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{y+1}{y}$	$+$	0	$-$	n.d.	$+$

$$\Leftrightarrow y < -1 \vee y > 0$$

$$\text{Conjunto-solução} =] -\infty, -1[\cup]0, +\infty[= \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$$

Pág. 98

$$31. a) \lim \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{-3}{n}\right)^n = e^{-3}$$

$$b) \lim \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{3/2}{n}\right)^n = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{2n+5} &= \lim \left[\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{2n} \times \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^5\right] = \lim \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{2n} \times \lim \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^5 = \\ &= \lim \left[\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n\right]^2 \times \lim \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^5 = \left(e^{\frac{2}{3}}\right)^2 \times 1 = e^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \lim \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = \lim \left(\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^n = \lim \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{\lim \left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\lim \left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{e^3}{e^2} = e$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim \left(\frac{3}{n} - 1\right)^{2n} &= \lim \left[\left(\frac{3}{n} - 1\right)^2\right]^n = \quad \quad \quad | \text{Note que } a^2 = (-a)^2 \\ &= \lim \left[\left(1 - \frac{3}{n}\right)^2\right]^n = \lim \left[\left(1 - \frac{3}{n}\right)^n\right]^2 = (e^{-3})^2 = e^{-6} \end{aligned}$$

Pág. 99

32. 1.º processo

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^n &= \lim \left[\frac{3n\left(1+\frac{1}{3n}\right)}{2n\left(1-\frac{1}{2n}\right)}\right]^n = \lim \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{\lim \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n}{\lim \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n} = \lim \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{\lim \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n}{\lim \left(1+\frac{-1}{2n}\right)^n} = \\ &= +\infty \times \frac{e^{\frac{1}{3}}}{e^{-\frac{1}{2}}} = +\infty \times e^{\frac{5}{6}} = +\infty \end{aligned}$$

2.º processo

$$\text{Tem-se } \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{2n-1}$$

|Cálc. aux:

$$\begin{array}{r} 3n+1 \\ -3n \\ \hline + \quad 3/2 \\ \hline 5/2 \end{array} \quad \begin{array}{r} | 2n-1 \\ 3/2 \end{array}$$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{3n+1}{2n-1} > \frac{3}{2}$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^n > \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Então, como $\lim \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$, pode-se concluir, por comparação, que $\lim \left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^n = +\infty$.

33. 1.º processo

$$\lim \left(\frac{n+3}{2n+2}\right)^n = \lim \left[\frac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{2n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]^n = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{\lim \left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 0 \times \frac{e^3}{e} = 0$$

2.º processo

Seja (a_n) a sucessão de termo geral $\frac{n+3}{2n+2}$.

Tem-se:

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$$

$$\bullet a_{n+1} - a_n = \frac{n+4}{2n+4} - \frac{n+3}{2n+2} = \frac{2n^2+10n+8-2n^2-10n-12}{(2n+4)(2n+2)} = \frac{-12}{(2n+4)(2n+2)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ pelo que } (a_n) \text{ é decrescente.}$$

Como $a_2 = \frac{5}{6}$, vem $\forall n \in \mathbb{N}_3, 0 < \frac{n+3}{2n+2} < \frac{5}{6}$ e, portanto, $\forall n \in \mathbb{N}_3, 0 < \left(\frac{n+3}{2n+2}\right)^n < \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Como $\lim \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$, pode-se concluir, pelo teorema das sucessões enquadradas, que $\lim \left(\frac{n+3}{2n+2}\right)^n = 0$.

34. $\lim \left(\frac{3-n}{n+1} \right)^n = \lim \left[(-1)^n \times \left(\frac{n-3}{n+1} \right)^n \right]$. Este limite não existe; na verdade, para que exista $\lim [(-1)^n a_n]$ é necessário que $\lim a_n = 0$.
Ora, tem-se:

$$\lim \left(\frac{n-3}{n+1} \right)^n = \lim \left[\frac{\left(1 + \frac{-3}{n} \right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \right] = \frac{e^{-3}}{e} = e^{-4}$$

Pág. 100

$$\begin{aligned} \text{35. a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{5x} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x}-1}{3x} \times 3 \right) = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} \stackrel{3x=y}{=} \frac{3}{5} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y} = \\ &= \frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1}-1}{x-x^2} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y+1-(y+1)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{-y^2-y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y(-y-1)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{e^y-1}{y} \times \frac{1}{-y-1} \right] = 1 \times (-1) = -1 \end{aligned}$$

$$\text{c)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^x-e^3}{x-3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y+3}-e^3}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^3(e^y-1)}{y} = e^3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y} = e^3 \times 1 = e^3$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-e^{-x}}{x} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-x}(e^{2x}-1)}{2x} \stackrel{2x=y}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2e^{-\frac{y}{2}}(e^y-1)}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[2e^{-\frac{y}{2}} \times \frac{e^y-1}{y} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left(2e^{-\frac{y}{2}} \right) \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y} = 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{\sqrt{x}} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{\sqrt{x}} \quad \left| \text{Como } x > 0, \text{ tem-se } e^x-1 > 0, \text{ pelo que } e^x-1 = \sqrt{(e^x-1)^2} \right. \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(e^x-1)^2}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{(e^x-1)^2}{x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^x-1}{x} \times (e^x-1) \right]} = \sqrt{1 \times 0} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{f)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right] \stackrel{\infty \times 0}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{1}{y} (e^y - 1) \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$$

g)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xe^x-2e^2}{x-2} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y+2)e^{y+2}-2e^2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y+2)e^y e^2 - 2e^2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{ye^y e^2 + 2e^y e^2 - 2e^2}{y} = \\ &\lim_{y \rightarrow 0} \left[e^y e^2 + \frac{2e^2(e^y-1)}{y} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[e^y e^2 + 2e^2 \times \frac{e^y-1}{y} \right] = \\ &= 1 \times e^2 + 2e^2 \times 1 = 3e^2 \end{aligned}$$

Pág. 101

$$36. \text{ a) } f'(x) = (xe^{2x})' = (x)' \times e^x + x \times (e^{2x})' = e^x + x \times 2 \times e^{2x} = (1 + 2x)e^{2x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1 + 2x)e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{b) } f'(x) = \left(\frac{x}{e^{0,2x}}\right)' = \frac{(x)' \times e^{0,2x} - x \times (e^{0,2x})'}{(e^{0,2x})^2} = \frac{e^{0,2x} - x \times 0,2 \times e^{0,2x}}{e^{0,4x}} = \frac{e^{0,2x}(1 - 0,2x)}{e^{0,4x}} = \frac{1 - 0,2x}{e^{0,2x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 0,2x}{e^{0,2x}} = 0 \Leftrightarrow 1 - 0,2x = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$\text{c) } f'(x) = [(e^{3x} - 1)^2]' = 2(e^{3x} - 1)(e^{3x} - 1)' = 2(e^{3x} - 1) \times 3e^{3x} = 6e^{3x}(e^{3x} - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6e^{3x}(e^{3x} - 1) = 0 \Leftrightarrow e^{3x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{d) } f'(x) = \left(xe^{\frac{3}{x}}\right)' = (x)'e^{\frac{3}{x}} + x \left(e^{\frac{3}{x}}\right)' = e^{\frac{3}{x}} + x \left(\frac{3}{x}\right)' e^{\frac{3}{x}} = e^{\frac{3}{x}} + x \left(-\frac{3}{x^2}\right) e^{\frac{3}{x}} =$$

$$= e^{\frac{3}{x}} - \frac{3}{x} e^{\frac{3}{x}} = e^{\frac{3}{x}} \left(1 - \frac{3}{x}\right) = e^{\frac{3}{x}} \times \frac{x-3}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{3}{x}} \times \frac{x-3}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$37. f'(x) = (\sqrt{e^x + 1})' = \frac{1}{2\sqrt{e^x + 1}} \times (e^x + 1)' = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x + 1}}$$

$$f'(0) = \frac{e^0}{2\sqrt{e^0 + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ pelo que a equação reduzida da reta é da forma } y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + b.$$

Como $f(0) = \sqrt{e^0 + 1} = \sqrt{2}$, a reta passa no ponto de coordenadas $(0, \sqrt{2})$, pelo que $b = \sqrt{2}$.

Portanto, a equação reduzida da reta é $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \sqrt{2}$.

Pág. 104

$$38. \text{ a) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^1 \quad \text{b) } 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \text{c) } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2$$

$$39. \text{ a) } 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \quad \text{b) } 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = \sqrt{27} \quad \text{c) } \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

$$40. \text{ a) } \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 4^{-\frac{1}{3}} \quad \text{b) } \sqrt{2^{-3}} = (2^{-3})^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}} \quad \text{c) } \frac{1}{\sqrt[5]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{5}}} = a^{-\frac{1}{5}}$$

$$41. \text{ a) } 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{b) } 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$$

$$\text{c) } 9^{1,5} = 9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = \sqrt{3^6} = 3^3 = 27$$

$$42. \text{ a) } \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} \quad \text{b) } 5^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \quad \text{c) } 16 = 4^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$$

$$\text{d) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-6} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-2} = \left(\frac{8}{27}\right)^{-2} \quad \text{e) } 2^8 = (2^4)^2 = 16^2 = \left(\frac{1}{16}\right)^{-2}$$

$$\text{f) } \sqrt[3]{5^{-12}} = 5^{\frac{12}{3}} = 5^4 = (5^2)^2 = 25^2 = \left(\frac{1}{25}\right)^{-2}$$

$$43. \text{ a) } 8 = 2^3$$

$$\text{b) } 16 = 4^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$$

$$\text{c) } 0,008 = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}$$

$$\text{d) } 0,125 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{\sqrt{4}^3} = \frac{1}{\frac{3}{4}^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

44. (C)

$$(3^a)^b = 3^{ab}$$

45. f é crescente se e só se $\frac{2k-1}{k} > 1$.

Tem-se $\frac{2k-1}{k} > 1 \Leftrightarrow \frac{2k-1}{k} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{k-1}{k} > 0 \Leftrightarrow k(k-1) > 0 \Leftrightarrow k < 0 \vee k > 1$

O conjunto é $] -\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

Pág. 105

$$46. \text{ a) } 5^{2x} = (5^x)^2 = 2^2 = 4$$

$$\text{b) } 5^{-x} = (5^x)^{-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } 5^{\frac{x}{2}} = (5^x)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{d) } 25^{-x} = (5^{2x})^{-1} = (5^x)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{e) } 5^{x+1} = 5^x \times 5 = 2 \times 5 = 10$$

$$47. \text{ a) } 3^{x+1} = 6 \Leftrightarrow 3^x \times 3 = 6 \Leftrightarrow 3^x = 2$$

$$\text{b) } 3^{2x} = (3^x)^2 = 2^2 = 4$$

$$\text{c) } 3^{\frac{x}{2}} = (3^x)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{d) } 3^{-x+1} = 3^{-x} \times 3 = \frac{1}{3^x} \times 3 = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

$$48. \text{ a) } 5^{x+1} - 5^x = 5^x(5 - 1) = 4 \times 5^x$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2^{1-x} = 2^{-x} + 2^{1-x} = 2^{-x}(1 + 2) = 3 \times 2^{-x}$$

$$\text{c) } 8^{x+1} + 2^{3x-2} = 2^{3x} \times 8 + 2^{3x} \times \frac{1}{4} = 2^{3x} \left(8 + \frac{1}{4}\right) = 2^{3x} \times \frac{33}{4} = 2^{3x} \times \frac{33}{2^2} = 33 \times 2^{3x-2}$$

$$\text{d) } 4^x + 2^{x+1} = 2^{2x} + 2^{x+1} = 2^x(2^x + 2)$$

49. a) $2^x = 0,125^{1-x} \Leftrightarrow 2^x = \left(\frac{1}{8}\right)^{1-x} \Leftrightarrow 2^x = (2^{-3})^{1-x} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-3+3x} \Leftrightarrow x = -3 + 3x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$; conjunto-solução = $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

b) $4^{x^2} \leq (\sqrt{8})^x \Leftrightarrow 2^{2x^2} \leq 2^{\frac{3x}{2}} \Leftrightarrow 2x^2 \leq \frac{3x}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow x(4x - 3) \leq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq \frac{3}{4}$; conjunto-solução = $\left[0, \frac{3}{4}\right]$

c) $3^x + 3^{x+1} - 12 = 0 \Leftrightarrow 3^x + 3 \times 3^x - 12 = 0 \Leftrightarrow 4 \times 3^x - 12 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$;
 conjunto-solução = $\{1\}$

d) $9^{x+1} + 3^{x+2} = 4 \Leftrightarrow 9 \times 9^x + 9 \times 3^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 9 \times 3^{2x} + 9 \times 3^x - 4 = 0 \stackrel{3^x=y}{\Leftrightarrow}$
 $\Leftrightarrow 9y^2 + 9y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3} \vee y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \underbrace{3^x = -\frac{4}{3}}_{\text{eq. imp.}} \vee 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -1$;

conjunto-solução = $\{-1\}$

e) $2^{2-x} + 3 \leq 2^x \Leftrightarrow \frac{4}{2^x} - 2^x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 4 - (2^x)^2 + 3 \times 2^x \leq 0 \stackrel{2^x=y}{\Leftrightarrow} -y^2 + 3y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -(y+1)(y-4) \leq 0 \Leftrightarrow y \leq -1 \vee y \geq 4 \Leftrightarrow \underbrace{2^x \leq -1}_{\text{eq. imp.}} \vee 2^x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2$;

conjunto-solução = $[2, +\infty[$

f) $x \times 2^x > 8x \Leftrightarrow x \times 2^x - 8x > 0 \Leftrightarrow x(2^x - 8) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2^x - 8 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ 2^x - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3 \vee x < 0$; conjunto-solução = $] -\infty, 0[\cup]3, +\infty[$

g) $x^{2x+1} = x^4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee (2x+1 = 4 \wedge x > 0) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = \frac{3}{2}$;
 conjunto-solução = $\left\{0, 1, \frac{3}{2}\right\}$

50. a) • $D_f = \mathbb{R}$

• $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

b) • $D_f = \{x \in \mathbb{R}: 3^x - 9^{x+1} \neq 0\}$

Ora, $3^x - 9^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 3^x = 9^{x+1} \Leftrightarrow 3^x = 3^{2x+2} \Leftrightarrow x = 2x+2 \Leftrightarrow x = -2$

Portanto, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

• $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2+x}{3^x-9^{x+1}} = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \wedge 3^x - 9^{x+1} \neq 0 \Leftrightarrow x = -2 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

c) • $D_f = \{x \in \mathbb{R}: (4^x - 1)(2^{-x} - 2) \geq 0\}$

| Cálculo aux.

	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$4^x - 1$	-	-	-	0	+
$2^{-x} - 2$	+	0	-	-	-
$(4^x - 1)(2^{-x} - 2)$	-	0	+	0	-

Portanto, $D_f = [-1, 0]$

• $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(4^x - 1)(2^{-x} - 2)} = 0 \Leftrightarrow 4^x - 1 = 0 \vee 2^{-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4^x = 1 \vee 2^{-x} = 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

51. a) Tem-se, $\forall x \in D_f, f(-x) = 2^{(-x)^2-3} = 2^{x^2-3} = f(x)$, pelo que f é par; o gráfico de f é, por isso, simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

b) $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow 2^{x^2-3} \geq 4^x \Leftrightarrow 2^{x^2-3} \geq 2^{2x} \Leftrightarrow x^2 - 3 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 3$; conjunto-solução = $] -\infty, -1] \cup [3, +\infty[$

52. a) Seja N o ano corrente; o tempo, em anos, que decorreu desde $t = 0$ é $N - 1950$. Portanto, o número de habitantes no corrente ano é dado por $15 \times 2^{0,04(N-1950)} \times 1000$.

b) $15 \times 2^{0,04(N-1950)} = 60 \Leftrightarrow 2^{0,04(N-1950)} = 4 \Leftrightarrow 0,04(N - 1950) = 2 \Leftrightarrow n - 1950 = 50 \Leftrightarrow \Leftrightarrow N = 2000$; portanto, foi no ano 2000.

c) $\frac{n(t+1)}{n(t)} = \frac{15 \times 2^{0,04(t+1)}}{15 \times 2^{0,04t}} = \frac{2^{0,04t+0,04}}{2^{0,04t}} = 2^{0,04} \approx 1,03$; este resultado significa que a cada ano, a população da freguesia aumenta cerca de 3%.

Pág. 106

53. a) $i(0) = \frac{200}{1+6 \times 2^{2-0,1 \times 0}} = \frac{200}{1+6 \times 4} = 8$; portanto, havia oito perus infetados quando o vírus foi detetado.

$i(t) = 10 \times i(0) \Leftrightarrow \frac{200}{1+6 \times 2^{2-0,1t}} = 80 \Leftrightarrow 1 + 6 \times 2^{2-0,1t} = 2,5 \Leftrightarrow 2^{2-0,1t} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2 - 0,1t = -2 \Leftrightarrow t = 40$

Tinham passado 40 dias.

b) $\frac{200}{1+6 \times 2^{2-0,1t}} = \frac{200}{1+3 \times 2^{2-0,05t}} \Leftrightarrow 1 + 6 \times 2^{2-0,1t} = 1 + 3 \times 2^{2-0,05t} \Leftrightarrow 6 \times 2^{2-0,1t} = 3 \times 2^{2-0,05t} \Leftrightarrow 2 \times 2^{2-0,1t} = 2^{2-0,05t} \Leftrightarrow 2^{3-0,1t} = 2^{2-0,05t} \Leftrightarrow 3 - 0,1t = 2 - 0,05t \Leftrightarrow 0,1t = -1 \Leftrightarrow t = 20$

54. a) $\lim \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{n+1} = \lim \left[\left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{n+3} \times \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{-2}\right] =$
 $= \lim \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{n+3} \times \lim \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{-2} = e^2 \times 1 = e^2$

b) $\lim \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{2n} = \lim \left(\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{3}{2n}}\right)^{2n} = \lim \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{3}{2n}\right)^{2n}} = \frac{e}{e^{-3}} = e^4$

c) $\lim \left(3 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim \left[3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n = \lim \left[3^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = \lim 3^n \times \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$
 $= +\infty \times e = +\infty$

d) $\lim \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n = \lim \left[\frac{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{3n\left(1-\frac{2}{3n}\right)}\right]^n = \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{\lim \left(1+\frac{1/2}{n}\right)^n}{\lim \left(1-\frac{2/3}{n}\right)^n} = 0 \times \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{2}{3}}} = 0$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{3-2n} \right)^{4n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2n(1-\frac{1}{2n})}{-2n(1-\frac{3}{2n})} \right]^{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(-1) \frac{(1-\frac{1}{2n})}{(1-\frac{3}{2n})} \right]^{4n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{4n} \times \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1-\frac{1/2}{n})^{4n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1-\frac{3/2}{n})^{4n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1-\frac{1/2}{n})^n \right]^4}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1-\frac{3/2}{n})^n \right]^4} = \frac{\left(e^{-\frac{1}{2}} \right)^4}{\left(e^{-\frac{3}{2}} \right)^4} = \frac{e^{-2}}{e^{-6}} = e^4 \end{aligned}$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n-1)(n+1)}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1)^n$$

Seja (a_n) a sucessão de termo geral $n-1$.

Tem-se $\forall n \in \mathbb{N}_3, n-1 > 2$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}_3, (n-1)^n > 2^n$.

Então, como $\lim 2^n = +\infty$, pode-se concluir, por comparação, que $\lim (n-1)^n = +\infty$.

$$\begin{aligned} 55. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{2x}}{3x} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x}-1}{2x} \times 2 \right) = -\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \\ &\stackrel{2x=y}{=} -\frac{2}{3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y} = -\frac{2}{3} \times 1 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2}-1}{4-x^2} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x-2=y}} \frac{e^y-1}{4-(y+2)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{-y^2-4y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y(-y-4)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{e^y-1}{y} \times \frac{1}{-y-4} \right] = 1 \times \left(-\frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{2x}}{e^{3x}-1} &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{2x}-1}{x}}{\frac{e^{3x}-1}{x}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times \frac{e^{2x}-1}{2x}}{3 \times \frac{e^{3x}-1}{3x}} = \\ &= -\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{e^{3x}-1}{3x}} = -\frac{2}{3} \times \frac{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y}}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t-1}{t}} = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{1} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2-x}{e^{2x-1}-1} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ 2x-1=y}} \frac{2\left(\frac{y+1}{2}\right)^2 - \frac{y+1}{2}}{e^y-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{y+1}{2}\right)^2 - \frac{y+1}{2}}{e^y-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(y^2+y)}{e^y-1} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y(y+1)}{e^y-1} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{y}{e^y-1} \times (y+1) \right] = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x^2} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x)^2-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^x-1}{x} \times \frac{e^x+1}{x} \right] = 1 \times \frac{1}{0} \\ \text{Ora, como } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{e^x-1}{x} \times \frac{e^x+1}{x} \right] &= 1 \times \frac{1}{0^-} = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^x-1}{x} \times \frac{e^x+1}{x} \right] = 1 \times \frac{1}{0^+} = +\infty, \text{ não} \\ \text{existe o limite } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x^2}. \end{aligned}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[3x \left(e^{\frac{2}{x}} - 1 \right) \right] \stackrel{\infty \times 0}{=} \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ 2/x=y}} \left[3 \times \frac{2}{y} (e^y - 1) \right] = 6 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y} = 6 \times 1 = 6$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1}-x}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x-1=y}} \frac{e^y-(y+1)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{e^y-1}{y} - \frac{y}{y} \right] = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{h) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x e^{x^2} + e}{x+1} &\stackrel{\substack{0 \\ 0}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y-1)e^{(y-1)^2} + e}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y e^{(y-1)^2} - e^{(y-1)^2} + e}{y} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{y e^{(y-1)^2}}{y} - \frac{e^{(y-1)^2} - e}{y} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \underbrace{\left(e^{(y-1)^2} \right)}_{=e} - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y^2-2y+1} - e}{y} = \\
&= e - e \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y^2-2y-1}}{y} = e - e \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{e^{y^2-2y-1}}{y^2-2y} \times \frac{y^2-2y}{y} \right) = \\
&= e - e \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y^2-2y-1}}{y^2-2y} \times \lim_{y \rightarrow 0} (y-2) = e - e \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y^2-2y-1}}{y^2-2y} \times (-2) = \\
&= e + 2e \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y^2-2y-1}}{y^2-2y} \stackrel{\substack{0 \\ 0}}{=} \lim_{y^2-2y=t} = e + 2e \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t-1}{t} = e + 2e \times 1 = 3e
\end{aligned}$$

Pág. 107

$$\begin{aligned}
56. \text{ a) } f'(x) &= [e^x(3x-1)]' = (e^x)'(3x-1) + e^x(3x-1)' = (e^x)(3x-1) + 3e^x = \\
&= (e^x)(3x+2)
\end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x)(3x+2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{eq. imp.}} \vee 3x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } f'(x) &= \left(\frac{e^{x^2+1}}{x-1} \right)' = \frac{(e^{x^2+1})'(x-1) - e^{x^2+1}(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(e^{x^2+1})(2x)(x-1) - e^{x^2+1}}{(x-1)^2} = \\
&= \frac{(e^{x^2+1})(2x^2-2x) - e^{x^2+1}}{(x-1)^2} = \frac{(e^{x^2+1})(2x^2-2x-1)}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{(e^{x^2+1})(2x^2-2x-1)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow (e^{x^2+1})(2x^2-2x-1) = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (e^{x^2+1})(2x^2-2x-1) = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow 2x^2-2x-1 = 0 \wedge x \neq 1 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \vee x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } f'(x) &= [(x^2+1)e^x]' = (x^2+1)'e^x + (x^2+1)(e^x)' = 2xe^x + (x^2+1)e^x = \\
&= (x^2+2x+1)e^x = (x+1)^2e^x \\
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow (x+1)^2e^x = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } f'(x) &= \left(\frac{x e^{-x}}{x+2} \right)' = \frac{(x e^{-x})'(x+2) - x e^{-x}(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{[x'e^{-x} + x(e^{-x})'](x+2) - x e^{-x}}{(x+2)^2} = \\
&= \frac{[e^{-x} - x e^{-x}](x+2) - x e^{-x}}{(x+2)^2} = \frac{e^{-x}(1-x)(x+2) - x e^{-x}}{(x+2)^2} = \frac{e^{-x}(-x^2-x+2) - x e^{-x}}{(x+2)^2} = \frac{e^{-x}(-x^2-2x+2)}{(x+2)^2} \\
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{-x}(-x^2-2x+2)}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(-x^2-2x+2) = 0 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -x^2-2x+2 = 0 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{3} \vee x = -1 + \sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
57. f'(x) &= g'(x) \Leftrightarrow (e^x + x)' = (e^{2x})' \Leftrightarrow e^x + 1 = 2e^{2x} \Leftrightarrow 2e^{2x} - e^x - 1 = 0 \stackrel{y=e^x}{\Leftrightarrow} \\
&\Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \vee y = 1 \stackrel{y=e^x}{\Leftrightarrow} \underbrace{e^x = -\frac{1}{2}}_{\text{eq. imp.}} \vee e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0
\end{aligned}$$

58. Seja a , $a > 0$, a abscissa do ponto B .

As coordenadas do ponto A são (a, e^a) .

O declive da reta r é igual a $f'(a)$, ou seja, é igual a e^a .

Portanto, a reta r é definida pela condição $y - e^a = e^a(x - a)$.

Tem-se $y - e^a = e^a(x - a) \Leftrightarrow y = e^a x - ae^a + e^a$.

Como a ordenada na origem da reta r é 0 , tem-se $-ae^a + e^a = 0$.

Ora, $-ae^a + e^a = 0 \Leftrightarrow e^a(-a + 1) = 0 \Leftrightarrow -a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Então, área do triângulo $[AOB] = \frac{\overline{OB} \times \overline{AB}}{2} = \frac{1 \cdot e^1}{2} = \frac{e}{2}$.

3. Funções logarítmicas

Pág. 108

59. a) $3^2 = 9 \Leftrightarrow 2 = \log_3(9)$ b) $\log_5\left(\frac{1}{5}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} = 5^{-1}$ c) $4^0 = 1 \Leftrightarrow 0 = \log_4(1)$

Pág. 109

60. a) $2 = \log_5(5^2)$ b) $2 = 5^{\log_5(2)}$

61. a) $5^{1+\log_5(3)} = 5 \times 5^{\log_5(3)} = 5 \times 3 = 15$ b) $3^{2\log_3(4)} = (3^{\log_3(4)})^2 = 4^2 = 16$

c) $\log(1000) = \log(10^3) = 3$ d) $\log_4(2^{10}) = \log_4(4^5) = 5$

e) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right) = \ln(e^{-3}) = -3$

Pág. 110

62. A função f é crescente se e só se a função definida por $\log_{3-a}(x)$ for decrescente, ou seja, se e só se $0 < 3 - a < 1$.

Ora, $0 < 3 - a < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - a > 0 \\ 3 - a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 3 \\ a > 2 \end{cases} \Leftrightarrow a \in]2, 3[$.

63. Considerando sempre números positivos e logaritmos com a mesma base:

a) A soma dos logaritmos de dois números é igual ao logaritmo do produto desses números ou, abreviadamente, a soma de logaritmos é o logaritmo do produto.

b) O logaritmo de um número é o simétrico do logaritmo do inverso desse número.

c) A diferença dos logaritmos de dois números é igual ao logaritmo do quociente desses números ou, abreviadamente, a diferença de logaritmos é o logaritmo do quociente.

d) O logaritmo da potência de um número é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

64. a) $\log_3(6) + \log_3(2) = \log_3(6 \times 2) = \log_3(12)$

b) $\log_2(9) - \log_2(3) = \log_2(9 \div 3) = \log_2(3)$

c) $5 \times \log(2) = \log(2^5) = \log(32)$

d) $1 + \log_3(4) = \log_3(3) + \log_3(4) = \log_3(3 \times 4) = \log_3(12)$

$$\text{e)} \ln(5) - 2 = \ln(5) - \ln(e^2) = \ln\left(\frac{5}{e^2}\right)$$

$$\text{f)} \frac{\log(5)}{2} + \log(3) = \frac{1}{2}\log(5) + \log(3) = \log\left(5^{\frac{1}{2}}\right) + \log(3) = \log(\sqrt{5}) + \log(3) = \log(3\sqrt{5})$$

Pág. 111

$$65. \text{ a)} \log_4(8) + \log_4(2) = \log_4(16) = 2$$

$$\text{b)} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(1) - \ln(e) = -\ln(e) = -1$$

$$\text{c)} \log(\sqrt{20}) - \log(\sqrt{2}) = \log\left(\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}}\right) = \log(\sqrt{10}) = \log\left(10^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log(10) = \frac{1}{2}$$

$$66. \text{ Tem-se } \log_{a^x}(u^x) = \frac{\log_a(u^x)}{\log_a(a^x)} = \frac{x\log_a(u)}{x} = \log_a(u) ; \text{ portanto, } \log_a(u) = \log_{a^x}(u^x) .$$

$$\text{Aplicando a propriedade, tem-se: } \log_{\sqrt{2}}(4) = \log_{(\sqrt{2})^2}(4^2) = \log_2(2^4) = 4 .$$

$$67. \text{ a)} \log(6) \approx 0,77815 \approx 0,78$$

$$\text{b)} \ln(20) \approx 2,99573 \approx 3,00$$

$$\text{c)} \log_5(100) = \frac{\ln(100)}{\ln(5)} \approx 2,86135 \approx 2,86$$

$$\text{d)} \log_3(24) = \frac{\ln(24)}{\ln(3)} \approx 2,892789 \approx 2,89$$

Pág. 112

68. Função inversa de f :

• $D_f = \mathbb{R}$; portanto, o conjunto de chegada de f^{-1} é $\mathbb{R}$.

$$\bullet e^{x-2} > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-2} > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-2} + 1 > 1 \Leftrightarrow \frac{2e^{x-2}+1}{3} > \frac{1}{3}$$

$$\text{Portanto, } D_{f^{-1}} = D'_f = \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[.$$

$$\bullet \frac{2e^{x-2}+1}{3} = y \Leftrightarrow 2e^{x-2} + 1 = 3y \Leftrightarrow e^{x-2} = \frac{3y-1}{2} \Leftrightarrow x-2 = \ln\left(\frac{3y-1}{2}\right) \Leftrightarrow x = 2 + \ln\left(\frac{3y-1}{2}\right)$$

$$\text{Então, } f^{-1}(x) = 2 + \ln\left(\frac{3x-1}{2}\right) .$$

$$\text{Portanto, } f^{-1}: \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[\rightarrow \mathbb{R} \text{ é a função bijetiva definida por } f^{-1}(x) = 2 + \ln\left(\frac{3x-1}{2}\right) .$$

Função inversa de g :

$$\bullet D_g = \{x \in \mathbb{R}: 1 - 2x > 0\} = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[; \text{ portanto, o conjunto de chegada de } g^{-1} \text{ é } \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[.$$

$$\bullet D_{g^{-1}} = D'_g = \mathbb{R}$$

$$\bullet \frac{\log(1-2x)}{3} + 1 = y \Leftrightarrow \log(1-2x) = 3(y-1) \Leftrightarrow 1-2x = 10^{3y-3} \Leftrightarrow x = \frac{1-10^{3y-3}}{2}$$

$$\text{Então, } g^{-1}(x) = \frac{1-10^{3x-3}}{2}.$$

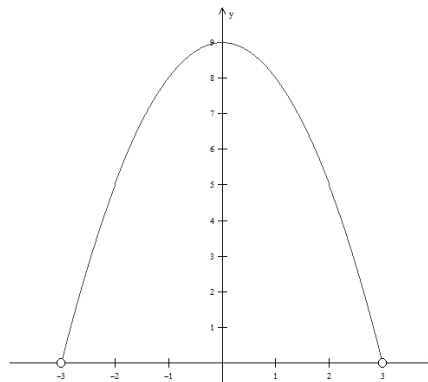
$$\text{Portanto, } g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[\text{ é a função bijetiva definida por } g^{-1}(x) = \frac{1-10^{3x-3}}{2}.$$

$$69. \text{ a) } D_g = \{x \in \mathbb{R}: f(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: 9 - x^2 > 0\} =]-3, 3[$$

Determinação de $D'_f|_{]-3,3[}$:

Na figura ao lado está representado o gráfico da função $f|_{]-3,3[}$.

$$\text{Tem-se } D'_f|_{]-3,3[} =]0, 9].$$



b) Seja h a função real de variável real definida por $f(x) = \log_3(x)$.

O contradomínio da função g é o transformado do conjunto $]0, 9]$ pela função h .

Tem-se:

$$\bullet D_h =]0, +\infty[, \text{ pelo que }]0, 9] \subset D_h$$

$$\bullet h(9) = \log_3(9) = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_3(x) = -\infty$$

$\bullet h$ é contínua e crescente no domínio, pelo que é contínua e crescente em $]0, 9]$.

Então, o transformado do conjunto $]0, 9]$ pela função h é $]-\infty, 2]$.

$$\text{Portanto, } D'_g =]-\infty, 2].$$

$$70. \text{ a) } \log_2(32) = \log_2(2^5) = 5$$

$$\text{b) } \log_{\sqrt{2}}(1) = \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}^0) = 0$$

$$\text{c) } \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \log_2\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \log_5(0,04) = \log_5\left(\frac{4}{100}\right) = \log_5\left(\frac{1}{25}\right) = \log_5(5^{-2}) = -2$$

$$\text{e) } \log_4(\sqrt[3]{2}) = \frac{\log_2(\sqrt[3]{2})}{\log_2(4)} = \frac{\log_2\left(2^{\frac{1}{3}}\right)}{\log_2(2^2)} = \frac{1/3}{2} = \frac{1}{6}$$

Pág. 113

$$71. \text{ a) } \log(9) = \log(3^2) = 2 \log(3) = 2d$$

$$\text{b) } \log(200) = \log(2 \times 100) = \log(2) + \log(100) = c + 2$$

$$\text{c) } \log(18) = \log(2 \times 3^2) = \log(2) + \log(3^2) = c + 2 \log(3) = c + 2d$$

$$\text{d) } \log(15) = \log(10 \times 1,5) = \log\left(10 \times \frac{3}{2}\right) = \log(10) + \log(3) - \log(2) = 1 + d - c$$

$$72. 5^x = 5^{\log_5(4) \times \log_4(3)} = \left[5^{\log_5(4)}\right]^{\log_4(3)} = 4^{\log_4(3)} = 3$$

73. Tem-se, para $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$, $\log_a(x-2) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$, pelo que a abscissa do vértice que pertence simultaneamente ao gráfico de f e ao eixo Ox é igual a 3 e, portanto, o comprimento do lado do retângulo contido neste eixo é igual a 2.

O comprimento de um lado vertical do retângulo é igual a $f(5) = \log_a(5-2) = \log_a(3)$.

Portanto, a área do retângulo é igual a $2 \log_a(3)$.

$$\text{Tem-se: } 2 \log_a(3) = 8 \Leftrightarrow \log_a(3) = 4 \Leftrightarrow a^4 = 3 \Leftrightarrow a = \sqrt[4]{3}$$

$$74. \text{a) } D_f = \{x \in \mathbb{R}: x+2 > 0\} =]-2, +\infty[$$

$$\text{b) } D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 2 > 0\} = \mathbb{R} \quad | \quad x^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow x^2 > -2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) } D_f = \{x \in \mathbb{R}: |x-3| > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad | \quad |x-3| > 0 \Leftrightarrow x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$$

$$\text{d) } D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq 0 \wedge x-2 > 0\right\}$$

Ora:

$$\begin{cases} 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq -1 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x-2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x-2 \leq 2 \Leftrightarrow 2 < x \leq 4$$

Portanto, $D_f =]2, 4]$.

$$\text{e) } D_f = \{x \in \mathbb{R}: 4 - x^2 > 0\} =]-2, 2[$$

$$\text{f) } D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{x+1}{x-2} > 0\right\}$$

$$\text{Ora, } \frac{x+1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[.$$

Portanto, $D_f =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[.$

Pág. 114

$$75. \text{a) } \bullet D_f = \{x \in \mathbb{R}: x+2 > 0 \wedge x-1 > 0\}$$

$$\text{Ora, } \begin{cases} x+2 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

Portanto, $D_f =]1, +\infty[.$

$$\bullet D_g = \{x \in \mathbb{R}: (x+2)(x-1) > 0\}$$

$$\text{Ora, } (x+2)(x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[.$$

Portanto, $D_g =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[.$

b) • $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 > 0\}$

Ora, $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Portanto, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• $D_g = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$

76. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{x} = \frac{\ln(\frac{1}{0^+})}{0^+} = \frac{\ln(+\infty)}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x} \right) \right] = +\infty \times \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{+\infty} \right) = +\infty \times \log_{\frac{1}{2}}(0^+) = +\infty \times (+\infty) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln(x) + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) \left(2 + \frac{1}{\ln(x)} \right)}{\ln(x) \left(1 + \frac{3}{\ln(x)} \right)} = \frac{2 + \frac{1}{+\infty}}{1 + \frac{3}{+\infty}} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2$

Pág. 115

77. a) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x + 3 > 0 \wedge 1 - x > 0\}$$

Ora, $\begin{cases} x + 3 > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 1$

Portanto, $D =]-3, 1[$.

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_2(x + 3) = \log_2(1 - x) \Leftrightarrow x + 3 = 1 - x \Leftrightarrow x = -1$$

Ora $-1 \in D$. Portanto, o conjunto-solução é $\{-1\}$.

b) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: 2 - x > 0 \wedge x - 4 > 0\}$$

Ora, $\begin{cases} 2 - x > 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$

Portanto, $D = \emptyset$ e, portanto, o conjunto-solução é $\emptyset$.

c) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x - 6 > 0 \wedge 3 - x > 0\}$$

Ora, $\begin{cases} x - 6 > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x < 3 \wedge x > 6$

Portanto, $D =]-\infty, 3[\cup]6, +\infty[$.

Para $x \in D$, tem-se:

$$\begin{aligned} \log_2(x - 6) + 1 &= \log_2(3 - x) \Leftrightarrow \log_2(x - 6) + \log_2(2) = \log_2(3 - x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_2(2x - 12) = \log_2(3 - x) \Leftrightarrow 2x - 12 = 3 - x \Leftrightarrow 3x = 15 \Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Ora $5 \notin D$. Portanto, o conjunto-solução é $\emptyset$.

d) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge x - 8 > 0\}$$

Ora, $\begin{cases} x > 0 \\ x - 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 8 \end{cases} \Leftrightarrow x > 8$

Portanto, $D =]8, +\infty[$.

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_3 x + \log_3(x-8) = 2 \Leftrightarrow \log_3(x^2 - 8x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 8x = 9 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 9$$

Ora $-1 \notin D$ e $9 \in D$. Portanto, o conjunto-solução é $\{9\}$.

e) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x+4 > 0 \wedge x-1 > 0\}$$

Ora,
$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

Portanto, $D =]1, +\infty[$.

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_6(x+4) - \log_6(x-1) = 1 \Leftrightarrow \log_6(x+4) = \log_6(x-1) + \log_6 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_6(x+4) = \log_6(6x-6) \Leftrightarrow x+4 = 6x-6 \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2$$

Ora $2 \in D$. Portanto, o conjunto-solução é $\{2\}$.

f) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x+4 > 0 \wedge x-1 > 0\}$$

Ora,
$$\begin{cases} x > 0 \\ x+1,2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -1,2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

Portanto, $D = \mathbb{R}^+$.

Para $x \in D$, tem-se:

$$2 \ln x = \ln 5 + \ln(x+1,2) \Leftrightarrow \ln(x^2) = \ln(5x+6) \Leftrightarrow x^2 = 5x+6 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 6$$

Ora $-1 \notin D$ e $6 \in D$. Portanto, o conjunto-solução é $\{6\}$.

Pág. 116

78. a) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$$

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_2(x) < \log_2(5) \Leftrightarrow x < 5$$

Ora $] -\infty, 5[\cap D =]0, 5[$. Portanto, o conjunto-solução é $]0, 5[$.

b) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$$

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x) < \log_{\frac{1}{2}}(5) \Leftrightarrow x > 5$$

Ora $]5, +\infty[\cap D =]5, +\infty[$. Portanto, o conjunto-solução é $]5, +\infty[$.

c) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: 1-x > 0\}$$

Ora, $1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Portanto, $D =]-\infty, 1[$.

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_3(1-x) \leq 2 \Leftrightarrow 1-x \leq 9 \Leftrightarrow x \geq -8$$

Ora $[-8, +\infty[\cap D = [-8, 1[$. Portanto, o conjunto-solução é $[-8, 1[$.

d) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x + 2 > 0 \wedge x + 3 > 0\}$$

Ora, $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow x > -2$

Portanto, $D =]-2, +\infty[$.

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log(x + 2) + \log(x + 3) > \log 12 \Leftrightarrow \log(x^2 + 5x + 6) > \log 12 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 > 12 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow (x + 6)(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x < -6 \vee x > 1$$

Ora $(]-\infty, -6[\cup]1, +\infty[) \cap D =]1, +\infty[$. Portanto, o conjunto-solução é $]1, +\infty[$.

e) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 > 0\}$$

Ora, $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Portanto, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_{81}(x^2) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 \leq 81^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$$

Ora $[-3, 3] \cap D = [-3, 3] \setminus \{0\}$. Portanto, o conjunto-solução é $[-3, 0[\cup]0, 3]$.

Pág. 117

79. a) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x - 1 > 0 \wedge 2 - x > 0\}$$

Ora, $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$

Portanto, $D =]1, 2[$.

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_2(x - 1) \geq 1 + \log_2(2 - x) \Leftrightarrow \log_2(x - 1) \geq \log_2(2) + \log_2(2 - x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2(x - 1) \geq \log_2(4 - 2x) \Leftrightarrow x - 1 \geq 4 - 2x \Leftrightarrow 3x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$$

Ora $[\frac{5}{3}, +\infty[\cap D = [\frac{5}{3}, 2[$. Portanto, o conjunto-solução é $[\frac{5}{3}, 2[$.

b) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x - 1 > 0 \wedge 13 - x > 0\}$$

Ora, $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ 13 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 13 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 13$

Portanto, $D =]1, 13[$.

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_2(x - 1) \leq 5 - \log_2(13 - x) \Leftrightarrow \log_2(x - 1) + \log_2(13 - x) \leq 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2(-x^2 + 14x - 13) \leq 5 \Leftrightarrow -x^2 + 14x - 13 \leq 32 \Leftrightarrow -x^2 + 14x - 45 \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -(x - 5)(x - 9) \leq 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x - 9) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5 \vee x \geq 9$$

Ora $(]-\infty, 5] \cup [9, +\infty[) \cap D =]1, 5] \cup [9, 13[$. Portanto, o conjunto-solução é $]1, 5] \cup [9, 13[$.

c) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 > 0 \wedge x > 0\}$$

Ora, $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

Portanto, $D = \mathbb{R}^+$.

Para $x \in D$, tem-se:

$$2 \log_{\frac{1}{4}}(x+1) \leq \log_{\frac{1}{4}}(x) - 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}[(x+1)^2] \leq \log_{\frac{1}{4}}(x) - \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}[(x+1)^2] \leq \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{\frac{1}{4}}\right) \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 4x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 4x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Ora $\mathbb{R} \cap D = \mathbb{R}^+$. Portanto, o conjunto-solução é $\mathbb{R}^+$.

d) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: 2 - x > 0\}$$

Ora, $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Portanto, $D =]-\infty, 2[$.

Para $x \in D$, tem-se:

$$x \ln(2-x) \geq 2x \Leftrightarrow x \ln(2-x) - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x[\ln(2-x) - 2] \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x[\ln(2-x) - \ln(e^2)] \geq 0 \Leftrightarrow x \ln\left(\frac{2-x}{e^2}\right) \geq 0$$

Elaboremos, para $x \in D$, um quadro de sinais da expressão $x \ln\left(\frac{2-x}{e^2}\right)$:

$$\ln\left(\frac{2-x}{e^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{e^2} = 1 \Leftrightarrow 2-x = e^2 \Leftrightarrow x = 2 - e^2$$

	$-\infty$	$2 - e^2$		0		2
x	-	-	-	0	+	
$\ln\left(\frac{2-x}{e^2}\right)$	-	0	-	-	-	
$x \ln\left(\frac{2-x}{e^2}\right)$	+	0	+	0	-	n.d.

Portanto, o conjunto-solução é $[2 - e^2, 0]$.

e) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge \log x \neq 0\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

Elaboremos, para $x \in D$, um quadro de sinais da expressão $\frac{2-x}{\log x}$:

	0		1		2	$+\infty$
$2 - x$		+		+	0	-
$\log x$		-		+	+	+
$\frac{2-x}{\log x}$	n.d.	-	n.d.	+	0	-

Portanto, o conjunto-solução é $]0, 1[\cup]2, +\infty[$.

f) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 > 0 \wedge 6 - 3x > 0\}$$

$$\text{Ora, } \begin{cases} x + 1 > 0 \\ 6 - 3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

Portanto, $D =]-1, 2[$.

Elaboremos, para $x \in D$, um quadro de sinais da expressão $\log_2(x+1) \cdot \log_2(6-3x)$.

	-1		0		$\frac{5}{3}$		2
$\log_2(x+1)$		-	0	+	+	+	
$\log_2(6-3x)$		+	+	+	0	-	
$\log_2(x+1) \cdot \log_2(6-3x)$	n.d.	-	0	+	0	-	n.d.

Portanto, o conjunto-solução é $] -1, 0] \cup \left[\frac{5}{3}, 2\right[$.

Pág. 120

80. a) Tem-se $D_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = (2^x + 2^{-x})' = 2^x \times \ln(2) + (-x)' \times 2^{-x} \times \ln(2) = \ln(2) (2^x - 2^{-x})$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(2) (2^x - 2^{-x}) = 0 \Leftrightarrow 2^x - 2^{-x} = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$$

b) Tem-se $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$f'(x) = \left(x \times 3^{\frac{1}{x}}\right)' = (x)' \times 3^{\frac{1}{x}} + x \times \left(3^{\frac{1}{x}}\right)' = 3^{\frac{1}{x}} + x \times \left(\frac{1}{x}\right)' \times 3^{\frac{1}{x}} \times \ln(3) =$$

$$= 3^{\frac{1}{x}} + x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times 3^{\frac{1}{x}} \times \ln(3) = 3^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{\ln(3)}{x}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{\ln(3)}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{3^{\frac{1}{x}} = 0}_{\text{eq. imp.}} \vee 1 - \frac{\ln(3)}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(3)}{x} = 1 \Leftrightarrow x = \ln(3)$$

$$\textbf{81. a)} \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{y=\ln(x)}{\Leftrightarrow}} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\ln(x+3)} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{y=\ln(x+3)}{\Leftrightarrow}} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(e^y - 3) + 2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

$$\textbf{b)} \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{y=x-1}{\Leftrightarrow}} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\ln(x+3)} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{y=x+2}{\Leftrightarrow}} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y}} = \frac{1}{1} = 1$$

Pág. 121

82. a) Seja g a função definida por $g(x) = \ln(x)$; vem, $g'(x) = \frac{1}{x}$ e $g'(f(x)) = \frac{1}{f(x)}$.

$$\text{Tem-se, então, } (\ln(f(x)))' = f'(x) \times g'(f(x)) = f'(x) \times \frac{1}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

b) Seja g a função definida por $g(x) = \log_a(x)$; vem, $g'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$ e $g'(f(x)) = \frac{1}{f(x) \ln(a)}$.

Tem-se, então, $(\log_a(f(x)))' = f'(x) \times g'(f(x)) = f'(x) \times \frac{1}{f(x) \ln(a)} = \frac{f'(x)}{f(x) \ln(a)}$.

83. a) Tem-se $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln(x)} \right)' = \frac{\ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 = 0 \wedge \ln^2(x) \neq 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \wedge \ln^2(x) \neq 0 \Leftrightarrow x = e$$

b) Tem-se $D_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = (\ln(e^x + 1))' = \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x + 1} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

c) Tem-se $D_f = \mathbb{R}^+$

$$f'(x) = \left(\frac{1 - \log(x)}{x} \right)' = \frac{(1 - \log(x))' \times x - (1 - \log(x)) \times (x)'}{x^2} = \frac{-\frac{1}{x \ln(10)} \times x - 1 + \log(x)}{x^2} = \frac{-\frac{1}{\ln(10)} - 1 + \log(x)}{x^2} =$$

$$= \frac{-\log(e) - 1 + \log(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\log(e) - 1 + \log(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -\log(e) - 1 + \log(x) \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log(x) = \log(e) + 1 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow \log(x) = \log(10e) \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = 10e$$

d) Tem-se $D_f = \mathbb{R}^+$.

$$f'(x) = \left(\frac{\ln^2(x)}{x} \right)' = \frac{(\ln^2(x))' \times x - \ln^2(x) \times (x)'}{x^2} = \frac{2 \ln(x) \times \frac{1}{x} \times x - \ln^2(x)}{x^2} = \frac{2 \ln(x) - \ln^2(x)}{x^2} =$$

$$= \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2} = 0 \Leftrightarrow (\ln(x) = 0 \vee 2 - \ln(x) = 0) \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^2$$

Pág. 122

84. a) Tem-se $(e^x - x)' = e^x - 1$.

Ora, no intervalo $[1, +\infty[$, tem-se $e^x - 1 > 0$ e, portanto, f é crescente nesse intervalo. Então,

$e^x - 1 \geq e^1 - 1$, de onde se pode concluir que $\forall x \geq 1, e^x - x > 0$.

b) Tem-se $\left(e^x - \frac{x^2}{2} \right)' = e^x - x$.

Atendendo à conclusão obtida em a), tem-se que a função definida por $e^x - \frac{x^2}{2}$ é crescente no intervalo

$[1, +\infty[$ e, portanto, $e^x - \frac{x^2}{2} \geq e - \frac{1}{2}$, de onde se pode concluir que $\forall x \geq 1, e^x - \frac{x^2}{2} > 0$

c) Tem-se, atendendo à conclusão obtida em b), $\forall x \geq 1, e^x - \frac{x^2}{2} > 0$.

$$\text{Ora, } e^x - \frac{x^2}{2} > 0 \wedge x \geq 1 \Rightarrow \frac{e^x - \frac{x^2}{2}}{x} > 0 \Rightarrow \frac{e^x}{x} - \frac{x}{2} > 0 \Rightarrow \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}.$$

Então, dado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, conclui-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{k^k} \left(\frac{\frac{x}{k}}{\frac{x}{k}} \right)^k \right] = \frac{1}{k^k} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{x}{k}}{\frac{x}{k}} \right)^k \stackrel{\substack{\infty \cdot \frac{1}{\infty} \\ \frac{\infty}{\infty}}}{=} \frac{1}{k^k} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^y}{y} \right)^k = \\ &= \frac{1}{k^k} \times \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} \right)^k = \frac{1}{k^k} \times (+\infty)^k = +\infty \end{aligned}$$

Pág. 123

$$\begin{aligned} \text{85. a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{x} &\stackrel{\infty \cdot \frac{1}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \\ &= +\infty + \frac{0}{+\infty} = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{e^x + x} \stackrel{\infty \cdot \frac{1}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{1 + \frac{x}{e^x}} = \frac{e}{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}} = \frac{e}{1+0} = e$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2e^{0,1x}} &\stackrel{\infty \cdot \frac{1}{\infty}}{=} \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{0,1x}} = \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^{0,1x}}{x^2}} = \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x^{20}} \right)^{0,1}} = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^{20}} \right)^{0,1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)^2}{2x+1} &\stackrel{\infty \cdot \frac{1}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x+1)}{2x+1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} 2 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{2y-1} = \\ &= 2 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(y)}{y} \times \frac{y}{2y-1} \right] = 2 \times \left(0 \times \frac{1}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x \ln \left(\frac{2}{x} \right) \right] \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{y} \times \ln(y) \right] = 2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 2 \times 0 = 0$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(x)] \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \right) \right] = +\infty \times (1 - 0) = +\infty$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x} \stackrel{\infty \cdot \frac{1}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{\ln(a)} = 0$$

Pág. 124

$$86. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \times \left(\frac{1}{2} \right)^x \right] \stackrel{\substack{\infty \times 0 \\ y = \frac{2}{x}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x}} = \frac{1}{+\infty} \stackrel{(*)}{=} 0 \quad | (*) \text{ Vê exercício resolvido 2.a) }$$

$$\text{b) Tem-se} \quad x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \ln(x)} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}.$$

$$\text{Portanto, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}} = e^0 = 1.$$

$$87. \lim(x_n^{y_n}) = e^{\lim(y_n \ln(x_n))} = e^{\lim y_n \times \ln(\lim y_n)} = e^{b \ln(a)} = (e^{\ln(a)})^b = a^b$$

88. Tem-se:

$$\bullet \lim \frac{n+2}{2n+3} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim \frac{2n-1}{n+3} = 2$$

$$\bullet \forall n, \frac{n+2}{2n+3} > 0$$

Portanto, tendo em conta o resultado do exercício 87, pode concluir-se que o limite pedido é igual a $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, ou seja, $\frac{1}{4}$.

$$89. \lim \left(\frac{n+2}{2n+3} \right)^{\frac{n^2+1}{2-3n}} = \left(\lim \frac{n+2}{2n+3} \right)^{\lim \frac{n^2+1}{2-3n}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{-\infty} = 0$$

Pág. 125

90. a) Tem-se $D_f = \mathbb{R}$.

$$\bullet f'(x) = [2(e^{0,5x} + e^{-0,5x})]' = 2(e^{0,5x} + e^{-0,5x})' = 2(0,5 e^{0,5x} - 0,5 e^{-0,5x}) = 2 \times 0,5 (e^{0,5x} - e^{-0,5x}) = e^{0,5x} - e^{-0,5x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} - e^{-0,5x} = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} = e^{-0,5x} \Leftrightarrow 0,5x = -0,5x \Leftrightarrow x = 0$$

$$\bullet f''(x) = (e^{0,5x} - e^{-0,5x})' = 0,5 e^{0,5x} + 0,5 e^{-0,5x} = 0,5(e^{0,5x} + e^{-0,5x})$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 0,5(e^{0,5x} + e^{-0,5x}) = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} + e^{-0,5x} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

b) Tem-se $D_f = \mathbb{R}$.

$$\bullet f'(x) = [3xe^{-0,2x}]' = 3[(x)'e^{-0,2x} + x(e^{-0,2x})'] = 3(e^{-0,2x} - 0,2xe^{-0,2x}) = 3e^{-0,2x}(1 - 0,2x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3e^{-0,2x}(1 - 0,2x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,2x} = 0}_{\text{eq. imp.}} \vee 1 - 0,2x = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$\bullet f''(x) = (3e^{-0,2x}(1 - 0,2x))' = 3[(e^{-0,2x})'(1 - 0,2x) + e^{-0,2x}(1 - 0,2x)'] =$$

$$= 3[-0,2 e^{-0,2x}(1 - 0,2x) - 0,2 e^{-0,2x}] = 3e^{-0,2x}[-0,2 + 0,04x - 0,2] =$$

$$= 3e^{-0,2x}(0,04x - 0,4)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3e^{-0,2x}(0,04x - 0,4) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,2x} = 0}_{\text{eq. imp.}} \vee 0,04x - 0,4 = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

c) Tem-se $D_f = \mathbb{R}^+$.

$$\bullet f'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{[\ln(x)]' \times x - (x)' \times \ln(x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = e$$

$$\bullet f''(x) = \left(\frac{1 - \ln(x)}{x^2}\right)' = \frac{[1 - \ln(x)]' \times x^2 - (x^2)' \times (1 - \ln(x))}{x^4} = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times (1 - \ln(x))}{x^4} =$$

$$= \frac{-3x + 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{-3 + 2 \ln(x)}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3 + 2 \ln(x)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow -3 + 2 \ln(x) = 0 \wedge x^3 \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$$

d) Tem-se $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$$\bullet f'(x) = \left(\frac{x}{\ln(2x)}\right)' = \frac{\ln(2x) - x \times \frac{2}{2x}}{\ln^2(2x)} = \frac{\ln(2x) - 1}{\ln^2(2x)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(2x) - 1}{\ln^2(2x)} = 0 \Leftrightarrow \ln(2x) - 1 = 0 \wedge \ln^2(2x) \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = \frac{e}{2}$$

$$\bullet f''(x) = \left(\frac{\ln(2x) - 1}{\ln^2(2x)}\right)' = \frac{[\ln(2x) - 1]' \times \ln^2(2x) - (\ln^2(2x))' \times [\ln(2x) - 1]}{\ln^4(2x)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{2x} \times \ln^2(2x) - 2 \ln(2x) \times \frac{2}{2x} \times [\ln(2x) - 1]}{\ln^4(2x)} = \frac{\frac{1}{x} \times \ln^2(2x) - \frac{2}{x} \ln(2x) \times [\ln(2x) - 1]}{\ln^4(2x)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \times [\ln^2(2x) - 2 \ln^2(2x) + 2 \ln(2x)]}{\ln^4(2x)} = \frac{-\ln^2(2x) + 2 \ln(2x)}{x \ln^4(2x)} = \frac{2 - \ln(2x)}{x \ln^3(2x)}$$

$$\bullet f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln(2x)}{x \ln^3(2x)} = 0 \Leftrightarrow -\ln(2x) + 2 = 0 \wedge x \ln^3(2x) \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = \frac{e^2}{2}$$

91. a) • Domínio

$$D_f = \mathbb{R}$$

• Monotonia e extremos

$$f'(x) = [e^x(x^2 - x)]' = (e^x)' \times (x^2 - x) + e^x \times (x^2 - x)' =$$

$$= e^x \times (x^2 - x) + e^x \times (2x - 1) = e^x(x^2 + x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

	$-\infty$	$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$x^2 + x - 1$	+	0	−	0	+
Sinal e zeros de f'	+	0	−	0	+
Variação e extremos de f	$\nearrow$	máx. rel.	$\searrow$	mín. rel.	$\nearrow$

f é crescente em $] -\infty, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}]$ e em $[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty[$ e é decrescente em $[\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}]$.

f atinge um máximo em $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ e atinge um mínimo em $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

• Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$f''(x) = [e^x(x^2 + x - 1)]' = (e^x)' \times (x^2 + x - 1) + e^x \times (x^2 + x - 1)' =$$

$$= e^x(x^2 + x - 1) + e^x(2x + 1) = e^x(x^2 + 3x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + 3x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 0$$

	$-\infty$	-3		0	$+\infty$
$x^2 + 3x$	$+$	0	$-$	0	$+$
Sinal e zeros de f''	$+$	0	$-$	0	$+$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		P.I.		P.I.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -3]$ e em $[0, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[-3, 0]$; tem pontos de inflexão em $x = -3$ e em $x = 0$.

● Assíntotas

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x(x^2 - x)] \stackrel{0 \times \infty}{=} \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y = -x}} [e^{-y}(y^2 + y)] = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2 + y}{e^y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\frac{y^2 + y}{y^2}}{\frac{e^y}{y^2}} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(x^2 - x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x(x - 1)] = +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

Portanto, o gráfico de f não tem assíntota em $+\infty$.

● Contradomínio

Do estudo anterior e de se ter $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x(x^2 - x)] = +\infty$, pode concluir-se que

$$D'_f = \left[f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), +\infty \right[= \left[e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \times (2 - \sqrt{5}), +\infty \right[.$$

b) ● Domínio

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

● Monotonia e extremos

$$f'(x) = \left(xe^{\frac{1}{x}}\right)' = (x)' \times \left(e^{\frac{1}{x}}\right) + x \times \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' =$$

$$= e^{\frac{1}{x}} + x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = 1$$

	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$e^{\frac{1}{x}}$	+	n.d.	+	+	+
$1 - \frac{1}{x}$	+	n.d.	-	0	+
Sinal e zeros de f'	+	n.d.	-	0	+
Variação e extremos de f	$\nearrow$	n.d.	$\searrow$	mín. rel.	$\nearrow$

f é crescente em $]-\infty, 0[$ e em $[1, +\infty[$ e é decrescente em $]0, 1]$.

f atinge um mínimo em $x = 1$.

● Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$f''(x) = \left[e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)\right]' = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' \times \left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}} \times \left(1 - \frac{1}{x}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}} \times \left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x^3} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{e^x}$	+	n.d.	+
x^3	-	0	+
Sinal e zeros de f''	-	n.d.	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f			

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]0, +\infty[$.

● Assíntotas

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pelo que somente a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right) = 0 \times e^{-\infty} = 0 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{0 \times \infty}{\underset{y=\frac{1}{x}}{\rightleftharpoons}} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} e^y \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1 \quad | \text{Em } +\infty \text{ o resultado é idêntico}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 1 \times x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right] \stackrel{\infty \times 0}{\underset{y=\frac{1}{x}}{\rightleftharpoons}} \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{1}{y} (e^y - 1) \right] = \end{aligned}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1 \quad | \text{Em } +\infty \text{ o resultado é idêntico}$$

Portanto, a reta de equação $y = x + 1$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$ e em $+\infty$.

● Contradomínio

Do estudo anterior pode concluir-se que:

$$D'_f =]-\infty, 0[\cup [f(1), +\infty[=]-\infty, 0[\cup [e, +\infty[$$

c) ● Domínio

$$D_f = \mathbb{R}$$

● Monotonia e extremos

$$f'(x) = \left(\frac{3}{1+2e^{-2x}} \right)' = \frac{(3)' \times (1+2e^{-2x}) - 3 \times (1+2e^{-2x})'}{(1+2e^{-2x})^2} = \frac{-3 \times 2 \times (-2) \times e^{-2x}}{(1+2e^{-2x})^2} = \frac{12e^{-2x}}{(1+2e^{-2x})^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{12e^{-2x}}{(1+2e^{-2x})^2} = 0 \Leftrightarrow 12e^{-2x} = 0 \wedge 1 + 2e^{-2x} \neq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Tem-se que f' é positiva em $\mathbb{R}$, pelo que f é crescente em $\mathbb{R}$ e f não tem extremos.

● Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{12e^{-2x}}{(1+2e^{-2x})^2} \right]' = \frac{(12e^{-2x})' \times (1+2e^{-2x})^2 - 12e^{-2x} \times [(1+2e^{-2x})^2]'}{(1+2e^{-2x})^4} = \\ &= \frac{-24e^{-2x} \times (1+2e^{-2x})^2 - 12e^{-2x} \times 2(1+2e^{-2x})(1+2e^{-2x})'}{(1+2e^{-2x})^4} = \\ &= \frac{-24e^{-2x} \times (1+2e^{-2x})^2 - 12e^{-2x} \times 2(1+2e^{-2x})(-4e^{-2x})}{(1+2e^{-2x})^4} = \frac{(1+2e^{-2x})[-24e^{-2x}(1+2e^{-2x}) - 12e^{-2x} \times 2(-4e^{-2x})]}{(1+2e^{-2x})^4} = \\ &= \frac{-24e^{-2x} - 48e^{-4x} + 96e^{-4x}}{(1+2e^{-2x})^3} = \frac{-24e^{-2x} + 48e^{-4x}}{(1+2e^{-2x})^3} = \frac{24e^{-2x}(2e^{-2x} - 1)}{(1+2e^{-2x})^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{24e^{-2x}(2e^{-2x}-1)}{(1+2e^{-2x})^3} = 0 \Leftrightarrow 2e^{-2x} - 1 = 0 \wedge 1 + 2e^{-2x} \neq 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{2}$$

	$-\infty$	$\frac{\ln(2)}{2}$	$+\infty$
$24e^{-2x}$	+	+	+
$2e^{-2x} - 1$	+	0	-
$(1 + 2e^{-2x})^3$	+	+	+
Sinal e zeros de f''	+	0	-
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		P.I.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, \frac{\ln(2)}{2}\right]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\ln(2)}{2}, +\infty\right[$; tem um ponto de inflexão em $x = \frac{\ln(2)}{2}$.

• Assíntotas

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{1+2e^{-2x}} = \frac{3}{1+\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1+2e^{-2x}} = \frac{3}{1+0} = 3$$

Portanto, a reta de equação $y = 3$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

• Contradomínio

Do estudo anterior pode concluir-se que $D'_f =]0, 3[$.

d) • Domínio

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \ln(x) - 1 \neq 0\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$$

• Monotonia e extremos

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{\ln(x)-1}\right)' = \frac{(2x)' \times (\ln(x)-1) - 2x \times (\ln(x)-1)'}{(\ln(x)-1)^2} = \frac{2(\ln(x)-1) - 2x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x)-1)^2} = \frac{2(\ln(x)-1)-2}{(\ln(x)-1)^2} = \frac{2(\ln(x)-1)-2}{(\ln(x)-1)^2} = \frac{2(\ln(x)-2)}{(\ln(x)-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(\ln(x)-2)}{(\ln(x)-1)^2} = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow \ln(x) - 2 = 0 \wedge (\ln(x) - 1)^2 \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = e^2$$

	0		e		e^2	$+\infty$
$2(\ln(x) - 2)$	n.d.	-	-	-	0	+
$(\ln(x) - 1)^2$	n.d.	+	0	+	+	+
Sinal e zeros de f'	n.d.	-	n.d.	-	0	+
Variação e extremos de f	n.d.		n.d.		mín. rel.	

f é decrescente em $]0, e[$ e em $]e, e^2[$ e é crescente em $[e^2, +\infty[$.

f atinge um mínimo, igual a $2e^2$, em $x = e^2$.

• Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$f''(x) = \left(\frac{2(\ln(x)-2)}{(\ln(x)-1)^2} \right)' = 2 \left(\frac{\ln(x)-2}{(\ln(x)-1)^2} \right)' = 2 \times \frac{(\ln(x)-2)' \times (\ln(x)-1)^2 - (\ln(x)-2) \times [(\ln(x)-1)^2]'}{(\ln(x)-1)^4} =$$

$$= 2 \times \frac{\frac{1}{x} \times (\ln(x)-1)^2 - (\ln(x)-2) \times 2(\ln(x)-1) \times \frac{1}{x}}{(\ln(x)-1)^4} = 2 \times \frac{\frac{1}{x} \times (\ln(x)-1) [(\ln(x)-1) - (\ln(x)-2) \times 2]}{(\ln(x)-1)^4} =$$

$$= 2 \times \frac{3 - \ln(x)}{x (\ln(x)-1)^3} = \frac{2(3 - \ln(x))}{x (\ln(x)-1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(3 - \ln(x))}{x (\ln(x)-1)^3} = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - \ln(x) = 0 \wedge x(\ln(x) - 1)^3 \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = e^3$$

	0		e		e ³	+∞
2(3 - ln(x))	n.d.	+	+	+	0	-
x	0	+	+	+	+	+
(ln(x) - 1) ³	n.d.	-	0	+	+	+
Sinal e zeros de f''	n.d.	-	n.d.	+	0	-
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	n.d.				P.I.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]0, e[$ e em $[e^3, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]e, e^3]$; tem ponto de inflexão em $x = e^3$.

• Assíntotas

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$, pelo que somente as retas de equações $x = 0$ e $x = e$ podem ser assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x}{\ln(x)-1} \right) = \frac{0^+}{-\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical do gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \left(\frac{2x}{\ln(x)-1} \right) = \frac{2e}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \left(\frac{2x}{\ln(x)-1} \right) = \frac{2e}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = e$ é assíntota vertical do gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{\ln(x)-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln(x)-1} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\ln(x)-1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\frac{\ln(x)-1}{x}} = \frac{2}{0-0} = \frac{2}{0} = \infty$$

Portanto, o gráfico de f não tem assíntota em $+\infty$.

• Contradomínio

Do estudo anterior pode concluir-se que $D'_f =]-\infty, 0[\cup [2e^2, +\infty[$.

e) • Domínio

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x + \frac{1}{x} > 0 \wedge x \neq 0 \right\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$$

$$\text{Tem-se : } x + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Portanto, $D_f = \mathbb{R}^+$.

• Monotonia e extremos

$$f'(x) = \left(\ln \left(x + \frac{1}{x} \right) \right)' = \frac{\left(x + \frac{1}{x} \right)'}{x + \frac{1}{x}} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = 1$$

	0		1	$+\infty$
$x^2 - 1$	-	-	0	+
$x(x^2 + 1)$	0	+	+	+
Sinal e zeros de f'	n.d.	-	0	+
Variação e extremos de f	n.d.	$\searrow$	mín. abs.	$\nearrow$

f é decrescente em $]0, 1]$ e é crescente em $[1, +\infty[$.

f atinge um mínimo, igual a $\ln(2)$, em $x = 1$.

• Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$f''(x) = \left(\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} \right)' = \frac{(x^2-1)' \times (x^3+x) - (x^2-1) \times (x^3+x)'}{(x^3+x)^2} =$$

$$= \frac{2x \times (x^3+x) - (x^2-1) \times (3x^2+1)}{(x^3+x)^2} = \frac{2x^4+2x^2-3x^4-x^2+3x^2+1}{(x^3+x)^2} = \frac{-x^4+4x^2+1}{(x^3+x)^2} = \frac{-x^4+4x^2+1}{[x(x^2+1)]^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^4+4x^2+1}{(x^3+x)^2} = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow -x^4 + 4x^2 + 1 = 0 \wedge (x^3+x)^2 \neq 0 \wedge x \in D_f$$

$$\text{Tem-se } -x^4 + 4x^2 + 1 = 0 \stackrel{y=x^2}{\Leftrightarrow} -y^2 + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 2 + \sqrt{5} \stackrel{y=x^2}{\Leftrightarrow} x^2 = 2 + \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2 + \sqrt{5}} \vee x = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$$

Portanto, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$.

	0		$\sqrt{2 + \sqrt{5}}$	$+\infty$
$-x^4 + 4x^2 + 1$	+	+	0	-
$[x(x^2 + 1)]^2$	0	+	+	+
Sinal e zeros de f''	n.d.	+	0	-
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	n.d.		P.I.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]0, \sqrt{2 + \sqrt{5}}]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[\sqrt{2 + \sqrt{5}}, +\infty[$; tem ponto de inflexão em $x = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$.

• Assíntotas

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R}^+$, pelo que somente a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(x + \frac{1}{x} \right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(x + \frac{1}{x} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln \left(x + \frac{1}{x} \right)}{x + \frac{1}{x}}}{\frac{x}{x + \frac{1}{x}}} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(x + \frac{1}{x} \right)}{x + \frac{1}{x}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \frac{1}{x}}} = \frac{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) = \ln(+\infty + 0) = +\infty$$

Portanto, o gráfico de f não tem assíntota em $+\infty$.

• Contradomínio

Do estudo anterior pode concluir-se que $D'_f = [\ln(2), +\infty[$.

f) • Domínio

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 > 0\} = \mathbb{R}^+$$

• Monotonia e extremos

$$f'(x) = [\ln(e^x - 1)]' = \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x - 1} = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in D_f, \text{ pelo que } f \text{ é crescente em } \mathbb{R}^+.$$

• Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$f''(x) = \left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right)' =$$

$$= \frac{(e^x)' \times (e^x - 1) - (e^x) \times (e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} =$$

$$= \frac{e^x \times (e^x - 1) - (e^x) \times e^x}{(e^x - 1)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x}}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow -e^x = 0 \wedge e^x - 1 \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in D_f, \text{ pelo que o gráfico de } f \text{ tem a concavidade sempre voltada para baixo.}$$

• Assíntotas

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R}^+$, pelo que somente a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^x - 1) = \ln(0) = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - 1) - \ln(e^x) + \ln(e^x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x} + \frac{x}{x} \right] =$$

$$= \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{+\infty}\right)}{+\infty} + 1 = \frac{\ln(1)}{+\infty} + 1 =$$

$$= \frac{0}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x - 1) - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x - 1) - \ln(e^x)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) \right] = \ln(1) = 0\end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f em $+\infty$.

• Contradomínio

Do estudo anterior pode concluir-se que $D'_f = \mathbb{R}$.

g) • Domínio

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x - \frac{1}{x} > 0 \wedge x \neq 0 \right\}$$

$$\text{Tem-se : } x - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x} > 0 \Leftrightarrow$$

Cálc. aux:

	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	-	-	0	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{x^2 - 1}{x}$	-	0	+	n.d.	-	0	+

$$\Leftrightarrow x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[$$

Portanto, $D_f =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$.

• Monotonia e extremos

$$f'(x) = \left(\ln \left(x - \frac{1}{x} \right) \right)' = \frac{\left(x - \frac{1}{x} \right)'}{x - \frac{1}{x}} = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x - \frac{1}{x}} = \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)} = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

	-1		0		1	$+\infty$
$x^2 + 1$	+	+	+		+	+
x	-	-	0		+	+
$x^2 - 1$	0	-	-		0	+
Sinal e zeros de f'	n.d.	+	n.d.		n.d.	+
Variação e extremos de f	n.d.	↗	n.d.		n.d.	↗

f é crescente em $]-1, 0[$ e é crescente em $]1, +\infty[$.

• Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$\begin{aligned}f''(x) &= \left(\frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)} \right)' = \left(\frac{x^2 + 1}{x^3 - x} \right)' = \\ &= \frac{(x^2 + 1)' \times (x^3 - x) - (x^2 + 1) \times (x^3 - x)'}{(x^3 - x)^2} = \\ &= \frac{2x \times (x^3 - x) - (x^2 + 1) \times (3x^2 - 1)}{(x^3 - x)^2} = \\ &= \frac{2x^4 - 2x^2 - 3x^4 + x^2 - 3x^2 + 1}{(x^3 - x)^2} = \\ &= \frac{-x^4 - 4x^2 + 1}{(x^3 - x)^2} = \\ &= \frac{-x^4 - 4x^2 + 1}{[x(x^2 - 1)]^2}\end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^4 - 4x^2 + 1}{[x(x^2 - 1)]^2} = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow -x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \wedge x(x^2 - 1) \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \wedge x \in D_f$$

$$\text{Tem-se } -x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \stackrel{y=x^2}{\Leftrightarrow} -y^2 - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -2 + \sqrt{5} \stackrel{y=x^2}{\Leftrightarrow} x^2 = -2 + \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{-2 + \sqrt{5}} \vee x = \sqrt{-2 + \sqrt{5}}$$

$$\text{Portanto, } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{-2 + \sqrt{5}} \quad | \quad (\sqrt{-2 + \sqrt{5}} \text{ não pertence a } D_f)$$

	-1		$-\sqrt{-2 + \sqrt{5}}$		0		1	$+\infty$
$-x^4 - 4x^2 + 1$	-	-	0	+	+		-	-
$[x(x^2 - 1)]^2$	+	+	+	+	0		0	+
Sinal e zeros de f''	n.d.	-	0	+	n.d.		n.d.	-
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	n.d.		P.I.		n.d.		n.d.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $] -1, -\sqrt{-2 + \sqrt{5}}]$ e em $] 1, +\infty [$ e tem a concavidade voltada para cima em $[-\sqrt{-2 + \sqrt{5}}, 0 [$; tem um ponto de inflexão em $x = -\sqrt{-2 + \sqrt{5}}$.

● Assíntotas

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $] -1, 0[\cup] 1, +\infty [$, pelo que somente as retas de equações $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$ podem ser assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln\left(x - \frac{1}{x}\right) = \ln(0) = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical do gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln\left(x - \frac{1}{x}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(x - \frac{1}{x}\right) = \ln(0) = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical do gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(x - \frac{1}{x}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln\left(x - \frac{1}{x}\right)}{x - \frac{1}{x}}}{\frac{x}{x - \frac{1}{x}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(x - \frac{1}{x}\right)}{x - \frac{1}{x}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x - \frac{1}{x}}} =$$

$$= \frac{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(x - \frac{1}{x}\right) = \ln(+\infty + 0) = +\infty$$

Portanto, o gráfico de f não tem assíntota em $+\infty$.

• Contradomínio

Do estudo anterior pode concluir-se que $D'_f = [\ln(2), +\infty[$.

Pág. 127

92. • Domínio

$$D_f =]-\infty, 1]$$

• Continuidade

A função pode não ser contínua no ponto 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0^3 \times e^0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[2x + \frac{x}{\ln(x)} \right] = 0 + \frac{0}{-\infty} = 0$$

A função é contínua no ponto 0.

A função é contínua.

• Monotonia e extremos

$$(x^3 e^x)' = (x^3)' e^x + x^3 (e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = (x^3 + 3x^2) e^x = x^2 e^x (x + 3)$$

$$\left[2x + \frac{x}{\ln(x)} \right]' = 2 + \frac{\ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = 2 + \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$$

Vejamos se existe $f'(0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 e^x) = 0 \times 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \frac{x}{\ln(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 + \frac{1}{\ln(x)} \right) = 2 + \frac{1}{-\infty} = 2 + 0 = 2$$

Não existe $f'(0)$.

$$\text{Então, tem-se } f'(x) = \begin{cases} x^2 e^x (3 + x) & \text{se } x < 0 \\ 2 + \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow [x^2 e^x (x + 3) = 0 \wedge x < 0] \vee \left[2 + \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} = 0 \wedge 0 < x < 1 \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(x = -3 \vee x = 0) \wedge x < 0] \vee \left[\frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} = -2 \wedge 0 < x < 1 \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee [2 \ln^2(x) + \ln(x) - 1 = 0 \wedge 0 < x < 1] \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \text{Cálc. aux:} \\ 2 \ln^2(x) + \ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \vee \ln(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \vee x = \sqrt{e} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee \left[\left(x = \frac{1}{e} \vee x = \sqrt{e} \right) \wedge 0 < x < 1 \right] \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{1}{e}$$

	$-\infty$	-3		0		$\frac{1}{e}$		1
$x^2 e^x (x+3)$	$-$	0	$+$					
$2 + \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$					$+$	0	$-$	
Sinal e zeros de f'	$-$	0	$+$	n.d.	$+$	0	$-$	
Variação e extremos de f	$\searrow$	Min. rel.	$\nearrow$		$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$	

f é decrescente em $]-\infty, -3]$ e em $[\frac{1}{e}, 1[$ e é crescente em $[-3, \frac{1}{e}]$.

$f(-3)$ é mínimo relativo e $f(\frac{1}{e})$ é máximo relativo.

• Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$[(x^3 + 3x^2)e^x]' = (x^3 + 3x^2)'e^x + (x^3 + 3x^2)(e^x)' = (3x^2 + 6x)e^x + (x^3 + 3x^2)e^x = (x^3 + 6x^2 + 6x)e^x = xe^x(x^2 + 6x + 6)$$

$$\left(2 + \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}\right)' = \left(\frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}\right)' = \frac{[\ln(x)-1]' \times \ln^2(x) - [\ln(x)-1] \times [\ln^2(x)]'}{\ln^4(x)} = \frac{\frac{1}{x} \times \ln^2(x) - [\ln(x)-1] \times 2 \ln(x) \times \frac{1}{x}}{\ln^4(x)} = \frac{\frac{1}{x} [\ln^2(x) - 2 \ln^2(x) + 2 \ln(x)]}{\ln^4(x)} = \frac{-\ln^2(x) + 2 \ln(x)}{x \ln^4(x)} = \frac{2 - \ln(x)}{x \ln^3(x)}$$

$$\text{Então, tem-se } f''(x) = \begin{cases} xe^x(x^2 + 6x + 6) & \text{se } x < 0 \\ \frac{2 - \ln(x)}{x \ln^3(x)} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow [xe^x(x^2 + 6x + 6) = 0 \wedge x < 0] \vee \left(\frac{2 - \ln(x)}{x \ln^3(x)} = 0 \wedge 0 < x < 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(x = 0 \vee x = -3 - \sqrt{3} \vee x = -3 + \sqrt{3}) \wedge x < 0] \vee$$

$$\vee [2 - \ln(x) = 0 \wedge x \ln^3(x) \neq 0 \wedge 0 < x < 1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3 - \sqrt{3} \vee x = -3 + \sqrt{3} \vee \underbrace{(x = e^2 \wedge 0 < x < 1)}_{\text{eq. impossível}} \Leftrightarrow x = -3 - \sqrt{3} \vee x = -3 + \sqrt{3}$$

	$-\infty$	$-3 - \sqrt{3}$		$-3 + \sqrt{3}$		0		1
xe^x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$			
$x^2 + 6x + 6$	$+$	0	$-$	0	$+$			
$\frac{2 - \ln(x)}{x \ln^3(x)}$							$-$	
Sinal e zeros de f''	$-$	0	$+$	0	$-$	n.d.	$-$	
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		P.I.		P.I.				

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -3 - \sqrt{3}]$, em $[-3 + \sqrt{3}, 0[$ e em $[0, 1[$ e tem a concavidade voltada para cima em $[-3 - \sqrt{3}, -3 + \sqrt{3}]$; tem pontos de inflexão em $x = -3 - \sqrt{3}$ e em $x = -3 + \sqrt{3}$.

• Assíntotas

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $] -\infty, 1[$, pelo que somente a reta de equação $x = 1$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(2x + \frac{x}{\ln(x)}\right) = \ln\left(2 + \frac{1}{0}\right) = 2 - \infty = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

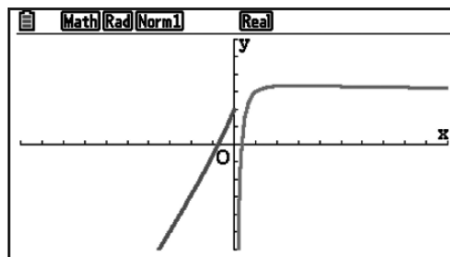
Como o domínio de f é um conjunto majorado, só pode existir assíntota não vertical em $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 e^x) \stackrel{\infty \times 0}{\underset{y=-x}{\rightleftharpoons}} \lim_{y \rightarrow +\infty} (y^3 e^{-y}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y^3}{e^y} \right) = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^y}{y^3} \right)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f .

Pág. 128

93. O gráfico obtido com uma calculadora não é elucidativo, nomeadamente, acerca do sentido das concavidades do gráfico.



94. a) Começemos por determinar o domínio da função.

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0 \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^+$$

Tem-se, para $x \in D_h$:

$$h(x) > \ln(2) \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) - \ln(x) > \ln(2) \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) > \ln(x) + \ln(2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) > \ln(2x) \Leftrightarrow x^2 + 1 > 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\text{C.S.} = \mathbb{R} \setminus \{1\} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\text{b) } h'(x) = [\ln(x^2 + 1) - \ln(x)]' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} - \frac{(x)'}{x} = \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x} = \frac{2x^2}{x(x^2 + 1)} - \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge x(x^2 + 1) \wedge x \in D_h \Leftrightarrow x = 1$$

	0		1	$+\infty$
$x^2 - 1$		-	0	+
$x(x^2 + 1)$		+	+	+
Sinal e zeros de h'	n.d.	-	0	+
Variação e extremos de h	n.d.	↘	mín. abs.	↗

h é decrescente em $]0, 1]$ e é crescente em $[1, +\infty[$.

c) Como a função é contínua em $\mathbb{R}^+$, só a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota vertical do gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(x^2 + 1) - \ln(x)] \stackrel{\infty - \infty}{\rightleftharpoons} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{0^+}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de h .

d) De acordo com os resultados obtidos nas alíneas anteriores, pode-se concluir que $D'_h = [h(1), +\infty[= [\ln(2), +\infty[$.

Pág. 129

95. a) Começemos por determinar o domínio da função:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x) = [x \ln(x^2)]' = x' \ln(x^2) + x[\ln(x^2)]' = \ln(x^2) + x \frac{2x}{x^2} = \ln(x^2) + 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) = -2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{e^2} \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = -\frac{1}{e} \vee x = \frac{1}{e}$$

	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$		0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
Sinal e zeros de f'	+	0	−	n.d.	−	0	+
Variação e extremos de f	↗	máx. rel.	↘	n.d.	↘	mín. rel.	↗

f é decrescente em $[-e^{-1}, 0[$ e em $]0, e^{-1}]$ e é crescente em $]-\infty, -e^{-1}]$ e em $[e^{-1}, +\infty[$.

$f\left(-\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$ é máximo relativo e $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{2}{e}$ é mínimo relativo.

b) Tem-se:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(x^2)] \stackrel{0 \times \infty}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{y} \times \ln\left(\frac{1}{y^2}\right) \right] = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-2 \ln(y)}{y} = 0$$

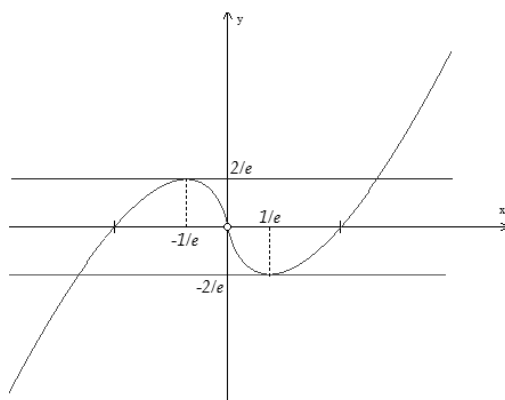
$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x \ln(x^2)] \stackrel{0 \times \infty}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{y} \times \ln\left(\frac{1}{y^2}\right) \right] =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-\frac{-2 \ln(y)}{y} \right) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x \ln(x^2)] = -\infty \times (+\infty) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x \ln(x^2)] = +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

De acordo com estes resultados e com a alínea anterior, pode-se concluir que um esboço do gráfico de f é:



Então, os valores de k para os quais a condição $f(x) = k$ tem exatamente duas soluções são $-\frac{2}{e}$, 0 e $\frac{2}{e}$.

c) • Pontos de inflexão

$$[\ln(x^2) + 2]' = [\ln(x^2)]' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} < 0 \Leftrightarrow x < 0, \text{ pelo que o gráfico de } f \text{ tem a concavidade voltada para baixo em }]-\infty, 0[.$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0, \text{ pelo que o gráfico de } f \text{ tem a concavidade voltada para cima em }]0, +\infty[.$$

$$0 \notin D_f$$

O gráfico da função não tem pontos de inflexão.

• Assíntotas

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pelo que somente a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de f .

Já vimos, na alínea anterior, que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

Portanto, a reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \ln(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2) = +\infty$$

Portanto, não existe assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2) = +\infty$$

Portanto, não existe assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

Pág. 131

96. a) $f(5) = 50(e^{-0,3 \times 5} - e^{-2 \times 5}) = 50(e^{-1,5} - e^{-10}) \approx 11,2 \text{ mg/l}$

b) $f'(t) = [50(e^{-0,3t} - e^{-2t})]' = 50[(e^{-0,3t})' - (e^{-2t})'] = 50(-0,3e^{-0,3t} + 2e^{-2t})$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 50(-0,3e^{-0,3t} + 2e^{-2t}) = 0 \Leftrightarrow 0,3e^{-0,3t} = 2e^{-2t} \Leftrightarrow \frac{e^{-0,3t}}{e^{-2t}} = \frac{2}{0,3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{1,7t} = \frac{20}{3} \Leftrightarrow 1,7t = \ln\left(\frac{20}{3}\right) \Leftrightarrow t = \frac{10}{17} \ln\left(\frac{20}{3}\right)$$

	0		$\frac{10}{17} \ln\left(\frac{20}{3}\right)$	$+\infty$
Sinal e zeros de f'		+	0	-
Variação e extremos de f	0	↗	máx. abs.	↘

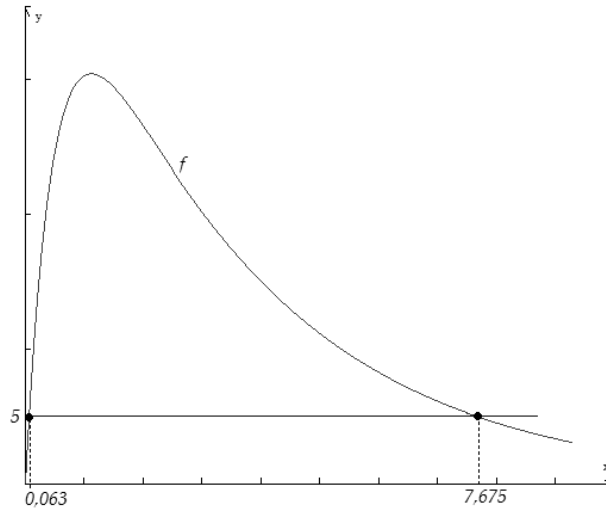
A quantidade de medicamento atinge o valor máximo em $t = \frac{10}{17} \ln\left(\frac{20}{3}\right)$.

Ora $\frac{10}{17} \ln\left(\frac{20}{3}\right) \approx 1,116 \text{ h}$.

Portanto, foi ao fim de aproximadamente 1 h 7 min.

c) A função é contínua e é crescente em $\left[0, \frac{\ln\left(\frac{10}{3}\right)}{1,7}\right]$ e é decrescente em $\left[\frac{\ln\left(\frac{10}{3}\right)}{1,7}, +\infty\right]$. Recorrendo à

calculadora gráfica, conclui-se, tal como ilustrado na figura abaixo, que a quantidade de medicamento no organismo é superior a 5 mg/l durante, aproximadamente, 7,6 horas (entre os instantes 0,063 e 7,675).



Pág. 132

97.

Sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$.

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, pois f é decrescente;

$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$, pois g é crescente;

então, $x_1 < x_2 \Rightarrow -g(x_1) > -g(x_2)$.

Portanto,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) - g(x_1) > f(x_2) - g(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f - g)(x_1) > (f - g)(x_2)$$

Conclui-se, assim, que a função $f - g$ é decrescente.

98. a) • Função f

Começemos por determinar o domínio da função:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: 2x^2 - 1 > 0\} = \left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$$

$$f'(x) = [\ln(2x^2 - 1)]' = \frac{(2x^2 - 1)'}{2x^2 - 1} = \frac{4x}{2x^2 - 1}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{2x^2 - 1} = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = 0 \wedge 2x^2 - 1 \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Para $x \in]-2, -1[$, tem-se $4x < 0$ e $2x^2 - 1 > 0$, pelo que, neste intervalo f' é negativa.

Portanto, f é decrescente no intervalo $]-2, -1[$.

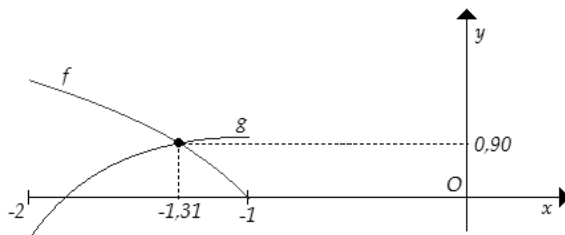
• Função g

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = [2 - e^{(x+1)^2}]' = -[(x+1)^2]' e^{(x+1)^2} = -(2x+2) e^{(x+1)^2} = -2(x+1) e^{(x+1)^2}$$

Para $x \in]-2, -1[$, tem-se $x+1 < 0$, pelo que, neste intervalo g' é positiva. Portanto, g é crescente no intervalo $] -2, -1[$.

b) A alínea a) permite concluir que a função $f - g$ é decrescente em $] -2, -1[$; logo, tem, no máximo um zero. Assim, os gráficos das restrições de f e g ao intervalo $] -2, -1[$ interseitam-se, no máximo, num ponto. Recorrendo à calculadora gráfica, conclui-se, tal como ilustrado na figura abaixo, que as coordenadas desse ponto, aproximadas às centésimas, são $(-1,31; 0,90)$



Pág. 133

99. a) $h(0,4) = 20 \log\left(\frac{1}{0,4}\right) = 20 \log(2,5) \approx 8 \text{ km}$

b) $h\left(\frac{p}{2}\right) - h(p) = 20 \log\left(\frac{1}{\frac{p}{2}}\right) - 20 \log\left(\frac{1}{p}\right) = 20 \left[\log\left(\frac{2}{p}\right) - \log\left(\frac{1}{p}\right) \right] = 20 \left[\log\left(\frac{2}{p} \div \frac{1}{p}\right) \right] = 20 \log(2) \approx 6 \text{ km}$

Pág. 136

100. a) $7 = 2^{\log_2(7)}$

b) $7 = \log(10^7)$

c) $7 = 7^1$

d) $7 = 10^{\log(7)}$

e) $7 = \sqrt{49} = 49^{\frac{1}{2}}$

f) $7 = \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}^7)$

101. a) $3^x = 8 \Leftrightarrow x = \log_3(8)$

b) $\ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

c) $\log_8(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 8^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = 2$

d) $e^x = 3,6 \Leftrightarrow x = \ln(3,6)$

e) $\log_4(x) + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \log_4(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 4^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{4}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

f) $2^{-x} = 12 \Leftrightarrow -x = \log_2(12) \Leftrightarrow x = -\log_2(12) \Leftrightarrow x = \log_2\left(\frac{1}{12}\right)$

$$102. \text{ a) } \log_2 \left(2^{\sqrt{3}} \div 2^{\sqrt{3}+1} \right) = \log_2 \left(2^{\sqrt{3}} \right) - \log_2 \left(2^{\sqrt{3}+1} \right) = \sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1) = -1$$

$$\text{b) } \log_5 \left(5^{\sqrt{12}} \times 5^{\sqrt{3}} \right) = \log_5 \left(5^{\sqrt{12}} \right) + \log_5 \left(5^{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{12} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{c) } 2^{\log_2(5)+\log_2(3)} = 2^{\log_2(15)} = 15$$

Outro processo:

$$2^{\log_2(5)+\log_2(3)} = 2^{\log_2(5)} \times 2^{\log_2(3)} = 5 \times 3 = 15$$

$$\text{d) } 3^{\log_3(\sqrt{6})-\log_3(\sqrt{2})} = 3^{\log_3(\sqrt{3})} = \sqrt{3}$$

Outro processo:

$$3^{\log_3(\sqrt{6})-\log_3(\sqrt{2})} = 3^{\log_3(\sqrt{6})} \div 3^{\log_3(\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{e) } \log_3 \left(15^{\sqrt{7}} \div 5^{\sqrt{7}} \right) = \log_3 \left[\left(\frac{15}{5} \right)^{\sqrt{7}} \right] = \log_3 \left(3^{\sqrt{7}} \right) = \sqrt{7}$$

Outro processo:

$$\begin{aligned} \log_3 \left(15^{\sqrt{7}} \div 5^{\sqrt{7}} \right) &= \log_3 \left(15^{\sqrt{7}} \right) - \log_3 \left(5^{\sqrt{7}} \right) = \sqrt{7} \log_3(15) - \sqrt{7} \log_3(5) = \\ &= \sqrt{7} [\log_3(15) - \log_3(5)] = \sqrt{7} \log_3(3) = \sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\text{f) } 2^{3 \log_2(\pi)} = 2^{\log_2(\pi^3)} = \pi^3$$

Outro processo:

$$2^{3 \log_2(\pi)} = \left[2^{\log_2(\pi)} \right]^3 = \pi^3$$

$$103. \text{ a) } \log(9) + \log(3) = \log(9 \times 3) = \log(27)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3 \log_2(5) - 0,5 \log_2(25) &= \log_2(5^3) - \log_2(25^{0,5}) = \log_2(5^3) - \log_2(5) = \log_2 \left(\frac{5^3}{5} \right) = \\ &= \log_2(5^2) = \log_2(25) \end{aligned}$$

$$\text{c) } \log_2 \left(\frac{1}{x} \right) - \log_2 \left(\frac{1}{x^2} \right) = \log_2 \left(\frac{1}{x} \div \frac{1}{x^2} \right) = \log_2(x), x > 0$$

$$\text{d) } \log_2(3) \times \log_3(6) = \log_2(3) \times \frac{\log_2(6)}{\log_2(3)} = \log_2(6)$$

$$\text{e) } 1 + \ln(x) = \ln(e) + \ln(x) = \ln(ex)$$

$$\text{f) } \frac{\log(x)}{2} - 2 = \frac{1}{2} \log(x) - \log(10^2) = \log(\sqrt{x}) - \log(100) = \log \left(\frac{\sqrt{x}}{100} \right), x > 0$$

104. (C)

$$\log_3(9a^2) = \log_3(9) + 2 \log_3(a) = 2 + 2x$$

$$105. \text{ a) } \frac{\log(xy)}{\log\left(\frac{1}{xy}\right)} = \frac{\log(xy)}{-\log(xy)} = -1$$

$$\text{b) } \frac{\log(x^2)+\log(x)}{\log(y)+\log\left(\frac{1}{xy}\right)} = \frac{\log(x^2 \times x)}{\log\left(y \times \frac{1}{xy}\right)} = \frac{\log(x^3)}{\log\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{3 \log(x)}{-\log(x)} = -3$$

106. a) $\log_2(15) = \log_2(3 \times 5) = \log_2(3) + \log_2(5) = a + b$

b) $\log_2(25) = \log_2(5^2) = 2 \log_2(5) = 2b$

c) $\log_2(2,5) = \log_2\left(\frac{5}{2}\right) = \log_2(5) - \log_2(2) = b - 1$

d) $\log_2(120) = \log_2(2^3 \times 3 \times 5) = \log_2(2^3) + \log_2(3) + \log_2(5) = 3 + a + b$

e) $\log_5(2) = \frac{1}{\log_2(5)} = \frac{1}{b}$

f) $\log_3(5) = \frac{\log_2(5)}{\log_2(3)} = \frac{b}{a}$

107. a) • $D_f =]-1, +\infty[$; portanto, $D'_{f^{-1}} =]-1, +\infty[$.

• $D_{f^{-1}} = D'_f = \mathbb{R}$

• $\log_2(x+1) = y \Leftrightarrow x+1 = 2^y \Leftrightarrow x = 2^y - 1$

Então, $f^{-1}(x) = 2^x - 1$

Portanto, $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow]-1, +\infty[$ é a função bijetiva definida por $f^{-1}(x) = 2^x - 1$.

b) • $D_f =]-1, 7]$; portanto $D'_{f^{-1}} =]-1, 7]$

• Como a função f é contínua e injetiva, tem-se:

$x \in]-1, 7] \Leftrightarrow x+1 \in]0, 8] \Leftrightarrow \log_2(x+1) \in]-\infty, 3]$

Então, tem-se $D_{f^{-1}} = D'_f =]-\infty, 3]$

• Portanto, $f^{-1}:]-\infty, 3] \rightarrow]-1, 7]$ é a função bijetiva definida por $f^{-1}(x) = 2^x - 1$.

108. a) • $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$; portanto, $D'_{g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

• $\frac{1}{x+4} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+4} \in]0, +\infty[\setminus \{1\} \Leftrightarrow -\frac{1}{x+4} \in]-\infty, 0[\setminus \{-1\} \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{x+4} \in]-\infty, 2[\setminus \{1\}$

Portanto, $D_{g^{-1}} = D'_g =]-\infty, 2[\setminus \{1\}$.

• $2 - \frac{1}{x+4} = y \Leftrightarrow \frac{1}{x+4} = 2 - y \Leftrightarrow \frac{1}{x+4} = \log_3(2 - y) \Leftrightarrow x + 4 = \frac{1}{\log_3(2 - y)} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{\log_3(2 - y)} - 4$

Então, $g^{-1}(x) = \frac{1}{\log_3(2 - x)} - 4$

Portanto, $g^{-1}:]-\infty, 2[\setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ é a função bijetiva definida por

$g^{-1}(x) = \frac{1}{\log_3(2 - x)} - 4$.

b) • $D_g =]-\infty, -4[$; portanto, $D'_{g^{-1}} =]-\infty, -4[$.

• Como a função g é contínua e injetiva, tem-se:

$x \in]-\infty, -4[\Leftrightarrow x+4 \in]-\infty, 0[\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} \in]-\infty, 0[\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{x+4}} \in]0, 1[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3^{\frac{1}{x+4}} \in]-1, 0[\Leftrightarrow 2 - 3^{\frac{1}{x+4}} \in]1, 2[$

Então, tem-se $D_{g^{-1}} = D'_g =]1, 2[$.

• Portanto, $g^{-1}:]1, 2[\rightarrow]-\infty, -4[$ é a função bijetiva definida por $g^{-1}(x) = \frac{1}{\log_3(2 - x)} - 4$.

Pág. 137

109. a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: 1 - x > 0\} =]-\infty, 1[$

b) $D_g = \{x \in \mathbb{R}: 9x^2 - 1 > 0\} =]-\infty, -\frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[\quad \left| \begin{array}{l} 9x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3} \vee x > \frac{1}{3} \end{array} \right.$

c) $D_h = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge (x - 1)^2 > 0\} =]-\infty, 0[\setminus \{1\} \quad \left| \begin{array}{l} (x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \end{array} \right.$

d) $D_r = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{x+1}{x+5} > 0\right\}$

Ora, $\frac{x+1}{x+5} > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+5) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[$

Portanto, $D_r =]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[$

e) $D_m = \{x \in \mathbb{R}: 2 - \log(3 - x) \neq 0 \wedge 3 - x > 0\}$

Ora, $2 - \log(3 - x) \neq 0 \Leftrightarrow \log(3 - x) \neq 2 \Leftrightarrow 3 - x \neq 100 \Leftrightarrow x \neq -97$

Portanto, $D_m =]-\infty, 3[\setminus \{-97\}$.

f) $D_n = \{x \in \mathbb{R}: (x - 3)^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad \left| \begin{array}{l} (x - 3)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \end{array} \right.$

110. a) Tem-se $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 3 > 0\} =]-3, +\infty[$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \log_2(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \log_2(x + 3) = 1 \Leftrightarrow x + 3 = 2 \Leftrightarrow x = -1$

b) Tem-se $D_g = \mathbb{R}$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \ln(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = -2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = e^{-2} \Leftrightarrow x^2 = e^{-2} - 1$

Dado que $e^{-2} - 1 < 0$, a equação $x^2 = e^{-2} - 1$ é impossível, pelo que g não tem zeros.

c) Tem-se $D_h = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 > 0\} =]-1, +\infty[$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x - x \log_3\left(\frac{x+1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x \left[1 - \log_3\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 1 - \log_3\left(\frac{x+1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{x+1}{2} = 3 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$

d) Tem-se $D_r = \{x \in \mathbb{R}: \log(x - 2) \neq 0 \wedge x - 2 > 0\} =]2, +\infty[\setminus \{3\}$

$r(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\log(x-2)} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x \in D_r \Leftrightarrow x = 1 \wedge x \in D_r \Leftrightarrow x \in \emptyset$

Portanto, r não tem zeros.

111. Uma condição que traduz o problema é $f(a) = 5$.

Ora, $f(a) = 5 \Leftrightarrow \log_2(a + 1) = 5 \Leftrightarrow a + 1 = 2^5 \Leftrightarrow a = 31$.

112. Tem-se $f(a) = 6$.

Ora, $f(a) = 6 \Leftrightarrow 2^{a-3} = 6 \Leftrightarrow a - 3 = \log_2(6) \Leftrightarrow a = 3 + \log_2(6)$.

Portanto o ponto A tem coordenadas $(3 + \log_2(6), 6)$ e, então, o ponto simétrico do ponto A em relação à reta de equação $y = x$ tem coordenadas $(6, 3 + \log_2(6))$.

113. (B)

Uma condição que traduz o problema é $f(3) = 1$.

Ora, $f(3) = 1 \Leftrightarrow \log_2(3a) = 1 \Leftrightarrow 3a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$.

114. (A)

Tem-se:

- $-\frac{e}{a} = -1$, pelo que $a = e$
- $f(0) = 2 \Leftrightarrow \ln(a \times 0 + e) + b = 2 \Leftrightarrow \ln(e) + b = 2 \Leftrightarrow 1 + b = 2 \Leftrightarrow b = 1$

115. a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1 - x^2) = \ln(1 - 1^-) = \ln(0^+) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) = \log_{\frac{1}{2}}(+\infty) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(x)}{x-1} = \frac{\log_2(0)}{-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)-1}{3-\ln(x)} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x)-1}{3-\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) \left[2 - \frac{1}{\ln(x)} \right]}{\ln(x) \left[\frac{3}{\ln(x)} - 1 \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{\ln(x)}}{\frac{3}{\ln(x)} - 1} = \frac{2-0}{0-1} = -2$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\log_2(8x+1) - \log_2(x+2)] \stackrel{\infty-\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \left(\frac{8x+1}{x+2} \right) = \log_2(8) = 3$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x)} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)-\ln(x)+\ln(x)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)+\ln(x)}{\ln(x)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)}{\ln(x)} + 1 \right] = \frac{\ln(1)}{\ln(+\infty)} + 1 = \frac{0}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$

Pág. 138**116.** Começemos por determinar o domínio de f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: 4e - x > 0\} =]-\infty, 4e[$$

a) $f(0) = \ln(4e - 0) - 1 = \ln(4e) - 1 = \ln(4) + \ln(e) - 1 = \ln(4)$

Portanto, o gráfico interseja o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, \ln(4))$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(4e - x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(4e - x) = 1 \Leftrightarrow 4e - x = e \Leftrightarrow x = 3e$$

Portanto, o gráfico interseja o eixo das abcissas no ponto de coordenadas $(3e, 0)$.**b)** A função é contínua em $]-\infty, 4e[$, pelo que só a reta de equação $x = 4e$ pode ser assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 4e^-} [\ln(4e - x) - 1] = \ln(0^+) - 1 = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 4e$ é assíntota vertical ao gráfico de f .**117. a)** Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 6x - 2 > 0\}$$

$$\text{Ora, } x^2 - 6x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < 3 - \sqrt{11} \vee x > 3 + \sqrt{11}.$$

$$\text{Portanto, } D =]-\infty, 3 - \sqrt{11}[\cup]3 + \sqrt{11}, +\infty[.$$

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_5(x^2 - 6x - 2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 8}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 7$$

Ora $-1 \in D$ e $7 \in D$. Portanto, o conjunto-solução é $\{-1, 7\}$.

b) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: 4x + 1 > 0 \wedge 5x - 2 > 0\}$$

$$\text{Ora, } \begin{cases} 4x + 1 > 0 \\ 5x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{4} \\ x > \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{2}{5}$$

$$\text{Portanto, } D = \left] \frac{2}{5}, +\infty \right[.$$

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_2(4x + 1) - \log_2(5x - 2) = 0 \Leftrightarrow \log_2(4x + 1) = \log_2(5x - 2) \Leftrightarrow 4x + 1 = 5x - 2 \Leftrightarrow x = 3$$

Ora $3 \in D$. Portanto, o conjunto-solução é $\{3\}$.

c) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x + 4 > 0 \wedge x - 1 > 0\}$$

$$\text{Ora, } \begin{cases} x + 4 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

$$\text{Portanto, } D =]1, +\infty[.$$

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_6(x + 4) + \log_6(x - 1) = 1 \Leftrightarrow \log_6[(x + 4)(x - 1)] = 1 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 1) = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 2$$

Ora $-5 \notin D$ e $2 \in D$. Portanto, o conjunto-solução é $\{2\}$.

d) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: 5x - 1 > 0 \wedge x - 2 > 0\}$$

$$\text{Ora, } \begin{cases} 5x - 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$

$$\text{Portanto, } D =]2, +\infty[.$$

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_{81}(5x - 1) - \log_{81}(x - 2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_{81}(5x - 1) = \log_{81}(x - 2) + \log_{81}(9) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{81}(5x - 1) = \log_{81}(9x - 18) \Leftrightarrow 5x - 1 = 9x - 18 \Leftrightarrow x = \frac{17}{4}$$

Ora $\frac{17}{4} \in D$. Portanto, o conjunto-solução é $\left\{\frac{17}{4}\right\}$.

e) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: 9x - 5 > 0 \wedge \log_{16}(9x - 5) > 0\}$$

$$\text{Ora, } \begin{cases} 9x - 5 > 0 \\ \log_{16}(9x - 5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{9} \\ 9x - 5 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{9} \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$$

$$\text{Portanto, } D = \left] \frac{2}{3}, +\infty \right[.$$

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_2(\log_{16}(9x - 5)) = -2 \Leftrightarrow \log_{16}(9x - 5) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 9x - 5 = 16^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 9x - 5 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{9}$$

Ora $\frac{7}{9} \in D$. Portanto, o conjunto-solução é $\left\{\frac{7}{9}\right\}$.

f) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x + 3 > 0 \wedge x^2 + 8x + 15 > 0\}$$

$$\text{Ora, } \begin{cases} x + 3 > 0 \\ x^2 + 8x + 15 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < -5 \vee x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow x > -3$$

$$\text{Portanto, } D =]-3, +\infty[.$$

Para $x \in D$, tem-se:

$$\begin{aligned} \log_3(x+3) - \log_9(x^2+8x+15) &= 1 \Leftrightarrow \log_3(x+3) - \frac{\log_3(x^2+8x+15)}{\log_3(9)} = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_3(x+3) - \frac{\log_3(x^2+8x+15)}{2} &= 1 \Leftrightarrow 2\log_3(x+3) - \log_3(x^2+8x+15) = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_3(x^2+6x+9) - 2 &= \log_3(x^2+8x+15) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_3(x^2+6x+9) - \log_3(9) &= \log_3(x^2+8x+15) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x^2+6x+9}{9}\right) &= \log_3(x^2+8x+15) \Leftrightarrow \frac{x^2+6x+9}{9} = x^2+8x+15 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2+6x+9 &= 9x^2+72x+135 \Leftrightarrow 8x^2+66x+126 = 0 \Leftrightarrow x = -5,25 \vee x = -3 \\ \text{Ora } -5,25 \notin D \text{ e } -3 \notin D. &\text{ Portanto, o conjunto-solução é o conjunto vazio.} \end{aligned}$$

118. a) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: 2-x > 0 \wedge 2x+1 > 0\}$$

$$\text{Ora, } \begin{cases} 2-x > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 2$$

$$\text{Portanto, } D = \left]-\frac{1}{2}, 2\right[.$$

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_2(2-x) \geq \log_2(2x+1) \Leftrightarrow 2-x \geq 2x+1 \Leftrightarrow 2-x \geq 2x+1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Ora } \left]-\infty, \frac{1}{3}\right] \cap D = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]. \text{ Portanto, o conjunto-solução é } \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right].$$

b) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$$

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_2(x) < 3 \Leftrightarrow x < 8$$

$$\text{Ora }]-\infty, 8[\cap D =]0, 8[. \text{ Portanto, o conjunto-solução é }]0, 8[.$$

c) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{x} > 0 \wedge \frac{1}{x+1} > 0\right\}$$

$$\text{Ora, } \frac{1}{x} > 0 \wedge \frac{1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x+1 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x > -1 \Leftrightarrow x > 0.$$

$$\text{Portanto, } D = \mathbb{R}^+.$$

Para $x \in D$, tem-se:

$$f(x) - 1 \geq f(x+1) \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \geq \log_2\left(\frac{1}{x+1}\right) \Leftrightarrow -\log_2(x) - 1 \geq -\log_2(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) \geq \log_2(x) + 1 \Leftrightarrow \log_2(x+1) \geq \log_2(x) + \log_2(2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) \geq \log_2(2x) \Leftrightarrow x+1 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq 1$$

$$\text{Ora }]-\infty, 1] \cap D =]0, 1]. \text{ Portanto, o conjunto-solução é }]0, 1].$$

d) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: |x| > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_{\frac{1}{3}}|x| > 1 \Leftrightarrow 0 < |x| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} \wedge x \neq 0$$

$$\text{Ora } \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[\setminus \{0\} \cap D = \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[\setminus \{0\}. \text{ Portanto, o conjunto-solução é } \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[\setminus \{0\}.$$

e) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: (x-2)^2 > 0 \wedge x^2+3 > 0\}$$

$$\text{Ora, } \begin{cases} (x-2)^2 > 0 \\ x^2+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 2$$

$$\text{Portanto, } D = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log[(x-2)^2] < \log(x^2+3) \Leftrightarrow (x-2)^2 < x^2+3 \Leftrightarrow x^2-4x+4 < x^2+3 \Leftrightarrow -4x+1 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$$

Ora $]\frac{1}{4}, +\infty[\cap D =]\frac{1}{4}, +\infty[\setminus \{2\}$. Portanto, o conjunto-solução é $]\frac{1}{4}, +\infty[\setminus \{2\}$.

f) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: 2-x > 0\}$$

Ora, $2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Portanto, $D =]-\infty, 2[$.

Para $x \in D$, tem-se:

$$x \ln(2-x) \leq x \Leftrightarrow x \ln(2-x) - x \leq 0 \Leftrightarrow x[\ln(2-x) - 1] \leq 0$$

Elaboremos, para $x \in D$, um quadro de sinais da expressão $x[\ln(2-x) - 1]$:

$$\ln(2-x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(2-x) = 1 \Leftrightarrow 2-x = e \Leftrightarrow x = 2-e$$

	$-\infty$	$2-e$		0		2
x	-	-	-	0	+	
$\ln(2-x) - 1$	+	0	-	-	-	
$x[\ln(2-x) - 1]$	-	0	+	0	-	n.d.

Portanto, o conjunto-solução é $]-\infty, 2-e] \cup [0, 2[$.

g) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge 1 - \ln(x) \neq 0\}$$

Portanto, $D =]0, +\infty[\setminus \{e\}$.

Elaboremos, para $x \in D$, um quadro de sinais da expressão $\frac{\ln(x)}{1-\ln(x)}$:

	0	1		e	$+\infty$
$\ln(x)$	-	0	+	+	+
$1 - \ln(x)$	+	+	+	0	-
$\frac{\ln(x)}{1 - \ln(x)}$	-	0	+	n.d.	-

Portanto, o conjunto-solução é $[1, e[$.

h) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x-1 > 0 \wedge x+5 > 0\}$$

$$\text{Ora, } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

Portanto, $D =]1, +\infty[$.

Para $x \in D$, tem-se:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) - 1 \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+5) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-1) - \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(2x-2) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+5) \Leftrightarrow 2x-2 \leq x+5 \Leftrightarrow x \leq 7$$

Ora $]-\infty, 7] \cap D =]1, 7]$. Portanto, o conjunto-solução é $]1, 7]$.

i) Começemos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x-1 > 0 \wedge 3-x > 0\}$$

$$\text{Ora, } \begin{cases} x-1 > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

Portanto, $D =]1, 3[$.

Para $x \in D$, tem-se:

$$\begin{aligned}\log_2(x-1) - \log_2(3-x) &\leq 1 \Leftrightarrow \log_2(x-1) \leq 1 + \log_2(3-x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2(x-1) &\leq \log_2(2) + \log_2(3-x) \Leftrightarrow \log_2(x-1) \leq \log_2(6-2x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x-1 &\leq 6-2x \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{3}\end{aligned}$$

Ora $]-\infty, \frac{7}{3}] \cap D =]1, \frac{7}{3}]$. Portanto, o conjunto-solução é $]1, \frac{7}{3}]$.

j) Começamos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge 2 - 0,1x > 0\}$$

$$\text{Ora, } \begin{cases} x > 0 \\ 2 - 0,1x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 20 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 20$$

Portanto, $D =]0, 20[$.

Para $x \in D$, tem-se:

$$\begin{aligned}2 \log(x) &\leq 1 + \log(2 - 0,1x) \Leftrightarrow 2 \log(x) \leq \log(10) + \log(2 - 0,1x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log(x^2) &\leq \log(20 - x) \Leftrightarrow x^2 \leq 20 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 20 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 4\end{aligned}$$

Ora $[-5, 4] \cap D =]0, 4]$. Portanto, o conjunto-solução é $]0, 4]$.

k) Começamos por determinar o domínio da expressão:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$$

Para $x \in D$, tem-se:

$$\begin{aligned}\ln^2(x) &\geq 2 - \ln(x) \Leftrightarrow \ln^2(x) + \ln(x) - 2 \geq 0 \stackrel{y=\ln(x)}{\Leftrightarrow} y^2 + y - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &\leq -2 \vee y \geq 1 \stackrel{y=\ln(x)}{\Leftrightarrow} \ln(x) \leq -2 \vee \ln(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \leq e^{-2} \vee x \geq e\end{aligned}$$

Ora $(]-\infty, e^{-2}] \cup [e, +\infty[) \cap D =]0, e^{-2}] \cup [e, +\infty[$.

Portanto, o conjunto-solução é $]0, e^{-2}] \cup [e, +\infty[$.

l) Começamos por determinar o domínio da expressão

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x + 4 > 0 \wedge 2x + 5 > 0\}$$

$$\text{Ora, } \begin{cases} x + 4 > 0 \\ 2x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$$

Portanto, $D =]-\frac{5}{2}, +\infty[$.

Para $x \in D$, tem-se:

$$\begin{aligned}\log_4(x+4) &\leq \log_2(2x+5) \Leftrightarrow \frac{\log_2(x+4)}{\log_2(4)} \leq \log_2(2x+5) \Leftrightarrow \frac{\log_2(x+4)}{2} \leq \log_2(2x+5) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2(x+4) &\leq 2 \log_2(2x+5) \Leftrightarrow \log_2(x+4) \leq \log_2(4x^2 + 20x + 25) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x+4 &\leq 4x^2 + 20x + 25 \Leftrightarrow 4x^2 + 19x + 21 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \vee x \geq -\frac{7}{4}\end{aligned}$$

Ora $(]-\infty, -3] \cup [-\frac{7}{4}, +\infty[) \cap D = [-\frac{7}{4}, +\infty[$. Portanto, o conjunto-solução é $[-\frac{7}{4}, +\infty[$.

119. a) $A(45,2) = -0,52 + 0,55 \ln(45,2) \approx 1,576$ m

A altura que se espera é 158 cm.

$$\begin{aligned}\text{b) } A(2p) - A(p) &= -0,52 + 0,55 \ln(2p) - [-0,52 + 0,55 \ln(p)] = \\ &= 0,55 \ln(2p) - 0,55 \ln(p) = 0,55 \ln\left(\frac{2p}{p}\right) = 0,55 \ln(2) \approx 0,38\end{aligned}$$

Tal resultado significa que a altura esperada de uma criança com o dobro de massa corporal de outra é superior, em 38 cm, à altura desta.

c) • $D'_p = D_A = [e^{2,3}, e^{4,1}]$

• A função p é contínua e injetiva, pelo que, como $A(e^{2,3}) = -0,52 + 0,55 \ln(e^{2,3}) = 0,745$ e $A(e^{4,1}) = -0,52 + 0,55 \ln(e^{4,1}) = 1,735$, se tem $D_p = D'_A = [0,745; 1,735]$.

• $A = -0,52 + 0,55 \ln(p) \Leftrightarrow A + 0,52 = 0,55 \ln(p) \Leftrightarrow \ln(p) = \frac{A+0,52}{0,55} \Leftrightarrow p = e^{\frac{A+0,52}{0,55}}$

Esta função exprime o peso esperado da criança em função da sua altura, para crianças com altura compreendida, aproximadamente, entre 75 centímetros e 1,74 metros.

120. a) $\log(6,3 \times 10^{16}) = 1,44M + 5,24 \Leftrightarrow M = \frac{\log(6,3 \times 10^{16}) - 5,24}{1,44}$; portanto, $M \approx 8$.

Pág. 139

b₁) $\log(E) = 1,44 \times 6,2 + 5,24 = 14,168$; portanto, $E = 10^{14,168}$ joule.

b₂) $\log(183\,000 \times 10^{14,168}) = 1,44M + 5,24 \Leftrightarrow \log(1,83 \times 10^{19,168}) = 1,44M + 5,24 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow M = \frac{\log(1,83 \times 10^{19,168}) - 5,24}{1,44}$; portanto, $M \approx 9,9$.

121. Tem-se, nas condições do enunciado, $f'(a) = g'(b)$.

Ora, $f'(a) = g'(b) \Leftrightarrow e^a = \frac{1}{b} \Leftrightarrow a = \ln\left(\frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow a = -\ln(b) \Leftrightarrow a + \ln(b) = 0$.

122. a) Em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$, f é contínua, pois é, em ambos os casos, uma função exponencial.
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2^x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3^x) = 1$; $f(0) = 2^0 = 1$. Então, f é contínua em 0.

Portanto, f é contínua.

b) Para $x < 0$: $f'(x) = (2^x)' = 2^x \ln(2)$

Para $x > 0$: $f'(x) = (3^x)' = 3^x \ln(3)$

Para $x = 0$:

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2^h - 2^0}{h} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{\ln(2)h} - 1}{h} = \ln(2) \times \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{\ln(2)h} - 1}{\ln(2)h} \stackrel{t=\ln(2)h}{=} =$$

$$= \ln(2) \times \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^t - 1}{t} = \ln(2) \times 1 = \ln(2)$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3^h - 3^0}{h} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{\ln(3)h} - 1}{h} = \dots = \ln(3)$$

Então, tem-se: $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f'(x) = \begin{cases} 2^x \ln(2) & \text{se } x < 0 \\ 3^x \ln(3) & \text{se } x > 0 \end{cases}$

123. a) $f'(x) = [\ln(x^3)]' = \frac{(x^3)'}{x^3} = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$

b) $f'(x) = [\ln(2) \times \log_2(x)]' = \ln(2) \times [\log_2(x)]' = \ln(2) \times \frac{1}{x \ln(2)} = \frac{1}{x}$

$$\text{c) } f'(x) = [\log_3(9x)]' = \frac{(9x)'}{(9x)\ln(3)} = \frac{9}{(9x)\ln(3)} = \frac{1}{x\ln(3)}$$

$$\text{d) } f'(x) = [2^{x-2}]' = (x-2)' \times 2^{x-2} \times \ln(2) = 2^{x-2} \ln(2) = \frac{2^x \ln(2)}{4}$$

124. a) $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(x-2)^2 2^x]' = [(x-2)^2]' 2^x + (x-2)^2 (2^x)' = \\ &= 2(x-2) 2^x + (x-2)^2 2^x \ln(2) = 2^x (x-2) [\ln(2)x + 2 - 2\ln(2)] \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow 2^x (x-2) [\ln(2)x + 2 - 2\ln(2)] = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x-2 = 0 \vee \ln(2)x + 2 - 2\ln(2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 2 - \frac{2}{\ln(2)} = 0 \end{aligned}$$

b) $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2+1}{e^{-x}}\right)' = \frac{(x^2+1)' e^{-x} - (x^2+1)(e^{-x})'}{(e^{-x})^2} = \frac{2x e^{-x} + (x^2+1)e^{-x}}{e^{-2x}} = \frac{e^{-x}(2x+x^2+1)}{e^{-2x}} = e^x(x^2 + 2x + 1) \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + 2x + 1) = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

c) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x \ln(x)]' = x' \ln(x) + x [\ln(x)]' = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = 1 + \ln(x) \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

d) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x \log_2(x)]' = x' \log_2(x) + x [\log_2(x)]' = \\ &= \log_2(x) + x \frac{1}{x \ln(2)} = \log_2(x) + \frac{1}{\ln(2)} = \\ &= \log_2(x) + \log_2(e) = \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \log_2(ex) = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow ex = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

e) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \log_2(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x > 1\} =]1, +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\ln(\log_2(x))]' = \frac{[\log_2(x)]'}{\log_2(x)} = \frac{\frac{1}{x \ln(2)}}{\log_2(x)} = \frac{1}{\log_2(x) x \ln(2)} \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2(x) x \ln(2)} = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x \in \emptyset; f' \text{ não tem zeros.} \end{aligned}$$

f) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x^3 \neq 0\} = \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{\ln(x)}{x^3}\right]' = \frac{[\ln(x)]' x^3 - \ln(x)(x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{\frac{1}{x} x^3 - \ln(x)(3x^2)}{x^6} = \frac{x^2 - \ln(x)(3x^2)}{x^6} = \frac{x^2[1-3\ln(x)]}{x^6} = \frac{1-3\ln(x)}{x^4} \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \frac{1-3\ln(x)}{x^4} = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{3} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{e} \end{aligned}$$

$$\text{125. a) } f'(x) = [\ln(x^2 - 3)]' = \frac{(x^2-3)'}{x^2-3} = \frac{2x}{x^2-3}$$

$$f''(x) = \left[\frac{2x}{x^2-3}\right]' = \frac{(2x)'(x^2-3) - 2x(x^2-3)'}{(x^2-3)^2} = \frac{2(x^2-3) - 2x \times (2x)}{(x^2-3)^2} = \frac{2x^2-6-4x^2}{(x^2-3)^2} = -\frac{2x^2+6}{(x^2-3)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= [x^2 e^x]' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x = (2x + x^2) e^x \\ f''(x) &= [(2x + x^2) e^x]' = (2x + x^2)' e^x + (2x + x^2) (e^x)' = \\ &= (2 + 2x) e^x + (2x + x^2) e^x = (x^2 + 4x + 2) e^x \end{aligned}$$

$$\text{c) } f'(x) = [e^{2x} \cdot \ln(x)]' = (e^{2x})' \ln(x) + e^{2x} [\ln(x)]' = 2e^{2x} \ln(x) + \frac{1}{x} e^{2x} = \left(2 \ln(x) + \frac{1}{x}\right) e^{2x}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\left(2 \ln(x) + \frac{1}{x}\right) e^{2x} \right]' = \left(2 \ln(x) + \frac{1}{x}\right)' e^{2x} + \left(2 \ln(x) + \frac{1}{x}\right) (e^{2x})' = \\ &= \left(2 \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) e^{2x} + \left(2 \ln(x) + \frac{1}{x}\right) (2e^{2x}) = \left(\frac{2x-1}{x^2} + 4 \ln(x) + \frac{2}{x}\right) e^{2x} = \\ &= \left(\frac{4x-1}{x^2} + 4 \ln(x)\right) e^{2x} = \left(\frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} + 4 \ln(x)\right) e^{2x} \end{aligned}$$

$$\text{d) } f'(x) = [[\ln(2x)]^2]' = 2 \ln(2x) [\ln(2x)]' = 2 \ln(2x) \times \frac{2}{2x} = 2 \times \frac{\ln(2x)}{x}$$

$$f''(x) = \left(2 \frac{\ln(2x)}{x}\right)' = 2 \left(\frac{\ln(2x)}{x}\right)' = 2 \times \frac{[\ln(2x)]' x - \ln(2x)(x)'}{x^2} = 2 \times \frac{\frac{2}{2x} x - \ln(2x)}{x^2} = 2 \times \frac{1 - \ln(2x)}{x^2}$$

$$\text{e) Para } x < 0 : f'(x) = (-2x^2 + 4x)' = -4x + 4$$

$$\text{Para } x > 0 : f'(x) = (x^2)' = 2x$$

$$\text{Para } x = 0 :$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x^2 + 4x - 0}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x + 4) = 4$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

Não existe $f'(0)$.

$$\text{Então, tem-se: } f'(x) = \begin{cases} -4x + 4 & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Para } x < 0 : f''(x) = (-4x + 4)' = -4$$

$$\text{Para } x > 0 : f''(x) = (2x)' = 2$$

$$\text{Então, tem-se: } f''(x) = \begin{cases} -4 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Pág. 140

126. $f'(x) = [x + \ln(ax)]' = 1 + \frac{a}{ax} = 1 + \frac{1}{x}$; portanto, $f'(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$ qualquer que seja o valor de a .

127. a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_{1,1}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{\ln(1,1)} = 0$$

b)

Seja a a abscissa do ponto de interseção visível na representação, tem-se que $\exists b > a$ tal que $f(x) > g(x)$ em $]a, b]$.

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \log_{1,1}(x)] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{\log_{1,1}(x)}{x} \right) \right] = +\infty (1 - 0) = +\infty,$$

conclui-se que $\exists c > b$ tal que $f(x) < g(x)$ em $[c, +\infty[$.

Portanto, dado que as funções f e g são contínuas, $\exists x > a : f(x) = g(x)$, ou seja, os gráficos têm de se interseccionar pelo menos mais uma vez.

$$\text{128. a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \ln(x)}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{\ln(x) + 2e^x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}{e^x \left(\frac{\ln(x)}{e^x} + 2\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{\frac{\ln(x)}{e^x} + 2} = \frac{1+0}{0+2} = \frac{1}{2} \quad \left| \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{e^x}}{\frac{x}{e^x}} = \frac{0}{+\infty} = 0 \right.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x}{\ln(x) + 2e^x} = \frac{1+0}{-\infty+2} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{4x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{t=2x}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{2t} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} [x[\ln(x+1) - \ln(x)]] \stackrel{\infty-\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[\left(\frac{x+1}{x} \right)^x \right] = \ln(e) = 1$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x}}{\frac{\ln(x)}{x}} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{1-3x}) \stackrel{\infty \times 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^{3x-1}} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{y=3x-1}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{(e^x)^3 \times e^{-1}} \right) = e \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} \right)^3 = e \times 0^3 = 0$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} [x \ln(2x)] \stackrel{0 \times \infty}{\underset{y=\frac{1}{x}}{=}} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{y} \ln \left(\frac{2}{y} \right) \right] = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln \left(\frac{2}{y} \right)}{y} \right] = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2) - \ln(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(2)}{y} - \frac{\ln(y)}{y} \right) = 0 - 0 = 0$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x) - 4x] \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\ln(x)}{x} - 4 \right) \right] = +\infty \times (0 - 4) = -\infty$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100^x}{x^{100}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln(100^x)}}{x^{100}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln(100)}}{x^{100}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^{\ln(100)}}{x^{100}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^{\frac{100}{\ln(100)}}} \right) = +\infty$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_{0,5}(x)}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{\ln(0,5)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(0,5)x} = \frac{1}{\ln(0,5)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{\ln(0,5)} \times 0 = 0$$

$$129. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n-1}{3n+2} \right)^{\frac{2n+1}{n}} = \left(\frac{4}{3} \right)^2 = \frac{16}{9}$$

$$\text{ b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{3n+2} \right)^{\frac{2n+1}{n^2+1}} = \left(\frac{1}{3} \right)^0 = 1$$

$$130. \text{ a) } g'(x) = (1 + 3x^2 e^{-x})' = (3x^2 e^{-x})' = (3x^2)' e^{-x} + 3x^2 (e^{-x})' = 6x e^{-x} - 3x^2 e^{-x} = (6x - 3x^2) e^{-x}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (6x - 3x^2) e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 6x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

	$-\infty$	0		2	$+\infty$
e^{-x}	+	+	+	+	+
$6x - 3x^2$	-	0	+	0	-
Sinal e zeros de g'	-	0	+	0	-
Variação e extremos de g	$\searrow$	mín. rel.	$\nearrow$	máx. rel.	$\searrow$

g atinge um mínimo igual a 1 em $x = 0$ e atinge um máximo igual a $1 + 12e^{-2}$ em $x = 2$.

$$131. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x - \ln(1 + x^2)] = 0 - \ln(1) = 0$$

$$g(0) = 0$$

Portanto, a função g é contínua em 0.

$$g'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{0+h}} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{h}} - 1}{h} = \frac{e^{-\infty} - 1}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Portanto, a função g não é derivável em 0.

$$\text{ b) Para } x < 0 : g'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} \right)' = \left(\frac{1}{x} \right)' e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

$$\text{ Para } x > 0 : f'(x) = [x - \ln(1 + x^2)]' = 1 - \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$$

$$\text{ Então, tem-se: } D_{g'} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ e } g'(x) = \begin{cases} -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{ se } x < 0 \\ \frac{(x-1)^2}{1+x^2} & \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

Estudo da monotonia e dos extremos relativos

$$-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset; \text{ para } x < 0 \text{ a função } g' \text{ não tem zeros.}$$

$$\frac{(x-1)^2}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1; \text{ como } 1 \in]0, +\infty[, 1 \text{ é zero de } g'.$$

	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$	-				
$\frac{(x-1)^2}{1+x^2}$			+	0	+
Sinal e zeros de g'	-	n.d.	+	0	+
Variação e extremos de g	$\searrow$	mín. abs.	$\nearrow$		$\nearrow$

g é decrescente em $]-\infty, 0]$ e é crescente em $[0, +\infty[$.

$g(0) = 0$ é mínimo absoluto de g .

132. a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2 + x - x^2 > 0\} =]-1, 2[$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(2 + x - x^2) = \ln(0) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(2 + x - x^2) = \ln(0) = -\infty$

c) $f'(x) = [\ln(2 + x - x^2)]' = \frac{(2+x-x^2)'}{2+x-x^2} = \frac{1-2x}{2+x-x^2}$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{2+x-x^2} = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

	-1		$\frac{1}{2}$		2
$1 - 2x$		+	0	-	
$2 + x - x^2$		+	+	+	
Sinal e zeros de f'		+	0	-	
Variação e extremos de f	n.d.	$\nearrow$	máx. abs.	$\searrow$	n.d.

f é crescente em $]-1, \frac{1}{2}]$ e é decrescente em $[\frac{1}{2}, 2[$.

$f(\frac{1}{2}) = \ln(\frac{9}{4})$ é mínimo absoluto de g .

Portanto, dos resultados anteriores, pode concluir-se que $D'_f =]-\infty, \ln(\frac{9}{4})]$.

Pág. 141

133. a) • $D_f = \mathbb{R}$

• $f'(x) = (xe^{x^2})' = (x)' \times (e^{x^2}) + x \times (e^{x^2})' =$
 $= e^{x^2} + x(x^2)'(e^{x^2}) = e^{x^2} + x(2x)(e^{x^2}) = e^{x^2}(1 + 2x^2)$

• $f''(x) = [e^{x^2}(1 + 2x^2)]' = (e^{x^2})' \times (1 + 2x^2) + e^{x^2} \times (1 + 2x^2)' =$
 $= 2x e^{x^2}(1 + 2x^2) + e^{x^2} \times 4x = e^{x^2}(2x + 4x^3 + 4x) = e^{x^2}(4x^3 + 6x)$

• $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2}(4x^3 + 6x) = 0 \Leftrightarrow x(4x^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
e^{x^2}	+	+	+
x	-	0	+
$4x^2 + 6$	+	+	+
Sinal e zeros de f''	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		P.I.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[0, +\infty[$.

b) • $D_f = \mathbb{R}$

• $f'(t) = [(t - 3)e^t]' = (t - 3)' \times (e^t) + (t - 3) \times (e^t)' = e^t + (t - 3)(e^t) =$
 $= e^t(1 + t - 3) = e^t(t - 2)$

• $f''(t) = [e^t(t - 2)]' = (e^t)' \times (t - 2) + e^t \times (t - 2)' = e^t(t - 2) + e^t =$
 $= e^t(t - 2 + 1) = e^t(t - 1)$

• $f''(t) = 0 \Leftrightarrow e^t(t - 1) = 0 \Leftrightarrow t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

	$-\infty$	1	$+\infty$
e^t	+	+	+
$t - 1$	-	0	+
Sinal e zeros de f''	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		P.I.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 1]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[1, +\infty[$.

c) • $D_f =]0, \frac{1}{2}]$

Tem-se: $f(t) = \ln(t) + \ln\left(2t + \frac{1}{t}\right) = \ln(2t^2 + 1)$

• $f'(t) = [\ln(2t^2 + 1)]' = \frac{(2t^2 + 1)'}{2t^2 + 1} = \frac{4t}{2t^2 + 1}$

• $f''(t) = \left(\frac{4t}{2t^2 + 1}\right)' = \frac{(4t)' \times (2t^2 + 1) - 4t \times (2t^2 + 1)'}{(2t^2 + 1)^2} = \frac{4(2t^2 + 1) - 4t \times 4t}{(2t^2 + 1)^2} = \frac{4t^2 + 4}{(2t^2 + 1)^2}$

• $f''(t) > 0, \forall t \in]0, \frac{1}{2}]$; portanto, f tem a concavidade sempre voltada para cima.

134. a) • Domínio

$D_g = \mathbb{R}$

• Paridade

$g(-x) = (-x)^3 e^{-(-x)} = -x^3 e^x$, pelo que não se tem $g(-x) = g(x), \forall x \in D_g$, nem se tem $g(-x) = -g(x), \forall x \in D_g$.

Portanto, a função não é par nem ímpar.

• Continuidade

A função é contínua por ser o quociente de funções contínuas: a função polinomial definida por $y = x^3$ e a função exponencial definida por $y = e^x$.

• Pontos de interseção com os eixos

$g(0) = 0$; portanto, o gráfico interseja ambos os eixos na origem do referencial.

• Assíntotas

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{-x}) = +\infty$

Portanto, o gráfico não tem assíntota oblíqua em $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 e^{-x}) \stackrel{\infty \times 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota ao gráfico de g em $+\infty$.

• Monotonia e extremos

$g'(x) = (x^3 e^{-x})' = (x^3)' e^{-x} + x^3 (e^{-x})' = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = e^{-x} (3x^2 - x^3)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} (3x^2 - x^3) = 0 \Leftrightarrow x^2 (3 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

	$-\infty$	0		3	$+\infty$
e^{-x}	+	+	+	+	+
$x^2(3-x)$	+	0	+	0	-
Sinal e zeros de g'	+	0	+	0	-
Variação e extremos de g	$\nearrow$		$\nearrow$	máx. abs.	$\searrow$

g é crescente em $] -\infty, 3]$ e é decrescente em $[3, +\infty[$.

$g(3) = \frac{27}{e^3}$ é máximo absoluto.

• Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$g''(x) = [e^{-x}(3x^2 - x^3)]' = (e^{-x})'(3x^2 - x^3) + e^{-x}(3x^2 - x^3)' =$$

$$= e^{-x}(-3x^2 + x^3) + e^{-x}(6x - 3x^2) = e^{-x}(x^3 - 6x^2 + 6x)$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(x^3 - 6x^2 + 6x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 - \sqrt{3} \vee x = 3 + \sqrt{3}$$

	$-\infty$	0		$3 - \sqrt{3}$		$3 + \sqrt{3}$	$+\infty$
x	-	0	+	+	+	+	+
$x^2 - 6x + 6$	+	+	+	0	-	0	+
Sinal e zeros de g''	-	0	+	0	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g		P.I.		P.I.		P.I.	

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $] -\infty, 0]$ e em $[3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}[$ e tem a concavidade voltada para cima em $[0, 3 - \sqrt{3}]$ e em $[3 + \sqrt{3}, +\infty[$; tem pontos de inflexão em $x = 0$, em $x = 3 - \sqrt{3}$ e em $x = 3 + \sqrt{3}$.

• Contradomínio

Do estudo anterior, pode concluir-se que $D'_g =] -\infty, \frac{27}{e^3}]$.

b) • Domínio

$$D_r = \mathbb{R}$$

• Paridade

$$r(-x) = 2^{1-(-x)^2} = 2^{1-x^2} = r(x), \forall x \in D_r$$

Portanto, a função é par.

• Continuidade

A função é contínua por ser a composta de funções contínuas: a função exponencial definida por $y = 2^x$ e a função polinomial definida por $y = 1 - x^2$.

• Pontos de interseção com os eixos

$$r(0) = 2^{1-0} = 2; \text{ portanto, o gráfico interseja o eixo das ordenadas em } (0, 2).$$

$$r(x) = 0 \Leftrightarrow 2^{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset; \text{ portanto, o gráfico não interseja o eixo das abcissas.}$$

• Assíntotas

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{1-x^2} = 2^{-\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota ao gráfico de r em $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{1-x^2} = 2^{-\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota ao gráfico de r em $+\infty$.

• Monotonia e extremos

$$r'(x) = (2^{1-x^2})' = (1-x^2)' 2^{1-x^2} \ln(2) = -2 \ln(2) x 2^{1-x^2} = -\ln(2) x 2^{2-x^2}$$

$$r'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \ln(2) x 2^{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2^{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$-\ln(2)x$	+	0	-
2^{2-x^2}	+	+	+
Sinal e zeros de r'	+	0	-
Variação e extremos de r	$\nearrow$	máx. abs.	$\searrow$

r é crescente em $] -\infty, 0]$ e é decrescente em $[0, +\infty[$.

$r(0) = 2$ é máximo absoluto.

• Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$\begin{aligned} r''(x) &= [-\ln(2)x 2^{2-x^2}]' = [-\ln(2)x]' (2^{2-x^2}) + (-\ln(2)x) (2^{2-x^2})' = \\ &= -\ln(2) 2^{2-x^2} + (-\ln(2)x)(-2x) 2^{2-x^2} \ln(2) = -\ln(2) (2^{2-x^2}) [1 + x(-2x) \ln(2)] = \\ &= -\ln(2) (2^{2-x^2}) [1 - \ln(4)x^2] \end{aligned}$$

$$r''(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln(2) (2^{2-x^2}) [1 - \ln(4)x^2] = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(4)x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{\ln(4)}} \vee x = \sqrt{\frac{1}{\ln(4)}}$$

	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{1}{\ln(4)}}$		$\sqrt{\frac{1}{\ln(4)}}$	$+\infty$
$-\ln(2)(2^{2-x^2})$	-	-	-	-	-
$1 - \ln(4)x^2$	-	0	+	0	-
Sinal e zeros de r''	+	0	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de r		P.I.		P.I.	

O gráfico de r tem a concavidade voltada para cima em $] -\infty, -\sqrt{\frac{1}{\ln(4)}}]$ e em $[\sqrt{\frac{1}{\ln(4)}}, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[-\sqrt{\frac{1}{\ln(4)}}, \sqrt{\frac{1}{\ln(4)}}]$.

• Contradomínio

Do estudo anterior, pode concluir-se que $D'_r =]0, 2]$.

c) • Domínio

$$D_f = \mathbb{R}$$

• Paridade

$f(-x) = e^{-x}[(-x)^2 - x] = e^{-x}(x^2 - x)$, pelo que não se tem $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$ nem se tem $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$.

Portanto, a função não é par nem ímpar.

• Continuidade

A função é contínua por ser o produto de funções contínuas: a função exponencial definida por $y = e^x$ e a função polinomial definida por $y = x^2 + x$.

• Pontos de interseção com os eixos

$f(0) = e^0 \times 0 = 0$; portanto, o gráfico interseja ambos os eixos na origem.

• Assíntotas

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x(x^2 + x)] \stackrel{0 \times \infty}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} [e^{-y}(y^2 - y)] = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2 - y}{e^y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\frac{y^2 - y}{y^2}}{\frac{e^y}{y^2}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{y}}{\frac{e^y}{y^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(x^2 + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(x + 1) = +\infty$$

Portanto, o gráfico de f não admite assíntota em $+\infty$.

• Monotonia e extremos

$$f'(x) = (e^x(x^2 + x))' = (e^x)'(x^2 + x) + e^x(x^2 + x)' = e^x(x^2 + x) + e^x(2x + 1) =$$

$$= e^x(x^2 + 3x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

	$-\infty$	$\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$		$\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
e^x	+	+	+	+	+
$x^2 + 3x + 1$	+	0	-	0	+
Sinal e zeros de f'	+	0	-	0	+
Variação e extremos de f	$\nearrow$	máx. rel.	$\searrow$	mín. rel.	$\nearrow$

f é crescente em $]-\infty, \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}]$ e em $[\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, +\infty[$ e é decrescente em $[\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}]$.

$f(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2})$ é máximo relativo e $f(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2})$ é mínimo relativo.

• Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$f''(x) = [e^x(x^2 + 3x + 1)]' = (e^x)'(x^2 + 3x + 1) + e^x(x^2 + 3x + 1)' =$$

$$= e^x(x^2 + 3x + 1) + e^x(2x + 3) = e^x(x^2 + 5x + 4)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = -1$$

	$-\infty$	-4		-1	$+\infty$
e^x	+	+	+	+	+
$x^2 + 5x + 4$	+	0	-	0	+
Sinal e zeros de f''	+	0	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		P.I.		P.I.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -4]$ e em $[-1, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[-4, -1]$.

• Contradomínio

Tem-se $f\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) < 0$ pelo que se pode concluir que $f\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$ é mínimo absoluto e, portanto,
 $D'_f = \left[f\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right), +\infty\right[$.

d) • Domínio

$$D_j = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge x \neq 0\} = \mathbb{R}^+$$

• Paridade

Como $D_j = \mathbb{R}^+$ a função não é par nem ímpar.

• Continuidade

A função é contínua por ser o quociente de funções contínuas: a função logarítmica definida por $y = \ln(x)$ e a função afim definida por $y = x$.

• Pontos de interseção com os eixos

$0 \notin D_j$, pelo que o gráfico não intersesta o eixo das ordenadas.

$j(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$; portanto, o gráfico intersesta o eixo das abcissas no ponto de coordenadas $(1, 0)$.

• Assíntotas

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R}^+$, pelo que somente a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de j .

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de j em $+\infty$.

• Monotonia e extremos

$$j'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{[\ln(x)]' \times x - \ln(x) \times x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$j'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \in D_j \Leftrightarrow x = e$$

	0		e	$+\infty$
$1 - \ln(x)$		+	0	-
x^2		+	+	+
Sinal e zeros de j'	n.d.	+	0	-
Variação e extremos de j	n.d.	$\nearrow$	máx. abs.	$\searrow$

j é crescente em $]0, e]$ e é decrescente em $[e, +\infty[$.

$j(e) = \frac{1}{e}$ é máximo absoluto.

• Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$j''(x) = \left(\frac{1 - \ln(x)}{x^2}\right)' = \frac{[1 - \ln(x)]' \times x^2 - [1 - \ln(x)] \times (x^2)'}{x^4} = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - [1 - \ln(x)] \times 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-x - 2x[1 - \ln(x)]}{x^4} = \frac{x[-1 - 2 + 2\ln(x)]}{x^4} = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3}$$

$$j''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln(x) - 3}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 2\ln(x) - 3 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \in D_j \Leftrightarrow x = \sqrt{e^3}$$

	0		$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
$2 \ln(x) - 3$		-	0	+
x^3		+	+	+
Sinal e zeros de j''	n.d.	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de j	n.d.		P.I.	

O gráfico de j tem a concavidade voltada para baixo em $]0, \sqrt{e^3}]$, tem a concavidade voltada para cima em $[\sqrt{e^3}, +\infty[$ e tem um ponto de inflexão com abcissa igual a $\sqrt{e^3}$.

• Contradomínio

Do estudo anterior, pode concluir-se que $D'_j = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

e) • Domínio

$$D_h = \{x \in \mathbb{R}: \ln(1-x) \neq 0 \wedge 1-x > 0\} =]-\infty, 1[\setminus \{0\}$$

• Paridade

Como $D_h =]-\infty, 1[\setminus \{0\}$, a função não é par nem ímpar.

• Continuidade

A função é contínua por ser o quociente de funções contínuas: a função afim definida por $y = x - 1$ e a composta de uma função logarítmica com uma função afim.

• Pontos de interseção com os eixos

$0 \notin D_h$, pelo que o gráfico não intersesta o eixo das ordenadas.

$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\ln(1-x)} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \wedge \ln(1-x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$; portanto, o gráfico não intersesta o eixo das abcissas.

• Assíntotas

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $]-\infty, 1[\setminus \{0\}$, pelo que somente as retas de equações $x = 0$ e $x = 1$ podem ser assíntotas verticais ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{\ln(1-x)} = \frac{-1}{\ln(1^+)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\ln(1-x)} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\ln(1-x)} = \frac{-1}{\ln(0^+)} = \frac{-1}{-\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ não é assíntota vertical ao gráfico de h .

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x-1}{\ln(1-x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x \ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1}{x} \times \frac{1}{\ln(1-x)} \right) = 1 \times \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x-1}{\ln(1-x)} - 0 \times x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\ln(1-x)} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{y=1-x}{\Leftrightarrow}} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y}{\ln(y)} = -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln(y)}{y}} = -\frac{1}{0} = \infty$$

Portanto, não existe assíntota não vertical ao gráfico de h em $-\infty$.

• Monotonia e extremos

$$h'(x) = \left(\frac{x-1}{\ln(1-x)} \right)' = \frac{(x-1)' \times \ln(1-x) - (x-1) \times [\ln(1-x)]'}{[\ln(1-x)]^2} = \frac{\ln(1-x) - (x-1) \times \left(-\frac{1}{1-x} \right)}{[\ln(1-x)]^2} = \frac{\ln(1-x) - 1}{[\ln(1-x)]^2}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(1-x) - 1}{[\ln(1-x)]^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) - 1 = 0 \wedge \ln(1-x) \neq 0 \wedge x \in D_h \Leftrightarrow x = 1 - e$$

	$+\infty$	$1 - e$		0		1
$\ln(1 - x) - 1$	+	0	-		-	
$[\ln(1 - x)]^2$	+	+	+		+	
Sinal e zeros de h'	+	0	-	n.d.	-	n.d.
Variação e extremos de h	$\nearrow$	máx. rel.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	n.d.

h é crescente em $]-\infty, 1 - e]$ e é decrescente em $[1 - e, 0[$ e em $]0, 1[$.

$h(1 - e) = -e$ é máximo relativo.

• Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$\begin{aligned}
 h''(x) &= \left(\frac{\ln(1-x)-1}{[\ln(1-x)]^2} \right)' = \frac{[\ln(1-x)-1]' \times [\ln(1-x)]^2 - [\ln(1-x)-1] \times ([\ln(1-x)]^2)'}{[\ln(1-x)]^4} = \\
 &= \frac{-\frac{1}{1-x} \times [\ln(1-x)]^2 - [\ln(1-x)-1] \times (2 \ln(1-x) \times \frac{-1}{1-x})}{[\ln(1-x)]^4} = \frac{-\frac{[\ln(1-x)]^2}{1-x} + \frac{2 \ln(1-x)[\ln(1-x)-1]}{1-x}}{[\ln(1-x)]^4} = \\
 &= \frac{-\frac{\ln(1-x)}{1-x} + \frac{2[\ln(1-x)-1]}{1-x}}{[\ln(1-x)]^3} = \frac{-\ln(1-x) + 2 \ln(1-x) - 2}{(1-x)[\ln(1-x)]^3} = \frac{\ln(1-x) - 2}{(1-x)[\ln(1-x)]^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\ln(1-x)-2}{(1-x)[\ln(1-x)]^3} = 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) - 2 = 0 \wedge (1-x)[\ln(1-x)]^3 \neq 0 \wedge x \in D_h \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 1 - e^2
 \end{aligned}$$

	$+\infty$	$1 - e^2$		0		1
$\ln(1 - x) - 2$	+	0	-		-	
$1 - x$	+	+	+		+	
$[\ln(1 - x)]^3$	+	+	+		-	
Sinal e zeros de h''	+	0	-	n.d.	+	n.d.
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de h		máx. rel.		n.d.		n.d.

O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 1 - e^2]$ e em $]0, 1[$, tem a concavidade voltada para baixo em $[1 - e^2, 0[$ e tem um ponto de inflexão com abcissa igual a $1 - e^2$.

• Contradomínio

Do estudo anterior, pode concluir-se que $D'_h =]-\infty, -e] \cup]0, +\infty[$.

f) • Domínio

$$\begin{aligned}
 D_s &= \{x \in \mathbb{R} : 2 - \ln(x^2) \neq 0 \wedge x^2 > 0\} = \\
 &= \mathbb{R} \setminus \{-e, 0, e\}
 \end{aligned}$$

$$|2 - \ln(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = e^2 \Leftrightarrow x = \pm e$$

• Paridade

$$s(-x) = \frac{-x}{2 - \ln((-x)^2)} = \frac{-x}{2 - \ln(x^2)} = -\frac{x}{2 - \ln(x^2)} = -f(x), \quad \forall x \in D_s$$

Portanto, a função é ímpar.

• Continuidade

A função é contínua por ser o quociente de funções contínuas: a função afim definida por $y = x$ e a diferença entre uma função constante e a composta de uma função logarítmica com uma função quadrática.

- Pontos de interseção com os eixos

$0 \notin D_s$, pelo que o gráfico não intersesta o eixo das ordenadas.

$s(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2 - \ln(x^2)} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge 2 - \ln(x^2) \neq 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$; portanto, o gráfico não intersesta o eixo das abcissas.

- Assíntotas

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-e, 0, e\}$, pelo que somente as retas de equações $x = -e$, $x = 0$ e $x = e$ podem ser assíntotas verticais ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow -e^-} \frac{x}{2 - \ln(x^2)} = \frac{-e}{2 - \ln(e^2)^+} = \frac{-e}{0^-} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -e^+} \frac{x}{2 - \ln(x^2)} = \frac{-e}{2 - \ln(e^2)^-} = \frac{-e}{0^+} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -e$ é assíntota vertical ao gráfico de s .

Como a função é ímpar, pode concluir-se que a reta de equação $x = e$ também é assíntota vertical ao gráfico de s .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \ln(x^2)} = \frac{0}{2 - (-\infty)} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de s .

Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \ln(x^2)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x - x \ln(x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - \ln(x^2)} = \frac{1}{2 - \infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{2 - \ln(x^2)} - 0 \times x \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \ln(x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - 2 \ln(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{2}{x} - 2 \frac{\ln(x)}{x}} = \frac{1}{0 - 2 \times 0} = \infty \end{aligned}$$

Portanto, não existe assíntota não vertical ao gráfico de s em $+\infty$.

Como a função é ímpar, pode concluir-se que também não existe assíntota não vertical ao gráfico de s em $-\infty$.

- Monotonia e extremos

Como a função é ímpar, vamos estudá-la em $\mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$ e, em seguida, deduzimos as suas propriedades em $\mathbb{R}^- \setminus \{-e\}$.

Tem-se, em $\mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$, $s(x) = \frac{x}{2 - \ln(x^2)} = \frac{x}{2 - 2 \ln(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{x}{1 - \ln(x)}$.

$$\begin{aligned} s'(x) &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{x}{1 - \ln(x)} \right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1 - \ln(x)} \right)' = \frac{1}{2} \times \frac{x' \times [1 - \ln(x)] - x \times [1 - \ln(x)]'}{[1 - \ln(x)]^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \ln(x) - x \times \left[-\frac{1}{x} \right]}{[1 - \ln(x)]^2} = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \ln(x) + 1}{[1 - \ln(x)]^2} = \frac{2 - \ln(x)}{2[1 - \ln(x)]^2} \end{aligned}$$

$$s'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln(x)}{2[1 - \ln(x)]^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln(x) = 0 \wedge 1 - \ln(x) \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\} \Leftrightarrow x = e^2$$

	0		e		e^2	$+\infty$
$2 - \ln(x)$		+		+	0	-
$2[1 - \ln(x)]^2$		+		+	+	+
Sinal e zeros de s'		+	n.d.	+	0	-
Variação e extremos de s	n.d.	↗	n.d.	↗	máx. rel.	↘

Portanto, como a função é ímpar, tem-se:

	$-\infty$	$-e^2$		$-e$		0		e		e^2	$+\infty$
Variação e extremos de s	$\searrow$	mín. rel.	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	máx. rel.	$\searrow$

s é decrescente em $]-\infty, -e^2]$ e em $[e^2, +\infty[$ e é crescente em $[-e^2, -e[$, em $]-e, 0[$, em $]0, e[$ e em $]e, e^2]$.

$s(-e^2) = \frac{e^2}{2}$ é mínimo relativo e $s(e^2) = -\frac{e^2}{2}$ é máximo relativo.

• Sentido das concavidades e pontos de inflexão

Tem-se, em $\mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$:

$$\begin{aligned} s''(x) &= \left(\frac{2-\ln(x)}{2[1-\ln(x)]^2} \right)' = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2-\ln(x)}{[1-\ln(x)]^2} \right)' = \frac{1}{2} \times \frac{[2-\ln(x)]' \times [1-\ln(x)]^2 - [2-\ln(x)] \times ([1-\ln(x)]^2)'}{[1-\ln(x)]^4} = \\ &= \frac{-\frac{1}{x} \times [1-\ln(x)]^2 - [2-\ln(x)] \times 2[1-\ln(x)] \left(-\frac{1}{x}\right)}{2[1-\ln(x)]^4} = -\frac{1}{x} [1-\ln(x)] \times \frac{[1-\ln(x)] - [2-\ln(x)] \times 2}{2[1-\ln(x)]^4} = \\ &= -\frac{1}{x} \times \frac{1-\ln(x) - 4 + 2\ln(x)}{2[1-\ln(x)]^3} = -\frac{\ln(x) - 3}{2x[1-\ln(x)]^3} = \frac{3-\ln(x)}{2x[1-\ln(x)]^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{3-\ln(x)}{2x[1-\ln(x)]^3} = 0 \Leftrightarrow 3-\ln(x) = 0 \wedge (1-x)[\ln(1-x)]^3 \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = e^3 \end{aligned}$$

	0		e		e^3	$+\infty$
$3 - \ln(x)$		+		+	0	-
$2x$		+		+	+	+
$[1 - \ln(x)]^3$		+		-	-	-
Sinal e zeros de s''	n.d.	+	n.d.	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de s	n.d.		n.d.		P.I.	

Portanto, como a função é ímpar, tem-se:

	$-\infty$	$-e^3$		$-e$		0		e		e^3	$+\infty$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de s		P.I.		n.d.		n.d.		n.d.		P.I.	

O gráfico de s tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -e^3]$, em $]-e, 0[$ e em $]e, e^3]$, tem a concavidade voltada para cima em $[-e^3, -e[$, em $]0, e[$ e em $[e^3, +\infty[$ e tem pontos de inflexão com abcissas iguais a $-e^3$ e e^3 .

• Contradomínio

Do estudo anterior, pode concluir-se que $D'_s = \mathbb{R}$.

g) • Domínio

$$D_t = \mathbb{R}^+$$

• Paridade

Como $D_g = \mathbb{R}^+$, a função não é par nem ímpar.

• Continuidade

A função é contínua por ser o quociente de funções contínuas: a composta de uma função logarítmica com uma função quadrática a função afim definida por $y = x$.

• Pontos de interseção com os eixos

$0 \notin D_t$, pelo que o gráfico não intersesta o eixo das ordenadas.

$t(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(\ln(x))^2}{x} = 0 \Leftrightarrow (\ln(x))^2 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$; portanto, o gráfico intersesta o eixo das abcissas no ponto de coordenadas $(1, 0)$.

• Assíntotas

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R}^+$, pelo que somente a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota vertical ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(x))^2}{x} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de t

Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \right)^2 \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y^2)}{y} \right)^2 = \\ &= \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(y)}{y} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de t em $+\infty$.

• Monotonia e extremos

$$t'(x) = \left(\frac{(\ln(x))^2}{x} \right)' = \frac{[(\ln(x))^2]' \times x - (\ln(x))^2 \times (x)'}{x^2} = \frac{2 \ln(x) \times \frac{1}{x} \times x - (\ln(x))^2}{x^2} = \frac{\ln(x)[2 - \ln(x)]}{x^2}$$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)[2 - \ln(x)]}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(x)[2 - \ln(x)] = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \in D_t \Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^2$$

	0		1		e^2	$+\infty$
$\ln(x)$		−	0	+	+	+
$2 - \ln(x)$		+	+	+	0	−
x^2		+	+	+	+	+
Sinal e zeros de t'	n.d.	−	0	+	0	−
Variação e extremos de t	n.d.	↘	mín. abs.	↗	máx. rel.	↘

t é decrescente em $]0, 1]$ e em $[e^2, +\infty[$ e é crescente em $[1, e^2[$.

$t(1) = 0$ é mínimo absoluto e $t(e^2) = \frac{4}{e^2}$ é máximo relativo.

• Sentido das concavidades e pontos de inflexão

$$\begin{aligned} t''(x) &= \left[\frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2} \right]' = \frac{[\ln(x)(2 - \ln(x))]' \times x^2 - \ln(x)(2 - \ln(x)) \times (x^2)'}{x^4} = \frac{[2 \ln(x) - (\ln(x))^2]' \times x^2 - \ln(x)(2 - \ln(x)) \times 2x}{x^4} = \\ &= \frac{2 - 2 \ln(x) - [2 \ln(x) - (\ln(x))^2] \times 2}{x^3} = \frac{2 - 2 \ln(x) - 4 \ln(x) + 2(\ln(x))^2}{x^3} = \frac{2[(\ln(x))^2 - 3 \ln(x) + 1]}{x^3} \end{aligned}$$

$$t''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2[(\ln(x))^2 - 3 \ln(x) + 1]}{x^3} = 0 \Leftrightarrow (\ln(x))^2 - 3 \ln(x) + 1 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \wedge x \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \vee x = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

	0		$e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$		$e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	$+\infty$
$(\ln(x))^2 - 3 \ln(x) + 1$		+	0	−	0	+
x^3		+	+	+	+	+
Sinal e zeros de t''		+	0	−	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de t	n.d.		P.I.		P.I.	

O gráfico de t tem a concavidade voltada para cima em $\left]0, e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right]$ e em $\left[e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, +\infty\right[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right]$ e tem pontos de inflexão com abcissas iguais a $e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ e $e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.

• Contradomínio

Do estudo anterior, pode concluir-se que $D'_t = [0, +\infty[$.

h) • Domínio

$$D_l = \{x \in \mathbb{R} : 1 + \ln(|x|) \neq 0 \wedge |x| > 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{e}, 0, \frac{1}{e}\right\}$$

$$|1 + \ln(|x|) = 0 \Leftrightarrow |x| = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{e}$$

• Paridade

$$l(-x) = \frac{-x}{1+\ln(|-x|)} = \frac{-x}{1+\ln(|x|)} = -\frac{x}{1+\ln(|x|)} = -l(x), \quad \forall x \in D_s$$

Portanto, a função é ímpar.

• Continuidade

A função é contínua por ser o quociente de funções contínuas: a função afim definida por $y = x$ e a composta de uma função logarítmica com a função módulo.

• Pontos de interseção com os eixos

$0 \notin D_l$, pelo que o gráfico não interseja o eixo das ordenadas.

$$l(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1+\ln(|x|)} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge 1 + \ln(|x|) \neq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset; \text{ portanto, o gráfico não interseja o eixo das abcissas.}$$

• Assíntotas

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{e}, 0, \frac{1}{e}\right\}$, pelo que somente as retas de equações $x = -\frac{1}{e}$, $x = 0$ e $x = \frac{1}{e}$ podem ser assíntotas verticais ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{e}^-} \frac{x}{1+\ln(|x|)} = \frac{-1/e}{1+\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{-1/e}{0^+} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{e}^+} \frac{x}{1+\ln(|x|)} = \frac{-1/e}{1+\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{-1/e}{0^-} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -\frac{1}{e}$ é assíntota vertical ao gráfico de l .

Como a função é ímpar, pode concluir-se que a reta de equação $x = \frac{1}{e}$ também é assíntota vertical ao gráfico de l .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+\ln(|x|)} = \frac{0}{1+(-\infty)} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de l .

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{1+\ln(|x|)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\ln(|x|)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{1+\ln(|x|)} - 0 \times x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln(x)} = \frac{1}{0+0} = \infty$$

Portanto, não existe assíntota não vertical ao gráfico de l em $+\infty$.

Como a função é ímpar, pode concluir-se que também não existe assíntota não vertical ao gráfico de l em $-\infty$.

• Monotonia e extremos

Como a função é ímpar, vamos estudá-la em $\mathbb{R}^+ \setminus \left\{\frac{1}{e}\right\}$ e, em seguida, deduzimos as suas propriedades em $\mathbb{R}^- \setminus \left\{-\frac{1}{e}\right\}$.

$$\text{Tem-se, em } \mathbb{R}^+ \setminus \left\{\frac{1}{e}\right\}, \quad l(x) = \frac{x}{1+\ln(|x|)} = \frac{x}{1+\ln(x)}.$$

$$l'(x) = \left(\frac{x}{1+\ln(x)} \right)' = \frac{x' \times [1+\ln(x)] - x \times [1+\ln(x)]'}{[1+\ln(x)]^2} = \frac{1+\ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{[1+\ln(x)]^2} = \frac{1+\ln(x)-1}{[1+\ln(x)]^2} = \frac{\ln(x)}{[1+\ln(x)]^2}$$

$$l'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{[1+\ln(x)]^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \wedge 1 + \ln(x) \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \left\{ \frac{1}{e} \right\} \Leftrightarrow x = 1$$

	0		$\frac{1}{e}$		1	$+\infty$
$\ln(x)$		−		−	0	+
$[1 + \ln(x)]^2$		+		+	+	+
Sinal e zeros de l'	n.d.	−	n.d.	−	0	+
Variação e extremos de l	n.d.	↘	n.d.	↘	mín. rel.	↗

Portanto, como a função é ímpar, tem-se:

	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{e}$		0		$\frac{1}{e}$		1	$+\infty$
Variação e extremos de l	$\nearrow$	máx. rel.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	mín. rel.	$\nearrow$

l é crescente em $] -\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e é decrescente em $\left[-1, -\frac{1}{e}\right[$, em $\left]-\frac{1}{e}, 0\right[$, em $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ e em $\left]\frac{1}{e}, 1\right[$.

$l(-1) = -1$ é máximo relativo e $l(1) = 1$ é mínimo relativo.

• Sentido das concavidades e pontos de inflexão

Tem-se, em $\mathbb{R}^+ \setminus \left\{ \frac{1}{e} \right\}$

$$l''(x) = \left(\frac{\ln(x)}{[1+\ln(x)]^2} \right)' = \frac{[\ln(x)]' \times [1+\ln(x)]^2 - [\ln(x)] \times ([1+\ln(x)]^2)'}{[1+\ln(x)]^4} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x} [1+\ln(x)]^2 - [\ln(x)] \times 2 [1+\ln(x)] \times \frac{1}{x}}{[1+\ln(x)]^4} = \frac{[1+\ln(x)]^2 - [\ln(x)] \times 2 [1+\ln(x)]}{x[1+\ln(x)]^4} =$$

$$= \frac{1+\ln(x)-2\ln(x)}{x[1+\ln(x)]^3} = \frac{1-\ln(x)}{x[1+\ln(x)]^3}$$

$$l''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln(x)}{x[1+\ln(x)]^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \wedge x[1 + \ln(x)]^3 \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \setminus \left\{ \frac{1}{e} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = e$$

	0		$\frac{1}{e}$		e	$+\infty$
$1 - \ln(x)$		+		+	0	−
x		+		+	+	+
$[1 + \ln(x)]^3$		−		+	+	+
Sinal e zeros de s''	n.d.	−	n.d.	+	0	−
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de s	n.d.		n.d.		P.I.	

Portanto, como a função é ímpar, tem-se:

	$-\infty$	$-e$		$-\frac{1}{e}$		0		$\frac{1}{e}$		e	$+\infty$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de s		P.I.		n.d.		n.d.		n.d.		P.I.	

O gráfico de s tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -e]$, em $]-\frac{1}{e}, 0[$ e em $]\frac{1}{e}, e]$, tem a concavidade voltada para baixo em $[-e, -\frac{1}{e}[$, em $]0, \frac{1}{e}[$ e em $[e, +\infty[$.

Os pontos de inflexão são os pontos de coordenadas $(-e, -\frac{e}{2})$ e $(e, \frac{e}{2})$.

• Contradomínio

Do estudo anterior, pode concluir-se que $D'_l = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} 135. \text{ a) } h'(x) &= \left(\frac{\ln(x)[\ln(x)+2]}{2} \right)' = \frac{1}{2} [\ln(x) [\ln(x) + 2]]' = \\ &= \frac{1}{2} [[\ln(x)]'(\ln(x) + 2) + \ln(x) [\ln(x) + 2]'] = \frac{1}{2} \left[\frac{\ln(x)+2}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2\ln(x)+2}{x} \right] = \frac{\ln(x)+1}{x} \end{aligned}$$

Tem-se $h(1) = 0$ e $h'(1) = 1$, pelo que uma equação da reta referida é $y - 0 = 1(x - 1)$, ou seja, $y = x - 1$.

$$\begin{aligned} \text{b) } h''(x) &= \left(\frac{\ln(x)+1}{x} \right)' = \frac{[\ln(x)+1]' \times x - [\ln(x)+1] \times x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - [\ln(x)+1]}{x^2} = \frac{1 - \ln(x) - 1}{x^2} = -\frac{\ln(x)}{x^2} \\ h''(x) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \in D_h \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

	0		1	$+\infty$
$-\ln(x)$		+	0	-
x^2		+	+	+
Sinal e zeros de g''	n.d.	+	0	-
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g	n.d.		P.I.	

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]0, 1]$, tem a concavidade voltada para baixo em $[1, +\infty[$.

O ponto coordenadas $(1, 0)$ é ponto de inflexão do gráfico.

$$\begin{aligned} 136. \text{ d}'(t) &= (25 + 6t - 25e^{-1,7t})' = 6 - 25 \times (-1,7)e^{-1,7t} = 6 + 42,5e^{-1,7t} \\ d''(t) &= (6 + 42,5e^{-1,7t})' = 42,5 \times (-1,7)e^{-1,7t} = 72,25e^{-1,7t} \\ d''(3) &= 72,25 \times e^{-1,7 \times 3} \approx -0,44 \text{ m s}^{-2} \end{aligned}$$

$$137. c_1'(t) = (2te^{-0,3t})' = (2t)' \times e^{-0,3t} + 2t \times (e^{-0,3t})' = 2e^{-0,3t} + 2t \times (-0,3e^{-0,3t}) = 2e^{-0,3t} - 0,6te^{-0,3t} = e^{-0,3t}(2 - 0,6t)$$

$$c_1'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,3t}(2 - 0,6t) \Leftrightarrow 2 - 0,6t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{3}$$

	0		$\frac{10}{3}$	$+\infty$
$1 - 0,6t$		+	0	-
$e^{-0,3t}$		+	+	+
Sinal e zeros de c_1'	n.d.	+	0	-
Variação e extremos de c_1	n.d.	$\nearrow$	máx. abs.	$\searrow$

Tem-se:

$$c_1\left(\frac{10}{3}\right) = 2 \times \frac{10}{3} \times e^{-0,3 \times \frac{10}{3}} = \frac{20}{3e} \approx 2,45$$

$$c_2'(t) = (t^2e^{-0,6t})' = (t^2)' \times e^{-0,6t} + t^2 \times (e^{-0,6t})' = 2te^{-0,6t} + t^2 \times (-0,6e^{-0,6t}) = 2te^{-0,6t} - 0,6t^2e^{-0,6t} = e^{-0,6t}(2t - 0,6t^2)$$

$$c_1'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,6t}(2t - 0,6t^2) \Leftrightarrow 2t - 0,6t^2 = 0 \Leftrightarrow t(2 - 0,6t) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2 - 0,6t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{3}$$

	0		$\frac{10}{3}$	$+\infty$
$2t - 0,6t^2$	0	+	0	-
$e^{-0,6t}$		+	+	+
Sinal e zeros de c_2'	n.d.	+	0	-
Variação e extremos de c_2	n.d.	$\nearrow$	máx. abs.	$\searrow$

Tem-se:

$$c_2\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{100}{9} \times e^{-0,6 \times \frac{10}{3}} = \frac{100}{9e^2} \approx 1,5$$

Portanto, pode concluir-se que a concentração máxima é superior para o primeiro medicamento.

$$138. \text{ a) Tem-se: } 2 \text{ min e } 5 \text{ seg} = 2 + \frac{5}{60} \text{ min} = \frac{25}{12} \text{ min}; d\left(\frac{25}{12}\right) = \frac{\frac{25}{12}}{\left(\frac{25}{12}\right)^2 + 1} = \frac{300}{769} \approx 0,39 \text{ metros}$$

$$\text{ b) } d'(t) = \left(\frac{t}{t^2+1}\right)' = \frac{t'(t^2+1) - t(t^2+1)'}{(t^2+1)^2} = \frac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}, \quad 0 \leq t \leq \frac{25}{12}$$

$$d'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - t^2 = 0 \wedge (t^2 + 1)^2 \neq 0 \wedge 0 \leq t \leq \frac{25}{12} \Leftrightarrow t = 1$$

	0		1		$\frac{25}{12}$
$1 - t^2$	+	+	0	-	-
$(t^2 + 1)^2$	+	+	+	+	+
Sinal e zeros de d'	+	+	0	-	-
Variação e extremos de d		$\nearrow$	máx. abs.	$\searrow$	

$d(1) = \frac{1}{2} \text{ m}$, pelo que a distância máxima foi 50 centímetros e ocorreu ao fim de um minuto de prova.

139. $v(t) = d'(t) = \left[55 \left(t + \frac{e^{-0,2t}}{0,2} \right) - 275 \right]' = 55 \left(t + \frac{e^{-0,2t}}{0,2} \right)' = 55 \left[t' + \frac{1}{0,2} (e^{-0,2t})' \right] =$
 $55 \left[1 + \frac{1}{0,2} \times (-0,2)(e^{-0,2t}) \right] = 55(1 - e^{-0,2t}) = 55 - 55e^{-0,2t}$
 $v'(t) = (55 - 55e^{-0,2t})' = -55(e^{-0,2t})' = -55 \times (-0,2)e^{-0,2t} = 11e^{-0,2t}$
 Tem-se $11e^{-0,2t} > 0, \forall t \in [0,5]$; portanto, v é crescente, pelo que o máximo é igual a
 $v(5) = d'(5) = 55 - 55e^{-0,2 \times 5} = 55 - \frac{55}{e} \approx 34,8 \text{ m s}^{-1}$.

140. a) A altura ideal para comprar as ações é quando atinjam o menor valor.

$$v'(t) = \left(5 - \frac{3 \ln(t+1)}{t+1} \right)' = 3 \left(\frac{\ln(t+1)}{t+1} \right)' = 3 \times \frac{[\ln(t+1)]'(t+1) - \ln(t+1)(t+1)'}{(t+1)^2} =$$

$$= 3 \times \frac{\frac{1}{t+1} \times (t+1) - \ln(t+1)}{(t+1)^2} = 3 \times \frac{1 - \ln(t+1)}{(t+1)^2}$$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 3 \times \frac{1 - \ln(t+1)}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(t+1) = 0 \wedge (t+1)^2 \neq 0 \wedge t \geq 0 \Leftrightarrow t = e - 1$$

Ora, $e - 1 \approx 1,72$, pelo que, como $0,72 \times 30 = 21,6$, pode concluir-se que é daqui a um mês e 22 dias a altura em que se deve comprar as ações.

b)

É falsa; mesmo comprando as ações ao preço mínimo e vendendo-as ao preço máximo nunca teria ganho esse montante.

O valor mínimo das ações é $v(e - 1)$ que, arredondando por defeito, é 3,89 € e o valor das ações nunca ultrapassa 5 euros.

Portanto, no máximo, poderia ter ganho $1000 \times (5 - 3,89) = 1110$ euros.

141. a) • Assíntotas verticais

A função é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que não existem assíntotas verticais ao gráfico de g .

• Assíntotas não verticais

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{x}{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x} \right) = \frac{1}{-\infty} - \frac{1}{0^+} = 0 - \infty = -\infty$$

Portanto, não existem assíntotas ao gráfico de g em $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\frac{e^x}{x}} \right) = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1$$

Portanto, a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de g em $+\infty$.

b) Começamos por determinar D_h :

$$D_h = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge \ln(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+$$

$$h(x) = g(f(x)) = g(\ln(x)) = 1 - \frac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}} = 1 - \frac{\ln(x)}{x}$$

$$h'(x) = \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \right)' = \left(-\frac{\ln(x)}{x} \right)' = -\frac{[\ln(x)]' \times x - \ln(x) \times (x)'}{x^2} = -\frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} =$$

$$= -\frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(x) - 1}{x^2}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x) - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \wedge x \in D_h \Leftrightarrow x = e$$

	0		e	$+\infty$
$\ln(x) - 1$		–	0	+
x^2		+	+	+
Sinal e zeros de h'	n.d.	–	0	+
Variação e extremos de h	n.d.	↘	mín. abs.	↗

h é decrescente em $]0, e]$ e é crescente em $[e, +\infty[$.

$$h(e) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} \text{ é mínimo absoluto} \quad (1)$$

$$\text{Tem-se, ainda, } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1 - \frac{-\infty}{0^+} = +\infty \quad (2)$$

Portanto, de (1) e de (2) e do facto de h ser contínua, pode concluir-se que $D'_h = \left[\frac{e-1}{e}, +\infty\right[$.

c) • Coordenadas do ponto A

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}; \text{ portanto, tem-se } A\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right).$$

• Equação da reta r

$$f'(x) = [\ln(x)]' = \frac{1}{x}; \text{ portanto, } m_r = f'(\sqrt{e}) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Então, tem-se $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}}(x - \sqrt{e})$; portanto, a equação reduzida da reta r é

$$y = \frac{1}{\sqrt{e}}x - 1 + \frac{1}{2}, \text{ ou seja, } y = \frac{1}{\sqrt{e}}x - \frac{1}{2}.$$

• Coordenadas do ponto C

$$0 = \frac{1}{\sqrt{e}}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{e}}{2}; \text{ portanto, tem-se } C\left(\frac{\sqrt{e}}{2}, 0\right).$$

$$\bullet \text{ Área do triângulo} = \frac{\overline{CB} \times \overline{AB}}{2} = \frac{\left(\sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{2}\right) \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{e}}{8} \text{ unidades de área}$$

4. Modelos exponenciais

Pág. 144

142. Tem-se:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x + 1 \right)' = x - 1$$

$$f''(x) = (x - 1)' = 1$$

Portanto, $f'(x) + f''(x) = (x - 1) + 1 = x$, pelo que a função é solução da equação.

Pág. 145

143. a) $f'(x) = (e^{3x})' = 3e^{3x}$

$$f'(x) = kf(x) \Leftrightarrow 3e^{3x} = ke^{3x} \Leftrightarrow k = 3$$

b) $f'(x) = (2e^{-5x})' = 2 \times (-5e^{-5x}) = -10e^{-5x}$

$$f'(x) = kf(x) \Leftrightarrow -10e^{-5x} = 2ke^{-5x} \Leftrightarrow 2k = -10 \Leftrightarrow k = -5$$

c) $f'(x) = \left(\frac{1}{5}e^{-0,25x} \right)' = -0,25 \times \left(\frac{1}{5}e^{-0,25x} \right) = -0,05e^{-0,25x}$

$$f'(x) = kf(x) \Leftrightarrow -0,05e^{-0,25x} = \frac{k}{5}e^{-0,25x} \Leftrightarrow \frac{k}{5} = -0,05 \Leftrightarrow k = -0,25$$

Será que...? A equação diferencial $f' = kf$

a) Dado que g é solução da equação $f' = kf$, por definição de solução de uma condição tem que se ter $g'(x) = kg(x)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } h'(x) &= [e^{-kx}g(x)]' = (e^{-kx})'g(x) + e^{-kx}g'(x) = \\ &= -ke^{-kx}g(x) + e^{-kx}g'(x) = \\ &= -ke^{-kx}g(x) + e^{-kx}kg(x) = 0 \end{aligned}$$

c) Dado que se tem $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 0$, pode concluir-se que a função h é constante.

Vimos que a função h é constante.

Seja $h(x) = c, c \in \mathbb{R}$.

Tem-se:

$$h(x) = c \Leftrightarrow e^{-kx}g(x) = c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{c}{e^{-kx}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = ce^{kx}$$

Portanto, toda a solução da equação $f' = kf$ é da forma $f(x) = ce^{kx}$.

Pág. 146

144. a) Designemos essa diferença por d .

Tem-se:

$$P'(t) = d P(t) \Leftrightarrow 10(-0,01e^{-0,01t}) = 10de^{-0,01t} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -0,1 = 10d \Leftrightarrow d = -0,01.$$

145. a) n é definida por uma expressão da forma $n(t) = c e^{kt}$.

$$n(t+2,1) = \frac{1}{2}n(t) \Leftrightarrow ce^{kt+2,1k} = \frac{1}{2}ce^{kt} \Leftrightarrow \frac{e^{kt+2,1k}}{e^{kt}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^{2,1k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2,1k = -\ln(2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k = -\frac{\ln(2)}{2,1}$$

b) $n(t) = ce^{-\frac{\ln(2)}{2,1}t}$; $c = n(0)$

Seja T o tempo, em minutos, necessário para que se desintegre $\frac{1}{8}$ da quantidade de átomos.

Tem-se:

$$n(t+T) = \frac{7}{8}c \Leftrightarrow ce^{-\frac{\ln(2)}{2,1}t} = \frac{7}{8}c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{\ln(2)}{2,1}t = \ln\left(\frac{7}{8}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t = \frac{-2,1\ln\left(\frac{7}{8}\right)}{\ln(2)}$$

Tem-se $t \approx 0,4$ min, pelo que são necessários, aproximadamente, 24 s.

Pág. 148

146. f é definida por uma expressão da forma $f(t) = ce^{kt}$, $c = f(0)$.

Tem-se $f(2) = 2c$.

$$f(2) = 2c \Leftrightarrow ce^{2k} = 2c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^{2k} = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k = \frac{\ln(2)}{2}$$

Portanto, $f(t) = ce^{\frac{\ln(2)}{2}t}$.

$$f(t) = 3c \Leftrightarrow ce^{\frac{\ln(2)}{2}t} = 3c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^{\frac{\ln(2)}{2}t} = 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{2}t = \ln(3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t = \frac{2\ln(3)}{\ln(2)}$$

Tem-se $t \approx 3,1699$ h, pelo que são necessários, pelo menos, aproximadamente, 3 h 10 min.

147. a) $T(0) = 21 + 65e^{-0,16 \times 0} = 21 + 65 = 86 \text{ }^{\circ}\text{C}$

b) $T(t) \leq 45 \Leftrightarrow 21 + 65e^{-0,16t} \leq 45 \Leftrightarrow e^{-0,16t} \leq \frac{24}{65} \Leftrightarrow -0,16t \leq \ln\left(\frac{24}{65}\right) \Leftrightarrow t \geq -\frac{\ln\left(\frac{24}{65}\right)}{0,16}$

Tem-se $-\frac{\ln\left(\frac{24}{65}\right)}{0,16} \approx 6,227$, pelo que será necessário aguardar, pelo menos, aproximadamente, 7 minutos.

Pág. 149

148. a) Seja h o tempo necessário para que a temperatura baixe 2 graus a partir do instante t .

$$\begin{aligned} T(t+h) &= T(t) - 2 \Leftrightarrow 18 + 72e^{-0,12(t+h)} = 18 + 72e^{-0,12t} - 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 72e^{-0,12(t+h)} = 72e^{-0,12t} - 2 \Leftrightarrow 72e^{-0,12(t+h)} - 72e^{-0,12t} = -2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 72e^{-0,12t}[e^{-0,12h} - 1] = -2 \Leftrightarrow e^{-0,12h} = 1 - \frac{e^{-0,12t}}{36} \Leftrightarrow -0,12h = \ln\left(1 - \frac{e^{-0,12t}}{36}\right) \\ &\Leftrightarrow h = -\frac{\ln\left(1 - \frac{e^{-0,12t}}{36}\right)}{0,12}; \text{ portanto, } h \text{ não é constante.} \end{aligned}$$

De outro modo:

Tem-se $T(t) = 18 + 72e^{-0,12t} \Leftrightarrow t(T) = \frac{\ln\left(\frac{T-18}{T-20}\right)}{0,12}$.

Assim, para a temperatura passar, por exemplo, de $70 \text{ }^{\circ}\text{C}$ para $68 \text{ }^{\circ}\text{C}$ são necessários, aproximadamente, 20 segundos, mas para a temperatura passar, por exemplo, de $30 \text{ }^{\circ}\text{C}$ para $28 \text{ }^{\circ}\text{C}$ são necessários, aproximadamente, 91 segundos.

b) Seja T_a a temperatura ambiente.

Tem-se $T_a = \lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (18 + 72e^{-0,12t}) = 18 \text{ }^{\circ}\text{C}$

Uma igualdade que traduz a relação de proporcionalidade enunciada é $\frac{T'(t)}{18-T(t)} = K$, $K \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T'(t) &= (18 + 72e^{-0,12t})' = 72(e^{-0,12t})' = 72 \times (-0,12)e^{-0,12t} = -8,64e^{-0,12t} \\ \frac{T'(t)}{18-T(t)} &= \frac{-8,64e^{-0,12t}}{18-(18+72e^{-0,12t})} = \frac{-8,64e^{-0,12t}}{-72e^{-0,12t}} = \frac{-8,64}{-72} = 0,12; \text{ portanto, } 0,12 \text{ é a constante de proporcionalidade.} \end{aligned}$$

149. Seja $T(t)$ a expressão que dá a temperatura, T , em cada instante t .

Tem-se:

• $T'(t) = k[T(t) - 20]$ • $T(0) = 90$ • $T(5) = 40$

Seja f a função definida por $f(t) = T(t) - 20$.

Tem-se:

• $f'(t) = (T(t) - 20)' = T'(t) = k[T(t) - 20] = kf(t)$; portanto, $f(t) = ce^{kt}$.

• $f(0) = T(0) - 20 = 70$, pelo que $ce^{k \times 0} = c = 70$.

• $f(5) = T(5) - 20 = 20$, pelo que $70e^{5k} = 20 \Leftrightarrow 5k = \ln\left(\frac{2}{7}\right) \Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{5}$.

Portanto, $f(t) = 70e^{\frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{5}t}$, pelo que $T(t) = 20 + 70e^{\frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{5}t}$.

Pág. 151

150. a) Tem-se $N(0) = \frac{20}{1+3 \times e^0} = 5$, pelo que $N(0,5) = 1,25 \times 5 = 6,25$.

$$N(0,5) = 6,25 \Leftrightarrow \frac{20}{1+3e^{-0,5k}} = 6,25 \Leftrightarrow e^{-0,5k} = \frac{11}{15} \Leftrightarrow k = -2 \ln\left(\frac{11}{15}\right)$$

Portanto, $k \approx 0,62$.

b) $N'(t) = \left(\frac{20}{1+3e^{-kt}}\right)' = \frac{-20(1+3e^{-kt})'}{(1+3e^{-kt})^2} = \frac{60ke^{-kt}}{(1+3e^{-kt})^2}$; portanto, $\forall t \geq 0, M'(t) > 0$, de onde se conclui que a função N é crescente.

Estudemos a variação do crescimento:

$$\begin{aligned} N''(t) &= \left[\frac{60ke^{-kt}}{(1+3e^{-kt})^2}\right]' = 60k \left[\frac{e^{-kt}}{(1+3e^{-kt})^2}\right]' = 60k \times \frac{(e^{-kt})'(1+3e^{-kt})^2 - e^{-kt}[2(1+3e^{-kt})(-3e^{-kt})]'}{(1+3e^{-kt})^4} = \\ &= 60k \times \frac{-ke^{-kt}(1+3e^{-kt})^2 - e^{-kt}[2(1+3e^{-kt})(-3e^{-kt})]'}{(1+3e^{-kt})^4} = 60ke^{-kt} \times \frac{-k(1+3e^{-kt}) - [2(-3ke^{-kt})]}{(1+3e^{-kt})^3} = \\ &= 60ke^{-kt} \times \frac{-k-3ke^{-kt}+6ke^{-kt}}{(1+3e^{-kt})^3} = 60ke^{-kt} \times \frac{-k+3ke^{-kt}}{(1+3e^{-kt})^3} = 60k^2e^{-kt} \times \frac{-1+3e^{-kt}}{(1+3e^{-kt})^3} \\ N''(t) &= 0 \Leftrightarrow 60k^2e^{-kt}(-1+3e^{-kt}) = 0 \wedge (1+3e^{-kt})^3 \neq 0 \wedge x \in D_N \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -1+3e^{-kt} = 0 \wedge x \in D_N \Leftrightarrow t = \frac{\ln(3)}{k} \end{aligned}$$

	0		$\frac{\ln(3)}{k}$	$+\infty$
$60k^2e^{-kt}$	0	+	+	+
$-1+3e^{-kt}$	+	+	0	-
$(1+3e^{-kt})^3$	+	+	+	+
Sinal e zeros de N''	0	+	0	-
Variação e extremos de N'	n.d.	$\nearrow$	máx. rel.	$\searrow$

O crescimento começa a diminuir quando $t = \frac{\ln(3)}{k}$ (abscissa do ponto de inflexão do gráfico de N).

$$N\left(\frac{\ln(3)}{k}\right) = \frac{20}{1+3e^{-k \frac{\ln(3)}{k}}} = \frac{20}{1+3e^{-\ln(3)}} = \frac{20}{1+3 \times \frac{1}{3}} = 10, \text{ pelo q, nesse instante, a população tem 10 000 indivíduos.}$$

Pág. 152

$$\mathbf{151. a)} P(5) = 20 \Leftrightarrow 200(1 - e^{-5b}) = 20 \Leftrightarrow 1 - e^{-5b} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow e^{-5b} = \frac{9}{10} \Leftrightarrow b = -\frac{\ln\left(\frac{9}{10}\right)}{5}$$

Portanto, $b \approx 0,021$.

$$\mathbf{b)} P(10) = 200(1 - e^{-0,021 \times 10}) = 200(1 - e^{-0,21}) \approx 37,88; \text{ deverá decorar 38 palavras.}$$

$$\text{c) } P(t) = 180 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,021t} = \frac{9}{10} \Leftrightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{0,021}; \text{ portanto } t \approx 109,65$$

$$200(1 - e^{-109,65b}) = 160 \Leftrightarrow e^{-109,65b} = 0,2 \Leftrightarrow b = -\frac{\ln(0,2)}{109,65}$$

Portanto, $b \approx 0,015$.

$$\text{152. a) } 10 \log(10^{12}I) = 10[\log(10^{12}) + \log(I)] = 10[12 + \log(I)] = 120 + 10 \log(I)$$

$$\text{b) } \text{Seja } I_2 = 50I_1.$$

$$N(I_2) - N(I_1) = 120 + 10 \log(I_2) - [120 + 10 \log(I_1)] = 10 \log(I_2) - 10 \log(I_1) = \\ = 10[\log(I_2) - \log(I_1)] = 10 \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 10 \log\left(\frac{50I_1}{I_1}\right) = 10 \log(50) \approx 17$$

$$\text{c) } N'(I) = [120 + 10 \log(I)]' = 10[\log(I)]' = 10 \times \frac{1}{I} = \frac{10}{I}$$

$$N''(I) = \left(\frac{10}{I}\right)' = -\frac{10}{I^2}$$

$$N''(I) = -\frac{N'(I)}{I} \Leftrightarrow -\frac{10}{I^2} = -\frac{\frac{10}{I}}{I} \Leftrightarrow \frac{10}{I^2} = \frac{10}{I^2}$$

$$\text{d) } N = 120 + 10 \log(I) \Leftrightarrow 10 \log(I) = N - 120 \Leftrightarrow \log(I) = \frac{N}{10} - 12 \Leftrightarrow I = 10^{\frac{N}{10} - 12}$$

Pág. 153

$$\text{153. a) } m(t + 29) = \frac{1}{2}m(t) \Leftrightarrow \frac{m(t+29)}{m(t)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{m_0 2^{-\frac{1}{29}(t+29)}}{m_0 2^{-\frac{1}{29}t}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2^{-\frac{1}{29}t-1}}{2^{-\frac{1}{29}t}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$m(t + 29) = \frac{1}{2}m(t)$ significa que a semivida do estrôncio-90 é 29 anos.

$$\text{b) } m'(t) = \left(m_0 2^{-\frac{1}{29}t}\right)' = -\frac{m_0}{29} 2^{-\frac{1}{29}t}$$

$m''(t) = \left(-\frac{m_0 \ln(2)}{29} 2^{-\frac{1}{29}t}\right)' = -\frac{m_0 \ln(2)}{29} \left(2^{-\frac{1}{29}t}\right)' = \frac{m_0 \ln^2(2)}{29^2} 2^{-\frac{1}{29}t}$; portanto, $\forall t \geq 0, m''(t) > 0$, de onde se conclui que a taxa de desintegração é crescente e, atendendo a que a taxa de desintegração é negativa, isso se significa que a desintegração se vai fazendo de modo mais lento.

Pág. 158

154. $f(x) + x^2 f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} = 0$; portanto, a função definida por $e^{\frac{1}{x}}$ é solução da equação.

$$\text{155. a) } M(5) = 0,3 \Leftrightarrow A \times e^{-\frac{5}{25}} = 0,3 \Leftrightarrow A = 0,3 \times e^{\frac{5}{25}}; \text{ portanto } A \approx 0,366.$$

$M(0) = A \times e^{-\frac{0}{25}} = A$, pelo que a massa inicial é, aproximadamente, 366 mg.

$$\text{b) } M(t) = \frac{2}{3} \times 0,366 \Leftrightarrow 0,366 \times e^{-\frac{t}{25}} = 0,244 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{25}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{t}{25} = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t = -25 \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Portanto, $t \approx 10,14$, pelo que a resposta é: 1014 anos.

156. a) Tem-se $m(0) = 50$, $m(1) = 49,9785$ e, dado que $m'(t) = k \cdot m(t)$, $m(t) = ce^{kt}$
Então:

$$\begin{aligned} \begin{cases} m(0) = 50 \\ m(1) = 49,9785 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} ce^{k \times 0} = 50 \\ ce^{k \times 1} = 49,9785 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 50 \\ 50e^k = 49,9785 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 50 \\ e^k = 0,99957 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 50 \\ k = \ln(0,99957) \end{cases}; \text{ portanto, } m(2) = 50 \times e^{\ln(0,99957) \times 2} = 50 \times 0,99957^2 \approx 49,957 \text{ g.} \end{aligned}$$

b) Tem-se $m(t) = 25 \Leftrightarrow 50e^{\ln(0,99957)t} = 25 \Leftrightarrow 0,99957^t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \log_{0,99957} \frac{1}{2}$
Portanto, $t \approx 1612$ anos.

157. Seja P a função que dá a população nessa região (em milhões) em função de t .

a) Tem-se $P(0) = 40$, $P(15) = 56$ e, dado que $P'(t) = k \cdot P(t)$, $P(t) = ce^{kt}$
 $\begin{cases} P(0) = 40 \\ P(15) = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ce^{k \times 0} = 40 \\ ce^{k \times 15} = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 40 \\ 40e^{15k} = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 40 \\ 15k = \ln(1,4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 40 \\ k = \frac{\ln(1,4)}{15} \end{cases}$
Portanto, $P(t) = 40e^{\frac{\ln(1,4)}{15}t}$.

b) $P(20) = 40e^{\frac{\ln(1,4)}{15} \times 20} = 40e^{\frac{4 \ln(1,4)}{3}} \approx 63$, pelo que a resposta é 63 milhões de anos.

c) Tem-se $P(t) = 80 \Leftrightarrow 40e^{\frac{\ln(1,4)}{15}t} = 80 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln(1,4)}{15}t} = 2 \Leftrightarrow \frac{\ln(1,4)}{15}t = \ln(2) \Leftrightarrow t = \frac{15 \ln(2)}{\ln(1,4)}$
Portanto, $t \approx 30,9$ anos, pelo que tal deverá ocorrer em 2031.

158. Dado que $C(t) = a + be^{-0,04t}$, e $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = a$, a temperatura ambiente, em graus Celsius, é igual a a .

Tem-se $C(0) = 75$ e $C(15) = 50$.

$$\begin{cases} C(0) = 75 \\ C(15) = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + be^{-0,04 \times 0} = 75 \\ a + be^{-0,04 \times 15} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 75 \\ a + be^{-0,6} = 50 \end{cases}$$

Dado que $e^{-0,6} \approx 0,549$, podemos considerar a condição $\begin{cases} a + b = 75 \\ a + 0,549b = 50 \end{cases}$

$$\text{Ora, } \begin{cases} a + b = 75 \\ a + 0,549b = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 75 - a \\ a + 0,549(75 - a) = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 75 - a \\ a = \frac{8,825}{0,451} \end{cases}; \text{ portanto, } a \approx 19,6^\circ\text{C}.$$

159. Seja t_0 o instante em que o café estava à temperatura de 80°C .

$$\begin{aligned} \begin{cases} C(t_0) = 80 \\ C(t_0 + 5) = 50 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 25 + be^{-kt_0} = 80 \\ 25 + be^{-k(t_0+5)} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} be^{-kt_0} = 55 \\ be^{-kt_0-5k} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} be^{-kt_0} = 55 \\ be^{-kt_0}e^{-5k} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} be^{-kt_0} = 55 \\ 55e^{-5k} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} be^{-kt_0} = 55 \\ -5k = \ln\left(\frac{5}{11}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} be^{-kt_0} = 55 \\ k = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{5}{11}\right) \end{cases}; \text{ portanto, } k \approx 0,158. \end{aligned}$$

160. Seja T a função que dá a temperatura, em graus Celsius, do bolo, em função do tempo t , em horas, a partir do instante em que o bolo foi colocado no forno.

a) Tem-se $T(t) = 220 + be^{-kt}$.

$$\begin{cases} T(0) = 20 \\ T\left(\frac{1}{4}\right) = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 220 + be^{-k \times 0} = 20 \\ 220 + be^{-\frac{k}{4}} = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -200 \\ -200e^{-\frac{k}{4}} = -100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -200 \\ e^{-\frac{k}{4}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -200 \\ k = -4 \ln\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Portanto, $T(t) = 220 - 200e^{4 \ln\left(\frac{1}{2}\right)t}$ e, então

$$\begin{aligned} T\left(\frac{1}{2}\right) &= 220 - 200e^{4 \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2}} = & | 4 \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} &= 2 \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= 220 - 200e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = 220 - 200 \times \frac{1}{4} = 220 - 50 = 170 \end{aligned}$$

b) Tem-se $T(t) = 200 \Leftrightarrow 220 - 200e^{4 \ln\left(\frac{1}{2}\right)t} = 200 \Leftrightarrow e^{4 \ln\left(\frac{1}{2}\right)t} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{4 \ln\left(\frac{1}{2}\right)}$

Portanto, $t \approx 0,83$ horas, ou seja, cerca de 50 minutos.

$$\begin{aligned} \mathbf{161. a)} \quad & \begin{cases} g(0) = 20 \\ g(2) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times e^{k \times 0 + 1} = 20 \\ a \times e^{k \times 2 + 1} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a e = 20 \\ a e^{2k+1} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{20}{e} \\ \frac{20}{e} e^{2k+1} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{20}{e} \\ e^{2k} = \frac{14}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{20}{e} \\ k = \ln(\sqrt{0,7}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathbf{b)} \quad g(t+2) = 0,5g(t) \Leftrightarrow a \times e^{k(t+2)+1} = 0,5a \times e^{kt+1} \Leftrightarrow \underbrace{e^{kt+2k+1}}_{(a \neq 0)} = 0,5e^{kt+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{kt+2k+1}}{e^{kt+1}} = 1 \Leftrightarrow e^{2k} = 0,5 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \ln(0,5) \Leftrightarrow k = \ln(\sqrt{0,5})$$

162. a) A quantidade de açúcar no recipiente é igual a $M(0) = 50$.

A massa de açúcar não dissolvido ao fim de meia hora é igual a $M(30) = 50e^{-0,02 \times 30} = 50e^{-0,6} \approx 27,441$.

Portanto, a massa de açúcar dissolvido ao fim de meia hora é igual a $50 - 27,441 \approx 22,559$ g.

$$\mathbf{b)} \quad M'(t) = (50e^{-0,02t})' = 50 \times (-0,02)e^{-0,02t} = -e^{-0,02t}$$

$$\frac{M'(t)}{M(t)} = -\frac{e^{-0,02t}}{50e^{-0,02t}} = -\frac{1}{50}, \text{ pelo que } M' \text{ é diretamente proporcional a } M.$$

c₁) Tem-se, $(\forall t \geq 0, e^{-0,02t} > 0) \Rightarrow (\forall t \geq 0, 35e^{-0,02t} > 0) \Rightarrow (\forall t \geq 0, 35e^{-0,02t} + 10 > 10)$, o que prova o pretendido.

$$\begin{aligned} \mathbf{c_2)} \quad & M(t) = M_1(t) \Leftrightarrow 50e^{-0,02t} = 35e^{-0,01t} + 10 \Leftrightarrow 50e^{-0,02t} - 35e^{-0,01t} - 10 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 50x^2 - 35x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{35 \pm \sqrt{3225}}{100} \Leftrightarrow \underbrace{x = \frac{35 + \sqrt{3225}}{100}}_{x > 0}; \text{ portanto, } x \approx \frac{35 + 56,789}{100} = 0,918. \end{aligned}$$

$$x = 0,918 \Leftrightarrow e^{-0,01t} = 0,918 \Leftrightarrow -0,01t = \ln(0,918) \Leftrightarrow t = -100 \ln(0,918)$$

Portanto, $t \approx 8,56$, ou seja, 8 min 34 s.

Pág. 160

163. a) Tem-se $m(0) = 2$ e $m\left(\frac{1}{3}\right) = 1$.

$$m(0) = 2 \Leftrightarrow ae^{-0} = 2 \Leftrightarrow a = 2$$

$$m\left(\frac{1}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 2e^{-\frac{k}{3}} = 1 \Leftrightarrow -\frac{k}{3} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = 3 \ln(2)$$

b) $2e^{-3 \ln(2)t} = 2(e^{\ln(2)})^{-3t} = 2 \times 2^{-3t} = 2^{-3t+1}$

c) $2^{-3t+1} = 0,2 \Leftrightarrow -3t + 1 = \log_2(-3t + 1) \Leftrightarrow t = \frac{1 - \log_2(-3t+1)}{3}$

Portanto, $t \approx 1,1$ h, ou seja, $t \approx 1$ hora e 6 minutos.

164. $c'(t) = (t^2 e^{-0,8t})' = (t^2)' e^{-0,8t} + t^2 (e^{-0,8t})' = 2t e^{-0,8t} - 0,8t^2 e^{-0,8t} =$
 $= (2t - 0,8t^2) e^{-0,8t}$

$$c'(t) = 0 \Leftrightarrow (2t - 0,8t^2) e^{-0,8t} = 0 \Leftrightarrow 2t - 0,8t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 2,5$$

	0		2,5	$+\infty$
$2t - 0,8t^2$	0	+	0	-
$e^{-0,8t}$	+	+	+	+
Sinal e zeros de c'	0	+	0	-
Variação e extremos de c		↗	máx. abs.	↘

O momento ideal para tomar o medicamento é, portanto, 2,5 horas antes das 18 horas e 10 minutos, ou seja, às 15 horas e 40 minutos.

165. $\frac{e^t}{1+2e^t} = \frac{1}{\frac{1}{e^t}+2} = \frac{1}{2+e^{-t}} = \frac{1/2}{1+\frac{1}{2}e^{-t}}$; portanto, $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ e $c = \frac{1}{2}$.

166. $\begin{cases} f(0) = 0,04 \\ f(96) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{1+be^0} = 0,04 \\ \frac{a}{1+be^{-28,8}} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,04(1+b) \\ 0,04(1+b) = 5(1+e^{-28,8}b) \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,04(1+b) \\ 0,04 + 0,04b = 5 + 5e^{-28,8}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,04(1+b) \\ b(0,04 - 5e^{-28,8}) = 5 - 0,04 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,04(1+b) \\ b = \frac{4,96}{0,04 - 5e^{-28,8}} \end{cases}$

Portanto, $b \approx 124$ e $a \approx 5$.

167. a) Tem-se $A(0) = \frac{40}{1+2 \times e^0} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ e $B(0) = \frac{30}{1+e^0} = \frac{30}{2} = 15$; foi a novela B.

b) $\frac{40}{1+2e^{-0,1t}} > \frac{30}{1+e^{-0,1t}} \Leftrightarrow 40 + 40e^{-0,1t} > 30 + 60e^{-0,1t} \Leftrightarrow 10 > 20e^{-0,1t} \Leftrightarrow e^{-0,1t} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -0,1t < \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow t > 10 \ln(2)$

Como $10 \ln(2) \approx 6,9$ e como 6,9 semanas são cerca de 6 semanas e 6,3 dias, ou seja, aproximadamente, 48,3 dias, foi a partir do dia 18 de novembro.

$$c) \frac{40}{1+2e^{-0,1t}} > 35 \Leftrightarrow 1 + 2e^{-0,1t} < \frac{40}{35} \Leftrightarrow e^{-0,1t} < \frac{1}{14} \Leftrightarrow t > 10 \ln(14)$$

Como $10 \ln(14) \approx 26,39$, conclui-se que, ao fim de cerca de 26 semanas e meia, a novela A ultrapassa os 35 000 espetadores diários.

$$\frac{30}{1+e^{-0,1t}} > 35 \Leftrightarrow 1 + e^{-0,1t} < \frac{30}{35} \Leftrightarrow e^{-0,1t} < -\frac{1}{7}, \text{ o que é impossível.}$$

$$d) A'(x) = \left(\frac{40}{1+2e^{-0,1t}} \right)' = \frac{-40(1+2e^{-0,1t})'}{(1+2e^{-0,1t})^2} = \frac{-40(2 \times (-0,1)e^{-0,1t})}{(1+2e^{-0,1t})^2} = \frac{8e^{-0,1t}}{(1+2e^{-0,1t})^2}$$

$$\begin{aligned} A''(x) &= \left[\frac{8e^{-0,1t}}{(1+2e^{-0,1t})^2} \right]' = \frac{(8e^{-0,1t})' \times (1+2e^{-0,1t})^2 - 8e^{-0,1t} \times [(1+2e^{-0,1t})^2]'}{(1+2e^{-0,1t})^4} = \\ &= \frac{-0,8e^{-0,1t}(1+2e^{-0,1t})^2 - 8e^{-0,1t} [2(1+2e^{-0,1t})(1+2e^{-0,1t})']}{(1+2e^{-0,1t})^4} = \\ &= \frac{-0,8e^{-0,1t}(1+2e^{-0,1t})^2 - 8e^{-0,1t} \times 2(1+2e^{-0,1t})(-0,2e^{-0,1t})}{(1+2e^{-0,1t})^4} = \frac{-0,8e^{-0,1t}(1+2e^{-0,1t}) - 8e^{-0,1t} \times 2(-0,2e^{-0,1t})}{(1+2e^{-0,1t})^3} = \\ &= \frac{-0,8e^{-0,1t} - 1,6e^{-0,2t} + 3,2e^{-0,2t}}{(1+2e^{-0,1t})^3} = \frac{-0,8e^{-0,1t} + 1,6e^{-0,2t}}{(1+2e^{-0,1t})^3} = \frac{-0,8e^{-0,1t}(1-2e^{-0,2t})}{(1+2e^{-0,1t})^3} \end{aligned}$$

$$A''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-0,8e^{-0,1t} + 1,6e^{-0,2t}}{(1+2e^{-0,1t})^3} = 0 \Leftrightarrow -0,8e^{-0,1t} + 1,6e^{-0,2t} = 0 \wedge 1 + 2e^{-0,1t} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,8e^{-0,1t}(1 - 2e^{-0,1t}) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,1t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = 10 \ln(2)$$

	0		$10 \ln(2)$	$+\infty$
$-0,8e^{-0,1t}$		—	—	—
$1 - 2e^{-0,2t}$		+	0	—
$(1 + 2e^{-0,1t})^3$		+	+	+
Sinal e zeros de A''		+	0	—
Variação e extremos de A'		↗	máx. abs.	↘

Como $10 \ln(2) \approx 6,9$, conclui-se que foi no final da sétima semana.

Pág. 161

$$168. a) \frac{60}{1+14e^{-0,6t}} = 50 \Leftrightarrow 1 + 14e^{-0,6t} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow e^{-0,6t} = \frac{1}{70} \Leftrightarrow t = \frac{\ln(70)}{0,6}$$

Portanto, $t \approx 7,1$ minutos.

b) Dado que inicialmente as duas situações foram testemunhadas pelo mesmo número de pessoas, tem de ser $\frac{60}{1+14} = \frac{60}{1+a}$ e, portanto, $a = 14$.

Dado que decorrido o mesmo tempo houve sempre menos pessoas a testemunhar a segunda situação, tem-se $\frac{60}{1+14e^{-0,6t}} < \frac{60}{1+14e^{-bt}}$, ou seja, $1 + 14e^{-0,6t} > 1 + 14e^{-bt}$, pelo que $b < 0,6$, com $b > 0$.

$$169. a) \frac{8e^{0,5t}}{10+e^{0,5t}} = \frac{\frac{8e^{0,5t}}{e^{0,5t}}}{\frac{10}{e^{0,5t}} + \frac{e^{0,5t}}{e^{0,5t}}} = \frac{8}{10e^{-0,5t} + 1}$$

b) $r'(t) = \frac{-8 \times 10 \times (-0,5)e^{-0,5t}}{(1+10e^{-0,5t})^2} = \frac{40e^{-0,5t}}{(1+10e^{-0,5t})^2}$; portanto, $\forall t \in D_r, r'(t) > 0$, de onde se conclui que

a função r é crescente.

Como, para além disto, se tem $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 8$ e $r(t) < 8, \forall t \in \mathbb{R}^+$, pode concluir-se que o maior valor da parte inteira de $r(t)$ é 7.

c)
$$r''(t) = \left(\frac{40e^{-0,5t}}{(1+10e^{-0,5t})^2} \right)' = \frac{(-20e^{-0,5t})(1+10e^{-0,5t})^2 - (40e^{-0,5t})(1+10e^{-0,5t})(-10e^{-0,5t})}{[(1+10e^{-0,5t})^2]^2} =$$

$$= \frac{(1+10e^{-0,5t})[(-20e^{-0,5t})(1+10e^{-0,5t}) - (40e^{-0,5t})(-10e^{-0,5t})]}{[(1+10e^{-0,5t})^2]^2} =$$

$$= \frac{(-20e^{-0,5t})(1+10e^{-0,5t}) - (40e^{-0,5t})(-10e^{-0,5t})}{(1+10e^{-0,5t})^3} =$$

$$= \frac{-20e^{-0,5t} - 200(e^{-0,5t})^2 + 400(e^{-0,5t})^2}{(1+10e^{-0,5t})^3} = \frac{-20e^{-0,5t} + 200(e^{-0,5t})^2}{(1+10e^{-0,5t})^3}$$

$$r''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-20e^{-0,5t} + 200(e^{-0,5t})^2}{(1+10e^{-0,5t})^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -20e^{-0,5t} + 200(e^{-0,5t})^2 = 0 \wedge (1+10e^{-0,5t})^3 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,5t}(-20 + 200e^{-0,5t}) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,5t} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow t = 2 \ln(10)$$

	0		$2 \ln(10)$	$+\infty$
$e^{-0,5t}$		+	+	
$-20 + 200e^{-0,5t}$		+	0	
$(1+10e^{-0,5t})^3$		+	+	
Sinal e zeros de r''		+	0	
Variação e extremos de r'		↗	máx. abs.	

Como $2 \ln(10) \approx 4,6$, conclui-se que a taxa de variação de r toma o maior valor aos 4,6 minutos.

d) $r(20) = \frac{8}{10e^{-0,5 \times 20} + 1} \approx 4,39$; portanto, o número de reações corretas é 20.

170. a) $0,67 \log(E) - 3,25 = 9,1 \Leftrightarrow \log(E) = \frac{9,1+3,25}{0,67} \Leftrightarrow \log(E) = 18,4328$

Portanto, $E \approx 2,7 \times 10^{18}$.

b) $M_2 = M_1 + 1 \Leftrightarrow 0,67 \log(E_2) - 3,25 = 0,67 \log(E_1) - 3,25 + 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 0,67[\log(E_2) - \log(E_1)] = 1 \Leftrightarrow \log\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{1}{0,67} \Leftrightarrow \frac{E_2}{E_1} = 10^{\frac{1}{0,67}}$

Como $10^{\frac{1}{0,67}} \approx 31$, pode concluir-se que a energia libertada num sismo com mais um grau de magnitude do que outro é cerca de 31 vezes superior.

+Exercícios Propostos

Pág. 162

171. (B)

$$C \times 1,025^n > 1,3C \Leftrightarrow 1,025^n > 1,3$$

Ora, tem-se:

- $1,025^{10} \approx 1,28 < 1,3$
- $1,025^{11} \approx 1,31 > 1,3$

172. (B)

$$1000 \times 1,1^6 \approx 1771,56$$

173. (C)

$$\lim \left(\frac{n+1}{n} \right)^{2n+k} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^2 \times \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k = e^2 \times 1 = e^2$$

174. (A)

$$\lim \left(2 + \frac{2}{n} \right)^{-n} = 2^{-\infty} = 0$$

175. (B)

$\lim h(u_n) = +\infty$ se e só se $\lim u_n = 1$ ou $\lim u_n = e^+$.

Ora, tem-se:

- $\lim \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = 1^2 = 1$
- $\lim \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e^-$
- $\lim \left(e + \frac{1}{n} \right) = e^+$
- $\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$

Pág. 163

176. (B)

$$\text{Tem-se } 5^{-\frac{1}{2}} = (\sqrt{5})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ e } -5\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} \times (-25) \neq \frac{\sqrt{5}}{5}$$

177. (C)

$$4^{1+x} = 4 \times 4^x = 4 \times a$$

178. (C)

$$f(0) = 2 \Leftrightarrow 8^{-a} = 2 \Leftrightarrow 2^{-3a} = 2 \Leftrightarrow -3a = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

179. (D)

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2 - 4^{-\frac{1}{2}+a} = 0 \Leftrightarrow (2^2)^{-\frac{1}{2}+a} = 2 \Leftrightarrow 2^{-1+2a} = 2 \Leftrightarrow -1 + 2a = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

180. (A)

Tem-se:

$$f(-4) = 10^{-4} - 1000 = \frac{1}{10000} - 1000 < 0$$

$$f(-1) = 10^{-1} - 1000 = \frac{1}{10} - 1000 < 0$$

$$f(0) = 10^0 - 1000 = 1 - 1000 = -999$$

$$f(1) = 10^1 - 1000 = 10 - 1000 = -990$$

$$f(4) = 10^4 - 1000 = 10000 - 1000 = 9000$$

O segmento de reta intersesta o eixo das abscissas se e só se um dos dois pontos escolhidos for o ponto de abscissa 4.

$$P = \frac{1 \times 4}{{}^5C_2} = \frac{4}{10} = 0,4$$

181. (C)

Nas condições do enunciado, tem que ser $f(1) \times f(2) < 0$.

Tem-se:

$$\begin{aligned} f(1) \times f(2) < 0 &\Leftrightarrow (2a - e)(2a - e^2) < 0 \Leftrightarrow 2\left(a - \frac{e}{2}\right) \times 2\left(a - \frac{e^2}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(a - \frac{e}{2}\right)\left(a - \frac{e^2}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow a \in \left]\frac{e}{2}, \frac{e^2}{2}\right[\end{aligned}$$

182. (B)

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2 - x}{e^x - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \wedge e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \wedge e^x \neq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [x = 0 \vee x = 1] \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Pág. 164

183. (A)

A função f é crescente se e só se $a^2 - 2a + 1 > 1$.

Tem-se:

$$a^2 - 2a + 1 > 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a > 0 \Leftrightarrow a(a - 2) > 0 \Leftrightarrow a \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

184. (A)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + xg(x)}{2x} = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x}{2x} + \frac{g(x)}{2} \right] = -1 \Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2x}}_{=0} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{2} = -1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{2} = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$$

185. (A)

$$\lim_{x \rightarrow 3} e^{\frac{1-x}{(x-3)^2}} = e^{\frac{-2}{0^+}} = e^{-\infty} = 0$$

186. (C)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e}{3} \right)^x = \left(\frac{e}{3} \right)^{-\infty} = 0 \quad | \text{ Tem-se } 0 < \frac{e}{3} < 1$$

187. (B)

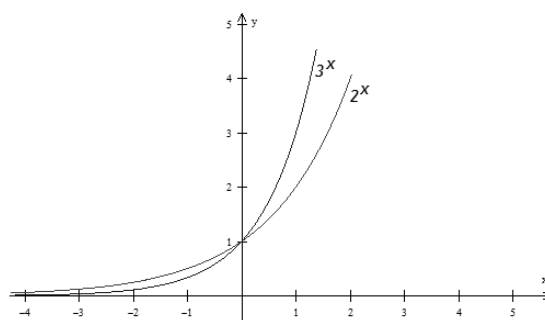
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - e^{-x} + 2x] = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x] - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}}_{=0} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-2x)] = 1 ; \text{ portanto, a reta de equação } y = -2x + 1 \text{ é assíntota ao gráfico de } f .$$

188. (D)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - e^x] = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x}_{=0} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 ; \text{ portanto, a}$$

reta de equação $y = 1$ é assíntota ao gráfico de f .

189. (B)



190. (C)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1/2}{x} \right)^x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

191. (C)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax}-1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x}-1}{ax} \times a \right) = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax}-1}{ax} \stackrel{\substack{\frac{0}{0} \\ ax=y}}{=} a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y} = a \times 1 = a$$

192. (A)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{a-x}-1}{x-a} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{-y} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y} = -1 ; \text{ portanto, } k = -1 .$$

193. (D)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-e^{2-x}}{x^2-2x} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-e^y}{(2-y)^2-2(2-y)} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y(y-2)} = - \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{e^y-1}{y} \times \frac{1}{y-2} \right] = \\ &= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y-2} = -1 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 2^{x-a} = f(2) = 2^{2-a}$$

Para que a função seja contínua, tem de ser $2^{2-a} = \frac{1}{2}$.

$$\text{Ora, } 2^{2-a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2-a = -1 \Leftrightarrow a = 3 .$$

194. (C)

Tem-se:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x+1}{e^x+a} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{a}{e^x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

Portanto, em $+\infty$, o gráfico da função admite a assíntota de equação $y = 2$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x+1}{e^x+a} = \frac{0+1}{0+a} = \frac{1}{a}$$

Portanto, em $-\infty$, o gráfico da função admite a assíntota de equação $y = \frac{1}{a}$.

$$\text{Então, } a = \frac{1}{2} .$$

195. (A)

$$a^{4+\log_4(3)} = a^4 \times a^{\log_4 3} = a^4 \times 3 = 3a^4$$

196. (B)

$$g(2) = 3 \Leftrightarrow \frac{e^{2-1}}{a} = 3 \Leftrightarrow a = \frac{e}{3} ; \text{ portanto, } \ln(a) = \ln\left(\frac{e}{3}\right) = \ln(e) - \ln(3) = 1 - \ln(3) .$$

197. (D)

$$\log_2(4 \times 2^{-x}) = \log_2(4) + \log_2(2^{-x}) = 2 + (-x) = 2 - x$$

198. (D)

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\frac{a^2}{ab}\right) = \ln(a^2) - \ln(ab) = 6k - 2k = 4k$$

Pág. 166

199. (B)

Tem-se $\log_a(\sqrt{y}) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_a(y) = 2 \Leftrightarrow \log_a(y) = 4$, pelo que vem:

$$\log_a(x^2 \times y) = \log_a(x^2) + \log_a(y) = 2\log_a(x) + \log_a(y) = 2b + 4$$

200. (B)

$$\ln(x) - \ln(2) = \ln(y) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln(y) \Leftrightarrow \frac{x}{2} = y \Leftrightarrow x = 2y$$

201. (C)

$$\log_a(9a^2) = \log_a(9) + \log_a(a^2) = \log_a(a^{2b}) + 2 = 2b + 2$$

202. (C)

$$\frac{\log_c(b)}{c^{\log_c(a)}} = c^{\log_a(b)}$$

203. (B)

$$\log_2\left(\sqrt{\frac{1}{8^{1-2k}}}\right) = \log_2\left[\left(8^{2k-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}\log_2(2^{6k-3}) = \frac{6k-3}{2} = 3k - \frac{3}{2}$$

204. (C)

$$\frac{\log_a(2)}{\log_2(a)} = \log_a(2) \times \frac{1}{\log_2(a)} = \log_a(2) \times \log_a(2) = [\log_a(2)]^2$$

205. (B)

$$\log(2) + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \dots + \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1)$$
$$\log(n+1) = 2 \Leftrightarrow n+1 = 100 \Leftrightarrow n = 99$$

206. (A)

$g(0) = 2\log_4(4 - 0) = 2\log_4(4) = 2 \times 1 = 2$; portanto, o ponto de coordenadas $(0, 2)$ pertence ao gráfico de g , pelo que o ponto de coordenadas $(2, 0)$ pertence ao gráfico da função inversa de g .

Pág. 167

207. (B)

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = 0 &\Leftrightarrow f[g(x)] = 0 \Leftrightarrow f\left(\log_{\frac{1}{2}}(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x) = -1 \vee \log_{\frac{1}{2}}(x) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \vee x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 2^{-1}\end{aligned}$$

208. (D)

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow e^{2x} = 3 \Leftrightarrow 2x = \ln(3) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln(3) = \ln(\sqrt{3}); \text{ portanto, as coordenadas desse ponto são } (\ln(\sqrt{3}), 3).$$

209. (C)

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[\log_2(x)] = 2^{\log_2(x)+1} = 2^{\log_2(x)} \times 2^1 = x \times 2 = 2x$$

210. (D)

$$f(kx) = 2 + f(x) \Leftrightarrow \ln(kx) = \ln(e^2) + \ln(x) \Leftrightarrow \ln(kx) = \ln(e^2x) \Leftrightarrow kx = e^2x$$

Portanto, $k = e^2$.

211. (A)

$$f(a) = \ln(ea^3) = \ln(e) + \ln(a^3) = 1 + 3\ln(a) = 1 + 3b$$

212. (B)

Nas condições do enunciado, tem de ser $f(1) \times f(2) < 0$.

Tem-se:

$$\begin{aligned}f(1) \times f(2) < 0 &\Leftrightarrow [\log_2(1) + 2a] \times [\log_2(2) + 2a] < 0 \Leftrightarrow 2a \times (1 + 2a) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\end{aligned}$$

Pág. 168

213. (D)

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x+1}{\ln(x)} = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \wedge \ln(x) \neq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = -1 \wedge x \neq 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \emptyset\end{aligned}$$

214. (D)

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R}^+ : f(x) < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^+ : 0 < x < 2\} =]0, 2[$$

215. (D)

Tem-se, para todo o natural n , $u_n < 0$.

Portanto, $f(u_n) = f\left[\log_2\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 2^{\log_2\left(\frac{1}{n}\right)+1} = 2^{\log_2\left(\frac{1}{n}\right)} \times 2 = \frac{1}{n} \times 2 = \frac{2}{n}$.

216. (A)

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : g(x) > 2\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} =]-\infty, 0[$$

Pág. 169**217. (B)**

$$f(\ln(2)) = \frac{e^2}{2} \Leftrightarrow e^{a-\ln(2)} = \frac{e^2}{2} \Leftrightarrow \frac{e^a}{e^{\ln(2)}} = \frac{e^2}{2} \Leftrightarrow \frac{e^a}{2} = \frac{e^2}{2} \Leftrightarrow a = 2$$

218. (D)

$$f(\ln(2)) = \frac{e^2}{4} \Leftrightarrow e^{a-\ln(2)} = \frac{e^2}{4} \Leftrightarrow \frac{e^a}{e^{\ln(2)}} = \frac{e^2}{4} \Leftrightarrow \frac{e^a}{2} = \frac{e^2}{4} \Leftrightarrow e^a = \frac{e^2}{2} \Leftrightarrow a = \ln\left(\frac{e^2}{2}\right)$$

$$\ln\left(\frac{e^2}{2}\right) = \ln(e^2) - \ln(2) = 2 - \ln(2)$$

219. (C)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x)}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x+2} = -\frac{\infty}{2} = -\infty$$

220. (C)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\log_{\frac{1}{2}}(x) + \log_2\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \log_{\frac{1}{2}}(+\infty) + \log_2(0^+) = 0 - \infty = -\infty$$

221. (C)

$$\log_{\frac{1}{2}}(x) + 1 < 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x) < -1 \Leftrightarrow x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

222. (D)

Tem-se $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$.

Ora, $f'(x) = (2^x)' = \ln(2) \times 2^x$; portanto, $f'(1) = \ln(2) \times 2 = \ln(4)$.

223. (C)

Tem-se $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(2)$.

Ora, $f'(x) = [\ln(x)]' = \frac{1}{x}$; portanto, $f'(2) = \frac{1}{2}$.

224. (B)

$$\text{Tem-se } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\ln(x)}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

225. (D)

$$\text{Tem-se } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right) = +\infty - 0 = +\infty.$$

Pág. 170

226. (B)

$$\text{Tem-se } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} = \frac{0-1}{0-1} = 1$$

227. (C)

$$\begin{aligned} \text{Tem-se } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+f(x)}{x+\ln(x)} = 3 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{f(x)}{x}}{1+\frac{\ln(x)}{x}} = 3 \Leftrightarrow \frac{1+\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}}{1+\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}} = 3 \Leftrightarrow \frac{1+\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}}{1+0} = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \end{aligned}$$

228. (D)

A função f é crescente em $[0, 6]$, pelo que somente a afirmação da opção (D) é verdadeira.

229. (C)

	-2		-1		0		1		2
Sinal e zeros de f'	n.d.	-	0	+	n.d.	-	0	+	n.d.
Variação e extremos de f		↘	mín. rel.	↗	máx. rel.	↘	mín. rel.	↗	

Pág. 171

230. (B)

- $g(0) > 0$ e $g'(0) < 0$; portanto, $g(0) - g'(0) > 0$.
- $g''(1) < 0$ e $g(1) > 0$; portanto, $g''(1) - g(1) < 0$.
- $g'(1,5) < 0$ e $g''(1,5) < 0$; portanto, $g'(1,5) \times g''(1,5) > 0$.
- $g''(0) > 0$ e $g'(0) < 0$; portanto, $g''(0) - g'(0) > 0$.

231. (D)

Dado que $f''(x)$ é sempre negativa, a função f' é decrescente, pelo que $f'(2) < f'(1)$; portanto, $f'(2) < 0$.

232. (C)

Tem-se $f''(a) = \ln(2^a) = a \ln(2) < 0$; portanto, $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$.

233. (A)

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 e^{-100x} (x - 100)^3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee (x - 100)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 100$$

	$-\infty$	0		100	$+\infty$
x^2	+	0	+	+	+
e^{-100x}	+	+	+	+	+
$(x - 100)^3$	-	-	-	0	+
Sinal e zeros de f''	-	0	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f				P. I.	

O gráfico de f tem um ponto de inflexão em $x = 100$.

234. (B)

$$\begin{aligned} f''(x) &= [(x - 20)^4 e^{2x}]' = [(x - 20)^4]' e^{2x} + (x - 20)^4 (e^{2x})' = \\ &= [4(x - 20)^3 (x - 20)'] e^{2x} + (x - 20)^4 (2e^{2x}) = 4(x - 20)^3 e^{2x} + 2(x - 20)^4 e^{2x} = \\ &= 2e^{2x} (x - 20)^3 (2 + x - 20) = 2e^{2x} (x - 20)^3 (x - 18) \\ f''(x) &= 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} (x - 20)^3 (x - 18) = 0 \Leftrightarrow x = 20 \vee x = 18 \end{aligned}$$

	$-\infty$	18		20	$+\infty$
$2e^{2x}$	+	+	+	+	+
$(x - 20)^3$	-	-	-	0	+
$x - 18$	-	0	+	+	+
Sinal e zeros de f''	+	0	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		P. I.		P. I.	

O gráfico de f tem pontos de inflexão em $x = 18$ e em $x = 20$.

Pág. 172**235. (B)**

Dado que $f'(x)$ é positiva e crescente em $\mathbb{R}$, a função f é crescente e o seu gráfico tem a concavidade sempre voltada para cima.

236. a) $10\,000\$00 \times 1,36^2 = 18\,496\$00$

b) $10\,000\$00 \times 1,03^{24} = 20\,327\$94$

c) $10\,000\$00 \times x^{12} = 10\,000\$00 \times 1,36 \Leftrightarrow x^{12} = 1,36 \Leftrightarrow x = \sqrt[12]{1,36}$

Ora, $\sqrt[12]{1,36} \approx 1,026$

A taxa mensal é aproximadamente igual a 2,6%.

d) • À taxa de 36%:

$C_0 \times 1,36^n = 2C_0 \Leftrightarrow 1,36^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1,36} 2$; portanto, $n \approx 2,254$.

Dado que o capital é pago anualmente, são necessários 3 anos.

• À taxa de 1,6%:

$C_0 \times 1,016^n = 2C_0 \Leftrightarrow 1,016^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1,016} 2$; portanto, $n \approx 43,667$.

Dado que o capital é pago anualmente, são necessários 44 anos.

237.a) $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \times 2^x \times 2^{-x} = 5^2 - 2 = 23$

b) $\frac{2^{2x}-1}{2^x+1} = \frac{(2^x)^2-1^2}{2^x+1} = \frac{(2^x+1)(2^x-1)}{2^x+1} = 2^x - 1$

c) $\frac{1-2^{-x}}{1+2^{-x}} = \frac{(1-2^{-x}) \times 2^x}{(1+2^{-x}) \times 2^x} = \frac{2^x-2^0}{2^x+2^0} = \frac{2^x-1}{2^x+1}$

Outro processo:

$$\frac{1-2^{-x}}{1+2^{-x}} = \frac{1-\frac{1}{2^x}}{1+\frac{1}{2^x}} = \frac{\frac{2^x-1}{2^x}}{\frac{2^x+1}{2^x}} = \frac{2^x-1}{2^x+1}$$

Pág. 173

238. a)

$\begin{cases} Q(0) = 4096 = 2^{12} \\ Q(a) = 1024 = 2^{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2^{12} \\ 2^{12} \times 2^{-0,5a} = 2^{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2^{12} \\ 2^{-0,5a} = 2^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2^{12} \\ a = 4 \end{cases}$

Portanto, $a = 4$ e $c = 4096$.

b)

Tem-se $Q(t) = 2^{12} \times 2^{-0,5t} = 2^{12-0,5t}$.

$\frac{Q(t+1)}{Q(t)} = \frac{2^{12-0,5(t+1)}}{2^{12-0,5t}} = 2^{12-0,5t-0,5-12+0,5t} = 2^{-0,5} \approx 0,7$; tal significa que, a cada hora, a quantidade de substância se reduz, aproximadamente, em 30%.

239. a) $i(0) = \frac{12}{4+2^0} = \frac{12}{5} = 2,4$; portanto, havia 240 cobaias infectadas no início do tratamento.

O aumento foi de 90 cobaias, o que corresponde a um aumento de 60%.

b) $i(t) = 1,5 \Leftrightarrow \frac{12}{4+2^{0,5t}} = 1,5 \Leftrightarrow 4 + 2^{0,5t} = 8 \Leftrightarrow t = 4$; foi ao fim de quatro dias.

c) $i(6) = \frac{12}{4+2^{0,5 \times 6}} = \frac{12}{4+8} = 1$; portanto, havia 100 cobaias infectadas no sexto dia, pelo que se tem

$$\begin{cases} n(0) = 1 \\ n(3) = 2 \end{cases}$$

Ora, $\begin{cases} n(0) = 1 \\ n(3) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times b^0 = 1 \\ a \times b^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt[3]{2} \end{cases}$; então, $n(t) = \sqrt[3]{2}^t = 2^{\frac{t}{3}}$

d) (C)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} i(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{4+2^{0,5(-x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{4+2^{-0,5x}} = \frac{12}{4+2^{-\infty}} = \frac{12}{4+0} = 3$$

Pág. 174

$$\begin{aligned} 240. \text{ a) } \begin{cases} g(0) = 160 \\ g(10) = 5120 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5 \times 2^{k \times 0 + m} = 160 \\ 5 \times 2^{k \times 10 + m} = 5120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^m = 32 \\ 2^{10k+m} = 1024 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ 10k + 5 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{g(t+1)}{g(t)} = \frac{5 \times 2^{k(t+1)+m}}{5 \times 2^{kt+m}} = \frac{2^{kt+k+m}}{2^{kt+m}} = 2^k$$

c) $\frac{g(t+1)}{g(t)} = 2^{0,5} = \sqrt{2} \approx 1,4$; tal significa que, a cada dia, o número de caracóis aumenta, aproximadamente, 40%.

$$241. \text{ a}_1) \begin{cases} a \times e^{b \times 0} = 10 \\ a \times e^{b \times 12} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ 10e^{b \times 12} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ e^{b \times 12} = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = \frac{\ln(0,5)}{12} \end{cases}$$

Portanto, tem-se $M = 10e^{\frac{\ln(0,5)}{12}t}$, sendo M a massa existentes, em mg, decorridos t dias.

a₂) $10e^{\frac{\ln(0,5)}{12}t} = 1 \Leftrightarrow \frac{\ln(0,5)}{12}t = \ln\left(\frac{1}{10}\right) \Leftrightarrow t = \frac{12 \ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\ln(0,5)}$; portanto, $t \approx 39,863$, pelo que foi ao longo do 40.º dia.

b₁) • Plutónio-240

$$e^{-0,00011t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{0,00011} ; \text{ portanto, } t \approx 6301 \text{ anos.}$$

• Plutónio-242

$$e^{-0,0000018t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{0,0000018} ; \text{ portanto, } t \approx 385082 \text{ anos.}$$

$$\begin{aligned} \text{b}_2) 0,2e^{-0,00011t} &= 0,01e^{-0,0000018t} \Leftrightarrow \frac{e^{-0,00011t}}{e^{-0,0000018t}} = \frac{0,01}{0,2} \Leftrightarrow e^{-0,0001082t} = 0,05 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0,05)}{0,0001082} ; \text{ portanto, } t \approx 27687 \text{ anos.} \end{aligned}$$

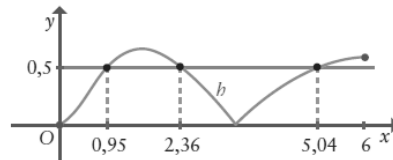
242. A função c é contínua em $[2; 2,25]$, $c(2) \approx 0,21$ e $c(2,25) \approx 0,18$; portanto, dado que $c(2,25) < 0,2 < c(2)$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists x \in]2; 2,25[: c(x) = 0,2$, ou seja, existiu um instante entre as 10:00 e as 10:15 em que a concentração de medicamento no sangue tomou o valor 0,2mg/l.

Pág. 175

$$243. a_1) f(t) = c(t) \Leftrightarrow 3t^2 e^{-0,8t} = 1,5t^2 e^{-0,6t} \Leftrightarrow \frac{3t^2 e^{-0,8t}}{1,5t^2 e^{-0,6t}} = 1 \Leftrightarrow 2e^{-0,2t} = 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow t = -\frac{\ln(\frac{1}{2})}{0,2}$; portanto, $t \approx 3,466$ horas, ou seja, cerca de 3 horas e 28 minutos. Portanto, tal ocorreu pelas 14 horas e 58 minutos.

a₂) As soluções da condição $|f(x) - c(x)| = 0,5$ no intervalo $[0,6]$ são, aproximadamente, 0,95, 2,36 e 5,04; portanto, os momentos pedidos são 12:27, 13:52 e 16:32.



b) A primeira frase foi proferida pela Maria:

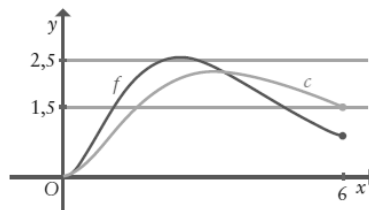
O analgésico da Maria nunca chegou a atingir a concentração de 2,5mg/l e, portanto, nunca chegou a não ter qualquer dor; já o analgésico da Leonor ultrapassou a referida concentração durante algum tempo.

A segunda frase foi proferida pela Maria:

O analgésico da Leonor ultrapassa a concentração de 1,5 mg/l em menos tempo.

A terceira frase foi proferida pela Leonor:

A concentração do analgésico da Leonor é inferior a 1,5 mg/l quando ainda não decorreram 5 horas depois da toma.



Pág. 176

$$c_1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 e^{-0,8x}}{1,5x^2 e^{-0,6x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{-0,2x}) = 2e^{-\infty} = 0$$

$$c_2) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 e^{-0,8x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{e^{0,8x}} = 3 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{0,8x}} = 0$$

$$244. a) T(0) = 20 + 60e^{-0,1 \times 0} = 20 + 60 = 80 \text{ } ^\circ\text{C}$$

b) $T(15) = 20 + 60e^{-0,1 \times 15} = 20 + 60e^{-1,5} \approx 33,4 \text{ } ^\circ\text{C}$; portanto, o café já não está a gosto do António pois está a, aproximadamente, 33 °C.

$$c) T(t) < 50 \Leftrightarrow 20 + 60e^{-0,1t} < 50 \Leftrightarrow e^{-0,1t} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -0,1t < \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow t > -10 \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Tem-se $-10 \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 6,93$ minutos. Portanto, tem de esperar, pelo menos, cerca de 7 minutos.

d) Como $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 20$, pode concluir-se que a temperatura ambiente era de 20°C e, portanto, o café estava a 30°C .

$$20 + 60e^{-0,1t} = 30 \Leftrightarrow e^{-0,1t} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow t = -10 \ln\left(\frac{1}{6}\right)$$

Tem-se $-10 \ln\left(\frac{1}{6}\right) \approx 17,92$ minutos. Portanto, tinham passado, aproximadamente, 18 minutos.

e) a é a temperatura ambiente e b é a diferença entre a temperatura inicial do corpo e a temperatura ambiente.

245. a) • $g(x) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2^x - 4^x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y - y^2 + 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$| -y^2 + y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 2$$

$$y=2^x$$

$$\Leftrightarrow y \geq -1 \wedge y \leq 2 \Leftrightarrow \underbrace{2^x \geq -1}_{x \in \mathbb{R}} \wedge 2^x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 1; \text{ portanto, o conjunto-solução é }]-\infty, 1].$$

• $h(x) - h(4-x) \geq 1 \Leftrightarrow \log_2(x) - \log_2(4-x) \geq 1 \Leftrightarrow \log_2(x) \geq \log_2(2) + \log_2(4-x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_2(x) \geq \log_2(8-2x) \Leftrightarrow x \geq 8-2x \wedge x > 0 \wedge x < 4 \Leftrightarrow x \geq \frac{8}{3} \wedge x > 0 \wedge x < 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{8}{3} \wedge x < 4; \text{ portanto, o conjunto-solução é } \left[\frac{8}{3}, 4\right[.$$

b) $(h \circ g)(x) = h(2^x - 4^x) = \log_2(2^x - 4^x) = \log_2[2^x(1-2^x)] =$

$$= \log_2(2^x) + \log_2(1-2^x) = x + \log_2(1-2^x)$$

$$D_{h \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_h\} = \{x \in \mathbb{R} : 2^x - 4^x > 0\} = \quad | \quad 2^x - 4^x > 0 \Leftrightarrow 2^x > 4^x \Leftrightarrow x < 0$$

$$=]-\infty, 0[$$

c) $D'_{h \circ g}$ é o transformado de $]-\infty, \frac{1}{4}] \cap [0, +\infty[$ por meio da função h .

$$h\left(\left]0, \frac{1}{4}\right]\right) =]-\infty, -2]$$

$$| \quad h\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$$

Portanto, $D'_{h \circ g} =]-\infty, -2]$.

d1) $v_{n+1} - v_n = h(\pi^{n+1}) - h(\pi^n) = \log_2(\pi^{n+1}) - \log_2(\pi^n) = \log_2\left(\frac{\pi^{n+1}}{\pi^n}\right) = \log_2(\pi).$

Portanto, (v_n) é uma progressão aritmética de razão $\log_2(\pi)$.

d2) $S_n = \frac{\log_2(\pi) + \log_2(\pi^n)}{2} \times n = \frac{\log_2(\pi) + n \log_2(\pi)}{2} \times n = \frac{\log_2(\pi)(1+n)}{2} \times n =$

$$= \frac{1}{2} \log_2(\pi)(n^2 + n) = (n^2 + n) \log_2(\pi^{\frac{1}{2}}) = (n^2 + n) \log_2(\sqrt{\pi})$$

Pág. 177

246. a1) $Q_0 e^{-k \times 25} = \frac{1}{2} Q_0 \Leftrightarrow e^{-k \times 25} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{25}$; portanto, tem-se $Q(t) = e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{25} t}.$

a2) $Q(1) = \frac{1}{2} Q_0$; $Q(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 Q_0$; $Q(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 Q_0$; ...; $Q(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n Q_0$

b) Tem-se $Q_0 e^{-23\,103\,kk} = \frac{1}{2} Q_0 \Leftrightarrow k = -\frac{\ln(\frac{1}{2})}{23\,103}$, pelo que $Q(t) = 200 e^{\frac{\ln(\frac{1}{2})}{23\,103} t}$.

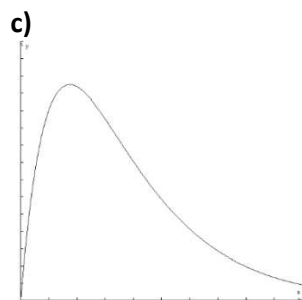
$$Q(t) = 150 \Leftrightarrow 200 e^{\frac{\ln(\frac{1}{2})}{23\,103} t} = 150 \Leftrightarrow \frac{\ln(\frac{1}{2})}{23\,103} t = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow t = \frac{23\,103 \ln(\frac{3}{4})}{\ln(\frac{1}{2})}$$

Portanto $t \approx 9589$ anos.

c) $Q(s) = \frac{Q_0}{2} \Leftrightarrow Q_0 e^{-ks} = \frac{Q_0}{2} \Leftrightarrow e^{-ks} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{ks} = 2 \Leftrightarrow ks = \ln(2) \Leftrightarrow k = \frac{\ln(2)}{s}$

247. a) $d(5) = 50(e^{-2} - e^{-4})$; portanto, o protótipo A tinha percorrido $25 + 50(e^{-2} - e^{-4})$ metros, ou seja, cerca de 30,85 metros.

b) $d(t) = 12,5 \Leftrightarrow 50(e^{-0,4t} - e^{-0,8t}) = 12,5 \Leftrightarrow e^{-0,4t} - e^{-0,8t} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4y - 4y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (2y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-0,4t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t = -\frac{\ln(\frac{1}{2})}{0,4} \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{0,4}$; portanto, $t \approx 1,73$ segundos.



c₁)

A afirmação é verdadeira, porque $\forall t \in [0, 10], d(t) > 0$ e, portanto, em cada instante t o protótipo A percorreu mais metros do que o protótipo B.

c₂) A afirmação é falsa, pois, a partir de um certo instante, a função d é decrescente, ou seja, começa a diminuir, a partir desse instante, a diferença entre o número de metros percorridos pelo protótipo A e o número de metros percorridos pelo protótipo B.

Pág. 178

248. a) $D_h = \{x \in \mathbb{R}: |x - 1| > 0 \wedge \log_2|x - 1| > 0\}$

Tem-se:

- $|x - 1| > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$
 - $\log_2|x - 1| > 0 \Leftrightarrow |x - 1| > 1 \Leftrightarrow x - 1 < -1 \vee x - 1 > 1 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$
- Portanto, $D_h =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$.

b) Tem-se, para $x \in D_h$:

$$h(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(\log_2|x - 1|) \geq -1 \Leftrightarrow \log_2|x - 1| \leq 2 \Leftrightarrow |x - 1| \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq x - 1 \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5$$

Portanto, o conjunto-solução é $[-3, 5] \cap D_h$, ou seja, $[-3, 0[\cup]2, 5]$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \log_{\frac{1}{2}}(\log_2|x-1|) = \log_{\frac{1}{2}}(\log_2(1)) = \log_{\frac{1}{2}}(0) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \log_{\frac{1}{2}}(\log_2|x-1|) = \log_{\frac{1}{2}}(\log_2(1)) = \log_{\frac{1}{2}}(0) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{2}}(\log_2|x-1|) = \log_{\frac{1}{2}}(\log_2(+\infty)) = \log_{\frac{1}{2}}(+\infty) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \log_{\frac{1}{2}}(\log_2|x-1|) = \log_{\frac{1}{2}}(\log_2(+\infty)) = \log_{\frac{1}{2}}(+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

249. O limite é $+\infty$, porque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$, sendo a^x uma exponencial de base maior do que 1 (o que é o caso).

250. O limite é 0 porque $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{g(x)}}{f(x)} \right)^{-1} = (+\infty)^{-1} = 0$ (repara que

g é uma exponencial de base entre 0 e 1 e, portanto, $\frac{1}{g}$ é uma exponencial de base maior do que 1, aplicando-se, assim, o limite notável referido no item 15.

251. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

• Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, pelo que somente a reta de equação $x = -1$ pode ser assíntota ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2(1+e^{-x})}{1+x} = \frac{1(1+e)}{0} = \infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

• Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1+e^{-x})}{x^2+x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e^{-x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2(1+e^{-x})}{1+x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2e^{-x}-x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{e^x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f em $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1+e^{-x})}{x^2+x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+e^{-x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1+\infty}{1+0} = +\infty$$

Portanto, o gráfico de f não admite assíntota em $+\infty$.

b) $D_g = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 > 0\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

• Assíntotas verticais

A função é contínua em $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, pelo que somente as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ podem ser assíntotas ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

• Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{-1} = -2$$

Portanto, a reta de equação $y = -2$ é assíntota horizontal ao gráfico de g em $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{1} = 2$$

Portanto, a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de g em $+\infty$.

c) $D_h = \{x \in \mathbb{R}: 2e^{2x} + e^x - 3 > 0\}$

Tem-se:

$$2e^{2x} + e^x - 3 > 0 \stackrel{y=e^x}{\Leftrightarrow} 2y^2 + y - 3 > 0 \Leftrightarrow |2y^2 + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2} \vee y = 1$$

$$\Leftrightarrow y < -\frac{3}{2} \vee y < 1 \stackrel{y=e^x}{\Leftrightarrow} e^x < -\frac{3}{2} \vee e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{cond. imp.}}$

Portanto, $D_h = \mathbb{R}^+$.

A função é contínua em $]0, +\infty[$, pelo que somente a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota ao seu gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(2e^{2x} + e^x - 3) = \ln(0) = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de h .

• Assíntotas não verticais:

Tem-se $h(x) = \ln(2e^{2x} + e^x - 3) = \ln\left[2e^{2x}\left(1 + \frac{1}{2e^x} - \frac{3}{e^{2x}}\right)\right] =$

$$= \ln(2) + \ln(e^{2x}) + \ln\left(1 + \frac{1}{2e^x} - \frac{3}{e^{2x}}\right) = \ln(2) + 2x + \ln\left(1 + \frac{1}{2e^x} - \frac{3}{e^{2x}}\right)$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (2x - \ln(2))] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2e^x} - \frac{3}{e^{2x}}\right) = 0$, pelo que a reta de equação $y = 2x - \ln(2)$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h em $+\infty$.

252. a) A proposição verdadeira é «O gráfico de f pode ter assíntotas verticais».

Basta considerar, por exemplo, a função f definida por $f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

b) A proposição verdadeira é «O gráfico de f pode interseçar a reta de equação $y = 2$ ».

Basta considerar, por exemplo, a função g definida por $g(x) = 2 + \frac{\sin(x)}{x}$.

c) A proposição verdadeira é «O gráfico de f não pode ter uma assíntota oblíqua».

Se, em $+\infty$, o gráfico admite uma assíntota horizontal, então, em $+\infty$, o gráfico não admite qualquer outra assíntota; idem em $-\infty$.

253. Tem-se $f(2) = 3$ e $f'(2) = \frac{3 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$.

a) $(e^{f(x)})' = f'(x)e^{f(x)}$; portanto, o valor pedido é $f'(2)e^{f(2)} = \frac{5}{4}e^3$.

b) $[\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$; portanto, o valor pedido é $\frac{f'(2)}{f(2)} = \frac{\frac{5}{4}}{3} = \frac{5}{12}$.

c) $(2^{f(x)})' = f'(x)2^{f(x)} \ln(2)$

Portanto, o valor pedido é $f'(2)2^{f(2)} \ln(2) = \frac{5}{4} \times 2^3 \times \ln(2) = 10 \ln(2)$.

d) $[\log_3(f(x))]' = \frac{f'(x)}{\ln(3)f(x)}$; portanto, o valor pedido é $\frac{f'(2)}{\ln(3)f(2)} = \frac{5}{12 \ln(3)}$.

Pág. 179

254. a) • Estudo da continuidade

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [2e^x(x+1)] = 2 \times 1 \times 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [2 - x + \ln(1+3x)] = 2 - 0 + \ln(1) = 2$$

$$f(0) = 2$$

Portanto, f é contínua no ponto 0.

• Estudo da derivabilidade

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2e^h(h+1)-2}{h} = 2 \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{he^h+e^h-1}{h} =$$

$$= 2 \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(e^h + \frac{e^h-1}{h} \right) = 2 \times (1+1) = 4$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2-h+\ln(1+3h)-2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{\ln(1+3h)}{h} \right) =$$

$$= \lim_{3h \rightarrow 0^+} \left(-1 + 3 \times \frac{\ln(1+3h)}{3h} \right) = -1 + 3 \times 1 = 2$$

Portanto, como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, f não é derivável em 0.

b) Para $x < 0$:

$$f'(x) = [2e^x(x+1)]' = (2e^x)'(x+1) + 2e^x(x+1)' = 2e^x(x+1) + 2e^x = 2e^x(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Para $x > 0$:

$$f'(x) = [2 - x + \ln(1+3x)]' = -1 + \frac{(1+3x)'}{1+3x} = -1 + \frac{3}{1+3x} = \frac{2-3x}{1+3x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-3x}{1+3x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

	$-\infty$	-2		0		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$2e^x(x+2)$	-	0	+				
$\frac{2-3x}{1+3x}$				+	+	0	-
Sinal e zeros de f'	-	0	+	n.d.	+	0	-
Variação e extremos de f		↘ mín. rel.	↗		↗	máx. rel.	↘

f é decrescente em $]-\infty, -2]$ e em $[\frac{2}{3}, +\infty[$ e é crescente em $[-2, \frac{2}{3}]$.

$f(-2)$ é mínimo relativo e $f(\frac{2}{3})$ é máximo relativo.

255. a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4 - \sqrt{x^2+3}) = 4 - \sqrt{4} = 2$

$$g(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{\ln(x)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Portanto, g não é contínua para $x = 1$.

b) Para $x < 1$:

$$g'(x) = (4 - \sqrt{x^2 + 3})' = -(\sqrt{x^2 + 3})' = -\frac{(x^2 + 3)'}{2\sqrt{x^2 + 3}} = -\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

Para $x > 1$:

$$g'(x) = \left(\frac{2x}{\ln(x)}\right)' = \frac{(2x)' \ln(x) - 2x[\ln(x)]'}{[\ln(x)]^2} = \frac{2\ln(x) - 2x \times \frac{1}{x}}{[\ln(x)]^2} = 2 \times \frac{\ln(x) - 1}{[\ln(x)]^2}$$

Então, tem-se:

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 3}} & \text{se } x < 1 \\ 2 \times \frac{\ln(x) - 1}{[\ln(x)]^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

c) Para $x < 1$:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 3}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Para $x > 1$:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \times \frac{\ln(x) - 1}{[\ln(x)]^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

	$-\infty$	0		1		e	$+\infty$
$\frac{-x}{\sqrt{x^2 + 3}}$	+	0	-				
$2 \times \frac{\ln(x) - 1}{[\ln(x)]^2}$					-	0	+
Sinal e zeros de g'	+	0	-	n.d.	-	0	+
Variação e extremos de f		↗ máx. rel.	↘		↘	mín. rel.	↗

g é crescente em $]-\infty, 0]$ e em $[e, +\infty[$ e é decrescente em $[0, 1]$ e em $]1, e]$.

$g(0)$ é máximo relativo e $g(e)$ é mínimo relativo.

256. a) • Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

• Assíntotas não verticais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3xe^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - 3e^{1-x}) = 2 - 3 \times 0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3xe^{1-x} \stackrel{\infty \times 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3ex}{e^x}\right) = -3e \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right) = -3e \times 0 = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 2x$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3xe^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - 3e^{1-x}) = 2 - 3 \times (+\infty) = -\infty$$

Portanto, o gráfico não tem assíntota em $-\infty$.

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= (2x - 3xe^{1-x})' = (2x)' - (3xe^{1-x})' = 2 - 3(xe^{1-x})' = 2 - 3[x'e^{1-x} + x(e^{1-x})'] = \\ &= 2 - 3[e^{1-x} + x(-e^{1-x})] = 2 - 3[e^{1-x} - xe^{1-x}] = 2 - 3e^{1-x}(1 - x) = 2 + 3e^{1-x}(x - 1) \end{aligned}$$

c) Tem-se $f(1) = 2 - 3e^0 = -1$ e $f'(1) = 2 + 3e^0 \times 0 = 2$, pelo que uma equação da reta é $y - (-1) = 2(x - 1)$; portanto, a equação reduzida é $y = 2x - 3$.

$$\begin{aligned} \text{d) } f''(x) &= (2 + 3e^{1-x}(x - 1))' = 3(e^{1-x}(x - 1))' = 3[(e^{1-x})'(x - 1) + (x - 1)'e^{1-x}] = \\ &= 3[-e^{1-x}(x - 1) + e^{1-x}] = 3e^{1-x}(2 - x) \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3(2 - x)e^{1-x} \Leftrightarrow x = 2$$

	$-\infty$	2	$+\infty$
$2 - x$	+	0	-
$3e^{1-x}$	+	+	+
Sinal e zeros de f''	+	0	-
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		P.I.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 2]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[2, +\infty[$; tem ponto de inflexão em $x = 2$.

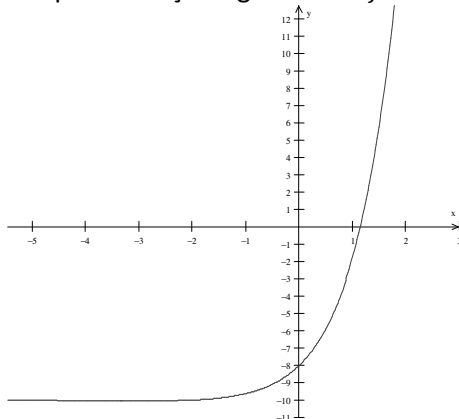
257. a) $f'(x) = (e^x x - 5x^2)' = (e^x x)' - (5x^2)' = (e^x)'x + e^x x' - 10x = e^x x + e^x - 10x = e^x(x + 1) - 10x$

Tem-se $f(0) = e^0 \times 0 = 0$ e $f'(0) = e^0 = 1$; portanto, a equação reduzida é $y = x$.

b) $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+h}(1+h) - e}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(1+h)^2 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+h} + e^{1+h}h - e}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 + 10h + 5h^2 - 5}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+h}h}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+h} - e}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10h + 5h^2}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} e^{1+h} + e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(10 + 5h)}{h} = e + e \times 1 - \lim_{h \rightarrow 0} (10 + 5h) = 2e - 10$

c) $f''(x) = [e^x(x + 1) - 10x]' = [e^x(x + 1)]' - 10 = (e^x)'(x + 1) + e^x(x + 1)' - 10 = e^x(x + 1) + e^x - 10 = e^x(x + 2) - 10$

Vamos recorrer à calculadora gráfica para esboçar o gráfico de f'' e resolver a equação $f''(x) = 0$.



A abscissa do ponto A é aproximadamente igual a 1,154.

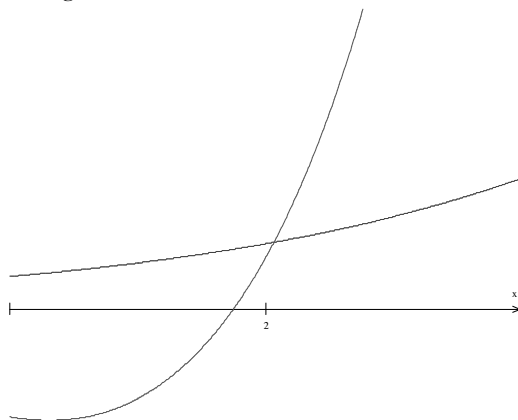
Tem-se $f(1,154) = e^{1,15} \times 1,15 - 5 \times 1,15^2 \approx -2,999$.

Portanto, $A(1,15; -3,00)$.

d) O valor pedido é a solução da equação $f'(x) = g'(x)$ que pertence ao intervalo $]1,3[$.

Tem-se $f'(x) = e^x + e^x x - 10x$ e $g'(x) = 2^x \ln(2)$.

Vamos recorrer à calculadora gráfica para esboçar, sobrepostos, os gráficos de f' e g' no intervalo $]1,3[$ e resolver a equação $f'(x) = g'(x)$.



O valor de a é aproximadamente igual a 2,033.

Pág. 180

258. Tem-se $N(t) = 25 \times e^{1,386t}$.

a₁) $N(0,5) = 25 \times e^{1,386 \times 0,5} = 25 \times e^{0,693} \approx 49,9926$; portanto, ao fim de meia hora, serão 50 bactérias.

a₂) $N(3,5) = 25 \times e^{1,386 \times 3,5} = 25 \times e^{4,851} \approx 3196,7048$; portanto, ao fim de três horas e meia, serão 3197 bactérias.

b) $N(t) = 3200 \Leftrightarrow 25 \times e^{1,386t} = 3200 \Leftrightarrow e^{1,386t} = 128 \Leftrightarrow t = \frac{\ln(128)}{1,386}$; portanto, é ao fim de aproximadamente 3 horas e 30 minutos.

c) $\frac{N(t+0,5)}{N(t)} = \frac{25 \times e^{1,386(t+0,5)}}{25 \times e^{1,386t}} = e^{1,386t+0,693-1,386t} = e^{0,693} \approx 1,999$; portanto, $k \approx 2$.

Isto significa que o número de bactérias duplica a cada meia hora.

d) $N'(t) = (25 \times e^{1,386t})' = 25 \times (e^{1,386t})' = 25 \times 1,386 e^{1,386t} = 1,386 N(t)$

Portanto, N' é diretamente proporcional a N .

259. • Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pelo que somente a reta de equação $x = 0$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(e^{-x} - 1) = \ln(0) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico.

• Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^{-x}-1)}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{e^x}-1\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(\frac{1-e^x}{e^x}\right)}{x} = \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-e^x)-\ln(e^x)}{x} = \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\ln(1-e^x)}{x} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-e^x)}{x} - 1 = \frac{\ln(1)}{-\infty} - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(e^{-x}-1) + \ln(e^x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln[(e^{-x}-1) \times e^x] = \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-e^x) = \ln(1) = 0\end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = -x$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

O gráfico não tem assíntota em $+\infty$ porque, para $x > 0$, a função é definida por $f(x) = \ln(x)$.

260. Tem-se:

- $f'(x) = (e^{kx})' = ke^{kx}$
- $f''(x) = (ke^{kx})' = k(e^{kx})' = k^2e^{kx}$
- $f'''(x) - 6f''(x) + 9f'(x) = k^2e^{kx} - 6ke^{kx} + 9e^{kx} = e^{kx}(k^2 - 6k + 9) = e^{kx}(k-3)^2$

Portanto, $\forall x \in \mathbb{R}, f'''(x) - 6f''(x) + 9f'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{kx}(k-3)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

261. $g'(x) = [x^2f(x)]' = (x^2)'f(x) + x^2f'(x) = 2xf(x) + x^2f'(x)$
 $g''(x) = [2xf(x) + x^2f'(x)]' = (2xf(x) + x^2f'(x))' = [2xf(x)]' + [x^2f'(x)]' =$
 $= (2x)'f(x) + 2x f'(x) + (x^2)'f'(x) + x^2 f''(x) =$
 $= 2f(x) + 2xf'(x) + 2xf'(x) + x^2 f''(x) = 2f(x) + 4xf'(x) + x^2 f''(x)$

262. $g''(x) = [(ax+b)e^x]' = (ax+b)'e^x + (ax+b)(e^x)' = ae^x + (ax+b)e^x =$
 $= (ax+a+b)e^x$
 $\begin{cases} g'(0) = 3 \\ g''(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} be^0 = 3 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a+3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -3 \end{cases}$

263. $f'(x) = [xe^{ax}]' = x'e^{ax} + x(e^{ax})' = e^{ax} + axe^{ax} = (1+ax)e^{ax}$
 $f''(x) = [(1+ax)e^{ax}]' = (1+ax)'e^{ax} + (1+ax)(e^{ax})' = ae^{ax} + a(1+ax)e^{ax} =$
 $= (a+a+a^2x)e^{ax} = (2a+a^2x)e^{ax}$
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (2a+a^2x)e^{ax} = 0 \Leftrightarrow 2a+a^2x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{a}, a \neq 0$

Portanto, todos os gráficos têm um ponto de inflexão com abcissa $-\frac{2}{a}$.

Tem-se $-\frac{2}{a} = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$.

Pág. 181

264. a) $D_t =]0, 3[$

$$\text{Área} = \frac{\overline{CP} \times \overline{AC}}{2} = \frac{x \times (\overline{OA} - \overline{OC})}{2} = \frac{x[f(3) - f(x)]}{2} = \frac{x[7 - (2^x - 1)]}{2} = \frac{x[8 - 2^x]}{2} = \frac{8x - x \times 2^x}{2} = 4x - x \times 2^{x-1}$$

b) $t'(x) = (4x - x \times 2^{x-1})' = (4x)' - (x \times 2^{x-1})' = 4 - [x' \times (2^{x-1}) + x(2^{x-1})'] =$
 $= 4 - 2^{x-1} - x \ln(2) 2^{x-1} = 4 - 2^{x-1}[1 + x \ln(2)]$

Basta encontrar um intervalo de amplitude 0,2 para o qual a imagem do mínimo, por meio de t' , seja positiva e a do máximo seja negativa.

Tem-se:

$$t'(1) = 4 - [1 + \ln(2)] \approx 2,31 > 0$$

$$t'(2) = 4 - 2[1 + 2 \ln(2)] \approx -0,77 < 0$$

$$t'(1,8) = 4 - 2^{0,8}[1 + 1,8 \ln(2)] \approx 0,09 > 0$$

Portanto, a abscissa referida pertence, por exemplo, ao intervalo $]1,8; 2[$.

Dado que $t'(1,7) \approx 0,46 > 0$ e $t'(1,9) \approx -0,32 < 0$, um outro intervalo a indicar como resposta poderia ser $]1,7; 1,9[$.

$$c_1) g(2) = 2^2 - 1 = 3 \text{ e } g(4) = 2^4 - 1 = 15; \text{ portanto, o declive da reta é igual a } \frac{15-3}{4-2} = 6.$$

$$g'(x) = 6 \Leftrightarrow \ln(2) 2^x = 6 \Leftrightarrow 2^x = \frac{6}{\ln(2)} \Leftrightarrow x = \log_2 \left(\frac{6}{\ln(2)} \right)$$

$$c_2) g(x) = h(x) \Leftrightarrow 2^x - 1 = 3 \times 2^{-x+1} + 4 \Leftrightarrow 2^x - 5 - 6 \times 2^{-x} = 0 \stackrel{y=2^x}{\Leftrightarrow} y - 5 - \frac{6}{y} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 5y - 6 = 0 \wedge y \neq 0 \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 6 \Leftrightarrow 2^x = -1 \vee 2^x = 6 \Leftrightarrow 2^x = 6 \Leftrightarrow x = \log_2(6)$$

$$g(\log_2(6)) = 2^{\log_2(6)} - 1 = 6 - 1 = 5$$

Então, o perímetro do retângulo é igual a $2 \log_2(6) + 10$.

$$c_3) h'(x) = (3 \times 2^{-x+1} + 4)' = 3(2^{-x+1})' = -3 \ln(2) 2^{-x+1}$$

$$h'(\log_2(6)) = -3 \ln(2) 2^{-\log_2(6)+1} = -3 \ln(2) \times \frac{2}{2^{\log_2(6)}} = -\frac{6 \ln(2)}{6} = -\ln(2)$$

$$g'(\log_2(6)) = \ln(2) 2^{\log_2(6)} = 6 \ln(2)$$

Dado que $h'(\log_2(6)) \neq -\frac{1}{g'(\log_2(6))}$, as retas não são perpendiculares.

d) (C)

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 \times 2^{-x+1} + 4) = 3 \times 0 + 4 = 4$, pelo que a afirmação da opção (A) é verdadeira.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \times 2^{-x+1} + 4}{2^x - 1} = \frac{4}{+\infty} = 0$, pelo que a afirmação da opção (B) é verdadeira.

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 \times 2^{-x+1} + 4}{x} = \frac{10}{0^-} = -\infty$, pelo que a afirmação da opção (B) é verdadeira.

Pág. 182

$$265. a) f'(x) = \left(2 - e^{\frac{1}{x}}\right)' = -\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = -\left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

f' é positiva em todo o domínio, pelo que f é crescente em $] -\infty, 0[$ e em $] 0, +\infty[$ e não tem extremos.

b) • Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pelo que somente a reta de equação $x = 0$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2 - e^{\frac{1}{x}}\right) = 2 - e^{-\infty} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 - e^{\frac{1}{x}}\right) = 2 - e^{+\infty} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico.

• Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - e^{\frac{1}{x}}\right) = 2 - e^{0^-} = 2 - 1^- = 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - e^{\frac{1}{x}}\right) = 2 - e^{0^+} = 2 - 1^+ = 1^-$$

Portanto, a reta de equação $y = 1$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$ e em $+\infty$.

c) Dos resultados anteriores, pode concluir-se que $D'_f =]-\infty, 2] \setminus \{1\}$

d₁) $D_g = D'_f =]-\infty, 2] \setminus \{1\}$, $D'_g = D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e as retas de equações $x = 1$ e $y = 0$ são assíntotas do gráfico de g .

d₂) $2 - e^{\frac{1}{x}} = y \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} = 2 - y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \ln(2 - y) \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln(2-y)}$

Portanto, g é a função tal que $D_g =]-\infty, 2] \setminus \{1\}$ e $g(x) = \frac{1}{\ln(2-x)}$.

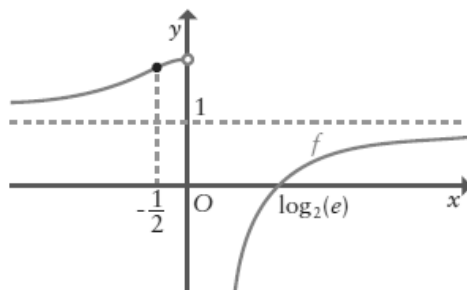
e) $f''(x) = \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\right)' = \frac{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' x^2 - (x^2)' e^{\frac{1}{x}}}{x^4} = \frac{e^{\frac{1}{x}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) x^2 - 2x e^{\frac{1}{x}}}{x^4} = \frac{-e^{\frac{1}{x}} - 2x e^{\frac{1}{x}}}{x^4} = \frac{-e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^4}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^4} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
$-e^{\frac{1}{x}}$	-	-	-	n.d.	-
$1 + 2x$	-	0	+	+	+
x^4	+	+	+	0	+
Sinal e zeros de f''	+	0	-	n.d.	-
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		P.I.			

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -\frac{1}{2}[$, tem a concavidade voltada para baixo em $]-\frac{1}{2}, 0[$ e em $]0, +\infty[$ e tem um ponto de inflexão de abcissa igual a $-\frac{1}{2}$

f) Dos resultados anteriores, pode concluir-se que um esboço do gráfico de f é:



g) (A)

O gráfico de h é o transformado do gráfico de f por meio da translação associada ao vetor de coordenadas $(-1, 2)$.

h)

Por exemplo, qualquer sucessão convergente para a , com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ou uma sucessão que tenda para 0 por valores negativos.

i)

Por exemplo, qualquer sucessão que tenda para 0 por valores positivos ou com uma infinidade de termos quer positivos, quer negativos.

j)

Por exemplo, qualquer sucessão que tenda para $-\infty$ ou para $+\infty$.

k) Dado que f' é uma função contínua em $[1,2]$, que $f'(1) = \frac{e^1}{1^2} = e > 1$ e que

$f'(2) = \frac{e^2}{2^2} = \frac{\sqrt{e}}{4} < 1$, pode concluir-se, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, que $\exists c \in]1,2[: f'(c) = 1$, o que é equivalente a provar o pretendido.

$$\begin{aligned} \text{l) } f(x) \geq f(1) &\Leftrightarrow 2 - e^{\frac{1}{x}} \geq 2 - e \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \leq e \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[\end{aligned}$$

m) (C)

Tem que ser $j(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} j(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$.

n) (D)

$$D_{\frac{1}{f}} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \neq 0\} =$$

| Cálculo aux:

$$| f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - e^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln(2)} \Leftrightarrow x = \log_2(e)$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x \neq \log_2(e)\} = \mathbb{R} \setminus \{0, \log_2(e)\}$$

Pág. 183

$$\begin{aligned} \text{266. a) } g'(t) &= (e^{0,4t-0,01t^2})' = (0,4t - 0,01t^2)' e^{0,4t-0,01t^2} = (0,4 - 0,02t)e^{0,4t-0,01t^2} \\ g'(t) = 0 &\Leftrightarrow (0,4 - 0,02t)e^{0,4t-0,01t^2} = 0 \Leftrightarrow 0,4 - 0,02t = 0 \Leftrightarrow t = 20 \end{aligned}$$

	0	20	$+\infty$
$0,4 - 0,02t$	+	0	-
$e^{0,4t-0,01t^2}$	+	+	+
Sinal e zeros de g'	+	0	-
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g	$\nearrow$	máx. abs.	$\searrow$

Tem-se $g(20) = e^{0,4 \times 20 - 0,01 \times 20^2} = e^4 \approx 54,598$; portanto, a percentagem era de, aproximadamente, 55%.

b) $g(22) = e^{0,4 \times 22 - 0,01 \times 22^2} = e^{3,96} \approx 52,457$; portanto, a percentagem neste dia era de, aproximadamente, 52%.

Então tem-se:

- No 20º dia havia 54,598% de pessoas doentes, ou seja, 5460 pessoas.
- No 22º dia havia 52,457% de pessoas doentes, ou seja, 5246 pessoas.

Por isso, como ainda adoeceram 20 pessoas, deixaram de estar doentes $(5460 + 20) - 5246$ pessoas, ou seja, 234.

c) $g(2) = e^{0,4 \times 2 - 0,01 \times 2^2} = e^{0,76} \approx 2,138$; portanto, no segundo dia havia 214 pessoas doentes.

$g(3) = e^{0,4 \times 3 - 0,01 \times 3^2} = e^{1,11} \approx 3,034$; portanto, no terceiro dia havia 303 pessoas doentes.

Então, no terceiro dia adoeceram 89 pessoas.

Então, a probabilidade de que uma pessoa doente no terceiro dia tenha adoecido nesse dia é igual a

$$\frac{89}{303} \approx 0,3.$$

d) $d(t) = 10\,000 \times \frac{e^{0,4t - 0,01t^2}}{100} = 100 e^{0,4t - 0,01t^2}$

$$d'(t) = (100 e^{0,4t - 0,01t^2})' = 100(e^{0,4t - 0,01t^2})' = 100(0,4t - 0,01t^2)' e^{0,4t - 0,01t^2} =$$

$$= 100(0,4 - 0,02t) e^{0,4t - 0,01t^2}$$

Então, como $d'(5) = 100(0,4 - 0,02 \times 5) e^{0,4 \times 5 - 0,01 \times 25} = 100 \times 0,3 \times e^{1,75} \approx 172,638$, no quinto dia, o número de doentes estava a aumentar à taxa de cerca de 173 doentes por dia.

267. a) Tem-se $I(t) = \frac{3e^{0,5t}}{1+0,2e^{0,5t}}$.

$$a_1) I'(t) = \left(\frac{3e^{0,5t}}{1+0,2e^{0,5t}} \right)' = \frac{(3e^{0,5t})'(1+0,2e^{0,5t}) - 3e^{0,5t}(1+0,2e^{0,5t})'}{(1+0,2e^{0,5t})^2} =$$

$$= \frac{3 \times 0,5 \times e^{0,5t}(1+0,2e^{0,5t}) - 3e^{0,5t}(0,2 \times 0,5 \times e^{0,5t})}{(1+0,2e^{0,5t})^2} = \frac{1,5e^{0,5t} + 0,3e^t - 0,3e^t}{(1+0,2e^{0,5t})^2} = \frac{1,5e^{0,5t}}{(1+0,2e^{0,5t})^2}$$

Portanto, I' é sempre positiva, pelo que I é crescente.

a₂) $\frac{3e^{0,5t}}{1+0,2e^{0,5t}} = 5 \Leftrightarrow 3e^{0,5t} = 5 + e^{0,5t} \Leftrightarrow 2e^{0,5t} = 5 \Leftrightarrow e^{0,5t} = 2,5 \Leftrightarrow t = 2 \ln(2,5)$

Portanto, $t \approx 1,83258$, pelo que tal ocorreu ao fim de cerca de 1 ano e 10 meses, ou seja, no início de novembro de 1961.

a₃) A epidemia começa a ser controlado no momento em que a taxa de variação do número de doentes começa a diminuir.

$$I''(t) = \left(\frac{1,5e^{0,5t}}{(1+0,2e^{0,5t})^2} \right)' = \frac{(1,5e^{0,5t})'(1+0,2e^{0,5t})^2 - 1,5e^{0,5t} [(1+0,2e^{0,5t})^2]'}{(1+0,2e^{0,5t})^4} =$$

$$= \frac{0,75e^{0,5t}(1+0,2e^{0,5t})^2 - 1,5e^{0,5t} \times 2(1+0,2e^{0,5t}) \times (0,1e^{0,5t})}{(1+0,2e^{0,5t})^4} = \frac{0,75e^{0,5t}(1+0,2e^{0,5t}) - 0,3e^t}{(1+0,2e^{0,5t})^3} =$$

$$= \frac{0,75e^{0,5t} + 0,15e^t - 0,3e^t}{(1+0,2e^{0,5t})^3} = \frac{0,75e^{0,5t} - 0,15e^t}{(1+0,2e^{0,5t})^3} = \frac{0,15e^{0,5t}(5 - e^{0,5t})}{(1+0,2e^{0,5t})^3}$$

$$I''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{0,15e^{0,5t}(5 - e^{0,5t})}{(1+0,2e^{0,5t})^3} = 0 \Leftrightarrow 0,15e^{0,5t}(5 - e^{0,5t}) = 0 \Leftrightarrow 5 - e^{0,5t} = 0 \Leftrightarrow t = 2 \ln(5)$$

	0		$2 \ln(5)$	$+\infty$
$0,15e^{0,5t}$		—	—	—
$5 - e^{0,5t}$		—	0	+
$(1 + 0,2e^{0,5t})^3$		+	+	+
Sinal e zeros de I''		+	0	—
Variação e extremos de I'		↗	máx. abs.	↘

Portanto, como $t \approx 3,2189$, tal ocorreu ao fim de cerca de 3 anos e 2,6 meses, ou seja, ao longo do terceiro mês do terceiro ano, o que quer dizer, ao longo do mês de março de 1963.

b) $I(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{3e^k}{1+pe^k} = 1 \Leftrightarrow 3e^k = 1 + pe^k \Leftrightarrow 3e^k - pe^k = 1 \Leftrightarrow e^k = \frac{1}{3-p} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{1}{3-p}\right) \Leftrightarrow k = -\ln(3-p)$$

268. a) $x^2 - x + 1$ não tem raízes, portanto, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$.

b) Tem-se $a = f'(1)$, portanto, $b = -\frac{1}{e^{-1}} = -e$; $-e$ é o declive de qualquer reta perpendicular à reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa 1.

c) O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 1]$ e em $[2, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $[1, 2]$; existem dois pontos de inflexão, um com abscissa 1 e um com abscissa 2.

269. a) $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1+x}{1-x} > 0 \right\} =]-1, 1[$

$$f'(x) = \left[2 + \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right]' = \frac{\left(\frac{1+x}{1-x} \right)'}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\frac{1-x-(-1)(1+x)}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

Como, para $x \in]-1, 1[$, f' é sempre positiva, f é crescente.

$$\text{b) } f(1-m) = 2 \Leftrightarrow 2 + \ln \left(\frac{1+1-m}{1-(1-m)} \right) = 2 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{2-m}{m} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-m}{m} = 1 \Leftrightarrow 2-m = m \Leftrightarrow m = 1$$

$$\text{c) } \bullet f''(x) = \left(\frac{2}{1-x^2} \right)' = \frac{-2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

	-1		0		1
$4x$		-	0	+	
$(1-x^2)^2$		+	+	+	
Sinal e zeros de f''		-	0	+	
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	n.d.		P.I.		n.d.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-1, 0]$, tem a concavidade voltada para cima em $[0, 1[$ e tem um ponto de inflexão com abscissa igual a 0

• O gráfico de f não tem assíntotas não verticais porque o domínio da função é majorado e minorado. A função é contínua em $]-1, 1[$, pelo que somente as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[2 + \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right] = 2 + \ln \left(\frac{0^+}{2} \right) = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[2 + \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right] = 2 + \ln \left(\frac{2}{0^+} \right) = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical.

$$\begin{aligned}
 \text{270. a) } \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{-x}}{2} + \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x}}{2} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}}_{\frac{0}{0}} \\
 &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)} = \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)} = \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0
 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{1+e^{+\infty}} = 0$$

$$\bullet f(0) = 0$$

Portanto, f é contínua em 0.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{x}} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2} \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \frac{x}{2} \right) \stackrel{\substack{\infty-\infty \\ y=\frac{1}{x}}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{1}{y(1+e^y)} - \frac{1}{2y} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{2-1-e^y}{2y(1+e^y)} \right] = \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{1-e^y}{2y(1+e^y)} \right] = -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{e^y-1}{y} \times \frac{1}{1+e^y} \right] = -\frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1+e^y} = \\
 &= -\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ é assíntota ao gráfico da restrição de f a $\mathbb{R}^+$.

$$\text{271. a) } f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$$

$$f(x) = 4 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} = 4 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} = 4 \Leftrightarrow |e^{\frac{x}{2}} = y$$

$$\Leftrightarrow y + \frac{1}{y} = 4 \Leftrightarrow \underbrace{y^2 - 4y + 1 = 0}_{y \neq 0} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \Leftrightarrow y = 2 - \sqrt{3} \vee y = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} = 2 - \sqrt{3} \vee e^{\frac{x}{2}} = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2 \ln(2 - \sqrt{3}) \vee x = 2 \ln(2 + \sqrt{3})$$

Portanto, a distância, em metros, entre os pontos é igual a $2 \ln(2 + \sqrt{3}) - 2 \ln(2 - \sqrt{3})$

Tem-se:

$$2 \ln(2 + \sqrt{3}) - 2 \ln(2 - \sqrt{3}) = 2 [\ln(2 + \sqrt{3}) - \ln(2 - \sqrt{3})] =$$

$$= 2 \ln \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right) =$$

$$| \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})^2$$

$$= 2 \ln(2 + \sqrt{3})^2 = 4 \ln(2 + \sqrt{3})$$

Pág. 185

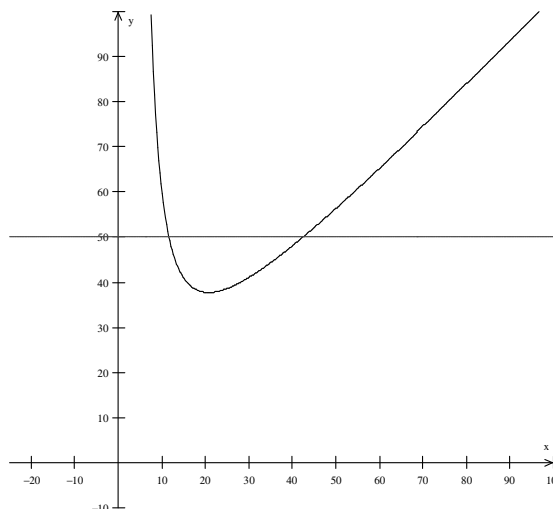
$$\text{b) } f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right)' = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 0$$

	$-k$		0		k
Sinal e zeros de f'		-	0	+	
Variação e extremos de f		$\searrow$	mín. abs.	$\nearrow$	

c) $f(25) = 50 \Leftrightarrow \frac{a}{2} \left(e^{\frac{25}{a}} + e^{-\frac{25}{a}} \right) = 50$

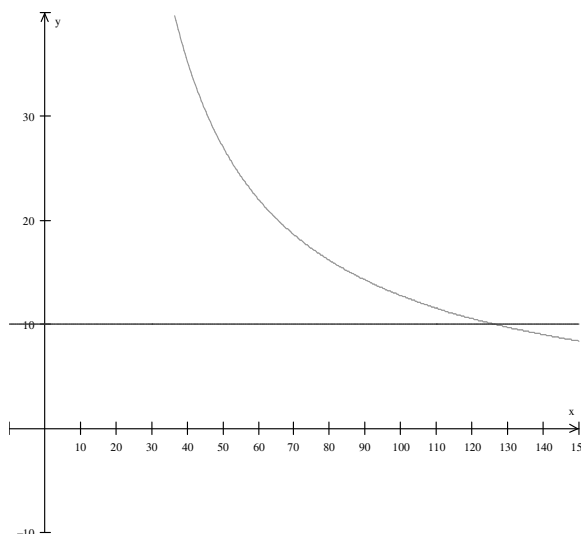
Esboçando, sobrepostos, os gráficos das funções definidas por $y = \frac{x}{2} \left(e^{\frac{25}{x}} + e^{-\frac{25}{x}} \right)$ e $y = 50$, obtém-se:



Os pontos de interseção têm abscissas (os valores de a procurados) aproximadamente iguais a 11,75 e 42,42.

d) $f(50) - f(0) = 10 \Leftrightarrow \frac{a}{2} \left(e^{\frac{50}{a}} + e^{-\frac{50}{a}} \right) - a = 10$

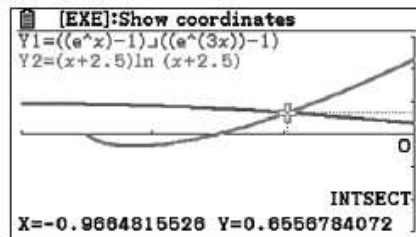
Esboçando, sobrepostos, os gráficos das funções definidas por $y = \frac{x}{2} \left(e^{\frac{50}{x}} + e^{-\frac{50}{x}} \right) - x$ e $y = 10$, obtém-se:



O ponto de interseção tem abscissa (o valor de a procurado) aproximadamente igual a 126,63.

272. O problema pode ser traduzido pela condição $\frac{e^x - 1}{e^{3x} - 1} = (x + 2,5)\ln(x + 2,5) \wedge x < 0$ e $b = f(x)$.

Esboçando, sobrepostos, os gráficos das funções definidas por $y = \frac{e^x - 1}{e^{3x} - 1}$ e $y = (x + 2,5)\ln(x + 2,5)$, obtém-se:



O ponto de interseção, a abcissa do ponto B , arredondada às centésimas, é $-0,97$ e a abcissa do ponto A , arredondada às centésimas, é, portanto, igual a $-0,97 + 2,5$, ou seja, $1,53$.

O valor de b , arredondado às décimas é igual a $f(-0,97) = f(1,53) \approx 0,7$.

O problema poderia igualmente ter sido traduzido pela condição $\frac{e^{x-2,5} - 1}{e^{3(x-2,5)} - 1} = x\ln(x) \wedge x > 0$ e $b = f(x)$.

273. Seja $x > 0$ a abcissa do ponto A . A área, S , do retângulo é dada por $S(x) = 2xe^{-x^2}$.

• Determinemos o valor de x que corresponde ao retângulo de área máxima:

$$S'(x) = (2xe^{-x^2})' = (2x)'e^{-x^2} + 2x(e^{-x^2})' = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} = (2 - 4x^2)e^{-x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow (2 - 4x^2)e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x > 0$$

	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
Sinal e zeros de S'		+	0	-
Variação e extremos de S		$\nearrow$	máx. abs.	$\searrow$

Portanto, a abcissa do ponto A é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como f é uma função par, $\overline{OB} = \overline{OC}$, pelo que a abcissa do ponto C é igual a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

• Determinemos as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de f :

$$f'(x) = (e^{-x^2})' = (-x^2)'e^{-x^2} = -2xe^{-x^2} = -S(x)$$

Portanto, $f''(x) = -S'(x)$, pelo que se tem, para $x > 0$, o seguinte quadro de sinais de $f''(x)$:

	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
Sinal e zeros de f''		-	0	+
Variação e extremos de f			P.I.	

Como f é uma função par, pode concluir-se que os pontos do gráfico cujas abcissas são $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$ são pontos de inflexão.

Portanto, os pontos de inflexão do gráfico são os pontos de abcissas $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$, que são também os vértices do retângulo que tem área máxima.

$$\begin{aligned} \mathbf{274. a)} \bullet f'(x) &= (xe^{kx})' = x'(e^{kx}) + x(e^{kx})' = e^{kx} + kxe^{kx} = (1+kx)e^{kx} \\ \bullet f''(x) &= [(1+kx)e^{kx}]' = (1+kx)'(e^{kx}) + (1+kx)(e^{kx})' = ke^{kx} + (1+kx)ke^{kx} = \\ &= (2k+k^2x)e^{kx} = k(2+kx)e^{kx} \\ \bullet f'''(x) &= [k(2+kx)e^{kx}]' = [(2k+k^2x)e^{kx}]' = (2k+k^2x)'(e^{kx}) + (2k+k^2x)(e^{kx})' = \\ &= k^2e^{kx} + (2k+k^2x)ke^{kx} = (3k+k^2x)ke^{kx} = k^2(3+kx)e^{kx} \end{aligned}$$

b) Conjetura: $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = k^{n-1}(n+kx)e^{kx}$

Verificação da validade da conjectura.

Seja $P(n)$ a condição $f^{(n)}(x) = k^{n-1}(n+kx)e^{kx}$.

• $P(1) \Leftrightarrow f'(x) = k^0(1+kx)e^{kx} \Leftrightarrow f'(x) = (1+kx)e^{kx}$, que é uma proposição verdadeira.

• Seja n um qualquer número natural.

Hipótese de indução: $f^{(n)}(x) = k^{n-1}(n+kx)e^{kx}$

Tese de indução: $f^{(n+1)}(x) = k^n(n+1+kx)e^{kx}$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= [f^{(n)}(x)]' = [k^{n-1}(n+kx)e^{kx}]' = k^{n-1}[(n+kx)e^{kx}]' = \\ &= k^{n-1} \times [ke^{kx} + ke^{kx}(n+kx)] = k^{n-1} \times ke^{kx} [1 + n + kx] = k^n e^{kx} (n+1+kx) \end{aligned}$$

A condição é válida para $n=1$ e é hereditária, logo, é uma condição universal.

Pág. 185

«Os seis mais»

275.

$$\begin{aligned} a^{\ln(b)} &= b^{\ln(a)} \Leftrightarrow \log_a(a^{\ln(b)}) = \log_a(b^{\ln(a)}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(b) = \ln(a) \times \log_a(b) \Leftrightarrow \frac{\ln(b)}{\ln(a)} = \log_a(b) \end{aligned}$$

Esta última afirmação corresponde à aplicação da fórmula de mudança de base para passar da base a para a base e e é, portanto, verdadeira.

276. Tem-se $g'(x) = -\frac{1}{x^2(x+1)}$; portanto, $\forall x \in \mathbb{R}^+, g'(x) < 0$, de onde se conclui que a função g

é decrescente. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, pode-se concluir que $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) > 0$, ou seja,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{x} > \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

277. a) • $f'(x) = [\ln(x)]' = \frac{1}{x}$
 • $f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1 \times x'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$
 • $f'''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{-1 \times (x^2)'}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$
 • $f^{(4)}(x) = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = \frac{-2 \times (x^3)'}{x^6} = -\frac{6x^2}{x^6} = -\frac{6}{x^4}$

b) Conjetura: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

Ter-se-á, de acordo com esta conjetura, $f^{(5)}(x) = (-1)^4 \frac{4!}{x^5} = \frac{24}{x^5}$.

Ora, $f^{(5)}(x) = \left(f^{(4)}(x)\right)' = \left(-\frac{6}{x^4}\right)' = -\frac{-6 \times 4x^3}{x^8} = \frac{24}{x^5}$.

c) Seja $P(n)$ a condição $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$.

• $P(1) \Leftrightarrow f'(x) = (-1)^0 \frac{0!}{x^1} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$, que é uma proposição verdadeira.

• Seja n um qualquer número natural.

Hipótese de indução: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

Tese de indução: $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left[f^{(n)}(x) \right]' = \left[(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \right]' = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{1}{x^n} \right)' = \\ &= (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{-1 \times n x^{n-1}}{x^{2n}} = (-1)^{n-1} \times (-1)(n-1) \times n \frac{x^{n-1}}{x^{2n}} = \\ &= (-1)^n \times n \times \frac{1}{x^{2n-n+1}} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

A condição é válida para $n = 1$ e é hereditária, logo, é uma condição universal.

278. a) $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\frac{1}{x} \times \ln(x)} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$

b₁) $f'(x) = \left(e^{\frac{\ln(x)}{x}}\right)' = \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' e^{\frac{\ln(x)}{x}} = \frac{[\ln(x)]' \times x - \ln(x) \times x'}{x^2} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} e^{\frac{\ln(x)}{x}} =$
 $= \frac{1 - \ln(x)}{x^2} x^{\frac{1}{x}} = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} [1 - \ln(x)]$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} [1 - \ln(x)] = 0 \Leftrightarrow \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} = 0 \vee 1 - \ln(x) = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

	0		e	$+\infty$
$\frac{1}{x^x}$		+	+	+
$\frac{1}{x^2}$		+	0	—
$1 - \ln(x)$		+	0	—
Sinal e zeros de f'		+	0	—
Variação e extremos de f		$\nearrow$	máx. abs.	$\searrow$

A função f é crescente em $]0, e]$ e é decrescente em $[e, +\infty[$.

b₂) • Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\mathbb{R}^+$, pelo que somente a reta de equação $x = 0$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^{\frac{-\infty}{0}} = e^{-\infty} = 0$$

Portanto, gráfico não tem assíntotas verticais.

• Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}} = e^0 = 1$$

Portanto, a reta de equação $y = 1$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

279. Seja a a abscissa do ponto P .

• Equação da reta AB

Tem-se:

$$P(a, \ln(10 - a))$$

$$f'(x) = [\ln(10 - x)]' = -\frac{1}{10 - x}, \text{ pelo que } f'(a) = -\frac{1}{10 - a} = \frac{1}{a - 10}.$$

Portanto, a reta AB é definida pela condição $y - \ln(10 - a) = \frac{1}{a - 10}(x - a)$, pelo que a equação

$$\text{reduzida da reta tangente é } y = \frac{1}{a - 10}x + \ln(10 - a) + \frac{a}{10 - a}.$$

• $\overline{OA}$

$$0 = \frac{1}{a - 10}x + \ln(10 - a) + \frac{a}{10 - a} \Leftrightarrow \frac{1}{a - 10}x = -\ln(10 - a) - \frac{a}{10 - a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -(a - 10)\ln(10 - a) - \frac{a(a - 10)}{10 - a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (10 - a)\ln(10 - a) + a \Leftrightarrow x = a - (a - 10)\ln(10 - a)$$

Portanto, $\overline{OA} = a - (a - 10)\ln(10 - a)$.

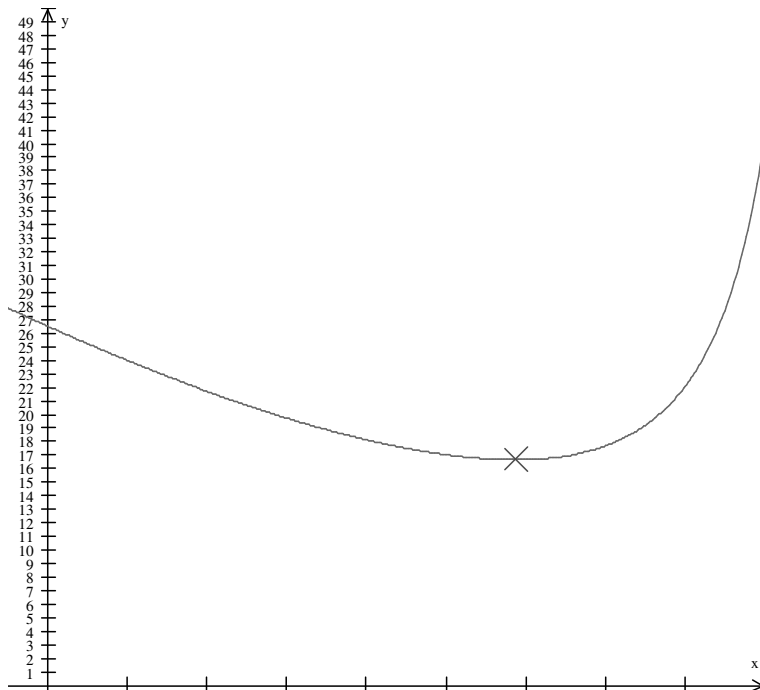
• $\overline{OB}$

$$y = \frac{1}{a - 10} \times 0 + \ln(10 - a) + \frac{a}{10 - a} = \ln(10 - a) + \frac{a}{10 - a}$$

• Área do triângulo

$$\text{Uma expressão da área do triângulo é, portanto, } \frac{\left(\ln(10 - a) + \frac{a}{10 - a}\right)[a - \ln(10 - a)(a - 10)]}{2}.$$

Esboçando o gráfico da função definida, em $[0, 9]$, por $y = \frac{[\ln(10-a) + \frac{a}{10-a}][a - (a-10)\ln(10-a)]}{2}$, obtém-se:



O ponto em que a função atinge o mínimo tem abscissa aproximadamente igual a 5,87.

Pág. 187

280. a) Seja c a abscissa do ponto P .

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto P é $y = ke^c x + (1 - ck)e^c$.

Esta reta interseca o eixo das abscissas no ponto de abscissa $\frac{ck - 1}{k}$.

Atendendo a que o ponto V está sempre à direita de T , quer k seja positivo, quer k seja negativo, tem-se:

$\overline{TV} = c - \frac{ck - 1}{k} = \frac{1}{k}$, de onde se conclui que a distância entre os pontos V e T é constante.

b) Seja $g(x) = e^{kx}$, $k \neq 0$ e seja c a abscissa do ponto P .

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto P é $y = ke^{kc} x + (1 - ck)e^{kc}$.

Esta reta interseca o eixo das abscissas no ponto de abscissa $\frac{ck - 1}{k}$.

Tem-se, portanto:

$$\overline{TV} = \left| c - \frac{ck - 1}{k} \right| = \left| \frac{1}{k} \right|, \text{ ou seja, } a = \left| \frac{1}{k} \right|.$$

Então, $a = 2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \vee k = -\frac{1}{2}$.

Tema 5 | Trigonometria e Funções Trigonométricas

1. Fórmulas trigonométricas

Pág. 6

Será que...? $\cos(\alpha - \beta)$

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Não, tal como decorre dos resultados anteriores em que se verificou que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \neq \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

1. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

Pág. 7

2. a)

$$\sin(x - y) = \sin[x + (-y)] =$$

$$= \sin x \cos(-y) + \sin(-y) \cos x =$$

$$= \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

b)

$$\cos(2x) = \cos(x + x) =$$

$$= \cos x \cos x - \sin x \sin x =$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

3. a) $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{16} + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \cos \beta = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$; portanto, $\cos \beta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Então, tem-se $\sin(2\beta) = 2 \sin \beta \cos \beta = 2 \times \frac{1}{4} \times \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{8}$

e $\cos(2\beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \frac{15}{16} - \frac{1}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \begin{cases} \cos(2\alpha) = \frac{1}{4} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \\ \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = -\frac{1}{4} \\ \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = -\frac{1}{4} \\ \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 \alpha = \frac{3}{4} \\ \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{8}} \\ \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \end{cases} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Portanto, $\sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{8}}$.

$$4. \text{ Tem-se } \frac{7\pi}{12} = 7 \times \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{4} - \frac{7\pi}{6}.$$

$$\begin{aligned} \text{Portanto, } \sin \frac{7\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Pág. 8

5. a)

Como $\cos x = \frac{\overline{BS}}{4}$, vem $\overline{BS} = 4 \cos x$,

pelo que $\overline{DC} = 3 + 4 \cos x$.

Como $\sin x = \frac{\overline{CS}}{4}$, vem $\overline{CS} = 4 \sin x$.

$$\text{Portanto, } A(x) = \frac{3 + 3 + 4 \cos x}{2} \times 4 \sin x =$$

$$= \frac{6 + 4 \cos x}{2} \times 4 \sin x =$$

$$= (3 + 2 \cos x) \times 4 \sin x =$$

$$= 12 \sin x + 4 \times 2 \sin x \cos x =$$

$$= 12 \sin x + 4 \sin(2x)$$

b)

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12 \sin \frac{\pi}{2} + 4 \sin \pi =$$

$$= 12 \times 1 + 4 \times 0 = 12$$

Interpretação geométrica: quando $x = \frac{\pi}{2}$, o ponto C coincide com o ponto Q e o ponto D coincide com o ponto P , pelo que o quadrilátero $[ABCD]$ coincide com o retângulo $[ABQP]$, cuja área é $3 \times 4 = 12$.

$$6. a) \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{3} + x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = 1 \Leftrightarrow \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Pág. 9

$$7. \cos(2x) - 3 \sin x = 2 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - 3 \sin x = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Leftrightarrow \sin x = -1 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

As soluções desta condição em $]-\pi, \pi[$ são $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{6}$.

Pág. 10

$$8. \bullet \sin(105^\circ) = \sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

$$\bullet \cos(105^\circ) = \cos(45^\circ + 60^\circ) = \cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

$$\bullet \operatorname{tg}(105^\circ) = \frac{\sin(105^\circ)}{\cos(105^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})} = \frac{8+\sqrt{12}}{2-6} = \frac{8+2\sqrt{3}}{-4} = -2 - \sqrt{3}$$

9. a) Tem-se:

$$\bullet \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{9} + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}; \text{ portanto, } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\bullet \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \beta + \frac{1}{16} = 1 \Leftrightarrow \sin \beta = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}; \text{ portanto, } \sin \beta = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$$\text{Então, tem-se: } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-2+5\sqrt{3}}{12}.$$

b) Tem-se

$$\bullet \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{25}{144} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{144}{169}; \text{ portanto, } \cos \alpha = -\frac{12}{13}.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \frac{144}{169} = 1 \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{25}{169}; \text{ portanto, } \sin \alpha = \frac{5}{13}.$$

$$\bullet \operatorname{tg}^2 \beta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Leftrightarrow \frac{9}{16} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{16}{25}; \text{ portanto, } \cos \beta = -\frac{4}{5}.$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \beta + \frac{16}{25} = 1 \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{9}{25}; \text{ portanto, } \sin \beta = -\frac{3}{5}.$$

$$\text{Então, tem-se: } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{5}{13} \times \left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{12}{13}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{16}{65}.$$

10. Tem-se:

$$\bullet \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 9 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{10}$$

$$\bullet \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{1}{10} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{9}{10}$$

$$\text{Então, tem-se: } \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{10} - \frac{9}{10} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}.$$

$$11. \text{ a) } \operatorname{sen} 23^\circ \cos 37^\circ + \operatorname{sen} 37^\circ \cos 23^\circ = \operatorname{sen}(37^\circ + 23^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{b) } \cos 20^\circ \cos 25^\circ - \operatorname{sen} 20^\circ \operatorname{sen} 25^\circ = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{c) } \operatorname{sen} 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \times (2 \times \operatorname{sen} 15^\circ \cos 15^\circ) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{4}$$

12.

a)

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x \cos y} &= \\ &= \frac{\operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x}{\cos x \cos y} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\operatorname{sen} y \cos x}{\cos x \cos y} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} &= \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}} = \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x}{\cos x \cos y}}{\frac{\operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x}{\cos x \cos y}} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x}{\operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{sen}(x-y)} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(3x) &= \operatorname{sen}(2x + x) = \\ &= \operatorname{sen}(2x) \cos x + \operatorname{sen} x \cos(2x) = \\ &= 2 \operatorname{sen} x \cos x \cos x + \operatorname{sen} x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \\ &= 2 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x (1 - 2 \operatorname{sen}^2 x) = \\ &= 2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x = \\ &= 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\cos(4x) &= \cos[2 \times (2x)] = \\ &= \cos^2(2x) - \operatorname{sen}^2(2x) = \\ &= \cos^2(2x) - [1 - \cos^2(2x)] = \\ &= 2 \cos^2(2x) - 1 = \\ &= 2 (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2 - 1 = \\ &= 2 [\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)]^2 - 1 = \\ &= 2 (2 \cos^2 x - 1)^2 - 1 = \\ &= 2 (4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1) - 1 = \\ &= 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1\end{aligned}$$

13.

a)

$$\begin{aligned}\frac{1 - \cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)} &= \frac{1 - (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \\ &= \frac{1 - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 x}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 15^\circ &= \frac{1 - \cos(2 \times 15^\circ)}{\operatorname{sen}(2 \times 15^\circ)} = \frac{1 - \cos(30^\circ)}{\operatorname{sen}(30^\circ)} = \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2 = 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

14.

a)

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{1 + \cos(2x)}{2} &= \frac{1 + \cos^2 x - \sin^2 x}{2} = \\ &= \frac{1 - \sin^2 x + \cos^2 x}{2} = \frac{2 \cos^2 x}{2} = \cos^2 x \\ \frac{1 - \cos(2x)}{2} &= \frac{1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{2} = \\ &= \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{2} = \frac{2 \sin^2 x}{2} = \sin^2 x\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\text{Tem-se } \sin^2 7,5^\circ &= \frac{1 - \cos(2 \times 7,5^\circ)}{2} = \\ &= \frac{1 - \cos 15^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{8} \\ \text{pelo que } \sin 7,5^\circ &= \sqrt{\frac{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}} \approx 0,131.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Tem-se } \cos^2 7,5^\circ &= \frac{1 + \cos(2 \times 7,5^\circ)}{2} = \\ &= \frac{1 + \cos 15^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}{8} \\ \text{pelo que } \cos 7,5^\circ &= \sqrt{\frac{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}{8}} \approx 0,991.\end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}(\sin \alpha + \sin \beta)(\cos \alpha + \cos \beta) &= \\ &= (\sin \alpha + \cos \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) = \\ &= (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \\ &= \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \\ &= 1 + \sin(2\alpha)\end{aligned}$$

$$16. a) \cos \left[\underbrace{\arcsen\left(-\frac{3}{5}\right)}_x + \underbrace{\arccos\frac{4}{5}}_y \right] =$$

| Cálculo aux:

Tem-se, para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ e $y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 y + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin y = \frac{3}{5}$$

$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$$

$$b) \sin \left[\frac{\pi}{6} - \underbrace{\arctg\frac{4}{3}}_y \right] =$$

| Cálculo aux:

Tem-se, para $y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} \Leftrightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 y} \Leftrightarrow \cos y = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 y + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin y = \frac{4}{5}$$

$$= \sin \frac{\pi}{6} \cos y - \cos \frac{\pi}{6} \sin y = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{3}{10} - \frac{2\sqrt{3}}{5} = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$$

$$c) \sin \left[2 \underbrace{\arctg\left(-\frac{3}{4}\right)}_x \right] =$$

| Cálculo aux:

Tem-se, para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos x = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 x + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{3}{5}$$

$$= 2 \sin x \cos x = 2 \times \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{4}{5} = -\frac{24}{25}$$

Pág. 11

$$17. a) 2 \sin^2 x + \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x (\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \cos^2 x = \frac{1}{2} \sin(2x) \Leftrightarrow \cos^2 x = \sin x \cos x \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos x (\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$c) \cos^2(2x) = \cos x + \sin^2(2x) \Leftrightarrow \cos^2(2x) - \sin^2(2x) = \cos x \Leftrightarrow \cos(4x) = \cos x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x = x + 2k\pi \vee 4x = -x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$d) \sin x + \cos x = 1 \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Verificação das soluções:

$$\text{Para } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}: \sin x + \cos x = 0 + 1 = 1$$

$$\text{Para } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}: \sin x + \cos x = 1 + 0 = 1$$

Para $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$: $\sin x + \cos x = 0 + (-1) = -1$

Para $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$: $\sin x + \cos x = -1 + 0 = -1$

Portanto, as soluções da equação são dadas por $x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{e)} 3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 3 \Leftrightarrow \sin x + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \times \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{f)} 2 \sin x - \sqrt{12} \cos x = -2 \Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3} \cos x = -1 \Leftrightarrow \sin x - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \times \cos x = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$18. \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{3}$; ambos os valores pertencem a $[0, 2\pi]$.

Para $k = 1 \rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{4\pi}{3}$; ambos os valores pertencem a $[0, 2\pi]$.

Para $k = 2 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2\pi$; nenhum dos valores pertence a $[0, 2\pi]$.

Para $k = -1 \rightarrow x = -\frac{5\pi}{6} \vee x = -\frac{2\pi}{3}$; nenhum dos valores pertence a $[0, 2\pi]$.

Para qualquer outro valor de k , nenhuma das correspondentes soluções pertence ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Portanto, o conjunto-solução é $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

$$19. [2 + 2 \cos(2x)] \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow [2 + 2(-1 + 2 \cos^2 x)] \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 x \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow 4 \sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12}$; ambos os valores pertencem a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Para $k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + \pi$; nenhum dos valores pertence a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Para $k = -1 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} - \pi \vee x = \frac{5\pi}{12} - \pi$; nenhum dos valores pertence a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Para qualquer outro valor de k , nenhuma das correspondentes soluções pertence ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Portanto, o conjunto-solução é $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right\}$.

$$20. \overline{AD} = \frac{\overline{AB}}{\cos(2\alpha)} = \frac{\overline{AB}}{1-2\cos^2\alpha} = \frac{7}{1-2\times\left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{224}{17} \text{ unidades de área}$$

$$21. \text{a)} \text{ Área} = \overline{DA} \times \overline{AB} = 2 \times \overline{OA} \times \overline{AB} = 2 \times \cos\alpha \times \sin\alpha = \sin(2\alpha)$$

$$\text{b)} \text{ Área} = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

22.

a)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \\ &= \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \\ &= \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\sin y \cos x}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \times \operatorname{tg} y} \end{aligned}$$

b) Tem-se, de acordo com a alínea anterior:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \Leftrightarrow 1 = \frac{\sqrt{2} + \operatorname{tg} b}{1 - \sqrt{2} \operatorname{tg} b} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2} + \operatorname{tg} b}{1 - \sqrt{2} \operatorname{tg} b} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2} + \operatorname{tg} b - 1 + \sqrt{2} \operatorname{tg} b}{1 - \sqrt{2} \operatorname{tg} b} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} b(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1}{1 - \sqrt{2} \operatorname{tg} b} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} b(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 = 0 \wedge 1 - \sqrt{2} \operatorname{tg} b \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg} b = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \wedge \operatorname{tg} b \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} b = 2\sqrt{2} - 3 \end{aligned}$$

2. Limites e derivadas de funções trigonométricas

Pág. 13

$$\begin{aligned} \text{23. a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \operatorname{sen}(2x)}{x} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[3 - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} \right] = 3 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \\ &= 3 - 2 \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{sen} x}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3 \operatorname{tg} x}{x} - \frac{2 \operatorname{sen} x}{x} \right] = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 3 - 2 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \sqrt{1-x}} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x (1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x (1 + \sqrt{1-x})}{1 - (1-x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times (1 + \sqrt{1-x}) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{1-x}) = 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{d)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\pi - x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y = x - \pi}} \frac{\operatorname{sen}(y + \pi)}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} y}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$$

24. a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4 - 4 \cos x}{x(x + \operatorname{sen} x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(x + \operatorname{sen} x)(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{1 + \cos x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos^2 x}{x(x + \operatorname{sen} x)} = \\ &= \frac{4}{1 + \cos 0} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(x + \operatorname{sen} x)} = \\ &= 2 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \\ &= 2 \times 1 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \\ &= 2 \times 1 \times \frac{1}{1 + 1} = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \operatorname{sen} 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, f é contínua no ponto 0.

b) • Para $x < 0$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4-4\cos x}{x(x+\sin x)} = 0 \Leftrightarrow 4-4\cos x = 0 \wedge x(x+\sin x) \neq 0 \wedge -3\pi < x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \wedge -3\pi < x < 0 \Leftrightarrow x = -2\pi$$

• Para $x > 0$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \wedge 0 < x < 2\pi \Leftrightarrow \sin x = -\cos x \wedge 0 < x < 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} \vee x = \frac{7\pi}{4}$$

Portanto, os zeros da função são -2π , $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$.

Pág. 16

25. a) $(4 \sin x - \cos(3x))' = (4 \sin x)' - [\cos(3x)]' = 4 \cos x + 3 \sin(3x)$

b) $(x \sin x + \cos x)' = (x \sin x)' + (\cos x)' = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$

c)
$$\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(1+\cos x) - (\sin x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x(1+\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x(1+\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$$

d) $(\sin^2 x)' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x = \sin(2x)$

e) $(\sin^3 x \cos x)' = (\sin^3 x)' \cos x + (\sin^3 x)(\cos x)' =$
 $= 3 \sin^2 x (\sin x)' \cos x + (\sin^3 x)(-\sin x) = 3 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x$

f)
$$\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' - \left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} + \frac{(\tan x)'}{\tan^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} =$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$

g)
$$\left(\frac{1+\sin x+\cos x}{\cos x}\right)' = \frac{(1+\sin x+\cos x)' \cos x - (1+\sin x+\cos x)(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x) \cos x + (1+\sin x+\cos x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin x \cos x + \sin x + \sin^2 x + \cos x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$$

h)
$$\left(\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi} + x \sin(2\pi x)\right)' = \left(\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi}\right)' + [x \sin(2\pi x)]' =$$

$$= \frac{1}{2\pi} [\cos(2\pi x)]' + x' \sin(2\pi x) + x(\sin(2\pi x))' =$$

$$= \frac{1}{2\pi} [-2\pi \sin(2\pi x)] + \sin(2\pi x) + x[2\pi \cos(2\pi x)] =$$

$$= -\sin(2\pi x) + \sin(2\pi x) + x[2\pi \cos(2\pi x)] = 2\pi x \cos(2\pi x)$$

Pág. 17

26. a) Tem-se:

$$f(x) = \text{área do quadrilátero } [OPQR] = \underbrace{\text{área do trapézio } [SPQR]}_{\frac{RQ+SP}{2} \times \overline{SR}} - \underbrace{\text{área do triângulo } [OSP]}_{\frac{OS \times SP}{2}} =$$

$$= \frac{1+\cos x}{2} \times (1 + \sin x) - \frac{\sin x \times \cos x}{2} = \frac{(1+\cos x)(1+\sin x) - \sin x \cos x}{2} =$$

$$= \frac{1+\sin x + \cos x + \cos x \sin x - \sin x \cos x}{2} = \frac{1+\sin x + \cos x}{2}$$

b) $\left(\frac{1+\sin x + \cos x}{2}\right)' = \frac{1}{2}(1 + \sin x + \cos x)' = \frac{1}{2}[(\sin x)' + (\cos x)'] = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \wedge 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
Sinal e zeros de f'	+	0	-	
Variação e extremos de f		↗ máx. abs.	↘	

A área é máxima para $x = \frac{\pi}{4}$.

c) $f(0) = \frac{1+\sin 0 + \cos 0}{2} = \frac{1+0+1}{2} = 1$

Quando $x = 0$, o ponto P coincide com o ponto B e, portanto, o quadrilátero $[OPQR]$ coincide com o quadrado $[OBQR]$, pelo que a sua área é igual a $\overline{OB}^2 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x + \cos x}{2} = \frac{1+\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1+1+0}{2} = 1$$

À medida que x toma valores cada vez mais próximos de $\frac{\pi}{2}$, o ponto P aproxima-se do ponto A e, portanto, o quadrilátero $[OPQR]$ tem uma forma cada vez mais semelhante à do triângulo $[AQR]$, pelo que a sua área tem um valor cada vez mais próximo da área deste triângulo, que é igual a $\frac{\overline{RQ} \times \overline{RS}}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$.

Pág. 18

27. $f'(x) = (x^2 - \cos(2x))' = (x^2)' - [\cos(2x)]' = 2x + 2 \sin(2x)$

$$f''(x) = (2x + 2 \sin(2x))' = (2x)' + [2 \sin(2x)]' = 2 + 4 \cos(2x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + 4 \cos(2x) = 0 \wedge 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} \wedge 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \wedge 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \wedge 0 \leq x \leq \pi$$

Para $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}$; ambos os valores pertencem a $[0, \pi]$.

Para $k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + \pi$; nenhum dos valores pertence a $[0, \pi]$.

Para $k = -1 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} - \pi \vee x = \frac{2\pi}{3} - \pi$; nenhum dos valores pertence a $[0, \pi]$.

Para qualquer outro valor de k , nenhuma das correspondentes soluções pertence ao intervalo $[0, \pi]$.

Portanto, o conjunto-solução é $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2 + 4 \cos(2x)$		+	0	-	0	+	
Sinal e zeros de f''		+	0	-	0	+	
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f			P.I.		P.I.		

A concavidade do gráfico está voltada para cima nos intervalos $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ e está voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Existem dois pontos de inflexão: um com abscissa $\frac{\pi}{3}$ e outro com abscissa $\frac{2\pi}{3}$.

Pág. 19

28. Tem-se:

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= (1 + \sin(2x) \cos x)' = (\sin(2x))' \cos x + \sin(2x) (\cos x)' = \\ &= 2 \cos(2x) \cos x - \sin(2x) \sin x \\ \bullet f'(0) &= 2 \cos 0 \cos 0 - \sin 0 \sin 0 = 2 \\ \bullet f(0) &= 1 + \sin 0 \cos 0 = 1 \end{aligned}$$

Então a equação reduzida da reta é $y = 2x + 1$.

Pág. 20

$$\begin{aligned} 29. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}{x^2} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{x} \times \frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{x} \right] \times \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{x} \right] = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{\frac{x}{3} \rightarrow 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} \right] \times \frac{1}{3} \lim_{\frac{x}{3} \rightarrow 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} \right] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{1 - \cos x} \sqrt{1 + \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\sin x} \times \sqrt{1 + \cos x} \right) = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \left[(1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \right] &\stackrel{0 \times \infty}{\underset{y=x-1}{=}} \lim_{y \rightarrow 0} \left[-y \operatorname{tg} \frac{\pi(y+1)}{2} \right] = - \lim_{y \rightarrow 0} \left[y \operatorname{tg} \left(\frac{\pi y}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\ &= - \lim_{y \rightarrow 0} \left[y \times \frac{1}{-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi y}{2}\right)} \right] = \frac{2}{\pi} \lim_{\frac{\pi y}{2} \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\pi y}{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi y}{2}\right)} \right] = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{y \rightarrow 0^- \\ y = x - \pi}} \frac{\operatorname{sen}(y + \pi)}{1 + \cos(y + \pi)} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-\operatorname{sen} y}{1 - \cos y} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} - \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} y (1 + \cos y)}{(1 - \cos y)(1 + \cos y)} = \\ &= - \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} y (1 + \cos y)}{1 - \cos^2 y} = - \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} y (1 + \cos y)}{\operatorname{sen}^2 y} = - \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1 + \cos y}{\operatorname{sen} y} = - \frac{2}{0^-} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^3} \operatorname{sen} x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^3} \operatorname{sen} x \left(\frac{1 - \cos x}{\cos x} \right) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^3} \operatorname{sen} x \times \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\cos x (1 + \cos x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^3} \operatorname{sen} x \times \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x (1 + \cos x)} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^3} \operatorname{sen} x \times \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x (1 + \cos x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3} \times \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^3 \times \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} \right] = 1 \times \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\operatorname{sen} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y = x - \frac{\pi}{3}}} \frac{1 - 2 \cos \left(y + \frac{\pi}{3} \right)}{\operatorname{sen} y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \left(\cos y \cos \frac{\pi}{3} - \operatorname{sen} y \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right)}{\operatorname{sen} y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \left(\frac{1}{2} \cos y - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} y \right)}{\operatorname{sen} y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y + \sqrt{3} \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos y}{\operatorname{sen} y} + \sqrt{3} \right) = \\ &= \sqrt{3} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos y)(1 + \cos y)}{\operatorname{sen} y (1 + \cos y)} = \sqrt{3} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 y}{\operatorname{sen} y (1 + \cos y)} = \sqrt{3} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{1 + \cos y} = \sqrt{3} + \frac{0}{2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow \pi^+} \left(\cos x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) = -1 \times \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \right)^+ = -1 \times (-\infty) = +\infty$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

$$\text{30. a) } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi - \operatorname{sen}(\pi)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \pi$$

b) A função é contínua em $]0, \pi[$, pelo que somente as retas de equações $x = 0$ e $x = \pi$ poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - \operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen} x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2x - \operatorname{sen}(2x)}{2x} \cdot \frac{2x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{2x}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}}{\frac{1}{2} \times \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \\ &= 2 \times \frac{1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 2 \times \frac{0}{1} = 0; \text{ portanto, a reta de equação } x = 0 \text{ não é assíntota vertical ao} \\ &\text{gráfico de } f. \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{2x - \operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen} x} = \frac{2\pi - \operatorname{sen}(2\pi)}{\operatorname{sen}(\pi^-)} = \frac{2\pi}{0^+} = +\infty; \text{ portanto, a reta de equação } x = \pi \text{ é assíntota vertical ao gráfico de } f.$$

$$31. a) f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} b) f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\sin x + \sin(2x)}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x + \sin(2x) = 0 \wedge \cos x \neq 0 \wedge x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin x = -\sin(2x) \wedge x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow \sin x = \sin(-2x) \wedge x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -2x + 2k\pi \vee x = \pi + 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x = 2k\pi \vee -x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Para $k = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = -\pi$; somente 0 pertence a $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Para $k = 1 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \pi$; ambos os valores pertencem a $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Para $k = 2 \rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \vee x = 3\pi$; nenhum dos valores pertence a $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Para $k = -1 \rightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \vee x = -3\pi$; nenhum dos valores pertence a $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Para qualquer outro valor de k , nenhuma das correspondentes soluções pertence ao intervalo $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Portanto, os zeros são 0, $\frac{2\pi}{3}$ e π .

c) Tem-se:

$$\bullet 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

Como $\operatorname{tg}(\alpha)$ é positivo e $\alpha \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, pode concluir-se que $\cos(\alpha)$ e $\sin(\alpha)$ são positivos.

$$\text{Portanto, } \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}.$$

$$\bullet \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \frac{1}{5} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\text{Portanto, } \sin \alpha = \sqrt{\frac{4}{5}}.$$

Então, tem-se:

$$f(\alpha) = \frac{\sin \alpha + \sin(2\alpha)}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{\frac{4}{5}} + 2 \times \sqrt{\frac{4}{5}} \times \sqrt{\frac{1}{5}}}{\sqrt{\frac{1}{5}}} = \sqrt{5} \left(\sqrt{\frac{4}{5}} + 2 \times \sqrt{\frac{4}{5}} \times \sqrt{\frac{1}{5}} \right) = 2 + 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{10 + 4\sqrt{5}}{5}$$

d) A função é contínua em $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, pelo que somente a reta de equação $x = \frac{\pi}{2}$ poderá ser assíntota vertical ao gráfico de f

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sin x + \sin(2x)}{\cos x} = \frac{1+0}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\sin x + \sin(2x)}{\cos x} = \frac{1+0}{0^-} = -\infty$$

Portanto a reta de equação $x = \pi$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

32. a)

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\pi - \frac{4\pi}{3}} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{-\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi}$$

$$\text{b) } f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cos x}{\pi - 2x} = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x = 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \neq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Procuramos as soluções que pertencem a $[\pi, 3\pi]$:

Para $k = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$; este valor não pertence a $[\pi, 3\pi]$.

Para $k = 1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$; este valor pertence a $[\pi, 3\pi]$.

Para $k = 2 \rightarrow x = \frac{5\pi}{2}$; este valor pertence a $[\pi, 3\pi]$.

Para $k = 3 \rightarrow x = \frac{7\pi}{2}$; este valor não pertence a $[\pi, 3\pi]$.

Para qualquer outro valor de k , nenhuma das correspondentes soluções pertence ao intervalo $[\pi, 3\pi]$.

Portanto, os zeros são $\frac{3\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{2}$.

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x}{\pi - 2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{y=x-\frac{\pi}{2}}{\rightleftharpoons}} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{-2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2 \operatorname{sen} y}{-2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1; \text{ portanto, } k = 1.$$

$$\text{33. a) } f\left(\frac{7}{4}\right) = 1 + 2 \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 1 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

b) Tem-se, para $x \in [1, 6]$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \cos(\pi x) = 0 \wedge x \in [1, 6] \Leftrightarrow \cos(\pi x) = -\frac{1}{2} \wedge x \in [1, 6] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \pi x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [1, 6] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3} + 2k \vee x = -\frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [1, 6]$$

Para $k = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3} \vee x = -\frac{2}{3}$; nenhum dos valores pertence a $[1, 6]$.

Para $k = -1 \rightarrow x = -\frac{4}{3} \vee x = -\frac{8}{3}$; nenhum dos valores pertence a $[1, 6]$.

Para $k = 1 \rightarrow x = \frac{8}{3} \vee x = \frac{4}{3}$; ambos os valores pertencem a $[1, 6]$.

Para $k = 2 \rightarrow x = \frac{14}{3} \vee x = \frac{10}{3}$; ambos os valores pertencem a $[1, 6]$.

Para $k = 3 \rightarrow x = \frac{20}{3} \vee x = \frac{16}{3}$; somente $\frac{16}{3}$ pertence a $[1, 6]$.

Para qualquer outro valor de k , nenhuma das correspondentes soluções pertence ao intervalo $[1, 6]$.

Portanto, os zeros são $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{14}{3}$ e $\frac{16}{3}$.

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2 - 3x + 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{y=x-1}{\rightleftharpoons}} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y(y-1)} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen} y}{y} \times \frac{1}{y-1} \right) =$$

$$= 1 \times (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [1 + 2 \cos(\pi x)] = 1 + 2 \cos \pi = 1 - 2 = -1$$

Portanto, f é contínua no ponto 1.

$$\begin{aligned}
 34. f'(\pi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(\pi+h) + \sin(2\pi+2h) - 3\pi}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h + \sin(2h)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(3 + \frac{\sin(2h)}{h} \right) = 3 + 2 \times \lim_{2h \rightarrow 0} \frac{\sin(2h)}{2h} = 3 + 2 \times 1 = 5
 \end{aligned}$$

Pág. 21

$$35. a) [2 \sin x + \cos(3x)]' = (2 \sin x)' + [\cos(3x)]' = 2 \cos x - 3 \sin(3x)$$

$$\begin{aligned}
 b) [\sin^2 x + \cos(2x)]' &= (\sin^2 x)' + [\cos(2x)]' = 2 \sin x \cos x - 2 \sin(2x) = \\
 &= \sin(2x) - 2 \sin(2x) = -\sin(2x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} \right)' &= \frac{(\cos x)'(1 + \sin x) - (1 + \sin x)' \cos x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos x \cos x}{(1 + \sin x)^2} = \\
 &= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x - 1}{(1 + \sin x)^2} = -\frac{1}{1 + \sin x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d) [\sin(2x) \cos(3x)]' &= (\sin(2x))' \cos(3x) + \sin(2x) (\cos(3x))' = \\
 &= 2 \cos(2x) \cos(3x) - 3 \sin(2x) \sin(3x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e) [\sin x \cos^3 x]' &= (\sin x)' \cos^3 x + \sin x (\cos^3 x)' = \\
 &= \cos x \cos^3 x + \sin x \times 3 \cos^2 x (-\sin x) = \cos^4 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f) [x \sin x + \cos x]' &= (x \sin x)' + (\cos x)' = x' \sin x + x(\sin x)' - \sin x = \\
 &= \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g) \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x \right)' &= \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x \right)' - (\operatorname{tg} x)' + 1 = \operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg} x)' - \frac{1}{\cos^2 x} + 1 = \\
 &= \operatorname{tg}^2 x \frac{1}{\cos^2 x} - \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \operatorname{tg}^2 x \frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \operatorname{tg}^2 x \times \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^4 x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h) \left(\frac{\sin x}{2 \cos^2 x} \right)' &= \frac{(\sin x)'(2 \cos^2 x) - (2 \cos^2 x)' \sin x}{4 \cos^4 x} = \frac{\cos x(2 \cos^2 x) - 4 \cos x(-\sin x) \sin x}{4 \cos^4 x} = \\
 &= \frac{2 \cos^3 x + 4 \cos x \sin^2 x}{4 \cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2 \sin^2 x}{2 \cos^3 x} = \frac{1 + \sin^2 x}{2 \cos^3 x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 36. \text{ Tem-se } f'(x) &= \left[\frac{2}{3} \sin^2(3x) \right]' = \frac{2}{3} \times 2 \sin(3x) \times [\sin(3x)]' = \\
 &= \frac{2}{3} \times 2 \sin(3x) \times 3 \cos(3x) = 4 \sin(3x) \cos(3x) = 2 \sin(6x)
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'\left(\frac{\pi}{36}\right) = 2 \sin\left(6 \times \frac{\pi}{36}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$, pelo que, como o declive da reta referida é igual a 1, a sua inclinação é $\frac{\pi}{4}$.

$$37. a) f(1) + 14f\left(\frac{6}{7}\right) = 1 + \sin(\pi) + 14\left[\frac{6}{7} + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right] = 1 + 0 + 12 + 14 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 6$$

b) O domínio de f é inferiormente limitado, pelo que o gráfico de f só poderá admitir assíntota não vertical em $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x}\right) =$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x} = \quad | \text{Tem-se: } -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x} \leq \frac{1}{x} \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$= 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1 \times x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - x\right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \sin 0 = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f .

c) Tem-se:

$$\bullet f'(x) = \left[x + \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right]' = 1 + \left(\frac{\pi}{x}\right)' \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = 1 - \frac{\pi}{x^2} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$\bullet f'(2) = 1 - \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1$$

$$\bullet f(2) = 2 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + 1 = 3$$

Então, uma equação da reta é $y - 3 = 1(x - 2)$

Ora, $y - 3 = 1(x - 2) \Leftrightarrow y = x + 1$, pelo que a equação reduzida da reta é $y = x + 1$.

38. a) Tem-se:

$$\bullet f'(x) = (x^2 + 4 \sin x)' = 2x + 4 \cos x$$

$$\bullet f'(0) = 0 + 4 \cos(0) = 4$$

$$\bullet f(0) = 0 + 4 \sin(0) = 0$$

Então, a equação reduzida da reta é $y = 4x$.

$$\mathbf{b)} f''(x) = (2x + 4 \cos x)' = 2 - 4 \sin x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 4 \sin x = 0 \wedge -\pi \leq x \leq \pi \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \wedge -\pi \leq x \leq \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$$

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
Sinal e zeros de $f''(x)$	+	+	0	-	0	+	+
Sentido de concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f			P.I.		P.I.		

A concavidade do gráfico está voltada para

cima nos intervalos $\left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right]$ e $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ e

está voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

Existem dois pontos de inflexão: um com

abscissa $\frac{\pi}{6}$ e outro com abscissa $\frac{5\pi}{6}$.

39. a) A função é contínua em $]0, \pi[$, pelo que somente as retas de equações $x = 0$ e $x = \pi$ poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de f .

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+\sin x}{\sin x} = \frac{1+0}{0^+} = +\infty$; portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

• $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1+\sin x}{\sin x} = \frac{1+0}{0^+} = +\infty$; portanto, a reta de equação $x = \pi$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \left(\frac{1+\sin x}{\sin x} \right)' = \frac{(1+\sin x)' \sin x - (\sin x)'(1+\sin x)}{\sin^2 x} = \frac{\cos x \sin x - \cos x(1+\sin x)}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \sin x - \cos x - \cos x \sin x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0 \wedge 0 < x < \pi \Leftrightarrow \cos x = 0 \wedge \sin x \neq 0 \wedge 0 < x < \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Sinal e zeros de $f'(x)$		-	0	+	
Variação e extremos de f	n.d.	$\searrow$	mín. abs.	$\nearrow$	n.d.

A função é decrescente no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$

e é crescente no intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi[$.

A função tem um mínimo para $x = \frac{\pi}{2}$.

c)

Tem-se:

• a função é contínua no intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$

• $f(\frac{\pi}{4}) = 1 + \sqrt{2} \approx 2,41$;

$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \approx 2,15$

• $2,15 < 2,3 < 2,41$

Portanto, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

tem-se que $\exists c \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}] : f(c) = 2,3$.

d) Na figura ao lado está ilustrada a situação descrita.

• Seja d a abscissa de D ; tem-se:

$$f(d) = 3 \Leftrightarrow \frac{1+\sin d}{\sin d} = 3 \Leftrightarrow 1 + \sin d = 3 \sin d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin d = \frac{1}{2} \Leftrightarrow d = \frac{\pi}{6} \vee d = \frac{5\pi}{6}$$

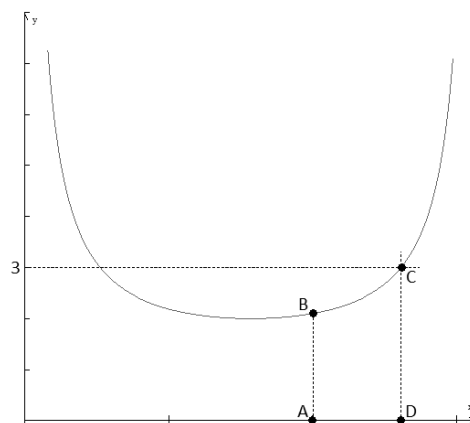
Dado que $d > \frac{\pi}{3}$, conclui-se que $d = \frac{5\pi}{6}$.

$$\text{Portanto, } \overline{AD} = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

• Tem-se:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}+3}{3}, \text{ pelo que } \overline{AB} = \frac{2\sqrt{3}+3}{3}$$

$$\text{Então, vem: } \text{Área} = \frac{\overline{DC} + \overline{AB}}{2} \times \overline{AD} = \frac{3 + \frac{2\sqrt{3}+3}{3}}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}+12}{3} \times \pi}{4} = \frac{2(\sqrt{3}+6)\pi}{12} = \frac{(\sqrt{3}+6)\pi}{6}$$



Pág. 22

40.

Tem-se $f'(x) = -\sin x$.

Por outro lado, tem-se que

$$a + b = \pi \Leftrightarrow b = \pi - a.$$

Portanto,

• o declive da reta r é $f'(a) = -\sin a$;

• o declive da reta s é

$$f'(b) = -\sin b = -\sin(\pi - a) = -\sin a$$

Logo, as retas r e s têm o mesmo declive, pelo que são paralelas.

41. a)

Área da região azul =

= Área do triângulo $[ABP]$ +

+ Área do triângulo $[BCP]$ =

$$= \frac{\overline{AB} \times \overline{EP}}{2} + \frac{\overline{BC} \times \overline{FP}}{2} =$$

$$= \frac{1 \times \sin x}{2} + \frac{1 \times (1 - \cos x)}{2} =$$

$$= \frac{\sin x}{2} + \frac{1 - \cos x}{2} =$$

$$= \frac{1 + \sin x - \cos x}{2}$$

b) Tem-se:

$$\bullet 1 + \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Leftrightarrow 1 + \frac{144}{25} = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{25}{169}$$

Como $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, pode concluir-se que $\cos(\alpha)$ e $\sin(\alpha)$ são positivos.

$$\text{Portanto, } \cos \beta = \frac{5}{13}.$$

$$\bullet \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \beta + \frac{25}{169} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \beta = \frac{144}{169}$$

$$\text{Portanto, } \sin \beta = \frac{12}{13}.$$

Então, tem-se:

$$a(\beta) = \frac{1 + \sin \beta - \cos \beta}{2} = \frac{1 + \frac{12}{13} - \frac{5}{13}}{2} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13} \text{ unidades de área}$$

$$\text{c) } a\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1}{2} \text{ unidades de área}$$

Interpretação geométrica do valor obtido:

Quando $x = \frac{\pi}{4}$, o ponto P pertence ao segmento de reta $[AC]$, pelo que a região colorida a azul é o triângulo $[ABC]$ cuja área é $\frac{1}{2}$.

d)

Perímetro da região azul =

$$= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AP} + \overline{PC} =$$

$$= 1 + 1 + 1 + \overline{PC} = 3 + \overline{PC}$$

Tem-se $\overline{PC}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{FC}^2$, donde vem:

$$\overline{PC}^2 = (1 - \cos x)^2 + (1 - \sin x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{PC}^2 = 1 - 2 \cos x +$$

$$+ \cos^2 x + 1 - 2 \sin x + \sin^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{PC}^2 = 3 - 2 \cos x - 2 \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{PC}^2 = 3 - 2(\sin x + \cos x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{PC} = \sqrt{3 - 2(\sin x + \cos x)}$$

Portanto, o perímetro da região colorida a azul é igual a $3 + \sqrt{3 - 2(\sin x + \cos x)}$.

$$\text{e) } p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 + \sqrt{3 - 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)} = 3 + \sqrt{3 - 2(1 + 0)} = 3 + 1 = 4$$

Interpretação geométrica do valor obtido:

Quando $x = \frac{\pi}{2}$, o ponto P coincide com o ponto D , pelo que a região colorida a azul é o quadrado $[ABCD]$ cujo perímetro é 4.

$$\text{f) } p'(x) = \left(3 + \sqrt{3 - 2(\sin x + \cos x)}\right)' = \frac{[3 - 2(\sin x + \cos x)]'}{2\sqrt{3 - 2(\sin x + \cos x)}} = \frac{-2(\cos x - \sin x)}{2\sqrt{3 - 2(\sin x + \cos x)}} =$$

$$= \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3 - 2(\sin x + \cos x)}}$$

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3 - 2(\sin x + \cos x)}} = 0 \wedge x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0 \wedge \sqrt{3 - 2(\sin x + \cos x)} \neq 0 \wedge x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
Sinal e zeros de $p'(x)$		−	0	+	
Variação e extremos de p	n.d.	↘	mín. abs.	↗	

O perímetro é mínimo para $x = \frac{\pi}{4}$.

3. Osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton

Pág. 25

42. a) O período positivo mínimo é igual a $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}$, ou seja, 12.

b) O contradomínio é o intervalo $[1 - 2, 1 + 2]$, ou seja, $[-1, 3]$.

$$c) f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \cos\left(\frac{\pi x}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{\pi x}{6} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{6} = 2k\pi \vee \frac{\pi x}{6} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 12k \vee x = -4 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$

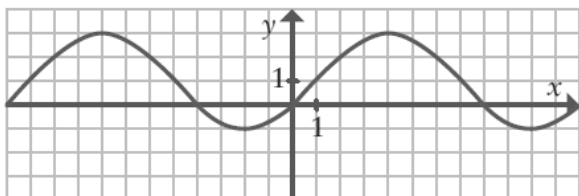
$$d) f(x) = 3 \Leftrightarrow 1 - 2 \cos\left(\frac{\pi x}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{6} + \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{\pi x}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 4 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$

$$e) f(x) = -1 \Leftrightarrow 1 - 2 \cos\left(\frac{\pi x}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{6} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{\pi x}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -2 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$

f)



43. O contradomínio é $[-5, 3]$, pelo que $d = -1$ e $|a| = 4$.

O período fundamental é igual a $8 - (-4)$, ou seja, 12; portanto, $\frac{2\pi}{|b|} = 12$, pelo que $|b| = \frac{\pi}{6}$.

Consideremos, por exemplo, $a = 4$ e $b = \frac{\pi}{6}$.

Dado que $f(0) = -3$, tem-se $4 \cos\left(\frac{\pi}{6} \times 0 + c\right) - 1 = -3 \Leftrightarrow \cos c = -\frac{1}{2}$.

Consideremos, por exemplo, $c = \frac{2\pi}{3}$.

Portanto, tem-se, por exemplo, $f(x) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{2\pi}{3}\right) - 1$.

Pág. 26

$$44. a) d(0) = 7 + 2 \cos \frac{\pi(0+4)}{6} = 7 + 2 \cos \frac{2\pi}{3} = 7 - 1 = 6 \text{ metros}$$

b) O contradomínio de d é $[7 - 2, 7 + 2]$, ou seja, $[5, 9]$; portanto, a distância é 9 metros.

$$\text{c) } d(t) = 5 \Leftrightarrow 7 + 2 \cos \frac{\pi(t+4)}{6} = 5 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi(t+4)}{6} = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi(t+4)}{6} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t + 4 = 6 + 12k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 2 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0 \rightarrow t = 2$; este valor pertence a $[0, 24]$.

Para $k = 1 \rightarrow t = 14$; este valor pertence a $[0, 24]$.

Para $k = 2 \rightarrow t = 26$; este valor não pertence a $[0, 24]$.

Para $k = -1 \rightarrow t = -10$; este valor não pertence a $[0, 24]$.

Para qualquer outro valor de k , nenhuma das correspondentes soluções pertence ao intervalo $[0, 24]$.

Portanto, nas primeiras 24 horas, a maré baixa ocorreu às 2 horas e às 14 horas.

Pág. 27

$$\text{45. a) } \frac{\pi(x+1)}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x + 1 \neq 3 + 6k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq 2 + 6k, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2 + 6k, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\text{b) } D'_f = \mathbb{R}$$

c) O período positivo mínimo é igual a $\frac{\pi}{\frac{\pi}{6}}$, ou seja, 6.

$$\text{d) } f(0) = 3 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = 3 + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 3 + 1 = 4$$

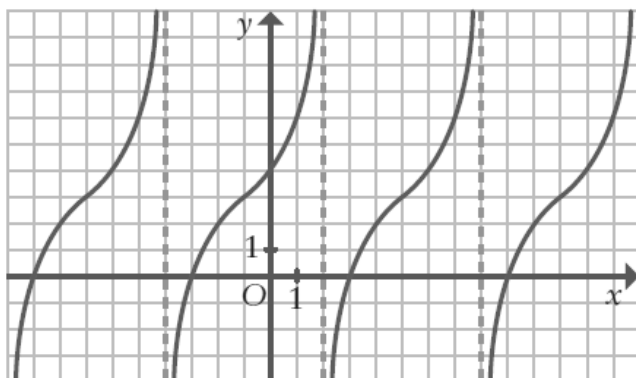
$$\text{e) } f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi(x+1)}{6} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi(x+1)}{6} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\pi(x+1)}{6} = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = -2 + 6k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -3 + 6k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[3 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi(x+1)}{6} \right] = 3 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi^-}{2} = 3 + \sqrt{3} \times (+\infty) = +\infty$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} \left[3 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi(x+1)}{6} \right] = 3 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2} \right)^+ = 3 + \sqrt{3} \times (-\infty) = -\infty$$

h)



Pág. 28

46. a) $x(0) = 2 \cos 0 = 2$; portanto, a abscissa de P era 2.

b) O contradomínio de x é $[-2, 2]$; portanto, a menor abscissa é -2 e a maior é 2.

c) $x(3) = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \times 0 = 0$; ao fim de 3 segundos, a abscissa de P era 0.

$$2 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 1 \rightarrow t = 3$; para $k = 2 \rightarrow t = 5$; ao fim de 5 segundos, a abscissa de P era novamente 0 ; tal ocorreu, portanto, passados 2 segundos do instante $t = 3$.

$$\begin{aligned} \text{d) Tem-se } 2 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) &= -1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi t}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{\pi t}{2} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = \frac{4}{3} + 4k \vee t = -\frac{4}{3} + 4k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{Ora, } 0 \leq \frac{4}{3} + 4k \leq 60 \wedge k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq 15 - \frac{1}{3} \wedge k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \in \{0, 1, 2, \dots, 14\}$$

$$\text{e } 0 \leq -\frac{4}{3} + 4k \leq 60 \wedge k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq k \leq 15 + \frac{1}{3} \wedge k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \in \{1, 2, \dots, 15\}$$

Portanto, tal ocorre 30 vezes ao longo do primeiro minuto.

Pág. 30

47. a) O contradomínio é $[-4, 4]$, pelo que $A = 4$.

O período fundamental é igual a 6 ; portanto, $\frac{2\pi}{w} = 6$, pelo que $w = \frac{\pi}{3}$.

$$\text{Dado que } f(4) = 4, \text{ tem-se } 4 \cos\left(\frac{\pi}{3} \times 4 + \phi\right) = 4 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \phi\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\pi}{3} + \phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \phi = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0 \rightarrow \phi = -\frac{4\pi}{3}$; este valor não pertence a $[0, 2\pi]$.

Para $k = 1 \rightarrow \phi = \frac{2\pi}{3}$; este valor pertence a $[0, 2\pi]$.

$$\text{Portanto, tem-se, } f(t) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

b) A amplitude é igual a 4 , a pulsação é igual a $\frac{\pi}{3}$, o período é igual a $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}$, ou seja, 6, e a fase é igual a $\frac{2\pi}{3}$.

Pág. 31

48. a) Tem-se $x(t) = \sin(\pi t) = \cos\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$, pelo que se trata de um oscilador harmónico.

b) A amplitude é igual a 1 , a pulsação é igual a π , o período é igual a $\frac{2\pi}{\pi}$, ou seja, 2 , a frequência é igual a $\frac{1}{2}$ e a fase é igual a $\frac{3\pi}{2}$.

Pág. 32

49. a) Tem-se $x(t) = 3 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) = \sqrt{3} \left[\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) \right] =$
 $= 2\sqrt{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) \right] = 2\sqrt{3} \left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) \right] =$
 $= 2\sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = 2\sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{3}\right)$, pelo que se trata de um oscilador harmónico.

b) A amplitude é igual a $2\sqrt{3}$, o período é igual a $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}$, ou seja, 8, a frequência é igual a $\frac{1}{8}$ e a fase é igual a $\frac{5\pi}{3}$.

$$\text{c) } x'(t) = \left[2\sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{3}\right) \right]' = 2\sqrt{3} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{3}\right) \right]' = 2\sqrt{3} \left[-\frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{3}\right) \right] =$$
$$= -\frac{\pi\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{3}\right)$$

$$x''(t) = \left[-\frac{\pi\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{3}\right) \right]' = -\frac{\pi\sqrt{3}}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{3}\right) \right]' = -\frac{\pi\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{3}\right) \right] =$$
$$= -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{8} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{3}\right)$$

$$x''(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{8} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}t = -\frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = -\frac{14}{3} + 4k, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0 \rightarrow t = -\frac{14}{3}$; este valor não pertence a $[0, 20]$

Para $k = 1 \rightarrow t = -\frac{14}{3} + 4 = -\frac{2}{3}$; este valor não pertence a $[0, 20]$.

Para $k = 2 \rightarrow t = -\frac{14}{3} + 8 = \frac{10}{3}$; este valor pertence a $[0, 20]$.

Para $k = 3 \rightarrow t = -\frac{14}{3} + 12 = \frac{22}{3}$; este valor pertence a $[0, 20]$.

Para $k = 4 \rightarrow t = -\frac{14}{3} + 16 = \frac{34}{3}$; este valor pertence a $[0, 20]$.

Para $k = 5 \rightarrow t = -\frac{14}{3} + 20 = \frac{46}{3}$; este valor pertence a $[0, 20]$.

Para $k = 6 \rightarrow t = -\frac{14}{3} + 24 = \frac{58}{3}$; este valor pertence a $[0, 20]$.

Para $k = 7 \rightarrow t = -\frac{14}{3} + 28 = \frac{70}{3}$; este valor não pertence a $[0, 20]$.

Para qualquer outro valor de k , nenhuma das correspondentes soluções pertence ao intervalo $[0, 20]$.

Portanto, a aceleração de P é nula nos instantes $\frac{10}{3}, \frac{22}{3}, \frac{34}{3}, \frac{46}{3}$ e $\frac{58}{3}$.

Pág. 34

50. Tem-se $f'(x) = (\cos x + \sin x)' = (\cos x)' + (\sin x)' = -\sin x + \cos x$, pelo que
 $f'(x) + f(x) = (-\sin x + \cos x) + (\cos x + \sin x) = 2 \cos x$

Pág. 35

51.

Seja $x(t)$ a abscissa do ponto P no instante t e seja d a distância do ponto P ao ponto de equilíbrio. Como o ponto P tem abscissa positiva, tem-se $d = x(t)$.

Como o ponto P está à direita do ponto de equilíbrio, a força F exercida pela mola sobre P tem sentido negativo. De acordo com a lei de Hooke, o módulo desta força é proporcional à distância d a que P se encontra do ponto de equilíbrio.

Tem-se, portanto, $F = -kd$, onde k é a constante de proporcionalidade. Vem, então: $F = -kd = -kx(t)$.

De acordo com a segunda lei de Newton, esta força é igual ao produto da massa m pela aceleração do ponto P , ou seja, $F = mx''(t)$.

Portanto, $mx''(t) = -kx(t)$.

Pág. 36

52. a) Pretende-se determinar k tal que $mx''(t) = -kx(t)$.

Ora,

$$mx''(t) = -kx(t) \Leftrightarrow 5x''(t) = -kx(t) \Leftrightarrow |x''(t) = -9x(t) \\ \Leftrightarrow -45x(t) = -kx(t)$$

Portanto, a constante de proporcionalidade é igual a 45.

b) Tem-se:

$$\bullet x(t) = A \cos(\sqrt{\alpha}t + b) \text{ e } \alpha = \frac{k}{m} = \frac{45}{5} = 9, \text{ pelo que } x(t) = A \cos(3t + b).$$

$$\bullet x(0) = -2$$

$$\bullet x'(0) = 3$$

$$\text{Ora, } x'(t) = [A \cos(3t + b)]' = A \times 3[-\sin(3t + b)] = -3A \sin(3t + b).$$

Então, tem-se:

$$\begin{cases} x(0) = -2 \\ x'(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cos b = -2 \\ -3A \sin b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cos b = -2 \\ A \sin b = -1 \end{cases} \Rightarrow A^2 \cos^2 b + A^2 \sin^2 b = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2(\cos^2 b + \sin^2 b) = 5 \Rightarrow A^2 = 5 \stackrel{(A>0)}{\Rightarrow} A = \sqrt{5}; \text{ portanto, } x(t) = \sqrt{5} \cos(3t + b).$$

Determinemos, agora, o valor de b .

$$\text{Tem-se } \begin{cases} \cos b = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin b = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}, \text{ pelo que } b \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[. \text{ Portanto, } b \approx 3,6.$$

$$\text{Então, } x(t) = \sqrt{5} \cos(3t + 3,6).$$

Pág. 40

$$\begin{aligned} 53. \text{ a) } f(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 - 2 \sin \frac{\pi(x+2,5)}{3} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi(x+2,5)}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \frac{\pi(x+2,5)}{3} = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi(x+2,5)}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{\pi(x+2,5)}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\pi(x+2,5) = \pi + 12k\pi \vee 2\pi(x+2,5) = 5\pi + 12k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\pi x + 5\pi = \pi + 12k\pi \vee 2\pi x + 5\pi = 5\pi + 12k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\pi x = -4\pi + 12k\pi \vee 2\pi x = 12k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -2 + 6k \vee x = 6k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{b) } f(x+P) = 1 - 2 \sin \frac{\pi[(x+P)+2,5]}{3} = 1 - 2 \sin \frac{\pi x + \pi P + 2,5\pi}{3} = 1 - 2 \sin \left[\frac{\pi(x+2,5)}{3} + \frac{\pi P}{3} \right]$$

O período positivo mínimo P é o que se obtém para $\frac{\pi P}{3} = 2\pi$, ou seja, $P = 6$.

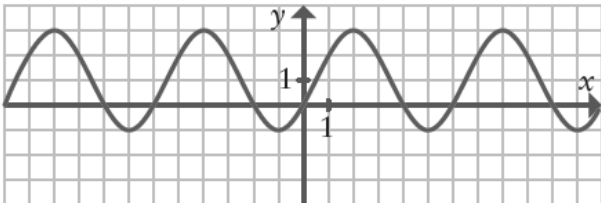
$$\begin{aligned} \text{c) } -1 \leq \sin \frac{\pi(x+2,5)}{3} \leq 1 &\Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin \frac{\pi(x+2,5)}{3} \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -2 \sin \frac{\pi(x+2,5)}{3} \leq 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -1 \leq 1 - 2 \sin \frac{\pi(x+2,5)}{3} \leq 3 \end{aligned}$$

Portanto o contradomínio da função f é $[-1, 3]$.

$$\begin{aligned} \text{d) } f(x) = 3 &\Leftrightarrow 1 - 2 \sin \frac{\pi(x+2,5)}{3} = 3 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi(x+2,5)}{3} = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi(x+2,5)}{3} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\pi(x+2,5) = 9\pi + 12k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x + 5 = 9 + 12k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2 + 6k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } f(x) = -1 &\Leftrightarrow 1 - 2 \sin \frac{\pi(x+2,5)}{3} = -1 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi(x+2,5)}{3} = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi(x+2,5)}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\pi(x+2,5) = 3\pi + 12k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x + 5 = 3 + 12k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -1 + 6k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

f)



54. a) • Domínio

$$D_a = \mathbb{R}$$

• Contradomínio

$$-1 \leq \sin \frac{\pi x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 + \sin \frac{\pi x}{2} \leq 2; \text{ portanto, } D'_a = [0, 2].$$

• Zeros

$$a(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \sin \frac{\pi x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi x}{2} = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -1 + 4k, k \in \mathbb{Z}$$

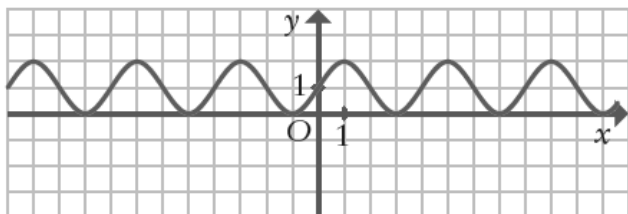
• Minimizantes

Os minimizantes de a são os zeros de a .

• Maximizantes

$$a(x) = 2 \Leftrightarrow 1 + \sin \frac{\pi x}{2} = 2 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1 + 4k, k \in \mathbb{Z}$$

• Gráfico



b) • Domínio

$$D_b = \mathbb{R}$$

• Contradomínio

$$-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \leq 6; \text{ portanto, } D'_b = [-2, 6].$$

• Zeros

$$\begin{aligned} b(x) = 0 &\Leftrightarrow 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{6}x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2 + 12k \vee x = -6 + 12k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

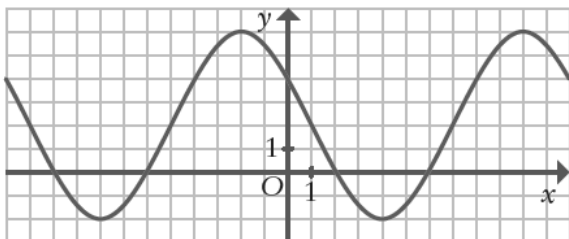
• Minimizantes

$$\begin{aligned} b(x) = -2 &\Leftrightarrow 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 = -2 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 4 + 12k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

• Maximizantes

$$\begin{aligned} b(x) = 6 &\Leftrightarrow 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 = 6 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -2 + 12k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

• Gráfico



c) • Domínio

$$D_c = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 4k, k \in \mathbb{Z}\}$$

• Contradomínio

$$D'_c = \mathbb{R}$$

• Zeros

$$\begin{aligned} c(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2} \approx -0,46 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \approx \frac{(-0,46 - \frac{\pi}{2})4}{\pi} + 4k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \approx -2,6 + 4k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

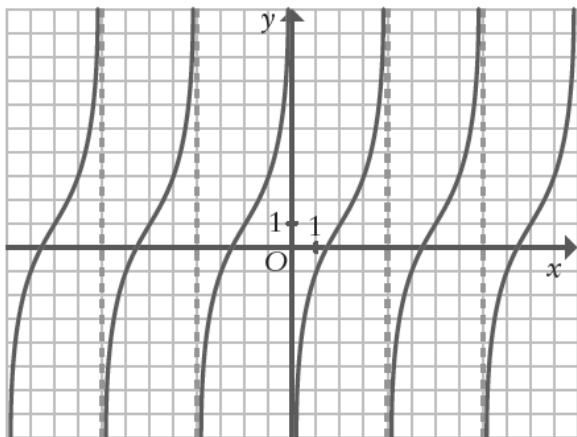
- Assíntotas verticais

Tem-se, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{x \rightarrow 4k^-} 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} x + \frac{\pi}{2} \right) + 1 = 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi^- \right) + 1 = 2 \times (+\infty) + 1 = +\infty \quad \text{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4k^+} 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} x + \frac{\pi}{2} \right) + 1 = 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi^+ \right) + 1 = 2 \times (-\infty) + 1 = -\infty$$

- Gráfico



55. Tem-se, em qualquer dos casos:

- o contradomínio da função é igual ao intervalo $[-a + d, a + d]$;

- o período fundamental é igual a $\frac{2\pi}{b}$;

- qualquer maximizante é da forma $\frac{\frac{\pi}{2} - c + 2k\pi}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$.

a) • $\begin{cases} -a + d = -2 \\ a + d = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ a = 4 \end{cases}$

• $\frac{2\pi}{b} = 5 \Leftrightarrow b = \frac{2\pi}{5}$

• $\frac{\frac{\pi}{2} - c + 2k\pi}{\frac{2\pi}{5}} = 5 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - c + 2k\pi = 2\pi \Leftrightarrow c = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$; portanto, um valor de c é, por exemplo, $-\frac{3\pi}{2}$.

b) • $\begin{cases} -a + d = -3 \\ a + d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ a = 5 \end{cases}$

• $\frac{2\pi}{b} = 20 \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{10}$

• $\frac{\frac{\pi}{2} - c + 2k\pi}{\frac{\pi}{10}} = 5 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - c + 2k\pi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow c = 2k\pi$; portanto, um valor de c é, por exemplo, 0.

c) • $\begin{cases} -a + d = 1 \\ a + d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ a = 2 \end{cases}$

• $\frac{2\pi}{b} = 100 \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{50}$

• $\frac{\frac{\pi}{2} - c + 2k\pi}{\frac{\pi}{50}} = 23 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - c + 2k\pi = \frac{23\pi}{50} \Leftrightarrow c = \frac{\pi}{25} + 2k\pi$; portanto, um valor de c é, por exemplo, $\frac{\pi}{25}$.

56. a) O período fundamental é igual a 12.

b) $D'_f = [-6, 4]$

c) Tem-se:

- o contradomínio da função é igual ao intervalo $[-a + d, a + d]$;
- o período fundamental é igual a $\frac{2\pi}{b}$;
- qualquer maximizante é da forma $\frac{-c+2k\pi}{b}, k \in \mathbb{Z}$; um maximizante de f é 5;
- $\begin{cases} -a + d = -6 \\ a + d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -1 \\ a = 5 \end{cases}$
- $\frac{2\pi}{b} = 12 \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{6}$
- $\frac{-c+2k\pi}{\frac{\pi}{6}} = 5 \Leftrightarrow -c + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow c = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; portanto, um valor de c é, por exemplo, $\frac{7\pi}{6}$.

Então, uma expressão analítica para a função f é $5 \cos\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{7\pi}{6}\right) - 1$.

Pág. 41

57. • O período fundamental é 6, pelo que se tem $\frac{\pi}{b} = 6$; portanto, $b = \frac{\pi}{6}$.

• Tem-se, dado o domínio de f , $bx + c = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{\pi}{6} \times (6k) + c = \frac{\pi}{2} + n\pi, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k\pi + c = \frac{\pi}{2} + n\pi, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow c = \frac{\pi}{2} + (n - k)\pi, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}; \text{ portanto, um valor de } c \text{ é, por exemplo, } \frac{\pi}{2}.$$

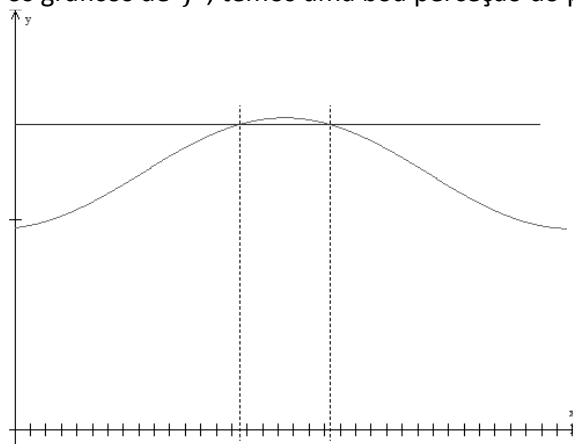
$$\bullet \begin{cases} f(3) = 2 \\ f(1,5) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + d = 2 \\ a \operatorname{tg}\left(\frac{1,5\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \operatorname{tg} \pi + d = 2 \\ a \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} + d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ -a + 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

Portanto, tem-se $f(x) = -2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$.

58. a) $f(44) = 12,2 + 2,64 \operatorname{sen}(0,017 \times 44 + 4,893) = 10,61878$

Então, o sol pôs-se às $7,5 + 10,61878 = 18,11878$, ou seja, às 18 horas e 7 minutos.

b) Esboçando, sobrepostos, os gráficos de f , temos uma boa percepção do problema proposto:



Tem-se:

$$f(n) = 14,5 \Leftrightarrow 12,2 + 2,64 \operatorname{sen}(0,017n + 4,893) = 14,5 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(0,017n + 4,893) = \frac{2,3}{2,64}$$

Portanto, $\operatorname{sen}(0,017n + 4,893) \approx 0,87$.

Ora, $\arcsen 0,87 \approx 1,055$.

Então:

$$0,017n + 4,893 = 1,055 + 2k\pi \vee 0,017n + 4,893 = \pi - 1,055 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,017n = -3,838 + 2k\pi \vee 0,017n = \pi - 5,948 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-3,838+2k\pi}{0,017} \vee n = \frac{\pi-5,948+2k\pi}{0,017}, k \in \mathbb{Z}$$

As duas soluções procuradas são as que se obtêm para $k = 1$, ou seja,

$n \approx 143,83$ e $n \approx 204,52$, pelo que o primeiro dia em que $f(n) > 14,5$ é o 144.º dia do ano e o último é o 204.º.

Portanto, tal acontece durante 61 dias.

59. Designemos por h a função definida por $h(t) = a \cos(bt + c) + d$, $a > 0$, $b > 0$ e $c \in [0, 2\pi[$.

Tem-se, de acordo com o enunciado, $D'_h = [4,3; 7,9]$, o período fundamental é 2π ,

$h(5) = 4,3$ e $h(11) = 7,9$.

$$\text{a) } \bullet \begin{cases} d - a = 4,3 \\ d + a = 7,9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2d = 12,2 \\ d + a = 7,9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 6,1 \\ a = 1,8 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{2\pi}{b} = 12 \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{6}$$

$$\bullet h(11) = 7,9 \Leftrightarrow 1,8 \cos\left(\frac{\pi}{6} \times 11 + c\right) + 6,1 = 7,9 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{11\pi}{6} + c\right) = 1; \text{ portanto, } c = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{b) } h(t) = 6 \Leftrightarrow 1,8 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right) + 6,1 = 6 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{18}$$

$$\text{Portanto, } \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right) \approx -0,056.$$

$$\text{Ora, } \arccos(-0,056) \approx 1,627.$$

Então:

$$\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} = 1,627 + 2k\pi \vee \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} = -1,627 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{1,627 - \frac{\pi}{6} + 2k\pi}{\frac{\pi}{6}} \vee t = \frac{-1,627 - \frac{\pi}{6} + 2k\pi}{\frac{\pi}{6}}, k \in \mathbb{Z}$$

A solução procurada, o menor valor de t que é maior do que 7, é $\frac{-1,627 - \frac{\pi}{6} + 2\pi}{\frac{\pi}{6}}$, ou seja,

aproximadamente 7,893.

Portanto, precisou de esperar, aproximadamente, 0,893 horas, ou seja, 54 minutos.

Pág. 42

$$\text{60. a) } x(0) = 8 \cos\left(\frac{\pi}{6} \times 0 + \frac{2\pi}{3}\right) = 8 \cos\frac{2\pi}{3} = -4$$

b) O menor valor que $\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{2\pi}{3}\right)$ pode tomar é -1 , pelo que a menor abcissa que o ponto P pode ter é -8 .

O maior valor que $\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{2\pi}{3}\right)$ pode tomar é 1 , pelo que a maior abcissa que o ponto P pode ter é 8 .

$$\text{c) Amplitude: } 8; \text{ pulsação: } \frac{\pi}{6}; \text{ fase: } \frac{\pi}{6}; \text{ período: } \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12; \text{ frequência: } \frac{1}{12}$$

61. a)

$$\begin{aligned}
& M \operatorname{sen}(Bt) + N \cos(Bt) = \\
& = \frac{\sqrt{M^2 + N^2}}{\sqrt{M^2 + N^2}} [M \operatorname{sen}(Bt) + N \cos(Bt)] = \\
& = \sqrt{M^2 + N^2} \left[\frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}} \operatorname{sen}(Bt) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}} \cos(Bt) \right] = \\
& = \sqrt{M^2 + N^2} [-\operatorname{sen}(C) \operatorname{sen}(Bt) + \\
& \quad + \cos(C) \cos(Bt)] = \\
& = \sqrt{M^2 + N^2} \cos(Bt + C)
\end{aligned}$$

b₁) Tem-se:

- $M = 3$, $N = 3$, $w = 2$ e, também, $A = \sqrt{18}$.
 - $\cos \phi = \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen} \phi = -\frac{3}{\sqrt{18}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, pelo que $\phi = \frac{7\pi}{4}$.
- Então, $3 \operatorname{sen}(2t) + 3 \cos(2t) = \sqrt{18} \cos\left(2t + \frac{7\pi}{4}\right)$.

b₂) Tem-se:

- $M = 1$, $N = -1$, $w = \pi$ e, também, $A = \sqrt{2}$.
 - $\cos \phi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen} \phi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, pelo que $\phi = \frac{5\pi}{4}$.
- Então, $\operatorname{sen}(\pi t) - \cos(\pi t) = \sqrt{2} \cos\left(\pi t + \frac{5\pi}{4}\right)$.

b₃) Tem-se:

- $M = -2$, $N = -\sqrt{12}$, $w = 3\pi$ e, também, $A = \sqrt{16} = 4$.
 - $\cos \phi = \frac{-\sqrt{12}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen} \phi = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$, pelo que $\phi = \frac{5\pi}{6}$.
- Então, $-2 \operatorname{sen}(3\pi t) - \sqrt{12} \cos(3\pi t) = 4 \cos\left(3\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)$.

b₄) Tem-se:

- $M = -\sqrt{48}$, $N = 4$, $w = 1$ e, também, $A = \sqrt{64} = 8$.
 - $\cos \phi = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen} \phi = -\frac{-\sqrt{48}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pelo que $\phi = \frac{\pi}{3}$.
- Então, $-\sqrt{48} \operatorname{sen} t + 4 \cos t = 8 \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$.

b₅) Tem-se:

- $M = 3$, $N = 4$, $w = 8$ e, também, $A = \sqrt{25} = 5$.
 - $\cos \phi = \frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen} \phi = -\frac{3}{5}$, pelo que $\phi \approx -0,64 + 2\pi \approx 5,64$.
- Então, $3 \operatorname{sen}(8t) + 4 \cos(8t) = 5 \cos(8t + 5,64)$.

62. a) $\frac{k}{m} = \frac{36}{4} = 9$, pelo que se tem $x''(t) = -9x(t)$.

b) Tem-se:

- $x(t) = A \cos(\sqrt{\alpha}t + b)$ e $\alpha = \frac{k}{m} = \frac{45}{5} = 9$, pelo que $x(t) = A \cos(3t + b)$.

- $x(0) = -4$

- $x'(0) = -9$

Ora, $x'(t) = [A \cos(3t + b)]' = A \times 3[-\sin(3t + b)] = -3A \sin(3t + b)$

Então, tem-se

$$\begin{cases} x(0) = -4 \\ x'(0) = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cos b = -4 \\ -3A \sin b = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cos b = -4 \\ A \sin b = 3 \end{cases} \Rightarrow A^2 \cos^2 b + A^2 \sin^2 b = 25 \Rightarrow \\ \Rightarrow A^2(\cos^2 b + \sin^2 b) = 25 \Rightarrow A^2 = 25 \underset{(A>0)}{\Rightarrow} A = 5; \text{ portanto, } x(t) = 5 \cos(3t + b).$$

Determinemos, agora, o valor de b :

Tem-se $\begin{cases} \cos b = -\frac{4}{5} \\ \sin b = \frac{3}{5} \end{cases}$, pelo que $b \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$. Portanto, $b \approx 2,5$.

Então, $x(t) = 5 \cos(3t + 2,5)$.

+Exercícios Propostos

Pág. 43

63. (A)

Tem-se: $\overline{OC} = -\operatorname{tg} \alpha$ e $\overline{OA} = 1$.

Portanto, o perímetro é dado por $-2 \operatorname{tg} \alpha + 2 = 2(1 - \operatorname{tg} \alpha)$.

64. (C)

Seja y_P a ordenada do ponto P .

Tem-se: $y_P = \operatorname{sen} \alpha$, $\overline{RQ} = -\cos \alpha$ e $\overline{OR} = \operatorname{sen} \alpha$.

Portanto,

$$\text{Área} = \frac{\overline{RQ} \times (\overline{OR} + y_P)}{2} = \frac{-\cos \alpha \times (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha)}{2} = \frac{-2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}{2} = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\alpha) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\alpha + \pi)$$

65. (C)

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{10}\right) \cos\left(\frac{x}{10}\right) = \frac{1}{2} \left[2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{10}\right) \cos\left(\frac{x}{10}\right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{x}{10}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{5}\right)$$

66. (A)

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - [\cos(50x) - \operatorname{sen}(50x)]^2 = 1 - [\cos^2(50x) - 2 \cos(50x) \operatorname{sen}(50x) + \operatorname{sen}^2(50x)] = \\ &= 1 - [1 - 2 \cos(50x) \operatorname{sen}(50x)] = 2 \cos(50x) \operatorname{sen}(50x) = \operatorname{sen}(100x) \end{aligned}$$

Pág. 44

67. (B)

$$\lim \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - e^{-n}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - e^{-\infty}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 0^+\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)^- = +\infty$$

68. (A)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_1(x+2)}{\operatorname{sen} x} = \frac{\log_1 2}{\operatorname{sen} 0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

69. (C)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{sen} e^x}{e^{2x} + 5e^x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{y=e^x}{\rightleftharpoons}} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y^2 + 5y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y(y+5)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[\frac{\operatorname{sen} y}{y} \times \frac{1}{y+5} \right] = 1 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

70. (A)

$$\text{Tem-se } -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{e^x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{e^x} \leq \frac{1}{e^x}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, pode concluir-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x} = 0$.

71. (D)

Dadas as sucessões (a_n) e (b_n) definidas por $a_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{N}$ e $b_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{N}$, tem-se $\lim(a_n) = +\infty$ e $\lim(b_n) = +\infty$, mas $\lim \frac{\sin a_n}{e^{-a_n}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ e $\lim \frac{\sin b_n}{e^{-b_n}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$, pelo que não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{e^{-x}} = 0$.

72. (C)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(ax+a)}{bx+b} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{y=ax+a}{\rightleftharpoons}} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{b\left(\frac{y-a}{a}\right)+b} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\frac{b}{a}y - b + b} = \frac{a}{b} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$$

73. (D)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{kx} = \frac{1}{k} \lim_{2x \rightarrow 0^-} \left(2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x} \right) = \frac{2}{k} \lim_{2x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = \frac{2}{k} \times 1 = \frac{2}{k}$$

$$\text{Ora, } \frac{2}{k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 4.$$

Pág. 45**74. (B)**

Tem-se, para $x \neq a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(a-x)}{x-a} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{y=a-x}{\rightleftharpoons}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{-y} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = -1$$

Portanto, $k = -1$.

75. (B)

Tem-se, para $x \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\rightleftharpoons} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -1$$

Portanto, $a + 2 = -1$, pelo que $a = -3$.

76. (B)

$$\text{Tem-se } f'(x) = \left(\frac{1}{\sin x} \right)' = \frac{1' \times \sin x - 1 \times (\sin x)'}{\sin^2 x} = - \frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} = - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\text{Portanto, o declive da reta é igual a } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}} = -2\sqrt{3}.$$

77. (B)

O limite enunciado é igual a $f' \left(\frac{\pi}{4} \right)$.

$$\text{Tem-se } f'(x) = \left(\frac{x}{\operatorname{tg} x} \right)' = \frac{x' \times \operatorname{tg} x - x \times (\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x - \frac{x}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$\text{Portanto, } f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) - \frac{\left(\frac{\pi}{4} \right)}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \right)}}{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1 - \frac{\frac{\pi}{4}}{1}}{1} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

78. (C)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(0)}{h} = f'(0)$$

$$\text{Tem-se } f'(x) = [\operatorname{sen}(2x)]' = 2 \cos(2x).$$

$$\text{Portanto, } f'(0) = 2 \cos 0 = 2.$$

79. (D)

Analisemos, uma a uma, as opções apresentadas.

- Opção (A): $h'(x) = [\operatorname{sen} x + \cos x]' = \cos x - \operatorname{sen} x$

$$\text{Nesta opção, tem-se, } \forall x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[, h'(x) < 0.$$

- Opção (B): $h'(x) = [\operatorname{sen} x - \cos x]' = \cos x + \operatorname{sen} x$

$$\text{Nesta opção, tem-se, por exemplo, } h' \left(\frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} < 0.$$

- Opção (C): $h'(x) = [\cos x - \operatorname{sen} x]' = -\operatorname{sen} x - \cos x$

$$\text{Nesta opção, tem-se, por exemplo, } h' \left(\frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) < 0.$$

- Opção (D): $h'(x) = [-\operatorname{sen} x - \cos x]' = -\cos x + \operatorname{sen} x$

$$\text{Nesta opção, tem-se, } \forall x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[, h'(x) > 0.$$

Pág. 46**80. (D)**

$$f'(x) = [\ln(\operatorname{sen} x)]' = \frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

81. (D)

Tem-se:

- $f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, pelo que $f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{1} = 1$.

- $f \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1$

$$\text{Portanto, uma equação da reta é } y - 1 = 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right), \text{ ou seja, } y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1.$$

Ora, dos pontos apresentados, somente o da opção (D) pertence à reta.

82. (D)

Tem-se:

- $D'_f = [-1, 1]$, o que exclui a opção (A).

- $f'(x) = \cos x$, pelo que $-1 \leq f'(x) \leq 1$, o que exclui as opções (B) e (C).

83. (A)

$$f'(x) = [\sin(2x)]' = 2 \cos(2x)$$

$$f''(x) = [2 \cos(2x)]' = -4 \sin(2x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4 \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Para todos os valores de k tais que $k \in \{1, 2, \dots, 29\}$, os correspondentes valores de x são zeros de f'' pertencentes a $]0, 15\pi[$ e, nesses pontos, f'' troca de sinal. Portanto, nesse intervalo, o gráfico de f tem 29 pontos de inflexão.

84. (D)

$$f\left(\frac{2x+\pi}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right), \text{ pelo que o período fundamental é igual a } \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi.$$

85. (D)

$$f(x) = \frac{2 - \sin(50x) \cos(50x)}{\sqrt{2}} = \frac{2 - \frac{1}{2} \sin(100x)}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(100x) = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(100x)$$

$$\text{Portanto, } D'_f = \left[\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right] = \left[\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{5\sqrt{2}}{4} \right].$$

86. (D)

Tem-se

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Portanto, tem-se, para } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1, \text{ ou seja, } D'_g = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right].$$

Pág. 47**87. (A)**

$$\text{Tem-se, para } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ e, portanto, } 0 \leq \cos^2 x \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Então, } D'_h = \left[0, \frac{1}{2} \right].$$

88. (B)

A amplitude é 2 ; isto exclui as opções (C) e (D). A pulsação é π ; isto exclui a opção (A).

89. (B)

Como a amplitude é $\frac{1}{2}$, as opções (A) e (D) estão excluídas.

$$\text{Tem-se } \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi t + \pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right), \text{ pelo que, no caso da opção (B), se tem que a fase é } \frac{\pi}{2} \text{ e que a}$$

$$\text{frequência é igual a } \frac{1}{\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{1}{4}.$$

90. (A)

Se a pulsação é igual a π , o período é igual a $\frac{2\pi}{\pi}$, ou seja 2, pelo que a frequência é igual a $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
 91. \text{ a) } \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos x - \frac{\sin x}{2} &= -1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos x - \frac{1}{2} \sin x = -1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos x - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin x &= -1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \cos x - \sin \frac{x}{2} + 2 &= 0 \Leftrightarrow \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -2 \sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} + 3 &= 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow \underset{y=\sin \frac{x}{2}}{2y^2 + y - 3 = 0} \Leftrightarrow \\
 y = -\frac{3}{2} \vee y = 1 &\Leftrightarrow \underbrace{\sin \frac{x}{2} = -\frac{3}{2}}_{y=\sin \frac{x}{2} \text{ eq. impossível}} \vee \sin \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x &= \pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \sin(4x) &= 2 \sin(2x) \Leftrightarrow 2 \sin(2x) \cos(2x) - 2 \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2 \sin(2x) [\cos(2x) - 1] &= 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \vee \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = k\pi \vee 2x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 92. \sin(\pi + x) \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3x) \cos x &= \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\sin x \cos(3x) + \sin(3x) \cos x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin(3x - x) &= \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{3} \\
 \text{Por outro lado, } \sin^2(2x) + \cos^2(2x) &= 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2(2x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(2x) = \frac{8}{9}. \\
 \text{Logo, } \cos(4x) &= \cos^2(2x) - \sin^2(2x) = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 93. \text{ a) } D_f &= \left\{x \in \mathbb{R}: \operatorname{tg} x \neq 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq k\frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \\
 &= \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}
 \end{aligned}$$

b)

Para $x \in D_f$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \\
 &= \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{2 \sin x \cos x} = \frac{2}{\sin(2x)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } |f(x)| < 4 &\Leftrightarrow \left| \frac{2}{\sin(2x)} \right| < 4 \Leftrightarrow \frac{2}{|\sin(2x)|} < 4 \Leftrightarrow |\sin(2x)| > \frac{1}{2} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \pi \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow |\sin(2x)| > \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \sin(2x) > \frac{1}{2} \vee \sin(2x) < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi \vee \frac{7\pi}{12} + k\pi < x < \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Para $k = 0 \rightarrow \frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \vee \frac{7\pi}{12} < x < \frac{11\pi}{12}$; ambos os intervalos estão contidos em $[0, \pi]$.

Para qualquer outro valor de k , nenhum dos correspondentes intervalos tem elementos pertencentes a $[0, \pi]$. Portanto, o conjunto-solução é $\left] \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right[\cup \left] \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right[$.

94. a)

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\overline{PR} \times \overline{RQ}}{2} = \frac{(1 - \cos \alpha)(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sen} \alpha)}{2} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2} = \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{4} = \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen}(2\alpha)}{4} \end{aligned}$$

b) $\operatorname{tg}(2x) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$

| Exercício 22.a)

$$\Leftrightarrow \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 4 - 4 \operatorname{tg}^2 x = 6 \operatorname{tg} x \Leftrightarrow 2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -2 \vee \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$$

Portanto, como $x \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$, $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$.

Tem-se:

$$\bullet 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \vee \cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Portanto, como $x \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$, $\cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$$\bullet \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x + \frac{4}{5} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \vee \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Portanto, como $x \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$, $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Então, tem-se:

$$f(x) = \frac{2 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)}{4} = \frac{2 \times \frac{1}{2} - 4 \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 2 \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{4} = \frac{9 + 4\sqrt{5}}{20}$$

95.a)

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2} \overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \overline{AC} = \overline{AB} \times \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 2 \overline{AB} \times \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

b) Pode-se considerar o referido polígono decomposto em n triângulos como os da figura, em que

$\overline{AB} = 1$ (por ser igual ao raio da circunferência) e em que $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Assim, tem-se $p_n = n \times \overline{AC} = n \times 2 \overline{AB} \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{2}\right) = n \times 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{2\pi}{n}}{2}\right) = 2n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n}\right)$.

c)

$$\begin{aligned} \lim \left(2n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right) &\stackrel{\infty \times 0}{=} 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \\ &= 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi \times 1 = 2\pi, \end{aligned}$$

pois a sucessão de termo geral $\frac{\pi}{n}$ tende

para 0 e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Este limite é o perímetro do círculo de raio 1, que é o limite da sucessão dos perímetros dos polígonos regulares inscritos numa circunferência de raio 1, quando o número de lados tende para $+\infty$.

96.a)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^2 + x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{y=x+2}{\rightleftharpoons}} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{(y-2)^2 + y - 2 - 2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y^2 - 3y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y(y-3)} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{\sin y}{y} \times \frac{1}{y-3} \right] = 1 \times \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{y=\sin x}{\rightleftharpoons}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\frac{\sin x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \lim_{\sin x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\pi - x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{y=x-\pi}{\rightleftharpoons}} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(y + \pi)}{-y} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} y}{y} = -1$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{y=x-\frac{\pi}{4}}{\rightleftharpoons}} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right)}{4y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos y \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left[\cos y \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin y \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]}{4y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin y}{4y} = \frac{\sqrt{2}}{4} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Pág. 49

97.a) Tem-se:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{e^{4x} - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{y=1-x}{\rightleftharpoons}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})}{(e^{4x} - 1)(1 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{(e^{4x} - 1)(1 + \sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{4x}}{\frac{e^{4x} - 1}{4x} (1 + \sqrt{1-x})} = \frac{\frac{1}{4}}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{4x} - 1}{4x} \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + \sqrt{1-x})} = \frac{\frac{1}{4}}{1 \times (1+1)} = \frac{1}{8}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[1 - \cos(ax)][1 + \cos(ax)]}{x^2[1 + \cos(ax)]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2(ax)}{x^2[1 + \cos(ax)]} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(ax)}{x^2[1 + \cos(ax)]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\sin(ax)}{x} \times \frac{\sin(ax)}{x} \times \frac{1}{1 + \cos(ax)} \right] = a \times a \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Portanto, existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ se e só se $\frac{a^2}{2} = \frac{1}{8}$, ou seja, se e só se $a = -\frac{1}{2}$ ou $a = \frac{1}{2}$.

98. a)

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{\overline{OR} + \overline{PQ}}{2} \times \overline{RQ} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \cos \alpha}{2} \times \sin \alpha = \frac{\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \\ &= \frac{2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{4} = \frac{2 \sin \alpha - \sin(2\alpha)}{4} \end{aligned}$$

b) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin \pi}{4} = \frac{1}{2}$; tal significa que, quando $x = \frac{\pi}{2}$, o ponto P coincide com o ponto A e o quadrilátero $[OPQR]$ é um retângulo de largura igual a $\frac{1}{2}$ e altura igual a 1.

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(\alpha) &= \left(\frac{2 \sin \alpha - \sin(2\alpha)}{4} \right)' = \frac{1}{4} [2 \sin \alpha - \sin(2\alpha)]' = \frac{1}{4} [(2 \sin \alpha)' - (\sin(2\alpha))'] = \\ &= \frac{1}{4} [2 \cos \alpha - 2 \cos(2\alpha)] = \frac{1}{2} [\cos \alpha - \cos(2\alpha)] \\ \frac{1}{2} [\cos \alpha - \cos(2\alpha)] &= 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \cos(2\alpha) \Leftrightarrow \alpha = 2\alpha + 2k\pi \vee \alpha = -2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\alpha &= 2k\pi \vee 3\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \vee \alpha = \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{Portanto, } f'(\alpha) &= 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

α	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(\alpha)$	+	+	0	-	-
$f(\alpha)$		$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	

A área do quadrilátero é máxima para $x = \frac{2\pi}{3}$.

99.a) $f'(x) = [\sin(2x) + x]' = [\sin(2x)]' + x' = 2 \cos(2x) + 1$

$$2 \cos(2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3}$; ambos os valores pertencem a $] -\pi, \pi[$.

Para $k = 1 \rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}$; somente $\frac{2\pi}{3}$ pertence a $] -\pi, \pi[$.

Para $k = -1 \rightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{4\pi}{3}$; somente $-\frac{2\pi}{3}$ pertence a $] -\pi, \pi[$.

Para qualquer outro valor de k , nenhuma das correspondentes soluções pertence ao intervalo $] -\pi, \pi[$.

x	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	máx.	↘	mín.	↗	máx.	↘	mín.	↗

No intervalo $]-\pi, \pi[$:

f é crescente em $]-\pi, -\frac{2\pi}{3}]$, em $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$

e em $[\frac{2\pi}{3}, \pi[$; f é decrescente em

$[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}]$ e em $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$;

$f(-\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}$ e $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$ são

máximos relativos e

$f(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$ e $f(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}$

são mínimos relativos.

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) + x}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(2x)}{x} + 1 \right] = 2 \lim_{2x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \right) + 1 = 3$$

c)

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= \sin(2a) + a + \sin(2b) + b = \\ &= \sin(2a) + \sin(2b) + \pi = \\ &= \sin(2a) + \sin(2(\pi - a)) + \pi = \\ &= \sin(2a) + \sin(2\pi - 2a) + \pi = \\ &= \sin(2a) + \sin(-2a) + \pi = \\ &= \sin(2a) - \sin(2a) + \pi = \pi \end{aligned}$$

d) Tem-se $h(x) = \sin(2x) + x - x = \sin(2x)$, pelo que se pretende determinar $\sin(2\theta)$, sabendo que $\cos(4\theta) = \frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} \text{Ora, } \cos(4\theta) = \frac{1}{5} &\Leftrightarrow \cos^2(2\theta) - \sin^2(2\theta) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2(2\theta) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin^2(2\theta) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin(2\theta) = -\sqrt{\frac{2}{5}} \vee \sin(2\theta) = \sqrt{\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

Portanto, como $2\theta \in [\pi, 2\pi]$, $\sin(2\theta) = -\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Pág. 50

100. a) O preço de colocação da conduta é dado, para cada posição do ponto B , por $15\,000 \times \overline{FB} + 25\,000 \times \overline{BC}$, com $\overline{FB}$ e $\overline{BC}$ em km.

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{FBC}) = -\frac{6}{7} &\Leftrightarrow \cos(\widehat{ABC}) = \frac{6}{7} \Leftrightarrow \sin(\widehat{ABC}) = \sqrt{1 - \frac{36}{49}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin(\widehat{ABC}) = \frac{\sqrt{13}}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{13}}{7} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{14}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{6}{7} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\frac{14}{\sqrt{13}}} = \frac{6}{7} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{14 \times 6}{7\sqrt{13}} = \frac{12}{\sqrt{13}}$, pelo que $\overline{FB} = 4 - \frac{12}{\sqrt{13}}$.

Então, o preço de colocação da conduta é, neste caso, igual a $15\,000 \times \left(4 - \frac{12}{\sqrt{13}}\right) + 25\,000 \times \frac{14}{\sqrt{13}}$, ou seja, aproximadamente, 107 149,52 euros.

b) $x = \arctg\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 4$; a conduta, neste caso, é o segmento de reta $[FC]$.

c) Tem-se $\sin x = \frac{2}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{2}{\sin x}$ e $\operatorname{tg} x = \frac{2}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{2}{\operatorname{tg} x}$, pelo que $\overline{FB} = 4 - \frac{2}{\operatorname{tg} x}$.

Então, o preço de colocação da conduta, em milhares de euros é dado por:

$$15 \overline{FB} + 25 \overline{BC} = 15 \left(4 - \frac{2}{\operatorname{tg} x}\right) + 25 \frac{2}{\sin x} = 60 - \frac{30 \cos x}{\sin x} + \frac{50}{\sin x} = 60 + \frac{50 - 30 \cos x}{\sin x}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left(60 + \frac{50 - 30 \cos x}{\sin x}\right)' &= \left(\frac{50 - 30 \cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(50 - 30 \cos x)' \sin x - (50 - 30 \cos x)(\sin x)'}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{30 \sin x \sin x - (50 - 30 \cos x) \cos x}{\sin^2 x} = \frac{30 \sin^2 x - 50 \cos x + 30 \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{30 - 50 \cos x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\frac{30 - 50 \cos x}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{3}{5}$$

x	$\arctg\left(\frac{1}{2}\right)$		$\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{30 - 50 \cos x}{\sin^2 x}$	—	—	0	+	+
$60 + \frac{50 - 30 \cos x}{\sin x}$		↘	Mín.	↗	

Portanto, o preço de colocação da conduta é mínimo para $\cos x = \frac{3}{5}$.

$$101. f'(x) = (e^{\sin x} - \sin x)' = (\sin x)' e^{\sin x} - \cos x = \cos x e^{\sin x} - \cos x = \cos x (e^{\sin x} - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee e^{\sin x} - 1 = 0 \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = 0 \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2} \vee x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	0	+	0	—	0	+	0	—	0
$f(x)$	1	↗	$e - 1$	↘	1	↗	$\frac{1}{e} + 1$	↘	1

Portanto, $D'_f = [1, e - 1]$.

102.

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 < 0 \text{ e}$$

$$f(0) = 0 - 0 + 1 > 0$$

A função f é contínua em $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ e

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0 < f(0), \text{ portanto, o teorema de}$$

Bolzano-Cauchy permite concluir que a função f tem pelo menos um zero em

$$\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right].$$

$f'(x) = \cos x + 2$; assim, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ e, portanto, a função f é crescente, de onde se conclui que não pode ter mais do que um zero.

Como não pode ter mais do que um zero, conclui-se que tem exatamente um zero que

pertence ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$.

103.a)

$$\begin{aligned} f'(\pi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + h) + \pi + h - 0 - \pi}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin h}{h} + \frac{h}{h} \right) = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

b) Tem-se:

• $f'(x) = (\sin x + x)' = \cos x + 1$, pelo que $f'(2\pi) = \cos(2\pi) + 1 = 2$.

• $f(2\pi) = \sin(2\pi) + 2\pi = 2\pi$

Portanto, uma equação da reta é $y - 2\pi = 2(x - 2\pi)$, pelo que a sua equação reduzida é $y = 2x - 2\pi$.

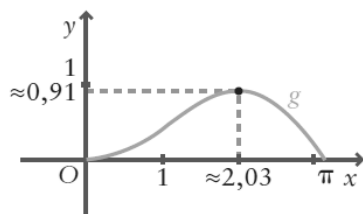
Pág. 51

c)

Seja g a função de domínio $]0, \pi[$,

definida por $g(x) = \frac{x \times \sin x}{2}$.

A função g dá a área do triângulo $[OPQ]$.



O valor de x , arredondado às centésimas, é 2,03.

104. a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0) + g'(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0) + x + 2 \sin x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = g'(0) + 1 + 2 \times 1 = 3 \end{aligned}$$

b) $g''(x) = (x + 2 \sin x)' = 1 + 2 \cos x$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \cos x = 0 \wedge x \in [-\pi, \pi] \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \wedge x \in [-\pi, \pi] \Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}$$

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$g''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$g(x)$			P.I.		P.I.		

Portanto, o gráfico tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ e os pontos de inflexão são os pontos de abscissa $-\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$.

105. a) $f(x) = h(x) \Leftrightarrow \sin(2x) \cos x = \sin x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sin x (2 \cos^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

b) $f(a) = \sin(2a) \cos a = 2 \sin a \cos^2 a$
 Ora, $h\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos a = -\frac{2}{3}$, pelo que
 $\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \Leftrightarrow \sin^2 a = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \sin a = -\frac{\sqrt{5}}{3} \vee \sin a = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Portanto, como $a \in]\pi, 2\pi[$, $\sin a = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Então, $f(a) = 2 \sin a \cos^2 a = 2 \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \times \frac{4}{9} = -\frac{8\sqrt{5}}{27}$.

c) Tem-se:

• $f'(x) = (\sin(2x) \cos x)' = [\sin(2x)]' \cos x + (\cos x)' \sin(2x) =$
 $= 2 \cos(2x) \cos x - \sin x \sin(2x)$, pelo que $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

• $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Portanto, uma equação da reta é $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, pelo que a sua equação reduzida é

$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

106.a)

A função é contínua.

$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = 1 + \frac{1+0}{0^-} = -\infty$ e

$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} f(x) = 1 + \frac{1+0}{0^-} = -\infty$

As retas de equações $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ são as únicas assíntotas verticais.

Não há assíntotas não verticais porque o domínio é um conjunto limitado.

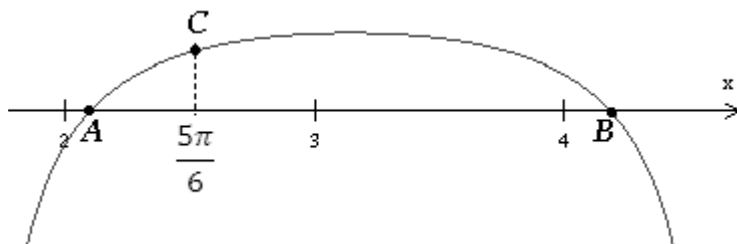
b) $f'(x) = \left(1 + \frac{1+\cos x}{\cos x}\right)' = \left(\frac{1+\cos x}{\cos x}\right)' = \frac{(1+\cos x)' \cos x - (\cos x)'(1+\cos x)}{\cos^2 x} =$
 $= \frac{-\sin x \cos x + \sin x(1+\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{-\sin x \cos x + \sin x + \sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0 \wedge x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\Leftrightarrow \sin x = 0 \wedge \cos x \neq 0 \wedge x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\Leftrightarrow x = \pi$$

x	$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$		$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	

Portanto, o máximo de f é igual a $f(\pi)$, ou seja, 1.

c) Na figura abaixo está representado o triângulo $[ABC]$ referido no enunciado.



Determinemos as abscissas dos pontos A e B :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1 + \cos x}{\cos x} = 0 \wedge x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\Leftrightarrow \frac{1 + 2 \cos x}{\cos x} = 0 \wedge x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3}$$

Então, tem-se:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left[\overline{AB} \times f\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right] = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} \times \left(2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{6\pi - 2\sqrt{3}\pi}{9} \text{ unidades de área}$$

Pág. 52

107.a) Assíntotas verticais:

A função é contínua em $[-2\pi, 0[$, em $]0, 1[$ e em $[1, +\infty[$, pelo que somente as retas de equações $x = 0$ e $x = 1$ poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x + \sin x}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2 + 1 = 3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3x + \frac{x}{\ln x} \right) = 0 + \frac{0^+}{-\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(3x + \frac{x}{\ln x} \right) = 3 + \frac{1}{0^-} = 3 - \infty = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

Não há assíntotas não verticais em $-\infty$ porque o domínio é um conjunto inferiormente limitado.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - xe^{-x} + 2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - e^{-x} + 2 \right) = 0 - 0 + 2 = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - xe^{-x} + 2x - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - xe^{-x}) = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right)} = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = 2x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f .

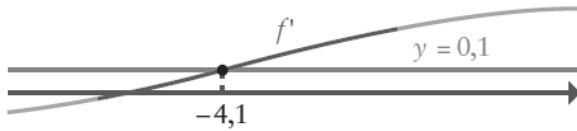
b) Seja c a abscissa desse ponto.

Dado que $10y - x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{10}x$, uma condição que traduz o problema é $f'(c) = \frac{1}{10}$.

$$f'(x) = \left(\frac{2x + \sin x}{x} \right)' = \left(2 + \frac{\sin x}{x} \right)' = \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{(\sin x)'x - x' \sin x}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$\text{Então, } f'(c) = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{c \cos c - \sin c}{c^2} = \frac{1}{10}.$$

Vamos resolver esta equação recorrendo a uma calculadora gráfica:



$$f(-4,066) \approx 1,8$$

A reta tangente ao gráfico da função no ponto $A(-4,1; 1,8)$ é paralela à reta de equação $10y - x = 0$.

108. Tem-se, neste caso:

$$y = x \operatorname{tg}(30^\circ) - \frac{4,9x^2}{4,57^2 \cos^2(30^\circ)} = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{4,9}{20,8849} \times \frac{4}{3}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{19,6}{62,6547}x^2$$

Portanto,

$$y' = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{19,6}{62,6547}x^2 \right)' = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{39,2}{62,6547}x$$

$$y' = 0 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{39,2}{62,6547}x \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} \times 62,6547}{117,6}; \text{ portanto, } x \approx 0,9228.$$

$$y(0,9228) = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 0,9228 - \frac{19,6}{62,6547} \times 0,9228^2 \approx 0,2663982$$

A altura máxima atingida pela rã foi, aproximadamente, 0,266 metros.

109.

$$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi + 2 < 0 \text{ e } f'(0) = 1 > 0$$

A função f' é contínua em $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ e

$$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0 < f'(0), \text{ portanto, o teorema de}$$

Bolzano-Cauchy permite concluir que a função f' tem pelo menos um zero em

$$\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[.$$

$$f''(x) = 2 - \cos x; \text{ assim, } \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) < 0 \text{ e,}$$

portanto, a função f' é decrescente, de onde se conclui que não pode ter mais do que um zero.

Como não pode ter mais do que um zero, conclui-se que f' tem exatamente um zero que

pertence ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ e que é abscissa do único extremo relativo da função f .

110.a)

A função é contínua em $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ e em $[0, +\infty[$, pelo que somente as retas de equações $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = 0$ poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = -\frac{\infty}{-\frac{\pi}{2}} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -\frac{\pi}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(2e^x - x) = 2e^0 - 0 = 2$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de f .

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - x| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |\ln(2e^x - x) - x| \stackrel{\infty - \infty}{\cong} \lim_{x \rightarrow +\infty} |\ln(2e^x - x) - \ln(e^x)| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \ln \left(\frac{2e^x - x}{e^x} \right) \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \ln \left(2 - \frac{x}{e^x} \right) \right| = \ln(2)$$

Portanto, pode concluir-se que a reta de equação $y = x + \ln(2)$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f em $+\infty$.

c) Tem-se:

$$\bullet f'(x) = \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)' = \frac{(\operatorname{tg} x)' x - x' \operatorname{tg} x}{x^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} x - \operatorname{tg} x}{x^2}, \text{ pelo que } f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{1}{1/2} \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 1}{\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{-\frac{\pi}{2} + 2}{\frac{\pi^2}{16}} = \frac{16 - 8\pi}{\pi^2}$$

$$\bullet f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

Portanto, uma equação da reta é $y - \frac{4}{\pi} = \frac{16 - 8\pi}{\pi^2} \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$, pelo que a sua equação reduzida é

$$y = \frac{16 - 8\pi}{\pi^2} x + \frac{8 - 2\pi}{\pi}.$$

111. a) Assíntotas verticais:

A função é contínua em $]-1, 1[$, pelo que somente as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left[x - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right] = -1 - \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2} \right)^+ = -1 - (-\infty) = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[x - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right] = 1 - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \right)^- = -1 - \infty = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

Não há assíntotas não verticais porque o domínio é um conjunto limitado.

b) • Monotonia e extremos

$$f'(x) = \left[x - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right]' = 1 - \frac{\left(\frac{\pi x}{2} \right)'}{\cos^2 \left(\frac{\pi x}{2} \right)} = 1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos^2 \left(\frac{\pi x}{2} \right)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos^2 \left(\frac{\pi x}{2} \right)} = 0 \wedge x \in]-1, 1[\Leftrightarrow \underbrace{\cos^2 \left(\frac{\pi x}{2} \right) = \frac{\pi}{2}}_{\text{eq.impossível}} \wedge x \in]-1, 1[\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Tem-se:

$$0 \leq \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \geq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\frac{\pi}{2}}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \leq -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f'(x) \leq 1 - \frac{\pi}{2}$$

Portanto, $\forall x \in D_f, f'(x) < 0$, pelo que se pode concluir que f é decrescente. A função não tem extremos.

• Concavidades e pontos de inflexão

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right]' = -\left[\frac{\frac{\pi}{2}}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right]' = -\frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right]' = -\frac{\pi}{2} \times \frac{-(\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right))'}{\cos^4\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left[-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \times \frac{\pi}{2}\right]}{\cos^4\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = -\frac{\pi}{2} \times \frac{2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \times \frac{\pi}{2}}{\cos^4\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = -\frac{\pi}{2} \times \frac{\sin(\pi x) \times \frac{\pi}{2}}{\cos^4\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = -\frac{\pi^2 \sin(\pi x)}{4 \cos^4\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi^2 \sin(\pi x)}{4 \cos^4\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = 0 \wedge x \in]-1, 1[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\pi x) = 0 \wedge \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \neq 0 \wedge x \in]-1, 1[\Leftrightarrow x = 0$$

x	-1		0		1
$f''(x)$		+	0	-	
$f(x)$	n.d.		P.I.		n.d.

Portanto,

o gráfico tem a concavidade voltada para cima em $]-1, 0]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[0, 1[$; o ponto de coordenadas $(0, 0)$ é ponto de inflexão.

112.a) Assíntotas verticais:

A função é contínua pelo que somente as retas de equações $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \pi$ poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de f .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{e^{\sin(2x)} - 1} = \frac{4}{e^{0^+} - 1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{4}{e^{\sin(2x)} - 1} = \frac{4}{e^{0^+} - 1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{4}{e^{\sin(2x)} - 1} = \frac{4}{e^{0^-} - 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = \frac{\pi}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{4}{e^{\sin(2x)} - 1} = \frac{4}{e^{0^-} - 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = \pi$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

Não há assíntotas não verticais porque o domínio é um conjunto limitado.

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \left(\frac{4}{e^{\sin(2x)} - 1} \right)' = -\frac{4(e^{\sin(2x)} - 1)'}{(e^{\sin(2x)} - 1)^2} = -\frac{4e^{\sin(2x)}(\sin(2x))'}{(e^{\sin(2x)} - 1)^2} = -\frac{4e^{\sin(2x)}[2\cos(2x)]}{(e^{\sin(2x)} - 1)^2} = \\ &= -\frac{8\cos(2x)e^{\sin(2x)}}{(e^{\sin(2x)} - 1)^2} \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{8\cos(2x)e^{\sin(2x)}}{(e^{\sin(2x)} - 1)^2} = 0 \wedge x \in]0, \pi[\setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \wedge \sin(2x) \neq 0 \wedge x \in]0, \pi[\setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$	π
$f'(x)$		0	+		+	0	-
$f(x)$		mín.	↗	n.d.	↗	máx.	↘

A função é decrescente em $]0, \frac{\pi}{4}]$ e em $[\frac{3\pi}{4}, \pi[$ e é crescente em $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ e em $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$.

Tem-se:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{e^{-1}} \text{ é mínimo relativo de } f \text{ e } f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{4}{e^{-1}-1} \text{ é máximo relativo de } f.$$

Do que foi visto anteriormente, pode concluir-se que $D'_f =]-\infty, \frac{4}{e^{-1}-1}] \cup [\frac{4}{e^{-1}}, +\infty[$.

113.a) Tem-se, para qualquer $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \sin(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \\ &= \sin x + \cos x = f(x) \end{aligned}$$

b) Seja h a restrição de f ao intervalo $[0, 2\pi]$.

$$h'(x) = (\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4}$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$	2π
$h'(x)$		0	-	0	+
$h(x)$		máx.	↘	mín.	↗

f é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

e em $\left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ e é decrescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$;

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \text{ é máximo absoluto e}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \text{ é mínimo absoluto da}$$

restrição de f ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Dado que 2π é período da função f ,
o seu contradomínio é $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

$$\text{c) } m_r = f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

Portanto, pretende-se determinar $a \in [-\pi, 0[$ tal que $f'(a) = -\frac{1}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$f'(a) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos a - \sin a = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos a - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos a - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + a = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{4} + a = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \vee a = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, como $a \in [-\pi, 0[$, $a = -\frac{7\pi}{12}$.

$$\text{d) } f''(x) = (\cos x - \sin x)' = -\sin x - \cos x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow -(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Portanto, os zeros de f'' coincidem com os zeros de f .

Ora,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como f'' muda de sinal nestes valores, eles são as abcissas dos pontos de inflexão.

114. • Função f

$$D_f = \mathbb{R}$$

A função é contínua.

A função é periódica com período fundamental igual a 2π , pelo que vamos estudar o gráfico de f , por exemplo, em $[0, 2\pi]$.

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(2+\cos x) - (2+\cos x)' \sin x}{(2+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x (2+\cos x) - (-\sin x) \sin x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2+\cos x)^2} = \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3}$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	máx.	$\searrow$	mín.	$\nearrow$	

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ é máximo}$$

$$\text{absoluto e } f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ é mínimo absoluto.}$$

Portanto, pode concluir-se que $D'_f = \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

• Função g

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

A função é contínua.

A função é periódica com período fundamental igual a 4π , pelo que vamos estudar o gráfico de g , por exemplo, em $]0, 4\pi[\setminus \{2\pi\}$.

Assíntotas verticais:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow (2\pi)^-} \frac{5}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow (2\pi)^+} \frac{5}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 2\pi$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow (4\pi)^-} \frac{5}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 4\pi$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

Monotonia

$$g'(x) = \left(\frac{5}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)' = -\frac{5\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)'}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{\frac{5}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\frac{5}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \wedge \sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0 \rightarrow x = \pi \in]0, 4\pi[\setminus \{2\pi\}$

Para $k = 1 \rightarrow x = 3\pi$ e $3\pi \in]0, 4\pi[\setminus \{2\pi\}$

Para qualquer outro valor de k , nenhuma das correspondentes soluções pertence ao intervalo $]0, 4\pi[\setminus \{2\pi\}$.

x	0		π		2π		3π		4π
$g'(x)$		-	0	+		+	0	-	
$g(x)$	n.d.	$\searrow$	mín.	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$	n.d.

$g(\pi) = 5$ é mínimo relativo e $g(3\pi) = -5$ é máximo relativo.

Portanto, pode concluir-se que $D'_g =]-\infty, -5] \cup [5, +\infty[$.

Pág. 54

115. As funções têm igual domínio, contradomínio e período fundamental. Também atingem os extremos nos mesmos pontos, mas, no caso do gráfico A, o mínimo é atingido em pontos em que não existe derivada e, no caso do gráfico B, o mínimo é atingido em pontos em que a derivada é 0. O gráfico A corresponde à função g e o gráfico B corresponde à função f .

$$\mathbf{116. a)} h'(x) = \left(e^{\frac{1}{4\cos x}} \right)' = \left(\frac{1}{4\cos x} \right)' e^{\frac{1}{4\cos x}} = \frac{-4(-\sin x)}{16\cos^2 x} = \frac{\sin x}{4\cos^2 x}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{4\cos^2 x} = 0 \wedge x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\Leftrightarrow \sin x = 0 \wedge \cos x \neq 0 \wedge x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\Leftrightarrow x = \pi$$

x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$h'(x)$	+	0	-
h	$\nearrow$	máx.	$\searrow$

Portanto, o máximo de h é igual a $h(\pi)$, ou seja, $e^{\frac{1}{4 \cos \pi}} = e^{-\frac{1}{4}}$.

b) Assíntotas verticais:

A função é contínua em $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$, pelo que somente as retas de equações $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de h .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} e^{\frac{1}{4 \cos x}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $x = \frac{\pi}{2}$ não é assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} e^{\frac{1}{4 \cos x}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $x = \frac{3\pi}{2}$ não é assíntota vertical ao gráfico de h .

Não existem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

Não há assíntotas não verticais porque o domínio é um conjunto limitado.

c) De acordo com os resultados obtidos nas alíneas anteriores, pode concluir-se que $D'_h = \left] 0, e^{-\frac{1}{4}} \right]$.

$$\text{d) } h(x) \leq \frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{4 \cos x}} \leq \frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{4 \cos x}} \leq e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{4 \cos x} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2 \leq 4 \cos x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos x < 0$$

$$\text{Ora, } \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq \cos x < 0 \\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2} \right[$$

117.a) Tem-se $\sin 1 = \frac{h}{10}$, pelo que $h \approx 8,4147$ e $\cos 1 = \frac{\overline{ED}}{10}$, pelo que $\overline{ED} \approx 5,4030$.

Portanto, $A(1) = \frac{(10+2 \times 5,4030)+10}{2} \times 8,4147 \approx 129,61 \text{ m}^2$.

b) Tem-se $\overline{ED} = 10 \cos \alpha$ e $h = 10 \sin \alpha$ e, portanto, vem:

$$A(\alpha) = \frac{(10+2 \times 10 \cos \alpha)+10}{2} \times 10 \sin \alpha =$$

$$= (10+10 \cos \alpha) \times 10 \sin \alpha =$$

$$= 100 \sin \alpha + 50 \times 2 \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= 100 \sin \alpha + 50 \sin(2\alpha)$$

$$A'(\alpha) = [100 \sin \alpha + 50 \sin(2\alpha)]' = (100 \sin \alpha)' + [50 \sin(2\alpha)]' = 100 \cos \alpha + 100 \cos(2\alpha) =$$

$$= 100[\cos \alpha + \cos(2\alpha)]$$

$$A'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 100[\cos \alpha + \cos(2\alpha)] = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = -\cos(2\alpha) \Leftrightarrow \cos \alpha = \cos(\pi - 2\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \pi - 2\alpha + 2k\pi \vee \alpha = -\pi + 2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha = \pi + 2k\pi \vee -\alpha = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \vee \alpha = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, como $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

α	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$A'(\alpha)$	+	0	-
A	$\nearrow$	máx.	$\searrow$

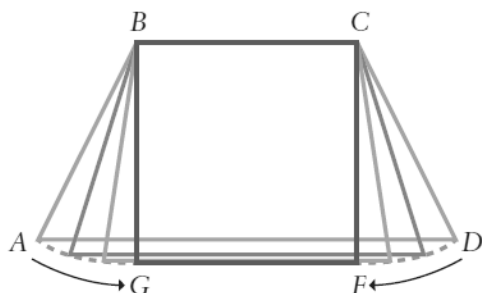
Portanto, a área é máxima para $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

c)

$$\lim_{\alpha \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)} [100 \sin \alpha + 50 \sin(2\alpha)] = 100 \times 1 + 50 \times 0 = 100$$

Interpretação geométrica:

Quando α tende para $\frac{\pi}{2}$, o ponto D desloca-se para F e o ponto A desloca-se para G . Portanto, o trapézio tende para o quadrado $[GBCF]$, que é um quadrado de área 100 porque tem lado 10.



d)

A função A é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{5}\right]$,

$$A\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 106 \text{ e } A\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 93.$$

Dado que $A\left(\frac{\pi}{6}\right) < 100 < A\left(\frac{\pi}{5}\right)$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que

$$\exists \alpha \in \left]\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}\right[: A(\alpha) = 100.$$

Pág. 55

118.a)

Este limite é $g'(\pi) = 2$.

b) $g''(x) = [2 - \sin x]' = -\cos x$

Para $x \in [0, 2\pi]$, tem-se:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$g''(x)$	—	—	0	+	0	—	—
g			P.l.		n.d.		

Portanto, o gráfico tem a concavidade voltada para cima em $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$, tem a concavidade voltada para baixo em $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ e em $\left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[$ e os pontos de abscissas $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ são pontos de inflexão do gráfico.

c)

A afirmação traduz que g é crescente em $\mathbb{R}$,

o que é verdade, pois $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$

(recorda que $\sin x \in [-1, 1]$).

d)

Como o declive da reta tangente ao gráfico

de g num ponto é o valor da derivada na

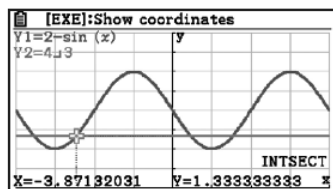
abscissa desse ponto, vamos representar a

função g' e a reta $y = \frac{4}{3}$.

A resposta é a abscissa do ponto em que os

gráficos se interseitam e que tem maior

abscissa negativa: $x \approx -3,9$.



119.a)

Assíntotas verticais:

A função é contínua em $]-\pi, \pi[$, pelo que somente as retas de equações $x = -\pi$ e $x = \pi$ poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de f .

- $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} \ln(\cos x + 1) = \ln 0^+ = -\infty$

Portanto, a reta de equação $x = -\pi$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

- $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \ln(\cos x + 1) = \ln 0^+ = -\infty$

Portanto, a reta de equação $x = \pi$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

Não há assíntotas não verticais porque o domínio é um conjunto limitado.

$$\text{b) } f'(x) = [\ln(\cos x + 1)]' = \frac{(\cos x + 1)'}{\cos x + 1} = -\frac{\sin x}{\cos x + 1}$$

Para $x \in]-\pi, \pi[$, tem-se:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\sin x}{\cos x + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\pi$	0	π
$-\sin x$	+	0	-
$\cos x + 1$	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-
f	$\nearrow$	máx.	$\searrow$

O máximo de f é igual a $f(0) = \ln(2)$.

Portanto, de acordo com os resultados anteriores, pode concluir-se que $D'_f =]-\infty, \ln(2)]$.

$$\begin{aligned} \text{c) } f''(x) &= \left[-\frac{\sin x}{\cos x + 1} \right]' = -\frac{(\sin x)'(\cos x + 1) - \sin x(\cos x + 1)'}{(\cos x + 1)^2} = -\frac{\cos x(\cos x + 1) - \sin x(-\sin x)}{(\cos x + 1)^2} = \\ &= -\frac{\cos^2 x + \cos x + \sin^2 x}{(\cos x + 1)^2} = -\frac{1 + \cos x}{(\cos x + 1)^2} = -\frac{1}{\cos x + 1} \end{aligned}$$

f'' não tem zeros; como a função é duas vezes derivável no domínio, não há pontos de inflexão.

120.a) A função é contínua por ser a soma de duas funções contínuas.

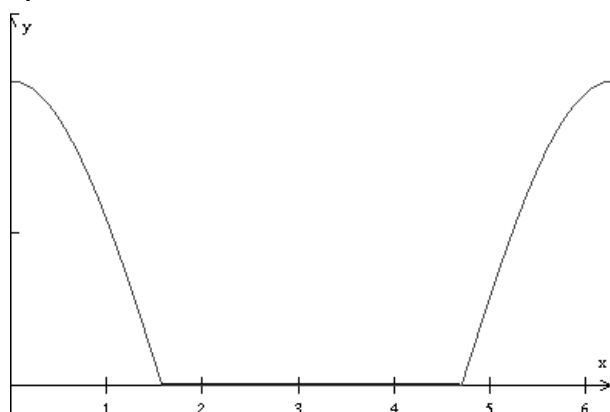
$$\text{b) Tem-se } g(x) = \begin{cases} \cos x + \cos x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ -\cos x + \cos x & \text{se } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}, \text{ ou seja,}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 \cos x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ 0 & \text{se } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

c) g é positiva e crescente no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

$$\text{d) } D'_g = [0, 2]$$

e)



121.a) Tem-se:

$$\overline{AP} = 1 - \cos \alpha \text{ e } b = \sin \alpha$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{(1 - \cos \alpha) \times \sin \alpha}{2} = \\ &= \frac{\sin \alpha}{2} - \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{2} = \\ &= \frac{\sin \alpha}{2} - \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha}{4} = \frac{\sin \alpha}{2} - \frac{\sin(2\alpha)}{4} \end{aligned}$$

b) Seja S a função definida por $S(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{2} - \frac{\sin(2\alpha)}{4}$, $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$

$$\begin{aligned} S'(\alpha) &= \left[\frac{\sin \alpha}{2} - \frac{\sin(2\alpha)}{4} \right]' = \frac{1}{2}(\sin \alpha)' - \frac{1}{4}[\sin(2\alpha)]' = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{4} \times 2 \cos(2\alpha) = \\ &= \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \cos(2\alpha) \end{aligned}$$

$$S'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \cos(2\alpha) \Leftrightarrow \alpha = 2\alpha + 2k\pi \vee \alpha = -2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\alpha = 2k\pi \vee 3\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \vee \alpha = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Dado que } \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[, S'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

α	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$S'(x)$	+	0	-
S	$\nearrow$	máx.	$\searrow$

O máximo de S é, portanto, igual a $S\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

$$\text{Ora, } S(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2} - \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{4} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} - \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ unidades de área}$$

c) Seja β a inclinação da reta OA .

$$\text{Tem-se } \operatorname{tg} \beta = 0,6 \Leftrightarrow \frac{y_A}{x_A} = 0,6 \Leftrightarrow \frac{y_A}{1} = 0,6 \Leftrightarrow y_A = 0,6$$

Portanto, a ordenada do ponto P é igual a $0,6$, pelo que, neste caso, $\sin \alpha = 0,6$.

Então,

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \frac{\sin \alpha}{2} - \frac{\sin(2\alpha)}{4} = \frac{\sin \alpha}{2} - \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{4} = \\ &= \frac{\sin \alpha}{2} - \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{4} = \end{aligned}$$

| Cálculo aux:

$$0,6^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm 0,8;$$

$$\text{como } \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[, \cos \alpha = -0,8$$

$$= \frac{0,6}{2} - \frac{0,6 \times (-0,8)}{2} = 0,3 + 0,24 = 0,54 \text{ unidades de área}$$

Pág. 56

122.a) • Domínio

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R}: \operatorname{tg} x \neq 1 \wedge \left(\exists k \in \mathbb{Z}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}: \left(\exists k \in \mathbb{Z}: x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \right\}$$

• Zeros

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) • Domínio

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: \cos x \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R}: (\exists k \in \mathbb{Z}: x \neq 2k\pi)\}$$

• Zeros

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

c) • Domínio

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: \operatorname{tg} x \neq -1 \wedge \left(\exists k \in \mathbb{Z}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}: \left(\exists k \in \mathbb{Z}: x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right\}$$

• Zeros

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x \in \emptyset; f \text{ não tem zeros.}$$

123. Função g :

• $D'_g = [-2 + 3, 2 + 3] = [1, 5]$

• Período fundamental $= \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

- Transformação que permite obter o gráfico a partir do da função seno:

Translação de vetor $\left(\frac{\pi}{5}, 0\right)$,
seguida de dilatação vertical
de coeficiente 2, seguida de
translação de vetor $(0, 3)$

Função h :

• $D'_h = [-1, 1]$

• Período fundamental $= \frac{2\pi}{2} = \pi$

- Transformação que permite obter o gráfico a partir do da função seno:

Translação de vetor
 $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$, seguida de
contração horizontal de
coeficiente $\frac{1}{2}$

Função r :

• $D'_r = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

• Período fundamental $= \frac{2\pi}{3}$

- Transformação que permite obter o gráfico a partir do da função seno:

Translação de vetor
 $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$, seguida de
contração horizontal de
coeficiente $\frac{1}{3}$, seguida de
contração vertical de
coeficiente $\frac{1}{2}$

Função s :

• $D'_s = [1 - 2, 1 + 2] = [-1, 3]$

• Período fundamental $= \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$

- Transformação que permite obter o gráfico a partir do da função seno:

Dilatação horizontal de
coeficiente 2, seguida de
dilatação vertical de
coeficiente 2, seguida de
reflexão de eixo Ox ,
seguida de translação de
vetor $(0, 1)$

124.a) Tem-se $\frac{2\pi}{c} = 2$, ou seja, $c = \pi$ e, por exemplo, $\begin{cases} a + b = 7 \\ a - b = 1 \end{cases}$, ou seja, $a = 4$ e $b = 3$.

$$\begin{aligned} \mathbf{b_1)} \quad h(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 + 2 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b_2)} \quad h'(x) = 0 &\Leftrightarrow [1 + 2 \cos(2x)]' = 0 \Leftrightarrow -4 \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{Tem-se }]-50\pi, \frac{11}{3}\pi[=]-\frac{100\pi}{2}, \frac{22}{3}\pi[.$$

Portanto, o menor zero que pertence a $] -50\pi, \frac{11}{3}\pi[$ é $-\frac{99\pi}{2}$ e o maior é $\frac{7\pi}{2}$.

125.a) $D'_N = [a - b, a + b]$. Portanto, tem-se:

$$\begin{cases} N(60) = 13 \\ a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b \cos\left(\frac{60\pi}{20}\right) = 13 \\ a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b \cos(3\pi) = 13 \\ a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 13 \\ a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$\mathbf{b)} \quad 8 - 5 \cos\left(\frac{\pi t}{20}\right) = 10,5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{20}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi t}{20} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \pm \frac{40}{3} + 40k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, a fila atinge pela primeira vez 105 pessoas, ao fim de $\frac{40}{3}$ minutos após as 9 h 30 min, ou seja, aproximadamente às 9 h 43 min.

126.a) $D'_h = [9 - 2, 9 + 2] = [7, 11]$. Portanto, a profundidade da água na maré baixa é 7 metros.
Tem-se:

$$9 - 2 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 7 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 12k, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, para $k = 0$, vem $t = 0$, pelo que está provado que a primeira maré baixa ocorreu às 0 horas.

b) O período fundamental é igual a $\frac{2\pi}{\pi/6}$, ou seja 12, pelo que o tempo que decorre entre duas marés baixas é 12 horas.

$$\begin{aligned} \mathbf{c)} \quad 9 - 2 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) &= 10 \wedge t \in [0, 24[\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{1}{2} \wedge t \in [0, 24[\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge t \in [0, 24[\Leftrightarrow t = \pm 4 + 12k, k \in \mathbb{Z} \wedge t \in [0, 24[\end{aligned}$$

Portanto, a profundidade da água é 10 metros para $t \in \{4, 8, 16, 20\}$.

Tem-se, de acordo com as alíneas anteriores, o seguinte quadro de monotonia de h :

0		6		12		18		24
Maré baixa	↗	Maré alta	↘	Maré baixa	↗	Maré alta	↘	Maré baixa

Então, pode concluir-se que a profundidade da água é pelo menos 10 metros entre as 4 horas e as 8 horas e entre as 16 horas e as 20 horas.

Pág. 57

127. Designemos por h a função definida por $h(t) = a \sin(bt + c) + d$, $a > 0$, $b > 0$ e $c \in [0, 2\pi[$.

- O período fundamental de h é igual a 2, pelo que $\frac{2\pi}{b} = 2$ e, portanto, $b = \pi$.
 - Tem-se, relativamente à figura do enunciado, que a distância da cadeira n.º 10 ao solo é igual a 3 metros, pelo que $D'_h = [3, 13]$; portanto, $\begin{cases} d + a = 13 \\ d - a = 3 \end{cases}$, pelo que $d = 8$ e $a = 5$.
 - $h(0) = 8 \Leftrightarrow 5 \sin(\pi \times 0 + c) + 8 = 8 \Leftrightarrow \sin(c) = 0 \Leftrightarrow c = 0$
- Portanto, $a = 5$, $b = \pi$, $c = 0$ e $d = 8$.

128. De acordo com a sugestão, comecemos por determinar uma expressão analítica para a função g , cujo gráfico tem a mesma forma do de f mas está representado num referencial cuja origem está no ponto de coordenadas $(8,8; 4)$ do referencial da figura.

- O período fundamental de g é igual a $18 - 5,6 = 12,4$, pelo que $\frac{2\pi}{b} = 12,4$ e, portanto, $b \approx 0,5$.
- $D'_g = [-2,2]$; portanto, $\begin{cases} d + a = 2 \\ d - a = -2 \end{cases}$, pelo que $d = 0$ e $a = 2$.
- $g(0) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin(0,5 \times 0 + c) = 0 \Leftrightarrow \sin(c) = 0 \Leftrightarrow c = 0$

Portanto, $g(x) = 2 \sin(0,5x)$.

Como gráfico de f se pode obter a partir do gráfico de g pela translação associada ao vetor de coordenadas $(8,8; 4)$, tem-se:

$$f(x) = g(x - 8,8) + 4 = 2 \sin[0,5(x - 8,8)] + 4 = 2 \sin(0,5x - 4,4) + 4$$

Portanto, $a = 2$, $b = 0,5$, $c = -4,4$ e $d = 4$.

Pág. 58

129. Função f :

- O período fundamental é igual a 2π , pelo que $\frac{2\pi}{b} = 2\pi$ e, portanto, $b = 1$.
 - $D'_f = [0,2]$; portanto, $\begin{cases} d + a = 2 \\ d - a = 0 \end{cases}$, pelo que $d = 1$ e $a = 1$.
 - $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + c\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + c\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + c = \pi \Leftrightarrow c = \frac{\pi}{2}$
- Portanto, $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

Função g :

- O período fundamental é igual a 2π , pelo que $\frac{2\pi}{b} = 2\pi$ e, portanto, $b = 1$.
 - $D'_g = [-1, 3]$; portanto, $\begin{cases} d + a = 3 \\ d - a = -1 \end{cases}$, pelo que $d = 1$ e $a = 2$.
 - $g(0) = -1 \Leftrightarrow 2 \cos(0 + c) + 1 = -1 \Leftrightarrow \cos(c) = -1 \Leftrightarrow c = \pi$
- Portanto, $g(x) = 2 \cos(x + \pi) + 1$.

Função h :

- O período fundamental é igual a π , pelo que $\frac{2\pi}{b} = \pi$ e, portanto, $b = 2$.
 - $D'_h = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; portanto, $\begin{cases} d + a = \frac{1}{2} \\ d - a = -\frac{1}{2} \end{cases}$, pelo que $d = 0$ e $a = \frac{1}{2}$.
 - $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos\left(2 \times \frac{\pi}{4} + c\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + c\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + c = 2\pi \Leftrightarrow c = \frac{3\pi}{2}$
- Portanto, $h(x) = \frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

Função j :

- O período fundamental é igual a 4π , pelo que $\frac{2\pi}{b} = 4\pi$ e, portanto, $b = \frac{1}{2}$.
 - $D'_j = [1, 3]$; portanto, $\begin{cases} d + a = 3 \\ d - a = 1 \end{cases}$, pelo que $d = 2$ e $a = 1$.
 - $j(\pi) = 3 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{2} \times \pi + c\right) + 2 = 3 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + c\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + c = 2\pi \Leftrightarrow c = \frac{3\pi}{2}$
- Portanto, $j(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) + 2$.

130.a) $D'_A = [20 - 8, 20 + 8] = [12, 28]$

$$A(t) = 28 \Leftrightarrow 20 + 8 \sin \frac{\pi(t-8,3)}{12} = 28 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi(t-8,3)}{12} = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi(t-8,3)}{12} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t - 8,3 = 6 + 24k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 14,3 + 24k, k \in \mathbb{Z}$$

Dado que $t \in [0, 24[$, $t = 14,3$; portanto, foi às 14 horas e 18 minutos.

b) $M(t) = 11 \Leftrightarrow 10 + 2 \cos \frac{\pi(t-17,6)}{12} = 11 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi(t-17,6)}{12} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi(t-17,6)}{12} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t - 17,6 = \pm 4 + 24k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 13,6 + 24k \vee t = 21,6 + 24k, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, a temperatura da água era 11°C às 13,6 horas e às 21,6 horas.

Ora, $M(t) = 12 \Leftrightarrow 10 + 2 \cos \frac{\pi(t-17,6)}{12} = 12 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi(t-17,6)}{12} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi(t-17,6)}{12} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t - 17,6 = 24k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 17,6 + 24k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = 13,6 + 24k \vee t = 21,6 + 24k, k \in \mathbb{Z}$$

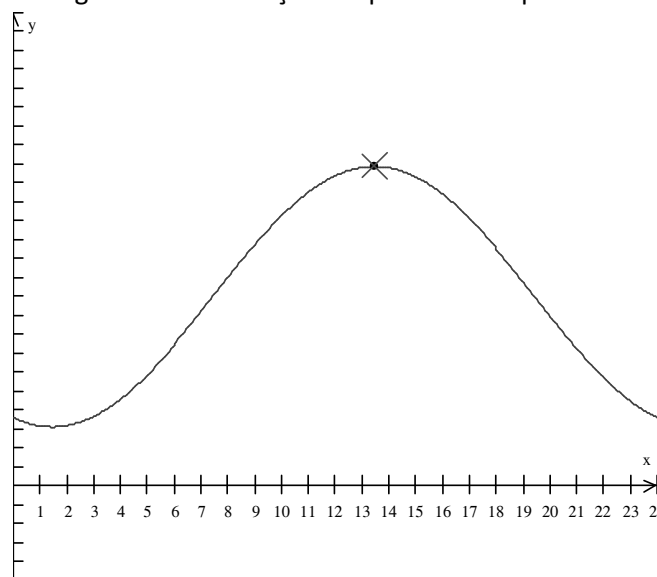
Portanto, a temperatura da água era máxima às 17,6 horas.

Portanto, podemos concluir que, entre as 13,6 horas e as 21,6 horas a temperatura da água era superior a 11°C .

Então, tal ocorreu durante oito horas.

c) Pretende-se determinar o maximizante da função $A(t) - M(t)$.

Na figura está representado o gráfico dessa função e o ponto correspondente ao seu máximo.



O ponto tem coordenadas $(13,45; 16,87)$, pelo que a diferença era máxima para $t = 13,45$; foi, portanto, aproximadamente às 13 horas e 27 minutos.

131. Tem-se:

$$\bullet S'(t) = [m \sin(kt) + n \cos(kt)]' = m[\sin(kt)]' + n[\cos(kt)]' =$$

$$= m[k \cos(kt)] + n[-k \sin(kt)] = km \cos(kt) - kn \sin(kt)$$

$$\bullet S''(t) = [km \cos(kt) - kn \sin(kt)]' = km[\cos(kt)]' - kn[\sin(kt)]' =$$

$$= km[-k \sin(kt)] - kn[k \cos(kt)] = -k^2 m \sin(kt) - k^2 n \cos(kt)$$

$$\bullet \frac{S''(t)}{S(t)} = \frac{-k^2 m \sin(kt) - k^2 n \cos(kt)}{m \sin(kt) + n \cos(kt)} = \frac{-k^2 [m \sin(kt) + n \cos(kt)]}{m \sin(kt) + n \cos(kt)} = -k^2$$

Pág. 59

132. Tem-se:

$$\bullet \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 12 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[a + b e^{-0,1t} \cos\left(\frac{\pi t}{c}\right) \right] = 12 \Leftrightarrow a + 0 = 12 \Leftrightarrow a = 12$$

$$\bullet f(0) = 18 \Leftrightarrow 12 + b e^0 \cos 0 = 18 \Leftrightarrow b = 6$$

$$\bullet f(t) = 12 \Leftrightarrow 12 + 6 e^{-0,1t} \cos\left(\frac{\pi t}{c}\right) = 12 \Leftrightarrow e^{-0,1t} \cos\left(\frac{\pi t}{c}\right) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,1t} = 0 \vee \cos\left(\frac{\pi t}{c}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{c}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{c} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow \frac{t}{c} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow t = \frac{c}{2} + ck, k \in \mathbb{N}_0; \text{então, } c = 3.$$

133.a)

$$\begin{aligned}
& -2 \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{6}\right) = \\
& = -2 \left(\operatorname{sen} t \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos t \right) = \\
& = -2 \left(\operatorname{sen} t \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cos t \right) = \\
& = -\sqrt{3} \operatorname{sen} t + \cos t \\
& = \delta(t)
\end{aligned}$$

b) Tem-se que, para $t \in [0, 2\pi[$, $-1 \leq \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$, pelo que $-2 \leq \delta(t) \leq 2$.

A maior distância a que o ponto está da origem é 2.

c) Dado que $-2 \leq \delta(t) \leq 2$, tem-se $D'_\delta = [-2, 2]$.

134. a) Tem-se $4 \cos\left(\frac{4\pi}{3} \times 4\right) = 4 \cos\left(16 \times \frac{\pi}{3}\right) = 4 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$.

b) Tem-se $0 \leq t \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{4\pi}{3}t \leq \frac{16\pi}{3} \Rightarrow -1 \leq \cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq 4 \cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) \leq 4$

Portanto, a distância máxima do ponto à origem é 4, distância atingida quando a abcissa do ponto P é igual a 4 ou igual a -4 .

Tem-se $4 \cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) = \pm 4 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{4\pi}{3}t = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}k, k \in \mathbb{Z}$.

Ora, para $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \frac{3}{4}k \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{16}{3} \Leftrightarrow k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

A distância do ponto à origem é máxima por seis vezes.

Pág. 60

135.a) Dado que a frequência é $\frac{3}{4}$, o período é $\frac{4}{3}$, pelo que se tem $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{4}{3}$ e, portanto, $\omega = \frac{3\pi}{2}$.

A abcissa pedida é igual a $4 \cos\left(\frac{3\pi}{2} \times 1 + \frac{\pi}{3}\right) = 4 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{b)} \quad & \left[4 \cos\left(\frac{3\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)\right]' = 4 \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)\right]' = 4 \left(\frac{3\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)' \left[-\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)\right]' = -6\pi \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \\
& -6\pi \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}k - \frac{2}{9}, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

O menor valor de t pertencente ao intervalo $[0, 8]$ é aproximadamente igual a 0,44; tal significa que ao fim de 0,44 s o ponto P inverte, pela primeira vez, o sentido em que se desloca.

136.a) • A amplitude é igual a 0,5.

• O período é igual a 1.

• Dado que $\frac{2\pi}{\omega} = 1$, tem-se que a pulsação, ω , é igual a 2π .

• Tem-se $x\left(\frac{1}{4}\right) = 0,5$.

Ora, $x\left(\frac{1}{4}\right) = 0,5 \Leftrightarrow 0,5 \cos\left(2\pi \times \frac{1}{4} + \phi\right) = 0,5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \phi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Dado que $\phi \in [0, 2\pi[$, tem-se que a fase, ϕ , é igual a $\frac{3\pi}{2}$.

b) $x(t) = 0,5 \cos\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$

c) Tem-se $1 \text{ min } 15 \text{ s} = 75 \text{ s}$, pelo que uma condição que traduz o problema é $x(t) = x(75)$.

$$x(75) = 0,5 \cos\left(150\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = 0,5 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$x(t) = 0 \Leftrightarrow 0,5 \cos\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \wedge t \in [0, 4] \Leftrightarrow t \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\right\}$$

Os instantes são 0 s, 0,5 s, 1 s, 1,5 s, 2 s, 2,5 s, 3 s, 3,5 s e 4 s.

137.a) $x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) = \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right] =$
 $= \sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right] = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{4} + 2\pi\right) =$
 $= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{7\pi}{4}\right)$

b) $x'(t) = \left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{7\pi}{4}\right)\right]' = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{7\pi}{4}\right)' \left[-\sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{7\pi}{4}\right)\right] = -\frac{\sqrt{2}\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{7\pi}{4}\right)$
 $x''(t) = \left[-\frac{\sqrt{2}\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{7\pi}{4}\right)\right]' = -\frac{\sqrt{2}\pi}{3}\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{7\pi}{4}\right)' \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{7\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\frac{\pi^2}{9}\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{7\pi}{4}\right)$

Portanto, $x''(t) = -kx(t)$ se e só se $k = -\frac{\pi^2}{9}$.

Pág. 61

138.a) Tem-se $1 - \frac{1}{2} \leq d(t) \leq 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq d(t) \leq \frac{3}{2}$.

$$d(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi t = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, foi no instante $t = \frac{4}{3}$.

b) $d'(t) = \left[1 + \frac{1}{2}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right]' = \frac{1}{2}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)' \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$
 $d'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \pi t = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t = \frac{1}{3} + k, k \in \mathbb{Z}$

Tem-se, para $t \in [0, 1]$:

- $d'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$
- $d'(t) > 0 \Leftrightarrow t \in \left[0, \frac{1}{3}\right[$
- $d'(t) < 0 \Leftrightarrow t \in \left]\frac{1}{3}, 1\right]$

A afirmação é falsa porque a função é crescente em $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ mas é decrescente em $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$. Portanto, durante o primeiro segundo, o ponto P só se afasta da origem no primeiro terço de segundo.

$$\text{c) } h'(t) = [d(t) + b]' = d'(t) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$h''(t) = \left[\frac{\pi}{2} \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right]' = -\frac{\pi^2}{2} \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$-\pi^2 h = -\pi^2 \left[1 + \frac{1}{2} \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) + b\right] = -\pi^2(1 + b) - \frac{\pi^2}{2} \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Portanto, $h''(t) = -\pi^2 h$ se e só se $-\pi^2(1 + b) = 0$, ou seja, se e só se $b = -1$.

139.a) A figura ao lado pretende ilustrar a situação descrita.

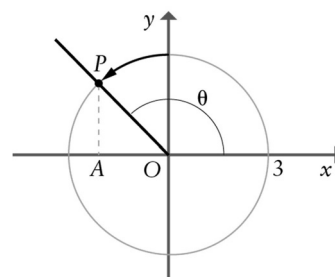
Seja x_P a abcissa do ponto P .

Tem-se:

$$\bullet x_P = -\overline{OA}$$

$$\bullet \cos(\pi - \theta) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow -\cos \theta = \frac{\overline{OA}}{3} \Leftrightarrow \overline{OA} = -3 \cos \theta$$

Portanto, $x_P = \cos \theta$.



b) Dado que o ponto P parte de um ponto pertencente ao semieixo positivo das ordenadas, tem-se que, ao fim de 8 segundos, $\theta = \frac{8\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$.

$$3 \cos\left(\frac{8\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 3 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

c) Dado que o ponto P parte de um ponto pertencente ao semieixo positivo das ordenadas, tem-se que, ao fim de t segundos, $\theta = \frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}$.

Dado que $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ e $\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow t = 24$, tem-se $t \in [0, 24]$.

d) $x(t) = 3 \cos\left(\underbrace{\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}}_{\theta}\right)$, pelo que se pode concluir que x é um oscilador harmónico, por $x(t)$ ser

da forma $A \cos(\omega t + \phi)$, com $A > 0$, $\omega > 0$ e $\phi \in [0, 2\pi[$.

A amplitude, A , é igual a 3.

A pulsação, ω , é igual a $\frac{\pi}{12}$.

O período, T , é igual a $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$.

A fase, ϕ , é igual a $\frac{\pi}{2}$.

140.a) Uma condição que traduz o problema é $x(t) = x(0) \wedge t \in]0, 10]$.

$$x(t) = x(0) \Leftrightarrow 3 + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) = 3 + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \frac{\pi}{3}t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 6k, k \in \mathbb{Z} \vee t = 2 + 6k, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0 \rightarrow t = 0 \vee t = 2$; somente 2 pertence a $]0, 10]$.

Para $k = 1 \rightarrow t = 6 \vee t = 8$; ambos os valores pertencem a $]0, 10]$.

Para $k = 2 \rightarrow t = 12 \vee t = 14$; nenhum dos valores pertence a $]0, 10]$.

Para $k = -1 \rightarrow t = -6 \vee t = -4$; nenhum dos valores pertence a $]0, 10]$.

Para qualquer outro valor de k , nenhuma das correspondentes soluções pertence ao intervalo $]0, 10]$.

Portanto, os instantes são 2 s, 6 s e 8 s.

b)

A função x é contínua em $[3, 4]$,

$$x(3) = 3 + 2 \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \text{ e}$$

$$x(4) = 3 + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 3 + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1.$$

Dado que $x(4) < 1,5 < x(3)$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que

$$\exists t \in]3, 4[: x(t) = 1,5.$$

c) O ponto de equilíbrio é o que corresponde a $x(t) = 3$.

$$\begin{aligned} \text{Portanto, a expressão seria dada por } x(t) - 3 &= 3 + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{5\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

d) A amplitude, A , é igual a 2.

A pulsação, ω , é igual a $\frac{\pi}{3}$.

A fase, ϕ , é igual a $\frac{5\pi}{3}$.

O período, T , é igual a $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$.

A frequência, f , é igual a $\frac{1}{6}$.

«Os sete mais»

141.

A área total é igual à soma da área lateral com a área da base.

Tem-se $2\hat{A}BF + \frac{\pi}{2} + \alpha = 2\pi$, portanto,

$$\hat{A}BF = \frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}.$$

$\overline{AB} = 2 \times 4 \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ e, designando por h a altura de uma face, tem-se $h = 4 \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Então, a área de cada face é dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{2 \times 4 \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \times 4 \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2} \\ \text{Ora, } & \frac{2 \times 4 \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \times 4 \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2} = \\ & = 16 \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \\ & = 8 \times 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \\ & = 8 \times \sin\left[2\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right] = \\ & = 8 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -8 \cos \alpha \end{aligned}$$

Portanto, a área de cada face é $-8 \cos \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Área da base} &= \overline{AB}^2 = 64 \cos^2\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \\ &= 32 \times 2 \cos^2\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

De $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$, conclui-se que $2 \cos^2 x = \cos(2x) + 1$;

$$\begin{aligned} \text{então, } & 2 \cos^2\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \\ &= \cos\left[2 \times \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right] + 1 = \\ &= \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + 1 = -\sin \alpha + 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Área da base} = 32(-\sin \alpha + 1) = 32 - 32 \sin \alpha$$

e a área total é dada por:

$$\begin{aligned} 32 - 32 \sin \alpha + 4 \times (-8 \cos \alpha) &= \\ = 32 - 32(\sin \alpha + \cos \alpha) \end{aligned}$$

Pág. 63

142.

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$, portanto,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) - 1.$$

$$\text{Ora, } \cos x = 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x + 1 = 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x + 1}{2} = \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{x}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

143.

$$\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} \Rightarrow \frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{\sin B}{\cos B}} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin A \sin^2 B}{\cos A} = \frac{\sin B \sin^2 A}{\cos B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin B}{\cos A} = \frac{\sin A}{\cos B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin B \cos B = \sin A \cos A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin B \cos B = 2 \sin A \cos A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(2B) = \sin(2A)$$

Como o triângulo é escaleno, não pode ser $2A = 2B$.

Então, $2B = \pi - 2A$. Esta equação é equivalente a $A + B = \frac{\pi}{2}$, de onde se conclui que $C = \frac{\pi}{2}$.

Portanto, o triângulo é retângulo em C .

144.

$$\begin{aligned}
 & a \operatorname{sen}(2x) + b \cos(2x) = \\
 & = b \left[\frac{a}{b} \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x) \right] = \\
 & = b [\operatorname{tg} x \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)] = \\
 & = b \left[\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x) \right] = \\
 & = b \left[\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(2x) + \cos x \cos(2x)}{\cos x} \right] = \\
 & = b \times \frac{\cos(2x - x)}{\cos x} = b \times \frac{\cos x}{\cos x} = b
 \end{aligned}$$

145.

Vamos começar por verificar que:

$$f' \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \cos x - e^{\frac{x}{2}} \operatorname{sen} x = e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos x - \operatorname{sen} x \right)$$

$$f' \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) =$$

$$= e^{\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2}}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) - \operatorname{sen} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$\text{Seja } \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = y; \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = y \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = \frac{1}{2}.$$

$$\text{De } \operatorname{tg}^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}, \text{ com } y \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[,$$

$$\text{conclui-se que } \cos y = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Então, } \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) = \cos y = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{1}{2} \wedge \cos y = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\text{portanto, } \operatorname{sen} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) = \operatorname{sen} y = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Então,

$$f' \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) = e^{\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2}}{2}} \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0.$$

Para concluir que a função atinge o extremo e identificar se é máximo ou mínimo, calculemos a segunda derivada de f em $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left[e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos x - \operatorname{sen} x \right) \right]' = \\
&= \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos x - \operatorname{sen} x \right) + e^{\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{2} \operatorname{sen} x - \cos x \right) = \\
&= e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - \cos x \right) = \\
&= e^{\frac{x}{2}} \left(-\frac{3}{4} \cos x - \operatorname{sen} x \right) \\
f''\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) &= e^{\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2}}{2}} \left(-\frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)
\end{aligned}$$

Então, $f''\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) < 0$, de onde se conclui que f atinge um máximo relativo em $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

146.a)

Seja $x \in]0, \pi[$;

$$\begin{aligned}
a(x) &= \frac{x r^2}{2} - \frac{r \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right) \times r \cos \left(\frac{x}{2} \right)}{2} \times 2 = \\
&= \frac{x r^2}{2} - \frac{r^2 \times 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{2} \right)}{2} = \\
&= \frac{x r^2}{2} - \frac{r^2 \times \operatorname{sen} x}{2} = \frac{r^2 (x - \operatorname{sen} x)}{2}.
\end{aligned}$$

Seja $x = \pi$.

$$a(x) = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{r^2 (\pi - \operatorname{sen} \pi)}{2} = \frac{r^2 (\pi - 0)}{2} = \frac{\pi r^2}{2}$$

Seja $x \in]\pi, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}
a(x) &= \pi r^2 - a(2\pi - x) = \\
&= \pi r^2 - \frac{r^2 [2\pi - x - \operatorname{sen} (2\pi - x)]}{2} = \\
&= \frac{r^2 [2\pi - 2\pi + x + \operatorname{sen} (-x)]}{2} = \\
&= \frac{r^2 (x - \operatorname{sen} x)}{2}
\end{aligned}$$

b) Dado que, para $r = \sqrt{2}$, a área de metade da base do cilindro é igual a $\frac{\pi\sqrt{2}^2}{2} = \pi$, o caso em que $a(x) = 5$ é o que está ilustrado na figura 3 do enunciado.

Seja h a altura que a água atinge no depósito.

Tem-se, de acordo com a figura ao lado,

$$h = \sqrt{2} + \sqrt{2} \sin \alpha$$

Ora, para $r = \sqrt{2}$, $a(x) = 5 \Leftrightarrow x - \sin x = 5$.

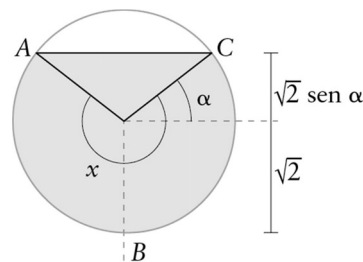
Utilizando calculadora gráfica, podemos concluir

que o valor de x para o qual

$x - \sin x = 5 \wedge x \in]0, 2\pi]$, é aproximadamente

igual a 4,153.

Então, como $\alpha = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}$, $\alpha \approx 0,506$, pelo que $h \approx \sqrt{2} + \sqrt{2} \sin(0,506) \approx 2,099 \approx 2,1$ m.



147.

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \Rightarrow (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))' = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg}' x \times \operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x) = 1$$

Como $\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, tem-se:

$$\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} \stackrel{\operatorname{arctg} x = y}{=} \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Dado que:

$$\bullet \operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y$$

$$\bullet \operatorname{tg}^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$\text{conclui-se que } x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Então,

$$\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 y} = x^2 + 1.$$

Finalmente,

$$\operatorname{arctg}' x \times \operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{arctg}' x \times (x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{arctg}' x = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Então,

$$\left[\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right]' =$$

$$= \operatorname{arctg}' x + \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right)' =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{1}{x}\right)' \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Dado que a função derivada é nula em $\mathbb{R}^+$,
a função é constante.

Como $\arctg 1 + \arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, conclui-se

que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \arctg x + \arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Tema 6 | Primitivas e Cálculo Integral

1. Noção de primitiva

Pág. 66

Será que...? Função cuja derivada é...

Uma função cuja derivada é $2x + 4$ é a função g definida por $g(x) = x^2 + 4x$.

Pág. 67

1. As funções definidas pelas expressões x^3 , $x^3 + 1$ e $x^3 + 2$ são primitivas da função f definida por $f(x) = 3x^2$.

Na verdade, tem-se $(x^3)' = 3x^2$, $(x^3 + 1)' = 3x^2$ e $(x^3 + 2)' = 3x^2$.

Pág. 68

2. Uma primitiva de f é a função G definida por $G(x) = \sin x$.

Tem-se $F(x) = G(x) + 2 - G(\pi) = \sin x + 2 - \sin \pi = 2 + \sin x$.

Pág. 70

3. a) $\int (5x^3) dx = 5 \int x^3 dx = 5 \frac{x^4}{4} + c = \frac{5x^4}{4} + c$, $c \in \mathbb{R}$

b) $\int \frac{1}{x^6} dx = \int x^{-6} dx = \frac{x^{-5}}{-5} + c = -\frac{1}{5x^5} + c$, $c \in \mathbb{R}$

c) $\int \sqrt[7]{x^5} dx = \int x^{\frac{5}{7}} dx = \frac{x^{\frac{12}{7}}}{\frac{12}{7}} + c = \frac{7\sqrt[7]{x^{12}}}{12} + c$, $c \in \mathbb{R}$

d) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{5}} dx = \frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = \frac{5\sqrt[5]{x^2}}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$

e) $\int (x^3 \sqrt{x}) dx = \int x^{\frac{7}{2}} dx = \frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} + c = \frac{2\sqrt{x^9}}{9} + c$, $c \in \mathbb{R}$

f) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = 3\sqrt[3]{x} + c$, $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{g)} \int (10x^4 - 3x^2 + 6x - 5) dx &= 10 \int x^4 dx - 3 \int x^2 dx + 6 \int x dx - \int 5 dx = \\ &= 10 \frac{x^5}{5} - 3 \frac{x^3}{3} + 6 \frac{x^2}{2} - 5x + c = 2x^5 - x^3 + 3x^2 - 5x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \int \left(\frac{7}{\sqrt[4]{x^3}} - \sqrt[3]{x} + 4\sqrt{x} \right) dx &= 7 \int \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx - \int \sqrt[3]{x} dx + 4 \int \sqrt{x} dx = \\ &= 7 \int x^{-\frac{3}{4}} dx - \int x^{\frac{1}{3}} dx + 4 \int x^{\frac{1}{2}} dx = 7 \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 4 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = 28\sqrt[4]{x} - \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + \frac{8\sqrt{x^3}}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{i)} \int [x(1 + x^3)] dx = \int (x + x^4) dx = \int x dx + \int x^4 dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \int [(1 + x)^2(3 - 2x)] dx &= \int [(1 + 2x + x^2)(3 - 2x)] dx = \\ &= \int (3 - 2x + 6x - 4x^2 + 3x^2 - 2x^3) dx = \int (-2x^3 - x^2 + 4x + 3) dx = \\ &= -2 \int x^3 dx - \int x^2 dx + 4 \int x dx + \int 3 dx = -2 \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 4 \frac{x^2}{2} + 3x + c = \\ &= -\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k)} \int \frac{x^3 + 3x^2 - 4x + 5}{x^5} dx &= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} + \frac{5}{x^5} \right) dx = \\ &= \int \frac{1}{x^2} dx + 3 \int \frac{1}{x^3} dx - 4 \int \frac{1}{x^4} dx + 5 \int \frac{1}{x^5} dx = \\ &= \int x^{-2} dx + 3 \int x^{-3} dx - 4 \int x^{-4} dx + 5 \int x^{-5} dx = \\ &= \frac{x^{-1}}{-1} + 3 \frac{x^{-2}}{-2} - 4 \frac{x^{-3}}{-3} + 5 \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} + \frac{4}{3x^3} - \frac{5}{4x^4} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Pág. 72

$$\begin{aligned} \text{4. a)} \int [2x(x^2 + 1)^{25}] dx &= \quad | (x^2 + 1)' = 2x \\ &= \frac{(x^2 + 1)^{26}}{26} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \int (\cos^3 x \cdot \operatorname{sen} x) dx &= - \int [\cos^3 x \cdot (-\operatorname{sen} x)] dx = \quad | (\cos x)' = -\operatorname{sen} x \\ &= -\frac{\cos^4 x}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \int [(2x + 7)\sqrt{x^2 + 7x + 5}] dx &= \int \left[(2x + 7)(x^2 + 7x + 5)^{\frac{1}{2}} \right] dx = \quad | (x^2 + 7x + 5)' = 2x + 7 \\ &= \frac{(x^2 + 7x + 5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (x^2 + 7x + 5)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{(x^2 + 7x + 5)^3}}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \int [x^2(4x^3 + 7)^9] dx &= \frac{1}{12} \int [12x^2(4x^3 + 7)^9] dx = \quad | (4x^3 + 7)' = 12x^2 \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{(4x^3 + 7)^{10}}{10} = \frac{(4x^3 + 7)^{10}}{120} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \int \frac{e^x}{(e^x + 1)^3} dx &= \int [e^x(e^x + 1)^{-3}] dx \quad | (e^x + 1)' = e^x \\ &= \frac{(e^x + 1)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2(e^x + 1)^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int [e^{2x}\sqrt{3+e^{2x}}] dx &= \frac{1}{2} \int [2e^{2x}\sqrt{3+e^{2x}}] dx = \frac{1}{2} \int [2e^{2x}(3+e^{2x})^{\frac{1}{2}}] dx = \quad | (3+e^{2x})' = 2e^{2x} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(3+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(3+e^{2x})^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{(3+e^{2x})^3}}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \int [(1+\cos x)^2 \cdot \sin x] dx &= -\int [(1+\cos x)^2 \cdot (-\sin x)] dx = \quad | (\cos x)' = -\sin x \\ &= -\frac{(1+\cos x)^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Pág. 73

$$\begin{aligned} \text{5. a) } \int (x^3 e^{x^4}) dx &= \frac{1}{4} \int (4x^3 e^{x^4}) dx = \quad | (x^4)' = 4x^3 \\ &= \frac{e^{x^4}}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int (\sqrt{x} + 4e^x) dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + 4 \int e^x dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4e^x + c = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 4e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \left(\frac{1}{2x^5} - \sqrt{2}e^x \right) dx &= \int \frac{1}{2x^5} dx - \int \sqrt{2}e^x dx = \frac{1}{2} \int x^{-5} dx - \sqrt{2} \int e^x dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{x^{-4}}{-4} - \sqrt{2}e^x + c = -\frac{1}{8x^4} - \sqrt{2}e^x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int [12e^x(e^x + 4)^5 - 15e^{-5x}] dx &= \\ &= 12 \int [e^x(e^x + 4)^5] dx + 3 \int (-5e^{-5x}) dx = \quad | (e^x + 4)' = e^x \quad \text{e} \quad (-5x)' = -5 \\ &= 12 \frac{(e^x + 4)^6}{6} + 3e^{-5x} + c = 2(e^x + 4)^6 + 3e^{-5x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \int \left[\frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} + 24x(x^2 + 7)^3 \right] dx &= \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} \times e^{\operatorname{tg} x} \right) dx + 12 \int [2x(x^2 + 7)^3] dx = \quad | (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{e} \quad (x^2 + 7)' = 2x \\ &= e^{\operatorname{tg} x} + 12 \frac{(x^2 + 7)^4}{4} + c = e^{\operatorname{tg} x} + 3(x^2 + 7)^4 + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int \left[\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - (3x + 1)^2 \right] dx &= \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx - \int (3x + 1)^2 dx = \\ &= 2 \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} \right) dx - \frac{1}{3} \int [3(3x + 1)^2] dx = \quad | (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad (3x + 1)' = 3 \\ &= 2e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{3} \times \frac{(3x+1)^3}{3} = 2e^{\sqrt{x}} - \frac{(3x+1)^3}{9} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Pág. 74

$$\begin{aligned} \text{6. a) } \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + e^x \right) dx &= \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-2} dx + \int e^x dx = \ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + e^x = \\ &= \ln|x| - \frac{1}{x} + e^x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \int \frac{4+x^3}{x} dx = \int \frac{4}{x} dx + \int x^2 dx = 4 \int \frac{1}{x} dx + \int x^2 dx = 4 \ln|x| + \frac{x^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \int \frac{x}{x^2+7} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+7} dx = & |(x^2+7)' &= 2x \\ &= \frac{\ln|x^2+7|}{2} + c = \frac{\ln(x^2+7)}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \int \frac{\sin 3x}{1+\cos 3x} dx &= -\frac{1}{3} \int \frac{-3 \sin 3x}{1+\cos 3x} dx = & |(\cos(3x))' &= -3 \sin(3x) \\ &= -\frac{\ln|1+\cos(3x)|}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \int \frac{x^2+3x-1}{x+2} dx &= \int \left(x+1 - \frac{3}{x+2} \right) dx = \int x dx + \int 1 dx - 3 \int \frac{1}{x+2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + x - 3 \ln|x+2| + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Pág. 75

$$\begin{aligned} \text{7. a)} \int \left(\frac{2}{x} + 3e^x + \cos x \right) dx &= 2 \int \frac{1}{x} dx + 3 \int e^x dx + \int \cos x dx = \\ &= 2 \ln|x| + 3e^x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \int [e^x \cos(e^x + 2)] dx &= & |(e^x + 2)' &= e^x \\ &= \sin(e^x + 2) + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \int \frac{x^2+\cos(\ln x)}{x} dx &= \int x dx + \int \left[\frac{1}{x} \times \cos(\ln x) \right] dx & |(\ln x)' &= \frac{1}{x} \\ &= \frac{x^2}{2} + \sin(\ln(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \int [(x+1) \cos(x^2 + 2x)] dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int [(2x+2) \cos(x^2 + 2x)] dx = & |(x^2 + 2x)' &= 2x + 2 \\ &= \frac{\sin(x^2+2x)}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \int \frac{\sqrt{x}+x \operatorname{sen} x}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx + \int \operatorname{sen} x dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int \operatorname{sen} x dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \cos x + c = \\ &= 2\sqrt{x} - \cos x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \int [x^2 \sin(4x^3 + 5)] dx &= \frac{1}{12} \int [12x^2 \sin(4x^3 + 5)] dx = & |(4x^3 + 5)' &= 12x^2 \\ &= \frac{1}{12} [-\sin(4x^3 + 5)] + c = \frac{-\cos(4x^3+5)}{12} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \int [e^{2x}(1 + \sin(e^{2x}))] dx &= \int [e^{2x} + e^{2x} \sin(e^{2x})] dx = \\ &= \int e^{2x} dx + \int [e^{2x} \sin(e^{2x})] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int (2e^{2x}) dx + \frac{1}{2} \int [(2e^{2x}) \sin(e^{2x})] dx = & |(2x)' &= 2 \quad \text{e} \quad (e^{2x})' = 2e^{2x} \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \cos(e^{2x}) + c = \frac{e^{2x}-\cos(e^{2x})}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Pág. 76

8. Tem-se:

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \, dx &= \int (\sin x \sin^2 x) \, dx = \int [\sin x (1 - \cos^2 x)] \, dx = \\&= \int (\sin x - \sin x \cos^2 x) \, dx = \int \sin x \, dx + \int (-\sin x \cos^2 x) \, dx = \\&= \int \sin x \, dx + \int [(\cos x)' \cos^2 x] \, dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c\end{aligned}$$

Então:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \Leftrightarrow -\cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \cos^3 \left(\frac{\pi}{2}\right) + c = 4 \Leftrightarrow 0 + 0 + c = 4 \Leftrightarrow c = 4$$

Portanto, $F(x) = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + 4$.

9. Tem-se:

• $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$, pelo que $\frac{3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3}{(x-2)(x-3)}$.

• Para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$:

$$\frac{3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \Leftrightarrow 3 = A(x-3) + B(x-2) \Leftrightarrow Ax - 3A + Bx - 2B = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A+B)x - 3A - 2B = 3, \text{ pelo que } A+B=0 \text{ e } -3A-2B=3.$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3A-2B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ 3B-2B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=3 \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}F(x) &= \int \frac{3}{x^2 - 5x + 6} \, dx = \int \left(\frac{-3}{x-2} + \frac{3}{x-3} \right) \, dx = -3 \int \frac{1}{x-2} \, dx + 3 \int \frac{1}{x-3} \, dx = \\&= -3 \ln|x-2| + 3 \ln|x-3| + c = 3(\ln|x-3| - \ln|x-2|) + c = 3 \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + c\end{aligned}$$

$$\text{Ora, } F(1) = 3 \Leftrightarrow 3 \ln \left| \frac{1-3}{1-2} \right| + c = 3 \Leftrightarrow 3 \ln(2) + c = 3 \Leftrightarrow c = 3 - 3 \ln(2)$$

$$\text{Portanto, } F(x) = 3 \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + 3 - 3 \ln(2).$$

Pág. 77

10. a) Temos duas escolhas possíveis:

1. $u'(x) = x$ e $v(x) = \cos x$

2. $u'(x) = \cos x$ e $v(x) = x$

Hipótese 1:

$$u'(x) = x, \quad v(x) = \cos x, \quad u(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad v'(x) = -\sin x$$

$$\text{Portanto, } \int (x \cos x) \, dx = \frac{x^2}{2} \cos x - \int \left[\frac{x^2}{2} (-\sin x) \right] \, dx.$$

Obtivemos, assim, uma expressão para primitivar mais complexa do que a original.

Hipótese 2:

$$u'(x) = \cos x, v(x) = x, u(x) = \sin x \text{ e } v'(x) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Portanto, } \int (x \cos x) dx &= \sin x \cdot x - \int \sin x dx = x \sin x - (-\cos x) + c = \\ &= x \sin x + \cos x + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) Temos duas escolhas possíveis:

$$1. u'(x) = x \text{ e } v(x) = \ln(x)$$

$$2. u'(x) = \ln(x) \text{ e } v(x) = x$$

Hipótese 1:

$$u'(x) = x, v(x) = \ln(x), u(x) = \frac{x^2}{2} \text{ e } v'(x) = \frac{1}{x},$$

$$\begin{aligned} \text{Portanto, } \int (x \ln(x)) dx &= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \left(\frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \right) dx = \\ &= \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Não necessitamos, portanto, de utilizar a segunda hipótese.

c) Temos duas escolhas possíveis:

$$1. u'(x) = x^2 \text{ e } v(x) = e^{-x}$$

$$2. u'(x) = e^{-x} \text{ e } v(x) = x^2$$

Hipótese 1:

$$u'(x) = x^2, v(x) = e^{-x}, u(x) = \frac{x^3}{3} \text{ e } v'(x) = -e^{-x}$$

$$\text{Portanto, } \int (x^2 e^{-x}) dx = \frac{x^3}{3} e^{-x} - \int \left[\frac{x^3}{3} (-e^{-x}) \right] dx.$$

Obtivemos, assim, uma expressão para primitivar mais complexa do que a original.

Hipótese 2:

$$u'(x) = e^{-x}, v(x) = x^2, u(x) = -e^{-x} \text{ e } v'(x) = 2x$$

$$\text{Portanto, } \int (x^2 e^{-x}) dx = -e^{-x} x^2 - \int (-e^{-x} 2x) dx = -e^{-x} x^2 + 2 \int (x e^{-x}) dx \stackrel{(*)}{=}$$

$$\left| \begin{aligned} \int \underbrace{(x)}_{v(x)} \cdot \underbrace{(e^{-x})}_{u'(x)} dx &= -x e^{-x} - \int (-e^{-x}) dx = \\ &= -x e^{-x} - e^{-x} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned} \right.$$

(*)

$$\begin{aligned} &\stackrel{(*)}{=} -e^{-x} x^2 + 2(-x e^{-x} - e^{-x}) + c = -e^{-x} x^2 - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + c = \\ &= -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Pág. 78

$$11. a(t) = 3 \Leftrightarrow v'(t) = 3, \text{ pelo que se tem } v(t) = 3t + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Como $v(0) = 4$, pode concluir-se que $c_1 = 4$; portanto, $v(t) = 3t + 4$.

$$v(t) = 3t + 4 \Leftrightarrow p'(t) = 3t + 4, \text{ pelo que se tem } p(t) = 3 \frac{t^2}{2} + 4t + c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Como $p(0) = 0$, pode concluir-se que $c_2 = 0$; portanto, $p(t) = \frac{3t^2}{2} + 4t$.

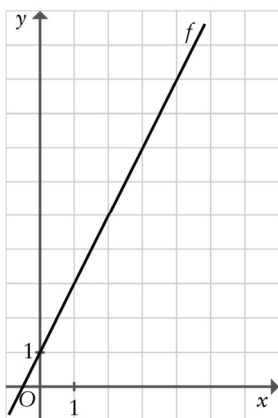
$$\text{Então, } p(t) = \frac{3 \times 5^2}{2} + 4 \times 5 = 57,5.$$

2. Noção de integral

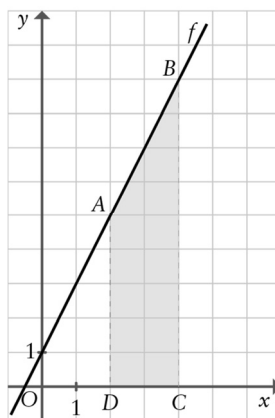
Pág. 80

Será que...? Cálculo de uma área

a)



b)



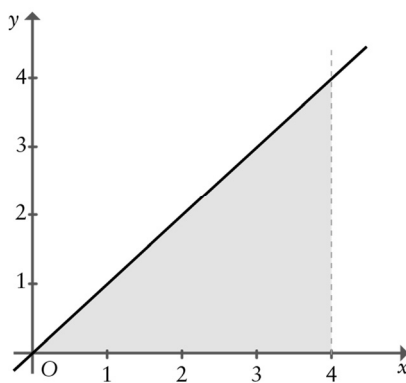
A região referida é o trapézio $[ABCD]$ da figura da alínea b).

A sua área é dada por:

$$\frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times \overline{CD} = \frac{f(4) + f(2)}{2} \times (4 - 2) = \frac{9+5}{2} \times 2 = 14 \text{ unidades de área}$$

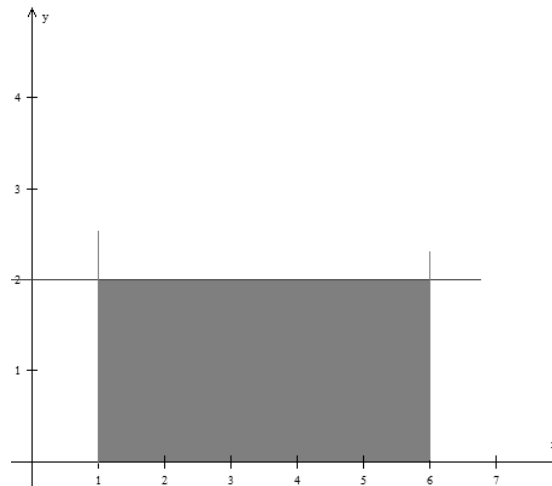
Pág. 81

12. a) Na figura está representada a região do plano cuja área é o integral $\int_0^4 x \, dx$.



Tem-se $\int_0^4 x \, dx = \frac{4 \times 4}{2} = 8$.

b) Na figura está representada a região do plano cuja área é o integral $\int_1^6 2 \, dx$.



Tem-se $\int_1^6 2 \, dx = 5 \times 2 = 10$.

Pág. 85

13. a) $\left(\int_1^x e^{t^2+1} \, dt \right)' = e^{x^2+1}$

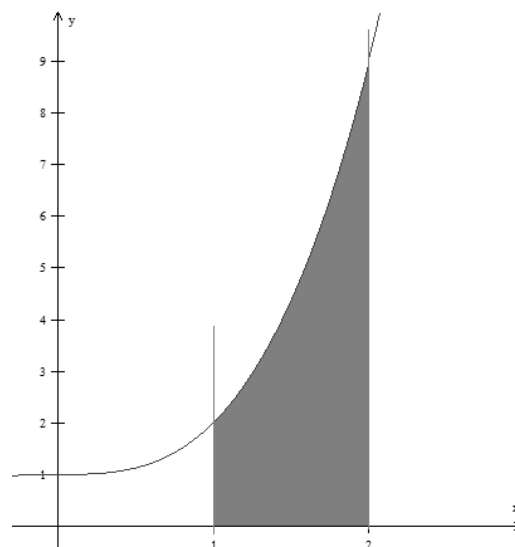
b) $\left(\int_2^{3x+2} \ln(1+t^3) \, dt \right)' = \ln[1 + (3x+2)^3] (3x+2)' = 3 \ln[1 + (3x+2)^3]$

Pág. 86

14. a) $\int_1^3 (3x^2 + 4x + 5) \, dx = [x^3 + 2x^2 + 5x]_1^3 = 60 - 8 = 52$

b) $\int_0^{\ln 3} (2e^x) \, dx = 2 \int_0^{\ln 3} e^x \, dx = 2 \times [e^x]_0^{\ln 3} = 2 \times (e^{\ln 3} - e^0) = 2 \times (3 - 1) = 4$

15. Na figura está representada a região do plano definida pela condição do enunciado.

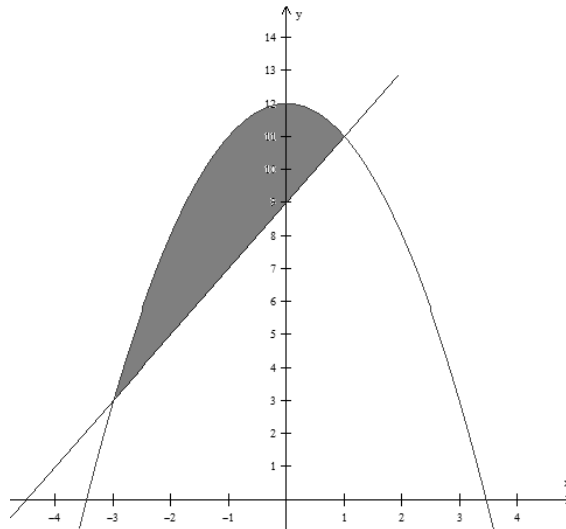


A área desta região é:

$$\int_1^2 (x^3 + 1) dx = \left[\frac{x^4}{4} + x \right]_1^2 = 6 - \frac{5}{4} = \frac{19}{4}$$

Pág. 87

16. Na figura está representada a região do plano definida pela condição do enunciado.

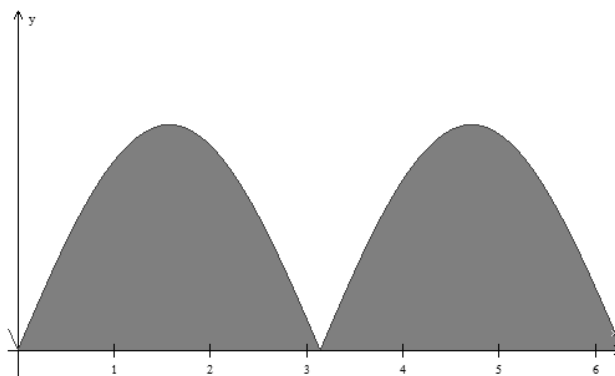


Tem-se $12 - x^2 = 2x + 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$, pelo que a área desta região é

$$\begin{aligned} \int_{-3}^1 (12 - x^2) dx - \int_{-3}^1 (2x + 9) dx &= \left[12x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^1 - [x^2 + 9x]_{-3}^1 = \\ &= \left[\frac{35}{3} - (-27) \right] - [10 - (-18)] = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Pág. 88

17. a) Na figura está representada a região do plano cuja área é o integral $\int_0^{2\pi} |\sen x| dx$.

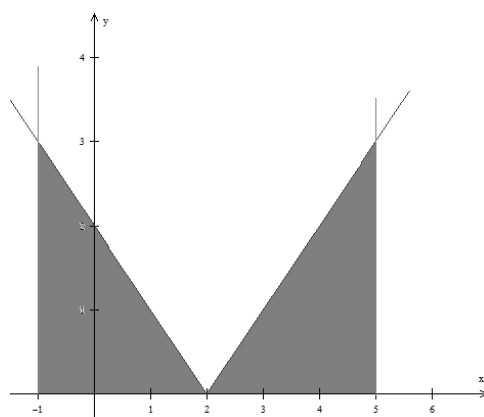


Tem-se, para $x \in [0, 2\pi]$, $\sen x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi$.

Portanto:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\sen x| dx &= \int_0^{\pi} \sen x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sen x dx = \\ &= [-\cos x]_0^{\pi} + [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = (-\cos \pi + \cos 0) + (-\cos 2\pi + \cos \pi) = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

b) Na figura está representada a região do plano cuja área é o integral $\int_{-1}^5 |x - 2| dx$.



Tem-se: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ e $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

$$\begin{aligned} \text{Portanto, } \int_{-1}^5 |x - 2| dx &= \int_{-1}^2 (2 - x) dx + \int_2^5 (x - 2) dx = \\ &= \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^5 = \left[2 - \left(-\frac{5}{2} \right) \right] + \left[\frac{5}{2} - (-2) \right] = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9. \end{aligned}$$

18. Tem-se, $\forall x < 0, 1 + \cos x \geq 0$ e $\forall x \geq 0, 1 + e^x > 0$, pelo que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^1 f(x) dx &= \int_{-\pi}^0 (1 + \cos x) dx + \int_0^1 (1 + e^x) dx = [x + \sin x]_{-\pi}^0 + [x + e^x]_0^1 = \\ &= [0 - (-\pi)] + [1 + e - (1)] = \pi + e \end{aligned}$$

Pág. 90

19. Tem-se, $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right], \cos x \leq 0$, pelo que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos x dx = -[-\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -[-\sin \pi - (-\sin \frac{\pi}{2})] = -(0 + 1) = -1$$

Pág. 98

20. a) $P(x^4 - 1) = P(x^4) - P(1) = \frac{x^5}{5} - x + c, c \in \mathbb{R}$

b) $P \frac{1}{\sqrt{9x^3}} = P \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{3} P \left(x^{-\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c = \frac{1}{3} \times \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + c =$
 $= -\frac{2}{3\sqrt{x}} + c, c \in \mathbb{R}$

c) $P(x^3 + 2)^2 = P(x^6 + 4x^3 + 4) = P(x^6) + 4P(x^3) + P(4) = \frac{x^7}{7} + 4 \left(\frac{x^4}{4} \right) + 4x + c =$
 $= \frac{x^7}{7} + x^4 + 4x + c, c \in \mathbb{R}$

d) $P \frac{x^2 - x + 3}{\sqrt[3]{x}} = P \left(\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{x}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) = P \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} - P \frac{x}{\sqrt[3]{x}} + P \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = P \left(x^{\frac{5}{3}} \right) - P \left(x^{\frac{2}{3}} \right) + 3P \left(x^{-\frac{1}{3}} \right) =$
 $= \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + 3 \times \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{8} \sqrt[3]{x^8} - \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + \frac{9}{2} \sqrt[3]{x^2} + c, c \in \mathbb{R}$

$$\text{e)} P\sqrt{x+2} = P\left[(x+2)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2\sqrt{(x+2)^3}}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{f)} (\sin x \cos x) = \frac{\sin^2 x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{g)} \sin(8x) = \frac{1}{8}P[8 \sin(8x)] = \frac{1}{8}[-\cos(8x)] + c = -\frac{\cos(8x)}{8} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{h)} P \cos(5x) = \frac{1}{5}P[5 \cos(5x)] = \frac{1}{5}\sin(5x) + c = \frac{\sin(5x)}{5} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{i)} P \frac{1}{3x-7} = \frac{1}{3}P\left(\frac{3}{3x-7}\right) = \frac{1}{3}\ln|3x-7| + c = \frac{\ln|3x-7|}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{j)} (x - \sqrt{x}) = P(x) - P\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{x^2}{2} - \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{k)} P\left(x - \frac{1}{2x}\right)^2 = P\left(x^2 - 1 + \frac{1}{4x^2}\right) = P(x^2) - P(1) + \frac{1}{4}P(x^{-2}) = \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{4} \times \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{x^3}{3} - x - \frac{1}{4x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{l)} (x+1)^6 = \frac{(x+1)^7}{7} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{m)} (e^x + 2x - 3) = P(e^x) + 2P(x) - P(3) = e^x + 2\frac{x^2}{2} - 3x + c = e^x + x^2 - 3x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{n)} P \frac{x^2 e^x - 1}{x^2} = P\left(e^x - \frac{1}{x^2}\right) = P(e^x) - P(x^{-2}) = e^x - \frac{x^{-1}}{-1} + c = e^x + \frac{1}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{o)} P(e^{x+3} + 2) = P(e^{x+3}) + P(2) = e^{x+3} + 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{p)} \frac{1}{1-x} = -P\left(\frac{-1}{1-x}\right) = -\ln|1-x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{q)} P \operatorname{tg}(5x-7) = P \frac{\sin(5x-7)}{\cos(5x-7)} = -\frac{1}{5}P \frac{-5 \sin(5x-7)}{\cos(5x-7)} = -\frac{\ln|\cos(5x-7)|}{5} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{r)} P \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x + 1}} = P\left[\cos x (2 \sin x + 1)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}P\left[2 \cos x (2 \sin x + 1)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{(2 \sin x + 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{2 \sin x + 1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{s)} P \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} = P\left[\operatorname{tg}^3 x \times \frac{1}{\frac{\cos^2 x}{(\operatorname{tg} x)'} }\right] = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{t)} (x^3 \sqrt{x^4 + 1}) = \frac{1}{4}P\left[4x^3(x^4 + 1)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{4} \times \frac{(x^4 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{\sqrt{(x^4 + 1)^3}}{6} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{u)} (x\sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{2}P\left[2x(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{v)} (e^{3x-4}) = \frac{1}{3} P(3e^{3x-4}) = \frac{e^{3x-4}}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{w)} P(xe^{x^2+1}) = \frac{1}{2} P(2xe^{x^2+1}) = \frac{e^{x^2+1}}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{x)} P(\sqrt{x}e^{2x\sqrt{x}}) &= \frac{1}{3} P(3\sqrt{x}e^{2x\sqrt{x}}) = & |(2x\sqrt{x})' &= (2x^{\frac{3}{2}})' = 3x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} \\ &= \frac{e^{2x\sqrt{x}}}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{y)} \frac{\ln^2(x)}{x} = P\left[\frac{1}{x}(\ln(x))^2\right] = \frac{(\ln(x))^3}{3} + c = \frac{\ln^3(x)}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{z)} P \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{\tan x - 1}} = P\left[\frac{1}{\cos^2 x} \times (\tan x - 1)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{(\tan x - 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{\tan x - 1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Pág. 99

$$\text{21. a)} P[\sin(2x) e^{\sin^2 x}] = e^{\sin^2 x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad |(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin(2x)$$

$$\begin{aligned} \text{b)} P[e^{x^2+4x+3}(x+2)] &= \frac{1}{2} P[e^{x^2+4x+3}(2x+4)] = & |(x^2+4x+3)' &= 2x+4 \\ &= \frac{e^{x^2+4x+3}}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} P[e^{5x} + x(x^2+1)^4] &= P(e^{5x}) + P[x(x^2+1)^4] = \frac{1}{5} P(5e^{5x}) + \frac{1}{2} P[2x(x^2+1)^4] = \\ &= \frac{e^{5x}}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+1)^5}{5} + c = \frac{e^{5x}}{5} + \frac{(x^2+1)^5}{10} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{d)} \frac{e^{2x}}{3+e^{2x}} = \frac{1}{2} P \frac{2e^{2x}}{3+e^{2x}} = \frac{\ln|3+e^{2x}|}{2} + c = \frac{\ln(3+e^{2x})}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} P \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+\cos^2 x}} &= P\left[\sin(2x) (1+\cos^2 x)^{-\frac{1}{2}}\right] = & |(1+\cos^2 x)' &= -2 \cos x \sin x = -\sin(2x) \\ &= -P\left[-\sin(2x) (1+\cos^2 x)^{-\frac{1}{2}}\right] = -\frac{(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -2\sqrt{1+\cos^2 x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} P[\sin(\pi x) + \cos(2\pi x)] &= \frac{1}{\pi} P[\pi \sin(\pi x)] + \frac{1}{2\pi} P[2\pi \cos(2\pi x)] = \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) + c = \frac{\sin(2\pi x) - 2 \cos(\pi x)}{2\pi} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{g)} [x \cos(x^2+4)] = \frac{1}{2} P[2x \cos(x^2+4)] = \frac{\sin(x^2+4)}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} P \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} &= P \frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{\sin^4 x} = P \frac{\cos x}{\sin^4 x} - P \frac{\cos x \sin^2 x}{\sin^4 x} = P[\cos x (\sin x)^{-4}] - P[\cos x (\sin x)^{-2}] = \\ &= \frac{(\sin x)^{-3}}{-3} - \frac{(\sin x)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad P \frac{x^2+3x-5}{x+1} &= P \left(x + 2 - \frac{7}{x+1} \right) = & \left| \frac{x^2+3x-5}{x+1} = x + 2 - \frac{7}{x+1} \right. \\ &= P(x) + P(2) - 7P \frac{1}{x+1} = \frac{x^2}{2} + 2x - 7 \ln|x+1| + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{22. a)} \quad \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^3} dx &= & \left| P \frac{1}{(x+1)^3} = P[(x+1)^{-3}] = \frac{(x+1)^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{2(x+1)^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \right. \\ &= \left[-\frac{1}{2(x+1)^2} \right]_1^2 = -\frac{1}{18} - \left(-\frac{1}{8} \right) = \frac{5}{72} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \int_0^4 (x\sqrt{x^2+9}) dx &= & \left| P[x\sqrt{x^2+9}] = \frac{1}{2}P[2x(x^2+9)^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{\sqrt{(x^2+9)^3}}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R} \right. \\ &= \left[\frac{\sqrt{(x^2+9)^3}}{3} \right]_0^4 = \frac{125}{3} - \frac{27}{3} = \frac{98}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \int_1^4 \left[x \operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{2} \right) \right] dx &= & \left| P \left[x \operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{2} \right) \right] = -\cos \left(\frac{x^2}{2} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R} \right. \\ &= \left[-\cos \left(\frac{x^2}{2} \right) \right]_1^4 = -\cos 8 - \left(-\cos \frac{1}{2} \right) = \cos \frac{1}{2} - \cos 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \text{Tem-se } \cos^2(\pi x) &= \frac{1+\cos(2\pi x)}{2}, \text{ pelo que} \\ P[\cos^2(\pi x)] &= P \frac{1+\cos(2\pi x)}{2} = P \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 2 \cos(2\pi x) \right] = P \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4\pi} P[2\pi \cos(2\pi x)] = \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{sen}(2\pi x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ \text{Portanto, } \int_0^1 \cos^2(\pi x) dx &= \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{sen}(2\pi x) \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} \right) - 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \text{Tem-se } P(\operatorname{sen}^3 x) &= P(\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x) = P[\operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x)] = P \operatorname{sen} x - P[\operatorname{sen} x \cos^2 x] = \\ &= P \operatorname{sen} x + P[(-\operatorname{sen} x) \cos^2 x] = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ \text{Portanto, } \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 x dx &= \left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^\pi = \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

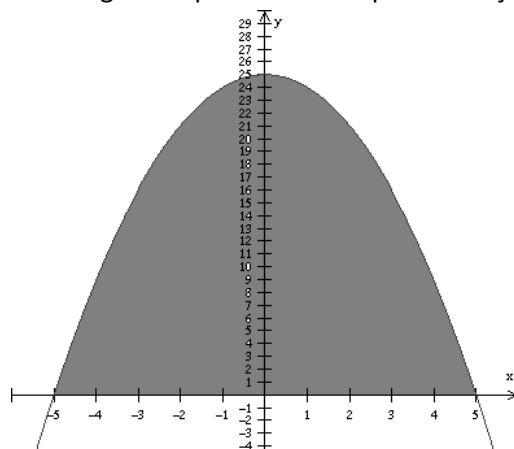
$$\text{f)} \quad \int_0^{\ln(3)} e^{2x} dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^{\ln(3)} = \frac{e^{2 \ln(3)}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4 \quad \left| P(e^{2x}) = \frac{1}{2} P(2e^{2x}) = \frac{e^{2x}}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \right.$$

$$\text{g)} \quad \int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} dx = [\ln|x+1|]_0^{e-1} = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

$$\text{h)} \quad \int_0^\pi \frac{\cos x}{3+\operatorname{sen} x} dx = [\ln|3+\operatorname{sen} x|]_0^\pi = \ln \left| 3 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right| - \ln|3+\operatorname{sen} 0| = \ln(4) - \ln(3) = \ln \left(\frac{4}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{-e^{2x}+9} dx &= & \left| P \frac{e^{2x}}{-e^{2x}+9} = -\frac{1}{2} P \frac{-2e^{2x}}{-e^{2x}+9} = -\frac{1}{2} \ln|-e^{2x}+9| + c, \quad c \in \mathbb{R} \right. \\ &= \left[-\frac{1}{2} \ln|-e^{2x}+9| \right]_{-\ln(2)}^{\ln(2)} = -\frac{1}{2} \ln(5) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{35}{4} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{7}{4} \right) = \ln \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \right) \end{aligned}$$

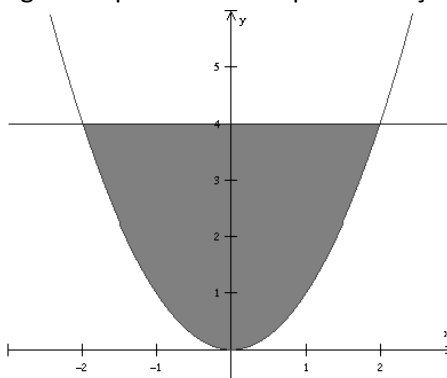
23. a) Na figura está representada a região do plano definida pela condição do enunciado.



A área desta região é:

$$\int_{-5}^5 (25 - x^2) dx = \left[25x - \frac{x^3}{3} \right]_{-5}^5 = \frac{250}{3} - \left(-\frac{250}{3} \right) = \frac{500}{3} \text{ unidades de área}$$

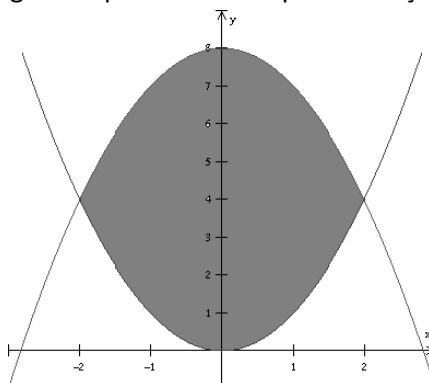
b) Na figura está representada a região do plano definida pela condição do enunciado.



Tem-se $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$, pelo que a área desta região é:

$$\int_{-2}^2 4 dx - \int_{-2}^2 x^2 dx = [4x]_{-2}^2 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = (8 + 8) - \left(\frac{8}{3} + \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3} \text{ unidades de área}$$

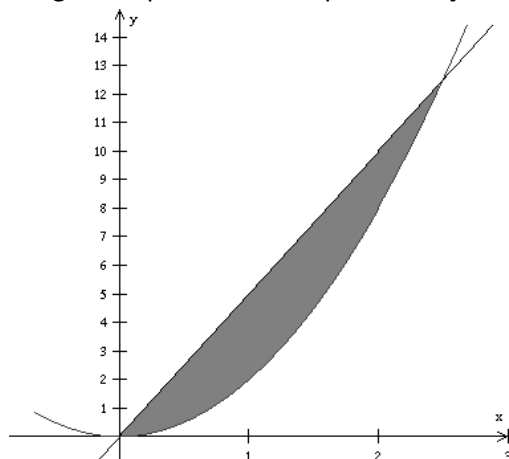
c) Na figura está representada a região do plano definida pela condição do enunciado.



Tem-se $x^2 = 8 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$, pelo que a área desta região é:

$$\int_{-2}^2 (8 - x^2) dx - \int_{-2}^2 x^2 dx = \left[8x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left(\frac{40}{3} + \frac{40}{3} \right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{8}{3} \right) = \frac{64}{3} \text{ unidades de área}$$

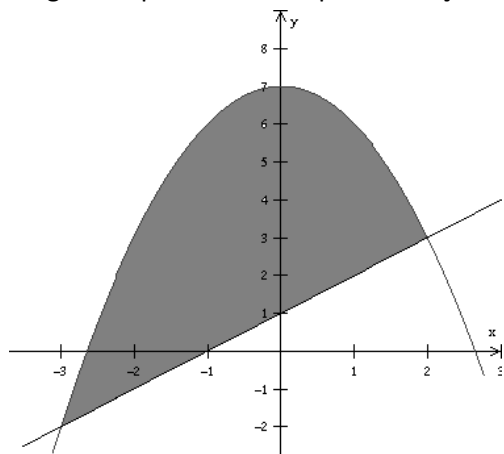
d) Na figura está representada a região do plano definida pela condição do enunciado.



Tem-se $2x^2 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{5}{2}$, pelo que a área desta região é:

$$\int_0^{\frac{5}{2}} (5x) dx - \int_0^{\frac{5}{2}} (2x^2) dx = \left[\frac{5x^2}{2} \right]_0^{\frac{5}{2}} - \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^{\frac{5}{2}} = \frac{125}{8} - \frac{125}{12} = \frac{125}{24} \text{ unidades de área}$$

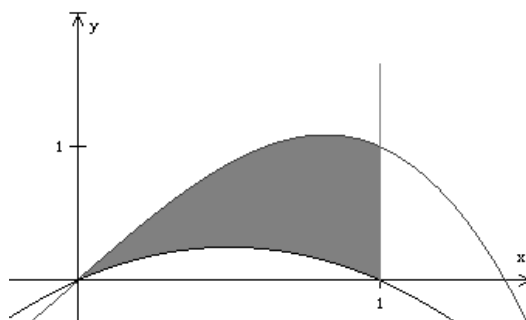
e) Na figura está representada a região do plano definida pela condição do enunciado



Tem-se $7 - x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$, pelo que a área desta região é:

$$\int_{-3}^2 (7 - x^2) dx - \int_{-3}^2 (x + 1) dx = \left[7x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^2 - \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-3}^2 = \left(\frac{34}{3} + 12 \right) - \left(4 - \frac{3}{2} \right) = \frac{125}{6} \text{ unidades de área}$$

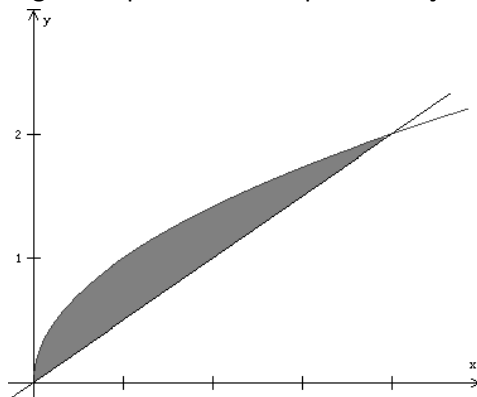
f) Na figura está representada a região do plano definida pela condição do enunciado.



A área desta região é:

$$\int_0^1 (2x - x^3) dx - \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12} \text{ unidades de área}$$

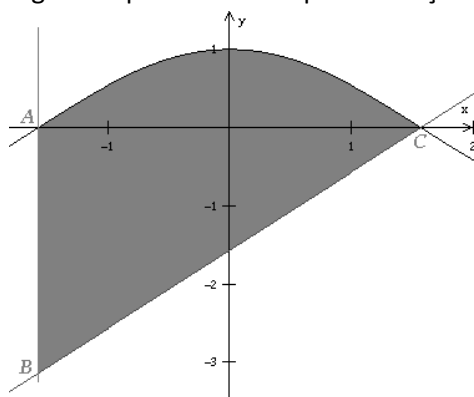
g) Na figura está representada a região do plano definida pela condição do enunciado.



Tem-se $\frac{x}{2} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$, pelo que a área desta região é:

$$\int_0^4 \sqrt{x} \, dx - \int_0^4 \frac{x}{2} \, dx = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} \right]_0^4 - \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^4 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3} \text{ unidades de área}$$

h) Na figura está representada a região do plano definida pela condição do enunciado.



A área desta região é igual à soma da área do triângulo $[ABC]$ com a área da porção de plano compreendida entre o eixo coordenado das abcissas e o gráfico da função definida por

$$y = \cos x \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Portanto, a área desta região é:

$$\frac{\overline{AC} \times \overline{AB}}{2} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \frac{\pi \times \pi}{2} + [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2} + 2 = \frac{\pi^2 + 4}{2} \text{ unidades de área}$$

24. Tem-se:

• $f(0) = \int_0^0 [(t^2 + 1) \ln(2t + e)] dt = 0$, pelo que a reta passa pela origem do referencial.

• $f'(x) = (x^2 + 1) \ln(2x + e)$ e, então, $f'(0) = (0^2 + 1) \ln(2 \times 0 + e) = \ln e = 1$.

A equação reduzida da reta que tem declive igual a 1 e que passa pelo ponto de coordenadas $(0, 0)$ é $y = x$.

25.a) $f'(x) = \left(\int_1^x \frac{e^t}{t-1} dt \right)' = \frac{e^x}{x-1}$. Ora, $\forall x \in]1, +\infty[$, $f'(x) > 0$, pelo que f é crescente em todo o seu domínio, isto é, em $]1, +\infty[$.

$$\text{b)} f''(x) = \left(\frac{e^x}{x-1}\right)' = \frac{(e^x)'(x-1) - e^x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Portanto, como $\forall x \in]1, +\infty[$, $e^x > 0 \wedge (x-1)^2 > 0$, o sinal de f'' é o mesmo do que o de $x-2$.

Portanto, pode concluir-se que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]1, 2]$ e a concavidade voltada para cima em $[2, +\infty[$.

26. a)

Tem-se, para qualquer x real:

$$f(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2} dt = - \int_{-x}^0 e^{-t^2} dt$$

Como a função definida por $y = e^{-t^2}$ é par, o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo

Oy, pelo que $\int_{-x}^0 e^{-t^2} dt = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Portanto, para qualquer x real,

$$f(-x) = - \int_{-x}^0 e^{-t^2} dt = - \int_0^x e^{-t^2} dt = -f(x)$$

Concluimos, assim, que f é uma função ímpar.

b)

Tem-se:

$$\begin{aligned} t \geq 1 &\Rightarrow t^2 \geq t \Rightarrow -t^2 \leq -t \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{-t^2} \leq e^{-t} \end{aligned}$$

Tem-se, também, que $\forall t \in \mathbb{R}$, $-t^2 \leq 0$, pelo que $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-t^2} \leq e^0$, ou seja,

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t^2} \leq 1.$$

Vem, então:

Se $0 \leq x \leq 1$,

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^x 1 dt \leq 1$$

Se $x > 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x e^{-t^2} dt = \\ &= \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt \leq \\ &\leq \int_0^1 1 dt + \int_1^x e^{-t} dt \leq 1 + [-e^{-t}]_1^x = \\ &= 1 + (-e^{-x} + e^{-1}) = 1 + e^{-1} - e^{-x} \leq 1 + e^{-1} \end{aligned}$$

Portanto, tem-se:

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq 1 + e^{-1}$$

Por outro lado, tem-se:

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t^2} > 0$$

pelo que, para qualquer $x \geq 0$, $\int_0^x e^{-t^2} dt$ designa uma área.

Portanto, tem-se:

$$x \geq 0 \implies f(x) \geq 0$$

Concluimos, assim, que:

$$x \geq 0 \implies 0 \leq f(x) \leq 1 + e^{-1}$$

Como a função f é ímpar, tem-se:

$$x \leq 0 \implies -1 - e^{-1} \leq f(x) \leq 0$$

Portanto,

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 - e^{-1} \leq f(x) \leq 1 + e^{-1}$$

Logo, a função f é limitada.

c)

Tem-se:

$$f'(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)' = e^{-x^2}$$

Portanto, tem-se $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$, pelo que f é crescente.

Tem-se, também:

$$f''(x) = (e^{-x^2})' = -2x e^{-x^2},$$

pelo que $f''(x) = 0 \iff x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$
f	$\cup$	p.i.	$\cap$

Logo, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]-\infty, 0]$ e tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $[0, +\infty[$.

O ponto de abscissa 0 é ponto de inflexão do gráfico de f .

d)

$$f(0) = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0$$

$$f'(0) = e^{-0^2} = 1$$

Portanto, a reta passa na origem do referencial e tem declive igual a 1, pelo que a sua equação reduzida é $y = x$.

e)

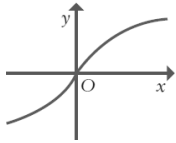
Como já vimos, tem-se $\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t^2} \leq 1$.

Portanto, tem-se, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^x 1 dt = x$$

Portanto, $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq x$.

f)



27. Tem-se, do enunciado, $x(0) = 8$, $v(0) = 0$ e $v(1) = 30$.

a) $P[a(t)] = P(A - 6t^2) = At - 6 \times \frac{t^3}{3} + c = At - 2t^3 + c, c \in \mathbb{R}$

Portanto, $v(t)$ é da forma $At - 2t^3 + c, A > 0, c \in \mathbb{R}$.

Como $v(0) = 0$, pode concluir-se que $c = 0$, pelo que $v(t) = At - 2t^3, A > 0$.

Como $v(1) = 30$, tem-se $A - 2 = 30$, pelo que $A = 32$ e, portanto, $v(t) = 32t - 2t^3$.

Ora, $32t - 2t^3 = 0 \Leftrightarrow 2t(16 - t^2) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = -4 \vee t = 4$; como se tem $t \geq 0$, conclui-se que $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 4$.

b) $[v(t)] = P(32t - 2t^3) = 32 \times \frac{t^2}{2} - 2 \times \frac{t^4}{4} + c_1 = 16t^2 - \frac{t^4}{2} + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$

Portanto, $x(t)$ é da forma $16t^2 - \frac{t^4}{2} + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$.

Como $x(0) = 8$, pode concluir-se que $c_1 = 8$, pelo que $x(t) = 16t^2 - \frac{t^4}{2} + 8$.

Portanto, $x(4) = 16 \times 16 - \frac{4^4}{2} + 8 = 136$ e $x(6) = 16 \times 36 - \frac{6^4}{2} + 8 = -64$.

Tem-se a seguinte tabela de variação de sinais de v no intervalo $[0, 6]$ e as abcissas do ponto material nos instantes $t = 0, t = 4$ e $t = 6$.

t	0		4		6
$v(t)$	0	+	0	-	
$x(t)$	8		136		-64

Então, a distância percorrida pelo ponto quando decorreram 6 segundos foi igual a:

$$(136 - 8) + [136 - (-64)] = 128 + 200 = 328 \text{ metros}$$

Pág. 101

28. $P[CMg(x)] = P \frac{3500}{x^2} = 3500Px^{-2} = \frac{3500x^{-1}}{-1} + c = -3500x^{-1} + c, c \in \mathbb{R}$

Portanto, $C(x)$ é da forma $-\frac{3500}{x} + c, c \in \mathbb{R}$.

Então, $C(1100) - C(1000) = -\frac{3500}{1100} + c - \left(-\frac{3500}{1000} + c\right) = -\frac{3500}{1100} + \frac{3500}{1000} \approx 0,318 \text{ €}$.

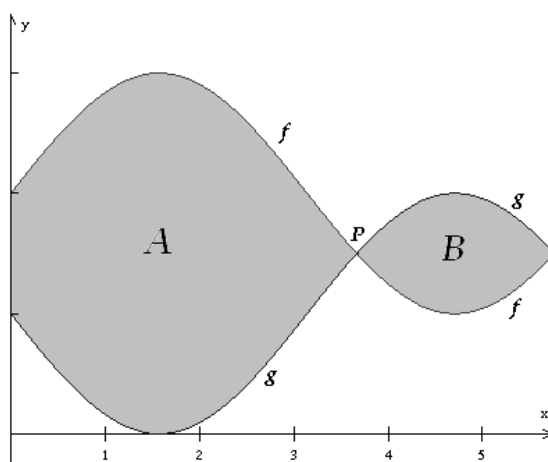
29. Seja T a função que dá a temperatura, em $^{\circ}\text{C}$, do líquido no instante t (t em minutos).

Tem-se $P(-e^{-0,16t}) = \frac{100}{16}P(-0,16e^{-0,16t}) = \frac{100}{16}e^{-0,16t} + c$, $c \in \mathbb{R}$, pelo que $T(t)$ é da forma $\frac{100}{16}e^{-0,16t} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Como $T(0) = 95$, pode concluir-se que $\frac{100}{16} + c = 95$, ou seja, $c = 88,75$, pelo que

$T(t) = \frac{100}{16}e^{-0,16t} + 88,75$ e, portanto, $T(2) = \frac{100}{16}e^{-0,32} + 88,75 \approx 93^{\circ}\text{C}$.

30.a) Na figura abaixo estão representados os gráficos das restrições das funções f e g ao intervalo $\left[0, \frac{11\pi}{6}\right]$, o ponto P , em que os dois gráficos se intersectam, e duas regiões do plano, A e B , cujas áreas pretendemos adicionar.



Começemos por determinar a abcissa do ponto P :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sin x + 2 = 1 - \sin x \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, a abcissa do ponto P é $\frac{7\pi}{6}$.

• Área da região A :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{7\pi}{6}} [f(x) - g(x)] dx &= \int_0^{\frac{7\pi}{6}} (1 + 2 \sin x) dx = \int_0^{\frac{7\pi}{6}} 1 dx + 2 \int_0^{\frac{7\pi}{6}} \sin x dx = \\ &= [x]_0^{\frac{7\pi}{6}} + 2[-\cos x]_0^{\frac{7\pi}{6}} = \frac{7\pi}{6} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = \frac{7\pi}{6} + \sqrt{3} + 2 \text{ unidades de área} \end{aligned}$$

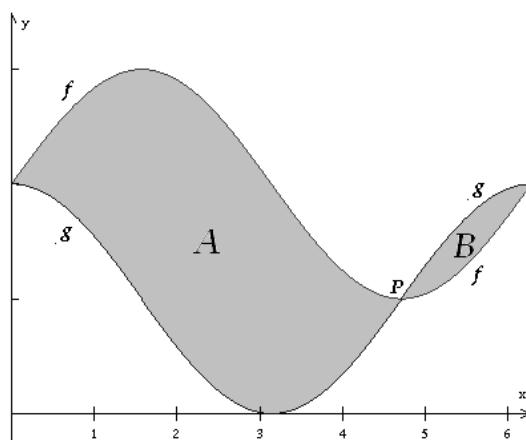
• Área da região B :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} [g(x) - f(x)] dx &= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} [-1 - 2 \sin x] dx = \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} (-1) dx - 2 \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \sin x dx = \\ &= [-x]_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} - 2[-\cos x]_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} = \left(-\frac{11\pi}{6} + \frac{7\pi}{6}\right) - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3} \text{ unidades de área} \end{aligned}$$

Portanto, a área da região delimitada pelos gráficos das duas funções é igual a:

$$\left(\frac{7\pi}{6} + \sqrt{3} + 2\right) + \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right), \text{ ou seja, } \frac{\pi}{2} + 3\sqrt{3} + 2 \text{ unidades de área}$$

b) Na figura abaixo estão representados os gráficos das restrições das funções f e g ao intervalo $[0, 2\pi]$, o ponto P , em que os dois gráficos se intersectam, e duas regiões do plano, A e B , cujas áreas pretendemos adicionar.



Começemos por determinar a abcissa do ponto P :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \sin x + 2 = \cos x + 1 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\cos x - \sin x)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x - 2 \cos x \sin x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow -\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}; \text{ destes valores, os que pertencem a }]0, 2\pi[\text{ são } \frac{\pi}{2}, \pi \text{ e } \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Tem-se:

- $\sin \frac{\pi}{2} + 2 = \cos \frac{\pi}{2} + 1$ é uma proposição falsa, pelo que $\frac{\pi}{2}$ não é solução da condição.
- $\sin \pi + 2 = \cos \pi + 1$ é uma proposição falsa, pelo que π não é solução da condição.
- $\sin \frac{3\pi}{2} + 2 = \cos \frac{3\pi}{2} + 1$ é uma proposição verdadeira, pelo que $\frac{3\pi}{2}$ é solução da condição.

Portanto, a abcissa do ponto P é $\frac{3\pi}{2}$.

• Área da região A :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} [f(x) - g(x)] dx &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x - \cos x + 1) dx = [-\cos x - \sin x + x]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \\ &= \left(0 + 1 + \frac{3\pi}{2}\right) - (-1 - 0 + 0) = \frac{3\pi}{2} + 2 \text{ unidades de área} \end{aligned}$$

• Área da região B :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} [f(x) - g(x)] dx &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (-\sin x + \cos x - 1) dx = [\cos x + \sin x - x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \\ &= (1 + 0 - 2\pi) - \left(0 - 1 - \frac{3\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} \text{ unidades de área} \end{aligned}$$

Portanto, a área da região delimitada pelos gráficos das duas funções é igual a:

$$\left(\frac{3\pi}{2} + 2\right) + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right), \text{ ou seja, } \pi + 4 \text{ unidades de área}$$

31. a) • Domínio

$$D_f = \mathbb{R}$$

• Zeros

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = 4 \end{aligned}$$

• Assíntotas

f é uma função polinomial de grau 3, pelo que é contínua em $\mathbb{R}$.

Não existe qualquer assíntota ao seu gráfico e tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• Monotonia e extremos

$$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + 8x)' = 3x^2 - 12x + 8$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6-2\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	máx. rel.	$\searrow$	mín. rel.	$\nearrow$

f é crescente em $\left] -\infty, \frac{6-2\sqrt{3}}{3} \right]$

e em $\left[\frac{6+2\sqrt{3}}{3}, +\infty \right[$ e é decrescente em

$$\left[\frac{6-2\sqrt{3}}{3}, \frac{6+2\sqrt{3}}{3} \right];$$

• Concavidades e pontos de inflexão do gráfico

$$f''(x) = (3x^2 - 12x + 8)' = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2, \quad f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2 \quad \text{e} \quad f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

O gráfico tem a

concavidade voltada para baixo

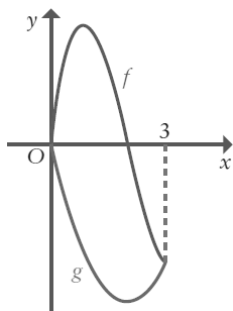
em $]-\infty, 2]$ e tem a concavidade voltada

para cima em $[2, +\infty[$; o ponto de

coordenadas $(2, 0)$ é ponto de inflexão

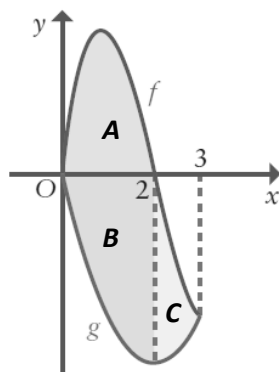
do gráfico.

b)



$$\text{c) } \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^3 (x^3 - 7x^2 + 12x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 6x^2 \right]_0^3 = \frac{81}{4} - \frac{189}{3} + 54 = \frac{45}{4}$$

d) Na figura abaixo está representada a região delimitada pelos gráficos das funções f e g , entre 0 e 3, decomposta em três regiões, designadas por A , B e C .



Ora,

- $\int_0^2 f(x) dx$ é igual à área da região A .
- $\int_0^2 [-g(x)] dx = -\int_0^2 g(x) dx$ é igual à área da região B .
- $\int_2^3 [f(x) - g(x)] dx$ é igual à área da região C .

Portanto, a soma dos três integrais é igual à área da região delimitada pelos gráficos das funções f e g , entre 0 e 3.

Cálculo da área:

- Área da região A :

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 = 4 - 16 + 16 = 4 \text{ unidades de área}$$

- Área da região B :

$$\int_0^2 [-g(x)] dx = \int_0^2 (-x^2 + 4x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^2 = -\frac{8}{3} + 8 = \frac{16}{3} \text{ unidades de área}$$

- Área da região C :

$$\begin{aligned} \int_2^3 [f(x) - g(x)] dx &= \int_2^3 (x^3 - 7x^2 + 12x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 6x^2 \right]_2^3 = \\ &= \left(\frac{81}{4} - 63 + 54 \right) - \left(4 - \frac{56}{3} + 24 \right) = \frac{23}{12} \text{ unidades de área} \end{aligned}$$

$$\text{Área total: } 4 + \frac{16}{3} + \frac{23}{12} = \frac{45}{4} \text{ unidades de área}$$

e) Os valores são iguais.

Tema 7 | números Complexos

1. Introdução aos números complexos

Pág. 104

1. Tem-se $p = 6$ e $q = -2$.

Portanto, $\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = \sqrt{(-1)^2 + 2^3} = \sqrt{9} = 3$ e, então,

$$x = \sqrt[3]{1+3} + \sqrt[3]{1-3} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$$

Verificação:

$$\begin{aligned} & (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})^3 + 6(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) - 2 = \\ & = (\sqrt[3]{4})^3 + 3(\sqrt[3]{4})^2(-\sqrt[3]{2}) + 3\sqrt[3]{4}(-\sqrt[3]{2})^2 + (-\sqrt[3]{2})^3 + 6\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{2} - 2 = \\ & = 4 - 3\sqrt[3]{2^5} + 3\sqrt[3]{2^4} - 2 + 6\sqrt[3]{2^2} - 6\sqrt[3]{2} - 2 = \\ & = -3 \times 2\sqrt[3]{2^2} + 3 \times 2\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2^2} - 6\sqrt[3]{2} = 0 \end{aligned}$$

Pág. 107

2.

Para quaisquer números reais a, b, c, d , e e f , tem-se:

$$\begin{aligned} & \bullet (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = \\ & = (c, d) + (a, b) \\ & \bullet [(a, b) + (c, d)] + (e, f) = \\ & = (a+c, b+d) + (e, f) = \\ & = ((a+c)+e, (b+d)+f) = \\ & = (a+(c+e), b+(d+f)) = \\ & = (a, b) + (c+e, d+f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)] \\ & \bullet (a, b) \times [(c, d) + (e, f)] = \\ & = (a, b) \times (c+e, d+f) = \\ & = (a(c+e) - b(d+f), a(d+f) + b(c+e)) = \\ & = (ac+ae - bd-bf, ad+af+bc+be) = \\ & = (ac-bd, ad+bc) + (ae-bf, af+be) = \\ & = (a, b) \times (c, d) + (a, b) \times (e, f) \end{aligned}$$

Portanto, a operação $+$ é comutativa e associativa e a operação $\times$ é distributiva, relativamente à operação $+$.

Pág. 108

3.

Tem-se, para qualquer (a, b) pertencente a $\mathbb{R}^2$, $(a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$.

Portanto, $(0, 0)$ é efetivamente elemento neutro da operação $+$.

Pág. 110

4. a) -2 b) 7 c) 3 d) 1 e) -6

f) 0 g) 0 h) 5

5. $z = -7 + 8i$

6.

Números reais: z_5 e z_8

Números imaginários: z_1, z_2, z_3, z_4, z_6 e z_7

Números imaginários puros: z_2, z_3 e z_6

Pág. 111

$$7. z = w \Leftrightarrow 2x + (3y - 5)i = y + xi \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 3y - 5 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 6x - 5 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$8. 2i^{76} + 3i^{103} - i^{265} = \quad | 76 = 4 \times 19 + 0; 103 = 4 \times 25 + 3; 265 = 4 \times 66 + 1 \\ = 2i^0 + 3i^3 - i^1 = 2 - 3i - i = 2 - 4i$$

$$9. (-1 + 4i)(5 - 2i) - (2 - 3i)^2 = -5 + 2i + 20i - 8i^2 - (4 - 12i + 9i^2) = \\ = -5 + 22i + 8 - 4 + 12i + 9 = 8 + 34i$$

Pág. 112

10.

$$z_1 = 3 + 2i; z_2 = -3 + 3i; z_3 = -1 - 3i;$$

$$z_4 = 1 - 2i; z_5 = -2; z_6 = i$$

11. É z_2 .

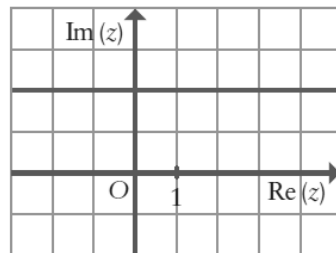
A abscissa do afixo de z_1 não é igual à soma das abscissas dos afixos de u e de w ; portanto, z_1 não pode ser igual a $u + w$.

A ordenada do afixo de z_3 não é igual à soma das ordenadas dos afixos de u e de w ; portanto, z_3 não pode ser igual a $u + w$.

Pág. 113

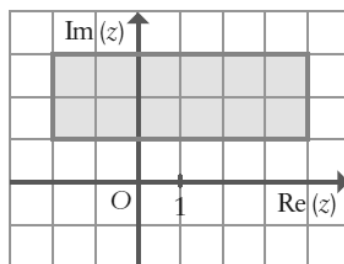
12. a) O conjunto dos números complexos que verificam esta condição é o conjunto dos números complexos da forma $(x, 2)$, com $x \in \mathbb{R}$.

A representação geométrica deste conjunto é:



b) O conjunto dos números complexos que verificam esta condição é o conjunto dos números complexos (x, y) , em que x e y são números reais tais que $-2 \leq x \leq 4$ e $1 \leq y \leq 3$.

A representação geométrica deste conjunto é:



13. Na figura está representado o conjunto dos números complexos (x, y) , em que x e y são números reais tais que $2 \leq x \leq 4$ e $-3 \leq y \leq -1$.

Uma condição em $\mathbb{C}$ que define este conjunto é $2 \leq \text{Re}(z) \leq 4 \wedge -3 \leq \text{Im}(z) \leq -1$.

2. Operar com números complexos

Pág. 114

14. a) $\overline{1 + 5i} = 1 - 5i$

b) $\overline{2 - 3i} = 2 + 3i$

c) $\overline{-1 + i} = -1 - i$

d) $\overline{-4 - 3i} = -4 + 3i$

e) $\overline{6} = \overline{6 + 0i} = 6 - 0i = 6$

f) $\overline{-5i} = \overline{0 - 5i} = 0 + 5i = 5i$

Pág. 115

15. $\overline{(2 + i)}(3 - i)^2 + \overline{3i} - 2i(5 + i) = (2 - i)(9 - 6i + i^2) - 3i - 10i - 2i^2 =$
 $= (2 - i)(8 - 6i) - 13i + 2 = 16 - 12i - 8i - 6 - 13i + 2 = 12 - 33i$

Pág. 116

16. Na figura ao lado, está ilustrada a situação descrita.

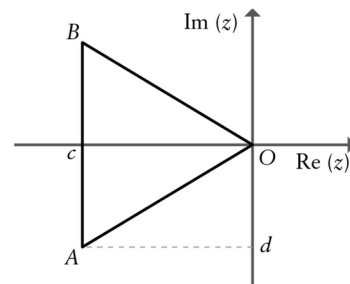
Seja $z = c + di$, com $c < 0$ e $d < 0$.

Tem-se $\frac{-2d \times (-c)}{2} = 4\sqrt{3}$ e $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{-d}{-c}$

Ora, $\begin{cases} dc = 4\sqrt{3} \\ \frac{d}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dc = 4\sqrt{3} \\ d = \frac{\sqrt{3}}{3}c \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3}c^2 = 4\sqrt{3} \\ d = \frac{\sqrt{3}}{3}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 = 12 \\ d = \frac{\sqrt{3}}{3}c \end{cases} \stackrel{(c < 0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} c = -2\sqrt{3} \\ d = -2 \end{cases}$

Portanto, $z = -2\sqrt{3} - 2i$.



Pág. 117

17. a) $|-7| = 7$

b) $|i| = 1$

c) $|-2i| = 2$

18. a) $|-5 - 12i| = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$

b) $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$

c) $|2 - 5i| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

Pág. 119

19. Seja $z = a + bi$, com $a > 0$ e $b < 0$.

Tem-se:

$$\bullet z + \bar{z} = 8 \Leftrightarrow (a + bi) + (a - bi) = 8 \Leftrightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$\bullet |z| = 5 \Leftrightarrow |4 + bi| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{4^2 + b^2} = 5 \Leftrightarrow b^2 = 9 \stackrel{(b < 0)}{\Leftrightarrow} b = -3$$

Portanto, $z = 4 - 3i$.

20. Tem-se

$$\begin{aligned} (z + i)(\bar{z} - i) &= (z + i)(\bar{z} + i) = \\ &= (z + i)\overline{(z + i)} = |z + i|^2 \end{aligned}$$

Pág. 120

21. Na figura ao lado, está ilustrada a situação descrita.

Seja $z = c + di$, com $c > 0$ e $d > 0$.

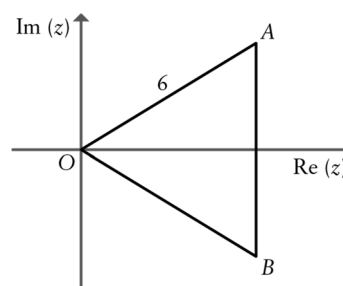
Dado que o triângulo é equilátero, tem-se

$$\overline{AB} = \overline{OA} = 6, \text{ pelo que } d = 3.$$

Então, tem-se $c^2 + 3^2 = 6^2$, pelo que

$$c = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

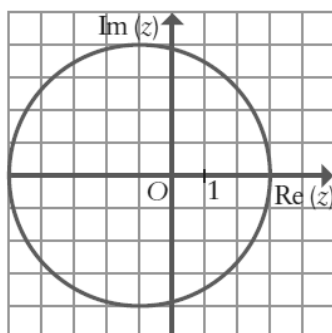
Portanto, $z = -2\sqrt{3} - 2i$.



Pág. 121

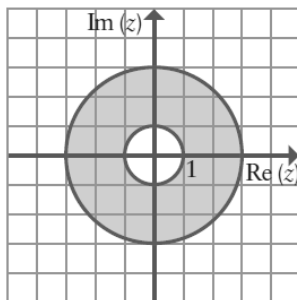
22. a) $|z + 1| = 4$ se e só se o afixo de z pertence à circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-1, 0)$ e raio 4.

Representação no plano de Argand:



b) $1 \leq |z| \leq 3$ se e só se o afixo de z pertence à coroa circular definida pelas circunferências de centros na origem e raios 1 e 3.

Representação no plano de Argand:



c) • Tem-se $|z + i| \geq |z - 1| \Leftrightarrow |z - (-i)| \geq |z - 1|$

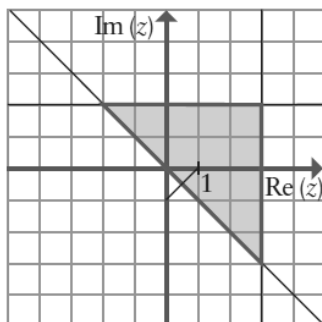
Portanto, $|z + i| \geq |z - 1|$ se e só se o afixo de z pertence ao semiplano definido pela mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos de coordenadas $(0, -1)$ e $(1, 0)$ e que contém este último.

• $\operatorname{Re}(z) \leq 3$ se e só se o afixo de z pertence ao semiplano esquerdo definido pela reta paralela ao eixo imaginário que intersesta o eixo real no ponto de abscissa 3.

• $\operatorname{Im}(z) \leq 2$ se e só se o afixo de z pertence ao semiplano inferior definido pela reta paralela ao eixo real que intersesta o eixo imaginário no ponto de ordenada 2.

Portanto, a conjunção daquelas três condições define o conjunto de pontos comuns aos três conjuntos descritos.

Representação no plano de Argand:



Pág. 122

23. a) $\frac{1}{i} = \frac{1}{|i|^2} (\bar{i}) = \bar{i} = -i$

b) $\frac{1}{3i} = \frac{1}{|3i|^2} (\overline{3i}) = \frac{1}{9} (-3i) = -\frac{1}{3}i$

c) $\frac{1}{-2i} = \frac{1}{|-2i|^2} \times (\overline{-2i}) = \frac{1}{4} (2i) = \frac{1}{2}i$

d) $\frac{1}{2+3i} = \frac{1}{|2+3i|^2} (\overline{2+3i}) = \frac{1}{\sqrt{13}^2} (2-3i) = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$

e) $\frac{1}{1-i} = \frac{1}{|1-i|^2} (\overline{1-i}) = \frac{1}{\sqrt{2}^2} (1+i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Pág. 123

24. Seja $z = a + ai$, com $a > 0$.

$$\text{Tem-se } \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z} = \frac{1}{a^2+a^2} (a - ai) = \frac{a}{2a^2} - \frac{a}{2a^2} i = \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a} i.$$

Portanto, o ponto B pertence à bissetriz do quarto quadrante e, então, o triângulo $[AOB]$ é retângulo, tendo-se $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$.

Então, a área do triângulo é dada por $\frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{|z| \times \left| \frac{1}{z} \right|}{2} = \frac{1}{2}$ unidades de área.

Pág. 124

$$25. \text{ a) } \frac{3+2i}{2+5i} = \frac{(3+2i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \frac{6-15i+4i+10}{4+25} = \frac{16}{29} - \frac{11}{29} i$$

$$\text{ b) } \frac{13}{5-12i} = \frac{13(5+12i)}{(5-12i)(5+12i)} = \frac{65+156i}{25+144} = \frac{65}{169} + \frac{156}{169} i = \frac{5}{13} + \frac{12}{13} i$$

$$\text{ c) } \frac{12i}{3+4i} = \frac{12i(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{48+36i}{9+16} = \frac{48}{25} + \frac{36}{25} i$$

$$\text{ d) } \frac{(7+8i)(2-5i)}{5-12i} = \frac{14-35i+16i+40}{5-12i} = \frac{54-19i}{5-12i} = \frac{(54-19i)(5+12i)}{(5-12i)(5+12i)} = \frac{270+648i-95i+228}{25+144} = \frac{498}{169} + \frac{553}{169} i$$

$$\text{ e) } \frac{3}{3-4i} + \frac{1}{3+4i} = \frac{3(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} + \frac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{9+12i}{9+16} + \frac{3-4i}{9+16} = \frac{12+8i}{25} = \frac{12}{25} + \frac{8}{25} i$$

26. Seja $z = x + yi$.

$$\frac{z-1-i}{z+1+i} = \frac{x+yi-1-i}{x+yi+1+i} = \frac{(x-1)+(y-1)i}{(x+1)+(y+1)i} = \frac{[(x-1)+(y-1)i][(x+1)-(y+1)i]}{[(x+1)+(y+1)i][(x+1)-(y+1)i]} =$$

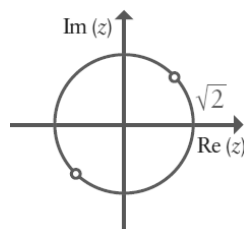
$$= \frac{(x-1)(x+1)+(y-1)(y+1)}{(x+1)^2+(y+1)^2} + \frac{(y-1)(x+1)-(y+1)(x-1)}{(x+1)^2+(y+1)^2} i =$$

$$= \frac{x^2+y^2-2}{(x+1)^2+(y+1)^2} + \frac{2y-2x}{(x+1)^2+(y+1)^2} i$$

Portanto, $\frac{z-1-i}{z+1+i}$ é imaginário puro se e só se $x^2 + y^2 - 2 = 0 \wedge 2y - 2x \neq 0$, ou seja, se e só se $x^2 + y^2 = 2 \wedge y \neq x$.

A esta condição corresponde a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$, excluindo os pontos dessa circunferência que pertencem à reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares.

Representação no plano de Argand:



3. Forma trigonométrica de um número complexo

Pág. 127

27. a) $i = 0 + i = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$; portanto, $\frac{\pi}{2}$ é um argumento positivo de i .

$\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$ é outro argumento positivo de i .

$\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$ é um argumento negativo de i .

b) $-1 = -1 + 0i = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi$; portanto, π é um argumento positivo de -1 .

$\pi - 2\pi = -\pi$ é um argumento negativo de -1 .

$\pi - 4\pi = -3\pi$ é outro argumento negativo de -1 .

c) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$; portanto, $\frac{\pi}{4}$ é um argumento positivo de i , pelo que uma expressão

geral dos argumentos de $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ é $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pág. 128

28. a) $e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i \operatorname{sen}(2\pi) = 1 + i \times 0 = 1$

b) $e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + i \times (-1) = -i$

c) $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

29.

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} &= \frac{\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha}{\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta} = \\ &= \cos(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = e^{i(\alpha - \beta)} = e^{i\alpha - i\beta} \end{aligned}$$

Pág. 130

30. a) O afixo de $-6i$ é o ponto de coordenadas $(0, -6)$, pelo que se pode concluir que $-6i = 6e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

b) O afixo de 7 é o ponto de coordenadas $(7, 0)$, pelo que se pode concluir que $7 = 7e^{0i}$.

c) O afixo de $9i$ é o ponto de coordenadas $(0, 9)$, pelo que se pode concluir que $9i = 9e^{i\frac{\pi}{2}}$.

d) O afixo de -12 é o ponto de coordenadas $(-12, 0)$, pelo que se pode concluir que $-12 = 12e^{i\pi}$.

e) O afixo de $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ é o ponto de coordenadas $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, pelo que se pode concluir que um argumento de $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ é $\frac{5\pi}{4}$.

Como $|\sqrt{2} - \sqrt{2}i| = \sqrt{2+2} = 2$, pode-se concluir que $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

f) O afixo de $5 - 5i$ é o ponto de coordenadas $(5, -5)$, pelo que se pode concluir que um argumento de $5 - 5i$ é $\frac{7\pi}{4}$.

Como $|5 - 5i| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$, pode-se concluir que $5 - 5i = \sqrt{50}e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

31. a) $10e^{2\pi i} = 10[\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)] = 10(1 + i \times 0) = 10$

b) $5e^{i\frac{\pi}{2}} = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) = 5(0 + i \times 1) = 5i$

c) $\sqrt{12}e^{i\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{12}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{12}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -3 - \sqrt{3}i$

Pág. 131

32. Em cada uma das alíneas seguintes, seja α um argumento do respetivo número complexo.

a) Tem-se:

- $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$
- $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$; então, como o afixo de $1 + \sqrt{3}i$ está no primeiro quadrante, um valor para α é $\frac{\pi}{3}$.

Portanto, $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) Tem-se:

- $|\sqrt{12} - 2i| = \sqrt{12+4} = 4$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-2}{\sqrt{12}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; então, como o afixo de $\sqrt{12} - 2i$ está no terceiro quadrante, um valor para α é $\frac{7\pi}{6}$.

Portanto, $\sqrt{12} - 2i = 4e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

c) Tem-se:

- $|\sqrt{18} + \sqrt{6}i| = \sqrt{18+6} = \sqrt{24}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; então, como o afixo de $\sqrt{18} + \sqrt{6}i$ está no segundo quadrante, um valor para α é $\frac{5\pi}{6}$.

Portanto, $\sqrt{18} + \sqrt{6}i = \sqrt{24}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

d) Tem-se:

$$\bullet |-2 + 5i| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

$\bullet \operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{2}$; então, como o afixo de $-2 + 5i$ está no segundo quadrante, um valor para α é $\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{2}\right) + \pi$.

Portanto, $-2 + 5i = \sqrt{29}e^{i[\operatorname{arctg}(-\frac{5}{2})+\pi]}$.

Pág. 132

33. Tem-se:

$$\bullet |1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$\bullet \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$; então, como o afixo de $1 - \sqrt{3}i$ está no quarto quadrante, um valor para α é $\frac{5\pi}{3}$.

Portanto, $1 - \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

Ora,

$$\begin{aligned}\rho e^{i\alpha} &= 1 - \sqrt{3}i \Leftrightarrow \rho e^{i\alpha} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho &= 2 \wedge \alpha = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

O valor de α pertencente a $[6\pi, 8\pi]$ obtém-se para $k = 3$; esse valor é $\frac{5\pi}{3} + 6\pi$, ou seja, $\frac{23\pi}{3}$.

Pág. 133

34. a) Seja α um argumento do número complexo $3 + \sqrt{3}i$.

Tem-se $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; então, como o afixo de $3 + \sqrt{3}i$ está no primeiro quadrante,

$$\operatorname{Arg}(3 + \sqrt{3}i) = \frac{\pi}{6}.$$

b) O afixo de $-i$ é o ponto de coordenadas $(0, -1)$, pelo que se pode concluir que $\operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$.

c) O afixo de -1 é o ponto de coordenadas $(-1, 0)$, pelo que se pode concluir que $\operatorname{Arg}(-1) = \pi$.

d) Seja α um argumento do número complexo $-2 - \sqrt{12}i$.

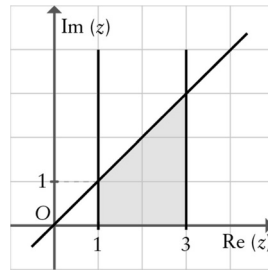
Tem-se $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\sqrt{12}}{-2} = \sqrt{3}$; então, como o afixo de $-2 - \sqrt{12}i$ está no terceiro quadrante,

$$\operatorname{Arg}(-2 - \sqrt{12}i) = -\frac{2\pi}{3}.$$

35. Seja $z = x + yi$.

Tem-se $2 \leq z + \bar{z} \leq 6 \Leftrightarrow 2 \leq (x + yi) + (x - yi) \leq 6 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$.

Portanto, à condição $2 \leq z + \bar{z} \leq 6 \wedge 0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{4}$ corresponde o trapézio representado, no plano de Argand, na figura seguinte da página seguinte.

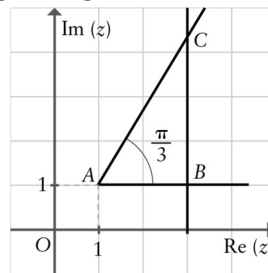


A área deste trapézio é igual a $\frac{3+1}{2} \times 2 = 4$ unidades de área.

Pág. 134

36. Tem-se $0 \leq \text{Arg}(z - 1 - i) \leq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 0 \leq \text{Arg}[z - (1 + i)] \leq \frac{\pi}{3}$.

Portanto, à condição $0 \leq \text{Arg}[z - 1 - i] \leq \frac{\pi}{3} \wedge \text{Re}(z) \leq 3$ corresponde o triângulo $[ABC]$ representado, no plano de Argand, na figura seguinte.



Tem-se $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \text{tg} \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2\sqrt{3}$.

Portanto, a área do triângulo é igual a $\frac{2 \times 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ unidades de área.

Pág. 135

37. a) $-2e^{i\frac{\pi}{5}} = 2e^{i(\frac{\pi}{5}+\pi)} = 2e^{i\frac{6\pi}{5}} = 2e^{i(\frac{6\pi}{5}-2\pi)} = 2e^{i(-\frac{4\pi}{5})}$

b) $-e^{i\frac{10\pi}{7}} = e^{i(\frac{10\pi}{7}+\pi)} = e^{i\frac{17\pi}{7}} = e^{i(\frac{17\pi}{7}-2\pi)} = e^{i\frac{3\pi}{7}}$

c) $\overline{2e^{i\frac{\pi}{5}}} = 2e^{i(-\frac{\pi}{5})}$

d) $\overline{e^{i\frac{10\pi}{7}}} = e^{i(-\frac{10\pi}{7})} = e^{i(-\frac{10\pi}{7}+2\pi)} = e^{i\frac{4\pi}{7}}$

Pág. 136

38. a) $4e^{i\frac{\pi}{5}} \times 6e^{i\frac{4\pi}{5}} = 24e^{i\pi} = -24 = -24 + 0i$

b) $-3e^{i\frac{\pi}{8}} \times \overline{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}} = 3e^{i(\frac{\pi}{8}+\pi)} \times \sqrt{2}e^{i(-\frac{3\pi}{8})} = 3\sqrt{2}e^{i\frac{6\pi}{8}} = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = 3\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -3 + 3i$

Pág. 138

39. Seja $z = 2 - 5i$.

Pretende-se determinar, geometricamente, o afixo, W , de $(4 + 3i)z$.

A figura ao lado pretende ilustrar a resolução pedida.

Tem-se $(4 + 3i)z = 4z + 3iz$.

Seja Z o afixo de z , seja Z' o afixo de $4z$ e seja Z'' o afixo de $3iz$.

Z' é a imagem de Z pela homotetia de centro na origem e razão 4.

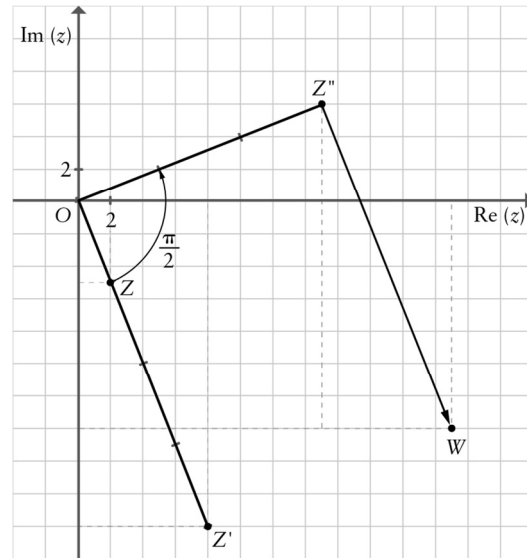
Z'' é a imagem de Z pela rotação de centro na origem e amplitude $\frac{\pi}{2}$, composta com a homotetia de centro na

origem e razão 3.

W é a imagem de Z'' pela translação associada ao vetor $\overrightarrow{OZ'}$.

Da figura, parece poder concluir-se que W é o ponto de coordenadas $(23, -14)$, pelo que, assim sendo, se deverá ter $z = 23 - 14i$.

De facto, $(4 + 3i)(2 - 5i) = 8 - 20i + 6i + 15 = 23 - 14i$.



40. a) $4e^{i\frac{7\pi}{8}} : e^{i\frac{3\pi}{8}} = 4e^{i\frac{4\pi}{8}} = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = 4i = 0 + 4i$

b) $\frac{8e^{i\frac{7\pi}{12}}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i} =$ |Tem-se $|\sqrt{2} + \sqrt{2}i| = 2$ e $\text{Arg}(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = \frac{\pi}{4}$
 $= \frac{8e^{i\frac{7\pi}{12}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = 4e^{i(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{4})} = 4e^{i\frac{\pi}{3}} = 4 \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right] = 4 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 + 2\sqrt{3}i$

Pág. 139

41. Tem-se, para $\rho > 0$ e $\theta \in]-\pi, \pi]$:

$$\frac{1+i}{\rho e^{i\theta}} = 2i \Leftrightarrow \frac{1+i}{2i} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \theta = -\frac{\pi}{4}$$

42. Tem-se, para $\rho > 0$ e $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned} (\rho e^{i\theta})(-\sqrt{3} + i) &= -2 \Leftrightarrow && \text{|Tem-se } |-\sqrt{3} + i| = 2 \text{ e } \text{Arg}(-\sqrt{3} + i) = \frac{5\pi}{6} \\ \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})(2e^{i\frac{5\pi}{6}}) &= 2e^{i\pi} \Leftrightarrow 2\rho e^{i(\theta + \frac{5\pi}{6})} = 2e^{i\pi} \Leftrightarrow 2\rho = 2 \wedge \theta = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \rho = 1 \wedge \theta = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Pág. 140

$$\begin{aligned}
 43. \frac{8\sqrt{2}i \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^5}{(1+i)^3} &= \frac{8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{5\pi}{12}}}{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3} = \frac{8\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = 4e^{i\left(\frac{11\pi}{12} - \frac{3\pi}{4}\right)} = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right] = \\
 &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3} + 2i
 \end{aligned}$$

Pág. 141

$$\begin{aligned}
 44. (\rho e^{i\theta})^2 (1 + \sqrt{3}i) &= -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Tem-se } |1 + \sqrt{3}i| = 2 \text{ e } \text{Arg}(1 + \sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3} \text{ e tem-se} \\ | -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i | = 8 \text{ e } \text{Arg}(-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i) = -\frac{3\pi}{4} \end{array} \\
 \Leftrightarrow \rho^2 e^{i(2\theta)} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} &= 8e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow 2\rho^2 e^{i\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)} = 8e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2\rho^2 &= 8 \wedge 2\theta + \frac{\pi}{3} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \stackrel{\rho > 0}{\Leftrightarrow} \rho = 2 \wedge \theta = -\frac{13\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 \text{O valor de } \theta \text{ tal que } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\text{ obtém-se para } k = 1 \text{ e é igual a } \frac{11\pi}{24}.
 \end{aligned}$$

45.

$$\begin{aligned}
 z^n + \frac{1}{z^n} &= (e^{-i\alpha})^n + \frac{1}{(e^{-i\alpha})^n} = e^{-in\alpha} + e^{in\alpha} = \\
 &= \cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha) + \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) = \\
 &= \cos(n\alpha) - i\sin(n\alpha) + \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) = \\
 &= 2\cos(n\alpha)
 \end{aligned}$$

4. Raízes de um número complexo

Pág. 145

46. Tem-se $32i = 32e^{i\frac{\pi}{2}}$, pelo que as cinco raízes de índice 5 de $32i$ são dadas por:

$$\sqrt[5]{32} e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5}}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Ora, $\sqrt[5]{32} e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5}} = 2 e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5})}$.

Então, tem-se:

Para $k = 0 \rightarrow 2 e^{i\frac{\pi}{10}}$

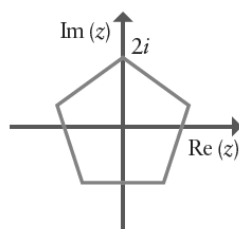
Para $k = 1 \rightarrow 2 e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5})} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

Para $k = 2 \rightarrow 2 e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{4\pi}{5})} = 2e^{i\frac{9\pi}{10}}$

Para $k = 3 \rightarrow 2 e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{6\pi}{5})} = 2e^{i\frac{13\pi}{10}}$

Para $k = 4 \rightarrow 2 e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{8\pi}{5})} = 2e^{i\frac{17\pi}{10}}$

Representação, no plano de Argand, do polígono cujos vértices são os afijos destes números:



Pág. 146

47. a) O número complexo cujo afixo é o vértice que pertence ao eixo imaginário é $\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Portanto, o número complexo pedido é $\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{2}+5 \times \frac{2\pi}{9})}$, ou seja, $\sqrt{2} e^{i\frac{29\pi}{18}}$.

b) Esse número é igual a $(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{2}})^9$.

Ora, $(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{2}})^9 = (\sqrt{2})^9 e^{i\frac{9\pi}{2}} = 16\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{2}} = 16\sqrt{2}i = 0 + 16\sqrt{2}i$.

Pág. 147

48. a) $z^4 + 2 = -\sqrt{12}i \Leftrightarrow z^4 = -2 - \sqrt{12}i \Leftrightarrow$ |Tem-se $|-2 - \sqrt{12}i| = 4$ e $\text{Arg}(-2 - \sqrt{12}i) = -\frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow z^4 = 4e^{i(-\frac{2\pi}{3})} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{4}e^{i(-\frac{2\pi}{12}+\frac{2k\pi}{4})}, k \in \{0, 1, 2, 3\} \Leftrightarrow z = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2})}, k \in \{0, 1, 2, 3\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{6})} \vee z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \vee z = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} \vee z = \sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } z^5 = z &\Leftrightarrow z^5 - z = 0 \Leftrightarrow z(z^4 - 1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^4 = 1 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^4 = e^{0i} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 0 \vee z = e^{i\frac{2k\pi}{4}}, k \in \{0, 1, 2, 3\} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = e^{i\frac{k\pi}{2}}, k \in \{0, 1, 2, 3\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 0 \vee z = e^{0i} \vee z = e^{i\frac{\pi}{2}} \vee z = e^{i\pi} \vee z = e^{i\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = 1 \vee z = i \vee z = -1 \vee z = -i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } z^2 + \frac{8i}{z} = 0 &\Leftrightarrow \frac{z^3 + 8i}{z} = 0 \Leftrightarrow z^3 + 8i = 0 \wedge z \neq 0 \Leftrightarrow z^3 = -8i \Leftrightarrow z^3 = 8e^{i\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 2e^{i(\frac{3\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}, k \in \{0, 1, 2\} \Leftrightarrow z = 2e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3})}, k \in \{0, 1, 2\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \vee z = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} \vee z = 2e^{i\frac{11\pi}{6}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 2i \vee z = 2\left[\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right] \vee z = 2\left[\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 2i \vee z = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \vee z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \Leftrightarrow z = 2i \vee z = -\sqrt{3} - i \vee z = \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

Pág. 148

49. Seja $z = x + yi$, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

$$\begin{aligned} z^2 = -5 - 12i &\Leftrightarrow (x + yi)^2 = -5 - 12i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -5 - 12i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ y = -\frac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{36}{x^2} = -5 \\ y = -\frac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \\ y = -\frac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2} \\ y = -\frac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -9 \vee x^2 = 4 \\ y = -\frac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \vee x = 2 \\ y = -\frac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{6}{x} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, as raízes quadradas de $-5 - 12i$ são $-2 + 3i$ e $2 - 3i$.

Pág. 149

$$\begin{aligned} \text{50. a) } z^2 + 17 = 2z &\Leftrightarrow z^2 - 2z + 17 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{-64}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm 8i}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 1 - 4i \vee z = 1 + 4i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } z^3 - 6z^2 + 13z = 0 &\Leftrightarrow z(z^2 - 6z + 13) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 - 6z + 13 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \frac{6 \pm 4i}{2} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = 3 - 2i \vee z = 3 + 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } z^4 - 5z^2 = 36 &\Leftrightarrow z^4 - 5z^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow z^2 = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} \Leftrightarrow z^2 = \frac{5 \pm 13}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z^2 = -4 \vee z^2 = 9 \Leftrightarrow z = -2i \vee z = 2i \vee z = -3 \vee z = 3 \end{aligned}$$

Pág. 151

$$\begin{aligned} \text{51. } \begin{cases} z + w = 6 \\ zw = 13 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} w = 6 - z \\ z(6 - z) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 6 - z \\ -z^2 + 6z - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 6 - z \\ z^2 - 6z + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} w = 6 - z \\ z = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 6 - z \\ z = \frac{6 \pm 4i}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 6 - z \\ z = 3 - 2i \vee z = 3 + 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 3 + 2i \\ z = 3 - 2i \end{cases} \vee \begin{cases} w = 3 - 2i \\ z = 3 + 2i \end{cases} \end{aligned}$$

De outro modo, tendo em conta a nota:

Os números procurados são as soluções da equação $z^2 - 6z + 13 = 0$.

Ora, $z^2 - 6z + 13 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{6 \pm 4i}{2} \Leftrightarrow z = 3 - 2i \vee z = 3 + 2i$.

Pág. 158

$$52. \text{ a) } 1 + i + \frac{i}{1+i} = 1 + i + \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1 + i + \frac{1+i}{2} = 1 + i + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$\text{b) } i^{11}(1+3i)^2 = i^3(1+6i-9) = -i(-8+6i) = 6+8i$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{-6+3i+i^{31}}{1-2i} &= |i^{31} = i^{7 \times 4 + 3} = i^3 = -i| \\ &= \frac{-6+3i-i}{1-2i} = \frac{(-6+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-6-12i+2i-4}{5} = -2-2i \end{aligned}$$

$$\text{d) } 2i + \frac{(4-3i)^2}{i} = 2i + \frac{16-24i-9}{i} = 2i + \frac{(7-24i)(-i)}{i(-i)} = 2i - 24 - 7i = -24 - 5i$$

$$\begin{aligned} \text{e) } i^{23} + \frac{2+i}{1-i} &= |i^{23} = i^{5 \times 4 + 3} = i^3 = -i| \\ &= -i + \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -i + \frac{2+3i-1}{2} = -i + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{(2+i)^2 + i^{40} + 6i^{27}}{1+2i} &= |i^{40} = i^{10 \times 4 + 0} = i^0 = 1 \text{ e } i^{27} = i^{6 \times 4 + 3} = i^3 = -i| \\ &= \frac{4+4i-1+1-6i}{1+2i} = \frac{(4-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{4-8i-2i-4}{5} = -2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \frac{3-2i+(3-2i)^2+2i^{43}}{-8i} &= |i^{43} = i^{10 \times 4 + 3} = i^3 = -i| \\ &= \frac{3-2i+9-12i-4-2i}{-8i} = \frac{8-16i}{-8i} = \frac{(-1+2i)(-i)}{i(-i)} = 2+i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \frac{(1+2i)(3+i)+i^8+i^{15}}{3i} &= |i^{15} = i^{3 \times 4 + 3} = i^3 = -i| \\ &= \frac{3+i+6i-2+1-i}{3i} = \frac{(2+6i)(-3i)}{3i(-3i)} = \frac{18-6i}{9} = 2 - \frac{2}{3}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 53. \quad 2(p+qi) &= q-pi-2(1-i) \Leftrightarrow 2p+2qi = q-pi-2+2i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2p+2qi &= (q-2)+(2-p)i \Leftrightarrow \begin{cases} 2p = q-2 \\ 2q = 2-p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2p+2 \\ 2(2p+2) = 2-p \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2p+2 \\ 5p = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} q = 2p+2 \\ p = -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{6}{5} \\ p = -\frac{2}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 54. \quad (a+i)(2-bi) &= 7-i \Leftrightarrow 2a-abi+2i+b = 7-i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2a+b) + (2-ab)i &= 7-i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b = 7 \\ 2-ab = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7-2a \\ ab = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7-2a \\ a(7-2a) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 - 2a \\ 2a^2 - 7a + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 - 2a \\ a = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 - 2a \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} b = 7 - 2a \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} b = 1 \\ a = 3 \end{cases}$$

$$55. (1+i)^2 + a(1+i) + b = 0 \Leftrightarrow 2i + a + ai + b = 0 \Leftrightarrow (a+b) + (a+2)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+b=0 \wedge a+2=0 \Leftrightarrow a=-2 \wedge b=2$$

$$56. a) \frac{(-3+2i)^2 + 3+4i^{35}}{4e^{i\frac{3\pi}{2}}} = \quad |i^{35} = i^{8 \times 4 + 3} = i^3 = -i$$

$$= \frac{9-12i-4+3-4i}{-4i} = \frac{(8-16i)4i}{(-4i)4i} = \frac{64+32i}{16} = 4+2i$$

$$b) \left(3-4i-\frac{1}{i}\right)^5 = (3-4i+i)^5 =$$

$$= (3-3i)^5 = \quad |\text{Tem-se } |3-3i| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ e } \text{Arg}(3-3i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$= \left(3\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}\right)^5 = 3^5\sqrt{2}^5 e^{i(-\frac{5\pi}{4})} = 972\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 972\sqrt{2} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right] = -972 + 972i$$

$$c) \frac{(\cos\frac{\pi}{9} + i \sin\frac{\pi}{9})^9 + (2+i)^3}{i} = \frac{(e^{i\frac{\pi}{9}})^9 + 2^3 + 3 \times 2^2 i + 3 \times 2 i^2 + i^3}{i} = \frac{e^{i\pi} + 8 + 12i - 6 - i}{i} = \frac{-1 + 2 + 11i}{i} = \frac{(1+11i)(-i)}{i(-i)} = 11 - i$$

$$57. a) \frac{-2i e^{i\frac{\pi}{6}}}{1+\sqrt{3}i} = \quad |\text{Tem-se } |1+\sqrt{3}i| = 2 \text{ e } \text{Arg}(1+\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{2e^{i\frac{3\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$b) \frac{4i \left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)^7 + 8}{3+i} = \frac{4i e^{i\pi} + 8}{3+i} = \frac{(-4i+8)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{-12i-4+24-8i}{10} =$$

$$= \frac{20-20i}{10} = 2-2i = \quad |\text{Tem-se } |2-2i| = 2\sqrt{2} \text{ e } \text{Arg}(2-2i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$= 2\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

$$c) \frac{-2\sqrt{3}+4e^{i\frac{11\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{5}}} = \frac{-2\sqrt{3}+4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \sin\frac{11\pi}{6}\right)}{e^{i\frac{\pi}{5}}} = \frac{-2\sqrt{3}+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{e^{i\frac{\pi}{5}}} = \frac{-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2i}{e^{i\frac{\pi}{5}}} = \frac{2e^{i\frac{3\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{5}}} = 2e^{i\frac{13\pi}{10}}$$

$$58. z_1 + \frac{z_2}{z_3} = e^{i\frac{3\pi}{2}} + \frac{1+i}{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}} = \quad |\text{Tem-se } |1+i| = \sqrt{2} \text{ e } \text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

$$= -i + \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}} = -i + e^{i(-\pi)} = -1 - i$$

59. Tem-se $z = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 3 + \sqrt{3}i$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{zw}{z+w} &= \frac{(3+\sqrt{3}i)(-3+3\sqrt{3}i)}{3+\sqrt{3}i-3+3\sqrt{3}i} = \frac{-9+9\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i-9}{4\sqrt{3}i} = \frac{(-18+6\sqrt{3}i)(-4\sqrt{3}i)}{4\sqrt{3}i(-4\sqrt{3}i)} = \frac{(-18+6\sqrt{3}i)(-4\sqrt{3}i)}{48} = \\ &= \frac{72+72\sqrt{3}i}{48} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i = \quad \quad \quad | \text{Tem-se } \left| \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = 3 \text{ e } \text{Arg} \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{\pi}{3} \\ &= 3e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Pág. 159

60. Seja $\text{Arg}(z) = \alpha$, $z \neq 0$.

Tem-se $\text{Arg} \left(\frac{z}{w} \right) = \alpha - \frac{\pi}{4}$, pelo que $\text{Arg} \left(\frac{z}{w} \right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$ e, portanto, tem-se $z = |z|e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Ora, $z^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (|z|e^{i\frac{3\pi}{4}})^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^n e^{i\frac{3\pi}{4}n} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4}n = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{4k}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Para $k = 3$, obtém-se $n = 4$, que é o menor número natural que satisfaz a condição.

61. Tem-se $\bar{w} \times z = \overline{e^{i\alpha}} \times (1+i) = e^{i(-\alpha)} \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(-\alpha+\frac{\pi}{4})}$.

Ora, $\sqrt{2}e^{i(-\alpha+\frac{\pi}{4})} \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow -\alpha + \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Para $k = 1$ obtém-se o valor de α pertencente a $[0, 2\pi]$ que é $\frac{5\pi}{4}$.

62. Tem-se $\frac{a+(1+2i)i^{83}}{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}} = \quad \quad \quad |i^{83} = i^{20 \times 4 + 3} = i^3 = -i$

$$\begin{aligned} &= \frac{a+(1+2i)(-i)}{\sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})} = \frac{a+2-i}{\sqrt{2}(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2})} = \frac{a+2-i}{-1-i} = -\frac{a+2-i}{1+i} = -\frac{(a+2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \\ &= -\frac{a-ai+2-2i-i-1}{2} = -\frac{1+a+(-a-3)i}{2} = -\frac{1+a}{2} + \frac{a+3}{2}i \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{a+(1+2i)i^{83}}{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}}$ é um número imaginário puro se e só se $a = -1$.

63. Tem-se $(a+i)^2 = a^2 + 2ai - 1 = (a^2 - 1) + 2ai$.

Ora, para que se tenha, $(a+i)^2 = z$, é necessário que $\text{Arg}[(a+i)^2] = \text{Arg}(z)$, pelo que tem de se ter $\frac{2a}{a^2-1} = \sqrt{3}$.

$$\frac{2a}{a^2-1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2a = \sqrt{3}a^2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}a^2 - 2a - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee a = \sqrt{3}$$

Tem-se:

• $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}i - 1 = -\frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}i$; portanto, como o argumento principal deste complexo não é $\frac{\pi}{3}$, o número real $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ não é solução do problema.

• $(\sqrt{3} + i)^2 = 3 + 2\sqrt{3}i - 1 = 2 + 2\sqrt{3}i$; portanto, como o argumento principal deste complexo é $\frac{\pi}{3}$, o número real $\sqrt{3}$ é solução do problema.

$$\begin{aligned}
64. \quad \sin a - \cos a + bi &= \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}}{e^{i\frac{\pi}{8}}} \Leftrightarrow \sin a - \cos a + bi = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sin a - \cos a + bi = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sin a - \cos a + bi = \sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \Leftrightarrow \sin a - \cos a + bi = 1 - i \Leftrightarrow \begin{cases} \sin a - \cos a = 1 \\ b = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vamos resolver, em $]0, \pi[$, a condição $\sin a - \cos a = 1$.

$$\begin{aligned}
\sin a - \cos a = 1 &\Rightarrow (\sin a - \cos a)^2 = 1^2 \Leftrightarrow -2 \sin a \cos a = 0 \Leftrightarrow \sin(2a) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2a = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Para $k = 1$ obtém-se o único valor de a pertencente a $]0, \pi[$, que é $\frac{\pi}{2}$.

Ora, $\frac{\pi}{2}$ satisfaz a condição $\sin a - \cos a = 1$, pelo que a solução do problema é $\begin{cases} a = \frac{\pi}{2} \\ b = -1 \end{cases}$

$$65. \text{ Tem-se } \frac{(e^{i\alpha})^5}{3i} = \frac{e^{i(5\alpha)}}{3e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{3} e^{i(5\alpha - \frac{\pi}{2})}.$$

$$\text{Ora, } \frac{(e^{i\alpha})^5}{3i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{3} e^{i(5\alpha - \frac{\pi}{2})} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 5\alpha - \frac{\pi}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0$, obtém-se o único valor de α pertencente a $]0, \frac{\pi}{4}[$, que é $\frac{\pi}{10}$.

$$\begin{aligned}
66. \text{ Tem-se } (3e^{i\alpha})^2 \times (2 + \sqrt{12}i) &= \quad \quad \quad | \text{ Tem-se } |2 + \sqrt{12}i| = \sqrt{4 + 12} = 4 \text{ e } \text{Arg}(2 + \sqrt{12}i) = \frac{\pi}{3} \\
&= 9e^{i(2\alpha)} \times 4e^{i\frac{\pi}{3}} = 36e^{i(2\alpha + \frac{\pi}{3})}
\end{aligned}$$

O afixo deste número complexo pertence à bissetriz do terceiro quadrante se e só se

$$2\alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ ou seja, se e só se } \alpha = \frac{11\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Para $k = 0$, obtém-se o único valor de α pertencente a $]0, \frac{\pi}{2}[$, que é $\frac{11\pi}{24}$.

$$67. \text{ Seja } z = 2e^{i\theta} = 2[\cos \theta + i \sin \theta] = 2 \cos \theta + 2i \sin \theta.$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}
|z + 1|^2 + |z - 1|^2 &= |2 \cos \theta + 2i \sin \theta + 1|^2 + |2 \cos \theta + 2i \sin \theta - 1|^2 = \\
&= |(2 \cos \theta + 1) + (2 \sin \theta)i|^2 + |(2 \cos \theta - 1) + (2 \sin \theta)i|^2 = \\
&= (2 \cos \theta + 1)^2 + (2 \sin \theta)^2 + (2 \cos \theta - 1)^2 + (2 \sin \theta)^2 = \\
&= 4 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta + 1 + 4 \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + 1 + 4 \sin^2 \theta = \\
&= 8 \cos^2 \theta + 8 \sin^2 \theta + 2 = 8(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2 = 8 + 2 = 10
\end{aligned}$$

$$68. \text{ Seja } z = x + yi.$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}
|z + 16| &= 4|z + 1| \Leftrightarrow |(x + 16) + yi| = 4|(x + 1) + yi| \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x + 16)^2 + y^2} = 4\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 + 32x + 256 + y^2 = 16(x^2 + 2x + 1 + y^2) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 15x^2 + 15y^2 = 240 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow |z| = 4
\end{aligned}$$

$$69. a) z = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2} \stackrel{(*)}{=} \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{6})}$$

$$(*) \text{ Tem-se } \left| \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2} \right| = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2} \text{ e } \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ pelo que } \operatorname{Arg}\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$w = 1 - i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})} \quad \text{Tem-se } |1 - i| = \sqrt{2} \text{ e } \operatorname{Arg}(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$b) \frac{z}{w} = \frac{\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{6})}}{\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}} = e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2-2i} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2}i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{6}i-2\sqrt{2}i+2\sqrt{2}}{8} = \\ &= \frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{8} + \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{8}i = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i \end{aligned}$$

$$c) \text{ Da alínea anterior, tem-se } e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i, \text{ e, portanto,}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i, \text{ pelo que se pode concluir que } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ e } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

70. Tem-se:

$$\begin{aligned} |z - 1| &= |e^{2i\alpha} - 1| = |\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha) - 1| = \\ &= |\cos(2\alpha) - 1 + i \sin(2\alpha)| = \\ &= \sqrt{(\cos(2\alpha) - 1)^2 + \sin^2(2\alpha)} = \\ &= \sqrt{\cos^2(2\alpha) - 2\cos(2\alpha) + 1 + \sin^2(2\alpha)} = \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(2\alpha)} = \sqrt{2 - 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} = \\ &= \sqrt{2 - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha} = \\ &= \sqrt{2(1 - \cos^2\alpha) + 2\sin^2\alpha} = \\ &= \sqrt{2\sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha} = \sqrt{4\sin^2\alpha} = 2|\sin\alpha| = \\ &= 2\sin\alpha \text{ (note-se que, como } \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \\ &\text{tem-se } \sin\alpha > 0) \end{aligned}$$

71.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= \frac{1}{1+e^{2i\alpha}} = \\ &= \frac{1}{1+\cos(2\alpha)+i\sin(2\alpha)} = \\ &= \frac{1+\cos(2\alpha)-i\sin(2\alpha)}{[1+\cos(2\alpha)]^2 + \sin^2(2\alpha)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 + \cos(2\alpha) - i \sin(2\alpha)}{1 + 2 \cos(2\alpha) + \cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha)} = \frac{1 + \cos(2\alpha) - i \sin(2\alpha)}{2 + 2 \cos(2\alpha)} = \\
&= \frac{1 + \cos(2\alpha) - i \sin(2\alpha)}{2 [1 + \cos(2\alpha)]} = \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1 + \cos(2\alpha) - i \sin(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)} = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1 + \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)} - i \frac{\sin(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - i \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - i \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = \\
&= \frac{1}{2} (1 - i \operatorname{tg} \alpha)
\end{aligned}$$

72. a)

A condição $|z| = |z - 3i|$ define, no plano de Argand, a mediatriz do segmento de reta cujos extremos são a origem do referencial e o ponto de coordenadas $(0, 3)$. Esta mediatriz tem equação $y = \frac{3}{2}$. Portanto, todos os números complexos que verificam a condição $|z| = |z - 3i|$ têm parte imaginária igual a $\frac{3}{2}$.

b)

Tem-se $z = x + \frac{3}{2}i$, com $x > 0$. Portanto,

$$|z| = 3 \Leftrightarrow x^2 + \frac{9}{4} = 9 \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Logo, sendo $\theta = \operatorname{Arg}(z)$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ pelo que, como o afixo de z está no primeiro quadrante, se tem $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{6}$.

73.

$$\begin{aligned}
 & |z|^2 + |w|^2 - |z - w|^2 = \\
 & = z\bar{z} + w\bar{w} - (z - w)\overline{(z - w)} = \\
 & = z\bar{z} + w\bar{w} - (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = \\
 & = z\bar{z} + w\bar{w} - (z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w}) = \\
 & = z\bar{w} + \bar{z}w
 \end{aligned}$$

74.

$$\begin{aligned}
 \bar{z}^3 + z &= (e^{-i\alpha})^3 + e^{i\alpha} = e^{-3i\alpha} + e^{i\alpha} = \\
 &= e^{-i\alpha}(e^{-2i\alpha} + e^{2i\alpha}) = \\
 &= e^{-i\alpha} [\cos(-2\alpha) + i\sin(-2\alpha) + \cos(2\alpha) + \\
 &\quad + i\sin(2\alpha)] = \\
 &= e^{-i\alpha} [\cos(2\alpha) - i\sin(2\alpha) + \cos(2\alpha) + \\
 &\quad + i\sin(2\alpha)] = \\
 &= 2\cos(2\alpha)e^{-i\alpha}
 \end{aligned}$$

Pág. 160

75.

$$\begin{aligned}
 1 + z + z^2 &= 1 + e^{i\alpha} + (e^{i\alpha})^2 = 1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} = \\
 &= 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha + \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha) = \\
 &= 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \\
 &\quad + i2\sin\alpha\cos\alpha = \\
 &= \cos\alpha + 2\cos^2\alpha + i(\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha) = \\
 &= \cos\alpha(1 + 2\cos\alpha) + i\sin\alpha(1 + 2\cos\alpha) = \\
 &= (1 + 2\cos\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = (1 + 2\cos\alpha)e^{i\alpha}
 \end{aligned}$$

Como $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, tem-se $1 + 2\cos\alpha > 0$, pelo que $(1 + 2\cos\alpha)e^{i\alpha}$ é a forma trigonométrica de $1 + z + z^2$.

Portanto, α é o argumento de $1 + z + z^2$.

76.

Tem-se $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ e

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha + i \cos \alpha$$

Portanto,

$$z + w = (\cos \alpha - \sin \alpha) + i(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, tem-se $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$

e $\cos \alpha > \sin \alpha$, pelo que $\cos \alpha - \sin \alpha > 0$

e $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$.

Logo, o afixo de $z + w$ pertence ao primeiro quadrante, pelo que $\text{Arg}(z + w) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

77. Tem-se $\sqrt{8}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{8}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2 + 2i$.

Portanto, $\overline{AB} = |(1 + 6i) - (-2 + 2i)| = |3 + 4i|\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.

78. Seja $z = \rho e^{i\alpha}$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Tem-se $w = -3i\bar{z} = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}\rho e^{i\alpha} = 3e^{i(-\frac{\pi}{2})}\rho e^{i(-\alpha)} = 3\rho e^{i(-\frac{\pi}{2} - \alpha)}$.

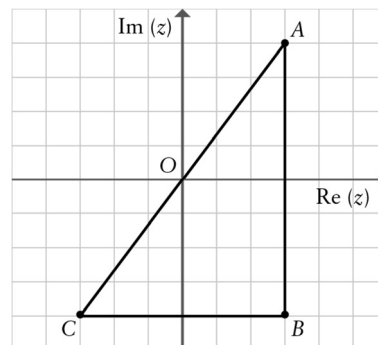
Ora, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\alpha < 0 \Leftrightarrow -\pi < -\frac{\pi}{2} - \alpha < -\frac{\pi}{2}$, pelo que $\text{Arg}(w) = -\frac{\pi}{2} - \alpha$.

79. A figura ao lado pretende ilustrar a situação descrita.

Tem-se $\frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = 24$, pelo que, como

$\overline{AB} = 8$, se tem $\overline{BC} = 6$.

Portanto, A , afixo de z , é o ponto de coordenadas $(3, 4)$ e, portanto, $z = 3 + 4i$.



80. a) Tem-se $z\bar{z} = |z|^2 = 4$ e $\frac{w}{\bar{w}} = \frac{|w|e^{i(-\frac{\pi}{6})}}{|w|e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i(-\frac{\pi}{3})}$.

Portanto, $z\bar{z} + \left(\frac{w}{\bar{w}}\right)^6 = 4 + \left[e^{i(-\frac{\pi}{3})}\right]^6 = 4 + e^{i(-2\pi)} = 4 + 1 = 5$.

b) A figura ao lado pretende ilustrar a situação descrita.

Tem-se $\frac{\overline{OZ} \times \overline{OW}}{2} = 6$, pelo que, como

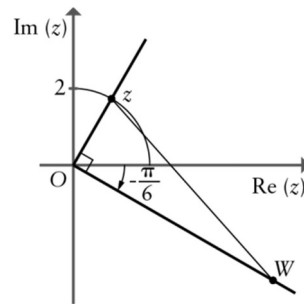
$\overline{OZ} = 2$, se tem $\overline{OW} = 6$.

Dado que $\widehat{WOZ} = \frac{\pi}{2}$ e $\text{Arg}(w) = -\frac{\pi}{6}$, pode concluir-se que $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$.

Portanto:

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i \text{ e}$$

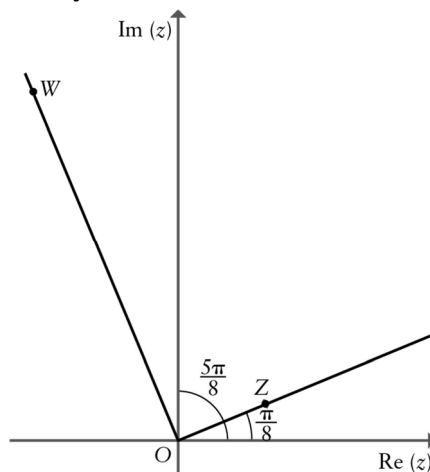
$$w = 6e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 3\sqrt{3} - 3i$$



81. a) Tem-se $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$, pelo que

$$w = z^5 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^5 = \sqrt{2^5}e^{i\frac{5\pi}{8}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{8}}.$$

A figura abaixo pretende ilustrar a situação descrita.

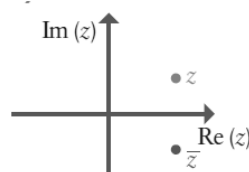


$$\text{Tem-se } \widehat{ZOW} = \frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}.$$

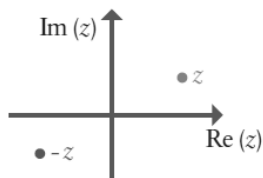
b) Área do triângulo = $\frac{\overline{OZ} \times \overline{OW}}{2} = \frac{\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{2} = 4$ unidades de área.

Pág. 161

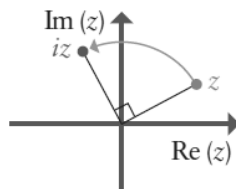
82.a) O afixo de $\bar{z}$ é a imagem do afixo de z pela reflexão em relação ao eixo real do referencial.



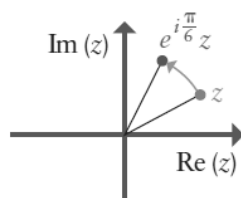
b) O afixo de $-z$ é a imagem do afixo de z pela reflexão em relação à origem do referencial.



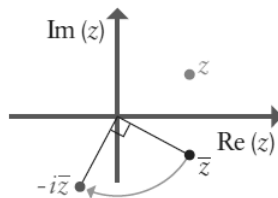
c) O afixo de iz é a imagem do afixo de z pela rotação de centro na origem e amplitude $\frac{\pi}{2}$.



d) O afixo de $e^{i\frac{\pi}{6}}z$ é a imagem do afixo de z pela rotação de centro na origem e amplitude $\frac{\pi}{6}$.

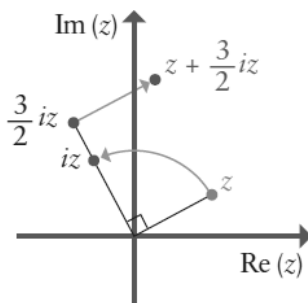


e) O afixo de $-iz$ é a imagem do afixo de z pela reflexão em relação à origem do referencial composta com a rotação de centro na origem e amplitude $-\frac{\pi}{2}$.



f) Tem-se $\left(1 + \frac{3}{2}i\right)z = z + \frac{3}{2}iz$.

Portanto, o afixo de $\left(1 + \frac{3}{2}i\right)z$ é a imagem do afixo de z pela rotação de centro na origem e amplitude $\frac{\pi}{2}$, composta com a homotetia de centro na origem e razão $\frac{3}{2}$, e composta com a translação associada ao vetor $\overrightarrow{OZ}$, sendo Z o afixo de z .

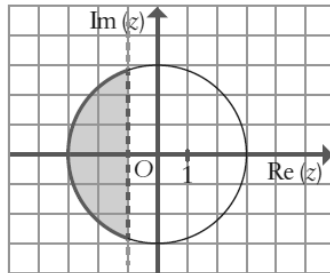


83. a) Seja $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

Tem-se:

$$z\bar{z} \leq 9 \wedge z + \bar{z} < -2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x + yi + x - yi < -2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x < -1$$

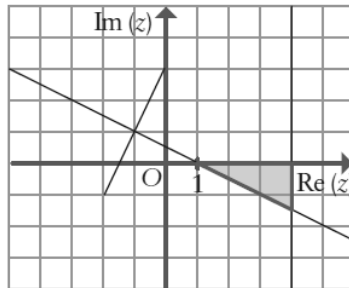
Representação, no plano de Argand, da região definida pela condição:



b) Tem-se $|z - 3i| \leq |z + 2 + i| \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 4 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 0 \Leftrightarrow$

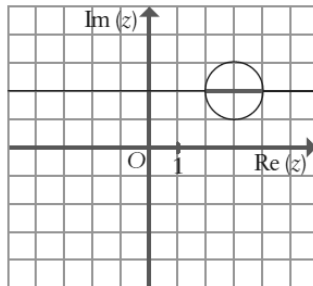
$$\Leftrightarrow |z - (0 + 3i)| \leq |z - (-2 - i)| \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 4 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 0$$

Representação, no plano de Argand, da região definida pela condição:

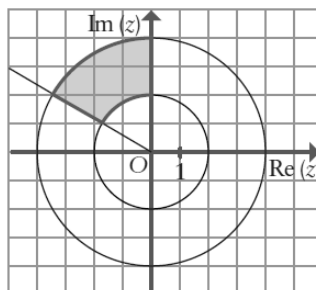


c) Tem-se $|z - 3 - 2i| \leq 1 \wedge \operatorname{Im}(z) = 2 \Leftrightarrow |z - (3 + 2i)| \leq 1 \wedge \operatorname{Im}(z) = 2$

Representação, no plano de Argand, da região definida pela condição:

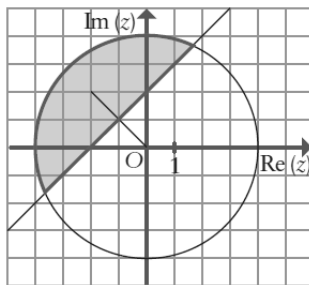


d) Representação, no plano de Argand, da região definida pela condição:



e) Tem-se $|iz| \leq 4 \wedge |z| \geq |z + 2 - 2i| \Leftrightarrow |z| \leq 4 \wedge |z - (0 + 0i)| \geq |z - (2 + 2i)|$.

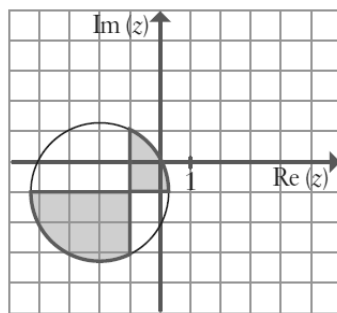
Representação, no plano de Argand, da região definida pela condição:



f) Tem-se:

- $|-z - 2 - i| \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow |z + 2 + i| \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow |z - (-2 - i)| \leq \sqrt{5}$
- $0 \leq \text{Arg}(z + 1 + i) \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \text{Arg}[z - (-1 - i)] \leq \frac{\pi}{2}$
- $\text{Re}(z) \leq -1 \wedge \text{Im}(z) \leq -1$

Representação, no plano de Argand, da região definida pela condição do enunciado:



84. Tem-se:

- O semiplano esquerdo definido pelo eixo imaginário (incluindo a fronteira) pode ser definido pela condição $\text{Re}(z) \leq 0$.
- O semiplano superior definido pela reta r (incluindo a fronteira) pode ser definido pela condição $|z - (0 + 0i)| \geq |z - (3 + 4i)|$, ou seja, $|z| \geq |z - 3 - 4i|$.
- O círculo de centro C e que passa na origem do referencial (incluindo a fronteira) pode ser definido pela condição $|z - (3 + 4i)| \leq 5$, ou seja, $|z - 3 - 4i| \leq 5$ (o raio da circunferência é igual a $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$).

Portanto, a região do plano de Argand colorida no enunciado (incluindo a fronteira) pode ser definida pela condição:

$$\text{Re}(z) \leq 0 \wedge |z| \geq |z - 3 - 4i| \wedge |z - 3 - 4i| \leq 5$$

Pág. 162

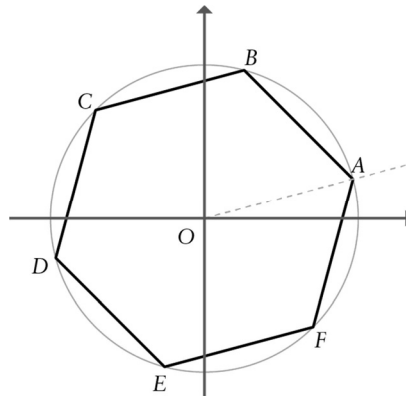
85. a) Tem-se $64i = 64e^{i\frac{\pi}{2}}$, pelo que as raízes sextas de $64i$ são dadas por:

$$\sqrt[6]{64} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{6})} = 2 e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3})}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Então, as raízes sextas de $64i$ são:

- Para $k = 0 \rightarrow z_1 = 2 e^{i\frac{\pi}{12}}$
- Para $k = 1 \rightarrow z_2 = 2 e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3})} = 2 e^{i\frac{5\pi}{12}}$
- Para $k = 2 \rightarrow z_3 = 2 e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3})} = 2 e^{i\frac{9\pi}{12}} = 2 e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- Para $k = 3 \rightarrow z_4 = 2 e^{i(\frac{\pi}{12} + \pi)} = 2 e^{i\frac{13\pi}{12}}$
- Para $k = 4 \rightarrow z_5 = 2 e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3})} = 2 e^{i\frac{17\pi}{12}}$
- Para $k = 5 \rightarrow z_6 = 2 e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{3})} = 2 e^{i\frac{21\pi}{12}} = 2 e^{i\frac{7\pi}{4}}$

b) É o hexágono regular $[ABCDEF]$ inscrito na circunferência com centro na origem do referencial e raio igual a 2, tal que a semirreta $\vec{OA}$ tem inclinação igual a $\frac{\pi}{12}$.



c) Dado que o hexágono é regular, tem-se $\overline{AB} = \overline{OA}$, pelo que o perímetro é igual a 12.

A área de um polígono regular é dada por semiperímetro $\times$ apótema.

O apótema deste hexágono é a altura, por exemplo, do triângulo equilátero $[OAB]$, ou seja,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{AB} = \sqrt{3}.$$

Então:

$$\text{área do hexágono } [ABCDEF] = \text{semiperímetro} \times \text{apótema} = \frac{12}{2} \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ unidades de área}$$

86. Esse polígono é um quadrado inscrito na circunferência com centro na origem do referencial e raio igual a $\sqrt[4]{36}$, ou seja, $\sqrt{6}$.

Portanto, trata-se de um quadrado cuja diagonal é igual a $2\sqrt{6}$, pelo que o lado desse quadrado é igual a $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$, ou seja, $2\sqrt{3}$.

A área desse quadrado é igual, portanto, a 12 unidades de área.

87.

Apresentamos duas resoluções.

- z e w são raízes quintas de um mesmo número complexo se e só se tiverem o mesmo módulo e a diferença entre um argumento de w e um argumento de z for um múltiplo inteiro de $\frac{2\pi}{5}$.

Tem-se $z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Portanto, $|z| = |w| = \sqrt{2}$ e

$$\frac{21\pi}{20} - \frac{\pi}{4} = \frac{21\pi}{20} - \frac{5\pi}{20} = \frac{16\pi}{20} = \frac{4\pi}{5} = 2 \times \frac{2\pi}{5}$$

Logo, z e w são raízes quintas de um mesmo número complexo.

- z e w são raízes quintas de um mesmo número complexo se e só se $z^5 = w^5$.

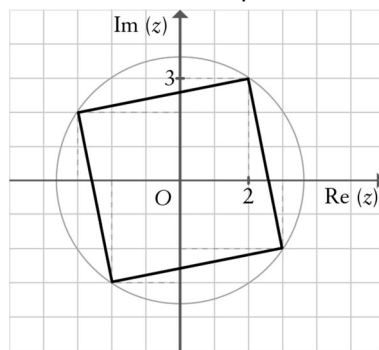
$z^5 = \sqrt{2}^5 e^{i\frac{5\pi}{4}}$ e $w^5 = \sqrt{2}^5 e^{i\frac{21\pi}{4}}$; dado que

$$\frac{21\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = 2 \times 2\pi, \text{ conclui-se que}$$

$z^5 = w^5$.

88. $z = (3 - i)^3 = 3^3 - 3 \times 3^2 \times i + 3 \times 3 \times i^2 - i^3 = 27 - 27i - 9 + i = 18 - 26i$

89. Os afixos das restantes três raízes quartas são os restantes três vértices do quadrado com centro na origem do referencial e em que o vértice conhecido é o ponto de coordenadas $(2, 3)$.



Tal como ilustrado na figura, esses restantes três vértices são os pontos de coordenadas $(-3, 2)$, $(-2, -3)$ e $(3, -2)$.

Portanto, as restantes três raízes quartas de z são $-3 + 2i$, $-2 - 3i$ e $3 - 2i$.

$$\begin{aligned}
 90. (x + yi)^2 = 7 + 24i &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 7 + 24i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ y = \frac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{144}{x^2} = 7 \\ y = \frac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 7x^2 + 144 = 0 \\ y = \frac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \vee x^2 = -9 \\ y = \frac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \vee x = 4 \\ y = \frac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Portanto, as raízes quadradas de $7 + 24i$ são $-4 - 3i$ e $4 + 3i$.

$$\begin{aligned}
 91. z^5 + \frac{32}{i} = 0 &\Leftrightarrow z^5 - 32i = 0 \Leftrightarrow z^5 = 32i \Leftrightarrow z^5 = 32e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow z = \sqrt[5]{32}e^{i(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5})}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}
 \end{aligned}$$

Então, as soluções da equação são:

- Para $k = 0 \rightarrow z = 2e^{i\frac{\pi}{10}}$
- Para $k = 1 \rightarrow z = 2e^{i(\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5})} = 2e^{i\frac{5\pi}{10}}$
- Para $k = 2 \rightarrow z = 2e^{i(\frac{\pi}{10} + \frac{4\pi}{5})} = 2e^{i\frac{9\pi}{10}}$
- Para $k = 3 \rightarrow z = 2e^{i(\frac{\pi}{10} + \frac{6\pi}{5})} = 2e^{i\frac{13\pi}{10}}$
- Para $k = 4 \rightarrow z = 2e^{i(\frac{\pi}{10} + \frac{8\pi}{5})} = 2e^{i\frac{17\pi}{10}}$

$$92. z_1 = (2 - i)^3 = 2^3 - 3 \times 2^2 \times i + 3 \times 2 \times i^2 - i^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i \quad \text{e}$$

$$z_2 = \frac{7+39i}{3+i} = \frac{(7+39i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{21-7i+117i+39}{10} = \frac{60+110i}{10} = 6 + 11i$$

Então, tem-se:

$$z^3 - z_1 = z_2 \Leftrightarrow z^3 = z_1 + z_2 \Leftrightarrow z^3 = 8 \Leftrightarrow z^3 = 8e^{i \times 0} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}e^{i(\frac{2k\pi}{3})}, k \in \{0, 1, 2\}$$

Então, as soluções da equação são:

- Para $k = 0 \rightarrow z = 2e^{i0} = 2$
- Para $k = 1 \rightarrow z = 2e^{i(\frac{2\pi}{3})} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i$
- Para $k = 2 \rightarrow z = 2e^{i(\frac{4\pi}{3})} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \text{sen}\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}i$

$$93. iz^3 - i = \sqrt{3} \Leftrightarrow z^3 = \frac{\sqrt{3}+i}{i} \Leftrightarrow z^3 = 1 - \sqrt{3}i \Leftrightarrow \quad \text{Tem-se } |1 - \sqrt{3}i| = 2 \text{ e } \text{Arg}(1 - \sqrt{3}i) = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow z^3 = 2e^{i(-\frac{\pi}{3})} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{2}e^{i(-\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})}, k \in \{0, 1, 2\}$$

Então, as soluções da equação são:

- Para $k = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{2}e^{i(-\frac{\pi}{9})}$; ora, o afixo de $\sqrt[3]{2}e^{i(-\frac{\pi}{9})}$ não pertence ao segundo quadrante.
- Para $k = 1 \rightarrow z = \sqrt[3]{2}e^{i(-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3})} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{9}}$; ora, o afixo de $\sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{9}}$ pertence ao segundo quadrante.

• Para $k = 2 \rightarrow z = \sqrt[3]{2} e^{i(-\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3})} = \sqrt[3]{2} e^{i\frac{11\pi}{9}}$; ora, o afixo de $\sqrt[3]{2} e^{i\frac{11\pi}{9}}$ não pertence ao segundo quadrante.

Portanto, a solução daquela equação, cujo afixo pertence ao segundo quadrante do plano de Argand, é $\sqrt[3]{2} e^{i\frac{5\pi}{9}}$.

94. Seja $z = \rho e^{i\alpha}$.

$$\begin{aligned} z^2 + 2\bar{z} = 0 &\Leftrightarrow (\rho e^{i\alpha})^2 = -2(\overline{\rho e^{i\alpha}}) \Leftrightarrow \rho^2 e^{i(2\alpha)} = -2\rho e^{i(-\alpha)} \Leftrightarrow \rho^2 e^{i(2\alpha)} = 2\rho e^{i(\pi-\alpha)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho^2 = 2\rho \wedge 2\alpha = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \rho^2 - 2\rho = 0 \wedge 3\alpha = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho(\rho - 2) = 0 \wedge \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\} \Leftrightarrow \rho = 0 \vee \left(\rho = 2 \wedge \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 0 \vee z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \vee z = 2e^{i\pi} \vee z = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = 1 + \sqrt{3}i \vee z = -2 \vee z = 1 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

Outro processo:

Seja $z = x + yi$.

$$\begin{aligned} z^2 + 2\bar{z} = 0 &\Leftrightarrow (x + yi)^2 + 2(x - yi) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi + 2x - 2yi = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 - y^2 + 2x) + (2xy - 2y)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ 2xy - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ 2y(x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ y = 0 \vee x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y^2 = 3 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\sqrt{3} \vee y = \sqrt{3} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\sqrt{3} \\ x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = \sqrt{3} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = -2 \vee z = 1 - \sqrt{3}i \vee z = 1 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

95. Seja $z = \rho e^{i\alpha}$.

$$\begin{aligned} z^4 + z = 0 &\Leftrightarrow (\rho e^{i\alpha})^4 = -\rho e^{i\alpha} \Leftrightarrow \rho^4 e^{i(4\alpha)} = -\rho e^{i\alpha} \Leftrightarrow \rho^4 e^{i(4\alpha)} = \rho e^{i(\pi+\alpha)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho^4 = \rho \wedge 4\alpha = \pi + \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \rho^4 - \rho = 0 \wedge 3\alpha = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho(\rho^3 - 1) = 0 \wedge \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\} \Leftrightarrow \rho = 0 \vee \left(\rho = 1 \wedge \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 0 \vee z = e^{i\frac{\pi}{3}} \vee z = e^{i\pi} \vee z = e^{i\frac{5\pi}{3}} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \vee z = -1 \vee z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

96. Seja $z = \rho e^{i\alpha}$.

$$\begin{aligned} z^4 - \bar{z} = 0 &\Leftrightarrow (\rho e^{i\alpha})^4 = \overline{\rho e^{i\alpha}} \Leftrightarrow \rho^4 e^{i(4\alpha)} = \rho e^{i(-\alpha)} \Leftrightarrow \rho^4 = \rho \wedge 4\alpha = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho^4 - \rho = 0 \wedge 5\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \rho(\rho^3 - 1) = 0 \wedge \alpha = \frac{2k\pi}{5}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho = 0 \vee \left(\rho = 1 \wedge \alpha = \frac{2k\pi}{5}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 0 \vee z = e^{i \times 0} \vee z = e^{i\frac{2\pi}{5}} \vee z = e^{i\frac{4\pi}{5}} \vee z = e^{i\frac{6\pi}{5}} \vee z = e^{i\frac{8\pi}{5}} \end{aligned}$$

Pág. 163

97. Seja $z = \rho e^{i\alpha}$.

$$\begin{aligned} (1-i)\bar{z} = z^2 &\Leftrightarrow \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}\overline{\rho e^{i\alpha}} = (\rho e^{i\alpha})^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\rho e^{i(-\frac{\pi}{4}-\alpha)} = \rho^2 e^{i(2\alpha)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}\rho = \rho^2 \wedge -\frac{\pi}{4} - \alpha = 2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \rho^2 - \sqrt{2}\rho = 0 \wedge -3\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho(\rho - \sqrt{2}) = 0 \wedge \alpha = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho = 0 \vee \left(\rho = \sqrt{2} \wedge \alpha = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{12})} \vee z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} \vee z = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \end{aligned}$$

Portanto, as soluções não nulas são $\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{12})}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ e $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

98. a) $x^2 = -4 \Leftrightarrow x = -\sqrt{4}i \vee x = \sqrt{4}i \Leftrightarrow x = -2i \vee x = 2i$

b) $x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9 \Leftrightarrow x = -\sqrt{9}i \vee x = \sqrt{9}i \Leftrightarrow x = -3i \vee x = 3i$

c) $x^2 + 13 = 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 4i}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 3 - 2i \vee x = 3 + 2i$

d) $x^3 + 25x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 25) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = -25 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -5i \vee x = 5i$

e) Tem-se, de acordo com o cálculo auxiliar, $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x-1)(x^2 - 2x + 2)$

| Cálculo aux:

1	1	-3	4	-2
	1	-2	2	0

$$x^3 - 3x^2 + 4x = 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{2 \pm 2i}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 1 - i \vee x = 1 + i$$

f) $x^4 + 21x^2 = 100 \Leftrightarrow x^4 + 21x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-21 \pm \sqrt{841}}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{-21 \pm 29}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 = -25 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -5i \vee x = 5i \vee x = -2 \vee x = 2$$

99. a) $x^2 - 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 4i}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 2 - 2i \vee x = 2 + 2i$

Portanto, como o afixo de z pertence ao primeiro quadrante, $z = 2 + 2i$ e, consequentemente, $w = 2 - 2i$.

Tem-se $\frac{z^4}{w^2} = \frac{(2+2i)^4}{(2-2i)^2} = \frac{(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^4}{[2\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}]^2} = \frac{(2\sqrt{2})^4 e^{i(4 \times \frac{\pi}{4})}}{(2\sqrt{2})^2 e^{i(-2 \times \frac{\pi}{4})}} = (2\sqrt{2})^2 e^{i(\pi + \frac{\pi}{2})} = 8e^{i\frac{3\pi}{2}} = 8e^{i(-\frac{\pi}{2})}$

b) $\frac{z}{w} + \frac{w}{z} = \frac{2+2i}{2-2i} + \frac{2-2i}{2+2i} = \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}} + \frac{\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i(-\frac{\pi}{2})} = i + (-i) = 0$

c) $z^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{n\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 4k, k \in \mathbb{Z}$

Portanto, o menor valor natural de n é 4.

100. $\begin{cases} z + w = 8 \\ zw = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 8 - z \\ z(8 - z) = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 8 - z \\ -z^2 + 8z - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 8 - z \\ z^2 - 8z + 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} w = 8 - z \\ z = \frac{8 \pm \sqrt{-36}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 8 - z \\ z = \frac{8 \pm 6i}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 8 - z \\ z = 4 - 3i \vee z = 4 + 3i \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} w = 4 + 3i \\ z = 4 - 3i \end{cases} \vee \begin{cases} w = 4 - 3i \\ z = 4 + 3i \end{cases}$

Portanto, os números são $4 - 3i$ e $4 + 3i$.

De outro modo, tendo em conta a nota da página 151:

Os números procurados são as soluções da equação $z^2 - 8z + 25 = 0$

Ora, $z^2 - 8z + 25 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{8 \pm \sqrt{-36}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{8 \pm 6i}{2} \Leftrightarrow z = 4 - 3i \vee z = 4 + 3i$.

+Exercícios Propostos

Pág. 164

101. (D)

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$.

Tem-se: $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$.

Portanto, $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) \Leftrightarrow ac - bd = ac \Leftrightarrow bd = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee d = 0 \Leftrightarrow z_1 \in \mathbb{R} \vee z_2 \in \mathbb{R}$

102. (B)

Seja $z = a + bi$.

$\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow \operatorname{Re}(ai - b) = -b \Leftrightarrow -b = -b$, que é uma proposição verdadeira.

103. (C)

$$(1 - i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$$

104. (C)

Seja $z = bi$, $b \neq 0$.

$$\overline{1 + bi} = 1 - bi = 1 + \bar{z}$$

105. (D)

$$\frac{1}{2+2i} = \frac{2-2i}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{2-2i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

106. (C)

• $\frac{z}{w} = \frac{x+yi}{1+i} = \frac{(x+yi)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{x-xi+yi+y}{2} = \frac{x+y}{2} + \frac{-x+y}{2}i$; portanto, a afirmação da opção (A) é falsa.

• $z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$; portanto, a afirmação da opção (B) é falsa.

• $zw = (x + yi)(1 + i) = x + xi + yi - y = (x - y) + (x + y)i$; portanto, a afirmação da opção (C) é verdadeira.

Pág. 165

107. (A)

Seja $w = a + bi$.

Tem-se $w + \bar{w} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$; portanto, o afixo de $w + \bar{w}$ pertence ao eixo real.

108. (D)

Seja $w = a + bi$.

Tem-se $w - \bar{w} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$; portanto, o afixo de $w + \bar{w}$ pertence ao eixo imaginário.

109. (A)

Seja $w = a + bi$.

Tem-se $w\bar{w} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$; portanto, o afixo de $w\bar{w}$ pertence ao semieixo real positivo.

110. (C)

Seja $w = -a, a \in \mathbb{R}^+$.

Tem-se $x^2 = w \Leftrightarrow x = -\sqrt{a}i \vee x = \sqrt{a}i$; portanto, os afixos das raízes quadradas de w pertencem ao eixo imaginário.

Pág. 166**111. (D)**

$i^5 z = iz$, pelo que o afixo de $i^5 z$, ou seja, o ponto P é a imagem do afixo de z pela rotação de centro na origem do referencial e amplitude $\frac{\pi}{2}$.

Portanto, o afixo de z só pode ser o ponto S .

112. (C)

Seja $z = a + bi$.

Tem-se $\operatorname{Re}(iz) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(ai - b) > 0 \Leftrightarrow -b > 0 \Leftrightarrow b < 0$; portanto, o afixo de z pertence ao terceiro ou ao quarto quadrante.

113. (D)

- Se $\alpha = 2\pi$, um argumento de z é $\frac{7\pi}{3}$; neste caso, z não é um número real negativo.
- Se $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, um argumento de z é 0 ; neste caso, z não é um número real negativo.
- Se $\alpha = \pi$, um argumento de z é $\frac{4\pi}{3}$; neste caso, z não é um número real negativo.
- Se $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, um argumento de z é π ; neste caso, z é um número real negativo.

114. (B)

- $i^3 = -i$; ora, $-i$ é um número imaginário puro.
- $\frac{e^{i\pi}}{2} = -\frac{1}{2}$; ora, $-\frac{1}{2}$ não é um número imaginário puro.

115. (C)

Seja $z = \rho e^{i\theta}$.

Tem-se $3z = 3\rho e^{i\theta}$ e, portanto θ é um argumento de $3z$.

116. (A)

Seja $z = \rho e^{i\frac{3\pi}{5}}$.

Tem-se $\bar{z} = \rho e^{i(-\frac{3\pi}{5})} = \rho e^{i(-\frac{3\pi}{5}+2\pi)} = \rho e^{i\frac{7\pi}{5}}$ e, portanto $\frac{7\pi}{5}$ é um argumento de $\bar{z}$.

117. (C)

$$\text{Arg}(-z) = -\frac{\pi}{7} \Leftrightarrow \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{7} + \pi \Leftrightarrow \text{Arg}(z) = \frac{6\pi}{7}$$

Pág. 167**118. (B)**

A afirmação I é falsa pois, se α é argumento de z , $-\alpha$ é argumento de $\bar{z}$ e não de $-z$.

A afirmação II é falsa pois, se, por exemplo, $\alpha = -1$, tem-se $w = -1 + i$, caso em que $\text{Arg}(w) = \frac{3\pi}{4}$.

119. (B)

Tem-se $iz = i(5 - 2i) = 5i + 2 = w$, pelo que o afixo de w é a imagem do afixo de z pela rotação de centro na origem do referencial e amplitude $\frac{\pi}{2}$; portanto, um argumento de w pode ser $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

120. (A)

O afixo de w é a imagem do afixo de z pela homotetia de centro na origem do referencial e razão 3, pelo que pertence ao mesmo quadrante do que o afixo de z .

121. (B)

Tem-se $z2i^9 = 2zi$, pelo que o afixo de $z2i^9$ é a imagem do afixo de z pela rotação de centro na origem do referencial e amplitude $\frac{\pi}{2}$ composta com a homotetia de centro na origem do referencial e razão 2.

Ora, a imagem de Z por meio desta transformação geométrica só pode ser o ponto Q .

122. (D)

Seja α um argumento de z .

Tem-se que um argumento de zw é $\alpha + \theta$.

$$\text{Ora, } \begin{cases} \pi < \alpha < \frac{5\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \pi + \frac{\pi}{2} < \alpha + \theta < \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} < \alpha + \theta < 2\pi$$

Portanto, o afixo de zw pertence ao quarto quadrante.

Pág. 168

123. (B)

Seja $\text{Arg}(z) = \alpha$ e $\text{Arg}(w) = \beta$. Tem-se $zw = |z||w|e^{i(\alpha+\beta)}$.

$$\text{Ora, } \begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \alpha + \beta \leq \pi$$

Portanto, $\alpha + \beta = \text{Arg}(zw)$, pelo que $\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(zw) \leq \pi$.

124. (B)

Seja $\text{Arg}(z) = \alpha$ e $\text{Arg}(w) = \beta$.

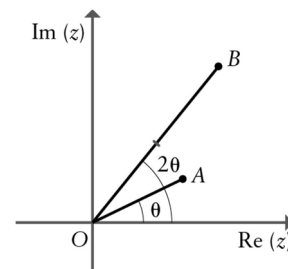
Tem-se $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\alpha-\beta)}$, pelo que $\alpha - \beta$ é um argumento de $\frac{z}{w}$.

$$\text{Ora, } \begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \\ 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \\ -\frac{\pi}{4} \leq -\beta \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \alpha - \beta \leq \pi$$

125. (A)

Tem-se $z^2 = |z|^2 e^{i(2\theta)}$. A figura ao lado pretende ilustrar a situação descrita.

Tem-se $\widehat{AOB} = \theta$.



126. (C)

$$w = \frac{z_2}{(z_1)^3} = \frac{i\sqrt{2}}{(1+i)^3} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^3} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}+2\pi)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

127. (B)

Seja α um argumento de z . Tem-se que um argumento de z^2 é 2α .

Portanto, o afixo de z^2 só pode ser o ponto Q .

Pág. 169

128. (B)

Tem-se $z = \sqrt{5}e^{i\alpha}$. Portanto, $iz^2 = e^{\frac{i\pi}{2}}(\sqrt{5}e^{i\alpha})^2 = e^{\frac{i\pi}{2}}[5e^{i(2\alpha)}] = 5e^{i(2\alpha+\frac{\pi}{2})}$.

129. (A)

Tem-se $z = e^{i\alpha}$.

$$\begin{aligned} \text{Então, vem: } z^n + \frac{1}{z^n} &= e^{i(n\alpha)} + \frac{1}{e^{i(n\alpha)}} = e^{i(n\alpha)} + e^{i(-n\alpha)} = \\ &= \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) + \cos(-n\alpha) + i \sin(-n\alpha) = \\ &= \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) + \cos(n\alpha) - i \sin(n\alpha) = 2 \cos(n\alpha) \end{aligned}$$

130. (B)

Seja w a raiz cúbica de z a que se refere o enunciado. Seja α um argumento de w .

Tem-se $z = w^3 = |w|^3 e^{i(3\alpha)}$, com, por exemplo, $\pi \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{4}$.

Ora, $\pi \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow 3\pi \leq 3\alpha \leq \frac{15\pi}{4}$.

Portanto, o afixo de z pertence à região do plano de Argand representada na opção (B).

131. (B)

Tem-se $\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$. Ora, $2\pi \div \frac{\pi}{4} = 8$, pelo que z_1 e z_2 são duas raízes de índice 8 de w .

Portanto, $w = (z_1)^8 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^8 = 2^4 e^{i\frac{8\pi}{3}} = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Pág. 170**132. (C)**

Seja α um argumento de w .

Tem-se $w^2 = |w|^2 e^{i(2\alpha)}$, pelo que, como $\text{Arg}(w^2) = \frac{\pi}{6}$, pode concluir-se que

$2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Então, para $k = 0$, obtém-se $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

133. (B)

Tem-se $\frac{-\sqrt{3}+i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ e $\frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Ora, $2\pi : \frac{\pi}{3} = 6$, pelo que $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ e $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ são duas raízes de índice 6 de w .

Portanto, $w = \left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^6 = e^{i(5\pi)} = e^{i\pi} = -1$.

134. (B)

$$w = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$w^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$w^3 = e^{i\pi} = e^{i\pi} = -1$$

$$w^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = -w$$

$$w^5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = -w^2$$

$$\text{Portanto, } 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 = 1 + w + w^2 - 1 - w - w^2 = 0.$$

135. (B)

• $\left|\frac{1}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}\right| = \frac{1}{2}$; portanto, o afixo de $\frac{1}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}$ pertence ao referido círculo.

• $\left|2e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 2$; portanto o afixo de $2e^{i\frac{\pi}{4}}$ não pertence ao referido círculo.

136. (D)

Tem-se $z = \sqrt{2} + \cos \frac{\pi}{4} i = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$ e, portanto:

• $|z| = \sqrt{2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$, pelo que o afixo de z não pertence a qualquer das regiões do plano complexo definidas pelas condições das opções (A) e (B).

• $\operatorname{tg}[\operatorname{Arg}(z)] = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, pelo que o afixo de z pertence à região do plano complexo definida pela condição da opção (D).

137. (B)

Tem-se, também:

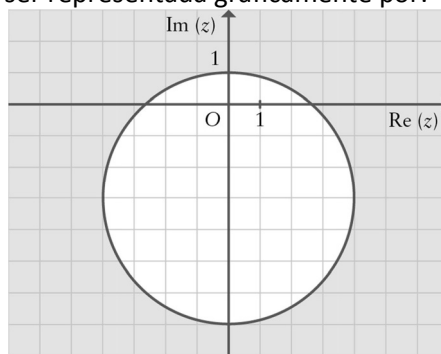
- a condição $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$ define o semieixo imaginário positivo.
- a condição $|z| = 0$ define a origem do referencial.
- a condição $|z - i| = |z + i|$ define o eixo real.

Pág. 171**138. (C)**

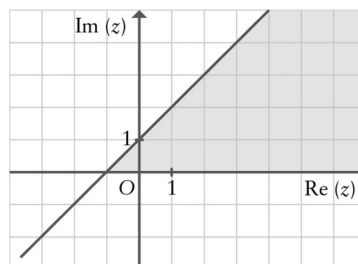
- A condição $|z + 1| \leq 3$ define o círculo, incluindo a fronteira, com centro em $(-1, 0)$ e raio 3.
- $|\operatorname{Arg}(z)| = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{4} \vee \operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$, pelo que a condição $|\operatorname{Arg}(z)| = \frac{\pi}{4}$ define as bissetrizes do primeiro e do quarto quadrantes.
- $|z + 2i| = |1 + i| \Leftrightarrow |z - (-2i)| = \sqrt{2}$, pelo que a condição $|z + 2i| = |1 + i|$ define a circunferência com centro em $(0, -2)$ e raio $\sqrt{2}$.

139. (D)

- A condição $|z + 3i| \geq 4$ pode ser representada graficamente por:



- A condição $0 \leq \operatorname{Arg}(z + 1) \leq \frac{\pi}{4}$ pode ser representada graficamente por:



Portanto, a conjunção das duas condições anteriores pode ser representada graficamente pela região apresentada na opção (D).

140. (D)

A condição $|z + 1| = |z - i|$ define a reta t , que contém as bissetrizes dos quadrantes pares.

- A condição $\operatorname{Re}(z) = \frac{\pi}{4}$ define uma reta perpendicular ao eixo real, reta que não é perpendicular a t .
- A condição $\operatorname{Im}(z) = \frac{\pi}{4}$ define uma reta perpendicular ao eixo imaginário, reta que não é perpendicular a t .
- A condição $|z - 1| = |z + i|$ define a reta t .
- A condição $|z| = |z - 1 + i|$ define a mediatriz do segmento de reta cujos extremos são a origem do referencial e o ponto de coordenadas $(1, -1)$, reta que é perpendicular a t .

141. (C)

$$w = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

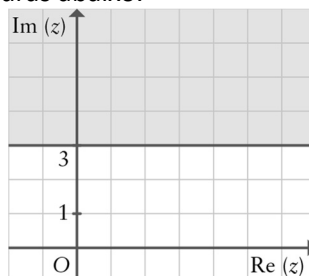
Portanto, $\operatorname{Im}(w) = \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{2}$, o que exclui a opção (B).

$$w + i = \frac{\sqrt{6}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)i + i = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2} + 2}{2}i$$

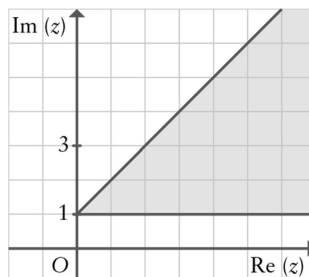
Então, $\operatorname{Re}(w + i) = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,22$ e, portanto, $\operatorname{Re}(w + i) < 2$.

Pág. 172**142. (B)**

A região do plano colorida na figura do enunciado é igual ao conjunto dos pontos comuns às duas regiões do plano representadas nas figuras abaixo.



Esta região pode ser definida pela condição $\operatorname{Im}(z) \geq 3$, o que é equivalente a $\operatorname{Im}(z - 2i) \geq 1$.



Esta região pode ser definida pela condição $0 \leq \operatorname{Arg}(z - i) \leq \frac{\pi}{4}$.

Portanto, a região do plano colorida na figura do enunciado pode ser definida pela condição $\operatorname{Im}(z - 2i) \geq 1 \wedge 0 \leq \operatorname{Arg}(z - i) \leq \frac{\pi}{4}$.

143.

a) $2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$

b) $-(t+1) = 0 \Leftrightarrow t+1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

c) $t^2 - t = 0 \wedge t \neq 0 \Leftrightarrow t(t-1) = 0 \wedge t \neq 0 \Leftrightarrow (t=0 \vee t=1) \wedge t \neq 0 \Leftrightarrow t=1$

d) $(ti)^2 = -25 \Leftrightarrow t^2 i^2 = -25 \Leftrightarrow -t^2 = -25 \Leftrightarrow t^2 = 25 \Leftrightarrow t = -5 \vee t = 5$

e) $\sin t < 0 \wedge \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

144. $1 - 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

145. z é imaginário puro $\Rightarrow 1 - 3\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{3} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 9 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 x = 9 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = 8 \Rightarrow 2 - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4} = 0 \Rightarrow z_1$ é real

146.

a) $z^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -10 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{10}i$

b) $z^2 - 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow z = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} \Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{3}i$

c) $x^4 - 81 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \vee x^2 = -9 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \pm 3 \vee x = \pm 3i$

d) $x[(x-3)^2 + 1] = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee (x-3)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee (x-3)^2 = -1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x-3 = \pm i \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \pm i$

e) $z^3 + 2z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 = -2 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \pm \sqrt{2}i$

f) $(z-4)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (z-4)^2 = -9 \Leftrightarrow z-4 = \pm 3i \Leftrightarrow z = 4 \pm 3i$

g) Como -1 é um zero do polinómio $4x^3 + 13x + 17$, este é divisível por $x+1$.

Façamos a divisão, utilizando a regra de Ruffini:

	4	0	13	17
- 1		- 4	4	- 17
	4	- 4	17	0

Portanto, $4x^3 + 13x + 17 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(4x^2 - 4x + 17) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \vee 4x^2 - 4x + 17 = 0.$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4 \times 4 \times 17}}{8} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{4 \pm \sqrt{-256}}{8} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{4 \pm 16i}{8} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{2} \pm 2i$

Pág. 173**147.**

$$\text{a)} (2x + 1) + (y - 2)i = 4 - i \Leftrightarrow 2x + 1 = 4 \wedge y - 2 = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \wedge y = 1$$

$$\text{b)} (2x - y + 2) + (y - x)i = 3i \Leftrightarrow 2x - y + 2 = 0 \wedge y - x = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2x + 2 \wedge 2x + 2 - x = 3 \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 4$$

148.

$$\text{a)} 2 + 3i(2 - i) - (1 + 2i)^2 = 2 + 6i - 3i^2 - (1 + 4i + 4i^2) = 2 + 6i + 3 - (1 + 4i - 4) =$$

$$= 5 + 6i - (-3 + 4i) = 5 + 6i + 3 - 4i = 8 + 2i$$

$$\text{b)} (i^2 - 2i)2i - 1 = (-1 - 2i)2i - 1 = -2i - 4i^2 - 1 = -2i + 4 - 1 = 3 - 2i$$

$$\text{c)} (\sqrt{2} - i)^2 (1 - \sqrt{2}i)^2 = (2 - 2\sqrt{2}i + i^2)(1 - 2\sqrt{2}i + 2i^2) =$$

$$= (1 - 2\sqrt{2}i)(-1 - 2\sqrt{2}i) = (-1 - 2\sqrt{2}i)(1 - 2\sqrt{2}i) =$$

$$= -(1 + 2\sqrt{2}i)(1 - 2\sqrt{2}i) = -[1^2 - (2\sqrt{2}i)^2] = -(1 - 8i^2) = -(1 + 8) = -9$$

$$\text{d)} (\sqrt{3} + i) \times (\overline{i - 2}) = (\sqrt{3} - i) \times (-2 - i) = -2\sqrt{3} - \sqrt{3}i + 2i + i^2 =$$

$$= -2\sqrt{3} - 1 + (2 - \sqrt{3})i$$

$$\text{e)} (\cos x + i \operatorname{sen} x)^2 = \cos^2 x + 2i \cos x \operatorname{sen} x + i^2 \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 2i \cos x \operatorname{sen} x =$$

$$= \cos(2x) + i \operatorname{sen}(2x)$$

149.

$$\text{a)} (5 + xi) - (y + 3i) = 2 - 5i \Leftrightarrow 5 + xi - y - 3i = 2 - 5i \Leftrightarrow 5 - y + (x - 3)i = 2 - 5i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 - y = 2 \wedge x - 3 = -5 \Leftrightarrow x = -2 \wedge y = 3$$

$$\text{b)} \frac{3 + xi}{y - 3i} = 4 - 3i \Leftrightarrow \frac{(3 + xi)(y + 3i)}{(y - 3i)(y + 3i)} = 4 - 3i \Leftrightarrow \frac{3y + 9i + xyi + 3xi^2}{y^2 - 9i^2} = 4 - 3i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3y - 3x) + (9 + xy)i}{y^2 + 9} = 4 - 3i \Leftrightarrow \frac{3y - 3x}{y^2 + 9} = 4 \wedge \frac{9 + xy}{y^2 + 9} = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3y - 3x = 4y^2 + 36 \wedge 9 + xy = -3y^2 - 27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x = -3y + 4y^2 + 36 \wedge 9 + xy = -3y^2 - 27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3y - 4y^2 - 36}{3} \wedge 9 + xy = -3y^2 - 27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3y - 4y^2 - 36}{3} \wedge 9 + \frac{3y - 4y^2 - 36}{3} \times y = -3y^2 - 27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3y - 4y^2 - 36}{3} \wedge 9 + \frac{3y^2 - 4y^3 - 36y}{3} = -3y^2 - 27 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x = \frac{3y-4y^2-36}{3} \wedge 27 + 3y^2 - 4y^3 - 36y = -9y^2 - 81 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \frac{3y-4y^2-36}{3} \wedge -4y^3 + 12y^2 - 36y + 108 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \frac{3y-4y^2-36}{3} \wedge y^3 - 3y^2 + 9y - 27 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \frac{3y-4y^2-36}{3} \wedge y^2(y-3) + 9(y-3) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \frac{3y-4y^2-36}{3} \wedge (y-3)(y^2+9) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \frac{3y-4y^2-36}{3} \wedge y-3=0 \vee \underbrace{y^2+9=0}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}} \Leftrightarrow x = \frac{3y-4y^2-36}{3} \wedge y=3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \frac{9-36-36}{3} \wedge y=3 \Leftrightarrow x = -21 \wedge y=3 \\
\textbf{c)} &x^2 + 1 + (y+3)i = 2i(1-i) \Leftrightarrow x^2 + 1 + (y+3)i = 2i - 2i^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x^2 + 1 + (y+3)i = 2 + 2i \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \wedge y+3 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1 \wedge y = -1 \\
\textbf{d)} &(x-i)(5-yi) = 4-17i \Leftrightarrow 5x - xyi - 5i + yi^2 = 4-17i \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 5x - y - (xy+5)i = 4-17i \Leftrightarrow 5x - y = 4 \wedge xy+5 = 17 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow y = 5x-4 \wedge xy+5 = 17 \Leftrightarrow y = 5x-4 \wedge x(5x-4)+5 = 17 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow y = 5x-4 \wedge 5x^2-4x-12 = 0 \Leftrightarrow y = 5x-4 \wedge (x = -1,2 \vee x = 2) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (y = 5x-4 \wedge x = -1,2) \vee (y = 5x-4 \wedge x = 2) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x = -1,2 \wedge y = -10) \vee (x = 2 \wedge y = 6)
\end{aligned}$$

150. $z + w = 3a - 2i + 3 - bi = 3a + 3 + (-2 - b)i$
 $zw = (3a - 2i)(3 - bi) = 9a - 3abi - 6i + 2bi^2 = 9a - 2b + (-3ab - 6)i$
 $z + w$ é um número real $\Leftrightarrow -2 - b = 0 \Leftrightarrow b = -2$
 zw é um número imaginário puro $\Leftrightarrow 9a - 2b = 0 \wedge -3ab - 6 \neq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 9a + 4 = 0 \wedge 6a - 6 \neq 0 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{9}$
Portanto, $a = -\frac{4}{9} \wedge b = -2$.

151. Seja $z = x + yi$. Tem-se $\bar{z} = x - yi$. Portanto, $z + \bar{z} = 2x$.
a) $2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$, pelo que $z = 3 + yi$, $y \in \mathbb{R}$.
b) $2x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$, pelo que $z = -\frac{5}{2} + yi$, $y \in \mathbb{R}$.

152. Seja $z = a + bi$. Tem-se $-a^2 - b^2 = -(a^2 + b^2) = -|z|^2$.
Como $a^2 + b^2 \neq 0$, tem-se $|z| \neq 0$, pelo que $z \neq 0$.
Portanto, pretende-se encontrar os complexos w tais que $wz = -|z|^2$.
Tem-se: $wz = -|z|^2 \Leftrightarrow w = -\frac{1}{z} \times |z|^2 \Leftrightarrow w = -\frac{\bar{z}}{|z|^2} \times |z|^2 \Leftrightarrow w = -\bar{z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow w = -(a - bi) \Leftrightarrow w = -a + bi$
Portanto, a expressão pedida é $-a + bi$.

153.

a) $\frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i+2i^2}{1-i^2} = \frac{-2+2i}{2} = -1 + i$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad i - \frac{1}{1+i} &= i - \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = i - \frac{1-i}{1-i^2} = i - \frac{1-i}{2} = i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \\
\text{c)} \quad \frac{1}{i} - \frac{1}{i-1} &= \frac{-i}{i(-i)} - \frac{-1-i}{(-1+i)(-1-i)} = -i - \frac{-1-i}{2} = -i + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\
\text{d)} \quad \frac{1}{(3+i)^2} &= \frac{1}{9+6i+i^2} = \frac{1}{8+6i} = \frac{8-6i}{(8+6i)(8-6i)} = \frac{8-6i}{100} = \frac{2}{25} - \frac{3}{50}i \\
\text{e)} \quad \frac{(6-3i)(2+2i)}{3-3i} - i &= \frac{12+12i-6i-6i^2}{3-3i} - i = \frac{18+6i}{3-3i} - i = \frac{3(6+2i)}{3(1-i)} - i = \\
&= \frac{6+2i}{1-i} - i = \frac{(6+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} - i = \frac{6+6i+2i+2i^2}{2} - i = \frac{4+8i}{2} - i = 2+4i-i = 2+3i \\
\text{f)} \quad \frac{1-i}{(2+i)(-2+i)} + \frac{1}{i} &= \frac{1-i}{(i+2)(i-2)} + \frac{-i}{i(-i)} = \frac{1-i}{i^2-4} - i = \frac{1-i}{-5} - i = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5}i - i = \\
&= -\frac{1}{5} - \frac{4}{5}i \\
\text{g)} \quad \frac{2+i}{(2i-1)^2} &= \frac{2+i}{4i^2-4i+1} = \frac{2+i}{-3-4i} = \frac{(2+i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)} = \frac{-6+8i-3i+4i^2}{9+16} = \frac{-10+5i}{25} = \\
&= -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i
\end{aligned}$$

Pág. 174

$$154. \quad z^2 = (x+2i)^2 = x^2 + 2xi + 4i^2 = x^2 - 4 + 2xi$$

Portanto, z^2 é imaginário puro se e só se $x^2 - 4 = 0 \wedge 2x \neq 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$.

$$\frac{z}{w} = \frac{x+2i}{1+yi} = \frac{(x+2i)(1-yi)}{(1+yi)(1-yi)} = \frac{x-xyi+2i+2y}{1+y^2} = \frac{x+2y+(2-xy)i}{1+y^2} = \frac{x+2y}{1+y^2} + \frac{2-xy}{1+y^2}i$$

Portanto, z^2 é imaginário puro se e só se $x+2y = 0 \wedge 2-xy \neq 0$.

Se $x = 2$, vem: $2+2y = 0 \wedge 2-2y \neq 0$, donde vem $y = -1$.

Se $x = -2$, vem: $-2+2y = 0 \wedge 2+2y \neq 0$, donde vem $y = 1$.

Portanto, tem-se $(x = 2 \wedge y = -1) \vee (x = -2 \wedge y = 1)$.

155.

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad 3 - 3i - \frac{i}{3-3i} &= 3 - 3i - \frac{i(3+3i)}{(3-3i)(3+3i)} = 3 - 3i - \frac{3i+3i^2}{9-9i^2} = 3 - 3i - \frac{-3+3i}{18} = \\
&= 3 - 3i - \frac{-1+i}{6} = 3 - 3i + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}i = \frac{19}{6} - \frac{19}{6}i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad \frac{3i(4+\frac{4}{3}i^{11})}{-i+2i^{18}} &= \frac{3i(4-\frac{4}{3}i)}{-i-2} = \frac{12i-4i^2}{-2-i} = \frac{4+12i}{-2-i} = \frac{(4+12i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \\
&= \frac{-8+4i-24i+12i^2}{4-i^2} = \frac{-20-20i}{5} = -4-4i
\end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad z = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\begin{aligned}
i^{15}z + \frac{z}{i^{102}} &= -iz + \frac{z}{-1} = -iz - z = -i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \\
&= -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d)} \quad \frac{(1-3i)(2+i)}{1+2i^{8n+5}} + 2i &= \frac{2+i-6i-3i^2}{1+2i^5} + 2i = \frac{5-5i}{1+2i} + 2i = \frac{(5-5i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} + 2i = \\
&= \frac{5-10i-5i+10i^2}{1-4i^2} + 2i = \frac{-5-15i}{5} + 2i = -1-3i+2i = -1-i
\end{aligned}$$

$$\text{e)} \frac{3-2i+4i-3}{i^{4n+2}-i} + 2i = \frac{3-2i-3-4i}{i^2-i} = \frac{-6i}{-1-i} = \frac{-6i(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{6i-6i^2}{1-i^2} = \frac{6+6i}{2} = 3+3i$$

156.

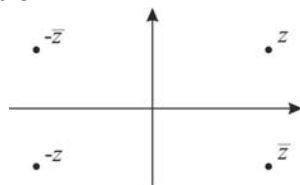
$$\begin{aligned} \text{a)} \quad zi &= \frac{3z+1}{1-i} \Leftrightarrow zi(1-i) = 3z+1 \Leftrightarrow zi - zi^2 = 3z+1 \Leftrightarrow zi + z = 3z+1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow zi - 2z = 1 \Leftrightarrow z(i-2) = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{i-2} \Leftrightarrow z = \frac{-2-i}{(-2+i)(-2-i)} \Leftrightarrow z = \frac{-2-i}{5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad i^{10} + z &= \frac{z^2}{2} \Leftrightarrow -1 + z = \frac{z^2}{2} \Leftrightarrow -2 + 2z = z^2 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm 2i}{2} \Leftrightarrow z = 1+i \vee z = 1-i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad z^2 &= -4i \Leftrightarrow (x+yi)^2 = -4i \Leftrightarrow x^2 + 2xyi + y^2i^2 = -4i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -4i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \wedge 2xy = -4 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 0 \wedge xy = -2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = -y \vee x = y) \wedge xy = -2 \Leftrightarrow (x = -y \wedge xy = -2) \vee (x = y \wedge xy = -2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = -y \wedge -y^2 = -2) \vee \left(x = y \wedge \underbrace{y^2 = -2}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}} \right) \Leftrightarrow x = -y \wedge -y^2 = -2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -y \wedge y^2 = 2 \Leftrightarrow x = -y \wedge (y = -\sqrt{2} \vee y = \sqrt{2}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = \sqrt{2} \wedge y = -\sqrt{2}) \vee (x = -\sqrt{2} \wedge y = \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Portanto, $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \vee z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

157. Tem-se, por exemplo:



Tem-se: $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $-z = -a - bi$, $-\bar{z} = -a + bi$

$$\text{a)} \quad |a| = |b| \wedge a \neq 0$$

$$\text{b)} \quad 2|a| \times 2|b| = 10 \Leftrightarrow |ab| = 2,5$$

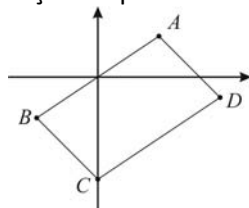
$$\text{c)} \quad 4|a| + 4|b| = p \Leftrightarrow |a| + |b| = \frac{p}{4}$$

$$158. \quad \frac{z}{w} = \frac{a+bi}{1-2i} = \frac{(a+bi)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{a+2ai+bi+2bi^2}{1-4i^2} = \frac{a-2b+(2a+b)i}{5} = \frac{a-2b}{5} + \frac{2a+b}{5}i$$

a) O afixo de $\frac{z}{w}$ pertence ao eixo imaginário se e só se $a - 2b = 0$, ou seja, $a = 2b$.

b) O afixo de $\frac{z}{w}$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares se e só se $\frac{a-2b}{5} = -\frac{2a+b}{5}$.
Tem-se $\frac{a-2b}{5} = -\frac{2a+b}{5} \Leftrightarrow a - 2b = -2a - b \Leftrightarrow b = 3a$.

159. Na figura está representada uma solução do problema.



Tem-se $D = A + \overrightarrow{BC}$. Ora, $\overrightarrow{BC} = C - B = (0, -5) - (-3, -2) = (3, -3)$.

Portanto, $D = A + \overrightarrow{BC} = (3, 2) + (3, -3) = (6, -1)$.

Assim, o ponto D é o afixo de $6 - i$.

160. Por exemplo, os números complexos $2 - i$, $2 + i$, $-2 - i$, $2 + i$, $\sqrt{5}i$ e $-\sqrt{5}$ têm módulo $\sqrt{5}$.

Pág. 175

161.

a) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Portanto, $b = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) e^{ib} é um número complexo de módulo 1.

Tem-se: $|a + \frac{1}{2}i| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} = 1 \Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\bullet -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\bullet \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Portanto, $\left(a = -\frac{\sqrt{3}}{2} \wedge b = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \vee \left(a = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge b = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$.

$$\text{c) } \frac{2+2i}{1-i} = \frac{(2+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(2+2i)(1+i)}{1-i^2} = \frac{2+2i+2i+2i^2}{1-i^2} = \frac{4i}{2} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Portanto, $a = 2 \wedge b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{162. } w^2 = [(a-2) + ai]^2 = (a-2)^2 + 2(a-2)ai + a^2i^2 = a^2 - 4a + 4 + 2(a-2)ai - a^2 = 4 - 4a + 2(a-2)ai$$

$$\pi \text{ é argumento de } w^2 \Leftrightarrow 2a(a-2) = 0 \wedge 4-4a < 0 \Leftrightarrow (a=0 \vee a=2) \wedge a > 1 \Leftrightarrow a=2$$

$$\text{163. } w^2 = (a+2i)^2 = a^2 + 4ai + 4i^2 = a^2 - 4 + 4ai$$

$$\frac{7\pi}{2} \text{ é argumento de } w^2 \Leftrightarrow a^2 - 4 = 0 \wedge 4a < 0 \Leftrightarrow (a = -2 \vee a = 2) \wedge a < 0 \Leftrightarrow a = -2$$

$$\text{164. } z = 2 - x + x^2i$$

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2-x > 0 \wedge x^2 > 2-x \Leftrightarrow x < 2 \wedge x^2 + x - 2 > 0$$

$$\text{Tem-se } x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1.$$

$$\text{Portanto, } x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 1.$$

$$\text{Então, } x < 2 \wedge x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < 2 \wedge (x < -2 \vee x > 1) \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]1, 2[.$$

165.

$$\text{a) } \frac{(3+i)^2}{2-i} - 2 = \frac{9+6i+i^2}{2-i} - 2 = \frac{8+6i}{2-i} - 2 = \frac{(8+6i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} - 2 = \frac{16+8i+12i+6i^2}{4-i^2} - 2 =$$

$$= \frac{10+20i}{5} - 2 = 2 + 4i - 2 = 4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{b) } \frac{(2-i)^3 - 8i^{35}}{1-i} + 3i = \frac{2^3 + 3 \times 2^2 \times (-i) + 3 \times 2 \times (-i)^2 + (-i)^3 - 8i^3}{1-i} + 3i =$$

$$= \frac{8-12i-6+i+8i}{1-i} + 3i = \frac{2-3i}{1-i} + 3i = \frac{(2-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} + 3i = \frac{2+2i-3i-3i^2}{1-i^2} + 3i =$$

$$= \frac{5-i}{2} + 3i = \frac{5-i+6i}{2} = \frac{5+5i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i = \frac{5\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{166. } z - i = \sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} - i = \sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) - i = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - i =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i - i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\text{167. Tem-se } 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i.$$

Substituindo, na equação, z por $-1 + \sqrt{3}i$, vem:

$$(1 - 2i\sqrt{3})\left(-1 + \sqrt{3}i\right) - 5 - 3i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow -1 + \sqrt{3}i + 2i\sqrt{3} - 6i^2 - 5 - 3i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 + 3i\sqrt{3} + 6 - 5 - 3i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0, \text{ o que é verdade.}$$

Portanto, $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ é solução da equação.

$$\text{168. } \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - i}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + i} = \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} = \frac{(\sqrt{3} - i)^2}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{3 - 2\sqrt{3}i + i^2}{3 - i^2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i(-\frac{\pi}{3})}$$

$$\text{169. Tem-se } |1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}. \text{ Vem, então: } 1 + 2i = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}i\right)$$

Portanto, tem-se:

$$\text{a) } \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{b) } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{c) } \sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{d) } \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$$

Pág. 176

170.

a) Os números complexos $2e^{i(-\frac{\pi}{5})}$ e $2e^{i\frac{49\pi}{5}}$ têm o mesmo módulo (2) e a diferença entre os seus argumentos é $-\frac{\pi}{5} - \frac{49\pi}{5} = -\frac{50\pi}{5} = -10\pi = -5 \times 2\pi$.

Portanto, os números complexos são iguais.

b) Os números complexos $\sqrt{2}e^{i(-\frac{17\pi}{8})}$ e $\sqrt{2}e^{i(-\frac{113\pi}{8})}$ têm o mesmo módulo ($\sqrt{2}$) e a diferença entre os seus argumentos é $-\frac{17\pi}{8} - (-\frac{113\pi}{8}) = -\frac{17\pi}{8} + \frac{113\pi}{8} = \frac{96\pi}{8} = 12\pi = 6 \times 2\pi$.

Portanto, os números complexos são iguais.

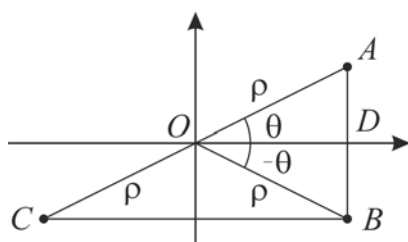
171.

a) $\rho e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\theta} \Leftrightarrow \rho = 2 \wedge \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\rho^2 e^{i\frac{3\pi}{5}} = \sqrt{2} e^{i(\theta - \frac{\pi}{5})} \Leftrightarrow \rho^2 = \sqrt{2} \wedge \frac{3\pi}{5} = \theta - \frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \rho = \sqrt[4]{2} \wedge \theta = \frac{4\pi}{5} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $\rho^2 e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} = 2\rho e^{i(3\theta)} \Leftrightarrow \rho^2 = 2\rho \wedge \theta + \frac{\pi}{2} = 3\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \rho = 2 \wedge -2\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \rho = 2 \wedge -2\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \rho = 2 \wedge \theta = \frac{\pi}{4} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$

172. Na figura está representado o triângulo $[ABC]$.



Tem-se: $\overline{OD} = \rho \cos \theta$ e $\overline{AD} = \rho \sin \theta$

Portanto, $\overline{BC} = 2\rho \cos \theta$ e $\overline{AB} = 2\rho \sin \theta$

Vem, então, que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por:

$$\frac{2\rho \cos \theta \times 2\rho \sin \theta}{2} = 2\rho^2 \sin \theta \cos \theta = \rho^2 \sin (2\theta)$$

173.

a) $\frac{\bar{z}}{z+2} = \frac{2e^{i(-\frac{4\pi}{3})}}{2e^{i\frac{4\pi}{3}}+2} = \frac{2e^{i(-\frac{4\pi}{3})}}{2(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})+2} = \frac{2e^{i(-\frac{4\pi}{3})}}{2(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)+2} = \frac{2e^{i(-\frac{4\pi}{3})}}{-1-\sqrt{3}i+2} =$
 $= \frac{2e^{i(-\frac{4\pi}{3})}}{1-\sqrt{3}i} = \frac{2e^{i(-\frac{4\pi}{3})}}{2e^{i(-\frac{\pi}{3})}} = e^{-i\pi} = e^{i\pi}$

b) $\frac{z}{w} = \frac{2e^{i\frac{4\pi}{3}}}{\rho e^{i\theta}} = \frac{2}{\rho} e^{i(\frac{4\pi}{3}-\theta)}$

Portanto, $\frac{z}{w}$ é imaginário puro $\Leftrightarrow$

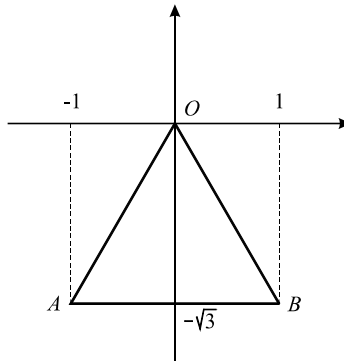
$$\Leftrightarrow \frac{4\pi}{3} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\theta = -\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Fazendo, por exemplo, $k = 0$, obtém-se $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

Assim, uma solução possível é $w = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

c) $z = -1 - \sqrt{3}i ; A(-1, -\sqrt{3})$
 $\bar{z} = -1 + \sqrt{3}i ; -\bar{z} = 1 - \sqrt{3}i ; B(1, -\sqrt{3})$



Área do triângulo $[AOB] = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

174.

$$\begin{aligned} \text{a) } \bullet \quad \frac{3iz_1}{z_2} &= \frac{3ie^{\frac{i\pi}{3}}}{1+i} = \frac{3i(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})}{1+i} = \frac{3i(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)}{1+i} = \frac{3i\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)}{1+i} = \\ &= \frac{3i(1 + \sqrt{3}i)}{2(1+i)} = \frac{3i + 3\sqrt{3}i^2}{2+2i} = \frac{-3\sqrt{3} + 3i}{2+2i} = \frac{(-3\sqrt{3} + 3i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \\ &= \frac{-6\sqrt{3} + 6\sqrt{3}i + 6i - 6i^2}{4-4i^2} = \frac{6-6\sqrt{3} + (6\sqrt{3}+6)i}{8} = \frac{3-3\sqrt{3} + (3\sqrt{3}+3)i}{4} = \\ &= \frac{3-3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}+3}{4}i \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \frac{3iz_1}{z_2} = \frac{3e^{\frac{i\pi}{2}}e^{\frac{i\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{3e^{\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{i\frac{7\pi}{12}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

b) Da alínea anterior, podemos concluir que $\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = \frac{3-3\sqrt{3}}{4} + \frac{3+3\sqrt{3}}{4}i$.

Tem-se: $\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = \frac{3-3\sqrt{3}}{4} + \frac{3+3\sqrt{3}}{4}i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}) = \frac{3-3\sqrt{3}}{4} + \frac{3+3\sqrt{3}}{4}i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{3-3\sqrt{3}}{4} \wedge \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{3+3\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{2(3-3\sqrt{3})}{4 \times 3\sqrt{2}} \wedge \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{2(3+3\sqrt{3})}{4 \times 3\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{3-3\sqrt{3}}{2 \times 3\sqrt{2}} \wedge \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{3+3\sqrt{3}}{2 \times 3\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \wedge \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

175. $2z_1(z_2 - i^3) = 2 \times \frac{1}{2}e^{i\alpha}(2 - 3i + i) = e^{i\alpha}(2 - 2i) = 2e^{i\alpha}(1 - i) = 2e^{i\alpha} \times \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})} =$
 $= 2\sqrt{2}e^{i(\alpha - \frac{\pi}{4})}$

Portanto, $2z_1(z_2 - i^3)$ é imaginário puro $\Leftrightarrow \alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$176. \frac{\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha - \frac{\pi}{2}) + i \operatorname{sen}(\pi - \alpha)} = \frac{\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \frac{\pi}{2})] + i \operatorname{sen}(\pi - \alpha)} = \frac{\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(\pi - \alpha) + i \operatorname{sen}(\pi - \alpha)} =$$

$$= \frac{e^{i(-\alpha)}}{e^{i(\pi - \alpha)}} = e^{i[-\alpha - (\pi - \alpha)]} = e^{-i\pi} = e^{i\pi}$$

Pág. 177

177.

$$a) |z| = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta + 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \left| \frac{1}{\cos \theta} \right| = \frac{1}{|\cos \theta|}$$

b) A reta de equação $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ passa na origem do referencial e a sua inclinação é $\frac{\pi}{6}$ ($\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$).

Seja $\alpha = \operatorname{Arg}(z)$.

O afixo de z pertence à reta de equação $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ se e só se $\alpha = \frac{\pi}{6} \vee \alpha = -\frac{5\pi}{6}$.

Em qualquer dos casos, tem-se $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ora, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}$, pelo que $\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Portanto, $\theta = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$178. \text{ Tem-se } z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

$$\text{Portanto, } \frac{(z_1)^5 + 1}{2z_1} = \frac{(e^{i\frac{2\pi}{3}})^5 + 1}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{10\pi}{3}} + 1}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{4\pi}{3}} + 1}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{e^{i(-\frac{\pi}{3})}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

179.

$$a) (z_1)^5 + 4 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5 + 4 = \sqrt{2^5}e^{i\frac{5\pi}{4}} + 4 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} + 4 = 4(-1 - i) + 4 = -4i = 4e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$b) w z_1 = e^{i\alpha} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \alpha)}$$

$$w z_1 \text{ é imaginário puro } \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

180.

$$a) (z_1)^6 - \overline{z_2} = \left(-\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^6 - 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = \left(2e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^6 - 2e^{i\frac{5\pi}{6}} =$$

$$= 64e^{i\frac{30\pi}{4}} - 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 64e^{i\frac{15\pi}{2}} - 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} - i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$= 64e^{i\frac{3\pi}{2}} - 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} - i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right) = -64i - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -64i + \sqrt{3} + i = \sqrt{3} - 63i$$

$$b) w = \frac{-3}{z_1 z_2} = \frac{3e^{i\pi}}{2e^{i\frac{5\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{3e^{i\pi}}{4e^{i\frac{25\pi}{12}}} = \frac{3}{4}e^{i(\pi - \frac{25\pi}{12})} = \frac{3}{4}e^{i(-\frac{13\pi}{12})} = \frac{3}{4}e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

$$w^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n e^{i\frac{11n\pi}{12}}$$

w^n é real positivo $\Leftrightarrow \frac{11n\pi}{12} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 11n\pi = 24k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{24k}{11}, k \in \mathbb{Z}$

n é natural $\Leftrightarrow k$ é múltiplo de 11

O menor valor de n é portanto igual a $\frac{24 \times 11}{11} = 24$.

181. Tem-se $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$, pelo que:

- $(1+i)^3 = (1+i)^2(1+i) = 2i(1+i) = -2 + 2i$
- $(1+i)^5 = (1+i)^2(1+i)^3 = 2i(-2 + 2i) = -4 - 4i$

Vem, então:

$$\begin{aligned} -4 - 4i + a(-2 + 2i) + b &= 0 \Leftrightarrow -4 - 4i - 2a + 2ai + b = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b - 2a - 4 + (2a - 4)i &= 0 \Leftrightarrow b - 2a - 4 = 0 \wedge 2a - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b = 2a + 4 \wedge a = 2 &\Leftrightarrow a = 2 \wedge b = 8 \end{aligned}$$

182.

a) $z_1 = \rho e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $z_2 = \left(\rho e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = \rho^2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Portanto, $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, pelo que o triângulo $[AOB]$ é equilátero se e só se $\rho^2 = \rho$.

Como $\rho > 0$, tem-se $\rho^2 = \rho \Leftrightarrow \rho = 1$.

Assim, o triângulo $[AOB]$ é equilátero se e só se $|z_1| = 1$.

b) Sendo $z_1 = \rho e^{i\frac{\pi}{3}}$, tem-se $\operatorname{Re}(z_1) = 2 \Leftrightarrow \rho \cos \frac{\pi}{3} = 2 \Leftrightarrow \rho \times \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow \rho = 4$

Portanto, $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$.

183.
$$\frac{(\cos \alpha - i \sin \alpha)^3}{\sin \alpha + i \cos \alpha} = \frac{[\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)]^3}{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{[e^{i(-\alpha)}]^3}{e^{i(\frac{\pi}{2} - \alpha)}} = \frac{e^{i(-3\alpha)}}{e^{i(\frac{\pi}{2} - \alpha)}} = e^{i(-3\alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha)} =$$

$$= e^{i(-\frac{\pi}{2} - 2\alpha)} = e^{i(-\frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2\pi)} = e^{i(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)}$$

184.

a) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{2}}$

Interpretação: qualquer que seja o número natural n , o afixo de $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ pertence a um dos eixos coordenados.

b) $(1+i)^n = (1-i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow e^{i\frac{n\pi}{2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{2} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 4k, k \in \mathbb{Z}$

Portanto, o menor número natural n que satisfaz o pretendido é 4.

Pág. 178

185.

a) $z^3 + \overline{w} = 0 \Leftrightarrow z^3 = -\overline{w} \Leftrightarrow z^3 = -\overline{\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)} \Leftrightarrow z^3 = -\left(2e^{i(-\frac{\pi}{3})}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z^3 = 2e^{i(-\frac{\pi}{3} + \pi)} \Leftrightarrow z^3 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{3}}, k \in \{0, 1, 2\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi + 6k\pi}{9}}, k \in \{0, 1, 2\} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{9}} \vee z = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{8\pi}{9}} \vee z = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{14\pi}{9}}$$

b) $w^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$

w^n é um número real negativo $\Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n\pi = 3\pi + 6k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow n = 3 + 6k, k \in \mathbb{Z}$

Como se pretende que $n \in \mathbb{N}$, vem $n = 3 + 6k, k \in \mathbb{N}_0$.

186.

a) O afixo de $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$ é o ponto A .

O ponto B é o afixo de $2e^{i(\frac{7\pi}{8} - \frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{5\pi}{24}}$.

O ponto C é o afixo de $2e^{i(\frac{7\pi}{8} + \frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{37\pi}{24}}$.

b) $w = \left(2e^{i\frac{7\pi}{8}}\right)^6 = 64e^{i\frac{42\pi}{8}} = 64e^{i\frac{21\pi}{4}} = 64e^{i\frac{5\pi}{4}} = 64\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) =$
 $= 64\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i$

187.

a) $z_1 = \frac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2 - e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})}{2 - (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{3}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)}{2 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}{2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} =$
 $= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\sqrt{3} + 3i}{3 - \sqrt{3}i} = \frac{(\sqrt{3} + 3i)(3 + \sqrt{3}i)}{(3 - \sqrt{3}i)(3 + \sqrt{3}i)} = \frac{3\sqrt{3} + 3i + 9i + 3\sqrt{3}i^2}{9 - 3i^2} = \frac{12i}{12} = i$

b) Os afixos das raízes quartas de i são vértices de um quadrado inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial e raio 1 (o raio é igual a 1, pois, como $|i| = 1$, as raízes quartas de i têm todas módulo igual a 1).

Portanto, o polígono em causa é um quadrado cuja diagonal mede 2.

Seja l o lado do quadrado. Tem-se $l^2 + l^2 = 2^2 \Leftrightarrow 2l^2 = 4 \Leftrightarrow l^2 = 2 \Leftrightarrow l = \sqrt{2}$.

Portanto, o perímetro do quadrado é $4\sqrt{2}$.

c) Tem-se $\frac{z_1}{z_2} = z \Leftrightarrow z_1 = z \times z_2 \Leftrightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \times z_2$.

Sejam A e B os afixos de z_1 e z_2 e seja O a origem do referencial.

Como $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \times z_2$, tem-se que $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$.

Vem, então, que $n = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$.

Portanto, $w = i^6 = i^2 = -1$.

188.

a) $z = -\frac{i^{26} - 2i^{23}}{i - 3} = \frac{i^{26} - 2i^{23}}{3 - i} = \frac{i^2 - 2i^3}{3 - i} = \frac{-1 + 2i}{3 - i} = \frac{(-1 + 2i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{-3 - i + 6i + 2i^2}{9 - i^2} =$
 $= \frac{-5 + 5i}{10} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

b) Seja $w = \rho e^{i\theta}$. Vem, então: $w^3 \overline{w} = z^4 \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^3 \overline{\rho e^{i\theta}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \rho^3 e^{3i\theta} \rho e^{i(-\theta)} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 e^{3i\pi} \Leftrightarrow \rho^4 e^{2i\theta} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 e^{i\pi} \Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge 2\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Portanto, tem-se $w = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \vee \quad w = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

189.

a) Tem-se $|w_1| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. Portanto, tem-se $w_1 = 5e^{i\theta}$.

Vem, então: $4 - 3i = -i(3 + 4i) = -i\overline{w_1} = e^{i\frac{3\pi}{2}} \times 5e^{i(-\theta)} = 5e^{i(\frac{3\pi}{2} - \theta)}$

b) $(a + bi)^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow a^2 + 2abi + b^2i^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 3 \wedge 2ab = -4 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 3 \wedge b = -\frac{2}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - \left(-\frac{2}{a}\right)^2 = 3 \wedge b = -\frac{2}{a} \Leftrightarrow a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \wedge b = -\frac{2}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 4 = 3a^2 \wedge b = -\frac{2}{a} \Leftrightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \wedge b = -\frac{2}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \wedge b = -\frac{2}{a} \Leftrightarrow \left(\underbrace{a^2 = -1}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}} \vee a^2 = 4 \right) \wedge b = -\frac{2}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 4 \wedge b = -\frac{2}{a} \Leftrightarrow (a = -2 \vee a = 2) \wedge b = -\frac{2}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a = -2 \wedge b = 1) \vee (a = 2 \wedge b = -1)$$

Portanto, as raízes quadradas de $3 - 4i$ são $-2 + i$ e $2 - i$.

c) Começemos por observar que 0 é solução da equação, pois é verdade que $0^3 = \frac{\overline{0}}{w_2}$.

Vejam as soluções não nulas. Seja $z = \rho e^{i\theta}$, com $\rho > 0$.

$$\text{Vem, então: } z^3 = \frac{\overline{z}}{w_2} \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^3 = \frac{\rho e^{i(-\theta)}}{2e^{i\frac{\pi}{5}}} \Leftrightarrow \rho^3 e^{3i\theta} = \frac{\rho}{2} e^{i(-\theta - \frac{\pi}{5})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^3 = \frac{\rho}{2} \wedge 3\theta = -\theta - \frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \rho^2 = \frac{1}{2} \wedge 4\theta = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \theta = -\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

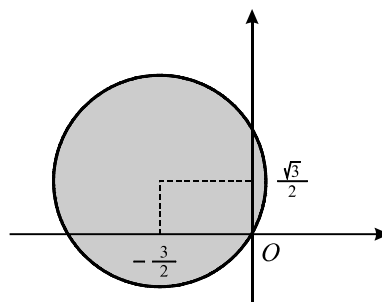
As soluções da equação são: $0, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(-\frac{\pi}{20})}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{9\pi}{20}}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{19\pi}{20}} \text{ e } \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{29\pi}{20}}$

Pág. 179

190. A condição $|z - z_1| \leq |z_1|$ define, no plano de Argand, o círculo de centro no afixo de z_1 e raio igual a $|z_1|$. Como o círculo tem centro no afixo de z_1 e raio igual a $|z_1|$, a circunferência que o limita passa na origem do referencial.

$$\text{Tem-se } z_1 = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Assim, a representação pedida é:



191.

a) Tem-se:

$$(x_1)^2 + (e^{i\pi})^3 + e^{\frac{i\pi}{3}} = 0 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{i5\pi}{6}}\right)^2 + (-1)^3 + \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{i5\pi}{3}} + (-1) + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + (-1) + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0, \text{ o que é verdade.}$$

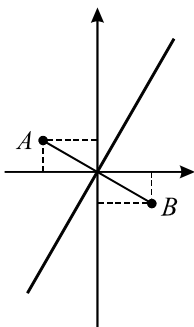
$$(x_2)^2 + (e^{i\pi})^3 + e^{\frac{i\pi}{3}} = 0 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{i11\pi}{6}}\right)^2 + (-1)^3 + \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{i11\pi}{3}} + (-1) + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{i5\pi}{3}} + (-1) + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0 \Leftrightarrow$$

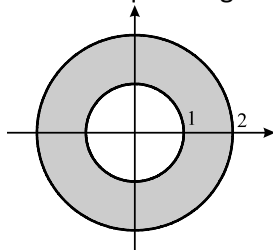
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + (-1) + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0 \Leftrightarrow 0 = 0, \text{ o que é verdade.}$$

b) Tem-se: $x_1 = e^{\frac{i5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e $x_2 = e^{\frac{i11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

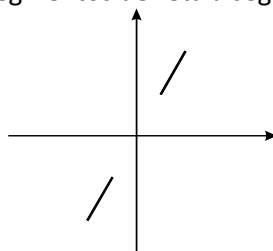
Portanto, a condição $|z - x_1| = |z - x_2|$ define a mediatriz do segmento de reta de extremos $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, que se representa a seguir.



A condição $1 \leq |z| \leq 2$ define a coroa circular que a seguir se representa.



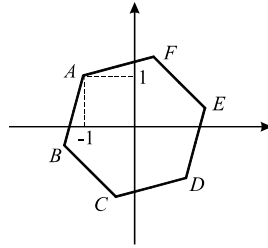
A condição $|z - x_1| = |z - x_2| \wedge 1 \leq |z| \leq 2$ define a interseção desta coroa circular com a referida mediatriz, ou seja, define os segmentos de reta a seguir representados.



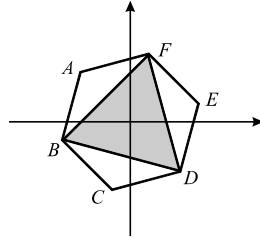
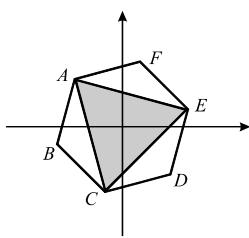
192.

a) $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 + i$

Tem-se, então, que os pontos A, B, C, D, E e F são os vértices do hexágono regular representado a seguir.



Com três destes seis pontos, é possível definir dois triângulos equiláteros.



Vem, então:

Número de casos possíveis: ${}^6C_3 = 20$

Número de casos favoráveis: 2

Probabilidade pedida: $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

$$\text{b)} w = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \right)^6 = \left(\sqrt{2} \right)^6 e^{i\frac{18\pi}{4}} = 2^3 e^{i\frac{9\pi}{2}} = 8 e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i$$

c) O afixo de t pertence ao círculo de centro em A e raio 1 se e só se $|t - z_1| \leq 1$.

Tem-se $t = \frac{3}{2} e^{i\pi} = -\frac{3}{2}$.

Vem: $|t - z_1| = \left| -\frac{3}{2} - (-1 + i) \right| = \left| -\frac{3}{2} + 1 - i \right| = \left| -\frac{1}{2} - i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Como $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$, o afixo de t não pertence ao círculo de centro em A e raio 1.

$$\text{d)} |z - (-1 + i)| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

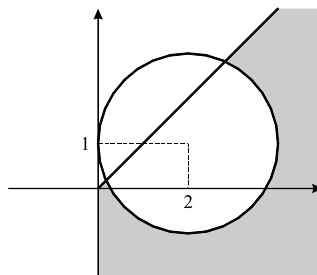
193.

$$\text{a)} |z - (1 - 2i)| > 3$$

$$\text{b)} \text{ Tem-se } \frac{4e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{4e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i(-\frac{\pi}{3})}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i \quad |2i - (1 - 2i)| = |-1 + 4i| = \sqrt{17} > 3$$

$$\text{194. } |-z + 2 + i| \geq 2 \Leftrightarrow |z - 2 - i| \geq 2 \Leftrightarrow |z - (2 + i)| \geq 2$$

$$0 \leq \text{Arg}(iz) \leq \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{4}$$



Pág. 180

195.

a) $z_1 = 3i^{29} = 3i^{7 \times 4 + 1} = 3i^1 = 3i$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = -1 - i$$

$$(z_1 + z_2)^2 = (3i - 1 - i)^2 = (-1 + 2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 = -3 - 4i$$

b) $z_1 = 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$(z_1 z_2)^n = \left(3e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}} \right)^n = \left(3\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}} \right)^n = \left(3\sqrt{2} \right)^n e^{i\frac{7n\pi}{4}}$$

$$(z_1 z_2)^n \text{ é um número real se e só se } \frac{7n\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{7n\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow 7n\pi = 4k\pi \Leftrightarrow 7n = 4k \Leftrightarrow n = \frac{4k}{7}$$

O menor número natural n que satisfaz o pretendido é $\frac{4 \times 7}{7} = 4$.

c) $|z_1| = |3i| = 3$

$$|z_2 - w| = |z_1| \Leftrightarrow |w - z_2| = 3 \Leftrightarrow |w - (-1 - i)| = 3$$

Trata-se, portanto, da circunferência de centro em $(-1, -1)$ e raio 3.

196. A região representada é a união de uma coroa circular, limitada por duas circunferências centradas na origem e raios 1 e 2, com um semiplano limitado pela mediatriz do segmento cujos extremos são a origem e o ponto de coordenadas $(-1, -1)$.

Assim, uma condição que define esta região é $1 \leq |z| \leq 2 \vee |z| \geq |z - (-1 - i)|$.

197.

a) Tem-se:

- $\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}(w) < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow a < 0 \wedge b > -a$

- $|w| < 6 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} < 6 \Leftrightarrow a^2 + b^2 < 36$

Por exemplo, $a = -1$ e $b = 2$ cumprem as condições requeridas.

$$\begin{aligned} \text{b}_1) \frac{w^2}{w + 2i^{17}} &= \frac{(-2 + 4i)^2}{-2 + 4i + 2i} = \frac{4 - 16i + 16i^2}{-2 + 6i} = \frac{-12 - 16i}{-2 + 6i} = \frac{-6 - 8i}{-1 + 3i} = \\ &= \frac{(-6 - 8i)(-1 - 3i)}{(-1 + 3i)(-1 - 3i)} = \frac{6 + 18i + 8i + 24i^2}{1 - 9i^2} = \frac{-18 + 26i}{10} = -\frac{9}{5} + \frac{13}{5}i \end{aligned}$$

b₂) Tem-se:

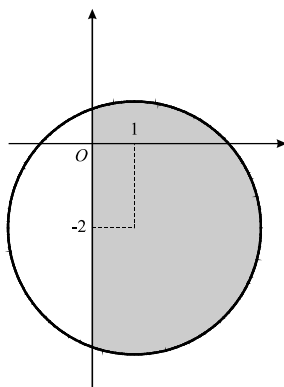
- $|2z + w| \leq 6 \Leftrightarrow |2z - 2 + 4i| \leq 6 \Leftrightarrow |2(z - 1 + 2i)| \leq 6 \Leftrightarrow |2| \times |z - 1 + 2i| \leq 6 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2|z - 1 + 2i| \leq 6 \Leftrightarrow |z - 1 + 2i| \leq 3 \Leftrightarrow |z - (1 - 2i)| \leq 3$

A esta condição corresponde o círculo de centro em $(1, -2)$ e raio 3.

- $|z - \overline{w}| \geq |z + w| \Leftrightarrow |z - (-2 - 4i)| \geq |z + (-2 + 4i)| \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |z - (-2 - 4i)| \geq |z - (2 - 4i)|$

A esta condição corresponde um semiplano, limitado pela mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os pontos $(-2, -4)$ e $(2, -4)$. Uma vez que estes pontos têm a mesma ordenada e abscissas simétricas, a referida mediatriz é o eixo imaginário.

Assim, a representação pedida é:



198.

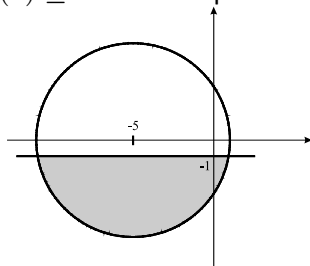
$$\begin{aligned} \text{a)} \quad |z + 5| \leq 6 &\Leftrightarrow |z + 5|^2 \leq 36 \Leftrightarrow (z + 5)(\overline{z + 5}) \leq 36 \Leftrightarrow (z + 5)(\bar{z} + \bar{5}) \leq 36 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (z + 5)(\bar{z} + 5) \leq 36 \Leftrightarrow z\bar{z} + 5z + 5\bar{z} + 25 \leq 36 \Leftrightarrow z\bar{z} + 5z + 5\bar{z} \leq 11 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5(z + \bar{z}) + z\bar{z} \leq 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 5(z + \bar{z}) + z\bar{z} \leq 11 \wedge (z - \bar{z})i \geq 2 &\Leftrightarrow |z + 5| \leq 6 \wedge 2i \operatorname{Im}(z)i \geq 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z + 5| \leq 6 \wedge 2i^2 \operatorname{Im}(z) \geq 2 \Leftrightarrow |z + 5| \leq 6 \wedge -2 \operatorname{Im}(z) \geq 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z + 5| \leq 6 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq -1 \end{aligned}$$

À condição $|z + 5| \leq 6$ corresponde o círculo de centro $(-5, 0)$ e raio 6.

À condição $\operatorname{Im}(z) \leq -1$ corresponde o semiplano limitado superiormente pela reta de equação $y = -1$.

Assim, à condição $|z + 5| \leq 6 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq -1$ corresponde a região a seguir representada.



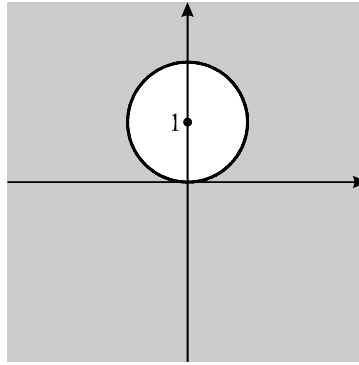
Pág. 181

199.

a) Seja $z = x + yi$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(z - \bar{z}) \leq z\bar{z} &\Leftrightarrow \operatorname{Im}[x + yi - (x - yi)] \leq (x + yi)(x - yi) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(2yi) \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2y \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 \geq 1 \end{aligned}$$

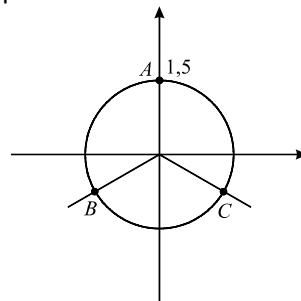
A esta condição corresponde o exterior do círculo de centro $(0, 1)$ e raio 1, incluindo a circunferência que limita o referido círculo:



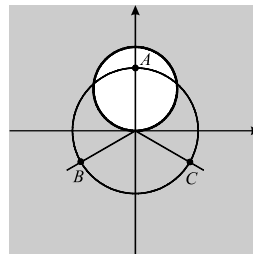
$$8z^3 + 27i = 0 \Leftrightarrow z^3 = -\frac{27}{8}i \Leftrightarrow z^3 = \frac{27}{8}e^{i\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow z = \frac{3}{2}e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3})}, k \in \{0, 1, 2\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \vee z = \frac{3}{2}e^{i\frac{7\pi}{6}} \vee z = \frac{3}{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

A esta condição correspondem os afixos dos números complexos $\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\frac{3}{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$ e $\frac{3}{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$, que são os pontos A , B e C a seguir representados.

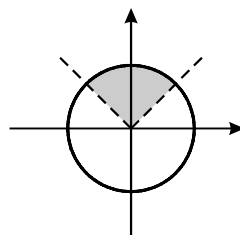


Portanto, à condição $\text{Im}(z - \bar{z}) \leq z\bar{z} \wedge 8z^3 + 27i = 0$ correspondem os pontos B e C , tal como se mostra na figura seguinte (os pontos B e C pertencem à região definida por $\text{Im}(z - \bar{z}) \leq z\bar{z}$, mas o ponto A não pertence).



b) $z\bar{z} \leq \left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| \Leftrightarrow |z|^2 \leq 1 \Leftrightarrow |z| \leq 1$

À condição $|z| \leq 1 \wedge \frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z) < \frac{3\pi}{4}$ corresponde a região representada na figura seguinte.



c) Seja $z = x + yi$. Tem-se:

$$|\text{Im}(z + i)| \leq 2 \Leftrightarrow |\text{Im}(x + yi + i)| \leq 2 \Leftrightarrow |\text{Im}[x + (y + 1)i]| \leq 2 \Leftrightarrow |y + 1| \leq 2 \Leftrightarrow$$

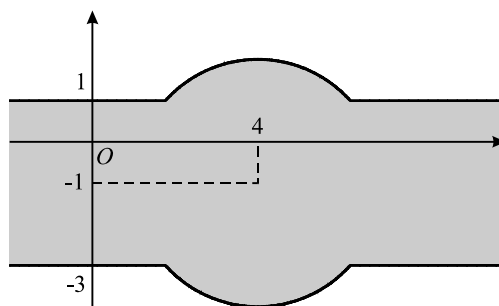
$$\Leftrightarrow -2 \leq y + 1 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 1$$

A esta condição corresponde a região do plano compreendida entre as retas de equações $y = -3$ e $y = 1$.

Tem-se $|z - 4 + i| \leq 3 \Leftrightarrow |z - (4 - i)| \leq 3$.

A esta condição corresponde o círculo de centro em $(4, -1)$ e raio 3.

Portanto, a condição $|\operatorname{Im}(z + i)| \leq 2 \vee |z - 4 + i| \leq 3$ corresponde a união das duas regiões.



d) Tem-se: $|z + 1 - 2i| < 4 \Leftrightarrow |z - (-1 + 2i)| < 4$

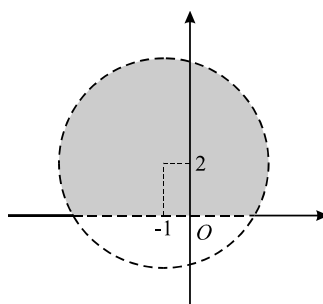
A esta condição corresponde o interior do círculo de centro em $(-1, 2)$ e raio 4.

Seja $z = x + yi$. Tem-se:

$$\operatorname{Re}(iz) < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}[i(x + yi)] < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(-y + xi) < 0 \Leftrightarrow -y < 0 \Leftrightarrow y > 0$$

A esta condição corresponde o semiplano limitado inferiormente pelo eixo real (não incluindo este eixo).

À condição $|z + 1 - 2i| < 4 \wedge \operatorname{Re}(iz) < 0$ corresponde a interseção das duas regiões.



200. Tem-se $|z + 2 - 3i| = |z - 6i| \Leftrightarrow |z - (-2 + 3i)| = |z - 6i|$.

A esta condição corresponde a mediatriz do segmento $[AB]$ em que $A(-2, 3)$ e $B(0, 6)$.

O ponto médio M do segmento $[AB]$ tem coordenadas $(\frac{-2+0}{2}, \frac{3+6}{2})$.

Tem-se, portanto, $M(-1, \frac{9}{2})$.

A mediatriz do segmento $[AB]$ passa por M e é perpendicular a $[AB]$.

Tem-se $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 6) - (-2, 3) = (2, 3)$.

Portanto, o vetor $\vec{v}(-3, 2)$ é perpendicular a $\overrightarrow{AB}$.

O declive da mediatriz é, portanto, igual a $-\frac{2}{3}$.

A equação reduzida da mediatriz é da forma $y = -\frac{2}{3}x + b$.

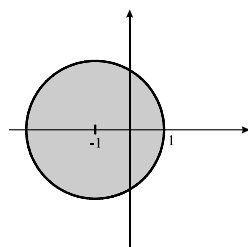
Como a mediatriz passa por $M(-1, \frac{9}{2})$, vem $\frac{9}{2} = -\frac{2}{3} \times (-1) + b$.

Portanto, $b = \frac{9}{2} - \frac{2}{3} = \frac{23}{6}$.

A equação reduzida da mediatriz é $y = -\frac{2}{3}x + \frac{23}{6}$.

201.

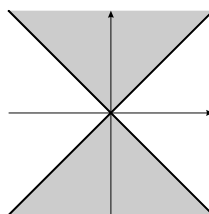
a) Tem-se $|z + 1| \leq 2 \Leftrightarrow |z - (-1)| \leq 2$. A esta condição corresponde o círculo de centro em $(-1, 0)$ e raio 2.



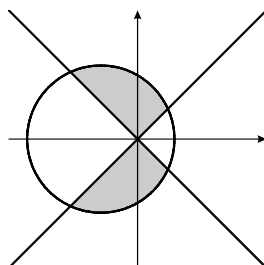
Seja $z = x + yi$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z^2) \leq 0 &\Leftrightarrow \operatorname{Re}[(x + yi)^2] \leq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(x^2 + 2xyi + y^2i^2) \leq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(x^2 - y^2 + 2xyi) \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) \leq 0 \Leftrightarrow (x - y \leq 0 \wedge x + y \geq 0) \vee (x - y \geq 0 \wedge x + y \leq 0) \\ &\Leftrightarrow (y \geq x \wedge y \geq -x) \vee (y \leq x \wedge y \leq -x) \end{aligned}$$

A esta condição corresponde a região a seguir representada.



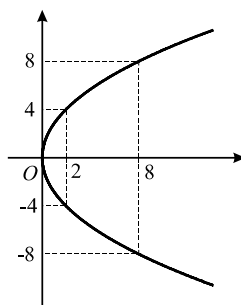
Portanto, a condição $|z + 1| \leq 2 \wedge \operatorname{Re}(z^2) \leq 0$ corresponde a região a seguir representada.



b) Seja $z = x + yi$. Tem-se:

$$\begin{aligned} |z - 2| = 2 + \operatorname{Re}(z) &\Leftrightarrow |x + yi - 2| = 2 + x \Leftrightarrow |x - 2 + yi| = 2 + x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = 2 + x \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = (2 + x)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 + 4x + x^2 \Leftrightarrow y^2 = 8x \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{8} \end{aligned}$$

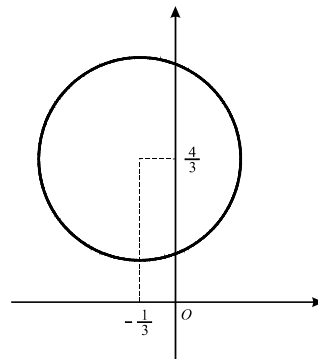
A esta condição corresponde a parábola representada a seguir.



c) Seja $z = x + yi$. Tem-se:

$$\begin{aligned}
 |z - 1| &= 2|z - i| \Leftrightarrow |x + yi - 1| = 2|x + yi - i| \Leftrightarrow |x - 1 + yi| = 2|x + (y - 1)i| \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 4[x^2 + (y - 1)^2] \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4(x^2 + y^2 - 2y + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2x - 8y = -3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}y = -1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{16}{9} = -1 + \frac{1}{9} + \frac{16}{9} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}
 \end{aligned}$$

A esta condição corresponde a circunferência de centro em $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ e raio $\frac{\sqrt{8}}{3}$.



202.

a) Condição em $\mathbb{C}$: $|z - (5 + 2i)| = |z - (1 + 4i)|$

Tem-se: $P(5, 2)$ e $Q(1, 4)$

O ponto médio M do segmento $[PQ]$ tem coordenadas $\left(\frac{5+1}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$.

Tem-se, portanto, $M(3, 3)$.

A mediatriz do segmento $[PQ]$ passa por M e é perpendicular a $[PQ]$.

Tem-se $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, 4) - (5, 2) = (-4, 2)$.

Portanto, o vetor $\vec{v}(2, 4)$ é perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$.

O declive da mediatriz é, portanto, igual a $\frac{4}{2}$, ou seja, é igual a 2.

A equação reduzida da mediatriz é da forma $y = 2x + b$.

Como a mediatriz passa por $M(3, 3)$, vem $3 = 2 \times 3 + b$.

Portanto, $b = 3 - 6 = -3$.

A equação reduzida da mediatriz é $y = 2x - 3$.

b) Um ponto é afixo de um número complexo com argumento $\frac{\pi}{4}$ se e só se as suas coordenadas são positivas e iguais.

Ora, o ponto $M(3, 3)$ pertence à mediatriz e tem as suas coordenadas positivas e iguais.

Portanto, é esse o ponto pretendido.

203.

a) $|z - (1 + 2i)| \leq 3 \wedge 0 \leq \text{Arg}[z - (1 + 2i)] \leq \frac{\pi}{4}$

b) $\frac{\pi}{3} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{5\pi}{6} \wedge \text{Im}(z) \leq 2$

c) $|z - (2 + 2i)| \leq 2 \wedge 0 \leq \text{Arg}(z + 2) \leq \frac{\pi}{4} \wedge \frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z - 2) \leq \pi$

d) A elipse representada tem semieixo maior igual a 4 e semieixo menor igual a 2.

Seja c a semidistância focal. Tem-se: $c^2 + 2^2 = 4^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{12}$.

Os focos da elipse são $(-\sqrt{12}, 0)$ e $(\sqrt{12}, 0)$.

Portanto, uma condição que define a elipse é $|z + \sqrt{12}| + |z - \sqrt{12}| = 8$.

