

**RESOLUÇÕES CADERNO DE ATIVIDADES NY12**

Cálculo Combinatório	2
Probabilidades	7
Funções Reais de Variável Real	12
Trigonometria e Funções Trigonométricas	18
Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas	28
Primitivas	41
Cálculo Integral	42

Cálculo Combinatório

PÁG. 7

- 1.1 Dado que $A \setminus B = A$, $U \setminus B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ e $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a hipótese correta é D .
- 1.2 Dado que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a hipótese correta é B .

2. $\overline{A} = \{a, d, e, g\} = U \setminus A = \{a, b, c, d, e, f, g\} \setminus \{b, c, f\}$

3.1 $\overline{C} = U \setminus C = \{3, 5, 6, 7\}$

3.2 $A \cap B = \{1\}$

3.3 $B \cap C = \{1\}$

3.4 $(A \cap B) \cap C = \{1\}$

3.5 $\overline{A \cap B} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

3.6 $A \cup B = \{1, 2, 5, 6, 7\}$

3.7 $(A \cup B) \cap (B \cup C) = \{1, 2, 5, 6, 7\} \cap \{1, 2, 4, 7, 8, 9, 10\} = \{1, 2, 7\}$

3.8 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \{2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\} \cap \{3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\} = \{3, 4, 8, 9, 10\}$

4. Dado que $\overline{A} \cap A = \emptyset$, os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ não pertencem ao conjunto A . Pela mesma razão, os elementos do conjunto $\{1, 5, 6, 7\}$ não pertencem ao conjunto B .

Dado que $A \subseteq A \cup B$, conclui-se que o conjunto A é um subconjunto do conjunto $\{7, 8, 10\}$.

Pela mesma razão, conclui-se que o conjunto B é um subconjunto do conjunto $\{2, 3, 4, 8, 10\}$.

Uma vez que $\#(A \cap B) = 2$, conclui-se que o conjunto $A \cap B$ tem dois elementos e como $\{7, 8, 10\} \cap \{2, 3, 4, 8, 10\} = \{8, 10\}$, conclui-se que $A \cap B = \{8, 10\}$.

Dado que $A \cap B \subseteq A$, $7 \notin B$ e $7 \in A \cup B$, conclui-se que $A = \{7, 8, 10\}$.

Dado que $A \cap B \subseteq B$, $2 \notin A \wedge 3 \notin A \wedge 4 \notin A$ e $2 \in A \cup B \wedge 3 \in A \cup B \wedge 4 \in A \cup B$, conclui-se que $B = \{2, 3, 4, 8, 10\}$.

Por fim, $U = A \cup \overline{A} = B \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

5. $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup \underbrace{(B \cap \overline{B})}_{\emptyset} = A \cup \emptyset = A$

6. $U \setminus (A \cap B) = \{x \in U : x \notin A \cap B\} = \{x \in U : x \notin A \vee x \notin B\} = \{x \in U : x \notin A\} \cup \{x \in U : x \notin B\} = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$

7.1 Dado que $A \times B = \{(a, i), (a, o), (a, u), (e, i), (e, o), (e, u), (i, i), (i, o), (i, u)\}$, então $\#(A \times B) = 9$.

7.2 Dado que $A \cup B = \{a, e, i, o, u\}$, então $\#(A \cup B) = 5$.

8.1

a. $\#A = 2$, $\#B = 5$ e $\#C = 3$

b. $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{10\}, \{11\}, \{12\}, \{10, 11\}, \{10, 12\}, \{11, 12\}, \{10, 11, 12\}\}$, donde $\#\mathcal{P}(C) = 8$.

8.2

a. $A \times B = \{(u, a), (u, e), (u, i), (u, o), (u, u), (v, a), (v, e), (v, i), (v, o), (v, u)\}$, donde $\#(A \times B) = 10$.

b. $A \cup B = \{a, e, i, o, u, v\}$, então $\#(A \cup B) = 6$.

10. A Sofia ficará com, exatamente, 2 livros de romance e 1 livro policial e a Catarina ficará com os 3 livros sobranes; assim, ao escolher os livros da Sofia escolhem-se, por sobra, os livros da Catarina, pelo que, há 2 hipóteses de escolha para o livro policial da Sofia, isto é, 2C_1 , e para cada um desses livros há 4C_2 hipóteses de escolher os 2 livros de romance, donde a hipótese correta é A .

11. Como as fichas têm cores distintas, para a 1.ª há 5 posições diferentes e, para cada uma delas, para a 2.ª há 4 e assim sucessivamente até que resta uma ficha que só pode ser colocada numa posição, a sobranes; temos assim $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$ maneiras distintas de colocar as fichas, donde a hipótese correta é A .

12. Tal como foi explicado no exercício anterior, há 5! maneiras distintas de colocar as fichas; todavia, por exemplo, numerando as posições equidistantes entre si na circunferência, ao fixarmos uma das maneiras de colocar as fichas, ela manter-se-á, independentemente da posição em que comece na circunferência, pelo que, tal como no exercício 5, o número de maneiras realmente distintas é $\frac{5!}{5} = 4!$, donde a hipótese correta é B .

13. Na sequência NOVOIPSILON (11 letras) há repetições: 2 letras I, 3 letras O e 2 letras N.

À priori, o número de sequências seria 11!, mas algumas foram contadas várias vezes por haver repetição de letras; assim, em cada sequência fixa das 11 letras, as letras I podem permutar entre as 2 posições fixas que ocupam, as letras O podem permutar entre as 3 posições fixas que ocupam e as letras N também podem permutar entre as 2 posições fixas que ocupam, donde o número real de sequências diferentes é $\frac{11!}{2! \times 3! \times 2!}$, valor que corresponde à hipótese C.

- 14.** Pretende-se escolher 3 letras de um alfabeto de 26 letras; atendendo a que não pode haver letras iguais, têm-se 26 escolhas possíveis para a 1.^a letra, 25 escolhas possíveis para a 2.^a letra e 24 escolhas possíveis para a 3.^a letra, ou seja, $26 \times 25 \times 24 = {}^{26}A_3$ sequências de 3 letras diferentes, donde a hipótese correta é *D*.
- 15.** É uma situação semelhante à anterior mas com uma particularidade: o algarismo dos milhares pertence ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e os restantes algarismos pertencem ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Assim, dado que os algarismos devem ser todos diferentes, há 9 escolhas possíveis para o algarismo dos milhares, 9 escolhas possíveis para o algarismo das centenas (todos os algarismos de 0 a 9 exceto o algarismo dos milhares), 8 escolhas possíveis para o algarismo das dezenas (todos os algarismos de 0 a 9 exceto os algarismos dos milhares e das centenas) e 7 escolhas possíveis para o algarismo das unidades (todos os algarismos de 0 a 9 exceto os algarismos dos milhares, das centenas e das dezenas). Há assim $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$ algarismos nestas condições, donde a hipótese correta é *A*.
- 16.** Atendendo a que o 1.^o elemento escolhido desempenha as funções de presidente e o 2.^o desempenha as funções de secretário, têm-se 12 escolhas possíveis para presidente e 11 escolhas possíveis para secretário, ou seja, $12 \times 11 = {}^{12}A_2$ maneiras diferentes, donde a hipótese correta é *B*.
- 17.** Dado que o conjunto *A* tem $n - 1$ elementos, as partes de *A* podem ser conjuntos com um número de elementos que varia de 0 a $n - 1$, ou seja, vão ser formados conjuntos com 0 elementos, 1 elemento, ..., $n - 1$ elementos; assim, o número total de conjuntos obtém-se de ${}^{n-1}C_0 + \dots + {}^{n-1}C_{n-1}$ e ${}^{n-1}C_0 + \dots + {}^{n-1}C_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} {}^{n-1}C_k = \sum_{k=0}^{n-1} {}^{n-1}C_k \times 1^k \times 1^{n-1-k} = (1 + 1)^{n-1} = 2^{n-1}$, donde a hipótese correta é *C*.
- 18.** O número total de combinações tendo em conta a cor, a forma e a espessura é $3 \times 3 \times 2 = 18$, ou seja, haverá pelo menos 18 fichas, uma para cada combinação de cor, forma e espessura, donde a hipótese correta é *D*.
- 19.** O problema torna-se mais fácil de resolver se se subtrair ao número total de maneiras de sentar as 7 pessoas, o número de maneiras em que essas 2 pessoas ficam juntas. Como não há uma posição fixa inicial na mesa redonda, o número total de maneiras de sentar as 7 pessoas é $\frac{7!}{7} = 6!$ e o número de maneiras de sentar as duas pessoas juntas é $\frac{7 \times 2! \times 5!}{7} = 2! \times 5!$. Assim, há $6! - 2! \times 5! = 480$ maneiras diferentes de sentar as pessoas sem que duas pessoas específicas fiquem juntas, donde a hipótese correta é *B*.
- 20.** Há 3 situações a considerar:
- escolhem-se 2 mulheres e 4 homens
 - escolhem-se 3 mulheres e 3 homens
 - escolhem-se 4 mulheres e 2 homens
- No 1.^o caso há 4C_2 grupos possíveis de 2 mulheres e, para cada um deles, há 7C_4 grupos possíveis de 4 homens, ou seja, há no total ${}^4C_2 \times {}^7C_4$ grupos possíveis de 6 pessoas. De igual forma, no 2.^o caso, há no total ${}^4C_3 \times {}^7C_3$ grupos possíveis de 6 pessoas e no 3.^o caso há no total ${}^4C_4 \times {}^7C_2$ grupos possíveis de 6 pessoas. Assim, há ${}^4C_2 \times {}^7C_4 + {}^4C_3 \times {}^7C_3 + {}^4C_4 \times {}^7C_2 = 371$ maneiras diferentes de escolher as 6 pessoas nas condições pedidas, donde a hipótese correta é *A*.
- 21.** Sendo o byte um grupo de 8 bits, há 2 possibilidades para o 1.^o bit (0 ou 1) e, para cada uma delas, há novamente 2 possibilidades para o 2.^o bit e assim sucessivamente até ao 8.^o bit, pelo que há $2^8 = {}^8A_1 = 256$ bytes diferentes.
- 22.** Pretende-se escolher 3 atletas ganhadores das medalhas de entre 7 atletas participantes; para a medalha de ouro há 7 atletas possíveis, para a de prata há 6 atletas possíveis e para a medalha de bronze há 5 atletas possíveis, ou seja, $7 \times 6 \times 5 = {}^7A_3 = 210$ maneiras diferentes de distribuir as 3 medalhas.
- 23.** Pretende-se escolher 2 pessoas de um grupo de 6, pelo que há ${}^6C_2 = 15$ subgrupos diferentes de 2 pessoas.
- 24.** O número total de classificações corresponde às permutações das 8 equipas, ou seja, $8! = 40\,320$ classificações distintas.
- 25.** Há 3 situações a considerar:
- escolhem-se 3 bolas de gelado com mesmo sabor, isto é, escolhe-se um único sabor;
 - escolhem-se 2 bolas de gelado com mesmo sabor e uma bola de sabor diferente do anterior, isto é, escolhem-se dois sabores;
 - escolhem-se 3 bolas de gelado, cada uma com um sabor diferente, isto é, escolhem-se três sabores.
- No 1.^o caso há 5 sabores possíveis de escolher. No 2.^o caso, há 5C_2 conjuntos possíveis de dois sabores; mas, atendendo a que um dos sabores é o sabor de 2 bolas, há, no total, $2 \times {}^5C_2$ possibilidades de combinação dos 2 sabores. No 3.^o caso, há 5C_3 conjuntos possíveis de três sabores. Assim, há $5 + 2 \times {}^5C_2 + {}^5C_3 = 35$ gelados diferentes nas condições previstas.

26. Há 2 situações a considerar:

- o aluno responde a 2 questões de desenvolvimento e a 4 questões de escolha múltipla;
- o aluno responde a 3 questões de desenvolvimento e a 3 questões de escolha múltipla.

No 1.º caso pode escolher as 2 questões de desenvolvimento de 3C_2 maneiras diferentes e as 4 questões de escolha múltipla de 6C_4 maneiras diferentes, donde, no total, tem ${}^3C_2 \times {}^6C_4$ possibilidades de escolher as 6 questões do teste.

No 2.º caso só precisa de escolher as questões de escolha múltipla, pois responde a todas as de desenvolvimento; tem, neste caso, 6C_3 maneiras diferentes de escolher as 6 questões de escolha múltipla.

Assim, no total há ${}^3C_2 \times {}^6C_4 + {}^6C_3 = 65$ escolhas diferentes.

27.1 Escolhe-se um grupo de 3 raparigas de entre um grupo de 12 raparigas, donde há ${}^{12}C_3 = 220$ possibilidades de subgrupos com 3 raparigas.

27.2 Escolhe-se um grupo de 2 raparigas de entre um grupo de 12 raparigas e um dos 8 rapazes, donde há ${}^{12}C_2 \times 8 = 528$ possibilidades de subgrupos com 2 raparigas e 1 rapaz.

27.3 Escolhe-se um grupo de 2 alunos de entre um grupo de 19 alunos (todos exceto a delegada de turma), donde há ${}^{19}C_2 = 171$ possibilidades de subgrupos com a delegada de turma.

28.1

- Para o algarismo dos milhares há 6 possibilidades, para o das centenas há 5 possibilidades, para o das dezenas há 4 possibilidades e para o algarismo das unidades há 3 possibilidades, ou seja, podem formar-se $6 \times 5 \times 4 \times 3 = {}^6A_4 = 360$ números nas condições pedidas.
- Para o algarismo das unidades há 2 possibilidades (2 e 8), para o das dezenas há 5 possibilidades, para o das centenas há 4 possibilidades e para o algarismo dos milhares há 3 possibilidades, ou seja, podem formar-se $3 \times 4 \times 5 \times 2 = {}^5A_3 \times 2 = 120$ números nas condições pedidas
- Para o algarismo dos milhares há 3 possibilidades (7, 8 e 9), para o das centenas há 5 possibilidades, para o das dezenas há 4 possibilidades e para o algarismo das unidades há 3 possibilidades, ou seja, podem formar-se $3 \times 5 \times 4 \times 3 = 3 \times {}^5A_3 = 180$ números nas condições pedidas.

28.2

- Para cada um dos algarismos há 6 possibilidades, ou seja, podem formar-se $6^4 = {}^6A_4 = 1296$ números nas condições pedidas.
- Para o algarismo das unidades há 2 possibilidades (2 e 8) e para cada um dos restantes há 6 possibilidades, ou seja, podem formar-se $6^3 \times 2 = {}^6A_3 \times 2 = 432$ números nas condições pedidas.
- Para o algarismo dos milhares há 3 possibilidades (7, 8 e 9) e para cada um dos restantes há 6 possibilidades, ou seja, podem formar-se $3 \times 6^3 = 3 \times {}^6A_3 = 648$ números nas condições pedidas.

29.1 Escolhe-se um subgrupo de 6 cartas de entre um grupo de 52 cartas, donde há ${}^{52}C_6 = 20\,358\,520$ possibilidades de subgrupos com 6 cartas.

29.2 Uma vez que o naipe de copas tem 13 cartas, escolhe-se um subgrupo de 6 cartas de entre um grupo de 13 cartas, donde há ${}^{13}C_6 = 1716$ possibilidades de subgrupos com 6 cartas de copas.

29.3 Uma vez que quer o naipe de copas quer o naipe de paus têm 13 cartas, escolhe-se um subgrupo de 3 cartas de entre as 13 cartas do naipe de copas e um subgrupo de 3 cartas de entre as 13 cartas do naipe de paus, donde há ${}^{13}C_3 \times {}^{13}C_3 = 81\,796$ possibilidades de subgrupos com 6 cartas nas condições pedidas.

29.4 No baralho há 4 naipes, sendo que cada um tem 13 cartas.

Há 4C_2 possibilidades de escolha para o conjunto dos dois naipes e, dentro de cada naipe, há ${}^{13}C_3$ possibilidades de escolha do conjunto de 3 cartas.

Há assim, no total, ${}^4C_2 \times {}^{13}C_3 \times {}^{13}C_3 = 490\,776$ possibilidades de subgrupos com 6 cartas nas condições pedidas.

29.5 Escolhe-se um subgrupo de 4 cartas de copas de entre as 13 cartas do naipe de copas e um subgrupo de 2 cartas de paus de entre as 13 cartas do naipe de paus, donde há ${}^{13}C_4 \times {}^{13}C_2 = 55\,770$ possibilidades de subgrupos com 6 cartas nas condições pedidas.

29.6 Há 4C_2 possibilidades de escolha para o conjunto dos dois naipes, ${}^{13}C_4$ possibilidades de escolha do conjunto de 4 cartas de um dos naipes e ${}^{13}C_2$ possibilidades de escolha do conjunto de 2 cartas do outro naipe.

Atendendo a que, em cada escolha dos 2 naipes, pode ser qualquer um deles a ter as 4 cartas, há assim, no total, ${}^4C_2 \times 2 \times {}^{13}C_4 \times {}^{13}C_2 = 669\,240$ possibilidades de subgrupos com 6 cartas nas condições pedidas.

29.7 Em termos de valor das cartas, há 4 cartas para cada valor (uma por naipe) e há 13 valores possíveis (às, 2, ..., 10, dama, valete e rei).

Atendendo à distribuição dos 3 valores necessários pelas quantidades das cartas de cada valor, escolhem-se 3 valores de entre os 13 valores possíveis em que a ordem da escolha determina que vão para o 1.º valor 2 cartas, para o 2.º um carta e para o 3.º valor 3 cartas, donde há ${}^{13}A_3$ possibilidades de escolha dos valores.

Para a escolha das 2 cartas com um dos valores, há 4C_2 possibilidades.

Para a escolha da carta com um dos valores, há 4 possibilidades.

Para a escolha das 3 cartas com um dos valores, há 4C_3 possibilidades.

Assim, há no total, ${}^{13}A_3 \times {}^4C_2 \times 4 \times {}^4C_3 = 164\,736$ possibilidades de subgrupos com 6 cartas nas condições pedidas.

- 29.8** Atendendo à distribuição dos 2 valores necessários pelas quantidades das cartas de cada valor, há ${}^{13}C_2$ possibilidades de escolha dos valores, dado que cada valor tem o mesmo número de cartas, e para a escolha das 3 cartas de cada valor, há 4C_3 possibilidades.

Assim, há no total, ${}^{13}C_2 \times {}^4C_3 \times {}^4C_3 = 1248$ possibilidades de subgrupos com 6 cartas nas condições pedidas.

- 30.1** Dado que os livros podem permutar entre si, podemos arrumá-los de $10! = 3\,628\,800$ maneiras distintas.
- 30.2** Há 3! seqüências distintas dos 3 temas (Física, Matemática e Informática); em cada uma dessas seqüências, dentro de cada tema, os livros podem permutar entre si, pelo que podemos arrumá-los de $3! \times 5! \times 3! \times 2! = 8640$ maneiras distintas.
- 30.3** Os livros de Matemática ficam juntos quando ocupam as posições 1 a 3, 2 a 4, 3 a 5, ..., 8 a 10, podendo permutar entre si, ou seja, podem ser arrumados de $8 \times 3!$ maneiras distintas.

Assim, para cada maneira de colocar os livros de Matemática, os restantes 7 livros podem também permutar entre si, pelo que podemos arrumar os 10 livros de $8 \times 3! \times 7! = 241\,920$ maneiras distintas em que os livros de Matemática ficam juntos.

- 31.** $\left(\frac{3}{x} + x\right)^4 = \sum_{k=0}^4 \left[{}^4C_k \times \left(\frac{3}{x}\right)^{4-k} \times x^k \right] = \sum_{k=0}^4 \left[{}^4C_k \times 3^{4-k} \times x^{2k-4} \right]$, pelo que o termo independente de x é o termo em que $2k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = 2$, ou seja, ${}^4C_2 \times 3^2 = 54$, donde a hipótese correta é B.

- 32.** A soma de todos os elementos da linha n do triângulo de Pascal, com $n \in \mathbb{N}_0$, é dada por 2^n .
 $2^n = 512 \Leftrightarrow 2^n = 2^9 \Leftrightarrow n = 9$, pelo que o 4.º elemento dessa linha é ${}^9C_3 = 84$, donde a hipótese correta é B.

- 33.** Como a soma de todos os elementos da linha n do triângulo de Pascal, com $n \in \mathbb{N}_0$, é dada por 2^n e neste caso é 2^{12} , conclui-se que $n = 12$, isto é, a linha contém 13 elementos que são ${}^{12}C_0, \dots, {}^{12}C_{12}$.

Dado que ${}^{12}C_k = {}^{12}C_{12-k}$, $k \in \{0, \dots, 12\}$, o maior elemento dessa linha é o elemento ${}^{12}C_6 = 924$, pois ocupa a posição do meio, donde a hipótese correta é D.

- 34.1** $z = x + y = {}^{300}C_{120} + {}^{300}C_{121} \stackrel{\text{Lei de Laplace}}{=} {}^{301}C_{121}$, donde a hipótese correta é D.

- 34.2** $2x + y - z \stackrel{z=x+y}{=} x = {}^{300}C_{120}$, donde a hipótese correta é A.

- 35.** Sejam x e y os dois primeiros elementos, respetivamente, da linha n do triângulo de Pascal, com $n \in \mathbb{N}$; como $x = {}^nC_0 = 1$, $y = {}^nC_1 = n$ e $x \times y = 16$, conclui-se que $n = 16$, pelo que o terceiro elemento da linha seguinte é ${}^{n+1}C_2 = {}^{17}C_2 = 136$, donde a hipótese correta é C.

- 36.** $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^8 = \sum_{k=0}^8 \left[{}^8C_k \times (x^2)^{8-k} \times \left(\frac{1}{x}\right)^k \right] = \sum_{k=0}^8 \left[{}^8C_k \times x^{16-3k} \right]$, pelo que o termo da forma ax^{-2} é o termo em que $16 - 3k = -2 \Leftrightarrow k = 6$, ou seja, ${}^8C_6 \times x^{-2} = 28x^{-2}$, donde o valor de a é 28.

- 37.1** $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^3}\right)^{14} = \sum_{k=0}^{14} \left[{}^{14}C_k \times (\sqrt{x})^{14-k} \times \left(-\frac{1}{x^3}\right)^k \right] = \sum_{k=0}^{14} \left[(-1)^k \times {}^{14}C_k \times x^{\frac{14-k}{2}} \times x^{-3k} \right] = \sum_{k=0}^{14} \left[(-1)^k \times {}^{14}C_k \times x^{\frac{14-7k}{2}} \right]$, pelo que o termo independente de x é o termo em que $\frac{14-7k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 2$, ou seja, $(-1)^2 \times {}^{14}C_2 = 91$.

- 37.2** $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^3}\right)^{14} = \sum_{k=0}^{14} \left[(-1)^k \times {}^{14}C_k \times x^{\frac{14-7k}{2}} \right]$, pelo que o termo de maior coeficiente em valor absoluto é o termo em que o coeficiente é o maior valor de ${}^{14}C_k$, ou seja, ${}^{14}C_7 = 3432$, pois é o valor central de ${}^{14}C_0, \dots, {}^{14}C_{14}$.

Assim, esse termo é:

$$(-1)^7 \times {}^{14}C_7 \times x^{-\frac{35}{2}} = -\frac{3432}{(\sqrt{x})^{35}} = -\frac{3432}{x^{17}\sqrt{x}}$$

- 37.3** $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^3}\right)^{14} = \sum_{k=0}^{14} \left[(-1)^k \times {}^{14}C_k \times x^{\frac{14-7k}{2}} \right]$, pelo que o termo da forma $-2002a$ é o termo em

que $(-1)^k \times {}^{14}C_k = -2002 \Leftrightarrow k = 5$, pelo que

$$a = x^{\frac{14-35}{2}} = x^{-\frac{21}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{x})^{21}} = \frac{1}{x^{10}\sqrt{x}}$$

- 38.1** ${}^{40}C_{2n} = {}^{40}C_{n+4} \Leftrightarrow {}^{40}C_{n+4} = {}^{40}C_{40-(n+4)} \Leftrightarrow 2n = n + 4 \vee 2n = 40 - (n + 4) \Leftrightarrow n = 4 \vee n = \frac{36}{3} = 12$

- 38.2** ${}^{15}C_{3n} = {}^{15}C_{n-1} \Leftrightarrow {}^{15}C_{n-1} = {}^{15}C_{15-(n-1)} \Leftrightarrow 3n = n - 1 \vee 3n = 15 - (n - 1) \Leftrightarrow n = -\frac{1}{2} \vee n = \frac{16}{4} = 4 \Leftrightarrow n = 4$
condição impossível

- 39.1** $p = 7: {}^{12}C_7 \times \left(\frac{2}{x^2}\right)^7 \times (x\sqrt{x})^5 = 792 \times \frac{128}{x^{14}} \times x^7\sqrt{x} = \frac{101376\sqrt{x}}{x^7} = \frac{101376(\sqrt{x})^2}{x^7\sqrt{x}} = \frac{101376}{x^6\sqrt{x}}$

- 39.2** $p = 7: {}^{16}C_7 \times \left(\frac{y}{x}\right)^{16-7} \times \left(\frac{\sqrt{x}}{y^3}\right)^7 = 11440 \times \frac{x^3\sqrt{x}}{y^{21}} \times \frac{y^9}{x^9} = \frac{11440\sqrt{x}}{x^6y^{12}} = \frac{11440}{x^6y^{12}\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}
 40. p \times {}^nC_p &= p \times \frac{n!}{(n-p)!p!} = p \times \frac{n!}{(n-p)!p \times (p-1)!} = \\
 &= \frac{n!}{(n-p)!(p-1)!} \\
 &= n \times \frac{(n-1)!}{[(n-1)-(p-1)]!(p-1)!} = n \times {}^{n-1}C_{p-1}
 \end{aligned}$$

$$41.1 \quad \sum_{p=0}^n {}^nC_p = \sum_{p=0}^n \left[{}^nC_p \times 1^p \times 1^{n-p} \right] \underset{\text{Binômio de Newton}}{=} (1+1)^n = 2^n$$

$$\begin{aligned}
 41.2 \quad \sum_{p=0}^n (-1)^p \times {}^nC_p &= \\
 &= \sum_{p=0}^n \left[{}^nC_p \times (-1)^p \times 1^{n-p} \right] \underset{\text{Binômio de Newton}}{=} (-1+1)^n = 0^n = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 42. (n+2)! + 8n! &= 7(n+1)! \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (n+2)(n+1)n! + 8n! &= 7(n+1)n! \\
 \Leftrightarrow (n+2)(n+1) + 8 &= 7(n+1) \\
 \Leftrightarrow n^2 - 4n + 3 &= 0 \Leftrightarrow n = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow n = 1 \vee n = 3
 \end{aligned}$$

43. Sendo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a ordem dessa linha, o enunciado traduz-se pela equação $\underbrace{{}^nC_{n-2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} \times \underbrace{{}^nC_{n-1}}_n \times \underbrace{{}^nC_n}_1 = 15n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 15 \Leftrightarrow n(n-1) = 30 \Leftrightarrow n^2 - n - 30 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{n = -5}_{\text{condição impossível}} \vee n = 6 \Leftrightarrow n = 6$$

Assim, se a ordem da linha é 6, a linha tem 7 elementos $({}^6C_0, \dots, {}^6C_6)$.

Probabilidades

PÁG. 15

44. Considerando que todos os pontos do círculo têm a mesma probabilidade de serem escolhidos, a probabilidade pedida resulta do quociente entre a área do quadrado e a área do círculo.

Dado que o lado do quadrado é 2, a área deste é 4 e verifica-se, devido ao Teorema de Pitágoras, a relação $(2r)^2 = 2^2 + 2^2$, onde r representa o raio do círculo.

Da relação anterior obtém-se $r^2 = 2$, pelo que a área do círculo é $\pi r^2 = 2\pi$.

Assim, o valor da probabilidade pedida é $\frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$, donde a hipótese correta é C.

45. Número de casos favoráveis: 8 iogurtes (5 de ananás e 3 de morango)

Número de casos possíveis: 12 iogurtes

$P = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, donde a hipótese correta é B.

46. Seja x o número de rapazes inscritos nessa modalidade desportiva.

Como uma em cada quatro raparigas também estão inscritas nessa modalidade desportiva tem-se que

$\frac{12}{12+x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 36$, donde a hipótese correta é A.

47. Número de casos favoráveis: 4 (escreverem ambas A ou M ou O ou R)

Número de casos possíveis: 4×4 (cada criança pode escrever uma de 4 letras)

$P = \frac{4}{4 \times 4} = \frac{1}{4}$, donde a hipótese correta é B.

48. Número de casos favoráveis: 6 cores

Número de casos possíveis: 6×6 (para cada uma das seis canetas de feltro há 6 lápis de cera)

$P = \frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}$, donde a hipótese correta é C.

49. Número de casos favoráveis: 4 faces (face com 1, face com 2, face com 3 e face com 4)

Número de casos possíveis: 6 faces

$P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, donde a hipótese correta é D.

50. Sendo A e B acontecimentos incompatíveis verifica-se $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, ou seja, $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 65\% - 35\% = 30\%$, donde a hipótese correta é D.

51. Sendo A e B acontecimentos incompatíveis verifica-se $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, ou seja,

$$P(B) = \underbrace{P(A \cup B)}_{1 - P(\overline{A \cup B})} - P(A) = 1 - \underbrace{P(\overline{A \cup B})}_{P(\overline{A} \cap \overline{B})} - P(A) = 1 - 0,2 - 0,4 = 0,4, \text{ donde a hipótese correta é B.}$$

52. Sendo A e B acontecimentos quaisquer verifica-se $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$$\text{Por outro lado, tem-se } \underbrace{P(\overline{A \cup B})}_{0,8} = P(\overline{A \cap B}) =$$

$$= 1 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - 0,8 = 0,2 \text{ e}$$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - \underbrace{P(A)}_{0,5} - \underbrace{P(B)}_{0,5} + \underbrace{P(A \cap B)}_{0,2},$$

pelo que $P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,4 - 0,5 + 0,2 = 0,3$, donde a hipótese correta é A.

53. Número de casos favoráveis: 2×2 (faces 1 e 2 para cada uma das bolas 1 e 2)

Número de casos possíveis: 5×6 (6 faces no dado para cada uma das 5 bolas)

$P = \frac{2 \times 2}{5 \times 6} = \frac{2}{15}$, donde a hipótese correta é B.

54. Seja x o número de bolas pretas na caixa, inicialmente.

Por um lado, o número total de bolas na caixa, inicialmente, é $2 + x$.

Por outro lado, dado que, se for extraída uma bola branca, a probabilidade de extrair uma bola preta (não havendo reposição da bola branca extraída) é $\frac{4}{5}$, conclui-se que, após a extração da bola branca, ficam na caixa $1 + x$ bolas e

$$\frac{x}{1+x} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x = 4.$$

Assim, havia inicialmente 4 bolas pretas na caixa.

55. Sendo A e B acontecimentos quaisquer verifica-se $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Por outro lado, sendo A um acontecimento tal que $P(A) \neq 0$, verifica-se $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Da 1.ª igualdade obtém-se

$$P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = 70\% - 60\% + 20\% = 30\%$$

e da 2.ª obtém-se

$$P(B|A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}, \text{ donde a hipótese correta é B.}$$

- 56.** Número de casos favoráveis: $2! \times 2!$ (permutação dos números 2 e 4 nos algarismos das centenas e milhares e permutação dos números 1 e 3 nos algarismos das unidades e dezenas)

Número de casos possíveis: $4!$ (permutações dos números 1, 2, 3 e 4)

$$P = \frac{2! \times 2!}{4!} = \frac{1}{6}, \text{ donde a hipótese correta é } A.$$

- 57.1** Número de casos favoráveis: 4 (2 vértices que definam uma diagonal espacial)

Número de casos possíveis: 8C_2 (subconjuntos de 2 vértices a partir de um conjunto de 8)

$$P = \frac{4}{{}^8C_2} = \frac{1}{7}, \text{ donde a hipótese correta é } D.$$

- 57.2** Dado que no paralelepípedo as faces são opostas duas a duas e qualquer vértice pertence sempre a três faces, forçosamente, 2 vértices quaisquer pertencem sempre a duas faces opostas, pelo que o valor da probabilidade pedida é 1, donde a hipótese correta é C.

- 58.** Número de casos favoráveis: ${}^8C_5 \times {}^6C_3$ (5 vértices entre os 8 que definem o prisma $[ABCDEFGH]$ e 3 vértices entre os vértices I, J, N, K, M e L)

Número de casos possíveis: ${}^{14}C_8$ (subconjuntos de 8 vértices a partir de um conjunto de 14)

$$P = \frac{{}^8C_5 \times {}^6C_3}{{}^{14}C_8}$$

Número de casos favoráveis: ${}^6C_5 \times {}^6C_3$ (5 vértices entre os 6 que definem o prisma $[ABCDEFGH]$ e 3 vértices entre os vértices I, J, N, K, M e L)

Número de casos possíveis: ${}^{14}C_8$ (subconjuntos de 8 vértices a partir de um conjunto de 14)

$$P = \frac{{}^6C_5 \times {}^6C_3}{{}^{14}C_8}$$

- 60.1** Número de casos favoráveis: 4 (número de bolas verdes)

Número de casos possíveis: 18 (número total de bolas)

$$P = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

- 60.2** Número de casos favoráveis: 10 (número de bolas que não são amarelas)

Número de casos possíveis: 18

$$P = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

- 60.3** Número de casos favoráveis: 12 (soma do número de bolas verdes com o número de bolas amarelas)

Número de casos possíveis: 18

$$P = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

- 61.1** Número de casos favoráveis: ${}^{12}C_2$ (subconjuntos de 2 figuras a partir de um conjunto de 12)

Número de casos possíveis: ${}^{40}C_2$ (subconjuntos de 2 cartas a partir de um conjunto de 40)

$$P = \frac{{}^{12}C_2}{{}^{40}C_2} = \frac{11}{130}$$

- 61.2** Número de casos favoráveis: ${}^{28}C_2$ (subconjuntos de 2 figuras a partir de um conjunto de 28)

Número de casos possíveis: ${}^{40}C_2$

$$P = \frac{{}^{28}C_2}{{}^{40}C_2} = \frac{63}{130}$$

- 61.3** Número de casos favoráveis: ${}^{10}C_2$ (subconjuntos de 2 figuras a partir de um conjunto de 10)

Número de casos possíveis: ${}^{40}C_2$

$$P = \frac{{}^{10}C_2}{{}^{40}C_2} = \frac{3}{52}$$

- 61.4** Número de casos favoráveis: ${}^{20}C_2$ (subconjuntos de 2 figuras a partir de um conjunto de 20)

Número de casos possíveis: ${}^{40}C_2$

$$P = \frac{{}^{20}C_2}{{}^{40}C_2} = \frac{19}{78}$$

- 61.5** Número de casos favoráveis: 4 (extração de um dos quatro oitos)

Número de casos possíveis: ${}^{40}C_2$

$$P = \frac{4}{{}^{40}C_2} = \frac{1}{195}$$

- 62.1** $P(\text{não ser árvore de fruto}) =$
 $= 100\% - \underbrace{P(\text{ser árvore de fruto})}_{75\%} = 25\%$

- 62.2** $P(\text{ser árvore de fruto ou árvore de folha caduca}) =$
 $= P(\text{ser árvore de fruto}) + P(\text{ser árvore de folha caduca}) -$
 $- P(\text{ser árvore de fruto e árvore de folha caduca}) =$
 $= 75\% + 60\% - 50\% = 85\%$

- 62.3** $P(\text{ser árvore de fruto sabendo que é uma árvore de folha caduca}) =$
 $= \frac{P(\text{ser árvore de fruto e árvore de folha caduca})}{P(\text{ser árvore de folha caduca})} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$

- 63.1** $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$
 $A \cap \bar{B}$ e $\bar{A} \cap B$ são acontecimentos incompatíveis.

Dado que $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$ e $A \cap \bar{B}$ e $A \cap B$

são acontecimentos incompatíveis, então

$$P(A) = P[(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)] = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B).$$

$B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$ e $\bar{A} \cap B$ e $A \cap B$ também

são acontecimentos incompatíveis, pelo que

$$P(B) = P[(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)] = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B).$$

Verifica-se assim que:

$$P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = \underbrace{P(A) - P(A \cap B)}_{P(A \cap \bar{B})} + \\ + \underbrace{P(B) - P(A \cap B)}_{P(\bar{A} \cap B)} = 2P(A) - 2P(A \cap B)$$

- 63.2** Sejam A e B , respetivamente, os acontecimentos «o utilizador usa os serviços da empresa A» e «o utilizador usa os serviços da empresa B».

$$P(A) = P(B) = 22\% \text{ e } P(A \cap B) = 12\%$$

O acontecimento «o utilizador usa apenas os serviços de uma das duas empresas» é equivalente ao acontecimento «o utilizador usa os serviços da empresa A e não usa os serviços da empresa B ou o utilizador usa os serviços da empresa B e não usa os serviços da empresa A», ou seja, formalmente, $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.

$$\text{Assim, } P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = 2P(A) - 2P(A \cap B) = \\ = 2 \times 22\% - 2 \times 12\% = 20\%.$$

64.1
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) \stackrel{A \cap B = A \cup B}{=} P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ \stackrel{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{=} 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

64.2 A probabilidade de ocorrer um dos dois acontecimentos sem que ocorra o outro representa-se, formalmente, por $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$ e provou-se, na alínea 1 do exercício anterior, que $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] =$

$$= \underbrace{P(A) - P(A \cap B)}_{P(A \cap \bar{B})} + \underbrace{P(B) - P(A \cap B)}_{P(\bar{A} \cap B)}, \text{ donde:}$$

$$P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - \\ - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

- 65.** Sejam A , B , N e V , respetivamente, os acontecimentos «a solução é ácida», «a solução é básica», «a solução é neutra» e «a solução absorve na zona de comprimentos de onda do vermelho».

$$P(A) = P(B) = 40\%, P(V|A) = 25\%, P(N \cap V) = 5\% \\ \text{e } P(V) = 20\%.$$

Utilizando as fórmulas de probabilidade e, com vista à resolução das alíneas, conclui-se que:

- $P(N) = 100\% - \underbrace{P(A)}_{40\%} - \underbrace{P(B)}_{40\%} = 20\%$

- $P(A \cap V) = 0,25 \times 40 = 10\%$

- $P(V|N) = \frac{P(V \cap N)}{P(N)} = \frac{5}{20} = 0,25 = 25\%$

- $P(\bar{V}|A) = 100\% - \underbrace{P(V|A)}_{25\%} = 75\%$

- $\underbrace{P(V)}_{0,2 = 20\%} = \underbrace{P(V \cap A)}_{10\%} + \underbrace{P(V \cap B)}_{10\%} + \underbrace{P(V \cap N)}_{5\%} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(V \cap B) = 5\%$

- $P(\bar{V}|N) = 100\% - \underbrace{P(V|N)}_{25\%} = 75\%$

- $P(V|B) = \frac{P(V \cap B)}{P(B)} = \frac{5}{40} = 0,125 = 12,5\%$

- $P(\bar{V}|B) = 100\% - \underbrace{P(V|B)}_{12,5\%} = 87,5\%$

- $P(B \cap \bar{V}) = \underbrace{P(B)}_{40\% = 0,4} \times \underbrace{P(\bar{V}|B)}_{87,5\%} = 35\%$

65.1
$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{V}) = P\left[\underbrace{(\bar{A} \cap \bar{B})}_{\text{ser neutra}} \cap \bar{V}\right] = \\ = \underbrace{P(N)}_{20\% = 0,2} \times \underbrace{P(\bar{V}|N)}_{75\%} = 15\%$$

65.2 $P(V|B) = 12,5\%$

65.3
$$P(\bar{N} \cap \bar{V}) = P(A \cap \bar{V}) + \underbrace{P(B \cap \bar{V})}_{35\%} = \\ = \underbrace{P(A)}_{40\% = 0,4} \times \underbrace{P(\bar{V}|A)}_{75\%} + 35\% = \underbrace{30\%}_{30\%} + 35\% = 65\%$$

- 66.** A expressão $P(B|A)$ significa a probabilidade de sair uma ficha com um número par na 2.ª extração, sabendo que na 1.ª extração saiu uma ficha azul.

Assim, se na 1.ª extração saiu uma ficha azul, antes da 2.ª extração, restam no saco as 6 fichas vermelhas e 1 ficha azul, cujo número é ímpar (1 ou 5), sendo que a probabilidade de sair uma ficha com um número par na 2.ª extração é $\frac{3}{7}$, pois há 3 fichas com um número par (2, 4 e 6) entre as 7 fichas do saco.

- 67.** Sejam F e A , respetivamente, os acontecimentos «o bebé usa fralda» e «o bebé sabe andar».

$$P(F) = \frac{1}{5}, P(\bar{A}) = \frac{1}{2} \text{ e } P(F|\bar{A}) = \frac{1}{3}$$

- 67.1** É pedido o valor de $P(\bar{F} \cap A)$

$$P(\bar{F}) = P(\bar{F} \cap A) + \underbrace{P(\bar{F} \cap \bar{A})}_{P(\bar{F}|\bar{A}) \times P(\bar{A})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{F} \cap A) = P(\bar{F}) - P(\bar{F}|\bar{A}) \times P(\bar{A})$$

$$\text{Como } P(\bar{F}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \text{ e } P(\bar{F}|\bar{A}) = 1 - P(F|\bar{A}) = \\ = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, P(\bar{F} \cap A) = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{15}$$

- 67.2** Dos 15 bebês, a quinta parte usa fralda, ou seja, 3 bebês usam fralda e 12 não usam.

Devem ser escolhidos 2 bebês que usam fralda de um subconjunto de 3 bebês e 2 bebês que não usam fralda de um subconjunto de 12 bebês.

Assim, há ${}^3C_2 \times {}^{12}C_2$ maneiras diferentes de escolher os bebês.

- 68.** A regra de Laplace indica que a probabilidade de um acontecimento é obtida pelo quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, caso estes sejam equiprováveis.

Nesta situação, temos o seguinte:

Número de casos favoráveis: ${}^8C_4 \times {}^{12}A_4$ (escolha de 4 casas com número par, de entre as 16 casas do tabuleiro, para colocar as peças brancas indistinguíveis e, para cada escolha dessas, escolha de outras 4 casas, de entre as restantes 12 casas do tabuleiro, para colocar as peças que não são brancas e se destingem umas das outras)

Número de casos possíveis: ${}^{16}C_4 \times {}^{12}A_4$ (escolha de 4 casas, de entre as 16 casas do tabuleiro, para colocar as peças brancas indistinguíveis e, para cada escolha dessas, escolha de outras 4 casas, de entre as restantes 12 casas do tabuleiro, para colocar as peças que não são brancas e se destingem umas das outras)

Ou

${}^{16}A_4 \times {}^{12}C_4$ (escolha de 4 casas, de entre as 16 casas do tabuleiro, para colocar as peças que não são brancas e se destingem umas das outras e, para cada escolha dessas, escolha de outras 4 casas, de entre as restantes 12 casas do tabuleiro, para colocar as peças brancas indistinguíveis)

$$P = \frac{{}^8C_4 \times {}^{12}A_4}{{}^{16}C_4 \times {}^{12}A_4} = \frac{{}^8C_4 \times {}^{12}A_4}{{}^{16}A_4 \times {}^{12}C_4}$$

Outra possibilidade de resposta resulta da simplificação

da 1.ª expressão e é, precisamente, $\frac{{}^8C_4}{{}^{16}C_4}$, ou seja,

sendo apenas relevante a colocação das 4 peças brancas indistinguíveis em casas de número par, a probabilidade de tal acontecer é a proporção entre o número total de colocações das peças brancas nas casas de número par e o número total de colocações das peças brancas no tabuleiro.

- 69.1** Se os acontecimentos A e B das $\mathcal{P}(E)$ são independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Por outro lado, para quaisquer acontecimentos A e B das $\mathcal{P}(E)$, verifica-se $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ e, dado que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{0,7 - 0,5}{1 - 0,5} = 0,4.$$

- 69.2** Se os acontecimentos A e B das $\mathcal{P}(E)$ são incompatíveis, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$$\text{Assim, } P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,7 - 0,5 = 0,2.$$

- 70.** Uma vez que os acontecimentos A e B das $\mathcal{P}(E)$ são independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Por outro lado, $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, sendo que os acontecimentos $A \cap B$ e $A \cap \bar{B}$ são incompatíveis, donde

$$P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})] = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}).$$

Tem-se então que $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ e conjugando esta fórmula com $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$,

$$\text{obtem-se } P(A \cap \bar{B}) = \underbrace{P(A) - P(A) \times P(B)}_{P(A) \times \left[\frac{1 - P(B)}{P(B)} \right]} = P(A) \times P(\bar{B}).$$

Considerando agora os acontecimentos $C \cap (A \cap B)$ e $C \cap (A \cap \bar{B})$, estes também são incompatíveis e, além disso, $A \cap C = (C \cap (A \cap B)) \cup (C \cap (A \cap \bar{B}))$, pelo que $P(A \cap C) = P[(C \cap (A \cap B)) \cup (C \cap (A \cap \bar{B}))] = P(C \cap (A \cap B)) + P(C \cap (A \cap \bar{B}))$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} P(C|A) &= \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{P(C \cap (A \cap B)) + P(C \cap (A \cap \bar{B}))}{P(A)} = \\ &= \frac{P(C \cap (A \cap B))}{P(A)} + \frac{P(C \cap (A \cap \bar{B}))}{P(A)} = \\ &= \frac{P(C \cap (A \cap B))}{P(A \cap B)} \times \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(C \cap (A \cap \bar{B}))}{P(A \cap \bar{B})} \times \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \\ &= P(C|(A \cap B)) \times \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} + P(C|(A \cap \bar{B})) \times \\ &\quad \times \frac{P(A) \times P(\bar{B})}{P(A)} = \\ &= P(C|(A \cap B)) \times P(B) + P(C|(A \cap \bar{B})) \times P(\bar{B}) \end{aligned}$$

- 71.1** $P(B|C) = 0,4 \Leftrightarrow \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = 0,4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(B \cap C) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$$

$$P(\bar{C}) = 1 - 0,3 = 0,7 \text{ e } P(\bar{B}|\bar{C}) = 0,8 \Leftrightarrow \frac{P(\bar{B} \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = 0,8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{B} \cap \bar{C}) = 0,8 \times 0,7 = 0,56$$

$$P(B|\bar{C}) = 1 - \frac{P(\bar{B}|\bar{C})}{0,8} = 0,2 \text{ e}$$

$$P(B \cap \bar{C}) = \frac{P(B|\bar{C})}{0,2} \times \frac{P(\bar{C})}{0,7} = 0,14$$

$$\text{Dado que } P(B) = \frac{P(B \cap C)}{0,12} + \frac{P(B \cap \bar{C})}{0,14} = 0,26, \text{ então}$$

$$P(C|B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{0,12}{0,26} = \frac{6}{13}.$$

$$71.2 \quad P[A|(B \cap C)] = 0,2 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B \cap C)}{\underbrace{P(B \cap C)}_{0,12}} = 0,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B \cap C) = 0,2 \times 0,12 = 0,024$$

$$P[(B \cap C)|A] = \frac{P(B \cap C \cap A)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B \cap C \cap A)}{P(B \cap C \cap A) + P(\overline{B \cap C} \cap A)}$$

$$= \frac{P(B \cap C \cap A)}{P(B \cap C \cap A) + P(A|\overline{B \cap C}) \times \underbrace{P(\overline{B \cap C})}_{1 - \underbrace{P(B \cap C)}_{0,12} = 0,88}}$$

$$= \frac{0,024}{0,024 + 0,2 \times 0,88} = 0,12$$

$$71.3 \quad P[(B \cap C)|A] = \frac{P(B \cap C \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \underbrace{P[(B \cap C)|A]}_{0,12} \times \underbrace{P(B \cap C \cap A)}_{0,024} = 0,00288$$

$$P(B) = \underbrace{P(B \cap C)}_{0,12} + \underbrace{P(B \cap \overline{C})}_{0,14} = 0,0168$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0,024 \neq 0,0000145152 =$$

$$= 0,00288 \times 0,0168 \times 0,3 = P(A) \times P(B) \times P(C), \text{ pelo que os três acontecimentos não são independentes.}$$

72. Sejam A , B e C , respetivamente, os acontecimentos «o corredor A percorre 200 metros em menos de 20 segundos», «o corredor B percorre 200 metros em menos de 20 segundos» e «o corredor C percorre 200 metros em menos de 20 segundos».

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{5}, \quad P(C) = \frac{1}{10}$$

Admitindo que os acontecimentos A , B e C são independentes dois a dois e que também o são os três, tem-se:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B), \quad P(A \cap C) = P(A) \times P(C),$$

$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C) \text{ e}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

A probabilidade pedida corresponde à probabilidade de haver, pelo menos, um atleta a percorrer 200 metros em menos de 20 segundos, isto é, $P(A \cup B \cup C)$.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) -$$

$$- P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$\text{Dado que } P(A \cap B) = \underbrace{P(A)}_{\frac{1}{3}} \times \underbrace{P(B)}_{\frac{1}{5}} = \frac{1}{15},$$

$$P(A \cap C) = \underbrace{P(A)}_{\frac{1}{3}} \times \underbrace{P(C)}_{\frac{1}{10}} = \frac{1}{30},$$

$$P(B \cap C) = \underbrace{P(B)}_{\frac{1}{5}} \times \underbrace{P(C)}_{\frac{1}{10}} = \frac{1}{50} \text{ e}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \underbrace{P(A)}_{\frac{1}{3}} \times \underbrace{P(B)}_{\frac{1}{5}} \times \underbrace{P(C)}_{\frac{1}{10}} = \frac{1}{150}$$

Assim,

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{15} - \frac{1}{30} - \frac{1}{50} + \frac{1}{150} = 0,52.$$

73.1 Sendo o Américo Petrônio um dos 25 atletas, pode ocupar uma das 3 funções na comissão e, para cada uma dessas funções, há ${}^{24}A_2$ escolhas possíveis para os restantes membros da comissão, atendendo à sua função dentro da comissão.

Assim, podem ser formadas $3 \times {}^{24}A_2$ comissões distintas.

73.2

a. Uma vez que as comissões são mistas, há 2 situações a considerar:

- a comissão tem um atleta do sexo masculino e dois atletas do sexo feminino;
- a comissão tem dois atletas do sexo masculino e um atleta do sexo feminino.

No 1.º caso há 10 escolhas possíveis para o atleta do sexo masculino e, para cada uma delas, há ${}^{15}A_2$ escolhas possíveis para os dois atletas do sexo feminino; uma vez que o atleta do sexo masculino pode ocupar uma das 3 funções na comissão, há no total $3 \times 10 \times {}^{15}A_2$ comissões distintas.

De igual forma, no 2.º caso, há no total $3 \times 15 \times {}^{10}A_2$ comissões distintas.

Assim, há no total, $3 \times (10 \times {}^{15}A_2 + 15 \times {}^{10}A_2)$ comissões mistas distintas.

b. A expressão $P[C|(A \cap B)]$ significa a probabilidade de a comissão ser formada só por elementos do sexo feminino sabendo que são ambos elementos do sexo feminino os atletas que levam as bandeiras portuguesa e da federação desportiva.

Assim, se já se sabe que dois dos elementos da comissão são do sexo feminino, a probabilidade de a comissão ser formada exclusivamente por atletas do sexo feminino é $\frac{13}{23}$, pois restam 13 atletas do sexo feminino entre 23 atletas.

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

PÁG. 25

74. A afirmação A é falsa pois, como $f(0) = 0$, isso significa que a função f tem pelo menos um zero, nomeadamente, em $x = 0$.

Sendo a função f injetiva tem-se que, se dois objetos têm a mesma imagem, então são iguais, o que significa que a função f tem apenas o zero $x = 0$, donde a hipótese correta é B .

75. Sendo a função f de domínio $\mathbb{R}$ e crescente pode ter um zero ou não ter nenhum, mas não pode ter mais do que um, devido à sua monotonia.

Como para quaisquer dois reais x e y com $x < y$ se tem $f(x) < f(y)$, se $f(x) = 0$, então $0 < f(y)$ e se $f(y) = 0$, então $f(x) < 0$, ou seja, não há dois ou mais objetos com imagem 0. $f(y)$

As hipóteses B , C e D são falsas, por exemplo, em relação à função definida por $f(x) = x$, donde a hipótese correta é A .

76. Sendo a função h crescente em $[0, 2]$ e par, então é decrescente em $[-2, 0]$, logo em $[-1, 0]$.

As hipóteses A , B e D são falsas, por exemplo, em relação à função definida por $h(x) = |x|$, donde a hipótese correta é C .

77. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = |x| \Leftrightarrow x^2 = x \vee x^2 = -x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x(x-1) = 0 \vee x(x+1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$, isto é, têm 3 pontos em comum, donde a hipótese correta é D .

78. Como $-4 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, então $-3 \leq f(x) + 1 \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que $0 \leq \underbrace{f(x) + 1}_{g(x)} \leq \underbrace{2}_{3}$, donde a hipótese correta é B .

79. Sendo f contínua em $\mathbb{R}$ também o é em $[1, 8]$, donde, pelo Teorema de Bolzano, todos os valores do intervalo $[2, 10]$ pertencem ao contradomínio de f , nomeadamente, $[f(8), f(1)]$
 $3 \in D'_f$.

As hipóteses A , C e D são falsas, por exemplo, em relação

ção à função definida por $f(x) = \begin{cases} -5x + 15 & \text{se } x \leq 3 \\ \frac{2}{5}x - \frac{6}{5} & \text{se } x > 3 \end{cases}$,

donde a hipótese correta é B .

80. Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) > f(2)$, a hipótese correta é B .

81. Dado que $f(x) \geq g(x), \forall x \in D_f$, então $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$.
 Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$, tem-se que $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$,
 donde a hipótese correta é D .

82. Uma vez que $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, então

$$0 \leq \sin x + 1 \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } 0 \leq \frac{\sin x + 1}{x^3 + 1} \leq \frac{2}{x^3 + 1},$$

$$\forall x \in]-1, +\infty[.$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3 + 1} = 0$, uma expressão possível para a função f é $f(x) = 0$ e uma expressão possível para a função h é $h(x) = \frac{2}{x^3 + 1}$, donde a hipótese correta é A .

83. O facto de o domínio da função ser $\mathbb{R}^+$ inviabiliza que o gráfico da hipótese C possa ser o gráfico da função f e o facto de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ inviabiliza que os gráficos das hipóteses A e B possam ser o gráfico da função f , donde a hipótese correta é D .

84. Por definição, dado o domínio da função $g, y = mx + b$ é uma assíntota não vertical ao gráfico de g se e só se $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (mx + b)] = 0$.

Assim, nesta situação, $y = 2x - 4$ é uma assíntota não vertical ao gráfico da função g se e só se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (2x - 4)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2x + 4] = 0,$$

donde a hipótese correta é C .

85. Por definição, dado o domínio da função $h, y = mx$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de h se e só se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = m.$$

Por outro lado, por definição e dado o domínio da função $f, y = \frac{1}{3}x + 2$ é uma assíntota não vertical ao gráfico de f se e

$$\text{só se } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3} \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{3}x \right] = 2.$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3, \text{ conclui-se que a reta de equação } y = 3 \text{ é assíntota}$$

horizontal ao gráfico de h , donde a hipótese correta é D .

- 87.1 $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{5u_{n+1} + 3}{5u_n + 3} = \frac{5\left(\frac{u_n - 3}{6}\right) + 3}{5u_n + 3} = \frac{1}{6} \left(\frac{5u_n + 3}{5u_n + 3} \right) = \frac{1}{6}$,
 donde (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{6}$.

- 87.2 Como (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{6}$
 e $v_1 = 5u_1 + 3 = 5 \times \frac{3}{5} + 3 = 6$, o seu termo geral é dado por

$$v_n = 6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = 6^{2-n}.$$

$$\text{Por outro lado, } v_n = 5u_n + 3 \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n - 3}{5} = \frac{6^{2-n} - 3}{5}.$$

87.3 Como $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{2n} - 3}{5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{2n} - 3}{5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \cdot 6^{2n} - \frac{3}{5} = -\frac{3}{5}$,
 (u_n) é uma sucessão convergente.

88. $-1 \leq \sin n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow n^2 - 1 \leq n^2 + \sin n \leq n^2 + 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \leq \frac{n^2 + \sin n}{n^2 + 1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N},$$

pelo que $2 + \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \leq 2 + \frac{n^2 + \sin n}{n^2 + 1} \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Tomando as sucessões (a_n) e (b_n) de termos gerais, respectivamente, $a_n = \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 1}$ e $b_n = 3$ concluiu-se que

$$a_n \leq u_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$, donde, pelo teorema das sucessões enquadadas, conclui-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3$ e que (u_n) é uma sucessão convergente.

89. $u_{n+1} - u_n = 2 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{2}{3^k}\right) - \left[2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3^k}\right)\right] =$
 $= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{2}{3^k}\right) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3^k}\right) = \frac{2}{3^{n+1}} > 0, \forall n \in \mathbb{N},$

donde (u_n) é uma sucessão monótona crescente.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n!} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{\frac{3}{2} - n - 1}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{2} - n}{(n+1)!} < 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

donde (v_n) é uma sucessão monótona decrescente.

90. $-1 \leq \sin(\alpha n) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \leq \sin^2(\alpha n) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{\sin^2(\alpha n)}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomando as sucessões (a_n) e (b_n) de termos gerais, respectivamente, $a_n = 0$ e $b_n = \frac{1}{2n+1}$ concluiu-se que

$$a_n \leq u_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, donde, pelo teorema das sucessões enquadadas, conclui-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

91. A função f será contínua em $x=2$ se existir $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ e se $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - 2}{x - 2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2+x} - 2)(\sqrt{2+x} + 2)}{(x - 2)(\sqrt{2+x} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x}^2 - 4}{(x - 2)(\sqrt{2+x} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{2+x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{2+x} + 2} = \frac{1}{4}$$

Como $f(2) = m$, conclui-se que a função f será contínua em $x=2$ se $m = \frac{1}{4}$.

92.1 Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -1 + \cos x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \leq x^2 - 1 + \cos x \leq x^2$$

Assim, para $x > 0$, tem-se:

$$\frac{1}{x^2 - 1 + \cos x} \geq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 - 1 + \cos x} \geq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Logo, $g(x) \geq \frac{1}{x}$, em $\mathbb{R}^+$, ou seja, $f(x) = \frac{1}{x}$, verificando-se que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

92.2 Sendo $g(x) \geq f(x)$, para $x > 0$, e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$.

92.3 Considerando a mudança de variável $x = -t$ e usando o resultado da alínea anterior, obtém-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^2 - 1 + \cos x} \stackrel{x = -t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-t}{(-t)^2 - 1 + \cos(-t)} =$$

$$= - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{t^2 - 1 + \cos t} = -(\infty) = -\infty$$

93.1 $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ conclui-se, pelo teorema das funções enquadadas, que $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = 0$.

93.2 $-1 \leq -\sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x - 1 \leq x - \sin x \leq x + 1, \forall x \in \mathbb{R},$$

donde se conclui que

$$\frac{x - 1}{x + 2} \leq \frac{x - \sin x}{x + 2} \leq \frac{x + 1}{x + 2}, \forall x \in]-2, +\infty[.$$

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x + 2} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 1$ e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{x + 2} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 1$$

conclui-se, pelo teorema das funções enquadadas, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + 2} = 1$.

93.3 $0 \leq \cos^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq x \cos^2 x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$

Como $x^2 - 1 > 0, \forall x \in]-\infty, -1[$, conclui-se

$$\text{que } \frac{x}{x^2 - 1} \leq \frac{x \cos^2 x}{x^2 - 1} \leq 0, \forall x \in]-\infty, -1[.$$

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0 = 0$

conclui-se, pelo teorema das funções enquadadas,

$$\text{que } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cos^2 x}{x^2 - 1} = 0.$$

- 93.4 Uma vez que $0 \leq 1 - \cos x \leq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, verifica-se em $\mathbb{R}^+$ que $0 < x^2 \leq x^2 + 1 - \cos x \leq x^2 + 2$.

Conclui-se assim em $\mathbb{R}^+$ que $\frac{2x^2}{x^2 + 2} \leq \frac{2x^2}{x^2 + 1 - \cos x} \leq \frac{2x^2}{x^2}$.

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \frac{2}{x^2}} = 2$

e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$ conclui-se, pelo teorema das funções encaixadas, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1 - \cos x} = 2$.

- 94.1 A função é contínua em $]-\infty, 3[$ pois é uma função polinomial (contínua em $\mathbb{R}$).

A função é contínua em $]3, +\infty[$ pois é uma função racional (contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Como $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x - 2) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{x} = 1$, a função é contínua em $x = 3$ pois $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$.

Como a função f é contínua em $]-\infty, 3[$, $]3, +\infty[$ e em $x = 3$, então é contínua em $\mathbb{R}$.

- 94.2 A função f é contínua em $\mathbb{R}$, logo também o é em $[0, 3]$. Por outro lado, $f(0) = -2$ e $f(3) = 1$, donde, pelo Teorema de Bolzano, $\exists c \in]0, 3[: f(c) = 0$.

- 94.3 Sendo a função f contínua em $[0, 3]$ e dado que $[0, 3]$ é um conjunto limitado e fechado, pelo Teorema de Weierstrass, a função f tem um máximo e um mínimo em $[0, 3]$.

- 95.1 Seja f a função contínua em $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^5 + x^3 - 1.$$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ conclui-se, pelo Teorema de Bolzano, que a função tem, pelo menos, um zero em $\mathbb{R}$, ou seja, que a equação tem, pelo menos, uma solução real.

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2$$

$$\text{e } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \underbrace{5x^2 + 3 = 0}_{\text{equação impossível em } \mathbb{R}} \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$

Conclui-se assim que a função f é monótona crescente, pelo que tem um único zero em $\mathbb{R}$, ou seja, também a equação tem uma única solução real.

- 95.2 Tomando novamente a função f contínua em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^5 + x^3 - 1$, tem-se que f também é contínua em $[0, 1]$, $f(0) = -1$ e $f(1) = 1$, donde, pelo Teorema de Bolzano, $\exists c \in]0, 1[: f(c) = 0$.

96. A função f é contínua em $[-3, 2[$ uma vez que é uma função irracional (contínua em $]-\infty, 2[$) e também é contínua em $]2, 4]$ pois é uma função racional (contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$). Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$, a função é contínua em $x = 2$ pois $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$.

Como a função f é contínua em $[-3, 2[$, $]2, 4]$ e em $x = 2$, então é contínua em $[-3, 4]$.

Sendo a função f contínua em $[-3, 4]$ e dado que $[-3, 4]$ é um conjunto limitado e fechado, pelo Teorema de Weierstrass, a função f tem um máximo e um mínimo em $[-3, 4]$.

97. A função f terá derivada em $x = 1$ se existirem e forem iguais os limites laterais $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 + bx + 4 - 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 + bx + 3}{x - 1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > -6 \\ -\infty & \text{se } b < -6 \end{cases}$$

$$\text{Quando } b = -6, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 + bx + 3}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - 6x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x - 1)^2}{x - 1} = 3 \times \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0.$$

$$\text{Verifica-se assim que } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1},$$

$\forall b \in \mathbb{R}$, donde não existe $f'(1)$.

- 98.1 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x - 1(x - 1)^2} = +\infty$, donde, dada a continuidade

da função no seu domínio, a reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical ao gráfico da função.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x - 1)^2} = 0 \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{(x - 1)^2} = 0, \text{ donde a reta de equação}$$

$y = 0$ é a única assíntota não vertical ao gráfico da função.

- 98.2 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x - 2} = +\infty$, donde, dada a continuidade

da função no seu domínio, a reta de equação $x = 2$ é a única assíntota vertical ao gráfico da função.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x}} = 1 \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x}} = 1, \text{ donde a reta de}$$

equação $y = 1$ é a única assíntota não vertical ao gráfico da função.

- 98.3 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x + 1} = +\infty$, donde, dada a continuidade

da função no seu domínio, a reta de equação $x = -1$ é a única assíntota vertical ao gráfico da função.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} \stackrel{\infty}{=} -1$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = -1$$

Logo, a reta de equação $y = x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} \stackrel{\infty}{=} 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} \stackrel{\infty}{=} -1$$

$$= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = -1$$

Conclui-se assim que a reta de equação $y = x - 1$ é a única assíntota não vertical ao gráfico da função.

98.4 $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{(x+2)^3} = +\infty$, donde, dada a continuidade da função no seu domínio, a reta de equação $x = -2$ é a única assíntota vertical ao gráfico da função.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+2)^3} = 0$$

e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x+2)^3} = 0$,

donde a reta de equação $y = 0$ é a única assíntota não vertical ao gráfico da função.

98.5 Dada a continuidade da função no seu domínio, não há assíntotas verticais ao gráfico da função.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-2x^3}{x^2+1}}{x} = -2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} \stackrel{\infty}{=} -2$$

$$= -2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2x^3}{x^2+1} + 2x \right) =$$

$$= 2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} \stackrel{\infty}{=} 2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

Logo a reta de equação $y = -2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-2x^3}{x^2+1}}{x} = -2 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2+1} \stackrel{\infty}{=} -2$$

$$= -2 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2x^3}{x^2+1} + 2x \right) =$$

$$= 2 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2+1} \stackrel{\infty}{=} 2 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

Conclui-se assim que a reta de equação $y = -2x$ é a única assíntota ao gráfico da função.

99.1 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g'(x) - g'(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - 3}{x - 1} \stackrel{0}{=} 3 \times \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} =$

$$= 3 \times \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g'(x) - g'(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 3}{x - 1} = +\infty$$

Conclui-se assim que a função g não é duas vezes diferenciável em $x = 1$.

99.2 $g''(x) = \begin{cases} 6x & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

100.1 É infinitamente diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ pois é uma função racional, pelo que também o é duas vezes diferenciável.

100.2 $f'(x) = \frac{2x(x-2) - (x^2+1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2}$

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2-4x-1)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{10}{(x-2)^3}$$

100.3 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5} \vee x = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = 2 + \sqrt{5}$$

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{5}$		2		$2 + \sqrt{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	N.D.	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$4 - 2\sqrt{5}$ Máx. rel.	$\searrow$	N.D.	$\searrow$	$4 + 2\sqrt{5}$ Mín. rel.	$\nearrow$

Os extremos relativos da função são $4 - 2\sqrt{5}$ e $4 + 2\sqrt{5}$.

101.1 $f'(x) = 6x$

$$f''(x) = 6$$

101.2 $g'(x) = 6x^2 + 2x$

$$g''(x) = 12x + 2$$

101.3 $h'(x) = 12x^3 - 6x^2$

$$h''(x) = 36x^2 - 12x$$

101.4 $i'(x) = \frac{-3 \times 2}{(2x)^2} = -\frac{3}{2x^2}$

$$i''(x) = \frac{3 \times 4x}{(2x^2)^2} = \frac{3}{x^3}$$

101.5 $j'(x) = \frac{2(x+1) - (2x-5)}{(x+1)^2} = \frac{7}{(x+1)^2}$

$$j''(x) = \frac{-7 \times 2(x+1)}{(x+1)^4} = -\frac{14}{(x+1)^3}$$

RESOLUÇÕES – CADERNO DE ATIVIDADES NYI 2 – FRVR12

$$101.6 \quad k'(x) = \frac{(x+3)^2 - (x-2)2(x+3)}{(x+3)^4} = \frac{-x+7}{(x+3)^3}$$

$$k''(x) = \frac{-(x+3)^3 - (-x+7)3(x+3)^2}{(x+3)^6} = \frac{2x-24}{(x+3)^4}$$

$$101.7 \quad l'(x) = \frac{1}{2}(3x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times 6x = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$$

$$l''(x) = \frac{3\sqrt{3x^2+1} - 3x \times \frac{1}{2}(3x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times 6x}{\sqrt{3x^2+1}^2} = \frac{3}{(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$101.8 \quad m'(x) = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1}}{x^2} = \frac{2-x}{2x^2\sqrt{x-1}}$$

$$m''(x) = \frac{-2x^2\sqrt{x-1} - (2-x)\left(4x\sqrt{x-1} + \frac{2x^2}{2\sqrt{x-1}}\right)}{(2x^2\sqrt{x-1})^2} = \frac{3x^2 - 12x + 8}{4x^3(x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$102.1 \quad f'(x) = 12x(x^2 - x - 2)$$

$$f''(x) = 36x^2 - 24x - 24$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$$

Como $f''(0) = -24 < 0$, $f''(-1) = 36 > 0$ e $f''(2) = 72 > 0$, conclui-se que $f(0) = 15$ é um máximo relativo, $f(-1) = 10$ é um mínimo relativo e $f(2) = -17$ é um mínimo relativo.

$$102.2 \quad g'(x) = 15x^2(x^2 + 1)$$

$$g''(x) = 60x^3 + 30x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Como $g''(0) = 0$, nada se pode concluir e há que estudar a variação de sinal de g' numa vizinhança de $x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	+	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	4	$\nearrow$

Conclui-se assim que $g(0)$ não é nem máximo relativo, nem mínimo relativo.

$$102.3 \quad h'(x) = \frac{x^2 - 14x + 13}{(x-7)^2} = \frac{(x-1)(x-13)}{(x-7)^2}$$

$$h''(x) = \frac{72}{(x-7)^3}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 13$$

Como $h''(1) = -\frac{1}{3} < 0$ e $h''(13) = \frac{1}{3} > 0$, conclui-se que

$h(1) = 1$ é um máximo relativo e $h(13) = 25$ é um mínimo relativo.

$$102.4 \quad i'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+10}}$$

$$i''(x) = \frac{1}{(x^2-6x+10)^{\frac{3}{2}}}$$

$$i'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Como $i''(3) = 1 > 0$, conclui-se que $i(3) = 1$ é um mínimo relativo.

$$104.1 \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

• O domínio da função é $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$;

• A interseção do gráfico com o eixo Ox ocorre no ponto de coordenadas $(0, 0)$, pois $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e a interseção do gráfico com o eixo Oy ocorre no ponto de coordenadas $(0, 0)$, pois $f(0) = 0$;

• Dado o domínio da função e uma vez que se trata de uma função contínua (função racional), a haver assíntotas verticais ao gráfico da função elas serão as retas de equação, respetivamente, $x = -1$ e $x = 1$.

Como $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty$, as retas

$x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais ao gráfico da função f .

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2-1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2-1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função f .

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2-1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2-1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

a reta de equação $y = x$ é a única assíntota oblíqua ao gráfico da função f .

$$\bullet f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} \text{ e } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

Como o fator $\frac{x^2}{(x^2-1)^2}$ da função derivada é sempre não

negativo, o sinal da derivada depende exclusivamente do sinal de $x^2 - 3$, e este é positivo em

$$]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[\text{ e negativo em }$$

$$]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\setminus \{-1, 1\}.$$

Assim, a função f é crescente em $]-\infty, -\sqrt{3}[$ e

em $[\sqrt{3}, +\infty[$ e é decrescente em $[-\sqrt{3}, -1[$, em

$]-1, 1[$ e em $]1, \sqrt{3}[$.

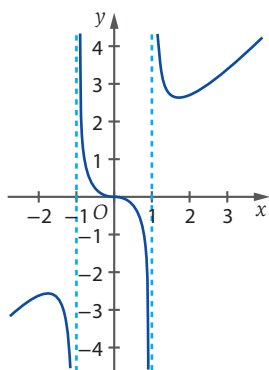
• Dado que f' muda de sinal positivo para sinal negativo em $x = -\sqrt{3}$ e de sinal negativo para sinal positivo em $x = \sqrt{3}$, então, há um máximo relativo em $x = -\sqrt{3}$ e um mínimo relativo em $x = \sqrt{3}$, a saber, respetivamente, $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ e $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \text{ e } f''(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	N.D.	$+$	0	$-$	N.D.	$+$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cap$	N.D.	$\cup$	P.I.	$\cup$	N.D.	$\cap$

Há um ponto de inflexão de coordenadas $(0, f(0)) = (0, 0)$.



104.2 $g(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x-2)}}$

- O domínio da função é $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$;
- A interseção do gráfico com o eixo Ox ocorre nos pontos de coordenadas $(1, 0)$ e $(2, 0)$, pois $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$ e a interseção do gráfico com o eixo Oy ocorre no ponto de coordenadas $(0, \sqrt{2})$, pois $g(0) = \sqrt{2}$;
- Dado o domínio da função, e uma vez que se trata de uma função contínua (função irracional), a haver assíntotas verticais ao gráfico da função elas serão as retas de equação, respetivamente, $x = 1$ e $x = 2$.

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x^2-3x+2} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^2-3x+2} = 0$, não há assíntotas verticais ao gráfico da função g .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2-3x+2} - x] \stackrel{\infty-\infty}{=} 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-3x+2} - x)(\sqrt{x^2-3x+2} + x)}{\sqrt{x^2-3x+2} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+2}{\sqrt{x^2-3x+2} + x} \stackrel{\infty}{=} 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = -\frac{3}{2}, \text{ pelo que a reta de equação}$$

$y = x - \frac{3}{2}$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função g .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x} \stackrel{\infty}{=} -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{-x} \stackrel{\infty}{=} 0$$

$$= -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2-3x+2} + x] \stackrel{\infty-\infty}{=} 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2-3x+2} + x)(\sqrt{x^2-3x+2} - x)}{\sqrt{x^2-3x+2} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+2}{\sqrt{x^2-3x+2} - x} \stackrel{\infty}{=} 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1} = \frac{3}{2}, \text{ pelo que a reta de equação}$$

$y = -x + \frac{3}{2}$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função g .

$$\bullet g'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}} \text{ e } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \notin D_g$$

Como o fator $\frac{1}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$ da função derivada é sempre

positivo $\forall x \in D_g \setminus \{1, 2\}$, o sinal da derivada depende exclusivamente do sinal de $2x-3$ e do D_g , pelo que a derivada é positiva em $]2, +\infty[$ e negativa em $]-\infty, 1[$, não existindo em $x = 1$ e $x = 2$.

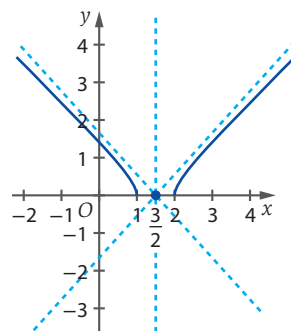
Assim, a função g é crescente em $[2, +\infty[$ e é decrescente em $]-\infty, 1[$.

Além disso, em $x = 1$ e $x = 2$ ocorre o mínimo absoluto de g que é 0.

$$\bullet g''(x) = -\frac{1}{4(x^2-3x+2)^{\frac{3}{2}}} < 0 \quad \forall x \in D_g \setminus \{1, 2\}$$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	N.D.	N.D.	N.D.	$-$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g	$\cap$	0	N.D.	0	$\cap$

Não há pontos de inflexão do gráfico de g .



TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

PÁG. 35

105. Tomando como r o comprimento do raio da circunferência (em centímetros), verifica-se que a razão entre a amplitude do ângulo ao centro e o comprimento do arco é igual à razão entre a amplitude do ângulo giro e o perímetro da circunferência, ou seja, $\frac{2}{12} = \frac{2\pi}{2\pi r} \Leftrightarrow r = 6$ cm, donde a hipótese correta é B .

106. Tomando como A a área desse setor circular, verifica-se que a razão entre a amplitude do ângulo ao centro e a área do setor circular é igual à razão entre a amplitude do ângulo giro e a área do círculo, ou seja,

$$\frac{3}{A} = \frac{2\pi}{\pi \times 2^2} \Leftrightarrow A = 6, \text{ donde a hipótese correta é } C.$$

$$\text{107. } -\frac{11\pi}{3} = -\frac{12\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -4\pi + \frac{\pi}{3}$$

Assim, a rotação de $-\frac{11\pi}{3}$ radianos corresponde a duas voltas completas em sentido negativo seguida de uma rotação de $\frac{\pi}{3}$ radianos em sentido positivo, donde a hipótese correta é A .

108. $\sin \alpha > 0$ para todos os ângulos do 1.º e 2.º quadrantes de amplitude α .

$\tan \alpha < 0$ para todos os ângulos do 2.º e 4.º quadrantes de amplitude α .

Conjugando as duas condições, verifica-se que o lado extremidade do ângulo de amplitude α tem de pertencer ao 2.º quadrante, donde a hipótese correta é B .

109. $\tan(2\pi + \beta) < 0 \Leftrightarrow \tan \beta < 0$, pelo que o lado extremidade do ângulo de amplitude β pertence ao 2.º ou 4.º quadrantes.

$\cos(-\beta) > 0 \Leftrightarrow \cos \beta > 0$, pelo que o lado extremidade do ângulo de amplitude β pertence ao 1.º ou 4.º quadrantes.

Conjugando as duas condições, verifica-se que o lado extremidade do ângulo de amplitude β tem de pertencer ao 4.º quadrante, donde a hipótese correta é D .

$$\text{110. } \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^4 \alpha - (\cos^2 \alpha)^2 =$$

$$= \sin^4 \alpha - 1 - \sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha = 2\sin^2 \alpha - 1,$$

donde a hipótese correta é A .

$$\text{111. } \text{Se } \beta \in [\pi, 2\pi] \text{ então } 0 \leq \cos \beta \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m-1 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2, \text{ donde a hipótese correta é } D.$$

$$\text{112. } 2\cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ donde a hipótese correta é } A.$$

113. As coordenadas do ponto L são $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, pelo que a altura do triângulo é dada por $\overline{LA} + \overline{OM} = \frac{\sin \alpha}{2} + 1$

e o comprimento da base do triângulo é dado por

$$\overline{LK} = 2\overline{AO} = 2 \cos \alpha.$$

Assim, a área do triângulo é dada por

$$\frac{\overline{LK} \times (\overline{LA} + \overline{OM})}{2} = \frac{2 \cos \alpha (\frac{\sin \alpha}{2} + 1)}{2} = \cos \alpha \sin \alpha + \cos \alpha,$$

donde a hipótese correta é A .

114. A área do semicírculo é dada por $\frac{4\pi}{2} = 2\pi$.

Por outro lado, as coordenadas do ponto A são $(2, 2 \tan \alpha)$, pelo que a área do triângulo é dada por $\frac{2 \times 2 \tan \alpha}{2} = 2 \tan \alpha$ e a área da zona colorida é dada por $2 \tan \alpha + 2\pi$, donde a hipótese correta é B .

115. As condições $h(\pi) = j(\pi) = 0$ excluem as hipóteses A , C e D , donde a hipótese correta é B .

116. Tomando $f(x) = \cos x$, verifica-se que o

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = f'(a) = -\sin a \text{ e}$$

$$-\sin a = -1 \Leftrightarrow \sin a = 1, \text{ pelo que } a = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ donde a hipótese correta é } D.$$

117. Como $\cos 0 = 1$, as coordenadas do ponto A são $(0, 1)$ e dado que $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, as coordenadas do ponto B são $(\frac{3\pi}{2}, 0)$, uma vez que esse ponto corresponde ao 2.º zero positivo da função f , ou seja,

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi.$$

Assim, o declive da reta AB é dado por $\frac{0-1}{\frac{3\pi}{2}-0} = -\frac{2}{3\pi}$, donde a hipótese correta é D .

$$\text{118. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin(y + \pi)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-\sin y}{y} = -1$$

donde a hipótese correta é A .

119. $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$ e $f'(-\frac{\pi}{2}) = -\pi \times (-1) + 0 = \pi$, donde a hipótese correta é C .

120. $f'(x) = 2 \cos(2x) \times \frac{x+1}{x} + \sin(2x) \times \frac{x-(x+1)}{x^2} =$
 $= \frac{2(x+1) \cos(2x)}{x} - \frac{\sin(2x)}{x^2}$, donde a hipótese correta é D.

121. $f'(x) = \frac{4}{\cos^2(4x)}$ e $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{(-1)^2} = 4$,
 donde a hipótese correta é C.

122. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \cos 1 - \sin 1$,
 donde a hipótese correta é C.

123. $f'(x) = 1 - \sin x$ e $f''(x) = -\cos x$
 Como a função tem derivada diferenciável em $\mathbb{R}$, nos pontos de inflexão do gráfico da função, a 2.ª derivada é nula, ou seja, $-\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pelo que no intervalo considerado, a 2.ª derivada é nula em $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$, donde a hipótese correta é A.

124.1 Dado que o triângulo $[ABC]$ é isósceles,
 $\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - 130^\circ}{2} = 25^\circ$

124.2 Pelo Teorema de Carnot,
 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\widehat{BAC})$,
 donde $\overline{BC} = \sqrt{7^2 + 7^2 - 2 \times 7 \times 7 \times \cos(130^\circ)} \approx 12,69$

125.1 a. $\widehat{DBC} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

b. $\cos(\widehat{DBC}) = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{DB} = 5 \underbrace{\cos(45^\circ)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

c. $h^2 + \overline{DB}^2 = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

d. $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{\left(4 + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$
 $= \sqrt{41 + 20\sqrt{2}}$

125.2 $4^2 + 5^2 + 2 \times 4 \times 5 \times \underbrace{\cos(45^\circ)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 41 + 40 \times \frac{\sqrt{2}}{2} =$
 $= 41 + 20\sqrt{2} = \overline{AC}^2$

126. Pela Lei dos Senos tem-se $\frac{\overline{BC}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AC}}{\sin(2\alpha)} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \overline{AC} = \overline{BC} \times \frac{\sin(2\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{2 \times \cos \alpha}{\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha}$

127. Tal como no exercício anterior, pela Lei dos Senos obtém-se:
 $\frac{\overline{BC}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AC}}{\sin(4\alpha)} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{\alpha} \times \frac{\sin(4\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin(2\alpha) \cos(2\alpha)}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{4 \sin \alpha \cos \alpha \cos(2\alpha)}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$
 $= 4 \cos \alpha \cos(2\alpha)$

128. Da relação $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ obtém-se
 $\tan \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} - 1} = \pm \frac{3}{4}$ e dado que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,
 conclui-se que $\tan \alpha = \frac{3}{4}$.

129. Da relação $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ obtém-se
 $\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2^2 + 1}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ e dado que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,
 conclui-se que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
 Da relação $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ obtém-se
 $\sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

130.1 $\sin \alpha (\sin \alpha + 1) + \cos^2 \alpha - 2 =$
 $= \sin^2 \alpha + \sin \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \stackrel{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}{=} \sin \alpha - 1$

130.2 $\tan^2 \alpha \times \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha \left(\underbrace{\tan^2 \alpha + 1}_{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} \right) = 1$

131.1 $\frac{1 - \cos(2x)}{2} \stackrel{\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x}{=} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{2} = \sin^2 x$

131.2 Por um lado,
 $\frac{\sin x}{1 + \cos x} \stackrel{\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Leftrightarrow 1 + \cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \frac{\sin x}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
 $\stackrel{\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Por outro lado,
 $\frac{1 - \cos x}{\sin x} \stackrel{\cos x = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow 1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} =$
 $= \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Assim, verifica-se que $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$,
 sempre que os denominadores são não nulos.

132.1 $\underbrace{\cos(\pi + \alpha)}_{-\cos \alpha} + \underbrace{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}_{\cos \alpha} + \underbrace{\cos(-\pi + \alpha)}_{-\cos \alpha} +$
 $+ \underbrace{\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}_{-\cos \alpha} = -2 \cos \alpha$

132.2 $2 \underbrace{\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}_{-\cos \alpha} - 3 \underbrace{\sin(\alpha - \pi)}_{-\sin \alpha} + 5 \underbrace{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}_{-\sin \alpha} +$
 $+ 2 \underbrace{\tan(-\alpha)}_{-\tan \alpha} = -2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha - 2 \tan \alpha$

$$132.3 \quad \underbrace{\sin(-\pi - \alpha)}_{\sin \alpha} + \underbrace{\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}_{\cos \alpha} - 2 \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}_{-\sin \alpha} =$$

$$= 3 \sin \alpha + \cos \alpha$$

$$133. \quad \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}_{-\cos \alpha} - 2 \underbrace{\cos(\pi - \alpha)}_{-\cos \alpha} = \cos \alpha$$

$$\text{e da relação } \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{obtem-se } \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{5}{12}\right)^2 + 1}} = \pm \frac{12}{13},$$

$$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos \alpha \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 2 \cos(\pi - \alpha)}_{\cos \alpha} = -\frac{12}{13}$$

$$134.1 \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$134.2 \quad \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$134.3 \quad 4 - 4 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$134.4 \quad \cos x - \sin x \times \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - \sin x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$134.5 \quad 4 \sin^2 x + 12 \sin x = -5 \Leftrightarrow 4 \sin^2 x + 12 \sin x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{8} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{5}{2} \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

impossível

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$135. \quad \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [-2\pi, 2\pi]$, então $k \in \{-2, -1, 0, 1\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = -\frac{11\pi}{8} \vee x = -\frac{3\pi}{8} \vee x = \frac{5\pi}{8} \vee x = \frac{13\pi}{8}$$

$$136. \quad \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x + \cos x} = \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} =$$

$$= \sin x - \cos x$$

$$\frac{1 - \sin(2x)}{\sin x - \cos x} = \frac{\overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^1 - \overbrace{2 \sin x \cos x}^{\sin(2x)}}{\sin x - \cos x} =$$

$$= \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin x - \cos x} = \sin x - \cos x$$

Dado que as simplificações anteriores só são válidas quando $\sin x + \cos x \neq 0 \wedge \sin x - \cos x \neq 0$, conclui-se que, para que tal suceda, tem de se verificar que $\sin x \neq \pm \cos x$.

Como $\sin x = \cos x$ quando $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e

$\sin x = -\cos x$ quando $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

conclui-se que a igualdade é válida em $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

$$137.1 \quad 1 + \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Por outro lado, a função tangente não está definida em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Conjugando as duas condições, conclui-se que

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$137.2 \quad \text{Apesar de } \frac{1}{1 + \tan x} = \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}, \text{ não pode}$$

ser, pois a função $f(x) = \frac{1}{1 + \tan x}$ e $g(x) = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}$ têm domínios diferentes, nomeadamente,

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\text{e } D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$137.3 \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(-\frac{\pi}{3}\right) + f(0) = \frac{1}{1 + \sqrt{3}_{x(1-\sqrt{3})}} + \frac{1}{1 - \sqrt{3}_{x(1+\sqrt{3})}} + 1 =$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}}{1^2 - \sqrt{3}^2} + 1 = 0$$

-1

$$138.1 \quad \text{Dado que a função tangente não está definida em } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ então } 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \text{ ou seja,}$$

$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Por outro lado, $\tan^2(2x) \geq 0 \Rightarrow 1 - \tan^2(2x) \leq 1, \forall x \in D_g$, ou seja, $D'_g =]-\infty, 1]$.

$$138.2 \quad g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \tan^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) \stackrel{\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}}{=} =$$

$$= 1 - \sqrt{3}^2 = -2, \text{ logo } \frac{2\pi}{3} \text{ é solução de } g(x) = -2.$$

$$138.3 \quad g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \tan^2\left[2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 1 - \tan^2(2x + \pi) \stackrel{\tan(2x + \pi) = \tan(2x)}{=} = 1 - \tan^2(2x) = g(x),$$

pelo que a função g tem período $\frac{\pi}{2}$.

138.4 $g(x) = 0 \Leftrightarrow \tan(2x) = -1 \vee \tan(2x) = 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

139.1 O gráfico da função $f(x) = \cos(3x)$ obtém-se do gráfico da função $y = \cos x$ através duma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{3}$. O gráfico de $g(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ obtém-se do gráfico da função $y = \cos x$ através duma dilatação horizontal de coeficiente 3.

139.2 Uma vez que a função f resulta da função $y = \cos x$ através duma contração horizontal e a função g resulta da função $y = \cos x$ através duma dilatação horizontal, ambas as funções têm o mesmo domínio e contradomínio da função $y = \cos x$, ou seja, $D_f = D_g = \mathbb{R}$ e $D'_f = D'_g = [-1, 1]$.

139.3 Uma vez que os zeros de $y = \cos x$ são dados por $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$, então os zeros da função f são dados por $x = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \forall k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, \forall k \in \mathbb{Z}$, e os zeros da função g são dados por $x = 3\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \forall k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k3\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$.

139.4 $f(-x) = \cos[3(-x)] = \cos(-3x) \stackrel{\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}}{=} \cos(3x) = f(x)$
 $g(-x) = \cos\left(-\frac{x}{3}\right) = \cos\left(-\frac{x}{3}\right) \stackrel{\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}}{=} \cos\left(\frac{x}{3}\right) = g(x)$

Conclui-se assim que ambas as funções são pares.

139.5 $g(x+T) = g(x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x+T}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right) \stackrel{\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = y + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = -y + k2\pi, k \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \frac{x+T}{3} = \frac{x}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \frac{x+T}{3} = -\frac{x}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
 e como o período não depende de x , conclui-se que $\frac{T}{3} = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow T = k6\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 O período positivo mínimo corresponde a $T = 6\pi$.

140.1 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f(-\pi) + 3 \underbrace{\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)}_{\tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}} =$
 $= \sqrt{3} + 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} + 2 \underbrace{\sin(-\pi)}_0 - \frac{3\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

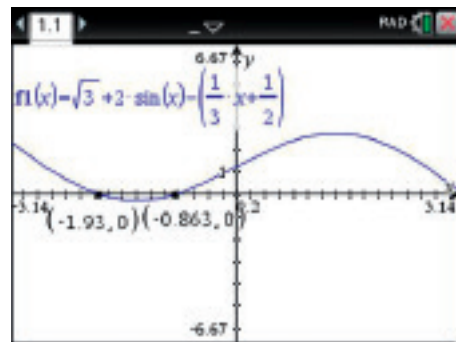
140.2 $\sqrt{3} + 2 \sin x = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

140.3 Da relação $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ obtém-se
 $\tan \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} - 1} = \pm \sqrt{3}$ e dado que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$,
 conclui-se que $\tan \alpha = -\sqrt{3}$.

Da relação $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ obtém-se
 $\sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha = -\sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim, $f(\alpha) = \sqrt{3} + 2 \sin \alpha = \sqrt{3} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

140.4 Podem achar-se os zeros da função $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$ no intervalo $[-\pi, \pi]$ que, aproximados às décimas, são $x = -1,9$ e $x = 0,9$.



141.1 Dado que a função tangente não está definida em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, então

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Por outro lado,

$$\tan(2x) \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Conjugando as duas situações tem-se

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

141.2 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) =$
 $= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \stackrel{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}}{=} \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \stackrel{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}{=} \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3} + 3}{6}$

141.3 $f(\pi - x) =$
 $= \frac{\cos(\pi - x) + 2 \sin(\pi - x) \cos(\pi - x)}{\tan[2(\pi - x)]} \stackrel{\cos(\pi - x) = -\cos x}{=} \frac{-\cos x - 2 \sin x \cos x}{\tan[2(\pi - x)]} \stackrel{\sin(\pi - x) = \sin x}{=} \frac{-\cos x - 2 \sin x \cos x}{\tan(2\pi - 2x) = -\tan(2x)} = \frac{\cos x + 2 \sin x \cos x}{\tan(2x)} = f(x)$

141.4 $\frac{\cos x + 2 \sin x \cos x}{\tan(2x)} = 0 \Leftrightarrow \cos x + 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos x(1 + 2 \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee$$

$$\vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

No intervalo $[-\pi, \pi]$, os zeros da função f são

$$\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}.$$

142.1 Dado que a função seno está definida em $\mathbb{R}$, então $D_g = \mathbb{R}$.

Por outro lado, $-1 \leq \sin(2x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{1 - \sin(2x)}_{g(x)} \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ ou seja, } D'_g = [0, 2].$$

142.2 $g(a) = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 1 - \sin(2a) = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin(2a) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2a = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 2a = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi - \frac{\pi}{3}$$

e como $\frac{\pi}{2} < 2a < \frac{3\pi}{2}$, conclui-se que $2a = \frac{2\pi}{3}$,

verificando-se assim que

$$\cos(2a) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \text{ e}$$

$$\tan(2a) = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$$

142.3 $h(x) = 1 - \sin(2x) + 1 - \underbrace{\sin(2x + \pi)}_{-\sin(2x)} = 2$

143.1 $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{\cos x}\right) =$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 - 1}{\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

143.2 $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

e $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Como $g(x) \neq 0, \forall x \in D_g$, então $g(x) \in D_f, \forall x \in D_g$,

donde $D_{f \circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

143.3 $g(-\alpha) = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos(-\alpha)} = -2 \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}$

$$(f \circ g)(\alpha) = \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

144. O declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa a é dado por $f'(a) = \cos a$ e o declive da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa a é dado por $g'(a) = -\sin a$.

Estas retas são perpendiculares quando o produto escalar dos vetores de coordenadas $(1, \cos a)$ e $(1, -\sin a)$ for zero, ou seja, quando

$$1 - \underbrace{\sin a \cos a}_{\frac{1}{2} \sin(2a)} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin(2a) = 0 \Leftrightarrow \sin(2a) = 2.$$

Assim, estas retas nunca são perpendiculares pois $-1 \leq \sin(2a) \leq 1, \forall a \in \mathbb{R}$, isto é, a última equação é impossível.

145.1 Considerem-se os pontos $X, Y \in [BC]$, respetivamente, pés das perpendiculares a $[BC]$ traçadas dos pontos A e D .

$\overline{BX} = \overline{CY}$ e a área do trapézio é dada pela expressão $\frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times \overline{AX}$.

Por outro lado, $\overline{AX} = 2 \sin \alpha$ e

$$\overline{AD} = \overline{BC} - \overline{BX} - \overline{CY} = \underbrace{2}_{\overline{BC}} - 2 \times \underbrace{2 \cos \alpha}_{\overline{BX} = \overline{CY}} = 2 - 4 \cos \alpha.$$

Assim, a área do trapézio é dada por

$$\frac{2 + 2 - 4 \cos \alpha}{2} \times 2 \sin \alpha = 4 \sin \alpha (1 - \cos \alpha) = f(\alpha).$$

$$\frac{2 + 2 - 4 \cos \alpha}{2}$$

$$2 - 2 \cos \alpha$$

145.2 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 4$

$$\underbrace{1}_1 \left[\underbrace{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_0 \right]$$

Dado que o trapézio é isósceles, também as amplitudes dos ângulos ABC e BCD são iguais, pelo que o resultado anterior representa o valor da área do trapézio quando este é um quadrado de lado 2.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} 4 \sin x (1 - \cos x) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \sqrt{3},$$

$$\underbrace{4 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[\underbrace{1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{1}{2}} \right]$$

valor para o qual tende o valor da área do trapézio quando o trapézio se aproxima de um triângulo equilátero de lado 2.

146. Uma vez que a altura (em metros) da secção da estrutura é dada, em função de α , por $12 \sin \alpha$ e a base (em metros) da secção da estrutura é dada, em função de α , por $2 \times 12 \cos \alpha = 24 \cos \alpha$, a área (em metros quadrados) da secção da estrutura é dada, em função de α , por $12 \sin \alpha \times 24 \cos \alpha = 144 \times \underbrace{2 \sin \alpha \cos \alpha}_{\sin(2\alpha)} = 144 \sin(2\alpha)$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Seja $f(\alpha) = 144 \sin(2\alpha)$.

$$f'(\alpha) = 288 \cos(2\alpha)$$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

α	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$	N.D.	+	0	-	N.D.
$f(\alpha)$	N.D.	$\nearrow$	144 Máx. abs.	$\searrow$	N.D.

Verifica-se assim que a função f tem um máximo absoluto quando $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

RESOLUÇÕES – CADERNO DE ATIVIDADES NYI 2 – TRI12

$$147.1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \stackrel{\cos x = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}) = 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2}) \Leftrightarrow 2\sin^2(\frac{x}{2}) = 1 - \cos x}{x} = 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0} \sin y = 0$$

$$147.2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{0}{=} 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 y}{y^2} = \frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$148.1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

$$148.2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} \stackrel{0}{=} \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2y)}{\sin(y - \frac{\pi}{4})} = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sin(2y)}{\cos(y - \frac{\pi}{4})} = -\lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2y)}{\cos(y - \frac{\pi}{4})} = -2 \times \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin y \cos y}{\sin y} = -2 \times \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos y = -2$$

$$148.3 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x (\sin x - \cos x)} = -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2}$$

$$148.4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^3} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^3} \stackrel{\cos x = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}) = 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2}) \Leftrightarrow 2\sin^2(\frac{x}{2}) = 1 - \cos x}{x^3} = 2 \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{x^3} = \frac{1}{4} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 y}{y^3} = \frac{1}{4} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} = +\infty$$

$$150.1 f'(x) = \frac{-\cos x \times \cos x - (2 - \sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{-\cos^2 x + 2\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x - 1}{\cos^2 x}$$

$$g'(x) = -\sin x \times \sin x + (1 + \cos x) \cos x = -\sin^2 x + \cos^2 x + \cos x = \cos(2x) + \cos x$$

$$150.2 f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sin x - 1}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ pelo que,}$$

em $]-\pi, \pi[\setminus \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$, a derivada da função f tem

zeros em $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$. (Ver quadro 1 abaixo)

Verifica-se assim que a função f tem um mínimo relativo quando $x = \frac{\pi}{6}$ e um máximo relativo quando $x = \frac{5\pi}{6}$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\pi - x)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pi - x + k2\pi \vee 2x = -(\pi - x) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = -\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ pelo que,}$$

em $]-\pi, \pi[\setminus \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$, a derivada da função g tem zeros

em $x = -\frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{\pi}{3}$. (Ver quadro 2 abaixo)

Verifica-se assim que a função g tem um mínimo relativo quando $x = -\frac{\pi}{3}$ e um máximo relativo quando $x = \frac{\pi}{3}$.

$$151.1 f'(x) = 2 \cos x - 3 \sin x$$

$$151.2 g'(x) = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin(2x)} + 2x \cos(x^2) = \sin(2x) + 2x \cos(x^2)$$

Quadro 1

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$	N.D.	-	N.D.	-	0	+	N.D.	+	0	-	N.D.
$f(x)$	N.D.	$\searrow$	N.D.	$\searrow$	$1 + \sqrt{3}$ Mín. rel.	$\nearrow$	N.D.	$\nearrow$	$1 - \sqrt{3}$ Máx. rel.	$\searrow$	N.D.

Quadro 2

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$g'(x)$	N.D.	-	N.D.	-	0	+	0	-	N.D.	-	N.D.
$g(x)$	N.D.	$\searrow$	N.D.	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ Mín. rel.	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ Máx. rel.	$\searrow$	N.D.	$\searrow$	N.D.

151.3 $h'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{\overbrace{-\sin x \times \sin x - \cos x \times \cos x}^{-1}}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$
 $i'(x) = 2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x = -2x \sin x$

152.1 A reta tangente ao gráfico da função f no ponto $x = \frac{\pi}{3}$ tem declive $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e passa no ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.
 Dado que $f'(x) = 3 \cos(3x) + 1$ e $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2$, da equação $y = -2x + b$ obtém-se $\frac{\pi}{3} = -2 \times \frac{\pi}{3} + b \Leftrightarrow b = \pi$, pelo que a reta tangente tem equação $y = -2x + \pi$.

152.2 $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $g'(x) = 2 \tan x \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$ e $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$
 $1 = 4 \times \frac{\pi}{4} + b \Leftrightarrow b = 1 - \pi$, pelo que a reta tangente tem equação $y = 4x + 1 - \pi$.

153. $f(x) = \frac{\sin^2(x - \pi)}{1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)} \stackrel{\sin(x - \pi) = -\sin(x)}{=} \frac{\sin^2(x)}{1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}$
 $f(\pi) = 0$
 $f'(x) = \frac{\overbrace{2 \sin x \cos x}^{\sin(2x)} \left[1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right] - \sin^2 x \times \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left[1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2} =$
 $= \frac{\sin(2x) \left[1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right] - \frac{\sin^2(x) \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2}}{\left[1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2}$
 $f'(\pi) = 0$, pelo que a reta tangente tem equação $y = 0$.

154.1 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{\text{se } f(a) \text{ existir}}{=} f'(a)$
 Como $f'(x) = -3 \cos(3x)$, então
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \underbrace{-3 \cos(3a)}_{f'(a)}$

154.2 $f'(x) - 3f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -3 \cos(3x) - 3 + 3 \sin(3x) + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow \cos(3x) = \sin(3x) \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

155. $g'(x) = 3 \sin(3x)$
 $g'(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3 \sin(3x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee 3x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

156.1 $f'(x) = \frac{\sin(kx)}{2k} + \left(1 + \frac{x}{2k}\right) \times k \cos(kx)$
 $f''(x) = \frac{\cos(kx)}{2} + \frac{\cos(kx)}{2} - \left(1 + \frac{x}{2k}\right) \times k^2 \sin(kx)$
 $f''(x) + k^2 f(x) = \frac{\cos(kx)}{2} + \frac{\cos(kx)}{2} - \left(1 + \frac{x}{2k}\right) \times$
 $\times k^2 \sin(kx) + \left(1 + \frac{x}{2k}\right) \times k^2 \sin(kx) =$
 $= \frac{\cos(kx)}{2} + \frac{\cos(kx)}{2} \stackrel{k^2 f(x)}{=} \cos(kx)$

156.2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{2k}\right) \times \sin(kx)}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{y=kx} \frac{1 + \frac{y}{2k^2}}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = k$

157. $f'(x) = -an \sin(nx) + bn \cos(nx)$ e
 $f''(x) = -an^2 \cos(nx) - bn^2 \sin(nx)$
 $f''(x) + n^2 f(x) = -an^2 \cos(nx) - bn^2 \sin(nx) +$
 $+ n^2 [a \cos(nx) + b \sin(nx)] = 0$

158.1 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2$

158.2 $f'(x) = 1 + \cos x$ e $f''(x) = -\sin x$
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		$\cup$	0 P.I.	$\cap$	π P.I.	$\cup$	

Concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ e em $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Concavidade voltada para baixo em $[0, \pi]$.

Pontos de inflexão: $(0, 0)$ e (π, π)

158.3 $f(x) = x + \cos x \Leftrightarrow x + \sin x = x + \cos x \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 No domínio da função f as soluções são $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$.

159. $f'(x) = 2 \cos(2x + 3)$
 $f''(x) = -4 \underbrace{\sin(2x + 3)}_{f(x)} = -f(x)$

160. $f'(x) = 3 \cos x - \sin x$, $f''(x) = -3 \sin x - \cos x$
 e $f'''(x) = -3 \cos x + \sin x$
 $(f''')'(x) + f''(x) + f'(x) + f(x) =$
 $= f''''(x) + f''(x) + f'(x) + f(x) =$
 $= -3 \cos x + \sin x - 3 \sin x - \cos x + 3 \cos x - \sin x +$
 $+ 3 \sin x + \cos x = 0$

161.1 $f'(x) = \left[\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \right]' = \frac{2\cos^2(2x) + 2\sin^2(2x)}{\cos^2(2x)} = \frac{2}{\cos^2(2x)}$

$$f''(x) = \left[\frac{2}{\cos^2(2x)} \right]' = \frac{8 \cos(2x) \sin(2x)}{\cos^4(2x)} = \frac{4 \sin(4x)}{\cos^4(2x)}$$

161.2 Dado que a função tangente não está definida em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, então $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, donde

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Por outro lado, a função f é contínua em

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

pelo que também o é em $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right]$, uma vez que

$$\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right] \subset \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dado que $f'(x) = \frac{2}{\cos^2(2x)}$, a função f também é diferenciável no seu domínio, pelo que também o é em $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right]$.

Assim, de acordo com o Teorema de Lagrange,

$$\exists c \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right] : f'(c) = \frac{f\left(\frac{\pi}{8}\right) - f\left(-\frac{\pi}{8}\right)}{\frac{\pi}{8} - \left(-\frac{\pi}{8}\right)}.$$

Como $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$, $f\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -1$ e $f'(c) = \frac{2}{\cos^2(2c)}$, pelo

$$\text{Teorema de Lagrange, } \exists c \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right] : \frac{2}{\cos^2(2c)} = \frac{2}{\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(2c) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \cos(2c) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \vee \cos(2c) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\cos(2c) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Leftrightarrow 2c = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, com $c \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right]$, têm-se as soluções

$$c = -\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \text{ e } c = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right).$$

162. $f'(t) = -4 \times \frac{\pi}{12} \sin\left[\frac{\pi}{12}(t+7)\right]$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{12}(t+7)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12}(t+7) = k\pi, k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 12k - 7, k \in \mathbb{N}$$

t	0		5		17		24
$f'(t)$	—	—	0	+	0	—	—
$f(t)$	$\approx 16^\circ\text{C}$ Máx. rel.	$\searrow$	13°C Mín. abs.	$\nearrow$	21°C Máx. abs.	$\searrow$	$\approx 16^\circ\text{C}$ Mín. rel.

Assim, a temperatura aumentou no período $[5, 17]$ e diminuiu nos períodos $[0, 5]$ e $[17, 24]$.

A temperatura máxima foi 21°C , atingida às 17h, e a temperatura mínima foi 13°C , atingida às 5h.

Para saber quais as melhores horas para tomar banho há que resolver a inequação $f(t) > 19$:

$$f(t) > 19 \Leftrightarrow \cos\left[\frac{\pi}{12}(t+7)\right] > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + k2\pi < \frac{\pi}{12}(t+7) < \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow 24k - 11 < t < 24k - 3, k \in \mathbb{N}$$

Assim, as melhores horas para tomar banho correspondem ao período $[13, 21]$.

163.1 Dado que a função é contínua no seu domínio e $D_f =]-\pi, \pi[$, só poderão existir as assíntotas $x = -\pi$ e $x = \pi$.

$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{\cos x}{1 + \cos x} = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{1 + \cos x} = -\infty$, donde $x = -\pi$ e $x = \pi$ são assíntotas verticais ao gráfico da função f , não havendo outras assíntotas ao gráfico de f .

163.2 $f'(x) = \frac{-\sin x (1 + \cos x) + \cos x \sin x}{(1 + \cos x)^2} = -\frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

No domínio da função, o zero da derivada é $x = 0$.

x	$-\pi$		0		π
$f'(x)$	N.D.	+	0	—	N.D.
$f(x)$	N.D.	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ Máx. abs.	$\searrow$	N.D.

163.3 $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$, donde a abcissa do ponto P é $\frac{\pi}{2}$.

$$f(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3 \cos x = 1 + \cos x \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}, \text{ donde a abcissa do ponto } Q \text{ é } \frac{\pi}{3}.$$

A área do trapézio é dada pela expressão $\frac{\overline{OP} + \overline{RQ}}{2} \times \overline{OR}$,

$$\text{donde a área é } \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5\pi}{36}.$$

164.1 $x(t) = 10 \sin\left(16\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = 10 \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(16\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 10 \cos\left[16\pi t - \frac{\pi}{6}\right]$

Trata-se de um oscilador harmónico pois a abcissa do ponto em cada instante é dada por uma expressão do tipo $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, com $A > 0$, $\omega > 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$A = 10, \omega = 16\pi \text{ rad/s e } \varphi = \frac{11\pi}{6}$$

164.2 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{16\pi} = \frac{1}{8} \text{ s e } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8 \text{ Hz}$

164.3 $x(t) = 10 \sin\left(16\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$
 $x'(t) = 160\pi \cos\left(16\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ e
 $x''(t) = -2560\pi^2 \sin\left(16\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$
 $x''(t) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(16\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 16\pi t + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t = -\frac{1}{48} + \frac{k}{16}, k \in \{1, \dots, 160\}$
 $t \in [0, 10]$

Nos instantes $t = -\frac{1}{48} + \frac{k}{16}, k \in \{1, \dots, 160\}$ a velocidade do ponto é máxima ou mínima, isto é, a função x' tem um máximo absoluto ou um mínimo absoluto.

A função x' terá um máximo absoluto em $t = a$ quando a função $x''(a) < 0$ e um mínimo absoluto em $t = a$ quando a função $x''(a) > 0$.

$$x'''(t) = -40960\pi^3 \cos\left(16\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Para $t = \frac{1}{24}$ s ($k=1$) tem-se $x'''(\frac{1}{24}) = 40960\pi^3$ e para $t = \frac{5}{48}$ s ($k=2$) tem-se $x'''(\frac{5}{48}) = -40960\pi^3$, donde o primeiro instante onde a velocidade do ponto é máxima é o instante $t = \frac{5}{48}$ s.

164.4 $x''(t) = -2560\pi^2 \sin\left(16\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$
 $x''(t) = -2560\pi^2 \sin\left(16\pi t + \frac{\pi}{3}\right) =$
 $= -256\pi^2 \times 10 \sin\left(16\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -256\pi^2 x(t)$

165.1 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sin(2x) = \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
 $\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x = \frac{4\pi}{3} - 2x + k2\pi \vee 2x = \pi - \left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \vee k = \frac{1}{6}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$
 Equação impossível

As coordenadas do ponto P_2 são

$$\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}, f\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

165.2 Uma vez que, em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ a função f toma valores superiores ou iguais aos valores da função g , uma condição que define a região sombreada é

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \wedge \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) \leq y \leq \sin(2x).$$

165.3 Os declives das retas tangentes aos gráficos, respetivamente, das funções f e g no ponto de abscissa $\frac{\pi}{3}$ são dados por $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

$$f'(x) = 2 \cos(2x), \text{ pelo que } f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$g'(x) = -2 \sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right),$$

$$\text{pelo que } g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Estas retas são perpendiculares pois o produto escalar dos vetores de coordenadas $\left(1, f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ e $\left(1, g'\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ é zero.

166.1 A amplitude é a distância máxima em relação à reta de equação $y=0$, donde $A=2$.

No intervalo $[0, 25; 2, 25]$ o ponto percorre todas as posições, pelo que $T=2,25-0,25=2$ s.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

O movimento de um oscilador harmónico é definido por uma função do tipo $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, com

$A > 0, \omega > 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi[$; da análise do gráfico conclui-se

$$\text{que } x(0,25) = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Como $\varphi \in [0, 2\pi[$, então $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ou $\varphi = \frac{5\pi}{4}$; todavia, dado que $\frac{x(0)}{2 \cos \varphi} > 0$, conclui-se que $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

166.2 $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = 2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

166.3 $x(t) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{12} + 2k, k \in \mathbb{Z} \vee t = -\frac{5}{12} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Atendendo a que $t \in [0, 3]$, as soluções da equação são $t = \frac{19}{12}$ e $t = \frac{23}{12}$.

166.4 Se $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ então $x'(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$ e $x''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$, pelo que

$$x''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \underbrace{A \cos(\omega t + \varphi)}_{x(t)} = -\omega^2 x(t).$$

Assim, uma vez que neste caso $-\omega^2 = -\pi^2$, então $k = \pi^2$.

167.1 $x(t) = 2 \cos(5t) - 2\sqrt{3} \sin(5t) =$

$$= 4 \left[\underbrace{\frac{1}{2} \cos(5t)}_{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} - \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(5t)}_{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)} \right] =$$

$$\underbrace{\cos\left[5t - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}_{\cos\left[5t - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}$$

$$= 4 \cos\left(5t + \frac{\pi}{3}\right), \text{ donde } \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

167.2 $x(t) = \underbrace{4}_A \cos\left(\underbrace{5}_\omega t + \underbrace{\frac{\pi}{3}}_\varphi\right)$, donde $A = 4$ e $\omega = 5$ rad/s

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} \text{ s} \quad \text{e} \quad f = \frac{1}{\frac{2\pi}{5}} = \frac{5}{2\pi} \text{ Hz}$$

167.3 Se $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ então $x'(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$
e $x''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$

Verifica-se que $x''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) =$
 $= -\omega^2 \times \underbrace{A \cos(\omega t + \varphi)}_{x(t)} = -\omega^2 \times x(t)$, ou seja, $x(t)$

satisfaz sempre a equação diferencial do 2.º grau

$x''(t) = -\omega^2 \times x(t)$ donde, neste caso, $x(t)$ satisfaz

a equação diferencial do 2.º grau $x''(t) = -\underbrace{25}_{5^2} x(t)$.

167.4 Da alínea anterior conclui-se que $x'(t) = -20 \sin\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$.

$$x'(t) = 10 \Leftrightarrow \sin\left(5t + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5t + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 5t + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow_{t \geq 0} t = -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{N} \vee t = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{N}_0, \text{ pelo}$$

que os dois primeiros instantes em que a velocidade do ponto é igual a 10 unidades por segundo são $t = \frac{\pi}{6}$ s e

$$t = \frac{3\pi}{10} \text{ s}.$$

168.1 Representando por d essa distância, tem-se:

$$d = \sin[\alpha(0)] = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m}$$

168.2 Quando o centro da esfera passa pela reta r tem-se

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos(\sqrt{0,98}t) = 0 \Leftrightarrow_{t \geq 0}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{0,98}t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi\sqrt{0,98}}{1,96} + k\frac{\pi\sqrt{0,98}}{0,98}, k \in \mathbb{N}_0$$

Assim, conclui-se que o instante em que o centro da esfera passa pela primeira vez na reta r é o instante

$$t = \frac{\pi\sqrt{0,98}}{1,96} \approx 1,5 \text{ s}.$$

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

PÁG. 53

169.1 $15000 \left(1 + \frac{1,7}{100}\right)^{12} \approx 18\,362,96 \text{ €}$

169.2 $18\,362,96 - 15\,000 \approx 3362,96 \text{ €}$

169.3 O capital acumulado após o n -ésimo mês de juros é dado, em euros, pela expressão $C_n = 15000 \times 1,017^n$.

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{15000 \times 1,017^{n+1}}{15000 \times 1,017^n} = 1,017, \text{ donde } (C_n)$$

é uma progressão geométrica de razão 1,017.

169.4 $C_n = 15000 \times 1,017^n$

169.5 $C_n > 30000 \Leftrightarrow 1,017^n > 2 \Leftrightarrow n > \log_{1,017} 2 \approx 41,1$, donde só após o 42.º mês de

juros é que se obtém um capital superior a 30 000 €.

170. O remanescente a pagar pelo Afonso é $0,4 \times 690 = 276 \text{ €}$. A aplicação a 30 dias de juro à taxa diária de $r\%$ corresponde a $276 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{30}$.

Tem-se assim que:

$$276 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{30} = 300,48 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{30} = \frac{300,48}{276} \Leftrightarrow 1 + \frac{r}{100} = \sqrt[30]{\frac{300,48}{276}} \Leftrightarrow r = 100 \left(\sqrt[30]{\frac{300,48}{276}} - 1\right) \approx 0,28, \text{ ou seja, pagou uma taxa de juro diária de } 0,28\%.$$

171. Seja t a taxa de juro anual em percentagem.

$$20000 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^2 = 23328 \Leftrightarrow t = 100 \left(\sqrt{\frac{23328}{20000}} - 1\right) = 8, \text{ pelo que a taxa de juro anual deve ser } 8\%.$$

172. Os 2000 € iniciais rendem durante 40 semestres (20 anos).

Os 1000 € de reforço no fim do 1.º semestre rendem durante 39 semestres.

Os 1000 € de reforço no fim do 2.º semestre rendem durante 38 semestres.

E assim sucessivamente, até que os últimos 1000 € rendem apenas durante 1 semestre.

No total acumulou:

$$2000 \left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^{40} + 1000 \left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^{39} + \dots + 1000 \left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^1 \approx 71772,68 \text{ €}$$

39 primeiros termos da prog. geom. de termo geral $C_n = 1000 \times 1,025^n$
 $S_n = C_1 \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = 1000 \times 1,025 \times \frac{1-1,025^{39}}{1-1,025} \approx 66402,55 \text{ €}$

173. O montante disponível pelo Pedro ao fim de 2 meses será

$$5000 \left(1 + \frac{24}{100}\right)^2 = 5202 \text{ €}, \text{ pelo que não dispõe de um montante superior a } 5300 \text{ €}.$$

174. Sejam x e y , respetivamente, as quantias a investir em ações do tipo X e do tipo Y .

$$\text{Tem-se que } \begin{cases} x + y = 6000 \\ 0,07x + 0,09y \geq 500 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6000 - x \\ 0,07x + 0,09(6000 - x) \geq 500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 4000 \\ x \leq 2000 \end{cases},$$

pelo que a Maria Ventura deverá investir, no máximo, 2000 € em ações do tipo X e, pelo menos, 4000 € em ações do tipo Y , de forma que a soma dos capitais investidos perfaça 6000 €.

175. Seja t a taxa de juro mensal em percentagem e C o capital, em euros, aplicado inicialmente.

$$C \left(1 + \frac{t}{100}\right)^{42} = 3C \Leftrightarrow \left(1 + \frac{t}{100}\right)^{42} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 100 \left(\sqrt[42]{3} - 1\right) \approx 2,65\%$$

176.
$$\frac{\left((72a)^{\frac{53}{10}}\right)^{10}}{2^{53}} \times \frac{(36a)^{-54}}{36^{-\frac{3}{2}}} = \frac{(72a)^{\frac{53 \times 10}{10}}}{2^{53}} \times \frac{36^{-54} \times a^{-54}}{36^{-\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{(72a)^{53}}{2^{53}} \times 36^{-54 + \frac{3}{2}} \times a^{-54} = \left(\frac{72a}{2}\right)^{53} \times 36^{-\frac{105}{2}} \times a^{-54} =$$

$$= 36^{53} \times a^{53} \times 36^{-\frac{105}{2}} \times a^{-54} = 36^{53 - \frac{105}{2}} \times a^{53 - 54} = 36^{\frac{1}{2}} \times a^{-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{36}}{a} = \frac{6}{a}, \text{ donde a hipótese correta é } A.$$

177. $3^{x+4} - 25 \times 3^{x+1} = 6 \Leftrightarrow 3^3 \times 3^{x+1} - 25 \times 3^{x+1} = 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 \times 3^{x+1} = 6 \Leftrightarrow 3^{x+1} = 3$$

$$\Leftrightarrow 3^{x+1} = 3^1 \Leftrightarrow x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0, \text{ donde a hipótese correta é } D.$$

178. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow 2^x > 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 1 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{3}} 1 \Leftrightarrow x < 0$, donde a hipótese correta é C .

179. Mantendo-se as condições da cultura, ao fim de 2 horas o número de bactérias era $2000 \times 1,05 \times 1,05 = 2205$, donde a hipótese correta é B .

180. $5^{\frac{x}{3}+1} = 5\sqrt[3]{5} \Leftrightarrow 5^{\frac{x}{3}+1} = 5 \times 5^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 5^{\frac{x}{3}+1} = 5^{1+\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{x}{3} + 1 = 1 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 1$, donde a hipótese correta é C .

181. $a^{2+\log_a(2)} = a^2 \times a^{\log_a(2)} =$, donde a hipótese correta é C.

182. O perímetro é dado pelo quadruplo do lado, ou seja,
 $4 \times \log(a^3) = 12 \times \log(a)$, donde a hipótese correta é A.

183. $2^{2+2x} = \left(\frac{2^{1+x}}{3}\right)^2 = 3^2 = 9$, donde a hipótese correta é C.

184. O domínio de resolução da inequação é

$$\{x \in \mathbb{R} : 2x + 1 \geq 0\} = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

Além disso, $2^{\sqrt{2x+1}} \geq 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt{2x+1}} \geq 2^2 \Leftrightarrow \begin{matrix} y=2^x \text{ é uma função crescente em } \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} \geq 2 \Rightarrow 2x+1 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}, \text{ donde a hipótese correta é D.}$$

185. $f(x) = \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=3^x \text{ é uma função injetiva} \end{matrix} x = \frac{1}{2},$
 donde a hipótese correta é A.

186. $\lim(1 + e^{-n}) = \lim\left(1 + \frac{1}{e^n}\right) = 1 + 0 = 1$,
 donde a hipótese correta é B.

187. $\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2n}} = \left[\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}},$
 donde a hipótese correta é A.

188. $\lim \log_2\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\left(\frac{\log_2 1}{n}\right) = \lim_{+\infty} \log_2 n = -\infty$,
 donde a hipótese correta é C.

189. Os pontos do gráfico da função g têm coordenadas (x, e^{x+3}) .
 Dado que $g(-3) = e^0 \neq 0$, $g(\ln 5) = e^{\ln 5+3} = \frac{e^{\ln 5}}{5} \times e^3 \neq 8$,
 $g(-1) = e^2 \neq \ln 2$ e $g(\ln 2) = e^{\ln 2+3} = \frac{e^{\ln 2}}{2} \times e^3 = 2e^3$,
 a hipótese correta é D.

190. $\frac{\ln(x^3) + \ln x - \ln \sqrt{x}}{3 \ln x} = \frac{7}{2} \ln x$,
 $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2} \ln x$
 donde a hipótese correta é B.

191. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{e^{bx} - 1} \stackrel{0}{=} \frac{a}{b} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{a}{b} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}}_1 = \frac{a}{b},$
 donde a hipótese correta é A.

192. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\ln(x-2)} = a \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow 3} \frac{y}{\ln(y+1)} = a \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(y+1)}}_1 = a \Leftrightarrow a = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{e^x - 1} = b &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(x+1)}{\frac{e^x - 1}{x}} \right] = b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}}_1 = b \Leftrightarrow b = 1, \text{ donde a hipótese correta é B.} \end{aligned}$$

193. $(3e^{4x})' = 3 \times 4e^{4x} = 12e^{4x}$ e

$$\left[\frac{\ln(3x)}{x^2} \right]' = \frac{\frac{1}{3x} \times x^2 - \ln(3x) \times 2x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln(3x)}{x^3},$$

donde a hipótese correta é C.

194.1 $3^x = 243 \Leftrightarrow 3^x = 3^5 \Leftrightarrow \begin{matrix} y=3^x \text{ é uma função injetiva} \end{matrix} x = 5$

194.2 $0,5^x = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^2 \Leftrightarrow (2^{-1})^x = 2^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^{-x} = 2^2 \Leftrightarrow \begin{matrix} y=2^x \text{ é uma função injetiva} \end{matrix} -x = 2 \Leftrightarrow x = -2$

194.3 $3^{2x} = 81 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^4 \Leftrightarrow \begin{matrix} y=3^x \text{ é uma função injetiva} \end{matrix} 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

194.4 $4^{x^2-4x} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 4^{x^2-4x} = \frac{1}{4^2} \Leftrightarrow 4^{x^2-4x} = 4^{-2} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=4^x \text{ é uma função injetiva} \end{matrix}$
 $\Leftrightarrow x^2 - 4x = -2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2} \vee x = 2 + \sqrt{2}$

194.5 O domínio de resolução da equação é
 $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} 2^{x+\sqrt{x^2-1}} &= 4^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{x+\sqrt{x^2-1}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{x+\sqrt{x^2-1}} = 2^1 \Leftrightarrow \begin{matrix} y=2^x \text{ é uma função injetiva} \end{matrix} x + \sqrt{x^2-1} = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} = 1 - x \Rightarrow x^2 - 1 = \underbrace{(1-x)^2}_{(x-1)^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-1)} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1) \underbrace{(x+1-x+1)}_2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Como 1 pertence ao domínio de resolução da equação $2^{x+\sqrt{x^2-1}} = 4^{\frac{1}{2}}$ e também é solução da equação $\sqrt{x^2-1} = 1-x$, então é a única solução da equação $2^{x+\sqrt{x^2-1}} = 4^{\frac{1}{2}}$.

194.6 $3^{x+1} \times x = 27x \Leftrightarrow 3^{x+1} \times x - 27x = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \left(3^{x+1} - \frac{27}{3^3} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 3^{x+1} = 3^3 \Leftrightarrow \begin{matrix} y=3^x \text{ é uma função injetiva} \end{matrix}$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

RESOLUÇÕES – CADERNO DE ATIVIDADES NYI2 – FEL12

$$194.7 \quad 7^{x^2-2} = \frac{1}{49} \Leftrightarrow 7^{x^2-2} = \frac{1}{7^2} \Leftrightarrow 7^{x^2-2} = 7^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 2 = -2 \Leftrightarrow x = 0$$

$y = 7^x$ é uma função injetiva

$$194.8 \quad 2^{3x+4} \times 5 - 40 \times 2^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 5 \times \frac{2^{x+1}}{>0, \forall x \in \mathbb{R}} (2^{2x+3} - 8) = 0 \Leftrightarrow 2^{2x+3} = 8 \Leftrightarrow 2^{2x+3} = 2^3 \Leftrightarrow 2x + 3 = 3 \Leftrightarrow x = 0$$

$y = 2^x$ é uma função injetiva

$$195.1 \quad e^{3x} + e^x = 2e^{2x} \Leftrightarrow \frac{e^x}{>0, \forall x \in \mathbb{R}} \left(\frac{e^{2x}}{(e^x)^2} - 2e^x + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0$$

$$195.2 \quad e^{3x} + 15e^x = 8e^{2x} \Leftrightarrow \frac{e^x}{>0, \forall x \in \mathbb{R}} \left(\frac{e^{2x}}{(e^x)^2} - 8e^x + 15 \right) = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 8e^x + 15 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow e^x = 3 \vee e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 3 \vee x = \ln 5$$

$$196.1 \quad 10^{x^2-3} \leq \frac{1}{10^{-2}} \Leftrightarrow 10^{x^2-3} \leq 10^{-2x} \Leftrightarrow x^2 - 3 \leq -2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$$

$y = 10^x$ é uma função crescente

O conjunto solução é $[-3, 1]$.

196.2 O domínio de resolução da inequação é

$$\{x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

$$\frac{1}{4^{\frac{1}{x+1}+1}} > \frac{16}{4^2} \Leftrightarrow 4^{\frac{3}{x+1}+3} > 4^2 \Leftrightarrow \frac{3}{x+1} + 3 > 2 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x+1} > 0$$

$y = 4^x$ é uma função crescente

x	$-\infty$	-4		-1	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+4}{x+1}$	$+$	0	$-$	N.D.	$+$

O conjunto solução é $]-\infty, -4[\cup]-1, +\infty[$.

$$196.3 \quad \frac{5^{2x+1}}{125} < \frac{1}{25} \Leftrightarrow \frac{5^{2x+1}}{125} < \frac{5}{125} \Leftrightarrow 5^{2x+1} < 5^1 \Leftrightarrow 2x + 1 < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

$y = 5^x$ é uma função crescente

O conjunto solução é $]-\infty, 0[$.

$$196.4 \quad 3^{2x} - 12 \times 3^x + 27 \geq 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 12 \times 3^x + 27 \geq 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 12 \times 3^x + 27 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow 3^x = 3 \vee 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \vee x \geq 2$$

O conjunto solução é $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

$$196.5 \quad \frac{6^x}{2^x \times 3^x} \geq 2 \times 3^x \Leftrightarrow \frac{3^x}{>0, \forall x \in \mathbb{R}} (2^x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow 2^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2^x \geq 2^1 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$y = 2^x$ é uma função crescente

O conjunto solução é $[1, +\infty[$.

$$196.6 \quad 10^x - 5^x + 2^x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{10^x}{5^x \times 2^x} - 5^x + 2^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 5^x(2^x - 1) + 2^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2^x - 1)(5^x + 1) \geq 0$$

$5^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 $5^x + 1 > 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 2^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2^x \geq 2^0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$y = 2^x$ é uma função crescente

O conjunto solução é $[0, +\infty[$.

196.7 O domínio de resolução da inequação é

$$\{x \in \mathbb{R} : 4^{x^2+1} \geq 0\} = \mathbb{R}$$

$4^{x^2+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$2^{1-x} \geq \sqrt{4^{x^2+1}} \Leftrightarrow 2^{1-x} \geq (4^{x^2+1})^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{1-x} \geq 4^{\frac{x^2+1}{2}} \Leftrightarrow 2^{1-x} \geq (2^2)^{\frac{x^2+1}{2}} \Leftrightarrow 2^{1-x} \geq 2^{x^2+1} \Leftrightarrow 1-x \geq x^2+1 \Leftrightarrow x^2+x \leq 0 \Leftrightarrow x(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0$$

$y = 2^x$ é uma função crescente

O conjunto solução é $[-1, 0]$.

$$197.1 \quad \log_2 64 = \log_2 (2^6) = 6 \times \log_2 2 = 6$$

$$197.2 \quad \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2}^2) = 2 \times \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 2$$

$$197.3 \quad \log_2 (\log_2 256) = \log_2 \left[\log_2 (2^8) \right] = \log_2 8 = \log_2 (2^3) = 3 \times \log_2 2 = 3$$

$$197.4 \quad \log_5 (\log_5 3125) = \log_5 \left[\log_5 (5^5) \right] = \log_5 5 = 1$$

198.1 O domínio de resolução da equação é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[.$$

$$\log_4 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \in D,$$

pelo que a solução da equação é $x = 2$.

198.2 O domínio de resolução da equação é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$\log_4 x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4^3 \Leftrightarrow x = -8 \vee x = 8,$$

$\in D$ $\in D$ $\in D$

pelo que as soluções da equação são $x = -8$ e $x = 8$.

198.3 O domínio de resolução da equação é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 > 0\} = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[.$$

$$\log_2(2x - 1) = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{2^3}{8} \Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \in D, \text{ pelo que a}$$

$$\text{solução da equação é } x = \frac{9}{2}.$$

198.4 O domínio de resolução da equação é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0 \wedge x + 1 \neq 1\} =]-1, +\infty[\setminus \{0\}.$$

$$\log_{x+1} 4 = 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow x+1 = -2 \vee x+1 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = -3}_{\notin D} \vee \underbrace{x = 1}_{\in D}, \text{ pelo que a solução da equação é } x = 1.$$

198.5 O domínio de resolução da equação é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 2 + 3x > 0\} = \left] -\frac{2}{3}, +\infty \right[.$$

$$\log_4(2 + 3x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 + 3x = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \in D, \text{ pelo que a solução da equação}$$

$$\text{é } x = -\frac{1}{2}.$$

198.6 O domínio de resolução da inequação é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 3x + 1 > 0\} = \left] -\frac{1}{3}, +\infty \right[.$$

$$\log_{\sqrt{3}}(3x + 1) > 0 \Leftrightarrow \underbrace{3x + 1 > 1}_{y = \log_{\sqrt{3}} x \text{ é uma função crescente}} \Leftrightarrow x > 0,$$

$$\text{pelo que o conjunto solução da inequação é }]0, +\infty[.$$

198.7 O domínio de resolução da inequação é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - 2x > 0\} = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[.$$

$$\log_2(1 - 2x) < -3 \Leftrightarrow \underbrace{1 - 2x < \frac{1}{2^3}}_{y = \log_2 x \text{ é uma função crescente}}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2x < \frac{1}{8} \Leftrightarrow x > \frac{7}{16}, \text{ pelo que o conjunto solu-}$$

$$\text{ção da inequação é } \left] \frac{7}{16}, \frac{1}{2} \right[.$$

199.1 O domínio de resolução da equação é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 5x - 1 > 0 \wedge 2x + 1 > 0\} = \left] \frac{1}{5}, +\infty \right[.$$

$$\ln(5x - 1) - \ln 2 = \ln(2x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{5x - 1}{2}\right) - \ln(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln\left[\frac{5x - 1}{2(2x + 1)}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x - 1}{2(2x + 1)} = 1 \Leftrightarrow \frac{x - 3}{4x + 2} = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \in D, \text{ pelo que a solução da equação é } x = 3.$$

199.2 O domínio de resolução da equação é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge 2x - 1 > 0\} = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[.$$

$$\log_3 x - \log_3(2x - 1) = 1 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x}{2x - 1}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2x - 1} = 3 \Leftrightarrow \frac{3 - 5x}{2x - 1} = 0 \Leftrightarrow 3 - 5x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{5} \in D, \text{ pelo que a solução da equação é } x = \frac{3}{5}.$$

199.3 O domínio de resolução da inequação é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 > 0 \wedge x > 0\} =]1, +\infty[.$$

$$\log(x - 1) - \log x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{x - 1}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x - 1}{x} > 1}_{y = \log x \text{ é uma função crescente}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[$$

$$\text{Como }]-\infty, 0[\cap D = \emptyset, \text{ o conjunto solução da inequa-}$$

199.4 O domínio de resolução da inequação é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 1 > 0\} = \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[.$$

$$\log_2(2x + 1) < 1 \Leftrightarrow \underbrace{2x + 1 < 2}_{y = \log_2 x \text{ é uma função crescente}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[$$

$$\text{Como } \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[\cap D = \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[, \text{ o conjunto solução da}$$

$$\text{inequação é } \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[.$$

199.5 O domínio de resolução da inequação é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 2x > 0 \wedge x + 1 > 0\} =]0, +\infty[.$$

$$\log(2x) + \log(x + 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log[2x(x + 1)] > 0 \Leftrightarrow \underbrace{2x(x + 1) > 1}_{y = \log x \text{ é uma função crescente}}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow \underbrace{2x^2 + 2x - 1 = 0}_{\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \vee x > \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\infty, \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \right[\cup \left] \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, +\infty \right[$$

$$\text{Como } \left(\left] -\infty, \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \right[\cup \left] \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, +\infty \right[\right) \cap D =$$

$$= \left] \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, +\infty \right[, \text{ o conjunto solução da inequação}$$

$$\text{é } \left] \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, +\infty \right[.$$

199.6 O domínio de resolução da inequação é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge 2x + 1 > 0\} =]0, +\infty[.$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}[x(2x + 1)] \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{x(2x + 1) \leq 1}_{y = \log_{\frac{1}{3}} x \text{ é uma função decrescente}}$$

$$\Leftrightarrow x(2x + 1) \leq 1 \Leftrightarrow \underbrace{2x^2 + x - 1 \leq 0}_{\substack{2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-1, \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{Como } \left[-1, \frac{1}{2} \right] \cap D = \left] 0, \frac{1}{2} \right[, \text{ o conjunto solução}$$

$$\text{da inequação é } \left] 0, \frac{1}{2} \right[.$$

201.1 $f(0) = 6 - \underbrace{2^0}_1 = 5$, donde o gráfico da função f intersesta o eixo Oy no ponto $(0, 5)$.

$g(0) = \underbrace{4^0}_1 = 1$, donde o gráfico da função g intersesta o eixo Oy no ponto $(0, 1)$.

201.2 Reflexão de eixo Ox e uma translação de vetor $\vec{u}(0, 6)$.

201.3

a. $\left(\frac{f+g}{6-2^x+4^x}\right)(x) \geq 6 \Leftrightarrow 6 - 2^x + 4^x \geq 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2^x}{>0, \forall x \in \mathbb{R}} (2^x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow 2^x - \underbrace{1}_{2^0} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x \geq 2^0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$y=2^x$ é uma função crescente

b. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow 6 - 2^x < 4^x \Leftrightarrow \frac{4^x}{(2^x)^2 = (2^x)^2} + 2^x - 6 > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(2^x)^2 + 2^x - 6}_{>0} > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$s(x) = x^2 + x - 6$
 $(2^x)^2 + 2^x - 6 = 0 \Leftrightarrow s(x) > 0 \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 1$
 $\Leftrightarrow 2^x = -3 \vee 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$
eq. impossível

201.4 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (2^x)^2 + 2^x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, donde o gráfico da função f intersesta o gráfico da função g no ponto $(1, g(1)) = (1, 4)$.

Se o ponto de coordenadas $(1, 4)$ pertence ao gráfico da função $h(x) = k \times 3^{-x}$, então,
 $h(1) = 4 \Leftrightarrow k \times \underbrace{3^{-1}}_{\frac{1}{3}} = 4 \Leftrightarrow k = 12$.

202.1 $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} > 0 \wedge x \neq 0\right\} =]0, +\infty[$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \in D_f,$$

donde o zero da função f é $x = 1$.

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 10 > 0\} =$$

$$=]-\infty, -\sqrt{10}[\cup]\sqrt{10}, +\infty[$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \log(x^2 - 10) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = -\sqrt{11}}_{\in D_g} \vee \underbrace{x = \sqrt{11}}_{\in D_g}, \text{ donde os zeros da função } g$$

são $x = -\sqrt{11}$ e $x = \sqrt{11}$.

202.2 $g(x) > 0 \Leftrightarrow \log(x^2 - 10) > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 11 > 0$$

$$\Leftrightarrow x < -\sqrt{11} \vee x > \sqrt{11}$$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{11}[\cup]\sqrt{11}, +\infty[\subset D_g$, donde a função g é positiva em $]-\infty, -\sqrt{11}[\cup]\sqrt{11}, +\infty[$.

Assim, tendo em conta o D_g , a função g é negativa em $]-\sqrt{11}, -\sqrt{10}[\cup]\sqrt{10}, \sqrt{11}[$.

202.3 $f(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln 10} = \frac{\overset{0}{\ln 1 - \ln x}}{\ln 10} = -\frac{1}{\ln 10} \times \ln x$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{\ln 10} \times \ln x\right)' = -\frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x} = -\frac{1}{x \ln 10} < 0,$$

$\forall x \in]0, +\infty[$, pelo que a função f é decrescente em

todo o seu domínio, não tendo extremos.

202.4 Relativamente à função f tem-se que esta é contínua,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \text{ pelo que } D'_f = \mathbb{R}.$$

Relativamente à função g tem-se que esta é contínua,

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{10}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{10}^+} g(x) = -\infty$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \text{ pelo que } D'_g = \mathbb{R}.$$

203.1

a. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{4}{1 + 3e^{-t}} = \frac{4}{4} = 1$

b. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4}{1 + 3e^{-t}} = \frac{4}{1} = 4$

c. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{4}{1 + 3e^{-t}} \stackrel{+\infty}{=} 0$

203.2 $D_f = \mathbb{R}$ uma vez que $e^{-t} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, a função f é o quociente de funções contínuas em $\mathbb{R}$, logo também é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Conclui-se assim que, a haver assíntotas ao gráfico da função f , elas serão não verticais.

Como $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 4$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$, conclui-se que as retas de equação $y = 4$ e $y = 0$, respetivamente, são assíntotas horizontais ao gráfico da função f e são as únicas assíntotas.

204.1 $\lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^3 \stackrel{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}{=} \left(e\right)^3 = e$

204.2 $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^4 \stackrel{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}{=} e^4$

204.3 $\lim \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3n} = \lim \left[\frac{n\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}\right]^{3n} =$

$$= \frac{\lim \left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right]^3}{\lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^3} \stackrel{\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2}{=} \frac{(e^2)^3}{e^3} = e^3$$

204.4 $\lim \left(\frac{2-n}{2+n}\right)^n = \lim \left[\frac{-n\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{2}{n}\right)}\right]^n =$

$$= \frac{\lim (-1)^n \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \stackrel{\lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}}{=} \frac{e^{-2}}{e^2} \times \lim (-1)^n =$$

$$= \frac{1}{e^4} \times \lim (-1)^n$$

Como não existe $\lim (-1)^n$, também não existe

$$\lim \left(\frac{2-n}{2+n} \right)^n.$$

$$\begin{aligned}
 \text{204.5} \quad \lim \left(\frac{n-5}{n+2} \right)^{n+3} &= \lim \left(\frac{n-5}{n+2} \right)^n \times \lim \left(\frac{n-5}{n+2} \right)^3 = \\
 &= \lim \left[\frac{n \left(1 - \frac{5}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{2}{n} \right)} \right]^n \times \lim \left(\frac{n \left(1 - \frac{5}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{2}{n} \right)} \right)^3 \\
 &= \lim \frac{\left(1 - \frac{5}{n} \right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n} \right)^n} \times \lim \frac{\left(1 - \frac{5}{n} \right)^3}{\left(1 + \frac{2}{n} \right)^3} = \lim \left(1 - \frac{5}{n} \right)^n = e^{-5} \quad \lim \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n = e^2 \\
 &\quad \lim \left(1 + \frac{2}{n} \right)^3 = e^6 \quad \lim \left(1 - \frac{5}{n} \right)^3 = \lim \left(1 + \frac{2}{n} \right)^3 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 204.6 \quad \lim \left(\frac{n^3 + n + 4}{n^3 + 2n^2} \right)^n &= \lim \left(1 + \frac{1}{\frac{n^3 + 2n^2}{-2n^2 + n + 4}} \right)^n = \\
 &= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^3 + 2n^2}{-2n^2 + n + 4}} \right)^{\frac{n^2(-2n^2 + n + 4)}{n^3 + 2n^2}} \right] \\
 &= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n + 2}{-2 + \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}}} \right)^{\frac{-2 + \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}}{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y = e \\
 \text{com } y &= \frac{n + 2}{-2 + \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}} \\
 &= e \left(\frac{-2 + \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}}{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} \right)^{e^{-\infty}} = 0
 \end{aligned}$$

205.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ limite notável

$$\begin{aligned} 205.2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{x^2} &\stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^2} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x x^2}}_0 = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^2} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{\substack{e^y = 2^x \Leftrightarrow y = \ln(2^x) = x \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{y}{\ln 2} \\ y \rightarrow +\infty}} \ln^2 2 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^2} = +\infty \\ &\quad +\infty \text{ (limite notável)} \end{aligned}$$

$$\text{205.3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{e^{3x} - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{5}{3} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{5}{3} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{e^y - 1}}_1 = \frac{5}{3}$$

205.4 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^x - e^{2x+1}}{x+1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y=x+1} \frac{e^{y-1} - e^{2y-1}}{y} = \frac{1}{e} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - e^{2y}}{y}$

$= \frac{1}{e} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1 + 1 - e^{2y}}{y}$

$= \frac{1}{e} \left(\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}}_1 - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{2y} - 1}{y}}_{z=2y} \right) = -\frac{1}{e}$

$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{2y} - 1}{y} = 2 \times \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 2$

$$\begin{aligned} \text{205.5} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - e^{x-3}}{x^2 - 9} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y(y+6)} = \\ &= - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}}_1 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y+6}}_{\frac{1}{6}} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\text{205.6} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}} \right)}{e^{2x} \left(1 - \frac{1}{e^{2x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}}}{1 - \frac{1}{e^{2x}}} = 0$$

205.7 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{3x} - 1}{e^{2x} - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$

205.8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{2} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}}_1 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{205.9} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{3x} &= \frac{0}{0} \times \frac{1}{3} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \\ &= \frac{1}{3 \ln 10} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}}_1 = \frac{1}{3 \ln 10} \end{aligned}$$

$$\textbf{205.10} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\ln(x-3)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y=x-4} \frac{y}{\ln(y+1)} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y}}_1} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{205.11 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3} &\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{x - 3} = \lim_{\substack{\frac{x}{3} = y+1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(y+1)}{3y} = \\ &= \frac{1}{3} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y}}_1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{205.12} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\ln(2x+1)} = \frac{\overbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}}^{1}}{\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)}{x}}_{2x=y}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{205.13 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\log(x+1) - \log x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \log 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 205.14 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x - \log 5}{x - 5} &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{x}{5}\right)}{x - 5} \underset{\frac{x}{5}=y}{=} \frac{1}{5} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log y}{y - 1} = \\ &= \frac{1}{5} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y - 1} = \frac{1}{5 \ln 5} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{0 \text{ (límite notável)}} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y - 1}}_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{205.15 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{0 \times \infty \\ e^y = 3^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow y = \ln(3^{\frac{1}{x}}) = \frac{1}{x} \times \ln 3 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 3}{y} \\ y \rightarrow +\infty}} \ln^2 3 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^2}}_{+\infty \text{ (límite notável)}} = +\infty$$

$$205.16 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-3} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-3} = 0$$

0 (limite notável) 1

206.1

a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1+e^{-x}} = \frac{2}{2} = 1$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} \stackrel{0}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}} = \frac{1}{2}$

$2x = y$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 2$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+e^{-x}} = \frac{2}{1+0} = 2$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}} \right)}{e^{2x} \left(1 - \frac{1}{e^{2x}} \right)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}}}{1 - \frac{1}{e^{2x}}} = \frac{0}{1} = 0$$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1+e^{-x}} \stackrel{2}{=} \frac{2}{+\infty} = 0$

f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} \stackrel{\infty}{=} \frac{-1}{-1} = 1$

206.2 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1 + e^{-x} > 1, \forall x \in \mathbb{R}\}$ e, como a função f é contínua (quociente de funções contínuas), o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

Das alíneas 206.1.c e 206.1.e conclui-se que as retas de equação $y = 2$ e $y = 0$ são as únicas assíntotas ao gráfico da função f .

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : e^{2x} \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, como a função g é contínua (quociente de funções contínuas), o seu gráfico só pode ter como assíntota vertical a reta de equação $x = 0$. Da alínea 206.1.b conclui-se que a reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico da função g .

Das alíneas 206.1.d e 206.1.f conclui-se que as retas de equação $y = 0$ e $y = 1$ são as únicas assíntotas ao gráfico da função g .

207. A função f é contínua em $\mathbb{R}$ (soma de funções contínuas em $\mathbb{R}$), logo também o é em $[-1, 0]$.

Por outro lado, $f(-1) = -1 + \frac{1}{3} < 0$ e $f(0) = 1 > 0$ donde, pelo Teorema de Bolzano, $\exists c \in]-1, 0[: f(c) = 0$, ou seja, a função f tem pelo menos um zero em $]-1, 0[$.

208. A função g é contínua em $\mathbb{R}$ (soma de funções contínuas em $\mathbb{R}$), logo também o é em $[-1, 0]$.

Por outro lado, $g(-1) = -2 + \frac{a}{2} < 0$

$\frac{1}{2} < \frac{a}{2} < 2$

e $g(0) = -1 + a > 0$ donde, pelo Teorema de Bolzano, $\exists c \in]-1, 0[: g(c) = 0$, ou seja, a função g tem pelo menos um zero em $]-1, 0[$.

209. A função h é contínua em $\mathbb{R}^+$, logo também o é em $[e^{\sqrt{2}}, e^2]$, uma vez que $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, $h(e^{\sqrt{2}}) = \ln(e^{\sqrt{2}}) = \sqrt{2} < \frac{3}{2}$

e $h(e^2) = \ln(e^2) = 2 > \frac{3}{2}$ donde, pelo Teorema de Bolzano,

$\exists c \in]e^{\sqrt{2}}, e^2[: h(c) = \frac{3}{2}$, pois os valores de h não

podem passar de $\sqrt{2}$ a 2 sem passar por todos os valores intermédios, ou seja, sem passar por $\frac{3}{2}$.

210.1 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0 \wedge x \neq 0\} =]-1, +\infty[\setminus \{0\}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x - 1 \neq 0\} =]0, +\infty[\setminus \{1\}$

210.2 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{0}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 0$

0 (limite notável) 1

210.3 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{-1}{=} +\infty$, pelo que a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico da função f e é a única assíntota vertical dada a continuidade da função e o facto de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = 0,$

0 (limite notável) $\frac{\ln 1}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0$

pelo que a reta de equação $y = 0$ é a única assíntota não vertical ao gráfico da função f .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{-1}{=} +\infty$, pelo que a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico da função g e é a única assíntota vertical dada a continuidade da função e o facto de $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$.

Na alínea anterior concluiu-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, pelo que a reta de equação $y = 0$ é a única assíntota não vertical ao gráfico da função g .

212. Seja $g(x) = f(x)|_{[1, +\infty[}$.

Em $[x, 2x]$, com $x \geq 1$, a função g é contínua pois é a soma de funções contínuas nesse intervalo.

Em $]x, 2x[$, com $x \geq 1$, a função g é diferenciável pois $g'(x) = \ln x + 1$.

Pelo Teorema de Lagrange $\exists c \in]x, 2x[$:

$g'(c) = \frac{g(2x) - g(x)}{2x - x} \Leftrightarrow \ln c + 1 = \frac{2x \ln(2x) - x \ln x}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln c + 1 = \ln(2x)^2 - \ln x \Leftrightarrow \ln c + 1 = \ln(4x)$

$x \neq 0$

Dado que $c \in]x, 2x[$ e a função logaritmo de base e é uma função crescente no seu domínio, tem-se que

$$\ln x + 1 < \underbrace{\ln c + 1}_{\ln(4x)} < \ln(2x) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x + 1 < \ln(4x) < \ln(2x) + 1.$$

- 213.** Considere-se a função $f(x) = e^x$ no intervalo $[0, x]$, com $x \in]0, 1[$.

Em $[0, x]$, com $x \in]0, 1[$, a função f é contínua pois é contínua em $\mathbb{R}$.

Em $]0, x[$, com $x \in]0, 1[$, a função f é diferenciável pois $f'(x) = e^x$.

$$\text{Pelo Teorema de Lagrange } \exists c \in]0, x[: f'(c) = \frac{e^x - 1}{x - 0} \Leftrightarrow \Leftrightarrow e^c = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Como $c \in]0, x[$ tem-se

$$\frac{e^0}{1} < \frac{e^c}{\frac{e^x - 1}{x}} < e^x \Leftrightarrow 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < e^x - 1 < x e^x \Leftrightarrow x + 1 < e^x < x e^x + 1, \text{ o que prova a desigualdade } x + 1 < e^x, \forall x \in]0, 1[.$$

De $e^x < x e^x + 1, \forall x \in]0, 1[$ obtém-se que a desigualdade $e^x < \frac{1}{1-x}, \forall x \in]0, 1[$ pois:

$$e^x < x e^x + 1 \Leftrightarrow e^x - x e^x < 1 \Leftrightarrow e^x(1-x) < 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow e^x < \frac{1}{1-x} \quad x \in]0, 1[\Rightarrow 1-x > 0$$

$$\text{Conclui-se assim que } x + 1 < e^x < \frac{1}{1-x}, \forall x \in]0, 1[.$$

- 214.** A função $f(x) = 2x - 1 + \frac{e^x - 1}{e^x} = 2x - e^{-x}$ é contínua em $\mathbb{R}$, logo também o é no intervalo $[0, x]$, com $x > 0$.

Em $]0, x[$, com $x > 0$, a função f é diferenciável pois $f'(x) = 2 + e^{-x}$.

Pelo Teorema de Lagrange

$$\exists c \in]0, x[: f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow 2 + e^{-c} = \frac{2x - e^{-x} + 1}{x}.$$

$$\text{Dado que } c \in]0, x[, \text{ então } \frac{1}{e^x} < e^{-c} = \frac{1}{e^c} < \frac{1}{e^0} \Leftrightarrow$$

$$2 + \frac{1}{e^x} < \frac{2 + e^{-c}}{x} < 3 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{e^x} < \frac{2x - e^{-x} + 1}{x} < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{x}{e^x} < 2x - e^{-x} + 1 < 3x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x} < -e^{-x} + 1 < x$$

$$\Leftrightarrow x < -1 + e^x < x e^x.$$

- 215.1** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Da continuidade da função no seu domínio e, dado

que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, conclui-se que o gráfico da função f não tem assíntotas verticais.

Por outro lado, uma vez que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0$, conclui-se que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função f e é a única assíntota não vertical pois:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

- 215.2** $D = \mathbb{R}$

Da continuidade da função no seu domínio conclui-se que o gráfico da função f não tem assíntotas verticais e, dado

$$\text{que } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}} = 0, \text{ conclui-se que a reta de equação } y = 0 \text{ é assíntota horizontal ao gráfico da função } f \text{ e é a única assíntota não vertical pois}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty.$$

- 215.3** $D = \left\{ x \in \mathbb{R} : e + \frac{1}{x} > 0 \wedge x \neq 0 \right\} =]-\infty, -\frac{1}{e}[\cup]0, +\infty[$

$$e + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{ex+1}{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ex+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} ex+1 < 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{e} \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -\frac{1}{e} \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{e}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{e}} x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{e}} x \times \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{e}} \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) \stackrel{0 \times \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\ln e + \ln \left(e + \frac{1}{ex} \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(1 + \frac{1}{ex} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) \stackrel{0 \times \infty}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln y}{y} \quad 1 + \frac{1}{ex} = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{e(y-1)} \quad y \rightarrow +\infty \quad e(y-1)$$

$$= \frac{1}{e} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y-1} = 0$$

Da continuidade da função no seu domínio e dos dois limites anteriores, conclui-se que o gráfico da função f tem apenas a assíntota vertical $x = -\frac{1}{e}$.

Por outro lado, uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) = +\infty,$$

conclui-se que o gráfico da função f não tem assíntotas horizontais.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) = 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\ln \left(e + \frac{1}{x} \right) - 1 \right] \stackrel{\infty \times 0}{=} \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\ln e + \ln \left(1 + \frac{1}{ex} \right) - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{ex} \right) = \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \stackrel{y=-x}{=} \ln \left[\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^{-1} = \\&= \ln(e^1) = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

Dos dois limites anteriores conclui-se a reta de equação $y = x + \frac{1}{e}$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico da função f .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\ln \left(e + \frac{1}{x} \right) - 1 \right] \stackrel{\infty \times 0}{=} \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\ln e + \ln \left(1 + \frac{1}{ex} \right) - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{ex} \right) = \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \ln(e^1) = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

Dos dois limites anteriores conclui-se a reta de equação $y = x + \frac{1}{e}$ é a única assíntota oblíqua ao gráfico da função f .

215.4 $D = \{x \in \mathbb{R} : e^{2x} \neq 1\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\ln 1}{2}\right\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Da continuidade da função no seu domínio e, dado que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1} = +\infty, \text{ conclui-se que a reta de equação } x = 0 \text{ é a única assíntota vertical ao gráfico da função } f.$$

Por outro lado, uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\begin{aligned}\text{e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^{2x} - 1}{2e^{2x}}} = \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{2x}}} = \frac{1}{\frac{1}{2} - 0} = 2, \text{ conclui-se que as retas de}\end{aligned}$$

equação, respetivamente, $y = 0$ e $y = 2$ são assíntotas horizontais ao gráfico da função f e são as únicas assíntotas não verticais ao seu gráfico.

215.5 $D = \mathbb{R}$
 $2^x + 1 > 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Da continuidade da função no seu domínio conclui-se que o gráfico da função f não tem assíntotas verticais e, dado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - 1}{2^x + 1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \left(1 - \frac{1}{2^x} \right)}{2^x \left(1 + \frac{1}{2^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^x}}{1 + \frac{1}{2^x}} = \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$, conclui-se que as retas de equação, respetivamente, $y = 1$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais ao gráfico da função f e são as únicas assíntotas não verticais ao seu gráfico.

216. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \underbrace{\frac{f(x) - f(3)}{x - 3}}_{\substack{f'(3) \\ 0}} \times \lim_{x \rightarrow 3} \underbrace{\frac{1}{x + 3}}_{\frac{1}{6}} = 4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

217. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{h(x) - h(0)}{x}}_{h'(0)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{x + 1}}_1 = 1 \times 1 = 1$

218.1 $y' = 5$

218.2 $y' = 2(2x^2 - 3) \times 4x = 8x(2x^2 - 3)$

218.3 $y' = \frac{-3 \times 1}{x^2} = -\frac{3}{x^2}$

218.4 $y' = \frac{4(2x + 1) - 2(4x - 3)}{(2x + 1)^2} = \frac{10}{(2x + 1)^2}$

218.5 $y' = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

218.6 $y' = \ln 10 \times 2 \times 10^{2x} = \ln 100 \times 10^{2x}$

218.7 $y = \frac{1}{3-x} = 3^x$ donde $y' = \ln 3 \times 3^x$

218.8 $y' = \frac{2(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{2}{x-2}$

218.9 $y' = \frac{e^x}{e^x - 1}$

218.10 $y' = e^x \times \ln x + e^x \times \frac{1}{x} = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$

218.11 $y = \log(x + 5) = \frac{\ln(x + 5)}{\ln 10}$ donde

$$y' = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x + 5} = \frac{1}{\ln 10(x + 5)}$$

218.12 $y = \log\left(\frac{1}{x}\right) = \underbrace{\log 1}_0 - \underbrace{\log x}_{\frac{\ln x}{\ln 10}} = -\frac{\ln x}{\ln 10}$ donde

$$y' = -\frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x} = -\frac{1}{x \ln 10}$$

219. O declive da reta tangente ao gráfico de uma função f em $x = a$ é dado por $f'(a)$, sendo que a reta tangente passa no ponto de coordenadas $(a, f(a))$.

219.1 $f(x) = 2x + 3$ donde $f'(2) = 7$

A reta tangente passa no ponto de coordenadas $(2, f(2)) = (2, 9)$.

Obtêm-se as igualdades $9 = 7 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -5$, sendo que a equação da reta tangente é $y = 7x - 5$.

219.2 $f(x) = e^x$ donde $f'(0) = 1$.

A reta tangente passa no ponto de coordenadas $(0, f(0)) = (0, 1)$.

Obtêm-se as igualdades $1 = 1 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 1$, sendo que a equação da reta tangente é $y = x + 1$.

219.3 $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$ donde $f'(3) = 2$.

A reta tangente passa no ponto de coordenadas $(3, f(3)) = (3, 3)$.

Obtêm-se as igualdades $3 = 2 \times 3 + b \Leftrightarrow b = -3$, sendo que a equação da reta tangente é $y = 2x - 3$.

220.1 A haver derivada na abscissa do ponto A ela será 0.

A função derivada da função f em $[-3, 3] \setminus \{0\}$ é dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(x-1)+1}{x^2} & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ \frac{2-3x}{1+3x} & \text{se } 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

Dado que o ponto A é o ponto do gráfico da função f cuja ordenada é máxima e a abscissa do ponto A é positiva então, sendo a a abscissa do ponto A , $f'(a) = 0$ uma vez que existe derivada da função em $[-3, 3] \setminus \{0\}$.

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-3a}{1+3a} = 0 \Leftrightarrow 2-3a=0 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3} \in]0, 3]$$

220.2 A função f é contínua no ponto A pois é derivável nesse ponto.

220.3 Seja $-3 < b < 0$ a abscissa do ponto B .

O declive da reta tangente ao gráfico de uma função f em $x = b$ é dado por $f'(b)$, sendo que a reta tangente passa no ponto de coordenadas $(b, f(b))$.

$$\begin{aligned} f'(b) = 0,23 &\Leftrightarrow \frac{e^b(b-1)+1}{b^2} = 0,23 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{e^b(b-1)+1}{b^2} - 0,23 = 0 \end{aligned}$$

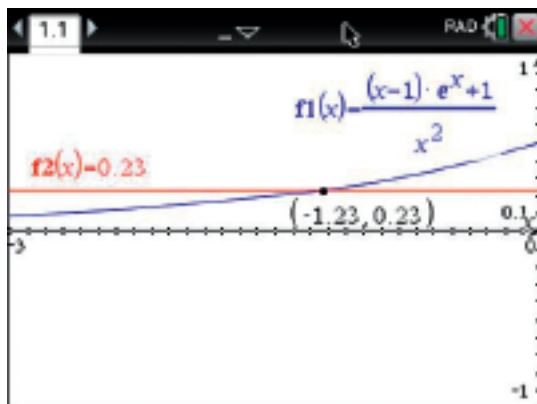
A última equação tem solução em $]-1,5; 1[$ pois, sendo

$$g(b) = \frac{e^b(b-1)+1}{b^2} - 0,23, \text{ a função } g \text{ é contínua}$$

em $]-1,5; 1[$ (pois é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$),

$g(-1,5) \approx -0,03 < 0$ e $g(1) = 1 > 0$, donde, pelo

Teorema de Bolzano, $\exists c \in]-1,5; 1[: g(c) = 0$, ou seja, a função g tem pelo menos um zero em $]-1,5; 1[$.



Com arredondamento às centésimas, a abscissa do ponto B é $b = -1,23$.

221. O gráfico I. é o gráfico da função g pois $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; o gráfico II. é o gráfico da função f pois $D_f = \mathbb{R}^+$ e o gráfico III. é o gráfico da função h pois $D_h = \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^2(3 - 2 \ln x) :$$

$$\bullet D = \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ zeros: } f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2(3 - 2 \ln x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

• Não existem assíntotas verticais ao gráfico da função pois a função f é contínua no domínio

$$\begin{aligned} \text{e } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2(3 - 2 \ln x) &= \lim_{y=1} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^2} [3 - 2 \ln(y^{-1})] = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^2} [3 + 2 \ln y] = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{3}{y^2} + 2 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Por outro lado, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(3 - 2 \ln x) = -\infty$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(3 - 2 \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(3 - 2 \ln x) = -\infty,$$

donde se conclui que não existem assíntotas não verticais ao gráfico da função.

$$\bullet f'(x) = 2x(3 - 2 \ln x) + x^2 \times \left(-\frac{2}{x}\right) = 4x(1 - \ln x)$$

$$\text{e } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x=0}_{\notin D} \vee \underbrace{x=e}_{\in D}$$

x	0		e	$+\infty$
$f'(x)$	N.D.	+	0	-
$f(x)$	N.D.	$\nearrow$	e^2 Máx. abs.	$\searrow$

A função f é crescente em $]0, e[$.

A função f é decrescente em $[e, +\infty[$.

A função f tem máximo absoluto e^2 em $x = e$.

$$\bullet f''(x) = 4(1 - \ln x) + 4x \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -4 \ln x$$

$$\text{e } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x=1}_{\in D}$$

x	0		1	$+\infty$
$f''(x)$	N.D.	+	0	-
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	N.D.	$\cup$	3 P.I.	$\cap$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $]0, 1[$.

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em $[1, +\infty[$.

O gráfico da função f tem como ponto de inflexão o ponto de coordenadas $(1, 3)$.

$$g(x) = \frac{e^x}{x} :$$

$$\bullet D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

• não tem zeros pois $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

• A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico da função pois $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$ e, dada a continuidade da função no domínio, é a única assíntota vertical.

Por outro lado $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$, donde se conclui que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função e, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$, conclui-se que é a única assíntota não vertical ao gráfico da função.

$$\bullet g'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$\text{e } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x=1 \in D$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$g'(x)$	-	N.D.	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	N.D.	$\searrow$	e Mín. rel.	$\nearrow$

A função g é crescente em $[1, +\infty[$.

A função g é decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, 1[$.

A função g tem mínimo relativo e em $x=1$.

$$\bullet g''(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3} \neq 0, \forall x \in D_g$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	-	N.D.	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g	$\cap$	N.D.	$\cup$

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para cima em $]0, +\infty[$.

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$.

O gráfico da função g não tem pontos de inflexão.

$$h(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11:$$

$$\bullet D = \mathbb{R}$$

$$\bullet \text{zeros: } h(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0 \Leftrightarrow \frac{h(1)=0}{(x-1)(x^2-2x-11)=0} \Leftrightarrow x=1 \vee x=1 \pm 2\sqrt{3}$$

• Não existem assíntotas verticais pois a função h é contínua em $\mathbb{R}$.

Por outro lado, como $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$, conclui-se que não existem assíntotas não verticais ao gráfico da função.

$$\bullet h'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) \text{ e}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\nearrow$	16 Máx. rel.	$\searrow$	-16 Mín. rel.	$\nearrow$

A função h é crescente em $]-\infty, -1[$ e em $[3, +\infty[$.

A função h é decrescente em $[-1, 3]$.

A função h tem máximo relativo 16 em $x=-1$ e um mínimo relativo -16 em $x=3$.

$$\bullet h''(x) = 6(x-1) \text{ e } h''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x=1 \in D_h$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h''(x)$	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de h	$\cap$	0 P.I.	$\cup$

O gráfico da função h tem a concavidade voltada para cima em $[1, +\infty[$.

O gráfico da função h tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 1[$.

O gráfico da função h tem como ponto de inflexão o ponto de coordenadas $(1, 0)$.

223.1 Representando por $B(t)$ a população de baratas ao fim de t dias após o momento inicial $B(0)$ em que se constatou que a população de baratas era 1 000 000, verifica-se a igualdade $B(t) = \frac{1}{2} \times B(t-1) \Leftrightarrow \frac{B(t)}{B(t-1)} = \frac{1}{2}, \forall t \geq 1$, ou seja, a restrição da função $B(t)$ a $\mathbb{N}$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

$$\text{Assim, } B(t) = \underbrace{B(1)}_{B(0) \times \frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} = 1\,000\,000 \left(\frac{1}{2}\right)^t, \forall t \in \mathbb{N}.$$

$$\textbf{223.2 } B(t) < 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t < 2 \times 10^{-6} \Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ é uma função decrescente}$$

$$\Leftrightarrow t > \underbrace{\log_{\frac{1}{2}}(2 \times 10^{-6})}_{\frac{\ln(2 \times 10^{-6})}{\ln(\frac{1}{2})}} \approx 18,9$$

A Matilde tem razão pois o número de baratas, de acordo com o modelo, é já inferior a 2 habitantes no 19.º dia após o momento inicial, $B(0)$.

$$\textbf{224. } A_1(t) < 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,15t} < 0,125 \Leftrightarrow y = e^x \text{ é uma função crescente}$$

$$\Leftrightarrow -0,15t < \ln 0,125 \Leftrightarrow t > -\frac{\ln 0,125}{0,15} \approx 14$$

$$A_2(t) < 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,2t} < \frac{1}{14} \Leftrightarrow \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -0,2t < \ln\left(\frac{1}{14}\right) \Leftrightarrow t > -\frac{\ln\left(\frac{1}{14}\right)}{0,2} \approx 13$$

$$A_3(t) < 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,1t} < \frac{1}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,1t < \ln\left(\frac{1}{12}\right) \Leftrightarrow t > -\frac{\ln\left(\frac{1}{12}\right)}{0,1} \approx 25$$

Conclui-se assim que o ambientador 1 conserva o seu aroma durante, cerca de, 14 dias, que o ambientador 2 conserva o seu aroma durante, cerca de, 13 dias e que o ambientador 3 conserva o seu aroma durante, cerca de, 25 dias, donde, o mais eficaz é o ambientador 3.

- 225.** Se após 40 dias a população é cerca de 400 000 moscas, então verifica-se a igualdade $P(40) = 400\,000 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow P(0) \times e^{0,4} = 400\,000 \Leftrightarrow P(0) = \frac{400\,000}{e^{0,4}} \approx 268\,128$,
 donde a população inicial era cerca de 268 128 moscas.

- 226.1** $T(0) = 20 + 50e^0 = 70$, ou seja, a temperatura do chá no instante em que é colocado na chávena é 70 °C.

- 226.2** $T(t) = 65 \Leftrightarrow 20 + 50e^{-0,04t} = 65 \Leftrightarrow e^{-0,04t} = 0,9 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -0,04t = \ln 0,9 \Leftrightarrow t = -\frac{\ln 0,9}{0,04} \approx 2,6$, donde, decorrem
 cerca de 2 minutos e 36 segundos até a temperatura do chá atingir 65 °C.

- 227.1** $C'(t) = \frac{k}{b-a}(-ae^{-at} + be^{-bt})$
 $C'(t) = 0 \Leftrightarrow -ae^{-at} + be^{-bt} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{-bt}}{e^{-at}} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{(a-b)t} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow (a-b)t = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{a-b}$$

t	0		$\frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{a-b}$	$+\infty$
$C'(t)$	+	+	0	-
$C(t)$	0	↗	Máx. abs.	↘

Assim, a concentração máxima ocorre aos $\frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{a-b}$ minutos após a injeção do medicamento.

- 227.2** $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{k}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}) = 0$
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-at} = 0 \quad a > 0$
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-bt} = 0 \quad b > 0$

O valor do limite anterior indica que, com o passar do tempo, a concentração do medicamento na corrente sanguínea tende a 0.

- 228.1** $M(t) = \frac{M(0)}{2} \Leftrightarrow 15e^{-0,02t} = \frac{15e^0}{2} \Leftrightarrow e^{-0,02t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -0,02t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{0,02} \approx 34,657$

$$0,657 \times 60 = 39,42$$

Assim, a massa reduz-se a metade ao fim de, cerca de, 34 horas e 39 minutos.

- 228.2** A função M é contínua em $\mathbb{R}$, logo também o é em $[2,5; 4]$.

Por outro lado, $M(2,5) = 15e^{-0,05} > 14$
 e $M(4) = 15e^{-0,08} < 14$ donde, pelo Teorema de Bolzano,
 $\exists c \in]2,5; 4[: M(c) = 14$, pois os valores de M não
 podem passar de $15e^{-0,05}$ a $15e^{-0,08}$ sem passar por
 todos os valores intermédios, ou seja, sem passar por 14.

- 229.1** As informações dadas no enunciado correspondem a

$$\begin{cases} T_A = -18 \\ T(90) = 0 \\ T(270) = -16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(90) = 0 \\ T(270) = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 + a \times 3^{90b} = 0 \\ -18 + a \times 3^{270b} = -16 \end{cases} \Leftrightarrow 3^{90b} > 0, \forall b \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{18}{3^{90b}} \\ \frac{3^{270b}}{3^{90b}} = \frac{2}{18} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{18b} = 3^{-2} \\ 180b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{18}{3^{90b}} = \frac{18}{3^{-1}} = 54 \\ b = -\frac{1}{90} \end{cases}$$$$

- 229.2** $T(t) = T_A + \frac{2}{3} \Leftrightarrow T_A + 54 \times 3^{-\frac{t}{90}} = T_A + \frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^{-\frac{t}{90}} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^{-\frac{t}{90}} = 3^{-4} \Leftrightarrow -\frac{t}{90} = -4 \Leftrightarrow t = 360,$$

pelo que, passados 360 minutos (6 horas), a temperatura do organismo excede em $\frac{2}{3}$ °C a temperatura ambiente.

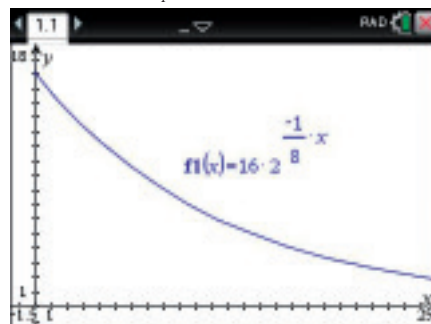
- 230.1** A informação dada no enunciado corresponde a $Q(8) = \frac{Q_0}{2}$.

$$Q(8) = \frac{Q_0}{2} \Leftrightarrow Q_0 \times 2^{-8b} = \frac{Q_0}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{-8b} = 2^{-1} \Leftrightarrow -8b = -1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{8}$$

- 230.2** A informação dada no enunciado corresponde a dizer que

$Q_0 = 16Q_p$, pelo que $Q(t) = 16Q_p \times 2^{-\frac{t}{8}}$, cujo gráfico, considerando Q_p como unidade é :



- 230.3** $Q(t) > Q_p \Leftrightarrow 16Q_p \times 2^{-\frac{t}{8}} > Q_p \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^{4-\frac{t}{8}} > 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{t}{8} > 0 \Leftrightarrow t < 32,$$

$y=2^x$ é uma função crescente

pelo que a erva do pasto não pode ser ingerida pelos animais durante 32 dias.

- 231.1** $C(2017) = 0,6 \log(2017 - 2009) + 0,8 \approx 1,34$

231.2 $C(t) = 1,6 \Leftrightarrow 0,6 \log(t - 2009) + 0,8 = 1,6 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log(t - 2009) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow t = 2009 + 10^{\frac{4}{3}} \approx 2030,5$, ou seja,
 só em 2031.

232.1 As informações dadas no enunciado correspondem

a $\begin{cases} C(0) = 400 \\ C(2) = 200 \end{cases}$.

$$\begin{cases} C(0) = 400 \\ C(2) = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times \underbrace{2^0}_1 = 400 \\ a \times 2^{2b} = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 400 \\ 2^{2b} = \underbrace{0,5}_{2^{-1}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{2b = -1} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{b = -\frac{1}{2}} \end{cases} \end{cases}$$

232.2 $C(t) = 20 \Leftrightarrow 400 \times 2^{-\frac{t}{2}} = 20 \Leftrightarrow 2^{-\frac{t}{2}} = 0,05 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{t}{2} = \underbrace{\log_2 0,05}_{\frac{\ln 0,05}{\ln 2}} \Leftrightarrow t = -\frac{2 \ln 0,05}{\ln 2} \approx 8,64 \text{ horas,}$$

ou seja, ao fim de 8 horas, 38 minutos e 24 segundos.

233.1 $d(0) = \frac{10}{1 + 9 \underbrace{e^0}_1} = 1$ milhar, ou seja, contraíram inicialmente a doença 1000 pessoas.

233.2 $d(2) = \frac{10}{1 + 9e^{-2,4}} \approx 5,505$ milhares, ou seja, ao fim de 2 semanas já tinham contraído a doença cerca de 5505 pessoas.

233.3 $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{10}{1 + 9e^{-1,2t}} = \frac{10}{\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-1,2t} = 0} = 10$ milhares, ou seja, mantendo-se o modelo, e sendo a função d crescente em $\mathbb{R}_0^+$, o número de pessoas que contraíram a doença será 10 000.

234.1 $P(0) = \frac{20}{2 + 3 \underbrace{e^0}_1} = 4$ milhares, ou seja, há atualmente 4000 peixes dessa espécie.

234.2 $P(50) = \frac{20}{2 + 3e^{-3}} \approx 9,305$ milhares, ou seja, daqui a 50 anos haverá cerca de 9305 peixes dessa espécie.

234.3 $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20}{2 + 3e^{-0,06t}} = \frac{20}{\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,06t} = 0} = 10$ milhares, ou seja, mantendo-se o modelo e sendo a função P crescente em $\mathbb{R}_0^+$, o número de peixes dessa espécie crescerá e tenderá a estabilizar em cerca de 10 000.

PRIMITIVAS

PÁG. 71

235. $\int (x^2 + x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c, c \in \mathbb{R}$,
donde a hipótese correta é D.

236. A expressão da primeira derivada da função f é da forma $\cos x + \frac{x}{2} + c, c \in \mathbb{R}$, pelo que a expressão da função f é da forma $\int (-\sin x + \frac{1}{2}) dx = \sin x + \frac{x^2}{4} + cx + d, c, d \in \mathbb{R}$, donde a hipótese correta é C.

237. $\int -2 [f(x) + g(x)] dx = -2 \int [f(x) + g(x)] dx = -2 \left[\int f(x) dx + \int g(x) dx \right] = -2 [F(x) + G(x)] = -2 \left(x^3 - \frac{x}{2} \right) = -2x^3 + x$, donde a hipótese correta é B.

238. $F(x) = \int (e^x + 1)x dx = \int e^x x dx + \int x dx = \int e^x x dx + \frac{x^2}{2} + a, a \in \mathbb{R}$
 $= e^x x - e^x + \frac{x^2}{2} + c, c \in \mathbb{R}$
Como $F(1) = 1 \Leftrightarrow e - e + \frac{1}{2} + c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$, pelo que $F(x) = e^x x - e^x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$, donde a hipótese correta é A.

239. $\int (\cos x - 2e^{3x}) dx = \sin x - \frac{2}{3}e^{3x} + c, c \in \mathbb{R}$,
donde a hipótese correta é B.

240. A expressão da função f é da forma $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$.
Como $f(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{5} + c = 2 \Leftrightarrow c = \frac{8}{5}$, pelo que $f(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{5}$.

241.1 A expressão da primeira derivada da função f é da forma $4x^3 + 3x^2 - 4x + c, c \in \mathbb{R}$, pelo que a expressão da função f é da forma $\int (4x^3 + 3x^2 - 4x + c) dx = x^4 + x^3 - 2x^2 + cx + d, c, d \in \mathbb{R}$.

241.2 $\begin{cases} f(0) = 4 \\ f(1) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \\ c + 4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \\ c = 1 \end{cases}$,
pelo que $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 4$

242.1 $\int 4x^3 dx = x^4 + c, c \in \mathbb{R}$

242.2 $\int (6x^2 + 1) dx = 2x^3 + x + c, c \in \mathbb{R}$

242.3 $\int (5x^4 + 2x^2 + 3) dx = x^5 + \frac{2}{3}x^3 + 3x + c, c \in \mathbb{R}$

242.4 $\int \frac{2}{3x} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} \ln |x| + c, c \in \mathbb{R}$

242.5 $\int \sin(2x - 3) dx = -\frac{1}{2} \int -2 \sin(2x - 3) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x - 3) + c, c \in \mathbb{R}$

242.6 $\int (3 \sin x + 1) dx = -3 \int \sin x dx + \int 1 dx = -3 \cos x + x + c, c \in \mathbb{R}$

242.7 $\int e^{x^2} 2x dx \stackrel{u(x)=x^2}{=} \int e^u du = e^u + c = e^{x^2} + c, c \in \mathbb{R}$

242.8 $\int \cos^2 x dx \stackrel{\cos(2x)=2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{\cos(2x)+1}{2}}{=} \frac{1}{2} \int [\cos(2x) + 1] dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \int 2 \cos(2x) dx + \int 1 dx \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2x) + x \right] + c, c \in \mathbb{R}$

242.9 $\int 10x \cos(5x^2 + 7) dx \stackrel{u(x)=5x^2+7}{=} \int 10x \cos u du = \sin(5x^2 + 7) + c, c \in \mathbb{R}$

242.10 $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln(1+e^x) + c, c \in \mathbb{R}$

242.11 $\int 2x \sqrt[3]{x^2+3} dx = \int 2x(x^2+3)^{\frac{1}{3}} dx \stackrel{u(x)=x^2+3}{=} \int \frac{2}{3} (u-3)^{\frac{1}{3}} du = \frac{3}{4} (x^2+3)^{\frac{4}{3}} + c, c \in \mathbb{R}$

244.1 $\int x \ln x dx \stackrel{u(x)=\ln x}{=} \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \times \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} [x^2 \ln x - \int x dx] = \frac{1}{2} [x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}] + c, c \in \mathbb{R}$

244.2 $\int \cos x (x^2 + 1) dx \stackrel{u(x)=\sin x}{=} \int \sin x (x^2 + 1) dx - \int \sin x \times 2x dx = \sin x (x^2 + 1) - \left(-2x \cos x - \int -2 \cos x dx \right) = \sin x (x^2 + 1) + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx = \sin x (x^2 + 1) + 2x \cos x + c, c \in \mathbb{R}$

244.3 $\int (x^2 + x + 1)e^x dx \stackrel{u(x)=e^x}{=} \int e^x (x^2 + x + 1) dx = e^x (x^2 + x + 1) - \left[e^x (2x + 1) - \int e^x \times 2 dx \right] = e^x (x^2 + x + 1) - e^x (2x + 1) + 2 \int e^x dx = e^x (x^2 - x + 2) + c, c \in \mathbb{R}$

244.4 $\int \cos x \ln(\sin x) dx \stackrel{u(x)=\sin x}{=} \int \cos x \ln u du = \sin x \ln(\sin x) - \int \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} dx = \sin x \ln(\sin x) - \int \cos x dx = \sin x \ln(\sin x) - \sin x + c, c \in \mathbb{R}$

$$= \sin x \ln(\sin x) - \int \cos x \, dx =$$

$$= \sin x \underbrace{[\ln(\sin x) - 1]}_{\sin x \ln(\sin x) - \sin x} + c, \, c \in \mathbb{R}$$

$$245. \quad \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{(A+B)x + 3A - 3B}{x^2 - 9} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 3A-3B=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -B = \frac{1}{6} \\ B = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 9} \, dx = \frac{1}{6} \left[\int \frac{1}{x-3} \, dx - \int \frac{1}{x+3} \, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{6} (\ln|x-3| - \ln|x+3|) + c = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + c, \, c \in \mathbb{R}$$

$$246. \quad \frac{2x}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{(x+2)(x-3)} = \frac{(A+B)x + 2B - 3A}{(x+2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ 2B-3A=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2-B = \frac{4}{5} \\ B = \frac{6}{5} \end{cases}$$

$$\int \frac{2x}{(x+2)(x-3)} \, dx = \frac{4}{5} \int \frac{1}{x+2} \, dx + \frac{6}{5} \int \frac{1}{x-3} \, dx =$$

$$= \frac{2}{5} (\ln|x+2|^2 + \ln|x-3|^3) + c$$

$$= \frac{2}{5} \ln(|x+2|^2 \times |x-3|^3) + c, \, c \in \mathbb{R}$$

CÁLCULO INTEGRAL

PÁG. 75

$$247. \quad \int_{-1}^2 (4x^2 - 3) \, dx = \left[\frac{4}{3}x^3 - 3x \right]_{-1}^2 = \frac{32}{3} - 6 + \frac{4}{3} - 3 = 3,$$

donde a hipótese correta é A .

248. Em $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ a função $f(x) = \cos x$ toma valores negativos, pelo que o valor da área referida é obtido do cálculo do integral $-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx$, donde a hipótese correta é B .

249. O valor da área referida é obtido do cálculo do integral

$$\int_{-1}^1 [x^3 + 1 - (x^2 + x)] \, dx \text{ e, dado que}$$

$$\int_{-1}^1 [x^3 + 1 - (x^2 + x)] \, dx = \int_{-1}^1 (x^3 - x^2 - x + 1) \, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}, \text{ donde a hipótese correta é } C.$$

250.1 $a(t) = v'(t)$, pelo que $v(t)$ é uma primitiva de $a(t)$, ou seja, $v(t) = \int_{\frac{1}{2} + \frac{2}{100}t} a(t) \, dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{100}t^2 + c, \, c \in \mathbb{R}$ (em m/s).

Dado que o comboio parte de uma estação no instante $t = 0$ s, então $v(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$, pelo que a função velocidade, a cada instante, é dada por $v(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{100}t^2$ (em m/s).

Ao fim de 20 segundos a velocidade do comboio é $v(20) = 14$ m/s, donde a hipótese correcta é D .

250.2 $v(t) = d'(t)$, pelo que $d(t)$ é uma primitiva de $v(t)$, ou seja, $d(t) = \int_{\frac{1}{2}t + \frac{1}{100}t^2} v(t) \, dt = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{300}t^3 + c, \, c \in \mathbb{R}$ (em metros).

Dado que d representa a distância percorrida desde a partida, então $d(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$, pelo que a função distância percorrida desde a partida, a cada instante, é dada por $d(t) = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{300}t^3$ (em metros).

Em 20 segundos o comboio percorreu $d(20) = \frac{380}{3}$ m, donde a hipótese correta é A .

$$251. \quad m(f) = \frac{1}{2-0} \int_0^2 (x^2 - x + 1) \, dx = \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^2 = \frac{4}{3},$$

donde a hipótese correta é D .

252.1 Seja f a função definida por $f(x) = -2$.

Uma vez que a função f é contínua em $\mathbb{R}$, também o é em qualquer intervalo real $[a, b]$ e dado que a função f é negativa em qualquer intervalo real $[a, b]$, então

$$\int_a^b -2 \, dx = - \int_a^b 2 \, dx = -[2x]_a^b = -2(b-a) = 2a - 2b.$$

252.2 Seja f a função definida por $f(x) = x$.

Uma vez que a função f é contínua em $\mathbb{R}$, também o é em qualquer intervalo real $[a, b]$.

- Se $a \geq 0$, então a função f é não negativa em qualquer

intervalo real $[a, b]$, pelo que $\int_a^b x \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$.

- Se $b \leq 0$, então a função f é não positiva em qualquer

$$\begin{aligned} & \text{intervalo real } [a, b], \text{ pelo que } \int_a^b x \, dx = - \int_a^b -x \, dx = \\ & = - \left[-\frac{1}{2}x^2 \right]_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

- Se $a < 0 \wedge b > 0$, então a função f é não positiva em qualquer intervalo real $[a, 0]$ e é não negativa em qualquer intervalo real $[0, b]$, pelo que

$$\begin{aligned}\int_a^b x \, dx &= \int_a^0 x \, dx + \int_0^b x \, dx = -\int_a^0 -x \, dx + \int_0^b x \, dx = \\ &= -\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_a^0 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^b = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

253.1 $\int_0^2 (x^2 + 5x - 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x \right]_0^2 = \frac{32}{3}$

253.2 $\int_1^2 (5x^3 + 3x^2 + 4) dx = \left[\frac{5}{4}x^4 + x^3 + 4x \right]_1^2 = \frac{119}{4}$

253.3 $\int_1^{e+1} \frac{2}{3x} dx = \frac{2}{3} \int_1^{e+1} \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} \times [\ln x]_1^{e+1} = \frac{2}{3} \ln(e+1)$

253.4 $\int_{-2}^{-1} \frac{3}{x} dx = 3 \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = 3 \times [\ln |x|]_{-2}^{-1} = -3 \ln 2$

253.5 $\int_5^8 (2x - 3e^x) dx = [x^2 - 3e^x]_5^8 = 39 + 3(e^5 - e^8)$

253.6 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx = [-\cos x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

253.7 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2$

253.8 $\int_1^4 2e^{\sqrt{x}} dx$

=

Primitivação por partes:

$f(x) = e^{\sqrt{x}}$
 $g(x) = 4\sqrt{x}$

= $\int_1^4 \underbrace{4\sqrt{x}}_{g(x)} \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}}_{f(x)} dx$

$$\begin{aligned} \int 4\sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx &= 4\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - \int \frac{4}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} dx = 4\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 4 \int \frac{4}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} dx = 4\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 4e^{\sqrt{x}} = 4e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) \\ &= \left[4e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) \right]^4 = 4e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{253.9} \quad \int_2^5 \ln x \, dx &= [x(\ln x - 1)]_2^5 \\ &\quad \begin{array}{c} \text{Primitivação por partes:} \\ f(x)=x \\ g'(x)=\ln x \end{array} \\ &\quad \int \ln x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1) \\ &= 5 \ln 5 - 2 \ln 2 - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{253.10} \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx \\ & \text{Primitivação por partes:} \\ & \quad f(x) = x \\ & \quad g(x) = -\cos x \\ & \int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x \\ & = [-x \cos x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 253.11 \int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = \\ &\quad \begin{array}{c} \text{Primitivação por partes:} \\ f(x)=e^x \\ g(x)=\cos x \end{array} \\ &= \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \Leftrightarrow \\ &\text{Primitivação por partes:} \\ &\quad f(x) = e^x \\ &\quad g(x) = \sin x \\ &\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\Leftrightarrow \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x)$$

$$\text{Assim, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx = \left[\frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} (e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$$

253.12 $\int_1^{10} \ln(5x-1) \, dx =$

Primitivação por partes:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(5x-1) \\ g(x) &= x \\ \int \ln(5x-1) \, dx &= x \ln(5x-1) - \int x \cdot \frac{5}{5x-1} \, dx = x \ln(5x-1) - \int \left(x + \frac{1}{5x-1} \right) \, dx \\ &= x \ln(5x-1) - \left(x + \frac{1}{5} \ln(5x-1) \right) = \ln(5x-1) \left(x - \frac{1}{5} \right) - x \\ &= \left[\ln(5x-1) \left(x - \frac{1}{5} \right) - x \right]_1^{10} = \frac{98}{5} \ln 7 - \frac{8}{5} \ln 2 - 9 \end{aligned}$$

254.1 $2x^2 = 2x \Leftrightarrow 2x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$, pelo que as curvas interseam-se nos pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(1, 2)$.

Como $2x^2 \geq 2x \Leftrightarrow 2x(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 1$, o valor da área delimitada pelas curvas é dado por

$$\int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

254.2 Dado que as curvas $y = -\sqrt{9x} = -3\sqrt{x}$ e $y = \sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$ são simétricas em relação à reta de equação $y = 0$ e interseitam-se no ponto de coordenadas $(0, 0)$, o valor da área delimitada pelas curvas $y = -3\sqrt{x}$, $y = 3\sqrt{x}$ e $x = 2$ é dado por

$$2 \int_0^2 3\sqrt{x} \, dx = 6 \int_0^2 x^{\frac{1}{2}} \, dx = 6 \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = 2^{\frac{7}{2}} = 8\sqrt{2}.$$

- 254.3** $x^2 + 2x - 3 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$, pelo que as curvas interseam-se nos pontos de coordenadas $(-3, 0)$ e $(2, 5)$.

Como $x^2 + 2x - 3 \geq x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \vee x \geq 2$, o valor da área delimitada

pelas curvas é dado por
$$\int_{-3}^2 (x + 3 - x^2 - 2x + 3) dx = \int_{-3}^2 (-x^2 - x + 6) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{-3}^2 = \frac{125}{6}.$$

- 254.4** $2x - x^2 = -x \Leftrightarrow x(3 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$, pelo que as curvas interseam-se nos pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(3, -3)$.

Como $2x - x^2 \geq -x \Leftrightarrow x(x - 3) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$, o valor da área delimitada pelas curvas é dado por

$$\int_0^3 (2x - x^2 + x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 = \frac{9}{2}.$$

- 254.5** A curva $y = x^2 - 1$ interseam-se o eixo Ox nos pontos de coordenadas $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ pois $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, e interseam-se a reta de equação $x = 2$ no ponto de coordenadas $(2, 3)$.

Assim, o valor da área delimitada pelas curvas definidas por $y = x^2 - 1$ e $x = 2$ e pelo eixo Ox é dado por

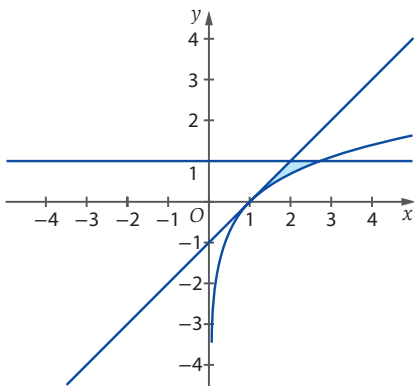
$$\int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^2 = \frac{4}{3}.$$

- 254.6** $x^2 - 3x - 4 = 4 + 3x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 4$, pelo que as curvas interseam-se nos pontos de coordenadas $(-1, 0)$ e $(4, 0)$.

Dado que as curvas $y = x^2 - 3x - 4$ e $y = 4 + 3x - x^2$ são simétricas em relação à reta de equação $y = 0$ e interseam-se nos zeros de ambas, o valor da área delimitada pelas curvas é dado por

$$2 \int_{-1}^4 (4 + 3x - x^2) dx = 2 \left[4x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^4 = \frac{125}{3}.$$

- 255.** É pedido o valor da área da região sombreada do gráfico que se segue:



As funções $f(x) = x - 1$ e $g(x) = \ln x$ interseam-se no ponto de abscissa 1 pois $f(1) = g(1) = 0$.

As funções $f(x) = x - 1$ e $h(x) = 1$ interseam-se no ponto de abscissa 2 pois $f(2) = h(2) = 1$.

As funções $g(x) = \ln x$ e $h(x) = 1$ interseam-se no ponto de abscissa e pois $g(e) = h(e) = 1$.

Assim, o valor da área delimitada pelas curvas é dado por

$$\int_1^2 (x - 1 - \ln x) dx + \int_2^e (1 - \ln x) dx \quad \begin{array}{l} \text{Primitivação por partes:} \\ f(x)=x \\ g(x)=\ln x \\ \int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1) \end{array}$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - x - x(\ln x - 1) \right]_1^2 + \left[x - x(\ln x - 1) \right]_2^e = e - \frac{5}{2}$$

- 256.** Uma vez que a função $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ é positiva em $\mathbb{R}$, logo em $[-1, 1]$, o valor da área é dado por

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = [\arctan x]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

- 257.** Sendo $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$, tem-se:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \vee \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\vee x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

equação impossível

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, no intervalo considerado, os gráficos de f e g

interseam-se no ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ e a

área, tal como sugere a figura, é dada por

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx =$$

$$= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + 1 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

- 258.** Os segmentos de reta que delimitam a área pedida são

$$\text{dados pelas condições } y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}, -2 \leq x \leq 2,$$

$$y = -x + 5, 2 \leq x \leq 6, y = \frac{1}{5}x - \frac{11}{5}, 1 \leq x \leq 6$$

$$\text{e } y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}, -2 \leq x \leq 1.$$

Assim, o valor da área é dado por:

$$\int_{-2}^1 \left(\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} - \frac{1}{5}x + \frac{11}{5} \right) dx +$$

$$+ \int_2^6 \left(-x + 5 - \frac{1}{5}x + \frac{11}{5} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{17}{24}x^2 + \frac{17}{6}x \right]_{-2}^1 + \left[\frac{11}{40}x^2 + \frac{37}{10}x \right]_1^2 + \left[-\frac{3}{5}x^2 + \frac{36}{5}x \right]_2^6 = \frac{41}{2}$$

- 259.** De acordo com os dados indicados na figura, o valor da área é dado por:

$$\left| \int_{\frac{1}{2}}^1 \log_2 x \, dx \right| + \int_1^4 \log_2 x \, dx$$

$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$
 Primitivação por partes:
 $f(x) = x$
 $g(x) = \ln x$

$$\frac{1}{\ln 2} \int \ln x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \left(x \ln x - \int 1 \, dx \right) = \frac{1}{\ln 2} (x \ln x - x) = \frac{x(\ln x - 1)}{\ln 2}$$

$$= \left[\frac{x(\ln x - 1)}{\ln 2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \left[\frac{x(\ln x - 1)}{\ln 2} \right]_1^4$$

$$= \frac{1 - \ln 2}{2 \ln 2} + \frac{4 \ln 4 - 3}{\ln 2} = \frac{1 - \ln 2}{2 \ln 2} + \frac{8 \ln 2 - 3}{\ln 2} = \frac{1 - \ln 2 + 8 \ln 2 - 3}{2 \ln 2} = \frac{7 \ln 2 - 2}{2 \ln 2}$$

$$= \frac{15 \ln 2 - 5}{2 \ln 2}$$

260.1

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{(A + B)x + 2A - 2B}{x^2 - 4} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\int_3^5 \frac{1}{x^2 - 4} \, dx = \frac{1}{4} \left[\int_3^5 \frac{1}{x - 2} \, dx - \int_3^5 \frac{1}{x + 2} \, dx \right]$$

$\begin{matrix} x-2 > 0 & \text{se} & x \in [3, 5] \\ x+2 > 0 & \text{se} & x \in [3, 5] \end{matrix}$

$$= \frac{1}{4} \left([\ln(x - 2)]_3^5 - [\ln(x + 2)]_3^5 \right)$$

$$= \frac{1}{4} \underbrace{(\ln 3 - \ln 7 + \ln 5)}_{\ln\left(\frac{15}{7}\right)} = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{15}{7}\right)$$

- 261.** Dado que $a(t) = ct$, $c \in \mathbb{R}$ (em m/s^2) e $a(t) = v'(t)$, então $v(t)$ é uma primitiva de $a(t)$, ou seja,
- $$v(t) = \int \underbrace{a(t)}_{ct} dt = \frac{c}{2}t^2 + d, \quad d \in \mathbb{R} \text{ (em m/s)}.$$
- Como $v(0) = -16 \Leftrightarrow d = -16$, pelo que a função velocidade, a cada instante, é dada por $v(t) = \frac{c}{2}t^2 - 16$, $c \in \mathbb{R}$ (em m/s).
- $v(t) = p'(t)$, pelo que $p(t)$ é uma primitiva de $v(t)$, ou seja, $p(t) = \int \underbrace{v(t)}_{\frac{c}{2}t^2 - 16} dt = \frac{c}{6}t^3 - 16t + k$, $k \in \mathbb{R}$ (em metros).
- Como $v(4) = 0 \Leftrightarrow 8c - 16 = 0 \Leftrightarrow c = 2$, pelo que as funções aceleração e velocidade, a cada instante, são dadas, respetivamente, por $a(t) = 2t$ (em m/s^2) e $v(t) = t^2 - 16$ (em m/s).
- Como $p(4) = 0 \Leftrightarrow \frac{64}{3} - 64 + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{128}{3}$, pelo que a função posição, a cada instante, é dada por
- $$p(t) = \frac{1}{3}t^3 - 16t + \frac{128}{3} \text{ (em metros)}.$$

NÚMEROS COMPLEXOS

PÁG. 81

262.1 $z_1 + z_2 + z_3 = (3 + 3 + 0) + (-4 - 5 - 7)i = 6 - 16i$, donde a hipótese correta é *C*.

262.2 $z_1 \times z_3 = -21i + 28 \underbrace{i^2}_{-1} = -28 - 21i$, donde a hipótese correta é *D*.

262.3 $\frac{z_2}{z_1} = \frac{3-5i}{3-4i} = \frac{(3-5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9+12i-15i-20i^2}{3^2-(4i)^2} = \frac{29-3i}{9+16} = \frac{29}{25} - \frac{3}{25}i$, donde a hipótese correta é *B*.

263. $|3-4i| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$ e o conjugado é o número complexo $3+4i$, donde a hipótese correta é *A*.

264. $\bar{z} \times z = |z|^2 = 1^2 + (-3)^2 = 10$, donde a hipótese correta é *B*.

265. $\bar{z} \times (-z) = -(\bar{z} \times z) = -|z|^2 = -[(-4)^2 + 5^2] = -41$, donde a hipótese correta é *D*.

266. $\bar{z} \times z = |z|^2 \in \mathbb{R}_0^+$, pelo que o afixo de $\bar{z} \times z$ pertence ao semieixo positivo *Ox*, donde a hipótese correta é *A*.

267. $z = \frac{1}{1-i} + \frac{2+3i}{1+i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} + \frac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+i+2-2i+3i+3}{2} = 3+i$, donde a hipótese correta é *D*.

268. $z = \frac{4}{1-i} = \frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{4+4i}{2} = 2+2i$, pelo que o conjugado de z é $2-2i$, donde a hipótese correta é *B*.

269.1 $\bar{z} = \frac{1}{2}e^{-i\pi}$, donde a hipótese correta é *B*.

269.2 $-z = \frac{1}{2}e^{i(\pi+\pi)} = \frac{1}{2}e^{i2\pi}$, donde a hipótese correta é *A*.

270.1 $zw = 6e^{\frac{i\pi}{4}} \times 2e^{\frac{i\pi}{5}} = 12e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5})} = 12e^{\frac{9\pi}{20}}$, donde a hipótese correta é *D*.

270.2 $\frac{z}{w} = \frac{6e^{\frac{i\pi}{4}}}{2e^{\frac{i\pi}{5}}} = 3e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{5})} = 3e^{\frac{i\pi}{20}}$, donde a hipótese correta é *A*.

271. O afixo de z pertence ao 3.º quadrante e sendo $\theta = \text{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$ tem-se que $\tan \theta = \frac{-1}{-1} = 1$, pelo que $\theta = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$, donde a hipótese correta é *C*.

272. $\text{Arg}(-z) = \frac{\pi}{5} + \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ pelo que, para $k=0$, um argumento é $\frac{6\pi}{5}$, donde a hipótese correta é *D*.

273. $\text{Arg}(\bar{z}) = -\frac{9\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ pelo que, para $k=1$, um argumento é $\frac{\pi}{5}$, donde a hipótese correta é *A*.

274. $z^2 - 4z + 13 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{36}i^2}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow z = 2 - 3i \vee z = 2 + 3i$, donde a hipótese correta é *C*.

275. Se $\sqrt{z} = 1 - 2i \Rightarrow z = (1 - 2i)^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow z = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$

A outra raiz quadrada de z é o número complexo $x + iy$ tal que $(x + iy)^2 = -3 - 4i$
Como $(1 + 2i)^2 = -3 + 4i \neq -3 - 4i$, $5^2 = 25 \neq -3 - 4i$, $(3 - 4i)^2 = -7 - 24i \neq -3 - 4i$ e $(-1 + 2i)^2 = -3 - 4i$, a hipótese correta é *D*.

276. $z^{12} = \left(e^{\frac{i\pi}{16}}\right)^{12} = e^{i\frac{12\pi}{16}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$, donde a hipótese correta é *A*.

277. O afixo de z pertence ao 1.º quadrante e sendo θ um argumento de z tem-se que $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, pelo que, por exemplo, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Por outro lado, $|z| = \sqrt{1+3} = 2$, pelo que $z = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$.

$z^6 = \left(2e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^6 = 2^6 \times \underbrace{e^{i2\pi}}_{\cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1} = 64$, donde a hipótese correta é *C*.

278. Seja $z = re^{i\theta}$, com $r \in \mathbb{R}^+$ e θ um argumento de z , uma solução de $z^2 \times \bar{z} = -8i$.

Tem-se que $z^2 = r^2 e^{i2\theta}$, $\bar{z} = r e^{-i\theta}$ e $-8i = 8e^{-\frac{i\pi}{2}}$.

$z^2 \times \bar{z} = -8i \Leftrightarrow r^2 e^{i2\theta} \times r e^{-i\theta} = 8e^{-\frac{i\pi}{2}} \Leftrightarrow$

$$r^3 e^{i\theta} = 8e^{-\frac{i\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ \theta = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \theta = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Tomando, por exemplo, $k=0$, conclui-se que

$z = 2 \underbrace{e^{-\frac{i\pi}{2}}}_{-i} = -2i$, donde a hipótese correta é *B*.

279. As equações de (A), (B) e (C) definem, respetivamente, uma circunferência, o semieixo positivo *Oy* e uma semirreta de origem *O*.

$\text{Im } z = \frac{3\pi}{4}$ define a reta $y = \frac{3\pi}{4}$, donde a hipótese correta é *D*.

280. Seja $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\underbrace{z + \bar{z}}_{2\text{Re}z} + \underbrace{|z|^2}_{|z|^2} = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$, condição que define a circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-1, 0)$ e raio 1, donde a hipótese correta é *D*.

- 281.** A condição $\frac{z \times \bar{z}}{|z|^2} \geq 2 \frac{|\sqrt{3} + i|}{\sqrt{3+1}=2} \Leftrightarrow |z|^2 \geq 4$ define a

circunferência de centro no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e raio 2 e o seu exterior.

A condição $0 \leq \underbrace{\text{Arg}(z^3)}_{\substack{\text{Arg}(z^3) = 3\text{Arg}(z) \text{ se } 3\text{Arg}(z) \in]-\pi, \pi] \\ \text{Arg}(z) \in]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}])}} \leq \pi \Leftrightarrow \text{Se } \text{Arg}(z) \in]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$

$\Leftrightarrow 0 \leq 3\text{Arg}(z) \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{3}$ define o ângulo de centro no ponto de coordenadas $(0, 0)$, cujos lados são, respectivamente, o semieixo positivo Ox e a semirreta $y = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)x = \sqrt{3}x$, $x > 0$.

A conjunção das duas condições anteriores é a região correspondente ao ângulo e não interior à circunferência, donde a hipótese correta é C .

- 282.** A condição $|z - 2 - 3i| \leq 1 \Leftrightarrow |z - (2 + 3i)| \leq 1$ define o círculo de centro no ponto de coordenadas $(2, 3)$ e raio 1, donde a hipótese correta é B .

- 283.** Seja (u_n) a sucessão cujo termo geral é $u_n = i^n$.
 (u_n) é uma progressão geométrica de 1.º termo igual a i e razão $r = i$ $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{i^{n+1}}{i^n} = i\right)$.

Como a soma dos k primeiros termos de (u_n) é dada pela expressão $u_1 \times \frac{1 - r^k}{1 - r}$, então

$$\sum_{n=1}^{502} i^n = \frac{i \times \frac{1 - i^{502}}{1 - i}}{1 - i} = \frac{1 - i^{502}}{1 - i^2} = \frac{1 - (-1)^{251}}{1 - (-1)} = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{2}{2} = 1 - i,$$

donde a hipótese correta é D .

- 284.** $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} = (i^2)^{2n} + (i^2)^{2n} \times i + (i^2)^{2n} \times i^2 = (-1)^{2n} + (-1)^{2n} \times i + (-1)^{2n} \times (-1) = 1 + i - 1 = i$ $(-1)^{2n} = 1$ pois $2n$ é par

O afixo do número complexo i é o ponto de coordenadas $(0, 1)$, donde a hipótese correta é B .

- 285.1** $|-3| = 3$, o conjugado de -3 é ele próprio, ou seja, -3 , e o simétrico de -3 é o número complexo 3.
285.2 $|-2 + 5i| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$, o conjugado de $-2 + 5i$ é o número complexo $-2 - 5i$ e o simétrico de $-2 + 5i$ é o número complexo $2 - 5i$.

286.1 $(-2 + 4i) + (5 - 6i) = -2 + 5 + 4i - 6i = 3 - 2i$

286.2 $(-2 + i) - (4 - 3i) = -2 - 4 + i + 3i = -6 + 4i$

286.3 $(\sqrt{3} - i) + (2i - 2\sqrt{3}) - (-1 + 4i) = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 1 - i + 2i - 4i = -\sqrt{3} + 1 - 3i$

286.4 $(3 - 2i) - (6 - i) + i + 4 = 3 - 6 + 4 - 2i + i + i = 1$

286.5 $(4i - 5) - (1 - 2i) - i^{-3} = -5 - 1 + 4i + 2i - \frac{1}{i^3} = -6 + 6i + \frac{1}{i} = -6 + 6i - \frac{i}{i^2} = -6 + 6i - \frac{i}{-1} = -6 + 6i + i = -6 + 7i$

286.6 $(3 - i) \times (2 - 5i) = 6 - 15i - 2i + 5i^2 = 6 - 17i - 5 = 1 - 17i$

286.7 $(1 + 3i) \times (2 - 4i) = 2 - 4i + 6i - 12i^2 = 14 + 2i$

286.9 $\frac{2 + 2i}{2 - 4i} = \frac{1 + i}{1 - 2i} = \frac{(1 + i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{1 + 2i + i + 2i^2}{1 - 4i^2} = \frac{-1 + 3i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

286.10 $\frac{\frac{1}{2} + i}{1 - \frac{1}{3}i} = \frac{3}{2} \times \frac{1 + 2i}{3 - i} = \frac{3}{2} \times \frac{(1 + 2i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{3}{2} \times \frac{3 + i + 6i + 2i^2}{9 - i^2} = \frac{3}{2} \times \frac{2 + 7i}{10} = \frac{3}{20} + \frac{21}{20}i$

286.11 $\frac{8 + 4i}{1 + 2i} = \frac{(8 + 4i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{8 - 16i + 4i - 8i^2}{1 - 4i^2} = \frac{16 - 12i}{5} = \frac{16}{5} - \frac{12}{5}i$

286.12 $\frac{(4 + 3i)(1 - 2i)}{2 - i} = \frac{4 - 8i + 3i - 6i^2}{2 - i} = \frac{10 - 5i}{2 - i} = \frac{(10 - 5i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{20 + 10i - 10i - 5i^2}{4 - i^2} = \frac{25}{5} = 5$

286.13 $\frac{4 - 2i}{(2 - i)(i - 3)} = \frac{4 - 2i}{2i - 6 - i^2 + 3i} = \frac{4 - 2i}{-5 + 5i} = \frac{(4 - 2i)(-5 - 5i)}{(-5 + 5i)(-5 - 5i)} = \frac{-20 - 20i + 10i + 10i^2}{25 - 25i^2} = \frac{-30 - 10i}{50} = -\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$

286.14 $\frac{2 - 3i}{2i} - \frac{1 + i}{1 + 2i} = \frac{(2 - 3i)(-2i)}{2i(-2i)} - \frac{(1 + i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{-4i + 6i^2}{-4i^2} - \frac{1 - 2i + i - 2i^2}{1 - 4i^2} = \frac{-6 - 4i}{4} - \frac{3 - i}{5} = \frac{-30 - 20i - 12 + 4i}{20} = \frac{-42 - 16i}{20} = -\frac{21}{10} - \frac{4}{5}i$

286.15 $i^{2003} = (i^2)^{1001} \times i = (-1)^{1001} \times i = -i$

286.16 $\underbrace{i^{27}}_{(i^2)^{13} \times i = (-1)^{13} \times i = -i} + \underbrace{i^{999}}_{(i^2)^{499} \times i = (-1)^{499} \times i = -i} - \underbrace{(2i)^5}_{2^5 \times i^5 = 32 \times (i^2)^2 \times i = 32i} = -i - i - 32i = -34i$

286.17 $\frac{i^{85}}{2i^{136} - i^{21}} = \frac{i^{85}}{i^{85} \times (i^2)^{42} \times i - (-1)^{10} \times i} = \frac{i}{2 - i} = \frac{i(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2i + i^2}{4 - i^2} = \frac{2i - 1}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

287.1 $(5 + xi) - (y + 3i) = 2 - 5i \Leftrightarrow 5 - y + (x - 3)i = 2 - 5i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - y = 2 \\ x - 3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

287.2 $(5 - yi)(x - i) = 4 - 17i \Leftrightarrow 5x - 5i - xyi + yi^2 =$

$$= 4 - 17i \xrightarrow{i^2=-1} 5x - y + (-5 - xy)i = 4 - 17i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y = 4 \\ -5 - xy = -17 \end{cases} \xrightarrow{-5-xy=-17 \Leftrightarrow 5+xy=17}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x - 4 \\ 5x^2 - 4x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -10 \\ x = -\frac{6}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} y = 6 \\ x = 2 \end{cases}$$

288.1 $z_1 - 3z_2 = 2 - 3i - 3(-5i) = 2 - 3i + 15i = 2 + 12i$

288.2 $\bar{z}_1 - iz_4 = 2 + 3i - i(-2i - 1) = 2 + 3i + 2i^2 + i = 4i$

288.3 $-2z_3 + iz_1 - z_2 \times \bar{z}_4 =$
 $= -2(-3 + i) + i(2 - 3i) - (-5i) \times (2i - 1)$
 $= 6 - 2i + 2i - 3i^2 + 10i^2 - 5i = -1 - 5i$

289.1 $z + \bar{z} = 2\text{Re}z = 2 \times 10 = 20$

289.2 $z - \bar{z} = 2\text{Im}z = 2 \times 8 = 16$

289.3 $z \times \bar{z} = |z|^2 = 2^2 + 4^2 = 20$

290. $\frac{z}{1+i} - \frac{z-1}{i} = 2i \Leftrightarrow \frac{iz - z - iz + 1 + i}{i(1+i)} = 2i \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -z + 1 + i = \frac{i(1+i) \times 2i}{-2-2i} \Leftrightarrow z = 1 + i + 2 + 2i = 3 + 3i$

Assim, $|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

291. $\frac{z \times \bar{z}}{|z|^2} = 24 \Leftrightarrow |z|^2 = 24 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

292. $\begin{cases} z + \bar{z} = 2 \\ |z|^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\text{Re}z = 2 \\ |z|^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}z = 1 \\ |z| = \sqrt{5} \end{cases}$

Tomando $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$\text{Re}z = x = 1 \text{ e } \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5} \xrightarrow{x=1} 1 + y^2 = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -2 \vee y = 2, \text{ donde se conclui que } z = 1 - 2i \vee z = 1 + 2i.$$

293. $(1 - 2i)^2 - \left(\frac{1}{i}\right)^{25} = 1 - 4i + 4i^2 - \frac{1}{i^{25}} =$
 $= -3 - 4i - \frac{1}{i} = -3 - 4i + \frac{i}{i(-i)} = -3 - 3i,$
 pelo que o seu conjugado é $-3 + 3i$.

294. $z + z' = 2 + a + (b - 4)i$

$$\frac{z}{z'} = \frac{2 - 4i}{a + bi} = \frac{(2 - 4i)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{2a - 4b - (2b + 4a)i}{a^2 + b^2} =$$

$$= \frac{2a - 4b}{a^2 + b^2} + \frac{2b + 4a}{a^2 + b^2}i$$

$2 + a + (b - 4)i$ é um real se e só se $b - 4 = 0 \Leftrightarrow b = 4$
 e, para esse valor de b , $\frac{2 - 4i}{a + bi}$ é um imaginário puro se
 e só se $\frac{2a - 4 \times 4}{a^2 + 4^2} = 0 \Leftrightarrow 2a - 16 = 0 \Leftrightarrow a = 8$.

295.1 $|z| = 1$ e $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$, pelo que $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

295.2 $|z| = 2$ e $\text{Arg}(z) = \pi$, pelo que $z = 2e^{i\pi}$.

295.3 $|z| = 2$ e um argumento de z é $\frac{3\pi}{2}$, pelo que, por exemplo $z = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

295.4 $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Seja θ um argumento de z .

Dado que o afixo de z pertence ao 3.º quadrante e

$$\tan \theta = \frac{-1}{-1} = 1, \text{ então um valor possível para } \theta \text{ é}$$

$$\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}, \text{ pelo que, por exemplo } z = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

295.5 $|z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$

Seja θ um argumento de z .

Dado que o afixo de z pertence ao 4.º quadrante e

$$\tan \theta = \frac{-3}{3} = -1, \text{ então um valor possível para } \theta \text{ é } -\frac{\pi}{4},$$

$$\text{pelo que, por exemplo } z = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

295.6 $|z| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

Seja θ um argumento de z .

Dado que o afixo de z pertence ao 4.º quadrante e

$$\tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{3}, \text{ então um valor possível para } \theta \text{ é}$$

$$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}, \text{ pelo que, por exemplo } z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{11\pi}{6}}.$$

296.1 $z = 5e^{i\pi} = 5\left(\underbrace{\cos \pi}_{-1} + i \underbrace{\sin \pi}_0\right) = -5$

296.2 $z = e^{i0} = \frac{\cos 0}{1} + i \frac{\sin 0}{0} = 1$

296.3 $z = e^{i\frac{7\pi}{6}} = \underbrace{\cos \frac{7\pi}{6}}_{-\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}} + i \underbrace{\sin \frac{7\pi}{6}}_{-\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

296.4 $z = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3\left(\underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1\right) = 3i$

296.5 $z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\underbrace{\cos \frac{7\pi}{4}}_{\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}} + i \underbrace{\sin \frac{7\pi}{4}}_{-\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = 1 - i$

297. $|z| = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$

Seja θ um argumento de z .

Dado que o afixo de z pertence ao 4.º quadrante e

$$\tan \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} = -1, \text{ então um valor possível para } \theta \text{ é } -\frac{\pi}{4},$$

$$\text{pelo que, por exemplo } z = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

$$|w| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{12}{9}} = \frac{4}{3}$$

Seja φ um argumento de w .

Dado que o afixo de w pertence ao 2.º quadrante e

$$\tan \varphi = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{-\frac{2}{3}} = -\sqrt{3}, \text{ então um valor possível para } \varphi \text{ é}$$

$$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, \text{ pelo que, por exemplo } w = \frac{4}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

297.1 $z \times w = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \times \frac{4}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{8}{3}e^{i(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = \frac{8}{3}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

297.2 $z^2 \times \bar{w} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2 \times \frac{4}{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 4e^{-i\frac{\pi}{2}} \times \frac{4}{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} =$
 $= \frac{16}{3}e^{i(-\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3})} = \frac{16}{3}e^{-i\frac{7\pi}{6}} = \frac{16}{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

297.3 $\frac{z^4}{w^3} = \frac{\left(2e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4}{\left(\frac{4}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3} = \frac{16e^{-i\pi}}{\frac{64}{27}e^{i2\pi}} = \frac{27}{64} \times 16e^{-i\pi} = \frac{27}{4}e^{-i\pi} = \frac{27}{4}e^{i\pi}$

299.1 $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow z^2 = 2e^{i3\pi}$
 $z^2 = (-1+i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i = 2 \underbrace{(-i)}_{e^{i\frac{3\pi}{2}}} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

299.2 $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Seja θ um argumento de z .

Dado que o afixo de z pertence ao 2.º quadrante e

$\tan \theta = \frac{1}{-1} = -1$, então um valor possível para θ é

$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, pelo que, por exemplo $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

$w = \underbrace{i}_{e^{i\frac{\pi}{2}}} z = e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

300. Seja $w = re^{i\theta}$, com $r \in \mathbb{R}^+$ e θ um argumento de w , uma solução de $|w| \times w^2 + i = 0$.

$$\underbrace{|w|}_r \times \underbrace{w^2}_{r^2 e^{i2\theta}} + i = 0 \Leftrightarrow r^3 e^{i2\theta} = \underbrace{-i}_{e^{-i\frac{\pi}{2}}} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} r^3 = 1 \\ 2\theta = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Conclui-se assim que as soluções da equação na forma

trigonométrica são $w_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{7\pi}{4}}$ e $w_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ e na

forma algébrica são $w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ e

$$w_2 = \underbrace{-\frac{\sqrt{2}}{2}}_{e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})} + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}i}_{e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{3\pi}{4}) + i \sin(\frac{3\pi}{4})}.$$

301. $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Seja θ um argumento de z_1 .

Dado que o afixo de z_1 pertence ao 1.º quadrante e

$\tan \theta = \frac{1}{1} = 1$, então um valor possível para θ é $\frac{\pi}{4}$, pelo que, por exemplo $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$|z_2| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

Seja φ um argumento de z_2 .

Dado que o afixo de z_2 pertence ao 1.º quadrante e

$\tan \varphi = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, então um valor possível para

φ é $\frac{\pi}{6}$, pelo que, por exemplo $z_2 = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$$\frac{z_2}{z_1^4} = \frac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^4} = \frac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{4e^{i\pi}} = \frac{\sqrt{3}}{4}e^{i(\frac{\pi}{6} - \pi)} = \frac{\sqrt{3}}{4}e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{4}e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

302.1 $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Seja θ um argumento de z .

Dado que o afixo de z pertence ao 2.º quadrante e

$\tan \theta = \frac{1}{-1} = -1$, então um valor possível para θ é

$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, pelo que, por exemplo $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

302.2 $\left(\frac{-1+i}{z}\right)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^4 = 4 \underbrace{e^{i3\pi}}_{-1} = -4$

302.3 $z' = z \times e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\pi} = \underbrace{-2}_{-1}$

303.1 $z = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{e^{i0}} = e^{i(0+k\frac{2\pi}{3})} = e^{ik\frac{2\pi}{3}}, k \in \{0, 1, 2\}$

Assim, as soluções da equação são: $z_0 = e^{i0} = 1$;

$$z_1 = \underbrace{e^{i\frac{2\pi}{3}}}_{\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$z_2 = \underbrace{e^{i\frac{4\pi}{3}}}_{\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

303.2 $z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{i0}} = e^{i(0+k\frac{2\pi}{4})} = e^{ik\frac{\pi}{2}}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$

Assim, as soluções da equação são:

$z_0 = e^{i0} = 1$; $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $z_2 = e^{i\pi} = -1$; $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

303.3 $z = \sqrt{-2i} = \sqrt[2]{2e^{i\frac{3\pi}{2}}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4} + k\frac{2\pi}{2})} =$

$= \sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4} + k\pi)}, k \in \{0, 1\}$

Assim, as soluções da equação são:

$$z_0 = \underbrace{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}_{\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}(-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})} = -1 + i;$$

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4} + \pi)} = \underbrace{\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}}_{\sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})} = 1 - i$$

304. $\sqrt{z^4} = \sqrt{\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4} = \sqrt{e^{i\pi}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}, k \in \{0, 1\}$

Assim, as raízes quadradas de z^4 são $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
e $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.

305.1 $z = \frac{2}{1-i} - 2i^{97} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} - 2\left(\frac{i^2}{-1}\right)^{48} \times i =$
 $= \frac{2+2i}{1-i^2} - 2i = \frac{2+2i}{2} - 2i = 1+i - 2i = 1-i$

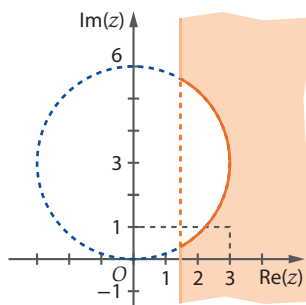
$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Seja θ um argumento de z .

Dado que o afixo de z pertence ao 4.º quadrante e $\tan \theta = \frac{-1}{1} = -1$, então um valor possível para θ é $-\frac{\pi}{4}$, pelo que, por exemplo $z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

305.2 Se $z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ é uma das raízes cúbicas de w , as outras duas raízes cúbicas de w obtêm-se do afixo de z por, respetivamente, uma rotação de amplitude $\frac{2\pi}{3}$ e uma rotação de amplitude $2 \times \frac{2\pi}{3}$, pelo que são

$z' = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ e $z'' = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + 2 \times \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$.



306. $\sqrt[8]{1} = \sqrt[8]{e^{i0}} = e^{i\left(0 + k\frac{2\pi}{8}\right)} = e^{ik\frac{\pi}{4}}, k \in \{0, \dots, 7\}$

Assim, as raízes índice 8 de 1 são: $z_0 = e^{i0} = 1$;

$z_1 = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$;

$z_3 = \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_4 = e^{i\pi} = -1$;

$z_5 = \frac{e^{i\frac{5\pi}{4}}}{\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_6 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$;

$z_7 = \frac{e^{i\frac{7\pi}{4}}}{\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\sum_{k=0}^7 z_k = \sum_{k=0}^7 e^{ik\frac{\pi}{4}} = 1 + \sum_{k=1}^7 e^{ik\frac{\pi}{4}} =$
 $u_k = e^{ik\frac{\pi}{4}}$ é uma progressão geométrica
 $u_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$; $r = e^{i\frac{\pi}{4}}$
 $\sum_{k=1}^7 u_k = u_1 \times \frac{1-r^7}{1-r}$

$= 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \times \frac{1 - \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^7}{1 - e^{i\frac{\pi}{4}}} = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \times \frac{1 - e^{i\frac{7\pi}{4}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{4}}} =$
 $= 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \times \frac{1 - e^{i\frac{7\pi}{4}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{4}}} = 1 + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{8\pi}{4}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{4}}} =$
 $= 1 + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i2\pi}}{1 - e^{i\frac{\pi}{4}}} = 1 + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} - 1}{1 - e^{i\frac{\pi}{4}}} = 1 - \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{4}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{4}}} = 1 - 1 = 0$
 $z_0 \times \dots \times z_7 = e^{\sum_{k=0}^7 ik\frac{\pi}{4}} = e^{i \sum_{k=0}^7 k\frac{\pi}{4}} =$
 $u_k = ik\frac{\pi}{4}$ é uma progressão aritmética
 $u_1 = i\frac{\pi}{4}$
 $r = i\frac{\pi}{4}$
 $\sum_{k=1}^7 u_k = \frac{u_1 + u_7}{2} \times 7$
 $= e^{\frac{i\frac{\pi}{4} + i\frac{7\pi}{4}}{2} \times 7} = e^{i7\pi} = -1$

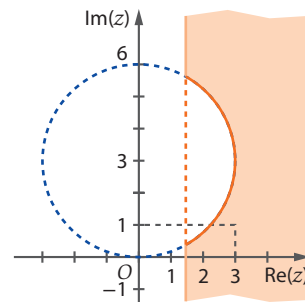
307. $z^3 - 8i = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8e^{i\frac{\pi}{2}}} = \sqrt[3]{8}e^{i\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right)} =$
 $= 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}$

Assim, as soluções da equação são $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$,

$z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ e $z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

308.1 A condição $|z - 3i| \geq 3$ representa a circunferência de centro no ponto de coordenadas $(0, 3)$ e raio 3 e o exterior dessa circunferência.

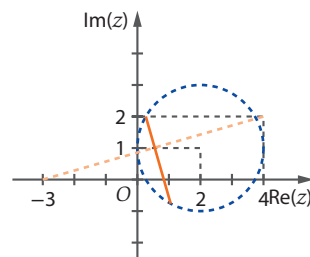
A condição $|z - 3 - i| \leq |z - i| \Leftrightarrow |z - (3 + i)| \leq |z - i|$ representa o semiplano limitado obtido a partir da mediatriz do segmento de reta de extremos nos pontos de coordenadas $(3, 1)$ e $(0, 1)$ e que contém o ponto de coordenadas $(3, 1)$.



308.2 A condição $|z - 2 - i| \leq 2 \Leftrightarrow |z - (2 + i)| \leq 2$ representa o círculo de centro no ponto de coordenadas $(2, 1)$ e raio 2.

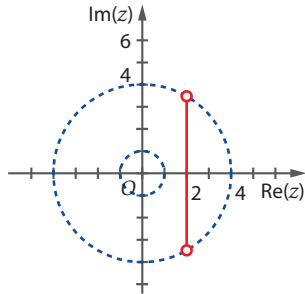
A condição $|z + 3| = |z - 4 - 2i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z - (-3)| = |z - (4 + 2i)|$ representa a mediatriz do segmento de reta de extremos nos pontos de coordenadas $(-3, 0)$ e $(4, 2)$.



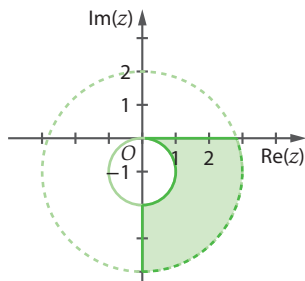
308.3 A condição $1 \leq |z| < 4$ representa a coroa circular definida pelas circunferências de centros no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e raios, respectivamente, 1 e 4, excluindo a fronteira correspondente à circunferência de raio 4.

Sendo $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$, a condição $\operatorname{Re}(z - 1) = 2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 3$ representa a reta de equação $x = 3$.



308.4 A condição $1 \leq |z + i| < 3 \Leftrightarrow 1 \leq |z - (-i)| < 3$ representa a coroa circular definida pelas circunferências de centros no ponto de coordenadas $(0, -1)$ e raios, respectivamente, 1 e 3, excluindo a fronteira correspondente à circunferência de raio 3.

A condição $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq 0$ representa o 4.º quadrante e a sua fronteira.

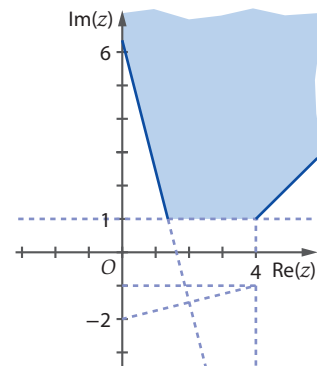


308.5 A condição $|z + 2i| \geq |z - 4 + i| \Leftrightarrow |z - (-2i)| \geq |z - (4 - i)|$ representa o semiplano fechado obtido a partir da mediatriz do segmento de reta de extremos nos pontos de coordenadas $(0, -2)$ e $(4, -1)$ e que contém o ponto de coordenadas $(4, -1)$.

Sendo $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$, a condição $\operatorname{Im}(z - 2) > 1 \Leftrightarrow y > 1$ representa o semiplano aberto de definido por $y > 1$.

A condição

$\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z - 4 - i) \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}[z - (4 + i)] \leq \pi$ representa o ângulo orientado de centro no ponto de coordenadas $(4, 1)$, amplitude $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ e lado origem na semirreta definida por $x \geq 4 \wedge y = x - 3$.



308.6 Sendo $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$, a condição

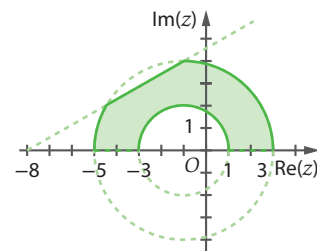
$$\underbrace{|3cis\pi|}_{|-3|=3} \leq \underbrace{z \times \bar{z}}_{|z|^2 = x^2 + y^2} + \underbrace{\frac{2\operatorname{Re} z}{2x}}_{15} \leq \underbrace{|-15i|}_{15} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq x^2 + y^2 + 2x \leq 15$$

$$\Leftrightarrow 3 + 1 \leq x^2 + 2x + 1 + y^2 \leq 15 + 1$$

$\Leftrightarrow 4 \leq (x + 1)^2 + y^2 \leq 16$ representa a coroa circular definida pelas circunferências de centros no ponto de coordenadas $(-1, 0)$ e raios, respectivamente, 2 e 4.

A condição $0 < \operatorname{Arg}(z + 8) \leq \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 0 < \operatorname{Arg}[z - (-8)] \leq \frac{\pi}{6}$ representa o ângulo orientado de centro no ponto de coordenadas $(-8, 0)$, amplitude $\frac{\pi}{6}$ e lado origem na semirreta definida por $x \geq -8 \wedge y = 0$, excluindo este lado origem.



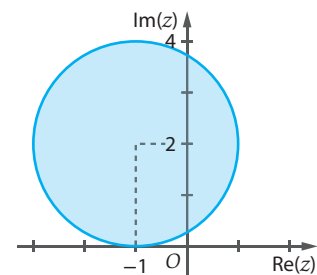
308.7 Sendo $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$, a condição $|z - 1| \geq 2|z - i| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \geq 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \Leftrightarrow \begin{matrix} (x - 1)^2 + y^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \\ x^2 + (y - 1)^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 \geq 4[x^2 + (y - 1)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{3}x + y^2 - \frac{8}{3}y + 1 \leq 0$$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 \leq \frac{8}{9}$ representa o círculo de centro no ponto de coordenadas $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ e raio $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



309.1 O lugar geométrico representado corresponde à coroa circular definida pelas circunferências de centros no ponto de coordenadas $(2, 4)$ e raios, respectivamente, 2 e 4, excluindo a fronteira correspondente à circunferência de raio 4, pelo que é definido por

$$2 \leq |z - (2 + 4i)| < 4 \Leftrightarrow 2 \leq |z - 2 - 4i| < 4.$$

309.2 O interior da circunferência da figura, cujo centro é o ponto de coordenadas $(2, 2\sqrt{3})$ e o raio é $2\sqrt{3}$, é definido por

$$|z - (2 + 2\sqrt{3}i)| < 2\sqrt{3} \Leftrightarrow |z - 2 - 2\sqrt{3}i| < 2\sqrt{3}.$$

O ângulo correspondente ao setor circular da figura, cujo vértice é o ponto de coordenadas $(2, 2\sqrt{3})$, tem amplitude $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ pois a reta OA tem declive

$$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ e é definido por}$$

$$\frac{\pi}{3} < \text{Arg}[z - (2 + 2\sqrt{3}i)] < \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < \text{Arg}(z - 2 - 2\sqrt{3}i) < \pi.$$

Assim, o setor circular da figura resulta da conjunção das condições relativas à circunferência e ao ângulo e é definido por $|z - 2 - 2\sqrt{3}i| < 2\sqrt{3} \wedge \frac{\pi}{3} < \text{Arg}(z - 2 - 2\sqrt{3}i) < \pi$.

310. O círculo da figura, cujo centro é o ponto de coordenadas $(3, 4)$ e o raio é $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, é definido por

$$|z - (3 + 4i)| \leq 5 \Leftrightarrow |z - 3 - 4i| \leq 5.$$

O semiplano fechado obtido a partir da reta r , que contém o ponto de coordenadas $(3, 4)$, é definido pela condição $|z| \geq |z - (3 + 4i)| \Leftrightarrow |z| \geq |z - 3 - 4i|$.

O semiplano fechado $x \leq 0$ é definido pela condição $\text{Re}z \leq 0$.

Assim, a região sombreada da figura (incluindo a fronteira) resulta da conjunção das condições relativas ao círculo e aos semiplanos e é definida por

$$|z - 3 - 4i| \leq 5 \wedge |z| \geq |z - 3 - 4i| \wedge \text{Re}z \leq 0.$$

311.1 $|z_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

Seja θ um argumento de z_1 .

Dado que o afixo de z_1 pertence ao 2.º quadrante e

$$\tan\theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ então um valor possível para } \theta$$

$$\text{é } \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, \text{ pelo que, por exemplo } z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Por outro lado, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, donde $\frac{z_1}{iz_2} = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} =$

$$= \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Como $\frac{\pi}{12} \in]-\pi, \pi]$ e $\sqrt{2} \geq 0$, então $\left|\frac{z_1}{iz_2}\right| = \sqrt{2}$

e $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{iz_2}\right) = \frac{\pi}{12}.$

311.2 $\text{Arg}\left(\frac{z}{z_2}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{matrix} -\pi < \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z_2) \leq \pi \\ \frac{\pi}{4} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -\frac{3\pi}{4} < \text{Arg}(z) \leq \frac{5\pi}{4} \\ \in]-\pi, \pi] \end{matrix}$

$$\Leftrightarrow \text{Arg}(z) - \underbrace{\text{Arg}(z_2)}_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$$

Assim, $z = re^{i\frac{3\pi}{4}}$, com $r \in \mathbb{R}^+$ e $z^n = r^n e^{i\frac{3\pi n}{4}}$.

z^n será um número real quando $\frac{3\pi n}{4} = k\pi \Leftrightarrow n = \frac{4k}{3}$, $k \in \mathbb{N} \wedge k$ é múltiplo de 3.

Logo, o menor expoente natural para o qual z^n é um número real é $n = 4$.

312.1 Tem-se que $|4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

Por outro lado, sendo θ o argumento positivo mínimo de $w = 3 - 4i$, então $\theta \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, pelo que, dada a simetria dos afijos de $3 - 4i$ e $4 - 3i$ em relação à bissetriz dos quadrantes pares, um argumento de $4 - 3i$ é $\frac{3\pi}{2} - \theta$.

Assim, $4 - 3i = 5e^{i(\frac{3\pi}{2} - \theta)} = 5e^{i(\frac{7\pi}{2} - \theta)}$.

312.2 $|w| = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ e $\tan\theta = -\frac{4}{3}$

$$\sqrt{w} = \sqrt{5}e^{i\theta} = \sqrt{5}e^{i(\frac{\theta}{2} + k\frac{2\pi}{2})} = \sqrt{5}e^{i(\frac{\theta}{2} + k\pi)}, k \in \{0, 1\}$$

Assim, as raízes quadradas de w são:

$$w_0 = \sqrt{5} \underbrace{e^{i\frac{\theta}{2}}}_{\cos(\frac{\theta}{2}) + i\sin(\frac{\theta}{2})} = \sqrt{5} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sqrt{5} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right);$$

$$w_1 = \sqrt{5} \underbrace{e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)}}_{\cos(\frac{\theta}{2} + \pi) + i\sin(\frac{\theta}{2} + \pi) = -\cos(\frac{\theta}{2}) - i\sin(\frac{\theta}{2})} =$$

$$= -\sqrt{5} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\sqrt{5} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Da expressão $\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ obtém-se

$$\cos^2\theta = \frac{1}{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 1} \Leftrightarrow \cos\theta = \pm\frac{3}{5} \text{ e dado que}$$

$$\theta \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[, \text{ conclui-se que } \cos\theta = \frac{3}{5}.$$

Finalmente, das expressões $\cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$

e $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, conclui-se que, dado que

$$\frac{\theta}{2} \in \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[, \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ e}$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Assim, $w_0 = \sqrt{5} \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + i\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = -2 + i$

e $w_1 = -\sqrt{5} \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) - i\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 2 - i.$

- 313.** Seja $z = re^{i\theta}$, com $r \in \mathbb{R}_0^+$ e θ um argumento de z , uma solução de $z^3 = \frac{\bar{z}}{w}$.

$$\begin{aligned} z^3 = \frac{\bar{z}}{w} &\Leftrightarrow (re^{i\theta})^3 = \frac{\overline{re^{i\theta}}}{2e^{i\frac{\pi}{5}}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = \frac{r}{2} e^{i(-\theta - \frac{\pi}{5})} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = \frac{r}{2} \\ 3\theta = -\theta - \frac{\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r(r^2 - \frac{1}{2}) = 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow_{r \geq 0} \begin{cases} r = 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \vee \begin{cases} r = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclui-se assim que as soluções da equação são: $z = 0$;

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{20}}; z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(-\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{9\pi}{20}};$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(-\frac{\pi}{20} + 2 \times \frac{\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{19\pi}{20}};$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(-\frac{\pi}{20} + 3 \times \frac{\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{29\pi}{20}}.$$

- 314.1** Tem-se que:

$$\begin{aligned} 2z(w - i^3) &\stackrel{\substack{\beta = i^3 \times i = -i \\ -1}}{=} 2 \times \frac{1}{2} e^{i\alpha} (2 - 3i + i) = e^{i\alpha} \underbrace{(2 - 2i)}_{\substack{|2 - 2i| = 2\sqrt{2} \\ \text{Arg}(2 - 2i) = -\frac{\pi}{4} \\ 2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}} = \\ &= e^{i\alpha} \times 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} e^{i(\alpha - \frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

$2z(w - i^3)$ será um imaginário puro quando

$$\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

- 314.2** Seja $w = re^{i\theta}$, com $r \in \mathbb{R}_0^+$ e θ um argumento de w .

Tem-se que $\bar{w} = re^{-i\theta}$.

Se w e $\bar{w}$ são raízes de índice n de um certo número complexo z então $w^n = \bar{w}^n = z$, isto é: $w^n = \bar{w}^n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = r^n e^{-in\theta} \Leftrightarrow r^n \left(e^{in\theta} - \underbrace{e^{-in\theta}}_{\substack{1 \\ e^{in\theta} \neq 0}} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^n = 0 \vee e^{i2n\theta} = \underbrace{1}_{e^{i0}} \Leftrightarrow r = 0 \vee 2n\theta = 0 \Leftrightarrow_{n > 0} r = 0 \vee \theta = 0$$

Conclui-se assim que $z = w^n = r^n \underbrace{e^{in\theta}}_1 = r^n \in \mathbb{R}_0^+$, ou

seja, esse número complexo z é um número real.

- 315.** Nas condições do enunciado tem-se que

$$|z_1| = \left| \frac{1}{z_1} \right| = |z_1 - 1|, \text{ com } z_1 \neq 0.$$

$$\text{Da equação } |z_1| = \left| \frac{1}{z_1} \right| \Leftrightarrow |z_1| = \frac{1}{|z_1|} \Leftrightarrow |z_1|^2 = 1$$

obtem-se que $|z_1| = 1$ pois $|z_1| > 0$.

Da equação $|z_1| = |z_1 - 1|$ obtém-se a equação

$$|z_1 - 1| = 1 \text{ pois } |z_1| = 1.$$

Assim, se $z_1 = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos, obtém-se as equações:

$$\underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{|z_1|} = 1 \Leftrightarrow_{x^2 + y^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}} x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{e } \underbrace{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}_{|z_1 - 1|} = 1 \Leftrightarrow_{(x-1)^2 + y^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}} (x-1)^2 + y^2 = 1$$

Conjugando as equações $x^2 + y^2 = 1$ e $(x-1)^2 + y^2 = 1$

obtem-se $(x-1)^2 = x^2 \Leftrightarrow -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, pelo

$$\text{que } \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Conclui-se assim que $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.