

**RESOLUÇÕES**

Cálculo Combinatório	2
Teste	15
Probabilidades	16
Teste	31
Teste Global Volume 1	32
Funções Reais de Variável Real	35
Teste	66
Trigonometria e Funções Trigonométricas	69
Teste	93
Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas	96
Teste	122
Teste Global Volume 2	124

VOLUME I

Cálculo Combinatório

DIAGNÓSTICO – PÁG.8

1. A implicação só é falsa quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso; a equivalência é verdadeira sempre que antecedente e consequente têm o mesmo valor lógico.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

2.1 $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é divisor de } 10\}$

$A = \{1, 2, 5, 10\}$

2.2 $A = \{n \in \mathbb{N} : n + 1 = 2\}$

$A = \{1\}$

2.3 $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\}$

$A = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

3.1 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

3.2 $A \cap B = \{1, 3, 5\}$

3.3 $C = [3, +\infty[$, pelo que $\bar{C} =]-\infty, 3[$.

3.4 $D = \{4\}$, pelo que $\bar{D} =]-\infty, 4[\cup]4, +\infty[$.

3.5 Como $D \subset C$, então $C \cup D = C = [3, +\infty[$.

3.6 Como $D \subset C$, então $C \cap D = D = \{4\}$.

3.7 $B \setminus A = \{x \in B : x \notin A\} = \{7, 9\}$

3.8 $C \setminus D = \{x \in C : x \notin D\} = [3, +\infty[\setminus \{4\}$

4.1 $\{x \in \mathbb{R} : x(x+3) = 0\} = \{-3, 0\}$,

pelo que o seu complementar em $\mathbb{R}$ é $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$.

4.2 $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5 = 0\} = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$,

pelo que o seu complementar em $\mathbb{R}$ é $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$.

5. $\{x \in \mathbb{N} : |x| < 5\} = \{x \in \mathbb{N} : x < 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$

e $\{x \in \mathbb{N} : 3x < 12\} = \{x \in \mathbb{N} : x < 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

6.1 $D = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, pelo que $\bar{D} = \emptyset = C$.

6.2 $C = \emptyset$, pelo que $\bar{C} =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R} = D$.

6.3 Como $C \subset A$, então $A \cap C = C = \emptyset$.

6.4 Como $A \subset D$, então $A \cap D = A =]-1, 6[$.

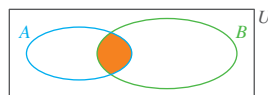
6.5 Como $C \subset B$, então $B \cup C = B =]-\infty, 0]$.

6.6 Como $B \subset D$, então $B \cup D = D = \mathbb{R}$.

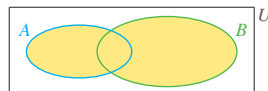
6.7 Como $\bar{B} =]0, +\infty[$, então $A \cup \bar{B} =]-1, +\infty[$.

6.8 Como $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ e $\bar{A} =]-\infty, -1] \cup [6, +\infty[$, então $\bar{A} \cap \bar{B} = [6, +\infty[$.

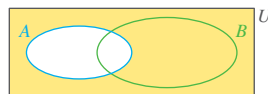
7.1



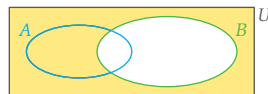
7.2



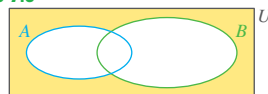
7.3



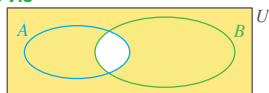
7.4



7.5 e 7.6



7.7 e 7.8

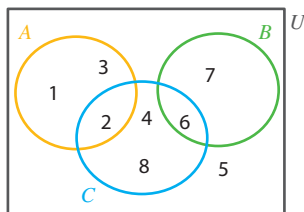


8. Por exemplo, $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ou $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.

1. PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES SOBRE CONJUNTOS

PÁG. 13

1.1



1.2

- $\{1, 3, 5, 7\}$
- $\{2\}$
- $\{\}$
- $\{1, 2, 3, 6, 7\}$
- $\{\}$
- $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} = \{4, 5, 8\}$

2.1 $B \cup (\bar{B} \cup A) = (B \cup \bar{B}) \cup A = U \cup A = U$

Propriedades associativa da união, união de complementares e elemento absorvente da união.

2.2 $A \cap (B \cap \bar{A}) = A \cap (\bar{A} \cap B) = (A \cap \bar{A}) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$

Propriedades comutativa e associativa da interseção, interseção de complementares e elemento absorvente da interseção.

2.3 $A \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) = (A \cup B) \cap U = A \cup B$

Propriedades distributiva da interseção, união de complementares e elemento absorvente da união.

2.4 $(B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) = B \cap (A \cup \bar{A}) = B \cap U = B$

Propriedades distributiva da interseção e da união e interseção de complementares, elemento neutro da interseção e da união.

2.5 $[A \cap (\bar{B} \cap \bar{A})] \cup \bar{A} = [A \cap (\bar{B} \cup \bar{A})] \cup \bar{A} = (A \cap \bar{A}) \cap [(\bar{B} \cup \bar{A}) \cup \bar{A}] = U \cap [\bar{B} \cup (A \cup \bar{A})] = U \cap [\bar{B} \cup (A \cup \bar{A})] = U \cap (\bar{B} \cup U) = U \cap U = U$

Leis de De Morgan, propriedades distributiva, associativa da união e elemento absorvente da união.

3.1 $\overline{A \cup B \cup C} \stackrel{\text{Leis de De Morgan}}{=} \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

3.2 $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \stackrel{\text{distributiva}}{=} (\bar{A} \cup A) \cap (B \cup \bar{B}) \stackrel{\text{complementar}}{=} U \cap B \stackrel{\text{elemento neutro}}{=} B$

3.3 $A \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \stackrel{\text{Leis de De Morgan}}{=} A \cup (\bar{A} \cup \bar{B}) \stackrel{\text{associativa}}{=} (A \cup \bar{A}) \cup \bar{B} \stackrel{\text{complementar}}{=} U \cup \bar{B} \stackrel{\text{elemento absorvente}}{=} U$

3.4 $\overline{A \cup B \cup B} \stackrel{\text{Leis de De Morgan}}{=} \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{B} \stackrel{\text{distributiva}}{=} (\bar{A} \cap \bar{B}) \cap \bar{B} \stackrel{\text{complementar}}{=} (A \cup B) \cap \bar{B} \stackrel{\text{elemento neutro}}{=} (A \cup B) \cap U \stackrel{\text{elemento neutro}}{=} A \cup B$

4.1 $B \setminus A = \{x \in U : x \in B \wedge x \notin A\} = \{x \in U : x \in B \wedge x \in \bar{A}\} = \{x \in U : x \in B \cap \bar{A}\} = B \cap \bar{A}$,
pelo que a igualdade é verdadeira.

4.2 $(A \cup B) \setminus A = \{x \in U : x \in A \cup B \wedge x \notin A\} = \{x \in U : (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in \bar{A}\} = \{x \in U : (x \in A \wedge x \in \bar{A}) \vee (x \in \bar{A} \wedge x \in B)\} = \{x \in U : (x \in A \cap \bar{A}) \vee (x \in \bar{A} \cap B)\} = \{x \in U : (x \in \emptyset) \vee (x \in \bar{A} \cap B)\} = \{x \in U : (x \in \emptyset) \vee (x \in \bar{A} \cap B)\} = \bar{A} \cap B$,

pelo que a igualdade é falsa (só será verdadeira caso

$\bar{A} \cap B = B$, isto é, quando $B \subset \bar{A} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$).

4.3 A igualdade é verdadeira pelas Leis de De Morgan.

5. Se $x \in A \cap B$, então $x \in A \wedge x \in B$, pelo que $x \in B \cap A$; se $x \in B \cap A$, então $x \in B \wedge x \in A$, pelo que $x \in A \cap B$.

Se $x \in A \cup B$, então $x \in A \vee x \in B$, pelo que $x \in B \cup A$; se $x \in B \cup A$, então $x \in B \vee x \in A$, pelo que $x \in A \cup B$.

6. Sejam $x \in C$ e $y \in A \cup B$;

da segunda condição conclui-se que $y \in A \vee y \in B$,

pelo que $(x, y) \in C \times A \vee (x, y) \in C \times B$;

como $C \times A \subset (C \times A) \cup (C \times B)$ e

$C \times B \subset (C \times A) \cup (C \times B)$,

conclui-se que $(x, y) \in (C \times A) \cup (C \times B)$,

donde $C \times (A \cup B) \subset (C \times A) \cup (C \times B)$.

Por outro lado, seja $z \in (C \times A) \cup (C \times B)$; então

$z \in C \times A \vee z \in C \times B$ e como $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$,

conclui-se que $C \times A \subset C \times (A \cup B)$ e $C \times B \subset C \times (A \cup B)$,

pelo que $(C \times A) \cup (C \times B) \subset [C \times (A \cup B)] \cup [C \times (A \cup B)] = C \times (A \cup B)$.

Através da dupla inclusão provou-se que

$C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$.

PÁG. 15

7. Se $A \cap C = C \Rightarrow C \subset A$

Por outro lado $B \cap C \subset B$ e $B \cap C \subset C$

Como se verifica que $C \cap B \subset C \subset A \Rightarrow C \cap B \subset A$

Opção correta: D.

8. A região sombreada contém os elementos do conjunto

$(A \cap B) \setminus C$, isto é, os elementos $x \in A \cap B$ tal que $x \notin C$.

Todavia, se $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$,

donde $x \in A$ tal que $x \notin C$ e $x \in B$ tal que $x \notin C$.

Assim, $x \in A \setminus C$ e $x \in B \setminus C$, donde $x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

Opção correta: C.

9. 4 elementos.

Opção correta: D.

10. Se $A \cap C = \{3\}$, então dos elementos do conjunto A apenas $3 \in C$.

Se $B \cap C = \{8\}$, então dos elementos do conjunto B apenas $8 \in C$.

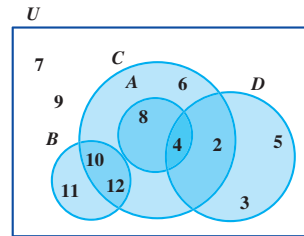
Por outro lado, se $A \cup B \cup C = \{3, 7, 8, 9, 10\}$ e

$A \cup B = \{3, 7, 8, 9\}$, então $10 \in C$,

donde $C = \{3, 8, 10\}$, ou seja, C tem 3 elementos.

Opção correta: A.

11.1



11.2

a. $\bar{A} = \{2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$

b. $\bar{A} \cap C = \{2, 6, 10, 12\}$

c. $A \cap B = \emptyset$

d. $A \cup D = \{2, 3, 4, 5, 8\}$

e. $(A \cap D) \cap C = \{4\}$

f. $A \cup (B \cup C) = \{2, 4, 6, 8, 10, 11, 12\}$

g. $\overline{A \cup B} = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

h. $\bar{A} \cup \bar{B} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

i. $\overline{C \cup D} = \{7, 9, 11\}$

j. $\overline{B \cap C} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}$

11.3 Se $Y \subset B$, então

$Y \in \{\{10\}, \{11\}, \{12\}, \{10, 11\}, \{10, 12\}, \{11, 12\}, \{10, 11, 12\}\}$.

Se $Y \cap C \neq \emptyset \Rightarrow Y \neq \{11\}$, donde

$Y \in \{\{10\}, \{12\}, \{10, 11\}, \{10, 12\}, \{11, 12\}, \{10, 11, 12\}\}$,

ou seja, Y tem, no mínimo, 1 elemento.

11.4 $X = \{4\} = A$

12. Se $X \setminus A = \{0, 1, 5, 6\}$,

então os elementos do conjunto $\{0, 1, 5, 6\}$ pertencem a X mas não pertencem a A .

Se $X \setminus B = \{0, 4, 6\}$, então os elementos do conjunto $\{0, 4, 6\}$ pertencem a X mas não pertencem a B .

Conclui-se então que os elementos do conjunto $\{0, 6\}$ pertencem a X mas não pertencem a A nem pertencem

a B , enquanto os elementos do conjunto $\{1, 4, 5\}$ pertencem a A ou pertencem a B .

Como os elementos do conjunto $\{2, 3\}$ pertencem ambos a A e a B , conclui-se que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$13.1 \quad A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 6), (b, 1), (b, 2), (b, 6)\} \\ B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (6, a), (6, b)\}$$

$$13.2 \quad (A \cup C) \times B = (A \times B) \cup (C \times B) = \\ = \{(a, 1), (a, 2), (a, 6), (b, 1), (b, 2), (b, 6), \\ (11, 1), (11, 2), (11, 6)\}$$

2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO COMBINATÓRIO. TRIÂNGULO DE PASCAL E BINÓMIO DE NEWTON

PÁG. 19

$$14.1 \quad \#(A \cup B) = 3 + 5 = 8$$

$A \cup B = \{k, w, y, a, e, i, o, u\}$,
pelo que $\#(A \cup B) = 8$.

$$14.2 \quad 3 \times 5 = 15$$

$$14.3 \quad \{(k, a); (k, e); (k, i); (k, o); (k, u); \\ (w, a); (w, e); (w, i); (w, o); (w, u); \\ (y, a); (y, e); (y, i); (y, o); (y, u)\}$$

15. De $3 \times 5 \times 8 = 120$ maneiras distintas.

16.1 Pode escolher $4 \times 8 \times 5 = 160$ menus distintos.

16.2 Pode escolher $3 \times 8 \times 4 = 96$ menus distintos.

17. Para cada algarismo do 3.º ao 6.º há 10 possibilidades $(0, \dots, 9)$, pelo que podem ser atribuídos $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\,000$ números de telefone começados por essa empresa.

18. Existem $10^4 = 10\,000$ códigos diferentes de multibanco, nomeadamente, desde 0000 a 9999.

19. Para o algarismo da centena de milhar há 9 possibilidades $(1, \dots, 9)$ e para cada um dos restantes 4 algarismos há 10 possibilidades $(0, \dots, 9)$, pelo que existem $9 \times 10^4 = 90\,000$ números naturais de 5 algarismos, nomeadamente, desde 10 000 a 99 999.

20.1 Existem $3 \times 4 = 12$ percursos diferentes.

20.2 Há duas variantes alternativas de percurso $(A > B > C$ e $A > D > C)$, pelo que existem $3 \times 4 + 2 \times 2 = 16$ percursos diferentes.

21. Para cada porta que escolhamos para entrar, entre as 8 possíveis, há 7 possibilidades de porta para sair, pelo que existem $8 \times 7 = 56$ maneiras distintas de entrar e sair desse prédio.

22.1 Para que se forme um número par, o algarismo das unidades deve ser 2, 4 ou 6; assim, há 3 algarismos possíveis para o algarismo das unidades, 5 algarismos possíveis para o algarismo das dezenas (todos exceto o que foi utilizado no algarismo das unidades) e 4 algarismos possíveis para o algarismo das centenas (todos exceto os 2 que foram utilizados nos algarismos das unidades e dezenas), pelo que há $3 \times 5 \times 4 = 60$ pares de três algarismos distintos.

22.2 Para que se forme um número múltiplo de 5, o algarismo das unidades deve ser 5; há 3 situações possíveis:

- formar um número da ordem das unidades (1 algarismo);
- formar um número da ordem das dezenas (2 algarismos);
- formar um número da ordem das centenas (3 algarismos).

Na 1.ª situação há 1 só número (5), na 2.ª situação há 6 números (15, 25, 35, 45, 55 e 65) e na 3.ª situação há $5 \times 6 \times 1 = 30$ números (5 algarismos possíveis para o algarismo das centenas, 6 algarismos possíveis para o algarismo das dezenas e 1 algarismo possível para o algarismo das unidades), pelo que há 37 números múltiplos de 5 menores que 600.

PÁG. 21

$$23.1 \quad {}^5A'_4 = 5^4 = 625$$

$$23.2 \quad {}^4A'_5 = 4^5 = 1024$$

24. Para cada bola é sorteado um dos 28 alunos da turma, pelo que há ${}^{28}A'_3 = 28^3 = 21\,952$ maneiras diferentes.

25. Para cada missanga a inserir sequencialmente é escolhida uma das 3 cores disponíveis, pelo que há ${}^3A'_4 = 3^4 = 81$ sequências diferentes.

26. Para cada questão de escolha múltipla é selecionada uma das 4 opções, pelo que há ${}^4A'_6 = 4^6 = 4096$ maneiras diferentes.

27. Cada moeda é colocada numa das 6 caixinhas disponíveis, pelo que há ${}^6A_{10} = 6^{10} = 60\,466\,176$ formas diferentes.

PÁG. 25

28. $\mathcal{P}(A) = \{ \{x, y, z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \emptyset \}$
 $\#\mathcal{P}(A) = 8$

29. $2^{10} = 1024$

30. O número de subconjuntos de um dado conjunto X em que $\#X = n$ é dado por 2^n , pelo que $2^n = 64 \Leftrightarrow n = 6$.

31. O número de subconjuntos de um dado conjunto X , tal que $\#X = n$, é dado por 2^n ; nestes subconjuntos incluem-se os subconjuntos não vazios e o conjunto vazio, pelo que, no total, esse conjunto X tem 4096 subconjuntos, donde $2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$, ($2^{12} = 4096$).

32. A 1.ª pessoa a sentar-se dispõe de 5 lugares; a 2.ª pessoa de 4 lugares; a 3.ª pessoa de 3 lugares; a 4.ª pessoa de 2 lugares; a 5.ª pessoa só se pode sentar no lugar que sobra, pelo que podem sentar-se de $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$ formas diferentes.

33. De $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$ formas diferentes.

34. Para dirigir a reunião pode ser escolhido um dos 5 administradores e para cada um que seja escolhido pode-se atribuir a ata a um dos 4 administradores restantes, pelo que há $5 \times 4 = {}^5A_2 = 20$ maneiras diferentes de atribuir as duas tarefas.

- 35.1 De $12! = 479\,001\,600$ maneiras diferentes.

- 35.2 Há duas variantes alternativas de colocação dos homens (ocupam os lugares de posição ímpar ou os lugares de posição par); por outro lado, para cada uma dessas variantes, quer os homens, quer as mulheres, podem permutar entre si, pelo que podem ser dispostos de $2 \times 6! \times 6! = 1\,036\,800$ maneiras diferentes.

- 35.3 Cada casal pode permutar entre 6 posições ($1.^\circ/2.^\circ, \dots, 11.^\circ/12.^\circ$); atendendo à ordem entre os membros do casal, para cada uma dessas 6 posições, cada casal pode estar disposto de 2 maneiras (homem/mulher ou mulher/homem); assim, é possível dispô-los de $6! \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 46\,080$ maneiras diferentes.

36. Podem obter-se ${}^9A_4 = 3024$ números de 4 algarismos.

37. A distribuição dos 4 helicópteros pelos 6 lugares disponíveis no hangar pode ser feita de ${}^6A_4 = 360$ maneiras diferentes.

- 38.1 De $5! = 120$ maneiras diferentes.

- 38.2 O que tem carta vai a conduzir e os outros 4 podem permutar entre si, pelo que podem ocupar os lugares de $1 \times 4! = 24$ maneiras diferentes.

- 38.3 Supondo que os 2 rapazes têm carta, qualquer um deles pode conduzir e as 3 raparigas podem permutar entre si, pelo que podem ocupar os lugares de $2 \times 3! = 12$ maneiras diferentes.

- 39.1 Como há 6 livros, de $6! = 720$ maneiras diferentes.

- 39.2 As 3 disciplinas podem permutar entre si, pelo que, atendendo à ordem da disciplina, há $3!$ maneiras; todavia, nas disciplinas com mais de um livro, os livros também podem permutar entre si, pelo que podem arrumar-se de $3! \times 2! \times 3! \times 1! = 72$ maneiras diferentes.

- 39.3 Das 3! permutações entre as disciplinas só 2 verificam o pedido (M/E/F e F/E/M), pelo que podem arrumar-se de $2 \times 2! \times 3! \times 1! = 24$ maneiras diferentes.

40.1 ${}^{60}A_3$

40.2 ${}^{20}A_2$

40.3 nA_2

41.1 $\frac{100!}{98!} = \frac{100 \times 99 \times 98!}{98!} = 100 \times 99 = 9900$

41.2 $\frac{7! - 6!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5! - 6 \times 5!}{5!} = \frac{42 \times 5! - 6 \times 5!}{5!} = \frac{36 \times 5!}{5!} = 36$

42.1 $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \times n \times (n-1)!}{(n-1)!} = (n+1) \times n = n^2 + n$

42.2 $\frac{(n-p)!}{(n-p+1)!} = \frac{(n-p)!}{(n-p+1) \times (n-p)!} = \frac{1}{n-p+1}$

PÁG. 27

43. Pode emprestar-lhe ${}^{20}C_5 = 15\,504$ subconjuntos diferentes de jogos.

44. Há ${}^{50}C_5$ subconjuntos diferentes com 5 números e, para cada um desses subconjuntos, há ${}^{11}C_2$ subconjuntos diferentes com 2 estrelas, pelo que podem fazer-se ${}^{50}C_5 \times {}^{11}C_2 = 116\,531\,800$ apostas simples diferentes.

45. Há $^{10}C_3$ subconjuntos diferentes de 3 lugares entre os 10 lugares da caixa e, para cada um desses subconjuntos, há 7C_2 subconjuntos diferentes de 2 lugares entre os 7 lugares da caixa que restaram, pelo que se podem formar os ovos de $^{10}C_3 \times ^7C_2 = 2520$ maneiras diferentes.

46. Há 8C_3 subconjuntos diferentes de 3 pontos entre os 8 pontos do plano; qualquer um desses subconjuntos de pontos define um triângulo (usando-os para vértices) se os pontos não forem colineares. Assim, podem formar-se $^8C_3 - 1 = 55$ triângulos.

$$47.1 \quad \frac{5}{4!} - \frac{4}{5!} = \frac{5}{4!(\times 5)} - \frac{4}{5 \times 4!} = \frac{25 - 4}{5 \times 4!} = \frac{21}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7}{40}$$

$$47.2 \quad \frac{2}{3!6!} + \frac{3}{4!5!} = \frac{2}{3!6!(\times 4)} + \frac{3}{4!5!(\times 6)} = \frac{26}{4!6!} = \frac{13}{4 \times 3 \times 6!} = \frac{13}{12 \times 6!}$$

$$47.3 \quad \frac{2}{(n+1)!} - \frac{n}{(n+2)!} + \frac{1}{n!} =$$

$$= \frac{2}{(n+1)!(\times(n+2))} - \frac{n}{(n+2)!} + \frac{1}{n!(\times(n+2)(n+1))} =$$

$$= \frac{2n+4-n+n^2+n+2n+1}{(n+2)!}$$

$$= \frac{2n+4-n+n^2+n+2n+2}{(n+2)!} = \frac{n^2+4n+6}{(n+2)!}$$

$$47.4 \quad {}^nA_2 + {}^{n+1}A_2 = n(n-1) + (n+1)n =$$

$$= n(n-1+n+1) = n(2n) = 2n^2$$

$$48. \quad \frac{180 \times 179 \times \dots \times 142 \times 141}{40!} = \frac{{}^{180}A_{40}}{40!} = {}^{180}C_{40}$$

$$49. \quad \frac{(n+2)!}{n!} = 6 \Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = 6 \Leftrightarrow (n+2)(n+1) = 6;$$

$n+2 \in \mathbb{N} \Rightarrow n+2 \geq 3$ e $n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \geq 2$;
além disso, os divisores de 6 são 1, 2, 3 e 6.
Assim, para que $(n+2)(n+1)$ seja 6, é
necessário que $n+2 = 3 \wedge n+1 = 2 \Leftrightarrow n = 1$ (também se deduzia o valor de n pela fórmula resolvente).

PÁG. 31

50. ${}^nC_{n-1} + {}^nC_n = 11 \Leftrightarrow n+1 = 11 \Leftrightarrow n = 10$,
pelo que a soma dos três primeiros da linha anterior
é ${}^9C_0 + {}^9C_1 + {}^9C_2 = 1 + 9 + 36 = 46$.

$$51. \quad \begin{cases} {}^nC_2 = 4005 \\ {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 = 4096 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + n + 4005 = 4096 \\ n = 90 \end{cases},$$

donde o terceiro número da linha seguinte é ${}^{91}C_2 = 4095$.

52. Se ${}^nC_5 = {}^nC_6$, então $n = 11$, pelo que o elemento central da linha seguinte é ${}^{11}C_5 + {}^{11}C_6 = {}^{12}C_6 = 924$.

53.1 A linha com 8 elementos contém os números ${}^nC_0, \dots, {}^nC_7$, pelo que $n = 7$.

53.2 Como k varia de 0 a 23, então, no 5.º elemento, $k = 4$.

53.3 Contém os números ${}^{11}C_0, \dots, {}^{11}C_{11}$, pelo que contém 12 elementos.

$$54. \quad \begin{cases} 10 + 10 = A \\ A + B = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 20 \\ B = 15 \end{cases}$$

55.1 Os caminhos de A a B têm 3 troços, sendo apenas 1 horizontal, logo o número de caminhos é igual ao número de maneiras de escolher o troço horizontal, ou seja, ${}^3C_1 = 3$.

55.2 Os caminhos de A a C têm 5 troços, sendo apenas 2 horizontais, logo o número de caminhos é igual ao número de maneiras de escolher os troços horizontais, ou seja, ${}^5C_2 = 10$.

55.3 Os caminhos de A a E têm 6 troços, sendo apenas 4 horizontais, logo o número de caminhos é igual ao número de maneiras de escolher os troços horizontais, ou seja, ${}^6C_4 = 15$.

56.1 6

$$56.2 \quad {}^{33}C_{11} = {}^{33}C_p \Leftrightarrow p = 11 \vee 11 + p = 33 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = 11 \vee p = 22$$

$$56.3 \quad {}^{100}C_{p+5} = {}^{100}C_{2(p-\frac{1}{2})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p+5 = 2(p-\frac{1}{2}) \vee p+5 = 100-2(p-\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow p = 6 \vee p = 32$$

57. Por tentativas, conclui-se que

$${}^{13}C_6 = 1716 \text{ donde } p = 3; \text{ assim,}$$

$${}^{11}C_{p+1} + {}^{11}C_{p+2} + {}^{11}C_{p+3} = {}^{11}C_4 + {}^{11}C_5 + {}^{11}C_6 = 1254.$$

$$58. \quad {}^nC_p + {}^nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1} \Leftrightarrow {}^nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1} - {}^nC_p =$$

$$= 6435 - 3432 = 3003$$

$${}^nC_{p+1} + {}^nC_{p+2} = {}^{n+1}C_{p+2} \Leftrightarrow {}^{n+1}C_{p+2} = 3003 + 2002 = 5005$$

$${}^{n+1}C_{p+1} + {}^{n+1}C_{p+2} = {}^{n+2}C_{p+2} \Leftrightarrow {}^{n+2}C_{p+2} = 6435 + 5005 = 11440$$

$${}^{n+2}C_{n-p} = {}^{n+2}C_{n+2-(n-p)} = {}^{n+2}C_{p+2} = 11440$$

$$59.1 \sum_{i=0}^n C_i = 4096 \Leftrightarrow 2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12, \quad (2^{12} = 4096),$$

$$\text{donde } {}^{n-1}C_4 = {}^{11}C_4 = 330.$$

$$59.2 \sum_{i=0}^{n+2} {}^{n+2}C_i = 2^{n+2} = 2^{14} = 16\,384$$

PÁG. 33

$$\begin{aligned} 60.1 \quad (x+4)^6 &= \sum_{i=0}^6 C_i \times x^{6-i} \times 4^i = \\ &= {}^6C_0 \times x^6 \times 4^0 + {}^6C_1 \times x^5 \times 4^1 + {}^6C_2 \times x^4 \times 4^2 + {}^6C_3 \times x^3 \times 4^3 + \\ &+ {}^6C_4 \times x^2 \times 4^4 + {}^6C_5 \times x^1 \times 4^5 + {}^6C_6 \times x^0 \times 4^6 = \\ &= 1 \times x^6 \times 1 + 6 \times x^5 \times 4 + 15 \times x^4 \times 16 + 20 \times x^3 \times 64 + \\ &+ 15 \times x^2 \times 256 + 6 \times x \times 1024 + 1 \times 1 \times 4096 = \\ &= x^6 + 24x^5 + 240x^4 + 1280x^3 + 3840x^2 + 6144x + 4096 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 60.2 \quad (x+2y)^5 &= \sum_{i=0}^5 C_i \times x^{5-i} \times (2y)^i = \\ &= {}^5C_0 x^5 + 2^1 {}^5C_1 x^4 y + 4^2 {}^5C_2 x^3 y^2 + 8^3 {}^5C_3 x^2 y^3 + 16^4 {}^5C_4 x y^4 + 32^5 {}^5C_5 y^5 \\ &= x^5 + 10x^4 y + 40x^3 y^2 + 80x^2 y^3 + 80x y^4 + 32y^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 60.3 \quad (2a+1)^5 &= \sum_{i=0}^5 C_i \times (2a)^{5-i} \times 1^i = \\ &= 32^5 {}^5C_0 a^5 + 16^5 {}^5C_1 a^4 + 8^5 {}^5C_2 a^3 + 4^5 {}^5C_3 a^2 + 2^5 {}^5C_4 a + {}^5C_5 \\ &= 32a^5 + 80a^4 + 80a^3 + 40a^2 + 10a + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 60.4 \quad \left(x + \frac{1}{3}\right)^6 &= \sum_{i=0}^6 C_i \times x^{6-i} \times \left(\frac{1}{3}\right)^i = \\ &= {}^6C_0 x^6 + \frac{1}{3} {}^6C_1 x^5 + \frac{1}{9} {}^6C_2 x^4 + \frac{1}{27} {}^6C_3 x^3 + \frac{1}{81} {}^6C_4 x^2 + \\ &+ \frac{1}{243} {}^6C_5 x + \frac{1}{729} {}^6C_6 = \\ &= x^6 + 2x^5 + \frac{5}{3}x^4 + \frac{20}{27}x^3 + \frac{5}{27}x^2 + \frac{2}{81}x + \frac{1}{729} \end{aligned}$$

60.5 Podemos usar o desenvolvimento binomial da alínea 53.2. tomando $2y = -2 \Leftrightarrow y = -1$:

$$\begin{aligned} &x^5 + 10x^4(-1) + 40x^3(-1)^2 + 80x^2(-1)^3 + \\ &+ 80x(-1)^4 + 32(-1)^5 = \\ &= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 60.6 \quad \text{Como } \left(\frac{x}{3} - x^2\right)^5 &= \left[-x\left(x - \frac{1}{3}\right)\right]^5 = (-x)^5 \left(x - \frac{1}{3}\right)^5 = \\ &= -x^5 \left(x - \frac{1}{3}\right)^5, \text{ podemos usar o desenvolvimento binomial} \end{aligned}$$

$$\text{da alínea 60.2. tomando } 2y = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{6}:$$

$$\begin{aligned} &x^5 + 10x^4\left(-\frac{1}{6}\right) + 40x^3\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + 80x^2\left(-\frac{1}{6}\right)^3 + \\ &+ 80x\left(-\frac{1}{6}\right)^4 + 32\left(-\frac{1}{6}\right)^5 = \\ &= x^5 - \frac{5}{3}x^4 + \frac{10}{9}x^3 - \frac{10}{27}x^2 + \frac{5}{81}x - \frac{1}{243} \end{aligned}$$

Resta agora multiplicar o polinómio anterior pelo fator $(-x^5)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{3} - x^2\right)^5 &= -x^5 \left(x^5 - \frac{5}{3}x^4 + \frac{10}{9}x^3 - \frac{10}{27}x^2 + \frac{5}{81}x - \frac{1}{243}\right) = \\ &= -x^{10} + \frac{5}{3}x^9 - \frac{10}{9}x^8 + \frac{10}{27}x^7 - \frac{5}{81}x^6 + \frac{1}{243}x^5 \end{aligned}$$

$$61.1 \quad \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^6 = \sum_{i=0}^6 C_i \times (x^2)^{6-i} \times \left(-\frac{2}{x}\right)^i;$$

o polinómio que resulta do desenvolvimento binomial tem 7 termos, obtendo-se o 6.º para $i = 5$:

$${}^6C_5 \times (x^2)^1 \times \left(-\frac{2}{x}\right)^5 = 6x^2 \times \left(-\frac{32}{x^5}\right) = -\frac{192}{x^3}$$

$$61.2 \quad \left(x\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}\right)^8 = \sum_{i=0}^8 C_i \times (x\sqrt{x})^{8-i} \times \left(-\frac{3}{x^2}\right)^i;$$

o polinómio que resulta do desenvolvimento binomial tem 9 termos, obtendo-se o 6.º para $i = 5$:

$$\begin{aligned} &{}^8C_5 \times (x\sqrt{x})^3 \times \left(-\frac{3}{x^2}\right)^5 = 56x^2 \left(x \times x^{\frac{1}{2}}\right)^3 \times \left(-\frac{243}{x^{10}}\right) = \\ &= -13608x^{\frac{9}{2}-10} = -13608x^{-\frac{11}{2}} = -\frac{13608}{x^5\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$62. \quad (x+a)^9 = \sum_{i=0}^9 C_i \times x^{9-i} \times a^i; \text{ o termo de grau 7 obtém-se}$$

$$\text{para } i=2 \text{ e é } {}^9C_2 \times x^7 \times a^2 = 36x^7a^2.$$

$$\text{O termo de grau 7 é } 4x^7 \text{ para } 36a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{3}.$$

$$63.1 \quad \left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^9 = \sum_{i=0}^9 C_i \times \left(\frac{2}{x}\right)^{9-i} \times (-\sqrt{x})^i =$$

$$= \sum_{i=0}^9 C_i \times \frac{2^{9-i}}{x^{9-i}} \times (-x^{\frac{1}{2}})^i = \sum_{i=0}^9 (-1)^i \times 2^{9-i} \times {}^9C_i \times x^{\frac{3}{2}-i}$$

O termo independente de x obtém-se para

$$\frac{3}{2}i - 9 = 0 \Leftrightarrow i = 6: (-1)^6 \times 2^{9-6} \times {}^9C_6 = 672.$$

63.2 O termo de grau 3 obtém-se para

$$\frac{3}{2}i - 9 = 3 \Leftrightarrow i = 8: (-1)^8 \times 2^{9-8} \times {}^9C_8 \times x^3 = 18x^3.$$

$$64. \quad \left(a + \frac{b}{2}\right)^{12} = \sum_{i=0}^{12} C_i \times a^{12-i} \times \left(\frac{b}{2}\right)^i,$$

cujo desenvolvimento tem 13 termos ($i = 0, \dots, 12$).

65. $(a+b)^{95} = \sum_{i=0}^{95} C_i \times a^{95-i} \times b^i$,

donde se conclui que a soma dos expoentes em cada parcela do polinómio que resulta do desenvolvimento binomial é $95 - i + i = 95$.

66.
$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{15} = \sum_{i=0}^{15} C_i \times x^{15-i} \times \left(\frac{1}{x}\right)^i =$$
$$= \sum_{i=0}^{15} C_i \times x^{15-i} \times x^{-i} = \sum_{i=0}^{15} C_i \times x^{15-2i}$$

Para haver um termo independente, x^{15-2i} tem de ser igual a 1 para algum $i \in \{0, \dots, 15\}$.

$$x^{15-2i} = 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow 15 - 2i = 0 \Leftrightarrow i = \frac{15}{2} \notin \{0, \dots, 15\}$$

Assim, do desenvolvimento pelo binómio de Newton de

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{15} \text{ não resulta nenhum termo independente de } x.$$

PÁG. 35

67. Há 4 posições para as pereiras (1.º e 2.º buracos, 2.º e 3.º buracos, 3.º e 4.º buracos e 4.º e 5.º buracos). Como as pereiras e as macieiras podem permutar entre si, há $4 \times 2! \times 3!$ maneiras.

Opção correta: A.

68. Para cada pessoa escolhe-se um dos 9 lugares disponíveis sem que haja repetição de lugares escolhidos, pelo que há 9A_4 maneiras.

Opção correta: D.

69. Em cada extração é retirada uma bola das que estiverem disponíveis no saco, sem que haja reposição das bolas extraídas, pelo que se podem formar 6A_5 números.

Opção correta: B.

70. Os múltiplos de 5 têm como algarismo das unidades o 0 e o 5. O algarismo das dezenas e das centenas pode ser qualquer um de 0 a 9. O algarismo dos milhares não pode ser 0, pelo que pode ser qualquer um de 1 a 9. Existem $9 \times 10^2 \times 2$ números de 4 algarismos que são múltiplos de 5.

Opção correta: D.

71. Faltam os 3 algarismos finais dos números de telefone. Como cada um deles pode ser qualquer algarismo de 0 a 9, podem existir 10^3 números de telefone nessa clínica.

Opção correta: C.

72. Cada uma das amigas ficará com 5 laços, sendo que a Ana ficará com 2 em tons de vermelho e 3 em tons de azul, enquanto a Sofia ficará com os restantes. Assim, basta escolher um conjunto com 2 laços vermelhos e um conjunto com 3 laços azuis para oferecer à Ana; os restantes laços são oferecidos à Sofia. Assim, a Maria pode oferecê-los às suas amigas de ${}^3C_2 \times {}^7C_3$ maneiras.

Opção correta: B.

PÁG. 36

- 73.1 Como as sementes são todas iguais, para o conjunto das 4 sementes há 12 casas disponíveis no tabuleiro (todas exceto as da diagonal), pelo que podem ocupar ${}^{12}C_4$ posições distintas.

Opção correta: C.

- 73.2 O 1.º feijão pode ser colocado em 4 casas distintas de uma coluna. O segundo feijão já só tem disponíveis 3 casas de outra coluna. O 3.º feijão já só dispõe de 2 casas noutra coluna e o último feijão já só tem uma casa disponível, também na última coluna, donde há 4! posições.

Opção correta: D.

74. A linha com 10 elementos corresponde às 9C_p , sendo que o 7.º elemento corresponde a 9C_6 .

Opção correta: A.

75. A linha com 13 elementos corresponde às ${}^{12}C_p$ e como ${}^{12}C_p = {}^{12}C_{12-p}$, trata-se do elemento ${}^{12}C_6$.

Opção correta: C.

76. A linha em que o 4.º elemento (nC_3) e o 6.º elemento (${}^nC_5 = {}^nC_{n-3}$) são iguais corresponde às 8C_p . Assim, a linha anterior corresponde às 7C_p , sendo que o 3.º elemento corresponde a ${}^7C_2 = 21$.

Opção correta: A.

77. ${}^nC_k + {}^nC_{k+1} = {}^{n+1}C_{k+1}$

Opção correta: D.

78. ${}^{n+1}C_n + {}^nC_n = n + 1 + 1 = n + 2$

Opção correta: D.

79. $\left(\frac{2}{x} - x\right)^8 = \sum_{i=0}^8 {}^8C_i \times \left(\frac{2}{x}\right)^{8-i} \times (-x)^i$,

pelo que para $i=5$ obtém-se ${}^8C_5 \times \left(\frac{2}{x}\right)^3 \times (-x)^5$.

Opção correta: A.

80.1 $(3x + 2)^6 = \sum_{i=0}^6 C_i \times (3x)^{6-i} \times 2^i$, pelo que o termo

independente de x é ${}^6C_6 \times (3x)^{6-6} \times 2^6 = 2^6 = 64$.

Opção correta: B.

80.2 O termo de maior grau é ${}^6C_0 \times (3x)^{6-0} \times 2^0 = 3^6 x^6 = 729x^6$.

Opção correta: C.

81. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9 = \sum_{i=0}^9 C_i \times (x^2)^{9-i} \times \left(\frac{1}{x}\right)^i$ e se $i = 4$ obtém-se

${}^9C_4 \times (x^2)^5 \times \left(\frac{1}{x}\right)^4$ cuja parte literal é

$(x^2)^5 \times \left(\frac{1}{x}\right)^4 = x^{10-4} = x^6$.

Opção correta: B.

82. $(a + b)^{10} = \sum_{i=0}^{10} C_i \times a^{10-i} \times b^i$ e a soma dos coeficientes

binomiais é dada por $\sum_{i=0}^{10} C_i = 2^{10} = 1024$.

Opção correta: C.

PÁG. 37

83. Há ${}^8C_3 = 56$ subconjuntos diferentes de 3 amigos a partir de um conjunto de 8, sendo que o subconjunto de 5, para a outra tarefa, fica automaticamente formado cada vez que se forma um subconjunto de 3 amigos.

84.1 ${}^8C_2 = 28$

84.2 ${}^8C_6 = {}^8C_2 = 28$

84.3 ${}^8C_8 = 1$

85. Sendo n o cardinal desse conjunto,

$2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$, ($2^{12} = 4096$); logo há ${}^{12}C_6 = 924$

subconjuntos desse conjunto que têm 6 elementos.

86. $2^n = \sum_{i=0}^n C_i$. Para $n = 0 \Rightarrow 2^0 = 1 > 0 = n$ e para

$n = 1 \Rightarrow 2^1 = 2 > 1 = n$. Resta ver as situações em que

$n > 1$: $n > 1 \Rightarrow 2^n = \sum_{i=0}^n C_i = {}^nC_0 + {}^nC_1 + \sum_{i=2}^n C_i =$

$= 1 + n + \sum_{i=2}^n C_i > n$.

87. $5 \times 10 \times 2 + 1$ ou, mais simplesmente, $\frac{1000}{5} = 200$ diz-nos que há 200 múltiplos de 5 até 1000 (sem contar com 0)

e $\frac{499}{5} = 99,8$ diz-nos que há 99 múltiplos de 5 até 499

(sem contar com 0), donde há $200 - 99 = 101$ múltiplos de 5 nessas condições.

88.1 $10^5 - 1 = 99\,999$ (todos desde 00001 a 99\,999)

88.2 Para os algarismos 2 há 5C_2 posições possíveis, sendo que os restantes algarismos podem ser quaisquer exceto o algarismo 2, donde há ${}^5C_2 \times 9^3 = 7290$ números nessas condições.

88.3 Os 3 primeiros algarismos podem ser quaisquer de 0 a 9, sendo que os 2 últimos ficam definidos pelos dois primeiros; além disso há que retirar o 00000. Há $10^3 - 1 = 999$ números capicuas.

89. Considerando que havia n participantes ($n \geq 2$), o número de apertos de mão corresponde ao número de subconjuntos de 2 elementos entre o conjunto dos participantes, pelo

que ${}^nC_2 = 66 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 66 \Leftrightarrow n^2 - n - 132 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 12 \vee n = -11$, havendo assim 12 participantes.

90.1 Para a 1.ª faixa há 9 cores disponíveis, para a 2.ª faixa há 8 (só não pode repetir-se a cor da 1.ª faixa) e para a 3.ª faixa há novamente 8 (só não pode repetir-se a cor da 2.ª faixa), o que permite construir $9 \times 8 \times 8 = 576$ bandeiras.

90.2 Para a 1.ª faixa há 9 cores disponíveis, para a 2.ª faixa há 8 (só não pode repetir-se a cor da 1.ª faixa), para a 3.ª faixa há novamente 8 (só não pode repetir-se a cor da 2.ª faixa) e para a 4.ª faixa há novamente 8 (só não pode repetir-se a cor da 3.ª faixa), o que permite construir $9 \times 8 \times 8 \times 8 = 4608$ bandeiras.

PÁG. 38

91.1 Como os percursos de ida podem ser percursos de volta pode optar por $\underbrace{5 \times 2 \times 4}_{\text{ida}} \times \underbrace{4 \times 2 \times 5}_{\text{volta}} = 1600$ percursos.

91.2 Como os percursos de ida já não podem ser percursos de volta pode optar por $\underbrace{5 \times 2 \times 4}_{\text{ida}} \times \underbrace{3 \times 1 \times 4}_{\text{volta}} = 480$ percursos.

92. $6! = 720$

93. ${}^{25}C_5 = 53\,130$

94. Para o dado cúbico há 6 faces possíveis e para cada uma delas há 8 faces possíveis no dado octaédrico, pelo que há $6 \times 8 = 48$ resultados possíveis para a experiência.

95.1 A forma como os algarismos (A) e as vogais (V) são dispostos é AVAVAVA; por outro lado, para cada algarismo há 10 possibilidades e para cada vogal há 5 possibilidades, pelo que se podem formar $10^4 \times 5^3 = 1\,250\,000$ códigos.

95.2 Há 3 formas para dispor os algarismos (A) e as vogais (V): AAVVVAA, AVVVAAA e AVVVAAA; assim podem formar-se $3 \times 10^4 \times 5^3 = 3\,750\,000$ códigos.

95.3 A forma como os algarismos (A) e as vogais (V) são dispostos é AAVVVAA; por outro lado, para cada algarismo só há 5 possibilidades, pelo que podem formar-se $5^4 \times 5^3 = 78\,125$ códigos.

95.4 Dos 7 símbolos escolhem-se 2 para algarismo 3, escolha que pode ser feita de 7C_2 maneiras. Dos 5 símbolos restantes escolhem-se 2 para algarismos diferentes de 3, escolha que pode ser feita de 5C_2 maneiras e que, atendendo à escolha dos algarismos, origina ${}^5C_2 \times 9^2$ maneiras. Finalmente, uma vez que os restantes símbolos são vogais, basta escolher para cada um uma vogal, o que permite formar ${}^7C_2 \times {}^5C_2 \times 9^2 \times 5^3 = 2\,126\,250$ códigos.

95.5 Dos 7 símbolos escolhem-se 4 para algarismos, escolha que pode ser feita de 7C_4 maneiras e que, atendendo à escolha dos algarismos, origina ${}^7C_4 \times 10^4$ maneiras. Finalmente, uma vez que os restantes símbolos são vogais, basta escolher para cada um uma vogal, o que permite formar ${}^7C_4 \times 10^4 \times 5^3 = 43\,750\,000$ códigos.

96.1 Há 4 ases possíveis de extrair, 12^2 maneiras de extrair as 2 figuras (em cada extração há 4 damas, 4 valeses e 4 reis) e 20 números possíveis de extrair (cartas 6, 7, 8, 9 e 10 de cada naipe), pelo que podem extrair-se as cartas de $4 \times 12^2 \times 20 = 11\,520$ maneiras diferentes.

96.2 Para as cartas vermelhas há 26^2 maneiras de as extrair (metade das cartas são vermelhas) e para as cartas de espadas há 13^2 maneiras de as extrair (há 4 naipes, tendo cada naipe 13 cartas), pelo que podem extrair-se as cartas de $26^2 \times 13^2 = 114\,244$ maneiras diferentes.

96.3 Há 4 ordens de extração possíveis (o rei na 1.ª, 2.ª, 3.ª ou 4.ª extração); há 4 reis possíveis de extrair e 26^3 maneiras de extrair as 3 cartas pretas (há 26 cartas pretas), pelo que podem extrair-se as cartas de $4 \times 4 \times 26^3 = 281\,216$ maneiras diferentes.

PÁG. 39

97.1 Para o algarismo dos milhares há 7 possibilidades (de 3 a 9) e para os restantes algarismos escolhem-se 3 de um conjunto de $8 \setminus \{3\}$, pelo que se podem formar $7 \times {}^8A_3 = 2352$ números.

97.2 Para o algarismo das unidades há 4 possibilidades (2, 4, 6 e 8) e para os restantes algarismos escolhem-se 3 de um conjunto de $8 \setminus \{\text{algarismo das unidades}\}$, pelo que podem formar-se $4 \times {}^8A_3 = 1344$ números.

97.3 Para o algarismo das unidades há 1 possibilidade (5) e para os restantes algarismos escolhem-se 3 de um conjunto de $8 \setminus \{\text{algarismo das unidades}\}$, pelo que podem formar-se ${}^8A_3 = 336$ números.

97.4 Para o algarismo dos milhares há 5 possibilidades (de 1 a 5) e caso este não seja 5, para o algarismo das centenas há 8 possibilidades ($8 \setminus \{\text{algarismo das unidades}\}$); contudo, se o algarismo dos milhares for 5, para o algarismo das centenas já só há 6 possibilidades (de 1 a 7 exceto o 5); assim, para fazer a contagem pedida temos de a dividir em 3 casos:

- o algarismo dos milhares não é 5;
- o algarismo dos milhares é 5 e o algarismo das centenas não é 8;
- o algarismo dos milhares é 5 e o algarismo das centenas é 8.

No 1.º caso há 4 possibilidades para o algarismo dos milhares e 8A_3 possibilidades para os outros 3 algarismos, pelo que podemos formar $4 \times {}^8A_3$ números.

No 2.º caso, uma vez que o algarismo dos milhares já está definido, há 6 possibilidades para o algarismo das centenas (1 a 7 exceto 5) e 7A_2 possibilidades para os outros 2 algarismos, pelo que podemos formar $6 \times {}^7A_2$ números.

No 3.º caso, uma vez que os algarismos dos milhares e das centenas já estão definidos, há 3 possibilidades para o algarismo das dezenas (1 a 3) e 6 possibilidades para o das unidades, pelo que podemos formar 3×6 números.

Podemos formar no total $4 \times {}^8A_3 + 6 \times {}^7A_2 + 3 \times 6 = 1614$ números nas condições pedidas.

98.1 Para delegado há 16 raparigas possíveis e para subdelegado há 12 rapazes possíveis, pelo que se podem formar $16 \times 12 = 192$ pares mistos nessas condições.

98.2 Há duas situações possíveis: são ambos rapazes ou são ambos raparigas; cada uma dessas situações desdobra em duas pois os eleitos podem ser delegados ou subdelegados. Assim, podem formar-se ${}^{16}A_2 + {}^{12}A_2 = 372$ pares do mesmo sexo nessas condições.

98.3 Há duas situações possíveis: a Beatriz é eleita delegada ou a Beatriz é eleita subdelegada; assim, podem formar-se $2 \times 27 = 54$ pares em que a Beatriz foi eleita.

99.1 ${}^7A_3 = 210$

99.2

- a. Dos 3 algarismos escolhem-se 2 para algarismos pares, escolha que pode ser feita de 3C_2 maneiras. Há 3A_2 possibilidades de escolha para os 2 pares e 4 possibilidades de escolha para o ímpar, pelo que é possível formar ${}^3C_2 \times {}^3A_2 \times 4 = 72$ números nas condições pedidas.
- b. Há 4 possibilidades para o algarismo das unidades e dos restantes 6 números há que escolher 2 para os algarismos das centenas e dezenas, pelo que há $4 \times {}^6A_2 = 120$.

100.1 Dos 16 livros escolhem-se 8 para colocar sequencialmente numa das prateleiras; podemos sequenciá-los de ${}^{16}A_8$ maneiras diferentes e o conjunto pode ser encostado a um dos 2 extremos da prateleira, pelo que a prateleira pode ser organizada de ${}^{16}A_8 \times 2$ maneiras. Para a outra prateleira restam 8 livros que podem ser sequenciados de $8!$ maneiras e cujo conjunto também pode ser encostado a um dos 2 extremos da prateleira, pelo que a prateleira pode ser organizada de $8! \times 2$ maneiras. Assim, no conjunto das 2 prateleiras, podemos organizar os 16 livros de ${}^{16}A_8 \times 2 \times 8! \times 2 = 16! \times 4$ maneiras.

100.2 Dos 16 livros escolhem-se 10 para colocar sequencialmente numa das prateleiras, num dos seus extremos; podemos organizá-la de ${}^{16}A_{10} \times 2$ maneiras. Para a outra prateleira restam 6 livros que podem ser sequenciados e o seu conjunto encostado a um dos extremos de $6! \times 2$ maneiras. Assim, podemos organizar os 16 livros de ${}^{16}A_{10} \times 2 \times 6! \times 2 = 16! \times 4$ maneiras.

101. Para o moderador há 4 posições distintas e, para cada uma dessas posições, as organizações podem permutar entre si ficando 2 de cada lado (à esquerda e à direita do moderador), pelo que, para as posições do moderador e organizações há $4 \times 4!$ possibilidades. Como os representantes de cada organização também podem permutar entre si, há, no total $4 \times 4! \times 2^4 = 1536$ maneiras.

102. A palavra Margarida tem 9 letras (3A, 2R, 1M, 1G, 1I e 1D). Um anagrama desta palavra também tem estas 9 letras; assim, para as letras A há 9C_3 posições de colocação e sobram 6 posições para as restantes letras, pelo que, para as letras R há 6C_2 posições de colocação e para as restantes letras há $4!$ sequências diferentes, donde podemos construir ${}^9C_3 \times {}^6C_2 \times 4! = 30\,240$ anagramas da palavra Margarida.

103.1 Nos 7 algarismos dos números formados há 7C_3 posições distintas para os algarismos 4 e, nos 4 algarismos restantes $4!$ sequências diferentes, pelo que podemos formar há ${}^7C_3 \times 4! = 840$ números.

103.2 Para formar números ímpares há 3 possibilidades para o algarismo das unidades (1, 3 ou 5), 6C_3 posições

distintas para os algarismos 4 (que só não podem ocupar o algarismo das unidades) e para as restantes 3 posições há 3 algarismos que podem permutar entre si, pelo que podemos formar há $3 \times {}^6C_3 \times 3! = 360$ números.

104. Entre os 12 lugares do parque escolhem-se 8 e, dado que os automóveis são diferentes, no mesmo conjunto de 8 lugares escolhidos os automóveis podem permutar entre si, donde ${}^{12}C_8 \times 8! = {}^{12}A_8 = 19\,958\,400$.

105. Entre os 4 pontos escolhem-se 2 para extremos da corda, pelo que existem ${}^4C_2 = 6$ cordas.

PÁG. 40

106.1 Há 4 situações possíveis:

- escolhem-se 3 sabores de fruta;
- escolhem-se 2 sabores de fruta e um sabor que não é de fruta;
- escolhe-se 1 sabor de fruta e dois sabores que não são de fruta;
- escolhem-se 3 sabores que não são de fruta.

Na 1.ª situação há 5C_3 possibilidades de escolha dos sabores de fruta.

Na 2.ª situação há 5C_2 possibilidades de escolha dos sabores de fruta e 3 possibilidades para o sabor que não é de fruta, pelo que podemos escolher ${}^5C_2 \times 3$ tipos de gelado.

Na 3.ª situação há 5 possibilidades de escolha do sabor de fruta e 3C_2 possibilidades para os sabores que não são de fruta, pelo que podemos escolher $5 \times {}^3C_2$ tipos de gelado.

Na 4.ª situação só há 1 possibilidade de escolha.

Podemos escolher no total ${}^5C_3 + {}^5C_2 \times 3 + 5 \times {}^3C_2 + 1 = 56$ gelados com 3 sabores diferentes.

106.2 ${}^5C_2 \times 3 = 30$

Corresponde à 2.ª situação da alínea 106.1.

106.3 $56 - 1 = 55$

Ou somatório das três primeiras situações da alínea 106.1.

106.4 Podemos fazer a contagem direta ou pelas situações contrárias. Na contagem direta há 3 situações possíveis:

- escolhem-se 3 sabores que não incluem café nem kivi;
- escolhe-se o sabor a café e 2 sabores que não incluem kivi;
- escolhe-se o sabor a kivi e 2 sabores que não incluem café.

Na 1.ª situação há 6C_3 possibilidades de escolha dos sabores (exclui-se café e kivi).

Na 2.ª situação e na 3.ª situação há 6C_2 possibilidades de escolha dos sabores.

Podemos escolher no total ${}^6C_3 + 2 \times {}^6C_2 = 50$ gelados.

A contagem pelas situações contrárias corresponde a retirar ao total de gelados o número de gelados que contêm simultaneamente os sabores de café e de kivi (falta adicionar um sabor entre 6 possíveis); assim temos o número obtido na alínea 106.1, 56, subtraído de 6.

106.5 Resta escolher 1 sabor entre 6 sabores possíveis (5 sabores de fruta e o sabor a chocolate), pelo que há 6 possibilidades de escolha.

107.1 Há ${}^{12}C_4$ conjuntos distintos de 4 figuras e, para cada um deles, há 4 ases, pelo que podemos seleccionar ${}^{12}C_4 \times 4 = 1980$ conjuntos.

107.2 Há 13 cartas de cada um dos 4 naipes, sendo que em cada há 3 figuras (rei, valete e dama).

Há 3 situações possíveis:

- 2 figuras que não são de espadas;
- 1 figura que não é de espadas e 1 figura de espadas;
- 2 figuras de espadas.

Na 1.ª situação há 9C_2 possibilidades de escolha para as figuras e ${}^{10}C_3$ possibilidades de escolha para as 3 cartas de espadas, pelo que há ${}^9C_2 \times {}^{10}C_3$ possibilidades.

Na 2.ª situação há 9 possibilidades de escolha para a figura que não é de espadas, 3 possibilidades de escolha para a figura de espadas, ${}^{10}C_2$ possibilidades de escolha para as 2 cartas de espadas que faltam e 30 possibilidades para a carta que não é figura e não é de espadas, pelo que há $9 \times 3 \times {}^{10}C_2 \times 30$ possibilidades.

Na 3.ª situação há 3C_2 possibilidades de escolha para as figuras, 10 possibilidades de escolha para a carta de espadas que não é figura e ${}^{30}C_2$ possibilidades de escolha para as 2 cartas que não são figuras nem são de espadas, pelo que há ${}^3C_2 \times 10 \times {}^{30}C_2$ possibilidades.

Há no total ${}^9C_2 \times {}^{10}C_3 + 9 \times 3 \times {}^{10}C_2 \times 30 + {}^3C_2 \times 10 \times {}^{30}C_2 = 53\,820$ possibilidades.

108. Dado que o produto cartesiano

$\{2^0, \dots, 2^5\} \times \{3^0, 3^1\} \times \{5^0, 5^1, 5^2\}$ tem cardinal $6 \times 2 \times 3 = 36$, o número $2400 = 2^5 \times 3 \times 5^2$ tem 36 divisores naturais.

109. Há 10! possibilidades para colocar os livros de Matemática em sequência. Os livros de Física, não podendo ficar lado a lado, terão de ocupar, cada um, as posições existentes entre os de Matemática (9) ou os extremos (2).

Temos, assim, $10! \times {}^{11}A_5$ formas distintas para arrumar os 15 livros sem que fiquem dois livros de Física lado a lado.

110. Como para cada ficha há 9 caixas possíveis, se não houvesse restrições, havia 9^6 possibilidades para colocar as fichas. Resta retirar os casos em que há mais do que 4 fichas nalguma caixa e duas situações podem suceder:

- 1 caixa com as 6 fichas;
- 1 caixa com 5 fichas e 1 caixa com 1 ficha.

Na 1.ª situação há 9 possibilidades para a caixa com as 6 fichas e na 2.ª situação há 9 possibilidades para a caixa com as 5 fichas e 8 possibilidades para a caixa com 1 ficha.

Assim, no total, há $9^6 - 9 \times 8 - 9 = 531\,360$ possibilidades em que qualquer caixa não tem mais de 4 fichas.

111.1 Existem ${}^{12}C_2$ conjuntos distintos de 2 vértices e como as retas definidas por eles não devem conter arestas do prisma, há que deduzir as retas que contêm arestas (número igual ao número de arestas), pelo que há ${}^{12}C_2 - 3 \times 6 = 48$ retas distintas que não contêm arestas do prisma.

111.2 As retas identificadas na alínea anterior que são paralelas às bases são definidas por vértices das bases e não contêm arestas; em cada base há 6C_2 conjuntos distintos de 2 vértices e como as retas definidas por eles não devem conter arestas, há que deduzir as 6 arestas, pelo que são $({}^6C_2 - 6) \times 2 = 30$ retas distintas.

111.3

a. Fixando uma base, há 6C_2 conjuntos distintos de 2 vértices; podemos usar cada conjunto e um dos 6 vértices da outra base para formar um triângulo, pelo que se podem formar nestas condições ${}^6C_2 \times 6$ triângulos. Como podemos permutar as bases, podem formar-se ${}^6C_2 \times 6 \times 2$ triângulos. Este resultado também se podia obter deduzindo ao número de triângulos que se podem formar o número de triângulos que se podem formar em cada base só com os seus vértices, pois não há 3 vértices colineares: obtinha-se ${}^{12}C_3 - 2 \times {}^6C_3 = 180$.

b. Considerando os requisitos do enunciado, e pressupondo que, dado que os vértices não estão identificados, nem está fixado um referencial, não é relevante a ordem das cores nas faces.

Por outro lado, começamos por excluir a hipótese de poder pintar o prisma com menos de três cores (pois, por exemplo, cada vértice é comum a três faces que têm assim uma aresta comum duas a duas, não podendo, portanto, haver duas delas pintadas com a mesma cor). Note-se, também, que ao usarem-se apenas três cores, as bases têm de ser pintadas com a mesma cor (já se gastaram as três cores com três faces com um vértice comum, uma das quais necessariamente uma base, pelo que a outra base têm de ter uma dessa três cores que não pode ser a de uma das faces laterais).

Têm-se, assim, as situações que se seguem.

Uso de 3 cores:

Para a escolha das 3 cores há 6C_3 casos possíveis e só podemos fixar uma cor nas bases que neste caso tem de ser a mesma e alternar as 2 sobranes nas faces laterais, ou seja, há ${}^6C_3 \times 3 = 60$ casos possíveis.

Uso de 4 cores:

Para as 4 cores há 6C_4 possibilidades de escolha, e as bases pode ter cores distintas ou a mesma cor.

- Tendo as bases cores distintas, há 4C_2 possibilidades para as cores das bases e as 2 cores que sobram têm de ser obrigatoriamente alternadas nas faces laterais, pelo que há ${}^4C_2 = 6$ casos possíveis.
- Tendo as bases a mesma cor, há 4 casos possíveis para a cor das bases e sobram 3 cores a usar nas faces laterais. As situações possíveis são:
 - usar a mesma cor em 2 faces opostas e alternar as outras duas entre essas faces opostas, o que representa $3 \times 2 = 6$ casos possíveis (situação do tipo $2 + 2 + 2$);
 - usar uma cor numa face, uma cor em duas e uma cor em três faces, o que representa $3 \times 2 = 6$ casos possíveis (situação do tipo $3 + 2 + 1$).

Assim, há, neste caso, ${}^6C_4 \times (6 + 4 \times 12) = 810$ casos possíveis.

Uso de 5 cores:

Para as 5 cores há 6C_5 escolhas possíveis e as bases ou têm cores distintas ou a mesma cor.

- Tendo as bases cores distintas, há 5C_2 escolhas possíveis para as cores das bases e as cores 3 cores sobranes representam as mesmas situações que no caso anterior, ou seja, 12.
- Tendo as bases a mesma cor, há 5 possibilidades para a cor das bases e sobram 4 cores a usar nas faces laterais e as situações possíveis são:
 - Usar a mesma cor em 3 faces não adjacentes e alternar as outras três entre essas faces, o que representa $4 \times 3 = 12$ hipóteses (situação do tipo $3 + 1 + 1 + 1$).
 - Usar uma cor em duas faces, uma cor em outras duas, uma cor em outra face e outra cor na face restante, pelo que, para escolher as cores não repetidas há 4C_2 hipóteses e para as posições há 4 hipóteses, o que representa $6 \times 8 = 48$ hipóteses (situação do tipo $2 + 2 + 1 + 1$).

Assim, há no total, neste caso, ${}^6C_5 \times ({}^5C_2 \times 12 + 5 \times (12 + 48)) = 2520$ casos possíveis.

Uso de 6 cores:

Para as 6 cores há 1 possibilidade, e as bases ou têm cores distintas ou a mesma cor.

- Tendo as bases cores distintas, há 6C_2 hipóteses para as cores das bases e as 4 cores sobranes representam as mesmas situações que no caso anterior, ou seja, 60.
- Tendo as bases a mesma cor, há 6 possibilidades para a cor das bases e sobram 5 cores, o que significa que uma cor é repetida nas faces laterais (situação do tipo $2 + 1 + 1 + 1 + 1$). As faces com cores repetidas ocupam 3 posições possíveis, sendo que têm 5 possibilidades de cor e as faces de cores não repetidas originam 48 situações.

Assim, há no total, neste caso, ${}^6C_2 \times 60 + 3 \times 5 \times 48 = 1620$ casos possíveis.

Chegámos, desta forma, a um total de $60 + 810 + 2520 + 1620 = 5010$ casos possíveis.

Note-se que o cálculo feito pressupõe que não se distinguem as bases do prisma uma da outra, nem as faces laterais entre si, caso contrário teríamos mais possibilidades. Por exemplo no cálculo feito com o uso de apenas três cores, teríamos de considerar, para além das três hipóteses de escolha para as bases (fixadas as três cores), em cada caso qual a cor escolhida para uma face lateral pré-fixada para começar a pintura, o que daria duas hipóteses, ou seja, no total 120 em lugar de 60. Os outros casos teriam de ser analisados de modo análogo.

$$112.1 \quad \sum_{k=0}^{12} {}^{12}C_k 4^{12-k} (-2)^k = [4 + (-2)]^{12} = 2^{12} = 4096$$

$$112.2 \quad \sum_{k=0}^n {}^nC_k (-1)^k = \sum_{k=0}^n {}^nC_k \times 1^{n-k} \times (-1)^k = [1 + (-1)]^n = 0^n = 0$$

TESTE – PÁG. 44

1. Como $B \subset A \cup B$, $(A \cup B) \cap B = B$ donde $\overline{(A \cup B) \cap B} = \overline{B}$.

Opção correta: B.

2. Há 10 códigos PIN dos telemóveis com, exatamente, quatro algarismos iguais, nomeadamente: 0000, 1111, ..., 8888, 9999.

Opção correta: B.

3. Na 1.ª extração há 40 cartas possíveis.
Na 2.ª extração há 39 cartas possíveis para cada carta que se obtenha na 1.ª extração, ou seja, há 40×39 sequências distintas de duas cartas.
Na 3.ª extração há 38 cartas possíveis para cada sequência distinta de duas cartas já extraídas, ou seja, $40 \times 39 \times 38 = {}^{40}A_3$ sequências distintas de três cartas.

Opção correta: A.

4. A partir de um conjunto de 12 faces podem formar-se ${}^{12}C_6$ subconjuntos distintos com 6 faces.
O mesmo subconjunto pode ser colorido com uma das 8 cores disponíveis, pelo que, tendo em conta a escolha das faces e a cor delas, obtêm-se ${}^{12}C_6 \times 8$ subconjuntos distintos.
Para cada um desses subconjuntos sobram 7 cores para colorir 6 faces que devem ter cores distintas, ou seja, podem formar-se 7A_6 sequências distintas de seis cores, pelo que, pode-se colorir o dodecaedro de ${}^{12}C_6 \times 8 \times {}^7A_6$ maneiras distintas.

Opção correta: C.

5. Se a linha do triângulo de Pascal tem 11 elementos, figuram nessa linha, pela ordem indicada, os elementos

$${}^{11}C_0, {}^{11}C_1, \dots, {}^{11}C_{10} \text{ e } {}^{11}C_{11}.$$

Por um lado, ${}^{11}C_0 = 1$, ${}^{11}C_1 = 11$, ${}^{11}C_2 = 45$ e ${}^{11}C_3 = 120$;

por outro lado ${}^{11}C_0 = {}^{11}C_{11}$, ${}^{11}C_1 = {}^{11}C_{10}$ e ${}^{11}C_2 = {}^{11}C_9$, pelo que figuram nessa linha 6 elementos menores que 100.

Opção correta: C.

6. Por uma das Leis de De Morgan para conjuntos $\overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}}$; além disso $\overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = A \cup B$ e $C \cap \overline{C} = \emptyset$, donde $\overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} \cup (C \cap \overline{C}) = (A \cup B) \cup \emptyset$.

Por outro lado, $\emptyset \subset A \cup B$, pelo que $(A \cup B) \cup \emptyset = A \cup B$

$$\text{Assim, } \left[\overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} \cup (C \cap \overline{C}) \right] \times C = (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$$

7. Um número capicua de 4 algarismos é um número cuja leitura é a mesma quando lido da esquerda para a direita e vice-versa, como por exemplo, 2112.

Como se vê pelo exemplo anterior, o algarismo das unidades é igual ao algarismo das unidades de milhar e o algarismo das dezenas é igual ao algarismo das centenas.

Por outro lado, um número capicua par admite apenas para algarismo das unidades o 2, o 4, o 6 e o 8 e não admite para algarismo das unidades o 0 (caso contrário, o algarismo das unidades de milhar também seria 0 e o número teria apenas 3 algarismos).

Assim, para os algarismos das unidades e unidades de milhar tem-se 4 possibilidades (2, 4, 6 e 8) e, para cada uma dessas possibilidades, tem-se para os algarismos das dezenas e centenas 10 possibilidades (0, ..., 9), pelo que existem $4 \times 10 = 40$ números pares capicuas de 4 algarismos.

- 8.1 Para presidente há 16 raparigas disponíveis e para cada uma dessas possibilidades há 12 rapazes disponíveis para secretário, ou seja, 16×12 pares.

Para cada um dos pares anteriores vai ser escolhido um conjunto de 2 alunos para vogais entre os 26 alunos restantes, pelo que há ${}^{26}C_2$ conjuntos possíveis.

No total há $16 \times 12 \times {}^{26}C_2 = 62\,400$ comissões possíveis.

- 8.2 Vai ser escolhido um conjunto de 5 alunos entre os 28 alunos, pelo que há ${}^{28}C_5 = 98\,280$ conjuntos possíveis.

8.3

- a. A ordem pela qual as 30 pessoas se sentam origina sequências distintas, pelo que há ${}^{35}A_{30}$ sequências distintas.

- b. Um dos professores pode ocupar um dos 2 lugares da frente e o outro professor pode ocupar um dos 5 lugares de trás, pelo que há 2×5 possibilidades para esses 2 pares de lugares.

As possibilidades anteriores duplicam pois o mesmo professor pode estar à frente ou atrás.

Restam 33 lugares para sentar 28 alunos.

Assim, para cada um dos pares de lugares possíveis para os professores há ${}^{33}A_{28}$ sequências diferentes em que os alunos ocupam 28 lugares pelo que, no total, há $2 \times 5 \times 2 \times {}^{33}A_{28}$ possibilidades.

9. Há três situações possíveis para os vértices do triângulo:

- O triângulo tem os 3 vértices de cor azul;
- O triângulo tem 2 vértices de cor azul e 1 vértice de cor vermelha;
- O triângulo tem 1 vértice de cor azul e 2 vértices de cor vermelha.

Note-se que o triângulo não pode ter os 3 vértices de cor vermelha pois estes pontos são colineares.

Na 1.ª situação há ${}^{12}C_3$ conjuntos distintos de 3 pontos azuis.

Na 2.ª situação há ${}^{12}C_2$ conjuntos distintos de 2 pontos azuis e para cada um destes conjuntos há 3 pontos vermelhos possíveis, ou seja, há ${}^{12}C_2 \times 3$.

Na 3.ª situação há 3C_2 conjuntos distintos de 2 pontos vermelhos e para cada um destes conjuntos há 12 pontos azuis possíveis, ou seja, há ${}^3C_2 \times 12$.

Assim, no total há ${}^{12}C_3 + {}^{12}C_2 \times 3 + {}^3C_2 \times 12 = 454$ triângulos possíveis.

10. Quando duas pessoas se cumprimentam, quer seja com um beijo ou com um aperto de mão, esse cumprimento é único, o que justifica o uso das combinações.

Sendo assim, xC_2 são os 45 apertos de mão dados entre os rapazes.

Já yC_2 representa o número de beijos trocados entre as raparigas e xy o número de beijos trocados entre rapazes e raparigas, cuja soma é 108.

Resolução do sistema:

$$\begin{cases} {}^xC_2 = 45 \\ {}^yC_2 + xy = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x-1)}{2} = 45 \\ \frac{y(y-1)}{2} + xy = 108 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 90 \\ y(y-1) + 2xy = 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 90 = 0 \\ y^2 + 19y - 216 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{361}}{2} \\ y = \frac{1 \pm \sqrt{361}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \vee x = -9 \\ y = 8 \vee y = -27 \end{cases}$$

Para haver apertos de mão entre rapazes o seu número (x) será no mínimo 2.

Logo $x = 10$ e de $y(y-1) + 2xy = 216$ resulta que

$$y(y-1) + 20y = 216 \Leftrightarrow y^2 + 19y - 216 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 19y - 216 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-19 \pm \sqrt{1225}}{2} \Leftrightarrow y = 8 \vee y = -27$$

Para haver beijos entre raparigas o seu número (y) será no mínimo 2 pelo que $y = 8$.

Neste jantar, estiveram presentes 10 rapazes e 8 raparigas.

Probabilidades

DIAGNÓSTICO – PÁG. 48

1. $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Opção correta: D.

2. Pela Lei dos grandes números $f_r(A) \rightarrow P(A)$ à medida que se vai repetindo a experiência, isto é, com a repetição da experiência aleatória, a frequência relativa do acontecimento A tende para a sua probabilidade.

Assim se, num lançamento do dado, $P(A) = \frac{1}{12}$, então em 960 lançamentos do dado espera-se que ocorra,

aproximadamente, $960 \times \frac{1}{12} = 80$ vezes a face 10.

Opção correta: C.

- 3.1 8 ementas.

3.2

- a. Casos favoráveis: 4 ementas

Casos possíveis: 8 ementas

$$P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

- b. Casos favoráveis: 6 ementas (4 com caldo numérico e 2 com sopa de números)

Casos possíveis: 8 ementas

$$P = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

- c. Casos favoráveis: 2 ementas (as de sopa de números com doce de ovos estatísticos)

Casos possíveis: 8 ementas

$$P = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

- 4.1 200 pretas e 0 brancas.

- 4.2 200 brancas e 0 pretas.

- 4.3 Mais de 100 pretas e as restantes brancas.

- 4.4 100 brancas e 100 pretas.

5. $\frac{1}{8}$

6. Se a probabilidade de sair bola branca é $\frac{3}{5}$, então

a probabilidade de sair bola preta é $\frac{2}{5}$ e, como estão no

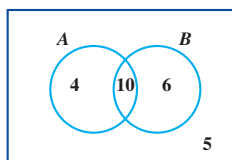
saco 6 bolas pretas, sendo x o número total de bolas no

saco, $\frac{6}{x} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = 15$, ou seja, no saco estão $15 - 6 = 9$

bolas brancas.

- 7.1 Se há 25 alunos na turma e 5 não gostam de nenhuma das modalidades, então 20 gostam de, pelo menos, uma das modalidades.

Como 14 gostam de andebol e 16 de basquetebol, então há $14 + 16 - 20 = 10$ que gostam de ambas as modalidades, gostando exclusivamente de andebol $14 - 10 = 4$ alunos e gostando exclusivamente de basquetebol $16 - 10 = 6$ alunos.



- 7.2.a $\frac{6}{25}$
- b. $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$
8. $P = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$

1. ESPAÇOS DE PROBABILIDADE

PÁG. 55

- 1.1 No baralho há 4 reis, pelo que $P = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.
- 1.2 No baralho há 4 naipes, cada um com 3 figuras, pelo que $P = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$.
- 1.3 No baralho há 4 naipes, cada um com as cartas 2, 3 e 4, pelo que $P = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$.
- 2.1 $\frac{1}{2}$
- 2.2 Os divisores de 20 são os elementos do conjunto $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, pelo que $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
- 2.3 $\frac{1}{6}$
- 2.4 $\frac{1}{2}$
- 3.1 Há 5 possibilidades para um grupo e, para cada uma dessas possibilidades, há 5 possibilidades no outro grupo, pelo que o n.º de casos possíveis é $5 \times 5 = 25$.

3.2

- a Os casos favoráveis são 3 e são os elementos do conjunto

$$\{(10_{\text{espadas}}, 10_{\text{copas}}); (\text{valeta}_{\text{espadas}}, \text{valeta}_{\text{copas}}); (\text{rei}_{\text{espadas}}, \text{rei}_{\text{copas}})\}$$

pelo que $P = \frac{3}{25}$.

- b. Resolvendo pelo acontecimento contrário («nenhuma das cartas ser figura») tem-se que $P = 1 - \frac{3 \times 2}{25} = \frac{19}{25}$.

c. $P = \frac{3 \times 2}{25} = \frac{6}{25}$

d. 0

e. 1

4.1 $P = \frac{12}{48 + 12 + 40} = \frac{12}{100} = 0,12 = 12\%$

4.2 $P = \frac{40}{48 + 12 + 40} = \frac{40}{100} = 0,4 = 40\%$

4.3 $P = \frac{48}{48 + 12 + 40} = \frac{48}{100} = 0,48 = 48\%$

4.4 $P = \frac{0}{48 + 12 + 40} = 0 = 0\%$

$$5. P(\overline{B}) = 1 - P(B) \Leftrightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,4 = 0,6$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ = 0,5 + 0,6 - 0,2 = 0,9$$

$$6.1 P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$6.2 P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ = 0,3 + 0,7 - 0,2 = 0,8$$

$$7.1 P(A \cup \overline{B}) + P(B) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) + P(B) = \\ = P(A) + 1 - P(B) - P(A \cap \overline{B}) + P(B) \\ = P(A) + 1 - P(A \cap \overline{B}) = P(A) + P(\overline{A \cap \overline{B}}) \\ = P(A) + P(\overline{A \cup B})$$

$$7.2 P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = \\ = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cap B) \\ P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \\ = P(\overline{A \cup B}) - P(\overline{A}) + P(B) = 0,5 - 0,7 + 0,2 = 0 \\ A \text{ e } B \text{ não são contrários pois } P(A) + P(B) = 0,3 + 0,2 \neq 1$$

$$8.1 P(\overline{A \cup B}) - P(A \cup B) = P(\overline{A \cap B}) - P(A \cup B) = \\ = 1 - P(A \cap B) - P(A \cup B) \\ = 1 - P(A \cap B) - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ = 1 - P(A \cap B) - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ = 1 - P(A) - P(B) = P(\overline{A}) - P(B)$$

$$8.2 P(A) + P(B) + P(\overline{A \cap B}) = P(A) + P(B) + P(\overline{A \cup B}) = \\ = P(A) + P(B) + 1 - P(A \cup B) \\ = P(A) + P(B) + 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ = P(A) + P(B) + 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ = 1 + P(A \cap B)$$

$$8.3 P([(A \cup B) \cap C]) = P([(A \cap C) \cup (B \cap C)]) = \\ = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P([(A \cap C) \cap (B \cap C)]) \\ = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

$$9. P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 3P(B) + P(B) - 4P(B) = 0$$

PÁG. 57

$$10. \text{ Seja } x \text{ o número total de bolas na caixa } \frac{8}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 16, \\ \text{ donde há } 16 - 8 = 8 \text{ bolas roxas na caixa.}$$

Opção correta: C.

$$11. \text{ Seja } x \text{ o número de berlindes verdes que são acrescentados ao saco } \frac{4+x}{10+x} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x = 20, \text{ donde é preciso colocar mais 20 berlindes verdes no saco.}$$

Opção correta: D.

$$12. \text{ Seja } x \text{ o número de rapazes que devem sair da turma } \frac{9-x}{27-x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 3, \text{ donde devem sair da turma 3 rapazes.}$$

Opção correta: A.

$$13. \text{ Para que, após rodar o ponteiro duas vezes, a soma seja } \frac{7}{2} \\ \text{ é necessário que o ponteiro tenha parado nos setores 3 e } \frac{1}{2} \text{ (por esta ordem ou pela ordem contrária).}$$

$$\text{ Assim, a probabilidade pedida é } \frac{2}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{8} = \frac{3}{16}.$$

Opção correta: D.

$$14. \text{ Casos favoráveis: 3 (retas CF, BE e AD)}$$

Casos possíveis: 6C_2 (número de retas formadas a partir de 2 vértices do hexágono)

$$P = \frac{3}{{}^6C_2} = \frac{1}{5}$$

Opção correta: B.

$$15.1 \text{ A probabilidade pedida é } \frac{2}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8}.$$

Opção correta: C.

$$15.2 \text{ A probabilidade pedida é } \frac{4}{6} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{12}.$$

Opção correta: A.

$$16. \text{ A probabilidade pedida é } \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

Opção correta: D.

$$17. \text{ Se } P(A) = 0,1, \text{ então } 1 - P(\overline{A}) = P(A) = 0,1.$$

Opção correta: C.

18. Como $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A \cap B) + 0,2,$$

$P(A) = 0,6$ e $P(B) = 0,7$, tem-se:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) + 0,2 = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{P(A) + P(B) - 0,2}{2} = \frac{0,6 + 0,7 - 0,2}{2} = 0,55$$

Como $P(A \cup B) = P(A \cap B) + 0,2 = 0,55 + 0,2 = 0,75$.

Opção correta: B.

19.1 $P(A) + P(B) + P(\overline{A \cap B}) = P(A) + P(B) + P(\overline{A \cup B}) =$

$$= P(A) + P(B) + 1 - P(A \cup B)$$

$$= P(A) + P(B) + 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= P(A) + P(B) + 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 + P(A \cap B)$$

19.2 $P(\overline{A \cup B}) + P(A \cap B) = P(\overline{A \cap B}) + P(A \cap B) =$

$$= 1 - P(A \cap B) + P(A \cap B) = 1$$

19.3 $P(A \cup \overline{B}) + P(B) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) + P(B) =$

$$= P(A) + 1 - P(A \cap \overline{B})$$

$$= P(A) + P(A \cap \overline{B}) = P(A) + P(\overline{A \cup B})$$

PÁG. 59

20.1 $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

20.2 $P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

20.3 $P(D) = \frac{3 \times 3}{3 \times 4} = \frac{3}{4}$

20.4 $A \cap C$: «a ficha retirada é preta e tem um número superior a 3»

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4 \times 3} = \frac{1}{12}$$

20.5 $B \cap D$: «a ficha retirada tem um número par inferior a 4»

$$P(B \cap D) = \frac{3 \times 1}{4 \times 3} = \frac{1}{4}$$

20.6 $\overline{A \cap C}$: «a ficha retirada não é preta e tem um número superior a 3»

$$P(\overline{A \cap C}) = \frac{2 \times 1}{4 \times 3} = \frac{1}{6}$$

20.7 $P(\overline{D \cup (B \cap D)}) = P[(\overline{D \cup B}) \cap (\overline{D \cup D})] =$

$$= P[(\overline{D \cup B}) \cap \overline{D}] = P(\overline{D \cup B})$$

$$= 1 - P(D \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

21.1 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 2P(B) + P(B) - P(B) = 2P(B)$$

21.2 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$$= 2P(B) + P(B) - 0 = 3P(B)$$

22.1 Casos favoráveis: 5 (pensarem ambas no 1, 2, 3, 4 ou 5)
Casos possíveis: $5 \times 5 = 25$ (para cada possibilidade de uma há 5 possibilidades para a outra)

$$P = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

22.2 Casos favoráveis: $3 \times 3 = 9$ (para cada uma há 3 possibilidades (1, 3 ou 5) e, para cada uma dessas possibilidades, há as mesmas 3 possibilidades para a outra)

Casos possíveis: 25

$$P = \frac{9}{25}$$

22.3 Casos favoráveis: 10 (se a Ana pensar no 1 há 4 possibilidades para a Constança (2 a 5); se a Ana pensar no 2 há 3 possibilidades para a Constança (3, 4 e 5); se a Ana pensar no 3 há 2 possibilidades para a Constança (4 e 5); se a Ana pensar no 4 só há 1 possibilidade para a Constança (5); por fim, se a Ana pensar no 5 não há nenhuma possibilidade para a Constança)

Casos possíveis: 25

$$P = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

23.1 $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) =$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cap B)$$

23.2

a. Casos favoráveis: 30 (há 30 cartas que não são do naipe de paus)

Casos possíveis: 40 (há 40 cartas no baralho)

$$P = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

b. A probabilidade pedida é $\frac{10}{40} \times \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$.

c. $\overline{A \cap B}$: «nem a primeira, nem a segunda cartas extraídas são do naipe de paus»

$$P(\overline{A \cap B}) = \frac{30}{40} \times \frac{29}{39} = \frac{29}{52}$$

d. $P(B) = \frac{10}{40} \times \frac{9}{39} + \frac{30}{40} \times \frac{10}{39} = \frac{1}{4}$

2. PROBABILIDADE CONDICIONADA

PÁG. 63

24. Sejam os acontecimentos A : «ser pai» e I : «dar importância à aplicação do plano de segurança (PS) da escola»

24.1 Restringindo o universo aos participantes que dão importância à aplicação do PS, $P(A|I) = \frac{200}{350} = \frac{4}{7}$.

24.2 Restringindo o universo aos participantes que não dão importância à aplicação do PS, $P(A|\bar{I}) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$.

25. Sejam os acontecimentos V : «ser vaca» e D : «ser animal portador da doença».

$$P(D) = P(V \cap D) + P(\bar{V} \cap D) = 0,05 \times 0,55 + 0,02 \times 0,45 = 0,0365 = 3,65\%$$

26.1 $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cap \bar{B}) = A \cap \emptyset = \emptyset$

Por um lado tem-se que

$$P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = P(A \cap (B \cup \bar{B})) = P(A \cap E) = P(A).$$

Por outro lado tem-se que

$$P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) \underset{\substack{\downarrow \\ A \cap B \text{ e } A \cap \bar{B} \text{ acontec. incompatíveis}}}{=} P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}).$$

Das duas igualdades obtém-se que

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B}).$$

26.2

a. Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ e

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B}) \text{ então}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - [P(A) - P(A \cap \bar{B})] = P(B) + P(A \cap \bar{B})$$

Da igualdade resulta

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A \cap \bar{B}) = \frac{13}{20} - \frac{3}{8} = \frac{11}{40} \Rightarrow P(A) = 2P(B) = \frac{11}{20}.$$

b. Como $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B}) = \frac{11}{20} - \frac{3}{8} = \frac{7}{40}$

$$\text{e } P(B) = \frac{1}{2} P(A) = \frac{11}{40},$$

$$\text{então } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{40}}{\frac{11}{40}} = \frac{7}{11}.$$

$$27. P(\bar{B}|A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)}$$

Na resolução da alínea 12.1. do exercício anterior provou-se o resultado

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B).$$

$$\text{Assim, } P(\bar{B}|A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A)}{P(A)} - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - P(B|A).$$

28. Sejam os acontecimentos V : «ver o anúncio do artigo XPTO» e C : «comprar o produto XPTO».

$$28.1 P(V \cap C) = 0,43 \times 0,35 \approx 0,15$$

$$28.2 P(V \cup C) = P(V) + P(C) - P(V \cap C) \approx 0,35 + 0,23 - 0,15 = 0,43$$

$$28.3 P(V|C) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)} \approx \frac{0,15}{0,23} \approx 0,65$$

29. Seja o acontecimento A : «a empresa instalada no parque dedica-se à atividade alimentar».

$$P(A) = P(P_1 \cap A) + P(P_2 \cap A) + P(P_3 \cap A) = 0,1 \times \frac{1}{3} + 0,4 \times \frac{1}{3} + 0,25 \times \frac{1}{3} = 0,25$$

PÁG. 67

30. Se A e B forem acontecimentos independentes, então

$$P(A|B) = P(A).$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A|B) \times P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} = 2P(B) + P(B) - \frac{P(B)}{6} \Leftrightarrow P(B) = \frac{4}{17} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) = 2P(B) = \frac{8}{17} \neq \frac{1}{6} = P(A|B)$$

A e B não são acontecimentos independentes.

$$31.1 P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \text{ e}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{31.2} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = P(A) \times P(B),$$

pelo que A e B são acontecimentos independentes.

$$\begin{aligned} 32. \quad P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) && \downarrow \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = && P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \\ &= P(B) + P(A)[1 - P(B)] && \downarrow \\ & && 1 - P(B) = P(\bar{B}) \end{aligned}$$

33. O acontecimento contrário a «ganhar pelo menos um prémio» é «perder os dois prémios», pelo que o valor da probabilidade pedida é $1 - 0,85 \times 0,93 = 0,2095$.

$$\begin{aligned} 34. \quad P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = P(A) + P(B)[1 - P(A)] \\ &= P(A) + P(B) \times P(\bar{A}) \end{aligned}$$

Então, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \times P(\bar{A}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0,7 = 0,5 + P(B) \times 0,5 \Leftrightarrow P(B) = \frac{2}{5}.$$

PÁG. 71

35. Pode vestir-se e calçar-se de $3 \times 2 \times 2 = 12$ maneiras diferentes.

Opção correta: A.

36. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Opção correta: C.

37. Acontecimento elementar.

Opção correta: D.

38. É um acontecimento composto pelos acontecimentos elementares do conjunto $\{5, 6, 7, 8\}$.

Opção correta: A.

39. A interseção dos acontecimentos A e B é

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{4, 5\} = \{4\}.$$

Opção correta: D.

40. O acontecimento $\bar{A}$ é

«sair uma face com número ímpar», pelo que $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.

Opção correta: A.

41. Como $P(\text{sair bola azul}) = \frac{1}{6} = \frac{3}{18}$

então há na caixa 3 bolas azuis em 18 bolas, donde há na caixa 15 bolas amarelas.

Opção correta: C.

PÁG. 72

42. $\frac{1}{2}$

Opção correta: B.

43. Saem dois lápis de cores diferentes nas situações em que sai na 1.^a extração amarelo e na 2.^a extração azul e vice-versa, ou seja,

$$P = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}.$$

Opção correta: D.

44. Sendo A um acontecimento possível, tem-se $0 < P(A) \leq 1$.
Sendo também não certo, tem-se $0 < P(A) < 1$.

Opção correta: B.

45. Como a soma dos números de páginas consecutivas é sempre um número ímpar, o acontecimento é um acontecimento certo.

Opção correta: D.

46. Como $P(A \cap B) = P(A) \neq 0$, $P(A \cup B) = P(B) \neq 1$ e

$P(A) \leq P(B)$ então, por exclusão, pode verificar-se

$P(\bar{A}) \geq P(B)$, embora também possa não se verificar.

Opção correta: B.

$$\begin{aligned} 47. \quad P(\overline{A \cup B}) &= 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + 1 - P(\overline{A \cap B}) \\ &= 1 - 0.6 - 0.5 + 1 - 0.8 = 0.1 \end{aligned}$$

Opção correta: A.

48. Se a 1.ª bola retirada tinha a cor azul, antes da 2.ª extração restavam na caixa 3 bolas vermelhas e 2 bolas azuis, pelo que a probabilidade de retirar bola vermelha na próxima extração é $\frac{3}{5}$.

Opção correta: B.

PÁG. 73

49. $P(B|A) = \frac{1}{4}$

Opção correta: C.

50. A probabilidade de suceder o acontecimento A sabendo que o acontecimento A já sucedeu é 1.

Opção correta: A.

51. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,9 = 0,7 + P(B) - 0,2 \Leftrightarrow P(B) = 0,4$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,4} = \frac{1}{2}$$

Opção correta: B.

52. O acontecimento contrário a «sair pelo menos uma ficha amarela» é «não sair nenhuma ficha amarela», pelo que o valor da probabilidade pedida

$$\text{é } 1 - \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{8}{15}.$$

Opção correta: C.

53. Os jogadores empatam no caso de o jogador que já concretizou 4 buracos concretizar mais um e pode concretizá-lo numa das duas jogadas, isto é, concretiza um buraco numa das jogadas e não concretiza na outra, pelo que o valor da probabilidade pedida é $0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,6 = 0,48$.

Opção correta: D.

54. Casos favoráveis: 7A_4 (para o 1.º cachorro nascido havia 7 dias disponíveis, para o 2.º havia 6 dias, para o 3.º havia 5 dias e para o 4.º havia 4 dias disponíveis)

Casos possíveis: 7^4 (cada um dos 4 cachorros nascidos pode ter nascido num dos 7 dias da semana)

$$P = \frac{{}^7A_4}{7^4} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{7^4} = \frac{120}{7^3}$$

Opção correta: D.

PÁG. 74

55. Casos favoráveis: 4^3 (há 4 cartas possíveis para 2 e, para cada uma delas, há 4 cartas possíveis para 3 e, para cada subconjunto com um 3, há 4 cartas possíveis para 4)

Casos possíveis: ${}^{52}C_3$ (número de subconjuntos de 3 cartas formados a partir de um conjunto de 52 cartas)

$$P = \frac{4^3}{{}^{52}C_3} = \frac{4^3}{\frac{52 \times 51 \times 50}{3!}} = \frac{3! \times 4^3}{{}^{52}A_3}$$

Opção correta: D.

56. Há $50 - 12 - 25 = 13$ médicos que falam ambas as línguas.

Casos favoráveis: ${}^{50}C_2$ (número de subconjuntos de 2 congressistas formados a partir de um conjunto de 13 congressistas que falam ambas as línguas)

Casos possíveis: ${}^{50}C_2$ (número de subconjuntos de 2 congressistas formados a partir de um conjunto de 50 congressistas)

$$P = \frac{{}^{13}C_2}{{}^{50}C_2}$$

Opção correta: C.

57. Utilizando o acontecimento contrário a «não chamarem todos o mesmo veterinário», isto é, o acontecimento «chamarem todos o mesmo veterinário» tem-se:

Casos favoráveis: 4 (chamarem todos um dos 4 veterinários);

Casos possíveis: 4^5 (cada dono podia ter ligado para um qualquer dos 4 hospitais veterinários).

$$P = 1 - \frac{4}{4^5} = 1 - \frac{1}{4^4} = \frac{4^4 - 1}{4^4} = \frac{255}{256}$$

Opção correta: B.

58. Casos favoráveis: 6C_3 (número de subconjuntos de 3 pulseiras formados a partir de um conjunto de 6 pulseiras verdes)

Casos possíveis: ${}^{20}C_3$ (número de subconjuntos de 3 pulseiras formados a partir de um conjunto de 20 pulseiras)

$$P = \frac{{}^6C_3}{{}^{20}C_3} = \frac{1}{57}$$

59. Para que não apareça o 0 os algarismos do número são escolhidos a partir do conjunto $\{1, \dots, 9\}$, pelo que para cada algarismo podemos escolher 9 números, donde há $9^5 = 59\,049$ números nestas condições.

Casos favoráveis: 9A_5 (para o 1.º algarismo há 9 números possíveis, para o 2.º há 8, para o 3.º há 7, para o 4.º há 6 e para o 5.º há 5 algarismos possíveis).

Casos possíveis: 9^5

$$P = \frac{{}^9A_5}{9^5} \approx 0,256$$

60. Casos favoráveis: 3^4 (há 3 possibilidades para cada sabor)

Casos possíveis: ${}^{12}C_4$ (número de subconjuntos de 4 iogurtes formados a partir de um conjunto de 12 iogurtes)

$$P = \frac{3^4}{{}^{12}C_4} = \frac{9}{55}$$

PÁG. 75

61. Casos favoráveis: 3 (retas AD , BE e OC)

Casos possíveis: 6C_2 (número de subconjuntos de 2 vértices formados a partir de um conjunto de 6 vértices)

$$P = \frac{3}{{}^6C_2} = \frac{1}{5}$$

- 62.1 $3^4 \times 2^4 = 1296$ (para cada face triangular da pirâmide há 3 cores disponíveis e para cada conjunto de cores das 4 faces triangulares da pirâmide há 2 cores disponíveis para cada uma das 4 faces laterais do cubo).

- 62.2 Casos favoráveis: ${}^8C_5 \times {}^4A_3$ (das faces do sólido escolhe-se um conjunto de 5 faces para pintar de amarelo e, para as restantes 3 faces, escolhem-se 3 cores entre as 4 cores que não são amarelo)

Casos possíveis: 5^8 (para cada face do sólido há 5 cores disponíveis)

$$P = \frac{{}^8C_5 \times {}^4A_3}{5^8} \approx 0,0034$$

63. Casos favoráveis: ${}^{29}C_2$ (sendo o Jacinto um dos sentinelas basta escolher os outros 2, o que neste caso é o número de subconjuntos de 2 marinheiros formados a partir de um conjunto de 29 marinheiros)

Casos possíveis: ${}^{30}C_3$ (número de subconjuntos de 3 marinheiros sentinelas formados a partir de um conjunto de 30 marinheiros)

$$P = \frac{{}^{29}C_2}{{}^{30}C_3} = \frac{1}{10} = 10\%$$

- 64.1 As 4 cartas 7, 8, 9 e 10 podem permutar entre si, no início ou no fim; as restantes 9 cartas também podem permutar entre si, pelo que, há $4! \times 2 \times 9! = 17\,418\,240$ maneiras distintas de sequenciar o naipe de ouros com as 4 cartas 7, 8, 9 e 10 juntas.

- 64.2 Casos favoráveis: $4 \times {}^4C_3 \times {}^{44}C_4 + 4 \times {}^{44}C_3$ (há 2 situações distintas: 3 damas nas 8 cartas ou 4 damas nas 8 cartas)

Na 1.ª situação há 4 possibilidades de escolha para o ás e, para cada uma delas, há 4C_3 conjuntos de 3 damas formados a partir do conjunto das 4 damas; por fim, como já estão escolhidas 4 cartas, basta escolher outras 4 entre as 44 que não são ases nem damas;

Na 2.ª situação também há 4 possibilidades de escolha para o ás e, como as 4 damas já estão escolhidas, basta escolher 3 cartas entre as 44 cartas que não são ases nem damas.

Casos possíveis: ${}^{52}C_8$ (número de subconjuntos de 8 cartas formados a partir de um baralho de 52 cartas)

$$P = \frac{4 \times {}^4C_3 \times {}^{44}C_4 + 4 \times {}^{44}C_3}{{}^{52}C_8} = 0,00296$$

65. Casos favoráveis: ${}^9A_3 \times 24!$ (na fila de baixo há 9 cacifos disponíveis para a Mafalda e, para cada um deles, há 8 cacifos disponíveis para a Carolina e, escolhidos estes, há 7 cacifos disponíveis para o António, sendo que os cacifos dos restantes 24 professores podem permutar entre si)

Casos possíveis: $27!$ (os cacifos dos 27 professores podem permutar entre si)

$$P = \frac{{}^9A_3 \times 24!}{27!} \approx 0,0287$$

66. Casos favoráveis: $8 \times 3! \times 4!$ (a 1.ª criança de uma permutação fixa intercalada de rapazes e raparigas pode ocupar 8 lugares diferentes no círculo)

Casos possíveis: $8!$ (as 8 crianças podem permutar pelos 8 lugares disponíveis)

$$P = \frac{8 \times 3! \times 4!}{8!} \approx 0,0286$$

67. Para formar um triângulo há que escolher para vértices 3 pontos não colineares e, como na figura não há conjuntos de 3 pontos colineares, temos:

Casos favoráveis: 4 (como um dos lados é $[BD]$ então já estão escolhidos 2 vértices, pelo que basta escolher mais 1 entre os pontos C , E , F e G)

Casos possíveis: 6C_3 (número de subconjuntos de 3 pontos formados a partir de um conjunto de 6 pontos)

$$P = \frac{4}{{}^6C_3} = \frac{1}{5}$$

68. A contagem dos casos possíveis pode ser feita de 2 formas distintas: ignorando a ordem pela qual as 3 primeiras inspeções são feitas e, nesse caso, há 7C_3 casos ou considerando a ordem pela qual as 3 primeiras inspeções são feitas e, nesse caso, há 7A_3 casos.

Quanto a casos favoráveis, há 1 se ignorarmos a ordem pela qual as 3 primeiras inspeções são feitas, e há 3! se considerarmos a ordem pela qual as 3 primeiras inspeções são feitas.

$$P = \frac{1}{{}^7C_3} = \frac{3!}{{}^7A_3} \approx 0,03 = 3\%$$

- 69.1 Existem ${}^7C_2 \times {}^5C_2 \times {}^3C_2 = 630$ números nessas condições (dos 7 algarismos a colocar escolhemos 2 posições para colocar os 4 e, para essa posição conjunta, escolhemos, entre as 5 posições restantes, 2 posições para colocar os 9; entre as 3 posições restantes escolhemos 2 para colocar os 7 e o 2 fica colocado na posição sobranter).

69.2 Casos favoráveis: 1 (o número de telefone correto)

Casos possíveis: $4!$ (os 4 algarismos sobrantes $\{2, 4, 7, 9\}$ podem permutar entre si)

$$P = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

PÁG. 77

70. Casos favoráveis: 5 (falta escolher 1 assessor entre os 5 que não são a Dra. Relvas nem o Dr. Martins)

Casos possíveis: 7C_3 (número de subconjuntos de 3 assessores formados a partir de um conjunto de 7 assessores)

$$P = \frac{5}{{}^7C_3} = \frac{1}{7}$$

71. Casos favoráveis: 1 (escolher os vértices E e H)

Casos possíveis: 8C_2 (número de subconjuntos de 2 vértices formados a partir de um conjunto de 8 vértices)

$$P = \frac{1}{{}^8C_2} = \frac{1}{28}$$

72.1 Como uma reta fica definida por 2 pontos, o número de retas resulta de contar o número de subconjuntos de 2 pontos formados a partir do conjunto dos 10 pontos, tendo apenas o cuidado de não contar as retas CD e CF mais do que uma vez, pois as retas CI e DI coincidem com a reta CD e as retas CJ e FJ coincidem com a reta CF .

Assim, podem ser definidas ${}^{10}C_2 - 4 = 41$ retas.

72.2 Um plano fica definido por 3 pontos não colineares:

Casos favoráveis: $3 \times {}^4C_3 + 2 \times ({}^5C_3 - 1) + {}^6C_3 - 2$ (nas faces $[ADEH]$, $[ABGH]$ e $[EFHG]$ qualquer subconjunto de 3 pontos dos 4 indicados na face define o plano que contém a face)

Na face $[ABCD]$ qualquer subconjunto de 3 pontos dos 5 indicados na face, à exceção do conjunto de pontos colineares $\{C, D, I\}$, define o plano que contém a face;

Na face $[BCFG]$ qualquer subconjunto de 3 pontos dos 5 indicados na face, à exceção do conjunto de pontos colineares $\{C, F, J\}$, define o plano que contém a face;

Na face $[CDEF]$ qualquer subconjunto de 3 pontos dos 6 indicados na face, à exceção dos conjuntos de pontos colineares $\{C, D, I\}$ e $\{C, F, J\}$, define o plano que contém a face.

Casos possíveis: ${}^{10}C_3$ (número de subconjuntos de 3 pontos formados a partir de um conjunto de 10 pontos)

$$P = \frac{3 \times {}^4C_3 + 2 \times ({}^5C_3 - 1) + {}^6C_3 - 2}{{}^{10}C_3} = \frac{2}{5}$$

73.1 Há 5 vogais e 10 algarismos para formar o código.

Casos favoráveis: ${}^3C_2 \times {}^5A_2 \times 10 + {}^5A_3 \times 10$ (há 2 situações distintas: repete-se uma vogal ou não se repete nenhuma vogal)

Na 1.ª situação há 3C_2 possibilidades de escolha para a posição das vogais iguais e, como basta escolher 2 vogais, há 5A_2 possibilidades de escolha para elas; por fim, como os 4 algarismos são iguais, há 10 possibilidades de escolha para eles.

Na 2.ª situação, como as 3 vogais são diferentes há 5A_3 possibilidades de escolha para elas e, como os algarismos são iguais, também há 5 possibilidades de escolha para eles.

Casos possíveis: $5^3 \times 10^4$ (para cada vogal há 5 possibilidades e para cada algarismo há 10 possibilidades)

$$P = \frac{{}^3C_2 \times {}^5A_2 \times 10 + {}^5A_3 \times 10}{5^3 \times 10^4} = \frac{3}{3125}$$

73.2 Casos favoráveis: $3 \times 4^2 \times {}^4C_2 \times 9^2$ (a letra «a» pode estar em 3 posições distintas e, para as posições de vogal não ocupadas pela letra «a» basta escolher 2 vogais diferentes de «a», mas que poderão ser iguais entre si resta escolher 2 posições para colocar os algarismos escolher 2 algarismos diferentes de 7, mas que também poderão ser iguais entre si)

Casos possíveis: $5^3 \times 10^4$

$$P = \frac{3 \times 4^2 \times {}^4C_2 \times 9^2}{5^3 \times 10^4} = \frac{1458}{78125}$$

73.3 Como nada se diz sobre as vogais, pode usar-se o acontecimento «não ter nenhum algarismo igual a 4» que é contrário ao acontecimento «ter pelo menos um algarismo igual a 4»:

Casos favoráveis ao acontecimento contrário: $5^3 \times 9^4$ (para cada vogal há 5 possibilidades e para cada algarismo há 9 possibilidades – todos exceto o algarismo 4)

Casos possíveis: $5^3 \times 10^4$

$$P = 1 - \frac{5^3 \times 9^4}{5^3 \times 10^4} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 = \frac{3439}{10000}$$

74.1 Casos favoráveis: 4A_3 (escolha de 3 algarismos do conjunto $\{2, 4, 6, 8\}$, considerando a ordem)

Casos possíveis: $9 \times 9 \times 8$ (para o algarismo das centenas há 9 possibilidades (1, ..., 9) e, para cada uma delas, há 9 possibilidades para o algarismo das dezenas (só não se pode utilizar o número do algarismo das centenas) e, para estes dois algarismos, há 8 possibilidades para o algarismo das unidades (só não se podem utilizar os números dos algarismos das centenas e das dezenas))

$$P = \frac{{}^4A_3}{9 \times 9 \times 8} = \frac{1}{27}$$

74.2 Casos favoráveis: $9 \times 8 + 8 \times 8$ (se o número de 3 algarismos diferentes é divisível por 5 então o algarismo das unidades é 0 ou 5)

Na 1.^a situação há 9 possibilidades para o algarismo das centenas (1, ..., 9) e, para cada uma delas, há 8 possibilidades para o algarismo das dezenas (só não se pode utilizar o número do algarismo das centenas e o 0);

Na 2.^a situação há 8 possibilidades para o algarismo das centenas (só não se pode utilizar o 0 e o 5) e, para cada uma delas, há 8 possibilidades para o algarismo das dezenas (só não se pode utilizar o número do algarismo das centenas e o 5).

Casos possíveis: $9 \times 9 \times 8$

$$P = \frac{9 \times 8 + 8 \times 8}{9 \times 9 \times 8} = \frac{17}{81}$$

74.3 Casos favoráveis: $7 + 4 \times 8 + 7 \times 9 \times 8$

A contagem pode ser dividida em 3 partes:

- 7 números de 251 a 259
({251, 253, 254, 256, 257, 258, 259})
- 4×8 números de 260 a 299 (2 no algarismo das centenas, 4 possibilidades para o algarismo das dezenas (6 a 9) e, para cada uma delas, 8 possibilidades para o algarismo das unidades, onde só não se pode utilizar o número do algarismo das dezenas e o 2)
- $7 \times 9 \times 8$ números de 300 a 999 (7 possibilidades para o algarismo das centenas (3 a 9), 9 possibilidades para o algarismo das dezenas, onde só não se pode utilizar o número do algarismo das centenas e 8 possibilidades para o algarismo das unidades, onde só não se podem utilizar os números dos algarismos das centenas e dezenas)

Casos possíveis: $9 \times 9 \times 8$

$$P = \frac{7 + 4 \times 8 + 7 \times 9 \times 8}{9 \times 9 \times 8} = \frac{181}{216}$$

PÁG. 78

75.1

- a. De 1 a 11 há 5 números pares, pelo que $P = \frac{5}{11}$.
- b. Há 3 bolas azuis e com número ímpar (1, 3 e 5), pelo que $P = \frac{3}{11}$.
- c. Há 2 bolas vermelhas e com número primo (7 e 11), pelo que $P = \frac{2}{11}$.

75.2

- a. Há duas situações distintas: 2 bolas azuis ou 2 bolas vermelhas e, como há reposição da bola previamente extraída antes da 2.^a extração, obtém-se

$$P = \frac{5}{11} \times \frac{5}{11} + \frac{6}{11} \times \frac{6}{11} = \left(\frac{5}{11}\right)^2 + \left(\frac{6}{11}\right)^2 = \frac{61}{121}$$

- b. Há duas situações distintas: par e ímpar ou ímpar e par, donde se obtém

$$P = \frac{5}{11} \times \frac{6}{11} + \frac{6}{11} \times \frac{5}{11} = 2 \times \frac{5}{11} \times \frac{6}{11} = \frac{60}{121}$$

- c. Casos favoráveis: 11 (duas bolas 1, duas bolas 2, ..., duas bolas 11)

Casos possíveis: 11×11 (11 possibilidades para a 1.^a bola e, para cada uma delas, 11 possibilidades para a 2.^a bola)

$$P = \frac{11}{11 \times 11} = \frac{1}{11}$$

75.3

- a. Casos favoráveis: ${}^5C_3 + {}^6C_3$ (há 2 situações possíveis: 3 bolas azuis ou 3 bolas vermelhas)

Casos possíveis: ${}^{11}C_3$ (número de subconjuntos de 3 bolas formados a partir de um conjunto de 11 bolas)

$$P = \frac{{}^5C_3 + {}^6C_3}{{}^{11}C_3} = \frac{2}{11}$$

- b. Casos favoráveis: ${}^5C_2 \times 6$ (como há 5 números pares e 6 números ímpares, há 5C_2 possibilidades de escolha para os números pares e, para cada uma delas, há 6 possibilidades de escolha para o número ímpar)

Casos possíveis: ${}^{11}C_3$

$$P = \frac{{}^5C_2 \times 6}{{}^{11}C_3} = \frac{4}{11}$$

- c. Casos favoráveis: $2 \times {}^3C_2$ (para a bola azul há 2 possibilidades (bolas com os números 2 e 4) e, para cada uma delas, há 3C_2 possibilidades de escolha para as bolas vermelhas pares, nomeadamente, 2 do conjunto das bolas numeradas com 6, 8 e 10)

Casos possíveis: ${}^{11}C_3$

$$P = \frac{2 \times {}^3C_2}{{}^{11}C_3} = \frac{2}{55}$$

- 76.1** Dado que há 1 lugar em cada ponta em 6 lugares possíveis tem-se $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

- 76.2** Casos favoráveis: $5 \times 2! \times 4!$ (a 1.ª das duas amigas pode ocupar desde o 1.º ao 5.º lugar, podendo também permutar as 2 amigas e os 4 restantes elementos)

Casos possíveis: $6!$ (os 6 amigos podem permutar entre si)

$$P = \frac{5 \times 2! \times 4!}{6!} = \frac{1}{3}$$

- 76.3** Pode-se usar o acontecimento «a Joana e a Luísa ficarem ao lado uma da outra» que tem como probabilidade o valor da alínea 62.2 e é contrário ao acontecimento «a Joana e a Luísa não ficarem ao lado uma da outra», donde

$$P = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

- 77.1** Casos favoráveis: 1 (as 2 diagonais preenchidas)

Casos possíveis: ${}^{16}C_8$ (número de subconjuntos de 8 quadrículas formados a partir de um conjunto de 16 quadrículas)

$$P = \frac{1}{{}^{16}C_8} = \frac{1}{12\,870}$$

- 77.2** Casos favoráveis: $4 \times ({}^{12}C_4 - 3)$ (4 fichas ficarão numa das 4 linhas e as restantes 4 fichas podem ocupar qualquer conjunto de 4 quadrículas formado a partir das 12 quadrículas restantes exceto uma das 3 linhas sobranes)

Casos possíveis: ${}^{16}C_8$

$$P = \frac{4 \times ({}^{12}C_4 - 3)}{{}^{16}C_8} = \frac{328}{2145}$$

- 77.3** Casos favoráveis: 4C_2 (conjunto de 2 colunas formado a partir de 4 colunas)

Casos possíveis: ${}^{16}C_8$

$$P = \frac{{}^4C_2}{{}^{16}C_8} = \frac{1}{2145}$$

78.1

- a.** Um segmento fica definido com 2 vértices do octógono

Casos favoráveis: 8 (os 8 lados do octógono)

Casos possíveis: 8C_2 (número de subconjuntos de 2 vértices formados a partir de um conjunto de 8 vértices)

$$P = \frac{8}{{}^8C_2} = \frac{2}{7}$$

- b.** Casos favoráveis: 4 (o octógono tem 4 diagonais que contêm o centro)

Casos possíveis: 8C_2 (número de subconjuntos de 2 vértices formados a partir de um conjunto de 8 vértices)

$$P = \frac{4}{{}^8C_2} = \frac{1}{7}$$

- 78.2** Casos favoráveis: 4×6 (o octógono regular pode ser inscrito numa circunferência; qualquer triângulo definido por 3 vértices do octógono só é retângulo se o segmento de reta formado por 2 dos vértices for um diâmetro; assim, como 4 das diagonais contêm o centro são diâmetros e, para cada uma delas, há 6 possibilidades de escolha para o 3.º vértice do triângulo (os 8 vértices do octógono exceto os 2 que formam essa diagonal))

Casos possíveis: 8C_3 (número de subconjuntos de 3 vértices formados a partir de um conjunto de 8 vértices)

$$P = \frac{4 \times 6}{{}^8C_3} = \frac{3}{7}$$

- 79.** $(x - 2)^{11} = \sum_{i=0}^{11} {}^{11}C_i \times x^{8-i} \times (-2)^i$

O desenvolvimento tem 12 parcelas ($i = 0, \dots, 11$) pelo que os casos possíveis são ${}^{12}C_2$.

Há 6 parcelas com valor negativo (aquelas em que i é ímpar) e 6 parcelas com valor positivo (aquelas em que i é 0 ou par).

O produto de 2 fatores só é negativo se apenas um deles tiver valor negativo, donde há 6×6 casos favoráveis.

$$P = \frac{6 \times 6}{{}^{12}C_2} = \frac{6}{11}$$

PÁG. 79

- 80.1** Casos favoráveis: ${}^6A_5 \times {}^6A_5$ (como há 6 pares e 6 ímpares, para o 1.º cartão há 6 possibilidades, para o 2.º há 5 e assim sucessivamente até ao 5.º cartão para o qual há 2 possibilidades; para cada conjunto de 5 cartões pares repete-se a situação para os cartões com números ímpares)

Casos possíveis: ${}^{12}A_{10}$ (para o 1.º cartão há 12 possibilidades, para o 2.º há 11 e assim sucessivamente até ao 10.º cartão para o qual há 3 possibilidades)

$$P = \frac{{}^6A_5 \times {}^6A_5}{{}^{12}A_{10}} = \frac{1}{462}$$

- 80.2** Casos favoráveis: $6! \times {}^6A_4$ (os 6 primeiros cartões têm números ímpares e, como só há 6 números ímpares, estes podem permutar entre si; para o 7.º cartão há 6 possibilidades de número par, para o 8.º há 5 e assim sucessivamente até ao 10.º cartão para o qual há 3 possibilidades)

Casos possíveis: ${}^{12}A_{10}$

$$P = \frac{6! \times {}^6A_4}{{}^{12}A_{10}} = \frac{1}{924}$$

- 80.3** Casos favoráveis: $8 \times 3! \times {}^9A_7$ (o 1.º dos cartões 7, 8 e 9 pode ocupar uma de 8 posições (1.ª até à 8.ª), podendo esses cartões permutar entre si e, para cada uma destas situações, os restantes 7 cartões são escolhidos de um conjunto de 9 (os 12 exceto os cartões 7, 8 e 9))

Casos possíveis: ${}^{12}A_{10}$

$$P = \frac{8 \times 3! \times {}^9A_7}{{}^{12}A_{10}} = \frac{2}{55}$$

81.1 $A \cap \bar{A} = \emptyset$

$$P(\bar{A}|A) = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$$

81.2 $(A \cup \bar{A}) \cap A = (A \cap A) \cup (\bar{A} \cap A) = A$

$$P[(A \cup \bar{A})|A] = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

81.3 $(A \cap \bar{A}) \cap \bar{A} = \emptyset$

$$P[(A \cap \bar{A})|\bar{A}] = \frac{P(\emptyset)}{P(\bar{A})} = 0$$

82.1 $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(A \cap B) + P(\overline{A \cap B}) =$
 $= P(A \cap B) + \underbrace{1 - P(A \cap B)}_{P(\overline{A \cap B})} = 1$

82.2 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) \geq P(A \cup B)$
 $\quad \quad \quad \downarrow$
 $\quad \quad \quad P(A \cap B) \geq 0$

82.3 $P(A) - P(\bar{B}) = P(A) - [1 - P(B)] = P(A) + P(B) - 1 =$
 $= P(A \cup B) + P(A \cap B) - 1 = P(A \cap B) - [1 - P(A \cup B)]$
 $= P(A \cap B) - P(\overline{A \cup B}) = P(A \cap B) - P(\bar{A} \cap \bar{B})$

83.1 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) = \frac{5}{6} + \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$
 Como os acontecimentos A e B são equiprováveis, então
 $P(A) = P(B) = \frac{7}{6} = \frac{7}{12}$.

83.2 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

84. Numerando as caixas 1, 2 e 3, o valor pedido corresponde a:

$$P(\text{«caixa 1» e «caderno azul»}) + P(\text{«caixa 2» e «caderno azul»}) + P(\text{«caixa 3» e «caderno azul»}) =$$

$$= 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{18}$$

85.1

a. Casos favoráveis: 3 (há 3 bolas brancas no saco)

Casos possíveis: 10 (há 10 bolas no saco)

$$P = \frac{3}{10}$$

b. Casos favoráveis: 2 (há 2 bolas pretas no saco)

Casos possíveis: 10

$$P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

c. Casos favoráveis: 5 (há 5 bolas amarelas no saco)

Casos possíveis: 10

$$P = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

d. Casos favoráveis: 8 (há 8 bolas, cuja cor não é preta, no saco)

Casos possíveis: 10

$$P = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

85.2

a. Restringindo o universo à composição do saco após a 2.^a extração tem-se:

Casos favoráveis: 2 (já só há 2 bolas brancas no saco)

Casos possíveis: 9 (já só há 9 bolas no saco)

$$P = \frac{2}{9}$$

b. Restringindo o universo à composição do saco após a 2.^a extração tem-se:

Casos favoráveis: 2 (ainda há 2 bolas pretas no saco)

Casos possíveis: 9 (já só há 9 bolas no saco)

$$P = \frac{2}{9}$$

c. Restringindo o universo à composição do saco após a 2.^a extração tem-se:

Casos favoráveis: 5 (há 5 bolas, cuja cor não é preta, no saco)

Casos possíveis: 9 (já só há 9 bolas no saco)

$$P = \frac{5}{9}$$

PÁG. 80

86.1 Como $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A)$

e $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$, então

$$P(B|A) \times P(A) - P(A) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$$

$$= P(A \cap B) - P(A) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$= P(A \cap B) - P(A) + 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A) = P(\bar{A})$$

86.2 Usando a sugestão indicada e tendo em conta que $\bar{A}$ é o acontecimento «o enfermeiro é estrangeiro» e que $\bar{B}$ é o acontecimento «o enfermeiro é do sexo masculino» tem-se:

$$P(B|A) = 0,5 \text{ (metade dos enfermeiros portugueses é do sexo feminino)}$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,8 = 80\%$$

$$P(B|A) \times P(A) - P(A) + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,5 \times P(A) - P(A) + 0,8 = 1 - P(A) \Leftrightarrow P(A) = 0,4$$

Dado que A é o acontecimento «o enfermeiro é português» e $P(A) = 0,4$, então $0,4 \times 300 = 120$ são enfermeiros portugueses e, como metade são do sexo feminino, há 60 enfermeiras portuguesas.

- 87.** $P(C \cap B|A)$ é a probabilidade de se extrair uma figura de paus na segunda extração, sabendo que na primeira extração saiu uma carta de copas. Aplicando a definição de Laplace (a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis à ocorrência desse acontecimento e o número de casos possíveis, quando os acontecimentos elementares são equiprováveis), sendo os casos possíveis 51 (pois já saiu uma carta na primeira extração) e os casos favoráveis 3, pois só existem três figuras em cada naipe, em particular no naipe de paus, resulta.

$$P(C \cap B|A) = \frac{3}{51}$$

88.1

a. $P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(Probabilidade de a bola seguir pelo caminho B e cair no buraco E .)

- b.** Sabendo que passou pelo caminho C o valor pedido é $P = \frac{1}{2}$; se nada fosse dito, a situação era idêntica à da alínea anterior.

88.2

a. $P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(Probabilidade de a bola seguir pelo caminho B e cair no buraco E ou seguir pelo caminho C e cair no buraco E ; os 2 acontecimentos referidos são disjuntos.)

- b.** Sabendo que passou pelo caminho C , o valor pedido é $P = \frac{1}{2}$.

- c.** Sabendo que passou pelo caminho B , o valor pedido é $P = \frac{1}{2}$.

PÁG. 81

- 88.3** Na máquina a probabilidade seria $\frac{1}{2}$, pois a bola cairia no buraco E ou F com igual probabilidade; na máquina a probabilidade seria 0 pois era impossível a bola cair no buraco E .

- 88.4** Como só se ganha o prémio caso a bola caia no buraco E , tem-se:

Máquina 2: $P = \frac{1}{2}$ (valor calculado na alínea 88.2 a.)

Máquina 1: $P = \frac{1}{4}$ (valor calculado na alínea 88.1 a.)

- 89.** Considere-se os acontecimentos E : «embalagem com leite estragado» e V : «embalagem dentro do prazo de validade»; têm-se as seguintes probabilidades:

$$P(E|V) = 0,005, P(E|\overline{V}) = 0,65, P(V) = \frac{8}{10} = 0,8 \text{ e}$$

$$P(\overline{V}) = \frac{2}{10} = 0,2$$

$$P(E) = P(E \cap V) + P(E \cap \overline{V}) = 0,005 \times 0,8 + 0,65 \times 0,2 = 0,134$$

90.1

- a.** Restringindo o universo à composição da urna A após a introdução da bola preta (5 bolas verdes e 3 bolas pretas), tem-se $P = \frac{5}{8}$.

- b.** Sejam A e B , respetivamente, os acontecimentos «extrair uma bola preta da urna A » e «extrair uma bola preta da urna B ».

$$P(\text{retirar bola preta}) =$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{17}{56}$$

90.2

- a.** Dado que a urna A tem 5 bolas verdes num total de 7 bolas, tem-se $P = \frac{5}{7}$.

- b.** Dado que a urna B tem 3 bolas pretas num total de 7 bolas, tem-se $P = \frac{3}{7}$.

- c.** Sejam A e V , respetivamente, os acontecimentos «selecionar a urna A » e «extrair uma bola verde».

$$\text{Tem-se } P(V) = P(A \cap V) + P(\overline{A} \cap V) =$$

$$= \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{14}$$

- d.** Com os acontecimentos definidos na alínea anterior é pedido o valor

$$P(A|\overline{V}) = \frac{P(A \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{\frac{2}{7} \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{9}{14}} = \frac{2}{5}$$

$P(\overline{V}) = 1 - P(V)$

- 91.1** Casos favoráveis: 5C_2 (número de subconjuntos de 2 moedas verdadeiras formados a partir de um conjunto de 5 moedas verdadeiras)

Casos possíveis: 7C_2 (número de subconjuntos de 2 moedas formados a partir de um conjunto de 7 moedas)

$$P = \frac{{}^5C_2}{{}^7C_2} = \frac{10}{21}$$

- 91.2** O acontecimento contrário a «pelo menos uma moeda é verdadeira» é o acontecimento «as duas moedas são falsas».

Casos favoráveis ao acontecimento contrário: 1 (só há 1 conjunto com as 2 moedas falsas).

Casos possíveis: 7C_2

$$P = 1 - \frac{1}{{}^7C_2} = \frac{20}{21}$$

- 91.3** Restringindo o universo à composição do saco após a extração da 1.^a moeda (4 moedas verdadeiras e 2 moedas falsas) tem-se

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

- 92.** Sejam V e C , respetivamente, os acontecimentos «retirar do bolso a moeda viciada» e «sair cara no lançamento da moeda».

$$P(V) = P(\bar{V}) = \frac{1}{2}, P(C|V) = \frac{2}{3} \text{ e } P(C|\bar{V}) = P(\bar{C}|\bar{V}) = \frac{1}{2}$$

Pede-se o valor de $P(V|\bar{C})$

$$\begin{aligned} P(V|\bar{C}) &= \frac{P(V \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \\ &= \frac{P(V \cap \bar{C})}{P(\bar{C} \cap V) + P(\bar{C} \cap \bar{V})} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

- 93.** Seja x o número de bolas brancas no saco.

$$P(\text{tirar bola não branca da caixa}) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$P(\text{tirar bola não branca do saco}) = \frac{15-x}{15}$$

$P(\text{obter pelo menos uma bola branca}) =$

$$= 1 - P(\text{não obter qualquer bola branca}) = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{15-x}{15}$$

Como $P(\text{obter pelo menos uma bola branca}) =$

$$= 0,75, \text{ conclui-se que } 1 - \frac{3}{4} \times \frac{15-x}{15} = 0,75 \Leftrightarrow x = 10.$$

PÁG. 82

- 94.** Sejam S e O , respetivamente, os acontecimentos «o sino toca às 6 horas da manhã» e «o sr. Aníbal leva as ovelhas a pastar pela manhã».

$$P(O) = P(S \cap O) + P(\bar{S} \cap O) = 0,8 \times 0,7 + 0,3 \times 0,3 = 0,65$$

- 95.** Sejam L e H , respetivamente, os acontecimentos «o indivíduo é louco» e «o indivíduo é um criminoso».

Sabe-se que $P(L) = 0,6$, $P(H) = 0,7$ e $P(\bar{L} \cap \bar{H}) = 0,25$

- 95.1** É pedido o valor de $P(L \cap H)$.

$$\begin{aligned} P(\bar{L} \cap \bar{H}) &= 0,25 \Leftrightarrow P(\overline{L \cup H}) = 0,25 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - P(L \cup H) = 0,25 \Leftrightarrow P(L \cup H) = 0,75 \\ P(L \cup H) &= P(L) + P(H) - P(L \cap H) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(L \cap H) = P(L) + P(H) - P(L \cup H) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(L \cap H) = 0,6 + 0,7 - 0,75 = 0,55 \end{aligned}$$

- 95.2** É pedido o valor de $P(L \cap \bar{H}) + P(\bar{L} \cap H)$.

Os acontecimentos $L \cap \bar{H}$, $\bar{L} \cap H$ e $L \cap H$ são acontecimentos disjuntos, pelo que

$$\begin{aligned} P[(L \cap \bar{H}) \cup (\bar{L} \cap H) \cup (L \cap H)] &= \\ &= P(L \cap \bar{H}) + P(\bar{L} \cap H) + P(L \cap H). \end{aligned}$$

Como $[(L \cap \bar{H}) \cup (\bar{L} \cap H) \cup (L \cap H)] = L \cup H$, verifica-se a igualdade

$$\begin{aligned} P(L \cup H) &= P(L \cap \bar{H}) + P(\bar{L} \cap H) + P(L \cap H) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(L \cap \bar{H}) + P(\bar{L} \cap H) = P(L \cup H) - P(L \cap H). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donde } P(L \cap \bar{H}) + P(\bar{L} \cap H) &= \\ &= P(L \cup H) - P(L \cap H) = 0,75 - 0,55 = 0,2. \end{aligned}$$

- 95.3** É pedido o valor de $P(H|\bar{L})$.

$$\begin{aligned} P(H|\bar{L}) &= \frac{P(H \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{P(H) - P(H \cap L)}{1 - P(L)} = \\ &= \frac{0,7 - 0,55}{1 - 0,6} = 0,375 \end{aligned}$$

- 96.** Sejam A , S , T e V , respetivamente, os acontecimentos «o desaparecimento é por afundamento», «o desaparecimento é por sequestro», «o desaparecimento é por destruição por temporal» e «todos os tripulantes são resgatados com vida».

$$P(A) = P(S) = P(T) = \frac{1}{3}, P(V|A) = \frac{4}{5},$$

$$P(V|S) = \frac{3}{5} \text{ e } P(V|T) = \frac{7}{10}$$

- 96.1** $P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap S) + P(V \cap T) =$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{10}$$

- 96.2** $P(V|\bar{T}) = \frac{P(V \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{P(V \cap A) + P(V \cap S)}{P(\bar{T})} =$

$$= \frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{7}{10}$$

97. Sejam X , Y , Z e E , respetivamente, os acontecimentos «a caixa de bolos foi embalada pelo empregado X », «a caixa de bolos foi embalada pelo empregado Y », «a caixa de bolos foi embalada pelo empregado Z » e «o empregado esqueceu-se de colocar o prazo de validade».

$$P(X) = 0,3, P(Y) = 0,2, P(Z) = 0,5, P(E|X) = 0,03,$$

$$P(E|Y) = 0,08 \text{ e } P(E|Z) = 0,07.$$

- 97.1 É pedido o valor de $P(E)$.

$$\begin{aligned} P(E) &= P(X \cap E) + P(Y \cap E) + P(Z \cap E) \\ &= 0,03 \times 0,3 + 0,08 \times 0,2 + 0,07 \times 0,5 = 0,06 \end{aligned}$$

- 97.2 É pedido o valor de $P(Z|\bar{E})$.

$$P(Z|\bar{E}) = \frac{P(Z \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{P(Z \cap \bar{E})}{1 - P(E)} = \frac{0,93 \times 0,5}{1 - 0,06} \approx 0,49$$

PÁG. 83

98. Sejam A , B , C e D , respetivamente, os acontecimentos «a peça foi produzida pela máquina A », «a peça foi produzida pela máquina B », «a peça foi produzida pela máquina C » e «a peça é defeituosa».

$$P(A) = 0,5, P(B) = P(C) = 0,25, P(\bar{D}|A) = 0,985,$$

$$P(D|B) = 0,02 \text{ e } P(\bar{D}|C) = 0,97$$

- 98.1 É pedido o valor de $P(E)$.

$$P(D|A) = 1 - 0,985 = 0,015 \text{ e } P(D|C) = 1 - 0,97 = 0,03$$

Donde se obtém:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) \\ &= 0,015 \times 0,5 + 0,02 \times 0,25 + 0,03 \times 0,25 = 0,02 \end{aligned}$$

- 98.2 É pedido o valor de $P(C|D)$.

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0,03 \times 0,25}{0,02} = \frac{3}{8} = 0,375$$

99. $P(A \cap B) = \frac{3}{52}$

(há 3 cartas do naipe de ouros que são figuras)

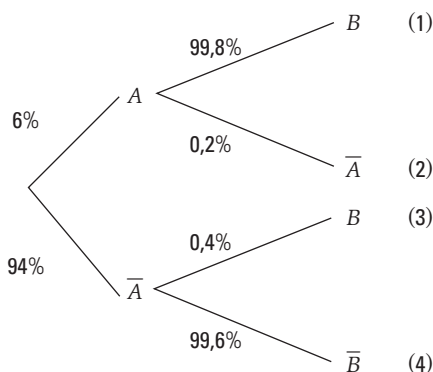
$$P(A) = \frac{13}{52} \text{ (há 13 cartas de cada naipe) e}$$

$$P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13} \text{ (há 3 figuras em cada um dos 4 naipes)}$$

$$\text{Como } P(A) \times P(B) = \frac{13}{52} \times \frac{12}{52} = \frac{3}{52} = P(A \cap B),$$

os 2 acontecimentos são independentes.

100.1



$$(1) P(A \cap B) = 5,988\% \quad (3) P(\bar{A} \cap B) = 0,376\%$$

$$(2) P(A \cap \bar{B}) = 0,012\% \quad (4) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 93,624\%$$

100.2

- a. É pedido o valor de $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,996 \times 0,94 = 0,93624 = 93,624\%$$

- b. É pedido o valor de $P(B)$.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) \\ &= 0,998 \times 0,06 + 0,004 \times 0,94 = 0,06364 = 6,364\% \end{aligned}$$

100.3 Na construção da árvore de probabilidades tem-se:

$$P(B) = 0,06364 = 6,364\%$$

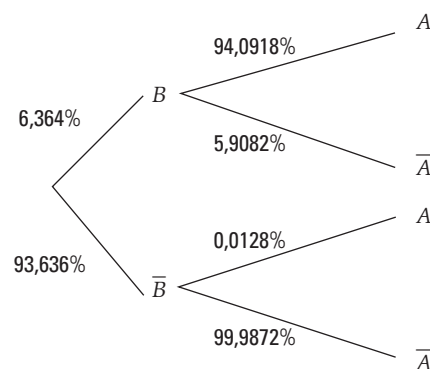
$$P(\bar{B}) = 100\% - P(B) = 93,636\%$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,998 \times 0,06}{0,06364} = 0,940918 \text{ (94,0918\%)}$$

$$P(\bar{A}|B) = 100\% - 94,0918\% = 5,9082\%$$

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,002 \times 0,06}{0,93636} = 0,000128 \text{ (0,0128\%)}$$

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = 100\% - 0,0128\% = 99,9872\%$$



- 100.4 É pedido o valor de $P(A|\bar{B})$ que é 0,0128%.

- 100.5** Os valores pedidos já foram indicados ou determinados nas alíneas anteriores, pelo que

$$P(\bar{B}|A) = 100\% - 99,8\% = 0,2\%, \quad P(A|B) = 94,0918\%, \\ P(B|A) = 99,8\% \text{ e } P(A|\bar{B}) = 0,0128\%.$$

- 100.6** $P(A \cap B) = 0,998 \times 0,06 = 0,05988$

$$P(A) = 0,06 \text{ e } P(B) = 0,06364$$

Como $P(A) \times P(B) = 0,06 \times 0,06364 \neq 0,05988 = P(A \cap B)$,
os 2 acontecimentos são dependentes.

TESTE – PÁG. 86

- 1.** $E = \{(A_1, A_2), (A_1, V_1), (A_1, V_2), (A_2, V_1), (A_2, V_2), (V_1, V_2)\}$

Opção correta: A.

- 2.1** $A = \{1, 2, 3, 4\}$ pelo que $\bar{A} = \{5, 6\}$,

$$\text{donde } P(\bar{A}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Opção correta: B.

- 2.2** $A \cap B = \{4\}$, donde $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Opção correta: C.

- 2.3** $C \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

pelo que $\overline{C \cup D} = \{1\}$, donde $\overline{C \cup D}$: «sair a face 1».

Opção correta: D.

- 3.** Na caixa há 5 bombons sem recheio e 7 bombons com recheio.

Casos favoráveis: $7 \times {}^5C_2$ (há 7 escolhas possíveis para o bombom com recheio e, para cada um que seja escolhido, há 5C_2 conjuntos possíveis de 2 bombons sem recheio)

Casos possíveis: ${}^{12}C_3$ (há ${}^{12}C_3$ conjuntos possíveis de 3 bombons)

$$P = \frac{7 \times {}^5C_2}{{}^{12}C_3} = \frac{70}{220} = \frac{7}{22}$$

Opção correta: A.

- 4.1** $P(A) = \frac{1}{2}$

- 4.2** $B|A$: «o elemento escolhido para chefe de equipa é uma médica sabendo que a equipa escolhida é a X»

Como na equipa X há 5 médicas entre 15 elementos,

$$P(B|A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

- 4.3** $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A),$

$$\text{donde } P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

- 4.4** $P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}|A) \times P(A) = \frac{10}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

- 4.5** $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$; como os acontecimentos

$A \cap B$ e $\bar{A} \cap B$ são disjuntos, ou seja,

$$(A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset,$$

$$P(B) = P((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B).$$

$$\text{Por outro lado, } P(\bar{A} \cap B) = P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Assim, } P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

- 4.6** $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$

- 5.** $P(A|A \cup B) = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)}$ $A \subset A \cup B$ donde $A \cap (A \cup B) = A$
- $$= \frac{P(A)}{P(A \cup B)} \quad \text{Se } A, B \text{ são incompatíveis}$$
- então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
pois $P(A \cap B) = \emptyset$
- $$= \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}$$

- 6.1** $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) =$
- $$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$
- $$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$
- $$= \underbrace{1 - P(A)}_{P(\bar{A})} - P(B) + \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A|B) \times P(B)}$$
- $$= P(\bar{A}) - P(B) + P(A|B) \times P(B)$$

- 6.2.** A: «o homem é moreno»

B: «o homem tem cabelo encaracolado»

$\bar{A} \cap \bar{B}$: «o homem não é moreno nem tem o cabelo encaracolado»

Pela alínea anterior,

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) - P(B) + P(A|B) \times P(B) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

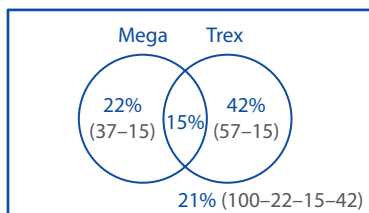
7. Sejam os acontecimentos A : «a Gertrudes disse que hoje a temperatura ficará abaixo dos 10°C » e B : «a Gertrudes tem razão». A probabilidade pedida é $P(B|A)$.

De acordo com os dados do problema, sabe-se

$$\text{que } P(\bar{B}|A) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Assim, } P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

- 8.1 O seguinte diagrama de Venn traduz a situação:



Assim, $P = 22\% + 42\% = 64\%$.

- 8.2 $P = 21\%$

9. O acontecimento «não haver golos» corresponde a

$$\bar{A} \cap \bar{B}.$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, tem-se } P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + \underbrace{P(A \cap B)}_{=0; (A \cap B = \emptyset)} = 1 - 0,3 - 0,5 = 0,2 \end{aligned}$$

TESTE GLOBAL – PÁG. 88

1. Como $\frac{2}{3}$ das crianças são meninas, $\frac{1}{3}$ das crianças são meninos; assim, designando por x o número de meninos,

$$\text{tem-se que } \frac{2}{36} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = \frac{1}{3} \times 36 \Leftrightarrow x = 18.$$

Opção correta: B.

2. Casos favoráveis: 2 (bola 1 na 1.ª extração e bola 2 na 2.ª extração e vice-versa)

Casos possíveis: 6^2 (há 6 bolas possíveis em cada extração)

$$P = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

Opção correta: A.

3. Restringindo o universo às situações em que a soma foi 6 há 1 caso favorável (3+3) em 5 casos possíveis

(1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1), pelo que o valor da probabilidade pedida é $\frac{1}{5}$.

Opção correta: B.

4. Os números dessa linha correspondem a ${}^{999}C_0, \dots, {}^{999}C_{999}$, pelo que o número de números dessa linha é 1000, havendo simetria, isto é, os primeiros 500 números são iguais aos últimos 500 números.

Casos favoráveis: 500

$$({}^{999}C_0 = {}^{999}C_{999}, {}^{999}C_1 = {}^{999}C_{998}, \dots, {}^{999}C_{499} = {}^{999}C_{500})$$

Casos possíveis: ${}^{1000}C_2$ (conjuntos de 2 elementos formados de um conjunto de 1000 elementos)

$$P = \frac{500}{{}^{1000}C_2} = \frac{1}{999}$$

Opção correta: A.

5. Casos favoráveis: $2 \times 2 \times 3!$ (o grupo dos 4 amigos (3 rapazes e a Ana) só pode ocupar as 2 posições em que a Maria fica nos extremos e, para cada uma dessas situações, a Ana só pode ocupar os 2 lugares centrais no grupo dos 4 amigos, podendo os 3 rapazes permutar entre si)

Casos possíveis: 5! (permutação dos 5 amigos em 5 lugares)

$$P = \frac{2 \times 2 \times 3!}{5!} = \frac{1}{5}$$

Opção correta: A.

6. Casos favoráveis: 5A_3 (o 1.º cliente tem 5 opções de escolha, o 2.º tem 4 e o 3.º tem 3)

Casos possíveis: 5^3 (cada cliente tem 5 opções de escolha)

$$P = \frac{{}^5A_3}{5^3} = \frac{12}{25}$$

Opção correta: D.

7. Casos favoráveis: $4!$ (como têm de sair todas as 4 faces, os casos favoráveis só diferem na ordem de saída das mesmas)

Casos possíveis: 4^4 (cada tetraedro tem 4 faces)

$$P = \frac{4!}{4^4}$$

Opção correta: C.

$$\begin{aligned} 8. \quad \left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9 &= \sum_{i=0}^9 C_i \times (2x)^{9-i} \times \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^i = \\ &= \sum_{i=0}^9 C_i \times 2^{9-i} \times x^{9-i} \times \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^i = \sum_{i=0}^9 2^{9-i} \times C_i \times x^{9-\frac{3}{2}i} \end{aligned}$$

O termo independente de x é aquele para o qual

$$9 - \frac{3}{2}i = 0 \Leftrightarrow i = 6.$$

Assim, o termo independente é $2^{9-6} \times {}^9C_6 = 672$.

Opção correta: D.

9.1 $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

9.2 $2^8 = 256$

- 9.3 A – acontecimento composto; B – acontecimento impossível; C – acontecimento elementar; D – acontecimento certo.

$$\begin{aligned} 10. \quad \frac{P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(A)} &= \frac{P(\bar{B}) - P(\overline{A \cup B})}{P(A)} = \\ &= \frac{1 - P(B) - 1 + P(A)}{P(A)} + \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - P(B|A) \end{aligned}$$

11.1

a. $8! = 40320$

- b. Casos favoráveis: $6 \times 3! \times 5!$ (o 1.º dos 3 quadros do pintor X só pode ocupar uma de 6 posições, nomeadamente, da 1.ª à 6.ª posição; para cada uma dessas 6 posições, os 3 quadros podem permutar entre si e os 5 quadros do pintor Y também podem permutar entre si).

Casos possíveis: $8!$ (os da alínea 11.1.a)

$$P = \frac{6 \times 3! \times 5!}{8!} = \frac{3}{28}$$

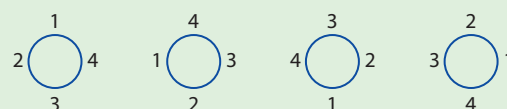
- 11.2 Há dois modos de organizar os quadros ($X Y X Y X Y X Y$ e $Y X Y X Y X Y X$); em cada uma destas situações, quer os quadros do pintor X , quer os quadros do pintor Y , podem permutar entre si, donde há $2 \times 4! \times 4! = 1152$ maneiras distintas de expor os 8 quadros.

12. Na contagem do número de casos possíveis e do número de casos favoráveis, podemos proceder de duas formas distintas:

- Pensando exclusivamente na mesa (considerando que as cadeiras não estão referenciadas; só interessa quem está à direita e esquerda de cada indivíduo)

Como a mesa não tem marca de início, fixando uma permutação dos 16 indivíduos, o 1.º indivíduo pode estar num dos 16 lugares da mesa, pelo que essas 16 possibilidades correspondem a uma só permutação dos 16 indivíduos.

Exemplo: na mesa com 4 indivíduos da figura seguinte as 4 possibilidades correspondem à mesma permutação.



Nesta situação os 16 indivíduos podem permutar de 16! maneiras; todavia, fixando uma das permutações, esta poderia estar em 16 posições, pelo que a permutação fixada foi contada 16 vezes, havendo assim $\frac{16!}{16} = 15!$ casos possíveis.

Quanto aos casos favoráveis, quer as mulheres quer os homens podem permutar de 8! maneiras; fixando uma das 8! $\times$ 8! permutações, com homens e mulheres intercalados, esta poderia estar em 8 posições, pelo que a permutação fixada foi contada 8 vezes, havendo assim $\frac{8! \times 8!}{8} = 7! \times 8!$ casos favoráveis.

- Pensando na mesa inserida numa sala (também interessa a posição de cada indivíduo na sala)

Esta situação funciona como se estivéssemos a fixar uma posição de início para a mesa (um determinado lugar face à sala tomada como referencial), ou como se as cadeiras estivessem numeradas. Assim, há 16! casos possíveis. Relativamente aos casos favoráveis, temos 2 maneiras de escolher um conjunto de cadeiras para as mulheres e as restantes para os homens de forma a ficarem em posições intercaladas. Para cada uma destas escolhas, temos 8! $\times$ 8! maneiras de permutar as mulheres e os homens. Assim, há $2 \times 8! \times 8!$ casos favoráveis.

O valor da probabilidade pedida é $\frac{7! \times 8!}{15!} = \frac{2 \times 8! \times 8!}{16!}$.

13. Temos uma situação semelhante à do exercício 12.

Dado que a contagem é mais fácil de fazer pelo acontecimento contrário (o sr. Antunes e a sra. Figueiredo sentarem-se lado a lado) vamos usar a expressão $P(\bar{X}) = 1 - P(X)$, sendo X : «o sr. Antunes e a sra. Figueiredo sentam-se lado a lado».

- Pensando só na direita e esquerda de cada indivíduo:

Casos possíveis: $\frac{10!}{2}$

(as 10 pessoas permutam entre si, mas a mesma sequência fixa foi contada duas vezes: começa num dos dois lados da mesa e acaba no outro)

Casos favoráveis a X : $4 \times 2! \times 8!$ (fixando um lado da mesa há 4 posições para o sr. Antunes e a sra. Figueiredo se sentarem lado a lado, podendo permutar entre si e podendo as outras 8 pessoas também permutar entre si)

- Pensando também na posição de cada indivíduo na sala.

Casos possíveis: 10! (as 10 pessoas permutam entre si)

Casos favoráveis a X : $8 \times 2! \times 8!$ (em cada lado da mesa há 4 posições para o sr. Antunes e a sra. Figueiredo se sentarem lado a lado, podendo permutar entre si e podendo as outras 8 pessoas também permutar entre si)

O valor da probabilidade pedida é

$$1 - \frac{4 \times 2! \times 8!}{\frac{10!}{2}} = 1 - \frac{8 \times 2! \times 8!}{10!} = \frac{37}{45}.$$

14. $A|B$: «o número do cartão escolhido é maior que 1, sabendo que o cartão escolhido tem a forma de um triângulo».

Reduzindo o espaço amostral aos cartões com a forma de triângulo, tem-se

$$P(A|B) = \frac{2}{3}.$$

$\bar{B}|A$: «o cartão escolhido não tem a forma de um triângulo, sabendo que o número do cartão escolhido é maior que 1»

Reduzindo o espaço amostral aos cartões cujo número inscrito é maior que 1, tem-se

$$P(\bar{B}|A) = \frac{3}{5}.$$

15. Sejam os acontecimentos A : «o componente produzido é do tipo A» e D : «o componente produzido tem defeito».

$$\text{Pede-se o valor de } P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}.$$

$$\text{De } P(A \cap D) = 0,02 \times 0,3 = 0,006 \text{ obtém-se}$$

$$P(A \cap \bar{D}) = 0,98 \times 0,3 = 0,294.$$

Por outro lado, $P(B \cap \bar{D}) = 0,686$ e dado que

$$P(A \cap D) + P(A \cap \bar{D}) + P(B \cap D) + P(B \cap \bar{D}) = 1,$$

$$\text{obtém-se } P(B \cap \bar{D}) = 1 - 0,006 - 0,294 - 0,686 = 0,014.$$

Como $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D)$, obtém-se

$$P(D) = 0,006 + 0,014 = 0,02 \text{ e}$$

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,006}{0,02} = 0,3.$$

Volume II

Funções Reais de Variável Real

DIAGNÓSTICO – PÁG. 6

$$1.1 \quad u_{n+1} - u_n = \frac{3n+4}{n+2} \times \frac{1}{n+1} - \frac{3n+1}{n+1} \times \frac{1}{n+2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$\text{Como } \begin{cases} n+1 \geq 2 \\ n+2 \geq 3 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0, \forall n \in \mathbb{N};$$

logo, (u_n) é monótona crescente.

1.2 Como (u_n) é monótona crescente, então

$$u_n \geq u_1 = 2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Por outro lado: } u_n = \frac{3n+1}{n+1} = 3 - \frac{2}{n+1}$$

$$\text{Como } \frac{2}{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\text{então } u_n = 3 - \frac{2}{n+1} < 3, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.3 Como (u_n) é monótona e limitada é convergente.

1.4 Há que provar que $\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$.

Considere-se um número real qualquer $\delta > 0$:

O limite de (u_n) é 3 se para esse δ existir uma ordem p

a partir da qual $\left| \frac{3n+1}{n+1} - 3 \right| < \delta$.

$$\left| \frac{3n+1}{n+1} - 3 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{-2}{n+1} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \delta$$

$$n+1 > 0 \Rightarrow |n+1| = n+1$$

• para $\delta > 1$, como $\frac{2}{n+1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{2}{n+1} < \delta$ desde o 1.º termo;

• para $0 < \delta \leq 1$, como $\frac{2}{n+1} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{2}{\delta} - 1$,

$$n+1 > 0 \text{ e } \delta > 0$$

basta tomar para ordem p o menor natural maior que

$\frac{2}{\delta} - 1$ (por exemplo, para $\delta = \frac{1}{\pi}$ basta tomar para ordem

p o menor natural maior que $\frac{2}{\frac{1}{\pi}} - 1 = 2\pi - 1 \approx 5,3$, ou

seja, $\left| \frac{3n+1}{n+1} - 3 \right| < \frac{1}{\pi}$ desde o 6.º termo).

2.1 $v_1 = -1, v_2 = 0, v_3 = -1$, donde se conclui que (v_n) não é monótona, pois $v_1 < v_2$ e $v_2 > v_3$.

$$2.2 \quad -(n-2)^2 < -1000 \Leftrightarrow (n-2)^2 > 1000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n-2 > \sqrt{1000} \vee n-2 < -\sqrt{1000}$$

$$\Leftrightarrow n > 2 + \sqrt{1000} \approx 33,6 \vee n < 2 - \sqrt{1000} \approx -29,6$$

Conclui-se, assim, que os termos de (v_n) são menores do que -1000 do 34.º termo em diante.

2.3 Há que provar que $\forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow v_n < -L$.

Considere-se um número real qualquer $L > 0$:

O limite de (u_n) é $-\infty$ se para esse L existir uma ordem p a partir da qual $-(n-2)^2 < -L$.

$$-(n-2)^2 < -L \Leftrightarrow (n-2)^2 > L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n-2 > \sqrt{L} \vee n-2 < -\sqrt{L}$$

$$\Leftrightarrow n > 2 + \sqrt{L} \vee n < 2 - \sqrt{L}$$

Assim, basta tomar para ordem p o menor natural maior do que $2 + \sqrt{L}$ (por exemplo, para $L = 500$ basta tomar para ordem p o menor natural maior do que $2 + \sqrt{500} \approx 24,4$, ou seja, $-(n-2)^2 < -500$ desde o 25.º termo).

$$3.1 \quad w_1 = 2, w_2 = w_1 + 3 = 5, w_3 = w_2 + 3 = 8$$

3.2 Como $w_{n+1} = w_n + 3, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow w_{n+1} - w_n = 3, \forall n \in \mathbb{N}$ conclui-se que (w_n) é uma progressão aritmética de razão $r = 3$, pelo que o seu termo geral é da forma $w_n = w_1 + r(n-1)$, donde $w_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$.

Por outro lado, $w_n = 3n - 1 > n, \forall n \in \mathbb{N}$, e como $\lim n = +\infty$, então $\lim w_n = +\infty$.

$$4.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0$$

$$4.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$$

$$4.3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$$

$$4.4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} + n) = +\infty$$

$$4.5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

$$4.6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{n+1} = +\infty$$

$$4.7 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} [n(n-1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \times \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1) = +\infty$$

$$4.8 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n^5) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} [n^2(1 - n^3)] = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \times \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - n^3) = -\infty$$

$$4.9 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2} \stackrel{\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{2}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$4.10 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+8}{n+2} \stackrel{\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^2+\frac{8}{n})}{n(1+\frac{2}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+\frac{8}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

$$\begin{aligned} 4.11 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n+1} - 3\sqrt{n}) &\stackrel{\infty}{=} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(\sqrt{9n+1} - 3\sqrt{n})(\sqrt{9n+1} + 3\sqrt{n})}{\sqrt{9n+1} + 3\sqrt{n}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{9n+1}^2 - (3\sqrt{n})^2}{\sqrt{9n+1} + 3\sqrt{n}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9n+1-9n}{\sqrt{9n+1}+3\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{9n+1}+3\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$4.12 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+n}}{2n} \stackrel{\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{4+\frac{1}{n}}}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{n}}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

$$4.13 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2+n}{2n^2+3}} \stackrel{\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2(4+\frac{1}{n})}{n^2(2+\frac{3}{n^2})}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n^2}}} = \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} 4.14 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}+5^n}{5^n+2^n} &\stackrel{\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 3^n + 5^n}{5^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left[3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + 1 \right]}{5^n \left[1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n \right]} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + 1}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$4.15 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}+5^n}{2^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} [2^n(3^{n+1}+5^n)] = +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

5.1 Dado que (u_n) tende para 2 por valores superiores a 2, $\lim f(u_n) = 3$.

Dado que (v_n) tende para 2 por valores inferiores a 2, $\lim f(v_n) = 4$.

5.2 Por exemplo, $w_n = 5 - \frac{1}{n}$.

5.3 Não; tomando as sucessões definidas por $a_n = -3 + \frac{1}{2n}$ e $b_n = -3$

verifica-se que $\lim f(a_n) = 1$ e $\lim f(b_n) = 2$, pelo que

$\lim f(a_n) \neq \lim f(b_n)$, ou seja, não existe $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$.

5.4

a. 4

b. 2

c. 1

d. Não existe.

e. 0

$$6.1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 5x) = +\infty$$

$$6.2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x) = +\infty$$

$$6.3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x) \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(x^2 - 3)] = +\infty$$

$$6.4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x+1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{3}{x})}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\begin{aligned} 6.5 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-1}{3x+1} &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(2-\frac{1}{x^2})}{x(3+\frac{1}{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(\frac{2-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}} \right) \right] = -\infty \times \frac{2}{3} = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6.6 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2x+1}}{\frac{2}{1-4x}} &\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-4x}{2(2x+1)} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\frac{1}{x}-4)}{x(4+\frac{2}{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}-4}{4+\frac{2}{x}} = \frac{-4}{4} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6.7 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}) &\stackrel{\infty}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1})}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x+1})^2 - (\sqrt{2x-1})^2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1-2x+1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}} = \\ &= \frac{2}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$6.8 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+6}{\sqrt{4x^2-1}} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3+\frac{6}{x})}{x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3+\frac{6}{x}}{\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}} = \frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

$$6.9 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$6.10 \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$6.11 \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{x + 1}{x^2 - 1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{-x}{x^2 - 1} \right) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$6.12 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 3x}{x^3 - 3x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x + 3)}{x(x^2 - 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 3}{x(x - 3)} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$6.13 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 + x - 6}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 3)}} = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x + 2}{x + 3}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$6.14 \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|2x - 1|}{\sqrt{2x^2 + 5x - 3}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{\sqrt{2x^2 + 5x - 3}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \sqrt{\frac{(2x - 1)^2}{2x^2 + 5x - 3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \sqrt{\frac{(2x - 1)^2}{(2x - 1)(x + 3)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \sqrt{\frac{2x - 1}{x + 3}} = \sqrt{0} = 0$$

O domínio de validade da expressão é $]-\infty, -3[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$.

$$6.15 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x - \sqrt{x}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x - 2)}{x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 2}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} = 0$$

O domínio de validade da expressão é $\mathbb{R}^+$.

7.1 Quer em $]-\infty, 2[$, quer em $]2, +\infty[$, a função f é contínua pois os seus ramos são funções polinomiais; resta estudar a continuidade em $x = 2$.

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2$, não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, pelo que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

7.2 Quer em $]-\infty, 0[$, quer em $]0, +\infty[$, a função g é contínua pois os seus ramos são quocientes de funções polinomiais (contínuas); resta estudar a continuidade em $x = 0$.

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{3x - x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{3 - x} = \frac{1}{3}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 1}{x + 3} = \frac{1}{3}$ e $g(0) = \frac{1}{3}$, existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)$.

Logo, g é contínua em $\mathbb{R}$.

8.1 f é contínua em $[-3, 2] \setminus \{-1\}$ e g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ pois é uma função polinomial em $]-\infty, 1[$ e é quociente de funções contínuas em $]1, +\infty[$; resta estudar a continuidade de g em $x = 1$.

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x^2) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1(\sqrt{x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} = 0$$

e $g(1) = 0$, g tem limite em $x = 1$ e, portanto, também é contínua em $x = 1$, ou seja, g é contínua em $\mathbb{R}$.

8.2 A diferença de funções contínuas num ponto é uma função contínua nesse ponto.

8.3 Não, pois f não é contínua em $x = -1$.

8.4 Para que $f \circ g$ seja contínua em $x = -\sqrt{2}$, g tem de ser contínua nesse ponto e f tem de ser contínua em $f(g(-\sqrt{2}))$.

Como g é contínua em $\mathbb{R}$, também o é em $x = -\sqrt{2}$; por outro lado, $g(-\sqrt{2}) = -1$, mas f não é contínua em $x = -1$, donde, $f \circ g$ não é contínua em $x = -\sqrt{2}$.

$$9. \lim_{x \rightarrow 9^-} kx = 9k$$

$$\lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6}$$

Para que f seja contínua em $x = 9$ tem de existir $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$, donde $9k = \frac{1}{6} \Leftrightarrow k = \frac{1}{54}$.

1. LIMITES E CONTINUIDADE

PÁG. 11

$$1.1 \frac{3n - 15}{2n} > \frac{2n + 1}{3n} \Leftrightarrow 5n^2 - 47n > 0 \Leftrightarrow 5n - 47 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{47}{5} = 9,4, \text{ donde } v_n > u_n, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 10$$

Se existe uma ordem p a partir da qual

$v_n > u_n$, então $\lim v_n \geq \lim u_n$.

$$1.2 \lim v_n = \lim \frac{3n - 15}{2n} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{3 - \frac{15}{n}}{2} = \frac{3}{2} \text{ e}$$

$\lim u_n = \lim \frac{2n + 1}{3n} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{3} = \frac{2}{3}$, o que confirma a desigualdade expressa na alínea anterior.

$$2.1 \quad n + (-1)^n = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \text{ ímpar} \\ n+1 & \text{se } n \text{ par} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n + (-1)^n \geq n-1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

O facto de $\lim(n-1) = +\infty$ justifica o resultado do limite.

$$2.2 \quad -n + (-1)^n = \begin{cases} -n-1 & \text{se } n \text{ ímpar} \\ -n+1 & \text{se } n \text{ par} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -n + (-1)^n \leq -n+1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

O facto de $\lim(-n+1) = -\infty$ justifica o resultado do limite.

$$2.3 \quad \frac{n^2 + \cos(n\pi)}{n} = \begin{cases} \frac{n^2-1}{n} = n - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \frac{n^2}{n} = n & \text{se } n \text{ par} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n^2 + \cos(n\pi)}{n} \geq n - \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

O facto de $\lim\left(n - \frac{1}{n}\right) = +\infty$ justifica o resultado do limite.

$$2.4 \quad \frac{-n^5 + \sin(n\pi)}{1+n^3} \Leftrightarrow \frac{-n^5}{1+n^3} \Rightarrow$$

$$\sin(n\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{-n^5 + \sin(n\pi)}{1+n^3} \leq -\frac{n^5}{1+n^3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{O facto de } \lim\left(-\frac{n^5}{1+n^3}\right) = \lim\left(-\frac{n^2}{\frac{1}{n^3}+1}\right) = -\infty$$

justifica o resultado do limite.

$$2.5 \quad [3 + (-1)^n]^n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 4^n & \text{se } n \text{ par} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [n + (-1)^n]^n \geq 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

O facto de $\lim 2^n = +\infty$ justifica o resultado do limite.

3.1 Para $n=2$: $3^2 - 2^2 = 5 > 4 = 2^2$, donde a desigualdade é verdadeira.

Hipótese para n : $3^n - 2^n > 2^n$

Tese para $n+1$: $3^{n+1} - 2^{n+1} > 2^{n+1}$

$$3^{n+1} - 2^{n+1} = 3 \times 3^n - 2 \times 2^n = 3^n + 2 \times 3^n - 2 \times 2^n =$$

$$= 3^n + 2 \times (3^n - 2^n) \underset{\text{hipótese}}{>} 3^n + 2 \times 2^n = 3^n + 2^{n+1} \underset{3^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}}{>} 2^{n+1}$$

$$3.2 \quad \lim (2^n)^n = +\infty$$

3.3 Na alínea 3.1 conclui-se que $3^n - 2^n > 2^n, \forall n \in \mathbb{N} : n > 1$, pelo que $(3^n - 2^n)^n > (2^n)^n, \forall n \in \mathbb{N} : n > 1$ e $\lim (3^n - 2^n)^n \geq \lim (2^n)^n$; por outro lado, na alínea 3.2 conclui-se que $\lim (2^n)^n = +\infty$, donde, conjugando os dois resultados, tem-se que $\lim (3^n - 2^n)^n = +\infty$.

$$4.1 \quad w_n = \frac{(-1)^n}{n+1} = \begin{cases} -\frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ par} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n+1} \leq w_n \leq \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como as sucessões definidas por $a_n = -\frac{1}{n+1}$ e $b_n = \frac{1}{n+1}$

têm por limite 0, então $\lim w_n = 0$.

$$4.2 \quad w_n = \frac{n + \cos n}{n} \Rightarrow \frac{n-1}{n} \leq w_n \leq \frac{n+1}{n},$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n} \leq w_n \leq 1 + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como as sucessões definidas por $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ e $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ têm por limite 1, então $\lim w_n = 1$.

$$4.3 \quad w_n = \frac{2n^3 + 1}{\sin(n\pi) - 3n^3} \Leftrightarrow \frac{-2n^3 + 1}{3n^3} \Rightarrow$$

$$\sin(n\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow -\frac{2n^3 + 1}{3n^3} \leq w_n \leq -\frac{2n^3}{3n^3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como as sucessões definidas por $a_n = -\frac{2n^3 + 1}{3n^3} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3n^3}$

e $b_n = -\frac{2n^3}{3n^3} = -\frac{2}{3}$ têm por limite $-\frac{2}{3}$, então $\lim w_n = -\frac{2}{3}$.

$$4.4 \quad w_n = \frac{3n^2 + (-1)^n}{n(n+1)} \Rightarrow \frac{3n^2 - 1}{n(n+1)} \leq w_n \leq \frac{3n^2 + 1}{n(n+1)}$$

Como as sucessões definidas por $a_n = \frac{3n^2 - 1}{n(n+1)} = \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}$ e

$b_n = \frac{3n^2 + 1}{n(n+1)} = \frac{3 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}$ têm por limite 3, então $\lim w_n = 3$.

$$4.5 \quad w_n = \left(\frac{n-1}{3n}\right)^n \Rightarrow 0 \leq w_n \leq \left(\frac{n}{3n}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como as sucessões definidas por $a_n = 0$ e $b_n = \left(\frac{n}{3n}\right)^n = \frac{1}{3^n}$ têm por limite 0, então $\lim w_n = 0$.

4.6 $w_n = \left(\frac{2n-7}{5n+10}\right)^{n+1} = \left(\frac{2}{5} - \frac{11}{5n+10}\right)^{n+1} \Rightarrow$
 $\frac{11}{5n+10} > 0, \forall n \in \mathbb{N};$
 $x_n = \frac{2n-7}{5n+10}$ é crescente;
 $x_n > 0, \forall n \geq 4, x_4 = \frac{1}{30}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{30}\right)^{n+1} \leq w_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 4$
 Como as sucessões definidas por $a_n = \left(\frac{1}{30}\right)^{n+1}$ e
 $b_n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$ têm por limite 0, então $\lim w_n = 0$.

5.1 Para n fixo, o fator $\frac{n}{n^2+k}$ toma o valor máximo quando k é mínimo ($k=1$) e toma o valor mínimo quando k é máximo ($k=n$).

Assim, $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Como $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+n} = \frac{n}{n^2+n} \times \sum_{k=1}^n 1 = \frac{n}{n^2+n} \times n = \frac{n}{n+1}$

e $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \times \sum_{k=1}^n 1 = \frac{n}{n^2+1} \times n = \frac{n^2}{n^2+1}$

conclui-se que $\frac{n}{n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n^2}{n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

5.2 Como as sucessões definidas por $a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ e

$b_n = \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$ têm por limite 1, então $\lim v_n = 1$.

6.1 Por hipótese, $\exists q \in \mathbb{N} : n \geq q \Rightarrow u_n \leq v_n$.

Fixado um número real $L > 0$, como $\lim u_n = +\infty$,

$\exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow u_n > L$.

Assim, se $p \geq q$ tem-se a desigualdade $L < u_n \leq v_n$ para $n \geq p$, donde se conclui também que $\lim v_n = +\infty$; se $p < q$ tem-se a mesma desigualdade para $n \geq q$, donde se conclui o mesmo.

6.2 $\lim u_n = -\infty$

PÁG. 15

7.1 $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) \geq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ e como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ também $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = +\infty$; logo, a proposição é verdadeira.

7.2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e como

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 + \frac{5}{x-2}\right) = +\infty$, também

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$; logo, a proposição é falsa.

8.1 $\frac{x^2+\cos x}{x+1} \geq \frac{x^2-1}{x+1} = x-1, \forall x \in]-1, +\infty[$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+\cos x}{x+1} = +\infty$.

8.2 $\frac{x^2+\cos x}{x+1} \leq \frac{x^2-1}{x+1} = x-1, \forall x \in]-\infty, -1[$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty$, então $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+\cos x}{x+1} = -\infty$.

8.3 $\frac{x^3(3+\cos x)}{2x+1} \geq \frac{2x^3}{2x+1}, \forall x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$; como
 $\cos x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{2x+1} = +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(3+\cos x)}{2x+1} = +\infty$.

9. $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

Como $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \frac{3}{4}$ e $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \frac{3}{4}$,

então $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{3}{4}$.

10.1 $-x \leq x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x, \forall x \in]0, +\infty[$; como
 $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, então $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$

$x \leq x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x, \forall x \in]-\infty, 0[$; como $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$
 $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

e $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$

Dado que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$,

tem-se $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$.

10.2 $-\frac{1}{x+1} \leq \frac{\sin x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}, \forall x \in]-1, +\infty[$;
 $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x+1}\right) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$,

então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x+1} = 0$.

$$10.3 \quad \underbrace{-\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \cos x \leq \frac{1}{x^2}}_{-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}}; \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\text{como } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$\text{então } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} \cos x\right) = 0.$$

$$10.4 \quad \underbrace{\frac{3}{2x+3} \leq \frac{2-\sin x}{2x+3} \leq \frac{1}{2x+3}}_{1 \leq 2-\sin x \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}}; \quad \forall x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[;$$

$$\text{como } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2x+3} = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x+3} = 0,$$

$$\text{então } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\sin x}{2x+3} = 0.$$

$$10.5 \quad \underbrace{\frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x+\cos x}{x+1} \leq \frac{x+1}{x+1}}_{-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}} = 1, \quad \forall x \in]-1, +\infty[;$$

$$\text{como } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+1} = 1,$$

$$\text{então } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\cos x}{x+1} = 1.$$

$$10.6 \quad \underbrace{\frac{3x^2-1}{2x^2+1} \leq \frac{3x^2+\cos(\pi x)}{2x^2+1} \leq \frac{3x^2+1}{2x^2+1}}_{-1 \leq \cos(\pi x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}}; \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\text{como } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-1}{2x^2+1} = \frac{3}{2} \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+1}{2x^2+1} = \frac{3}{2},$$

$$\text{então } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+\cos(\pi x)}{2x^2+1} = \frac{3}{2}.$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [-f(x)+3] \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} [2f(x)];$$

$$\text{como } \lim_{x \rightarrow +\infty} [-f(x)+3] = 3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 - 1 = 2 \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [2f(x)] = 2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, \text{ então } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2.$$

PÁG. 21

12. f é contínua em $[2, 3]$ e $f(3) < 1 < f(2)$; logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe $c \in]2, 3[$ tal que $f(c) = 1$.

13. g é contínua em $[-1, 2]$ e $g(-1) = 4 < 6 < g(2) = 16$; logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe $c \in]-1, 2[$ tal que $g(c) = 6$.

14.1 A função h é contínua em $\mathbb{R}$ (função polinomial), pelo que também é contínua em $[0, 2]$; por outro lado, $h(0) = 2$ e $h(2) = 6$, donde verifica-se a desigualdade $h(0) < 3 < h(2)$. O teorema de Bolzano-Cauchy garante que existe, pelo menos, um número real $c \in]0, 2[$: $h(c) = 3$.

14.2

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & & -1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$h(x) = (x+1)(x^2-x-1)$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx -0,6 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx 1,6$$

Confirma-se que a equação $h(x) = 3$ tem uma solução em $]0, 2[$: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

15. h é contínua em $[1, 5]$ e $h(1) < 5 < h(5)$; logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe $c \in]1, 5[$ tal que $h(c) = 5$, ou seja, 5 pertence ao contradomínio de h .

$$16.1 \quad f(-1) = \frac{5}{2} \text{ e } f(2) = -11.$$

16.2 Não, pois f não é contínua em $[-1, 2]$, uma vez que não está definida em $x = 1$.

17. A função g é contínua em $]-\infty, 1[$ (função polinomial) e em $]1, +\infty[$ (quociente de funções contínuas); resta ver em $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x^2}-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x}+1) = 2;$$

$$\text{como } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2 = g(1), \text{ } g \text{ é contínua em } \mathbb{R},$$

pelo que também é contínua em $[-1, 2]$.

$$\text{Dado que } g(-1) = 0 < \sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}+1} = g(2),$$

o teorema de Bolzano-Cauchy garante que existe, pelo menos, um número real $c \in]-1, 2[$: $g(c) = \sqrt{2}$, donde a proposição é verdadeira.

18.1 A função g é contínua em $\mathbb{R}$ (função polinomial) pelo que também é contínua em $[-1, 0]$; por outro lado, $g(-1) = -1$ e $g(0) = 1$.

Como $g(-1) \times g(0) < 0$, o corolário do teorema de Bolzano-Cauchy garante que existe, pelo menos, um número real $c \in]-1, 0[$: $g(c) = 0$.

18.2 $]0, 1[$

19. Só a função f satisfaz as condições do teorema de Weierstrass, pois só esta função é contínua no intervalo fechado e limitado $[-3, 2]$; o máximo e mínimo absolutos são, respetivamente, 3 e 2.

PÁG. 25

20. Como $\lim v_n \leq \lim u_n = 3$, $\lim v_n$ não pode ser $+\infty$.

Opção correta: D.

21. $\lim v_n = -\infty$

Opção correta: A.

22. Como $\lim(-u_n - 1) = +\infty$, o $\lim v_n$ também é $+\infty$.

Opção correta: D.

23. Como $\lim(1 - u_n) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

pelo teorema das sucessões enquadadas o $\lim v_n$ também é $\frac{1}{2}$.

Opção correta: C.

24. $\lim u_n = \lim [(-1)^n \sqrt{n} - n] = \lim \sqrt{n}((-1)^n - \sqrt{n}) = -\infty$

Opção correta: A.

25. A sucessão definida por $u_n = \frac{n^2}{(-1)^n n^2 - 1}$ não é conver-

gente. Com efeito, como $u_n = \begin{cases} \frac{n^2}{n^2 - 1} & \text{se } n \text{ par} \\ -\frac{n^2}{n^2 + 1} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$,

os termos de ordem par definem uma sucessão convergente para 1 e os termos de ordem ímpar definem uma sucessão convergente para -1 .

As restantes sucessões são convergentes para -1 .

26. Opção correta: C $-\underbrace{n^2 + \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}_{\forall n \in \mathbb{N}, \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \in \{0, 1\}} \leq -n^2 + 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Como $\lim(-n^2 + 1) = -\infty$,

então $\lim \left[-n^2 + \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] = -\infty$.

Opção correta: B.

PÁG. 26

27. Em todas as opções as funções dadas verificam as condições iniciais relativas aos limites; todavia, verifica-se o enquadramento

$$\underbrace{\overbrace{0}^{f(x)} \leq \frac{\cos x + 1}{x^2 + 3} \leq \overbrace{\frac{2}{x + 1}}^{h(x)}}_{\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Opção correta: C.

28. Como a função f não está definida em $x = \frac{1}{2}$, não se pode aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy a qualquer intervalo que contenha esse valor.

Opção correta: C.

- 29.1 Sendo a função contínua em $\mathbb{R}$ também é contínua em qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$, nomeadamente, $[1, 2]$; todavia, $f(1) \times f(2) > 0$, pelo que do corolário do teorema Bolzano-Cauchy nada se pode concluir quanto à existência nem número de zeros de f em $]1, 2[$.

Opção correta: D.

- 29.2 A função g também é uma função contínua em $\mathbb{R}$; logo, é contínua em $[1, 2]$; verificando-se a desigualdade $g(1) < -2 < g(2)$ ou a desigualdade $g(2) < -2 < g(1)$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que existe um número real $c \in]1, 2[$: $g(c) = -2$.

A. $g(1) = f(1) + 1 = -1$ e $g(2) = f(2) + 2 = 1$

B. $g(1) = 2f(1) + 1 = -3$ e $g(2) = 2f(2) + 2 = 0$

C. $g(1) = f(1) + 2 = 0$ e $g(2) = f(2) + 2 \times 2 = 3$

D. $g(1) = 2f(1) + 2 = -2$ e $g(2) = 2f(2) + 2 \times 2 = 2$

Opção correta: B.

30. O teorema de Weierstrass permite afirmar que toda a função contínua num intervalo fechado e limitado admite máximo e mínimo absolutos nesse intervalo, pelo que basta ver qual das funções indicadas é contínua em $[-1, 1]$.

Opção A: a função f não é contínua em

$[-1, 1]$ pois $1 \notin D_f$.

Opção B: a função g é contínua em $\mathbb{R}$; logo, em

$[-1, 1]$; a função g é contínua em $]-\infty, 1[$ por ser uma função polinomial, é contínua em $]1, +\infty[$ por ser uma função racional (quociente de polinómios) e é contínua

em $x = 1$ $\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2 \text{ e} \right.$

$$\left. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2 \right).$$

O teorema de Weierstrass garante que a função g , por ser contínua num intervalo fechado e limitado, admite máximo e mínimo absolutos nesse intervalo.

Opção C: a função h é descontínua em $x = 1$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} (-x + 2) = 1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x - 1} \right).$$

Opção D: a função i é descontínua em $x = 0$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x - 1) = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) \right).$$

Opção correta: B.

PÁG. 27

31. Como $\lim (5 - u_n) = -\infty$ e $v_n \leq 5 - u_n$, para $n \geq 10$, $\lim v_n$ também é $-\infty$.

32. $\lim w_n = \lim (2v_n) = 2 \lim v_n = +\infty$

33. $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos n \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq \cos n - 2 \leq -1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -3n^4 \leq n^4(\cos n - 2) \leq -n^4$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq -n^4 \text{ e } \lim(-n^4) = -\infty.$$

Logo, $\lim u_n = -\infty$.

$$34.1 \quad u_n = \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)}{2n+3} \xRightarrow[\substack{\forall n \in \mathbb{N}, \\ -1 \leq \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right) \leq 1}]{\Rightarrow} \frac{1}{2n+3} \leq u_n \leq \frac{1}{2n+3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como as sucessões definidas por $a_n = -\frac{1}{2n+3}$ e $b_n = \frac{1}{2n+3}$

têm por limite 0, então $\lim u_n = 0$.

$$34.2 \quad u_n = \frac{\cos^2(n\alpha)}{2n+1} \xRightarrow[\substack{\forall n \in \mathbb{N}, \\ 0 \leq \cos^2(n\alpha) \leq 1}]{\Rightarrow} 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como as sucessões definidas por $a_n = 0$ e $b_n = \frac{1}{2n+1}$ têm por limite 0, então $\lim u_n = 0$.

$$34.3 \quad u_n = \left(\frac{2n}{5n+1}\right)^n = \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{25n+5}\right)^n \xRightarrow[\substack{\frac{2}{25n+5} > 0, \forall n \in \mathbb{N}; \\ x_n = \frac{2n}{5n+1} \text{ é crescente;} \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0}]{\Rightarrow} \frac{2}{25n+5} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como as sucessões definidas por $a_n = 0$ e $b_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ têm por limite 0, então $\lim u_n = 0$.

$$34.4 \quad u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \xRightarrow[\substack{\text{o menor termo do somatório é } \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}; \\ \text{o maior termo do somatório é } \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}]{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ e $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ não dependem de k ,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}} \text{ e } \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}},$$

$$\text{donde } \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}} \leq u_n \leq \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Como as sucessões } a_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \text{ e}$$

$$b_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \text{ têm por limite 2, então } \lim u_n = 2.$$

$$35.1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+4x}{x+3} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x+4)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+4}{1+\frac{3}{x}} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+4x}{x+3} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+4)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+4}{1+\frac{3}{x}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

35.2 $+\infty$

$$36.1 \quad -\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{\sin x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \text{ como}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2+1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0, \text{ então, por exemplo,}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x^2+1} \text{ e } h(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

$$36.2 \quad -\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{\sin x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \text{ como}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2+1}\right) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0, \text{ então}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} = 0.$$

$$37.1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} [-2f(x) - 3] \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x-1) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} [-f(x) - 1]$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 0^+} [-2f(x) - 3] = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} [-f(x) - 1] = +\infty$$

$$\text{então } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x-1) = +\infty.$$

O gráfico da função $h(x) = g(x-1)$ resulta do gráfico da função g por uma translação horizontal de vetor $\vec{u}(1, 0)$,

$$\text{pelo que } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty.$$

$$37.2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [-2f(x) - 3] \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x-1) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} [-f(x) - 1]$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} [-2f(x) - 3] = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} [-f(x) - 1] = 1,$$

$$\text{então } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x-1) = 1.$$

Pela mesma razão associada à translação tem-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1.$$

38. Sendo a função f limitada, existe $L \in \mathbb{R}^+$ tal que,

$\forall x \in \mathbb{R}, -L < f(x) < L$. Assim, a função h definida por $h(x) = L \times g(x)$ é tal que, $\forall x \in \mathbb{R}, -h(x) \leq f(x)g(x) \leq h(x)$

e, como $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, tem-se $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.

Sendo $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-h(x)) = 0$, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)g(x)) = 0.$$

PÁG. 28

39. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + \frac{\cos x}{x}} = +\infty$

40. f é contínua em $[-3, -2]$ e $f(-2) = \sqrt{5} < \pi < f(-3) = \sqrt{10}$; logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe $c \in]-3, -2[$ tal que $f(c) = \pi$, ou seja, a equação $f(x) = \pi$ tem, pelo menos, uma solução nesse intervalo.

41. Para mostrar que a equação $g(x) = x + 2$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]2, 3[$, vamos considerar, por exemplo, a equação equivalente $\sqrt{x^3 + 1} - x - 2 = 0$ e usar o teorema de Bolzano-Cauchy, aplicando-o à função f definida por $f(x) = \sqrt{x^3 + 1} - x - 2$, em $[2, 3]$.
A função f é contínua em $[2, 3]$, pois é a soma de funções contínuas em $[2, 3]$, e
 $f(2) = -1 < 0 < f(3) = \sqrt{28} - 5$; logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe $c \in]2, 3[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, a equação $\sqrt{x^3 + 1} - x - 2 = 0 \Leftrightarrow g(x) = x + 2$ tem, pelo menos, uma solução nesse intervalo.

42. Por exemplo, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \leq x \leq c \\ -1 & \text{se } c < x \leq b \end{cases}$ com $a < c < b$

43. Como h é uma função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $[-2, -1]$.

Por outro lado, $h(-2) = 12 + k$ e $h(-1) = 5 + k$.

De $h(-2) \times h(-1) < 0$ conclui-se que

$$\begin{cases} 12 + k < 0 \\ 5 + k > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 12 + k > 0 \\ 5 + k < 0 \end{cases}, \text{ ou seja, } -12 < k < -5.$$

44. Para mostrar que a equação $f(x) = g(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]a, b[$ vamos considerar, por exemplo, a equação equivalente $f(x) - g(x) = 0$ e usar o corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, aplicando-o à função h definida por $h(x) = f(x) - g(x)$, em $[a, b]$.
A função h é contínua em $[a, b]$, pois é a diferença de funções contínuas em $[a, b]$, e, como, $f(a) - g(a) < 0$ e $f(b) - g(b) > 0$, tem-se $h(a) \times h(b) < 0$; logo, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, existe, pelo menos, um $c \in]a, b[$ tal que $h(c) = 0$, ou seja, a equação $f(x) = g(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]a, b[$.

45.1 Para mostrar que se $f(a) \leq g(a)$ e $f(b) \geq g(b)$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$, vamos considerar a função h definida por $h(x) = f(x) - g(x)$, em $[a, b]$.

Tem-se que:

h é contínua em $[a, b]$, pois é a diferença de funções contínuas em $[a, b]$;

$$h(a) = f(a) - g(a) \leq 0;$$

$$h(b) = f(b) - g(b) \geq 0.$$

Se $f(a) - g(a) = 0$, tem-se, por exemplo, $c = a$.

Se $f(b) - g(b) = 0$, tem-se, por exemplo, $c = b$.

Considerando as desigualdades estritas, podemos aplicar o corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, que nos permite concluir que existe, pelo menos, um $c \in]a, b[$ tal que $h(c) = 0$, ou seja, tal que $f(c) = g(c)$.

45.2 A propriedade enunciada é um caso particular da propriedade enunciada em 45.1.

46.1

a. A função f é contínua em $[2, 10]$, pois é a composição da função raiz quadrada (contínua em $\mathbb{R}_0^+$) com uma função racional (contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$), sendo o conjunto imagem de $[2, 10]$ pela função racional um conjunto de números reais positivos. Por outro lado, tem-se

$$f(10) = \frac{5}{3} < 2 < f(2) = 3.$$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe $c \in]2, 10[$ tal que $f(c) = 2$, ou seja, a equação $f(x) = 2$ tem uma solução nesse intervalo.

b. Da alínea anterior sabe-se que $\underbrace{f(10)}_{\frac{5}{3} = 1,6} < 2 < \underbrace{f(2)}_3$.

Como $f(6) = \sqrt{\frac{17}{5}} \approx 1,8$ então $f(6) < 2 < f(2)$ e como f é uma função contínua em $[2, 6]$, então essa solução também pertence a $]2, 6[$.

c. Como $f(4) = \sqrt{\frac{13}{3}} \approx 2,1$ então $f(6) < 2 < f(4)$ e a solução também pertence a $]4, 6[$.

46.2 $f(-1) = -\frac{2}{3}$ e $f(2) = 3$.

Só será possível garantir a existência de zeros se a função for contínua em $[-1, 2]$; todavia, como a função não é contínua em $x = 1$ ($\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$), não é possível garantir a existência de zeros em $]-1, 2[$.

PÁG. 29

47. V é contínua em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

$$V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 80\left(\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = 40\pi - 80 \approx 45,66$$

$$V\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 80\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = 80\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{160\pi}{3} - 40\sqrt{3} \approx 98,27$$

$$V\left(\frac{\pi}{2}\right) < 80 < V\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

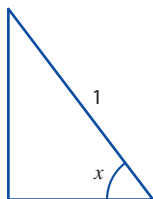
Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe

$$x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right] \text{ tal que } V(x) = 80 \text{ m}^3.$$

Como V é estritamente crescente, sabemos que esse valor é único.

48. O volume do cone é dado por $\frac{1}{3} \times \text{área da base} \times \text{altura}$ e o volume do cilindro é dado por $\text{área da base} \times \text{altura}$.

A altura do cone é dada, em função de $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, por $\sin x$.



O raio da base do cone (e do cilindro) é dado, em função de x , por $\cos x$.

Assim, o volume do sólido é dado, em função de x , por $\pi \cos^2 x + \frac{\pi}{3} \cos^2 x \times \sin x$.

Seja V a função definida em $]0, \frac{\pi}{2}[$ por

$$V(x) = \pi \cos^2 x + \frac{\pi}{3} \cos^2 x \times \sin x.$$

V é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, pois resulta da soma e produto de funções contínuas.

$$\begin{aligned} V\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \pi \cos^2 \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cos^2 \frac{\pi}{6} \times \sin \frac{\pi}{6} = \\ &= \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \\ &= \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8} \approx 2,75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \pi \cos^2 \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \cos^2 \frac{\pi}{3} \times \sin \frac{\pi}{3} = \\ &= \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{24} = \frac{\pi(6+\sqrt{3})}{24} \approx 1,01 \end{aligned}$$

$$V\left(\frac{\pi}{3}\right) < 2 < V\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

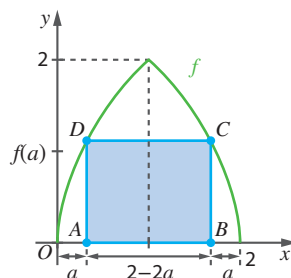
Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

existe $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ tal que $V(x) = 2 \text{ dm}^3$.

49. Seja g a função que dá a área do retângulo $[ABCD]$ em função de a , $0 < a < 1$.

A altura do retângulo $[ABCD]$ é $f(a)$. Atendendo à simetria do gráfico de f relativamente à reta de equação

$y = 1$ ($f(a) = f(2-a)$), a base do retângulo é $2-2a$.



$$\text{Assim, } g(a) = (2-2a)f(a) = (4-4a)\sqrt{a}.$$

A função g é contínua em $\left[\frac{1}{25}, \frac{1}{4}\right]$, pois é o produto de funções contínuas nesse intervalo.

$$g\left(\frac{1}{25}\right) = \left(4 - 4 \times \frac{1}{25}\right) \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{21}{25} \times \frac{1}{5} = \frac{21}{125}$$

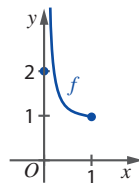
$$g\left(\frac{1}{4}\right) = \left(4 - 4 \times \frac{1}{4}\right) \sqrt{\frac{1}{4}} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Como g é contínua em $\left[\frac{1}{25}, \frac{1}{4}\right]$ e $\frac{21}{125} < 1 < \frac{3}{2}$, pelo

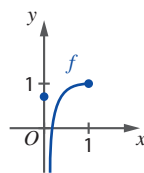
teorema de Bolzano-Cauchy, existe $a \in \left[\frac{1}{25}, \frac{1}{4}\right]$ tal que

$g(a) = 1$, ou seja, tal que a área do retângulo $[ABCD]$ é igual a 1.

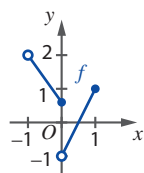
50.1 Por exemplo:



50.2 Por exemplo:



50.3 Por exemplo:



DIAGNÓSTICO – PÁG. 30

1.1 $A(0, 3)$ e $B(1, 2) \Rightarrow m_{AB} = \frac{2-3}{1-0} = -1$

$B(1, 2)$ e $C(3, 6) \Rightarrow m_{BC} = \frac{6-2}{3-1} = 2$

Logo, $m_{AB} < m_{BC}$, o que é compatível com o facto de o gráfico de f ter a concavidade estritamente voltada para cima.

1.2 $B(1, 2)$ e $D(2, 1) \Rightarrow m_{BD} = \frac{1-2}{2-1} = -1$

$D(2, 1)$ e $E(3, -2) \Rightarrow m_{DE} = \frac{-2-1}{3-2} = -3$

Logo, $m_{BD} > m_{DE}$, o que é compatível com o facto de o gráfico de g ter a concavidade estritamente voltada para baixo em $[1, 3]$.

2.1

a. $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} [2(x+1)] = 4$

b. $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 4h}{h} \stackrel{0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h(h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [2(h+2)] = 4$

2.2 A função f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$ (função polinomial), pelo que é contínua em $[0, 2]$ e diferenciável em $]0, 2[$.

Assim, pelo teorema de Lagrange, existe pelo menos um

$c \in]0, 2[: f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \text{tmv}_{f, [0, 2]}.$

$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \stackrel{f'(x) = 4x}{\Leftrightarrow} 4c = \frac{7+1}{2} \Leftrightarrow c = 1$

3.1 Em $]-\infty, 2[$ a função g é contínua por ser uma função polinomial; em $]2, +\infty[$ a função g é contínua por ser uma função racional (quociente de funções polinomiais); resta estudar a continuidade em $x = 2$.

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 5$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 5$, existe

$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5 = g(2)$, pelo que g é contínua em $\mathbb{R}$.

3.2 $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-6x + 12}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-6x + 12}{(x-1)(x-2)} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-6(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-6}{x-1} = -6$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$

não existe derivada de g em $x = 2$.

4. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+8}}$ e $m_r = f'(-6) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

A equação reduzida da reta r é da forma $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + b$, sendo que a reta passa no ponto

$A(-6, f(-6)) = (-6, \sqrt{2})$.

$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(-6) + b \Leftrightarrow b = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, ou seja,

a equação reduzida da reta r é $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

A ordenada do ponto B é 0, sendo que o ponto pertence à reta r ; considerando x a abcissa do ponto B tem-se que

$0 = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{5\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -10$, ou seja, as coordenadas do ponto B são $(-10, 0)$.

5.1 $f'(x) = 5$

5.2 $g'(x) = 4x^3 - 6x + 2$

5.3 $h'(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2}$

5.4 $i'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

5.5 $j'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

5.6 $k'(x) = -\frac{2x+3}{2\sqrt{x+1}(2x+1)^2}$

6.1 f é diferenciável em $\mathbb{R}$, pelo que é contínua em $\mathbb{R}$.

6.2 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = 2 \times 3^2 - 1 = 17$

6.3 A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x tem declive igual a $f'(x)$.

A bissetriz dos quadrantes ímpares tem declive 1.

Como retas paralelas têm o mesmo declive, conclui-se que:

$f'(x) = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

São os pontos cujas abcissas são, respetivamente, -1 e 1 .

6.4 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
Monotonia e extremos de f	$\nearrow$	Máx. relativo	$\searrow$	Mín. relativo	$\nearrow$

A função f é crescente em $\left] -\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$

e em $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right[$.

A função f é decrescente em $\left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$.

A função f tem mínimo relativo em $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e máximo relativo em $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. $g'(x) = 9 - \frac{1}{x^2}$
 $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{9x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	N.D.	-	0	+
Monotonia e extremos de g	$\nearrow$	-6 Máx. relativo	$\searrow$	N.D.	$\searrow$	6 Mín. relativo	$\nearrow$

A função g é crescente em $\left] -\infty, -\frac{1}{3} \right]$ e em $\left[\frac{1}{3}, +\infty \right[$.

A função g é decrescente em $\left] -\frac{1}{3}, 0 \right[$ e em $\left] 0, \frac{1}{3} \right]$.

A função g tem mínimo relativo 6 em $x = \frac{1}{3}$ e máximo relativo -6 em $x = -\frac{1}{3}$.

Dado que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, conclui-se que a função g não tem extremos absolutos.

8.1 $a(0) = 7$ m

8.2 $a(t) = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 49t + 7 = 0 \Leftrightarrow t \approx 10,14$ s

8.3 $\frac{a(2) - a(0)}{2 - 0} = 39,2$ m/s

8.4 $a'(t) = -9,8t + 49$
 $a'(2) = 29,4$ m/s

8.5 $a'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 49 = 0 \Leftrightarrow t = 5$ s
 $a(5) = 129,5$ m

9.1 Uma vez que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C , tem-se que $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.

Por outro lado a área do triângulo $[ABC]$ é dada por

$$\frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2}.$$

Como $\overline{AB} = 6$ e $\overline{AC} = x$ então

$$\overline{BC} = \sqrt{6^2 - x^2} = \sqrt{36 - x^2}, x \in [0, 6] \text{ e a área do}$$

triângulo $[ABC]$ é dada por $\frac{x\sqrt{36 - x^2}}{2}, x \in [0, 6]$.

9.2 $A'(x) = \frac{18 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{18 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$$

x	0		$3\sqrt{2}$		6
$A'(x)$	0	+	0	-	0
Monotonia e extremos de A	0 Mín. absoluto	$\nearrow$	9 Máx. absoluto	$\searrow$	0 Mín. absoluto

A área máxima que o triângulo $[ABC]$ pode ter é 9, sendo que, para essa área, $\overline{AC} = x = 3\sqrt{2}$ e $\overline{BC} = \sqrt{36 - x^2} = 3\sqrt{2}$.

2. DERIVADAS DE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL E APLICAÇÕES

PÁG. 35

51.1 A função f tem derivada em $]0, +\infty[$ definida por

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x}.$$

A função derivada da função f também é uma função diferenciável pois é o quociente de funções diferenciáveis em $]0, +\infty[$.

51.2 $f''(x) = -\frac{\sqrt{x}}{4x^2}$

52.1 Como $g'(1) = 2$, g é diferenciável em $x = 1$.

Por outro lado, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g'(x) - g'(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 - 2}{x - 1} = 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g'(x) - g'(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 2}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g'(x) - g'(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g'(x) - g'(1)}{x - 1}$, não existe $g''(1)$, pelo que g não é duas vezes diferenciável em $x = 1$.

52.2 Em $]1, +\infty[$ tem-se que $g''(x) = 2$ pois g' é uma função polinomial, logo diferenciável.

Em $]-\infty, 1[$ tem-se que $g''(x) = 0$ pois g' é uma função constante, logo diferenciável.

$$g''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

53.1 Para $n \in \mathbb{Z}_0^+$, f é uma função polinomial, pelo que é diferenciável no seu domínio, e a sua derivada também é diferenciável por também ser polinomial.

Para $n \in \mathbb{Z}^-$, f é uma função racional, pelo que é diferenciável no seu domínio, e a sua derivada também é diferenciável por também ser racional.

53.2 $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$

53.3 Para $n = 0$, tem-se $f(x) = 1$ e, portanto, $f''(x) = 0$ (que é constante).

Para $n = 1$, tem-se $f(x) = x$ e, portanto, $f''(x) = 0$ (que é constante).

Para $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, tem-se $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$, que é uma função constante se $n-2 = 0$, ou seja, se $n = 2$.

Portanto, a segunda derivada de f é constante se $n = 0$, $n = 1$ ou $n = 2$.

53.4 Para $n = 0$ e $n = 1$, $f''(x) = 0 \neq 2$.

Consideremos, portanto, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$.

$$f''(1) = 2 \Leftrightarrow n(n-1) = 2 \Leftrightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = -1 \vee n = 2$$

54.1 $f'(x) = 5$ e $f''(x) = 0$.

54.2 $g'(x) = 6x$ e $g''(x) = 6$.

54.3 $h'(x) = 4x^3 - 12x^2$ e $h''(x) = 12x(x-2)$.

54.4 $i'(x) = -\frac{2}{x^2}$ e $i''(x) = \frac{4}{x^3}$.

54.5 $j'(x) = \frac{11}{(5-2x)^2}$ e $j''(x) = \frac{44}{(5-2x)^3}$.

54.6 $k'(x) = \frac{8-x}{(x+2)^3}$ e $k''(x) = \frac{2(x-13)}{(x+2)^4}$.

54.7 $l'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ e $l''(x) = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)^2}$.

54.8 $m'(x) = -\frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}$ e $m''(x) = \frac{(3x^2+18x+18)\sqrt{2x+3}}{x^3(2x+3)^2}$.

55.1 $f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.
Logo, f não tem extremos relativos.

55.2 $g'(x) = 6(x^2 + 3x - 4)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$$

(abscissas dos pontos críticos de g)

$$g''(x) = 6(2x + 3)$$

$$g''(-4) < 0 \Rightarrow g \text{ tem máximo relativo } g(-4) = 106$$

$$g''(1) > 0 \Rightarrow g \text{ tem mínimo relativo } g(1) = -19$$

55.3 $h'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

(abscissas dos pontos críticos de h)

$$h''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$$

$$h''(1) < 0 \Rightarrow h \text{ tem máximo relativo } h(1) = 2$$

$$h''(3) > 0 \Rightarrow h \text{ tem mínimo relativo } h(3) = 6$$

55.4 $i'(x) = \frac{x\sqrt{x^2+2}}{x^2+2}$

$$i'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (abscissa do ponto crítico de } i)$$

$$i''(x) = \frac{2\sqrt{x^2+2}}{(x^2+2)^2}$$

$$i''(0) > 0 \Rightarrow i \text{ tem mínimo relativo } i(0) = \sqrt{2}$$

56. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 2$

(abscissas dos pontos críticos de g)

$$f''(-4) > 0 \Rightarrow f \text{ tem mínimo relativo } f(-4)$$

$$f''(2) > 0 \Rightarrow f \text{ tem máximo relativo } f(2)$$

PÁG.41

57.

x	-5	-3	2	4	5
$f''(x)$	+	0	+	-	0
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	∪		∪	PI	∩
			PI		∪

58.1 $f''(x) = 6x - 18$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f		∩	PI
	PI		∪

Coordenadas do ponto de inflexão: $(3, -1)$.

58.2 $g''(x) = 12(x^2 + x - 2)$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$

Coordenadas dos pontos de inflexão: $(-2, -45)$ e $(1, -6)$.

58.3 $h''(x) = \frac{12}{(x+4)^3}$

h'' não tem zeros.

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$h''(x)$	$-$	ND	$+$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de h	$\cap$	ND	$\cup$

Não tem pontos de inflexão.

58.4 $i''(x) = \frac{2(x^3 - 8)}{x^3}$

$i''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$i''(x)$	$-$	ND	$-$	0	$+$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de i	$\cap$	ND	$\cap$	PI	$\cup$

Coordenadas do ponto de inflexão: $(2, 0)$

59. $f''(x) = 6(x + a)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -a$

x	$-\infty$	$-a$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cap$	PI	$\cup$

Se o ponto de inflexão de f tem coordenadas $(-1, -2)$ então $-a = -1 \Leftrightarrow a = 1$; além disso,

$f(-1) = -2 \Leftrightarrow -1 + 3 - b = -2 \Leftrightarrow b = 4$

PÁG. 45

60.1 $a'(t) = -10t + 100$

$a'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 10$

$a''(t) = -10$

$a''(t) < 0, \forall t \Rightarrow a$ tem máximo relativo $a(10) = 2000$ m

60.2 $\frac{a(5) - a(0)}{5 - 0} = \frac{375}{5} = 75$ m/s

60.3 $a(t) = 0 \Rightarrow t = 30$

$a'(t) = -10t + 100$

$a'(30) = -200$

O projétil atinge o solo com uma velocidade de -200 m/s.

61.1 $\frac{p(2) - p(0)}{2 - 0} = \frac{56}{2} = 28$ m/s

61.2 $p'(t) = 8t + 20$

$p'(2) = 36$ m/s

61.3 $p''(t) = 8$

$\forall t, p''(t) > 0 \Rightarrow p'$ é uma função monótona crescente em $[0, 8]$, pelo que a velocidade máxima ocorre quando $t = 8$ ($p'(8) = 84$ m/s), sendo a aceleração nesse momento 8 m/s².

62.1 $d(0) = 57$ m

62.2 $57 - 4,9t^2 = 0 \Rightarrow t \approx 3,4$ s

62.3 $d'(t) = -9,8t$

$d'(3,4) = -33,3$ m/s

62.4 $d''(t) = -9,8$ m/s²

63.1 $p(0) = x_0$

63.2 $p'(t) = a_0 t + v_0$

$p'(0) = v_0$

63.3 $p''(t) = a_0$

64.1 $|p_1(0) - p_2(0)| = 6$ m

64.2 $p_1(t) = p_2(t) \Leftrightarrow 2t^2 - 4t - 6 = 0 \Rightarrow t = 3$ s

$p_1(3) = p_2(3) = 9$ m

64.3 $p_1'(t) = 4t - 3$

$p_2'(t) = 1$

$p_1'(t) = p_2'(t) \Leftrightarrow 4t - 3 = 1 \Leftrightarrow t = 1$ s

64.4 $p_1''(t) = 4$ m/s² = $\frac{0,004 \text{ km}}{\left(\frac{1}{3600} \text{ h}\right)^2} = 51\,840$ km/h²

$$p_2''(t) = 0 \text{ m/s}^2 = 0 \text{ km/h}^2$$

64.5 Seja d a função definida por

$$d(t) = p_1(t) - p_2(t) = 2t^2 - 4t - 6.$$

$$d'(t) = 4t - 4$$

$$d'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

t	0		1		10
$d'(t)$	-	-	0	+	+
Monotonia e extremos de d	-6 (Máx.)	$\searrow$	-8 (Min.)	$\nearrow$	154 (Máx.)

A distância máxima é o maior dos números do conjunto

$\{-6, -8, 154\}$, ou seja, 154 m.

PÁG. 57

65.1 A função f é uma função polinomial logo contínua em $\mathbb{R}$.

$f(x) = x(x-3)^2$, pelo que o gráfico de f interseita os eixos nos pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(3, 0)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

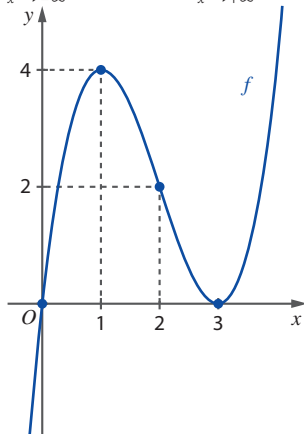
x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
Monotonia e extremos de f	$\nearrow$	4 (Máx.)	$\searrow$	0 (Mín.)	$\nearrow$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cap$	PI	$\cup$

$$f(2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$



65.2 A função f é uma função polinomial logo contínua em $\mathbb{R}$

$f(x) = x^2(x^2 - 8)$, pelo que o gráfico de f interseita os eixos nos pontos de coordenadas $(0, 0)$, $(-2\sqrt{2}, 0)$ e

$(2\sqrt{2}, 0)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$$

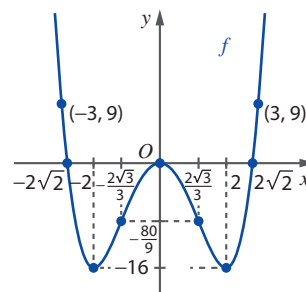
x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-16 (Mín.)	$\nearrow$	0 (Máx.)	$\searrow$	-16 (Mín.)	$\nearrow$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$

$$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{80}{9}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



65.3 A função f é uma função racional logo contínua no seu domínio $(\mathbb{R} \setminus \{3\})$.

$$f(0) = \frac{1}{3} \text{ e } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \text{ pelo que o gráfico de } f$$

interseita os eixos nos pontos de coordenadas $(0, \frac{1}{3})$ e $(\frac{1}{2}, 0)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, f'(x) = -\frac{5}{(x-3)^2} < 0$$

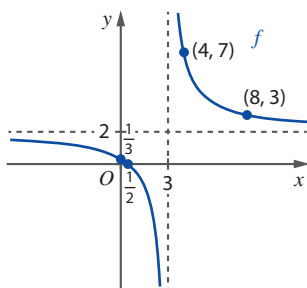
x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	ND	-
Monotonia e extremos de f	$\searrow$	ND	$\searrow$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, f'(x) = \frac{10}{(x-3)^3} \neq 0$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	ND	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cap$	ND	$\cup$

$f(x) = 2 + \frac{5}{x-3}$, logo o gráfico de f tem assíntota horizontal de equação $y = 2$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$).

Como $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$, o gráfico de f tem assíntota vertical de equação $x = 3$.



65.4 A função f é uma função racional, logo contínua no seu domínio ($\mathbb{R}$).

$$f(0) = -4 \text{ e } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2,$$

pelo que o gráfico de f interseca os eixos nos pontos de coordenadas $(0, -4)$, $(-2, 0)$ e $(2, 0)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{10x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
Monotonia e extremos de f	$\searrow$	-4 Mín. abs.	$\nearrow$

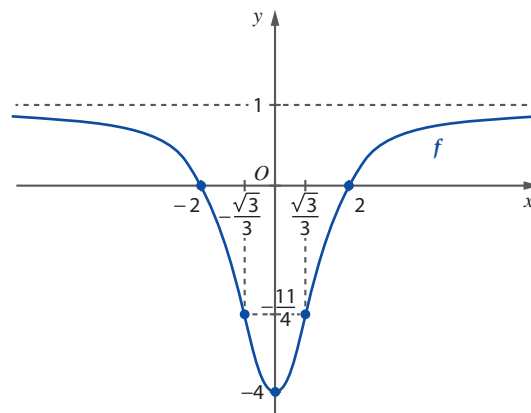
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-30x^2 + 10}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	0	-
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cap$	PI	$\cup$	PI	$\cap$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{11}{4}$$

$f(x) = 1 - \frac{5}{x^2+1}$; logo, o gráfico de f tem assíntota horizontal

de equação $y = 1$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$) e não tem assíntotas verticais uma vez f é contínua em $\mathbb{R}$.



65.5 A função f é uma função composta da função raiz quadrada com uma função polinomial, logo contínua no seu domínio ($\mathbb{R}$).

$f(0) = 1$ e $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$, pelo que o gráfico de f interseca apenas o eixo Oy (ponto de coordenadas $(0, 1)$).

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
Monotonia e extremos de f	$\searrow$	1 Mín. abs.	$\nearrow$

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$; logo, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \stackrel{\infty}{=} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{-x} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2+1} + x] \stackrel{\infty}{=} -\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)}{\sqrt{x^2+1} - x} =$$

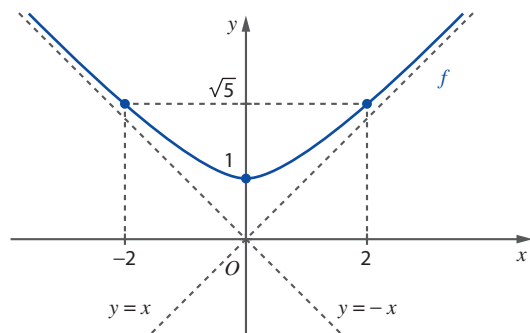
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = 0$$

Conclui-se, assim, que o gráfico de f tem assíntota oblíqua de equação $y = -x$, quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2+1} - x] &\stackrel{\infty-\infty}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0 \end{aligned}$$

Conclui-se, assim, que o gráfico de f tem assíntota oblíqua $y = x$, quando $x \rightarrow +\infty$.



65.6 Escrevendo a função como função por ramos tem-se:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{\sqrt{-x}}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Em $\mathbb{R}^+$, f é definida pelo quociente de uma função irracional por uma função afim, ambas contínuas, tal como em $\mathbb{R}^-$; logo, f é contínua no seu domínio ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Como $0 \notin D_f$ e $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) \neq 0$, o gráfico de f não intersesta nenhum dos eixos.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2x\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{2x\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	ND	—
Monotonia e extremos de f	$\searrow$	ND	$\searrow$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{3}{4x^2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{3}{4x^2\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	—	ND	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cap$	ND	$\cup$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

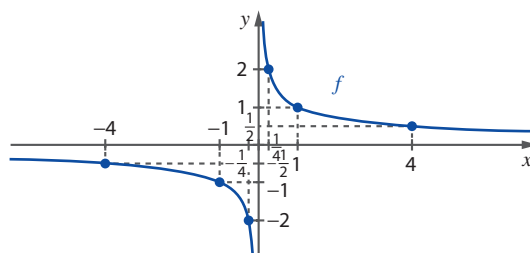
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x\sqrt{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty$$

Conclui-se, assim, que o gráfico de f tem assíntota vertical de equação $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x}}{x} &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x}}{x\sqrt{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x\sqrt{-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{-x}} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Conclui-se, assim, que o gráfico de f tem assíntota horizontal de equação $y = 0$.



PÁG. 61

66.1 $h(-2) = f(-2) - g(-2) = 0 - (-17) = 17$

$h(-1) = f(-1) - g(-1) = -4 - (-3) = -1$

$h(0) = f(0) - g(0) = 0 - (-1) = 1$

$h(4) = f(4) - g(4) = 96 - 127 = -31$

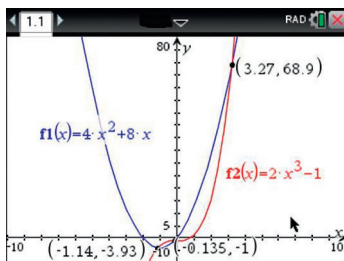
66.2 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$

Uma vez que a função h é contínua em $\mathbb{R}$ (por ser a diferença de funções polinomiais e, portanto, é também uma função polinomial), também é contínua em qualquer intervalo fechado $I \subset \mathbb{R}$; assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, se h tiver nos extremos desse intervalo imagens com sinal contrário,

$$\exists c \in I : h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = g(c).$$

Nos intervalos $]-2, -1[$, $]-1, 0[$ e $]0, 4[$ essas condições são verificadas.

66.3 $-1,14$; $-0,14$; $3,27$



67.1 Seja h a função definida por $h(x) = f(x) - g(x)$.

A função f é contínua no seu domínio $(\mathbb{R} \setminus \{1\})$.

A função g é contínua no seu domínio $[2, +\infty[$.

Assim, a função h , por ser a diferença de funções contínuas em $[2, +\infty[$, é contínua neste intervalo, logo também é contínua em $[4, 5]$.

$$h(4) = f(4) - g(4) = \frac{5}{3} - \sqrt{2} > 0$$

$$h(5) = f(5) - g(5) = \frac{3}{2} - \sqrt{3} < 0$$

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy

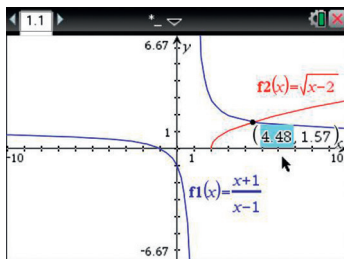
$$\exists c \in]4, 5[: h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = g(c).$$

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x-2}} < 0,$$

$\forall x \in [4, 5]$, pelo que a função h é decrescente em $[4, 5]$, o que implica que a solução da equação

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ é única nesse intervalo.}$$

67.2 4,48



68.1 O declive da reta t é dado por $f'(-1)$.

$$f'(x) = 4x^3 - 10x \text{ donde } f'(-1) = 6.$$

A equação reduzida da reta t é da forma $y = 6x + b$.

Como $f(-1) = -4$ e a reta t passa no ponto de coordenadas $(-1, f(-1))$, verifica-se a equação

$$-4 = 6 \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 2.$$

Assim, a equação reduzida da reta t é $y = 6x + 2$.

68.2 Se, além do ponto A , a reta t interseja o gráfico de f no ponto B , então a equação $f(x) = 6x + 2$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]2, 3[$.

Seja h a função definida por $h(x) = f(x) - (6x + 2)$.

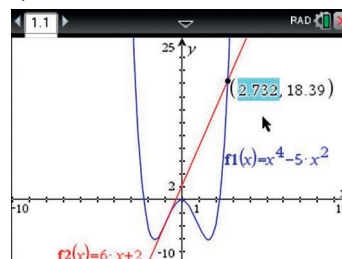
A função f é contínua em $\mathbb{R}$ (função polinomial).

A função definida por $g(x) = 6x + 2$ é contínua em $\mathbb{R}$ (função polinomial).

Assim, a função h , por ser a diferença de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é contínua em $\mathbb{R}$, logo também é contínua em $[2, 3]$.

Como $h(2) < 0$ e $h(3) > 0$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]2, 3[: h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = 6c + 2$, donde a abscissa do ponto B pertence ao intervalo $]2, 3[$.

68.3 2,732

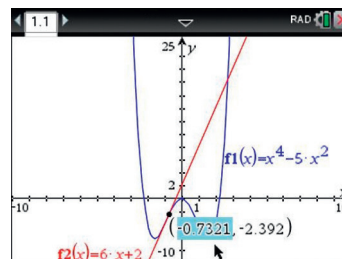


68.4 $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 10x - 6 = 0$ como $h'(-1) = 0$ tem-se:

$$4x^3 - 10x - 6 = (x+1)(4x^2 - 4x - 6)$$

$$4x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{7}}{2} \vee x = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1 - \sqrt{7}}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{7}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	$+$
Monotonia e extremos de f		0 Mín.	$\approx 0,01$ Máx.	$\approx -18,51$ Mín.	



A abscissa do ponto C é aproximadamente $-0,732$.

PÁG. 68

69. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{2\sqrt{x}(x - 1)(1 + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{2\sqrt{x}(x - 1)(1 + \sqrt{x})} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} = -\frac{1}{4}$$

Opção correta: B.

70. $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}}$
 $f''(x) = \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{n} x^{\frac{1-n}{n}-1} = \frac{1-n}{n^2} x^{\frac{1-2n}{n}}$

Opção correta: A.

71. $g(x) = x^{-n}$, $g'(x) = -nx^{-n-1}$
 $g''(x) = -n(-n-1)x^{-n-1-1} = n(n+1)x^{-n-2} = \frac{n^2+n}{x^{n+2}}$

Opção correta: D.

72. Pelo teorema de Lagrange, $\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Como $f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, donde

$\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$.

Opção correta: D.

73. Se $f(2)$ é um máximo e existe $f''(2)$, então $f''(2) < 0$.

Por outro lado, se existe $f'(2)$, então $f'(2) = 0$.

Opção correta: C.

74. $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ tem um mínimo relativo em $x = a$.

Opção correta: A.

PÁG. 69

75. $h''(x) = ax + b$, $a > 0$, $h'(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$

$h(x) = \frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx + d$

Logo, h é uma função polinomial de grau 3 em que o coeficiente de x^3 é positivo, donde

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$.

Opção correta: B.

76.1 $g'(x) < 0$, $\forall x \in]b, d[$

Opção correta: B.

76.2 $g''(x) > 0$, $\forall x \in]c, +\infty[$

Opção correta: A.

76.3 $g''(c) = 0$

Opção correta: C.

76.4 Se $k \in]c, d[\Rightarrow g''(k) > 0 \wedge g'(k) < 0$ donde

$g''(k) - g'(k) > 0$

Opção correta: B.

PÁG. 70

77. A afirmação I é falsa pois pode não haver segunda derivada em $x = c$.

A afirmação II é verdadeira.

Opção correta: C.

78.

x	$-\infty$	a ($a > 0$)		b ($b > a$)	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão de f	$\cap$		$\cap$	PI	$\cup$

Opção correta: B.

79.

x	$-\infty$	-4		7	$+\infty$
$g''(x)$	-	0	+	0	-
Monotonia e extremos de g'	$\searrow$	Mín. rel.	$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$
Concavidades e pontos de inflexão de g	$\cap$	PI	$\cup$	PI	$\cap$

79.1 O gráfico de g tem dois pontos de inflexão.

Opção correta: C.

79.2 g' é estritamente crescente em $[-4, 7]$.

Opção correta: B.

79.3 g' tem máximo relativo em $x = 7$.

Opção correta: D.

PÁG. 70

80. Como h' é diferenciável em $[a, b]$, então h' é contínua em $[a, b]$ e, em particular, h' é diferenciável em $]a, b[$.

Pelo teorema de Lagrange,

$\exists c \in]a, b[: \frac{h'(b) - h'(a)}{b - a} = h''(c)$

Como $h'(b) = h'(a) \Rightarrow \exists c \in]a, b[: h''(c) = 0$.

Opção correta: A.

81. Em $[3, 6]$ f' é uma função crescente donde o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.

Opção correta: D.

82.1 $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	-	0	+
Monotonia e extremos de f	$\searrow$		$\searrow$	-26 Mín. rel.	$\nearrow$

$f(3) = -26$

f é crescente em $[3, +\infty[$.

f é decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, 3[$.

O facto de f ser uma função polinomial (contínua em $\mathbb{R}$) garante que f é decrescente em $]-\infty, 3[$ e que $f(3) = -26$ é um mínimo absoluto de f .

82.2 Sendo f contínua em $\mathbb{R}$, tendo mínimo absoluto negativo e sabendo que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, conclui-se que:

- como f é crescente em $[3, +\infty[$, f tem um zero nesse intervalo;
- como f é decrescente em $]-\infty, 3[$ e f tem um zero nesse intervalo.

82.3 f contínua em $\mathbb{R}$; logo, também é contínua em $[0, 1]$.

$f(0) = 1$; $f(1) = -2$

Como $f(0) \times f(1) < 0$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]0, 1[: f(c) = 0$.

Como no intervalo $]-\infty, 3[$ existe apenas um só zero de f e $]0, 1[\subset]-\infty, 3[\Rightarrow$ em $]0, 1[$ há exatamente um zero de f .

83.1 $x^3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) \geq 0$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	-	-	0	+
$x(x^2 - 1)$	-	0	+	0	-	0	+

$D = [-1, 0] \cup [1, +\infty[$

83.2 $f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}}$, $x^3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$-\frac{\sqrt{3}}{3} \in D \wedge \frac{\sqrt{3}}{3} \notin D$

x	-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	ND	+	0	-	ND	ND	ND	+
Monotonia e extremos de f	-1 Mín. rel.	$\nearrow$	$\frac{\sqrt[4]{12}}{3} - 1$ Máx. rel.	$\searrow$	-1 Mín. rel.	ND	-1 Mín. rel.	$\nearrow$

$f(-1) = -1$; $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt[4]{12}}{3} - 1 \approx -0,4$;

$f(0) = -1$; $f(1) = -1$

f é crescente em $\left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ e em $[1, +\infty[$;

f é decrescente em $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right]$.

f tem mínimo relativo igual a -1 para $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$;

f tem máximo relativo igual a $\frac{\sqrt[4]{12}}{3} - 1$ para $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

83.3 f é contínua no seu domínio, logo também é contínua em $[1, 2]$.

$f(1) = -1$; $f(2) = \sqrt{6} - 1 > 0$

Como $f(1) \times f(2) < 0$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]1, 2[: f(c) = 0$.

Como f é crescente em $[1, +\infty[$ então o zero de f em $]1, 2[$ é único.

83.4 f é contínua no seu domínio.

Em $\left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ f é crescente e como, quer $f(-1)$

quer $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ são negativos, f não tem zeros neste intervalo.

Em $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right]$ f é decrescente e como, quer $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

quer $f(0)$ são negativos, f não tem zeros neste intervalo.

Em $[1, +\infty[$ f é crescente e como $f(1) < 0$ e

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, f tem um zero único que, como se mostrou na alínea anterior, pertence ao intervalo $]1, 2[$.

84. $g'(x) = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	ND	$+$
Monotonia e extremos de g	$\searrow$	$\frac{31}{4}$ Mín. rel.	$\nearrow$	ND	$\nearrow$

g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; logo, é contínua em $\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right]$.

$$g\left(-\frac{3}{4}\right) < 0, \quad g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$$

Como $g\left(-\frac{3}{4}\right) \times g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$, pelo corolário do teorema de

Bolzano-Cauchy, $\exists c \in \left]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right[: g(c) = 0$, ou seja, g

tem pelo menos um zero em $\left]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right[$.

Todavia, g é crescente em $\left]-\frac{3}{2}, -1\right[$, pelo que também

é crescente em $\left]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right[$, pelo que, como g é contínua nesse intervalo, g tem um único zero nesse intervalo.

85.1 $f(x) = x^3 - 12x - 24$, $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia e extremos de f	$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$	Mín. rel.	$\nearrow$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

f é contínua em $\mathbb{R}$.

$$f(2) < 0 \text{ e } f(5) > 0$$

$f(2) \times f(5) < 0$ e f é contínua em $[2, 5]$.

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy $\exists c \in]2, 5[: f(c) = 0$.

$$f(c) = 0 \Leftrightarrow c^3 = 12c + 24$$

Logo, a equação $x^3 = 12x + 24$ tem uma solução em $]2, 5[$.

No intervalo $]2, 5[$ a solução é única, pois f é contínua e crescente.

Como $f(-2) < 0$ e $f(-2)$ é um máximo relativo em $]-\infty, -2[$ e em $]-2, 2[$ não há soluções, pois f é monótona.

85.2 $f(x) = 2x^5 - 5x^2 + 5$, $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 10x^4 - 10x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia e extremos de f	$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$	Mín. rel.	$\nearrow$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty;$$

f é contínua em $\mathbb{R}$.

Como $f(0) > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e f é contínua em $]-\infty, 0[$, f tem um zero em $]-\infty, 0[$, nomeadamente, em $]-1, 0[$, dado que $f(-1) < 0$.

Este zero é único pois f é crescente no intervalo $]-\infty, 0[$.

$f(1) > 0$ e $f(1)$ é um mínimo relativo.

Como f é contínua em $]0, 1[$, decrescente em $]0, 1[$ e $f(1) > 0$, neste intervalo não tem zeros, tal como em $]1, +\infty[$, pois é crescente e contínua também.

Assim existe um único $c \in]0, 1[: f(c) = 0$.

$f(c) = 0 \Leftrightarrow 2c^5 = 5c^2 - 5$, ou seja, a equação tem uma só solução em $\mathbb{R}$.

86.1 Pelo teorema de Lagrange, $\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$
 $f(a) = f(b) \Leftrightarrow f(b) - f(a) = 0$, donde $f'(c) = 0$.

86.2 Como f é uma função contínua no intervalo fechado e limitado $[a, b]$, tem nesse intervalo um máximo e um mínimo.

Se o máximo ou o mínimo ocorrer num ponto $c \in]a, b[$, então, como f é diferenciável em $x = c$, $f'(c) = 0$, o que demonstra o resultado.

Se quer o máximo quer o mínimo ocorrerem nos extremos de $[a, b]$, como $f(a) = f(b)$, f é uma função constante em $[a, b]$, pelo que $f'(x) = 0, \forall x \in [a, b]$, ou seja, existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[: f'(c) = 0$.

86.3 $f(2) = 0, f(1) = 0, f(-1) = 0, f(-3) = 0$

f é diferenciável em $\mathbb{R}$; logo, em qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$, pelo que também é contínua em $\mathbb{R}$.

Como $f(1) = f(2)$ e f é contínua em $[1, 2]$ e diferenciável em $]1, 2[$, $\exists c_1 \in]1, 2[: f'(c_1) = 0$.

Da mesma forma se prova que $\exists c_2 \in]-1, 1[: f'(c_2) = 0$ e que $\exists c_3 \in]-3, -1[: f'(c_3) = 0$.

Donde, f' tem, pelo menos, três zeros em $\mathbb{R}$.

RESOLUÇÕES – FRVR12

Como f é uma função polinomial de grau 4, f' é uma função polinomial de grau 3, pelo que não pode ter mais do que três zeros em $\mathbb{R}$.

Se f' tem pelo menos três zeros e não pode ter mais de três zeros, tem exactamente três zeros em $\mathbb{R}$.

PÁG. 72

87. Um polinómio é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e também é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

Suponhamos que os zeros de P são $x = x_1, x = x_2, x = x_3, x = x_4$ e $x = x_5$.

Como $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = P(x_5) = 0$, então, pela propriedade descrita no exercício anterior, existem pontos $a \in]x_1, x_2[$, $b \in]x_2, x_3[$, $c \in]x_3, x_4[$ e $d \in]x_4, x_5[$ tais que $P'(a) = P'(b) = P'(c) = P'(d) = 0$, ou seja, P' tem, pelo menos quatro zeros distintos.

Como P' tem grau 4, terá exactamente quatro zeros distintos.

88. Se em $c \in]a, b[$ f' tem um extremo relativo então $f''(c) = 0$, uma vez que f é duas vezes diferenciável em $]a, b[$.

Por outro lado, como f' crescerá à esquerda de $x = c$ e decrescerá à direita de $x = c$ (ou vice versa), f'' mudará de sinal, isto é, em $x = c$ há um ponto de inflexão do gráfico de f .

89.1

a. $D = \mathbb{R} \setminus \{9\}$

b. A função g é contínua no seu domínio pois é uma função racional (quociente de funções contínuas).

c. g não é par nem ímpar uma vez que, por exemplo, $g(-1) \neq g(1)$ e $g(-1) \neq -g(1)$.

d. $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 7$

e. $g(0) = -\frac{7}{9}$, o ponto de intersecção do gráfico de g com o eixo Oy tem coordenadas $(0, -\frac{7}{9})$.

f. $g'(x) = \frac{x^2 - 18x + 65}{(x-9)^2}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 18x + 65 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 13$

x	$-\infty$	5	9	13	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
Monotonia e extremos de g	$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$	Mín. rel.	$\nearrow$

g é crescente em $]-\infty, 5]$ e em $[13, +\infty[$.

g é decrescente em $]5, 9[$ e em $]9, 13]$.

g. g tem máximo relativo 2 para $x = 5$.

g tem mínimo relativo 18 para $x = 13$.

h. $g''(x) = \frac{32}{(x-9)^3}$; g'' não tem zeros.

x	$-\infty$	9	$+\infty$
$g''(x)$	-	ND	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g	$\cap$	ND	$\cup$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]9, +\infty[$ e voltada para baixo em $]-\infty, 9[$.

i. O gráfico de g não tem pontos de inflexão.

j. $\lim_{x \rightarrow 9^+} g(x) = +\infty$; logo, a reta de equação $x = 9$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

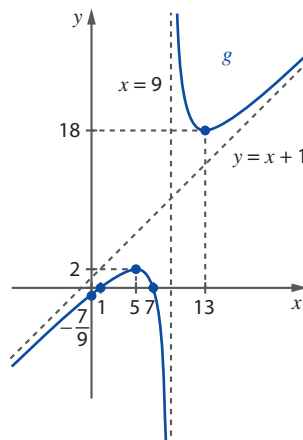
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 - 9x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{8}{x} + \frac{7}{x^2}}{1 - \frac{9}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+7}{x-9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{7}{x}}{1 - \frac{9}{x}} = 1$$

Logo, a reta de equação $y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g .

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - x] = 1$, a reta de equação $y = x + 1$ é a única assíntota oblíqua ao gráfico de g .

89.2



$$D'_g =]-\infty, 2] \cup [18, +\infty[$$

90.1 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- $D = \mathbb{R}$
- Não tem zeros (é sempre positiva)
- É contínua em $\mathbb{R}$
- É par pois $f(-x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

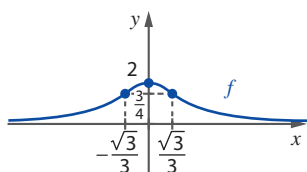
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
Monotonia e extremos de f	$\nearrow$	1 Máx. abs.	$\searrow$

• $f''(x) = \frac{2(3x^2 - 1)}{(1+x^2)^3}$

e $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$

$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3}{4}$



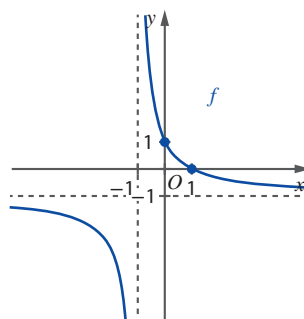
90.2 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Tem zero $x = 1$ (é positiva em $] -1, 1[$ e negativa em $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$)
- É contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $f'(x) = -\frac{2}{(1+x)^2} < 0$, $\forall x \in D$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	ND	-
Monotonia e extremos de f	$\searrow$	ND	$\searrow$

• $f''(x) = \frac{4}{(1+x)^3} \neq 0$, $\forall x \in D$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	-	ND	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cap$	ND	$\cup$



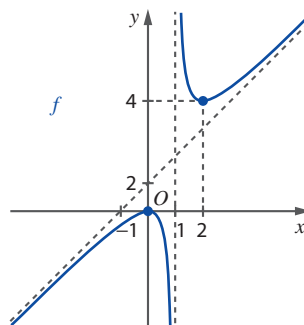
90.3 $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Tem zero $x = 0$ (é positiva em $] 1, +\infty[$ e negativa em $] -\infty, 1[$)
- É contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	ND	-	0	+
Monotonia e extremos de f	$\nearrow$	0 Máx. rel.	$\searrow$	ND	$\searrow$	4 Mín. rel.	$\nearrow$

• $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0$, $\forall x \in D$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	ND	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cap$	ND	$\cup$



RESOLUÇÕES – FRVR12

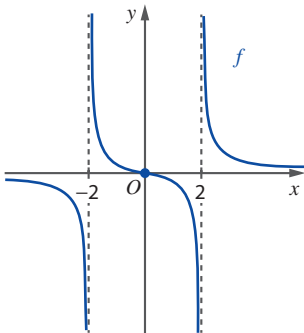
90.4 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
- Tem zero $x = 0$ (é positiva em $] -2, 0[\cup]2, +\infty[$ e negativa em $] -\infty, -2[\cup]0, 2[$)
- É contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
- $f'(x) = -\frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2} < 0, \forall x \in D$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	ND	$-$	N.D.	$-$
Monotonia e extremos de f	$\searrow$	ND	$\searrow$	N.D.	$\searrow$

- $f''(x) = \frac{2x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$ e $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	ND	$+$	0	$-$	ND	$+$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cap$	ND	$\cup$	PI	$\cap$	ND	$\cup$



90.5 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

- $D = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$
- Tem zeros $x = -1$ e $x = 1$ (é positiva em $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$)
- É contínua em $\mathbb{R} \setminus]-1, 1[$
- $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

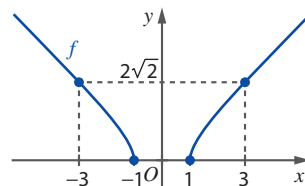
x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	ND	ND	ND	$+$
Monotonia e extremos de f	$\searrow$	0 Min. abs.	ND	0 Min. abs.	$\nearrow$

• $f''(x) = -\frac{1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	ND	ND	ND	$-$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cap$	0	ND	0	$\cap$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = +\infty,$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = +\infty$



90.6 $f(x) = \frac{|x+3|}{2x+1} = \begin{cases} \frac{x+3}{2x+1} & \text{se } x \in [-3, +\infty[\setminus \{-\frac{1}{2}\} \\ -\frac{x+3}{2x+1} & \text{se } x \in]-\infty, -3[\end{cases}$

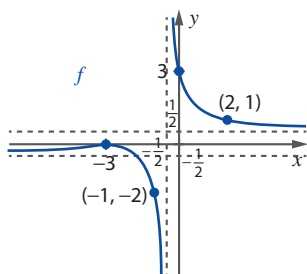
- $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$
- Tem zero $x = -3$ (é positiva em $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ e negativa em $] -\infty, -3[\cup]-3, -\frac{1}{2}[$)
- É contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$
- $f'(x) = \begin{cases} -\frac{5}{(2x+1)^2} & \text{se } x \in]-3, +\infty[\setminus \{-\frac{1}{2}\} \\ \frac{5}{(2x+1)^2} & \text{se } x \in]-\infty, -3[\end{cases}$

x	$-\infty$	-3		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	ND	$-$	ND	$-$
Monotonia e extremos de f	$\nearrow$	0 Máx. rel.	$\searrow$	ND	$\searrow$

• $f''(x) = \begin{cases} \frac{20}{(2x+1)^3} & \text{se } x \in]-3, +\infty[\setminus \{-\frac{1}{2}\} \\ -\frac{20}{(2x+1)^3} & \text{se } x \in]-\infty, -3[\end{cases}$

x	$-\infty$	-3		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	ND	-	ND	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cup$	PI	$\cap$	ND	$\cup$

$$f(-3) = 0$$



91. $f'(x) = 30x^2 - 14x^4$, $f''(x) = 60x - 60x^3$
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0	+	0	-
Monotonia e extremos de f	$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$	Mín. rel.	$\nearrow$	Máx. rel.	$\searrow$

As retas tangentes ao gráfico de f têm declive igual à função derivada em cada ponto.

Assim, f' toma os valores máximos em $x = -1$ ($f'(-1) = 15$) e em $x = 1$ ($f'(1) = 15$).

Para $(-1, f(-1)) = (-1, -7)$: $-7 = 15 \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 8$ ($y = 15x + 8$).

Para $(1, f(1)) = (1, 7)$: $7 = 15 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -8$ ($y = 15x - 8$).

92. Os pontos do gráfico de f têm coordenadas $(x, f(x)) = (x, x^2 + 3)$

Seja d a função que, a cada x , faz corresponder a distância do ponto de coordenadas $(x, x^2 + 3)$ ao ponto de coordenadas $(3, 3)$.

$$d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2+3-3)^2} = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$$

$$d'(x) = \frac{4x^3 + 2x - 6}{2\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}}$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 2x - 6 = 0$$

É fácil de observar que $x = 1$ é uma solução desta equação.

	4	0	2	-6
1	4	4	6	
	4	4	6	0

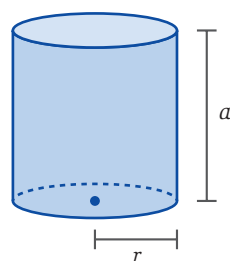
$$4x^3 + 2x - 6 = (x-1)(4x^2 + 4x + 6)$$

$4x^2 + 4x + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 3 = 0$ é uma equação impossível em $\mathbb{R}$.

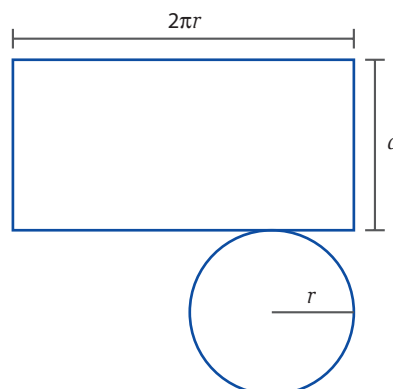
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$d'(x)$	-	0	+
Monotonia e extremos de d	$\searrow$	Mín. rel.	$\nearrow$

Como $f(1) = 4$ e como $d(1) = \sqrt{5}$, o ponto do gráfico de f mais próximo de $(3, 3)$ é o ponto de coordenadas $(1, 4)$.

93.



Planificação do copo



O volume do copo é 200 cm^3 (20 cl). Supondo que Q é a quantidade de plástico usada num copo para uma espessura fixa, tem-se:

$$\pi r^2 \times a = 200 \Leftrightarrow a = \frac{200}{\pi r^2}, \quad \pi r^2 + 2\pi r \times a = Q$$

Q em cm^2 , a em cm e r em cm .

Substituindo na 2.ª equação a por $\frac{200}{\pi r^2}$, a quantidade de plástico é dada, em função de r , por $Q(r) = \pi r^2 + \frac{400}{r}$.

$$Q'(r) = 2\pi r - \frac{400}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - 400}{r^2}$$

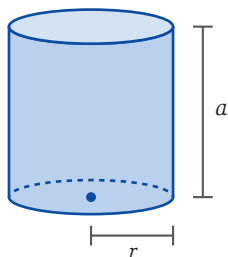
$$Q'(r) = 0 \Leftrightarrow 2\pi r^3 - 400 = 0 \wedge r^2 \neq 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$	$+\infty$
$Q'(r)$	ND	-	0	+
Monotonia e extremos de Q	ND	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

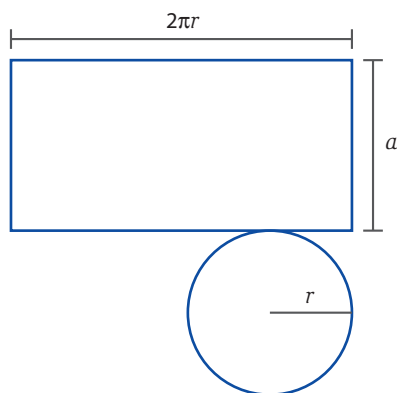
Logo, Q tem mínimo absoluto em $r = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 4,0$ cm.

Para esse valor de r , $a = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 4,0$ cm.

94.



Planificação do copo



Supondo que V é o volume do copo e Q a sua quantidade de plástico para uma espessura fixa, tem-se:

$$\pi r^2 \times a = V \Leftrightarrow a = \frac{V}{\pi r^2}, \quad \pi r^2 + 2\pi r \times a = Q$$

V em cm^3 , Q em cm^2 , a em cm e r em cm.

Substituindo na 2.ª equação a por $\frac{V}{\pi r^2}$, a quantidade de plástico é dada, em função de r , por $Q(r) = \pi r^2 + \frac{2V}{r}$.

$$Q'(r) = 2\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - 2V}{r^2}$$

$$Q'(r) = 0 \Leftrightarrow 2\pi r^3 - 2V = 0 \wedge r^2 \neq 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$	$+\infty$
$Q'(r)$	ND	–	0	+
Monotonia e extremos de Q	ND	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

Logo, Q tem mínimo absoluto em $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

Para esse valor de r , $a = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, pelo que $\frac{a}{r} = 1$.

95. Sejam r e a , respetivamente, o raio da base e a altura da secção cilíndrica do depósito.

O volume do depósito é dado por $\pi r^2 \times a + \frac{2}{3}\pi r^3$.

A área superficial do depósito é dada por

$$2\pi r \times a + 2\pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi r a + 3\pi r^2.$$

Dado que o volume é 100 dm^3 , tem-se que:

$$\pi r^2 a + \frac{2}{3}\pi r^3 = 100 \Leftrightarrow a = \frac{100}{\pi r^2} - \frac{2}{3}r$$

A área superficial será dada, em função de r , por

$$A(r) = \frac{200}{r} + \frac{5\pi}{3}r^2$$

$$A'(r) = -\frac{200}{r^2} + 10\pi r = \frac{10\pi r^3 - 600}{3r^2}$$

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{10\pi r^3 - 600}{3r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}}$$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{60}{\pi}}$	$+\infty$
$A'(r)$	ND	–	0	+
Monotonia e extremos de A	ND	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

Quando $r = \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}}$, a altura é $a = \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}}$, donde quer o raio da base quer a altura da secção cilíndrica do depósito medem $\sqrt[3]{\frac{60}{\pi}} \text{ dm} \approx 2,67 \text{ dm}$.

96. A área de cada retângulo é dada por $|2x \times 2y|$, sendo (x, y) as coordenadas de um ponto qualquer da elipse que seja vértice desse retângulo.

Tome-se o vértice (x, y) que pertence ao 1.º quadrante:

- a área do retângulo é dada por $4xy$, uma vez que, quer x , quer y , são não negativos ($0 \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq b$);
- de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ conclui-se que $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Assim, a área do retângulo é dada, em função de x , por

$$A(x) = 4x \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$A'(x) = \frac{4b}{a} \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \text{ uma vez que } 0 \leq x \leq a$$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}a$		a
$A'(r)$	$4b$	+	0	–	ND
Monotonia e extremos de A	0	$\nearrow$	Máx. abs.	$\searrow$	0

O comprimento do retângulo com área máxima é

$$2x = 2 \frac{\sqrt{2}}{2}a = \sqrt{2}a.$$

A largura desse retângulo é

$$2y = 2 \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \sqrt{2}b.$$

- 97.1** O volume é dado, em função do raio da base r e da altura a , por $\pi r^2 \times a$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo da figura tem-se que

$$r^2 = 4 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{16 - a^2}}{2} \text{ dado}$$

que $0 \leq r \leq 4$.

Assim, representando por V o volume do cilindro, este é dado, em função de a , por $V(a) = \pi \left(4 - \frac{a^2}{4}\right)a = 4\pi a - \frac{\pi}{4}a^3$.

$$V'(a) = 4\pi - \frac{3\pi}{4}a^2$$

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow 4\pi - \frac{3\pi}{4}a^2 = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ dado que } 0 \leq a \leq 4$$

a	0		$\frac{4\sqrt{3}}{3}$		4
$V'(a)$	4π	+	0	-	-8π
Monotonia e extremos de V	0	$\nearrow$	Máx. abs.	$\searrow$	0

O volume é máximo quando $a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ e quando o raio da

$$\text{base é } r = \frac{\sqrt{16 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

- 97.2** A área lateral é dada, em função de r e a , por $2\pi r \times a$;

substituindo r por $\frac{\sqrt{16 - a^2}}{2}$, a área lateral é dada, em

função de a , por $A(a) = 2\pi a \frac{\sqrt{16 - a^2}}{2} = \pi a \sqrt{16 - a^2}$.

$$A'(a) = 2\pi \frac{8 - a^2}{\sqrt{16 - a^2}}$$

$$A'(a) = 0 \Leftrightarrow 8 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2\sqrt{2} \text{ dado que } 0 \leq a \leq 4$$

a	0		$2\sqrt{2}$		4
$A'(a)$	4π	+	0	-	ND
Monotonia e extremos de A	0	$\nearrow$	Máx. abs.	$\searrow$	0

A área lateral é máxima quando $a = 2\sqrt{2}$ e

$$r = \frac{\sqrt{16 - (2\sqrt{2})^2}}{2} = \sqrt{2}.$$

- 97.3** A área total é dada, em função de r e a , por $2\pi r \times a + 2\pi r^2$.

Com a substituição de r , a área total é dada, em função de a , por

$$A_T(a) = \pi a \sqrt{16 - a^2} + 8\pi - \frac{\pi}{2}a^2.$$

$$A'_T(a) = 2\pi \frac{8 - a^2}{\sqrt{16 - a^2}} - \pi a = \pi \left(\frac{16 - 2a^2 - a\sqrt{16 - a^2}}{\sqrt{16 - a^2}} \right)$$

$$A'_T(a) = 0 \Leftrightarrow 16 - 2a^2 = a\sqrt{16 - a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (16 - 2a^2)^2 = (a\sqrt{16 - a^2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 256 + 4a^4 - 64a^2 = 16a^2 - a^4 \Leftrightarrow 5a^4 - 80a^2 + 256 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 5120}}{10} \Leftrightarrow a^2 = \frac{80 \pm 16\sqrt{5}}{10}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{16}{10}(5 \pm \sqrt{5}) \Leftrightarrow a = \frac{4}{10}\sqrt{10(5 \pm \sqrt{5})} =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{10(5 \pm \sqrt{5})} \text{ dado que } 0 \leq a \leq 4$$

Resta ver se são ambas soluções de $16 - 2a^2 = a\sqrt{16 - a^2}$:

$$a = \frac{2}{5}\sqrt{10(5 - \sqrt{5})} \Rightarrow a^2 = \frac{8}{5}(5 - \sqrt{5}) = 8 - \frac{8}{5}\sqrt{5}$$

$$16 - 2a^2 = 16 - 16 + \frac{16}{5}\sqrt{5} = \frac{16}{5}\sqrt{5}$$

$$16 - a^2 = 16 - 8 + \frac{8}{5}\sqrt{5} = 8\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$a\sqrt{16 - a^2} = \frac{2}{5}\sqrt{10(5 - \sqrt{5})} \sqrt{8\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)} =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{80(5 + \sqrt{5} - \sqrt{5})} - 1 = \frac{2}{5} \times 8\sqrt{5} = \frac{16}{5}\sqrt{5} = 16 - 2a^2$$

$$a = \frac{2}{5}\sqrt{10(5 + \sqrt{5})} \Rightarrow a^2 = 8 + \frac{8}{5}\sqrt{5}$$

$$16 - 2a^2 = -\frac{16}{5}\sqrt{5} < 0$$

$$16 - a^2 = 8\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}\right) > 0$$

Como $a > 0$ e $16 - a > 0$, $a = \frac{2}{5}\sqrt{10(5 + \sqrt{5})}$ não é solução

de $16 - 2a^2 = a\sqrt{16 - a^2}$ pois $a\sqrt{16 - a^2} > 0$ e

$$16 - 2a^2 < 0.$$

a	0		$\frac{2}{5}\sqrt{10(5 - \sqrt{5})}$		4
$A'_T(a)$	4π	+	0	-	ND
Monotonia e extremos de A_T	8π	$\nearrow$	Máx. abs.	$\searrow$	0

RESOLUÇÕES – FRVR12

A área total é máxima quando $a = \frac{2}{5}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}$ e

$$r = \frac{\sqrt{16-a^2}}{2} = \frac{\sqrt{8\left(1+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)}}{2} = \frac{2\sqrt{2+\frac{2}{5}\sqrt{5}}}{2} = \sqrt{2+\frac{2}{5}\sqrt{5}} = \sqrt{2\left(1+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)} = \frac{\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{5}$$

PÁG. 74

98. Quando $x=0$, $x=x^3$.

Quando $x>0$, $x>x^3 \Leftrightarrow x^2-1<0 \Leftrightarrow x \in]0, 1[$
uma vez que, em $\mathbb{R}$,
 $x^2-1<0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

Cálculo do máximo valor possível e excesso máximo:

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	1	+	0	-
Monotonia e extremos de f	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$ Máx. abs.	$\searrow$

$$f(x) = x - x^3, f'(x) = 1 - 3x^2$$

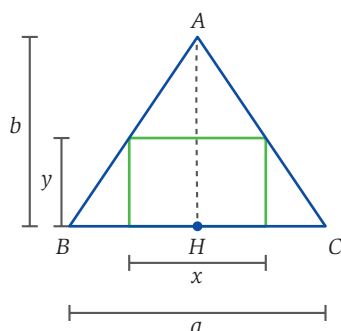
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ dado que } x > 0$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Conclui-se que o excesso máximo é $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

e é obtido quando $x = \frac{\sqrt{3}}{3} \in]0, 1[$.

99. Sejam x e y , respetivamente, o comprimento e a largura da janela, tal como se mostra na figura.



$$\frac{b}{y} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2} - \frac{x}{2}} \Leftrightarrow \frac{b}{y} = \frac{1}{1 - \frac{x}{a}} \Leftrightarrow y = b - \frac{b}{a}x$$

Como a área da janela é dada, em função de x e de y , por

$x \times y$ e $y = b - \frac{b}{a}x$, a função $A(x) = bx - \frac{b}{a}x^2$ representa

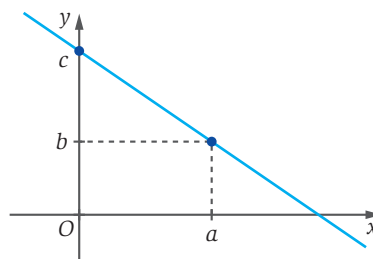
a área da janela em função de x .

$$A'(x) = b - 2\frac{b}{a}x, A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

x	0		$\frac{a}{2}$		a
$A'(x)$	b	+	0	-	$-b$
Monotonia e extremos de A	0	$\nearrow$	Máx. abs.	$\searrow$	0

As dimensões da janela de área máxima são o comprimento igual a $\frac{a}{2}$ e a largura igual a $\frac{b}{2}$.

100.



Suponhamos que a reta que passa em (a, b) interseja Oy no ponto de coordenadas $(0, c)$ com $c > b$ (para que o declive se mantenha negativo).

A equação da reta é $y = \frac{b-c}{a}x + c$.

A reta interseja Ox quando $y=0$, ou seja, em $x = \frac{ac}{c-b}$.

A área do triângulo é dada, em função de c , por

$$A(c) = \frac{c \times \frac{ac}{c-b}}{2} = \frac{ac^2}{2(c-b)}$$

(note-se que a e b são constantes reais positivas)

$$A'(c) = \frac{ac(c-2b)}{2(c-b)^2}$$

$$A'(c) = 0 \Leftrightarrow ac = 0 \vee c - 2b = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = 0 \vee c = 2b$$

solução impossível pois $c > b$

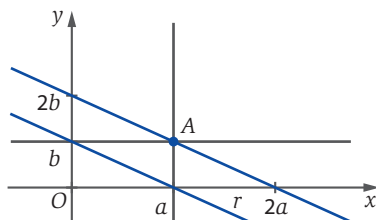
c	b		$2b$	$+\infty$
$A'(c)$	ND	-	0	+
Monotonia e extremos de A	ND	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

O triângulo tem área mínima quando $c = 2b$,

pelo que a equação reduzida da reta é $y = -\frac{b}{a}x + 2b$

$$m_r = \frac{b-0}{0-a} = -\frac{b}{a}$$

Como as duas retas têm o mesmo declive, são paralelas.



A reta r passa nos pontos de coordenadas $(0, b)$ e $(a, 0)$ pelo que contém uma diagonal do retângulo cujos vértices são os pontos de coordenadas $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b) e $(0, b)$, donde decompõe o retângulo em dois triângulos geometricamente iguais.

A reta que determina com os eixos coordenados o triângulo de área mínima passa no ponto de coordenadas $(0, 2b)$ e

intersecta o eixo Ox em $x = \frac{ac}{c-b} = \frac{a2b}{b} = 2a$, ou seja,

passa no ponto de coordenadas $(2a, 0)$, pelo que os triângulos de vértices nos pontos de coordenadas $(0, b)$, $(0, 2b)$, (a, b) e $(a, 0)$, $(2a, 0)$ e (a, b) são também geometricamente iguais e geometricamente iguais aos que resultaram da decomposição do retângulo.

101.1 $x(0) = -2$, $x(2) = 2$

101.2 $x(t) = -2 \Leftrightarrow -t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = 4$
 $t > 0$

101.3 $\frac{x(2) - x(0)}{2 - 0} = \frac{2 - (-2)}{2} = 2$ unidades/s

101.4 $x'(t) = -2t + 4$
 $x'(3) = -2$ unidades/s
 Desloca-se no sentido negativo.

101.5 $x'(t) = 0 \Leftrightarrow -2t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

t	0		2		5
$x'(t)$	4	+	0	-	-6
Monotonia e extremos de x	-2 Mín. rel.	$\nearrow$	2 Máx. abs.	$\searrow$	-7 Mín. abs.

Crescente em $[0, 2]$, decrescente em $[2, 5]$.

Atinge o valor máximo ao fim de 2 segundos e a sua velocidade nesse instante é 0 unidades/s.

101.6 $\frac{x'(2) - x'(0)}{2 - 0} = \frac{0 - 4}{2} = -2$ unidades/s²

101.7 $x''(t) = -2$

Significa que o ponto P esteve em movimento uniformemente retardado, isto é, desacelerou a cada instante com aceleração constante.

PÁG. 75

102.1 6 m/s

102.2 $\frac{p'(8) - p'(2)}{8 - 2} = \frac{6 - 3}{6} = 0,5 \text{ m/s}^2$

102.3 $p''(2) = \frac{0 - 3}{5 - 2} = -1 \text{ m/s}^2$, $p''(8) = \frac{6 - 0}{8 - 5} = 2 \text{ m/s}^2$

102.4

a. $p'(t) = a(t - 4)^2 + 2$

$p'(2) = 3 \Leftrightarrow 4a + 2 = 3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

$p'(t) = \frac{1}{4}(t - 4)^2 + 2$ em m/s

$p''(t) = \frac{2}{4}(t - 4) = \frac{1}{2}(t - 4)$ em m/s²

b. $p''(6) = \frac{1}{2}(6 - 4) = 1 \text{ m/s}^2$

c. $p'(t) = \frac{1}{4}(t - 4)^2 + 2 = \frac{1}{4}t^2 - 2t + 6$

$p(t) = \frac{1}{12}t^3 - t^2 + 6t + p_0$, $p_0 \in \mathbb{R}$

$p(10) - p(0) = \frac{1000}{12} - 100 + 60 \approx 43 \text{ m}$

103.1 Como a aceleração é constante e igual à aceleração média durante esse período de tempo, donde

$a = \frac{5000 - 1000}{0,001} = \frac{4000}{10^{-3}} = 4 \times 10^6 \text{ m/s}^2$.

103.2 A velocidade da partícula é dada, em função do tempo, por $v(t) = 4 \times 10^6 t + v_0$.

Como $v_0 = 1000 \text{ m/s}$, tem-se $v(t) = 4 \times 10^6 t + 1000$.

Assim, a posição da partícula x é dada por

$x(t) = \frac{4 \times 10^6}{2}t^2 + 1000t + x_0$.

Considerando $x_0 = 0$, vem $x(t) = 2 \times 10^6 t^2 + 1000t$.

$x(0,001) - x(0) = 2 \times 10^6 \times 0,001^2 + 1000 \times 0,001 = 2 \times 10^6 \times 10^{-6} + 10^3 \times 10^{-3} = 2 + 1 = 3 \text{ m}$

104.1 $g'(x) = 20x^4 + 4x^3$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 20x^4 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x(5x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5} \vee x = 0$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$		0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
Monotonia e extremos de g	$\nearrow$	Máx. $\frac{1}{3125} + k$	$\searrow$	Mín. k	$\nearrow$

g é estritamente crescente em $\left] -\infty, -\frac{1}{5} \right]$ e em $[0, +\infty[$.

g é estritamente decrescente em $\left[-\frac{1}{5}, 0 \right]$.

104.2 A função g é contínua e decrescente em $\left]0, \frac{1}{5}\right]$. Logo, se g tiver algum zero, o que depende do valor de k , terá no máximo um zero.

104.3 Como a função g é contínua em $\left[-\frac{1}{5}, 0\right]$, o corolário do teorema de Bolzano-Cauchy garante que g tem pelo menos um zero em $\left]0, \frac{1}{5}\right[$ (que, a existir, sabemos ser único, pela alínea anterior) se $g\left(-\frac{1}{5}\right) \times g(0) < 0$.

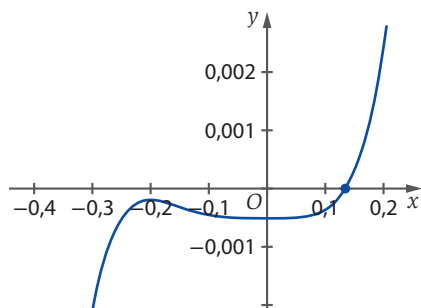
Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} k\left(\frac{1}{3125} + k\right) &< 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(k < 0 \wedge \frac{1}{3125} + k > 0\right) &\vee \left(k > 0 \wedge \frac{1}{3125} + k < 0\right) \\ \Leftrightarrow \left(k < 0 \wedge k > -\frac{1}{3125}\right) &\vee \left(k > 0 \wedge k < -\frac{1}{3125}\right) \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{3125} < k < 0 \end{aligned}$$

Para $k \in \left]-\frac{1}{3125}, 0\right[$, a função g tem exatamente um zero no intervalo $\left]0, \frac{1}{5}\right[$.

104.4 Atendendo à continuidade da função g , aos extremos da função g e à influência que o parâmetro k tem no gráfico da função g (translação vertical), estudaremos a existência e número de zeros, nos intervalos de monotonia, para os seguintes casos:

- $\frac{1}{3125} + k < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{1}{3125}$ (máximo relativo negativo);
- $\frac{1}{3125} + k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3125}$ (máximo relativo nulo);
- $k\left(\frac{1}{3125} + k\right) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3125} < k < 0$ (máximo e mínimo relativos com sinais contrários);
- $k = 0$ (mínimo relativo nulo);
- $k > 0$ (mínimo relativo positivo).
- Se $k < -\frac{1}{3125}$



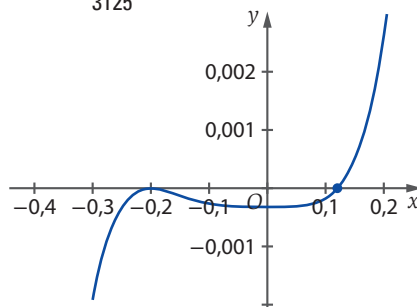
A função g é contínua e crescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{5}\right]$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ e $g\left(-\frac{1}{5}\right) < 0$;

logo, g não tem zeros em $\left]-\infty, -\frac{1}{5}\right]$.

A função g é contínua e decrescente em $\left[-\frac{1}{5}, 0\right]$,
 $g\left(-\frac{1}{5}\right) < 0$ e $g(0) < 0$;
 logo, g não tem zeros em $\left[-\frac{1}{5}, 0\right]$.

A função g é contínua e crescente em $[0, +\infty[$,
 $g(0) < 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$;
 logo, g tem exatamente um zero em $]0, +\infty[$.

- Se $k = -\frac{1}{3125}$

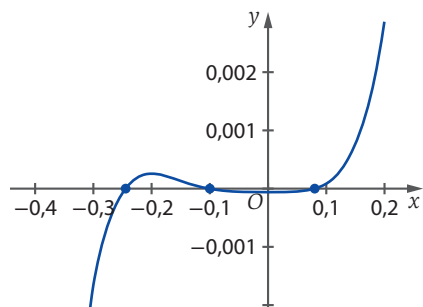


A função g é contínua e crescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{5}\right]$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ e $g\left(-\frac{1}{5}\right) = 0$;
 logo, g tem exatamente o zero $x = -\frac{1}{5}$.

A função g é contínua e decrescente em $\left[-\frac{1}{5}, 0\right]$,
 $g\left(-\frac{1}{5}\right) = 0$ e $g(0) < 0$;
 logo, g não tem zeros em $\left[-\frac{1}{5}, 0\right]$.

A função g é contínua e crescente em $[0, +\infty[$,
 $g(0) < 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$;
 logo, g tem exatamente um zero em $]0, +\infty[$.

- Se $-\frac{1}{3125} < k < 0$

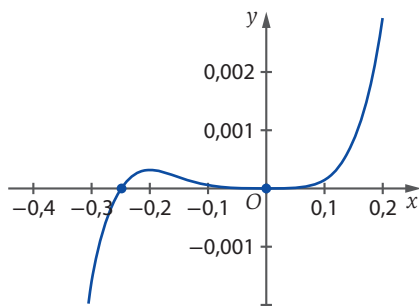


A função g é contínua e crescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{5}\right]$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ e $g\left(-\frac{1}{5}\right) > 0$;
 logo, g tem exatamente um zero em $\left]-\infty, -\frac{1}{5}\right]$.

A função g é contínua e decrescente em $\left[-\frac{1}{5}, 0\right]$,
 $g\left(-\frac{1}{5}\right) > 0$ e $g(0) < 0$;
 logo, g tem exatamente um zero em $\left]-\frac{1}{5}, 0\right[$.

A função g é contínua e crescente em $[0, +\infty[$,
 $g(0) < 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$,
 então g tem exatamente um zero em $[0, +\infty[$.

- Se $k = 0$

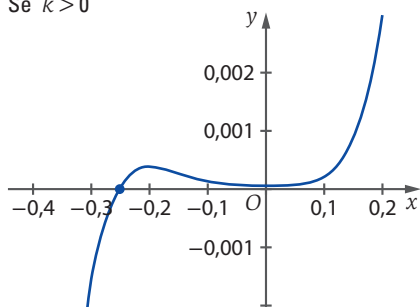


A função g é contínua e crescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{5}\right]$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ e $g\left(-\frac{1}{5}\right) > 0$;
 logo, g tem exatamente um zero em $\left]-\infty, -\frac{1}{5}\right]$.

A função g é contínua e decrescente em $\left[-\frac{1}{5}, 0\right]$,
 $g\left(-\frac{1}{5}\right) > 0$ e $g(0) = 0$;
 logo, g tem exatamente o zero $x = 0$.

A função g é contínua e crescente em $[0, +\infty[$,
 $g(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$; logo, g não tem zeros
 em $]0, +\infty[$ (em $[0, +\infty[$, tem exatamente o zero
 $x = 0$).

- Se $k > 0$



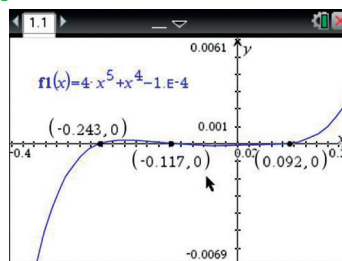
A função g é contínua e crescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{5}\right]$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ e $g\left(-\frac{1}{5}\right) > 0$;
 logo, g tem exatamente um zero em $\left]-\infty, -\frac{1}{5}\right]$.

A função g é contínua e decrescente em $\left[-\frac{1}{5}, 0\right]$,
 $g\left(-\frac{1}{5}\right) > 0$ e $g(0) > 0$;
 logo, g não tem zeros em $\left[-\frac{1}{5}, 0\right]$.

A função g é contínua e crescente em $[0, +\infty[$,
 $g(0) > 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$;
 logo, g não tem zeros em $[0, +\infty[$.

Em resumo, a função g tem um zero se $k < -\frac{1}{3125}$ ou
 $k > 0$, tem dois zeros se $k = -\frac{1}{3125}$ ou $k = 0$ e tem
 três zeros se $-\frac{1}{3125} < k < 0$.

104.5



As aproximações às centésimas dos zeros de g são:

- $-0,24$ ($g(-0,235) < 0$ e $g(-0,245) > 0$)
- $-0,12$ ($g(-0,115) > 0$ e $g(-0,125) < 0$)
- $0,09$ ($g(0,085) < 0$ e $g(0,095) > 0$)

PÁG. 76

105.1 $0 \leq x \leq 4$: $P(x, \sqrt{x})$, $Q(x, 0)$, $R(4, 0)$

$$\overline{QR} = 4 - x, \overline{PQ} = \sqrt{x}, A = \frac{\overline{QR} \times \overline{PQ}}{2}, A(x) = \frac{(4 - x)\sqrt{x}}{2}$$

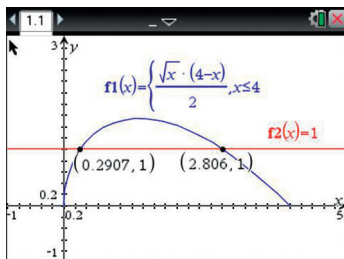
105.2 $A'(x) = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{x} + (4 - x) \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{4 - 3x}{4\sqrt{x}}$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

x	0		$\frac{4}{3}$		4
$A'(x)$	ND	+	0	-	-1
Monotonia e extremos de A	0	$\nearrow$	Máx. abs.	$\searrow$	0

A abscissa do ponto P , para a qual a área do triângulo
 $[PQR]$ é máxima é $x = \frac{4}{3}$.

105.3 $A(x) = 1$



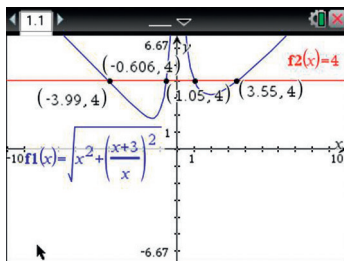
As abcissas do ponto P para as quais a área do triângulo $[PQR]$ é igual a 1 são, com aproximação às centésimas, 0,29 e 2,81.

106. Os pontos do gráfico de g têm coordenadas

$$\left(x, \frac{x+3}{x}\right), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

A distância d , de um ponto do gráfico de g , ao ponto de coordenadas $(0, 0)$ é dada por:

$$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{x+3}{x} - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x+3}{x}\right)^2}$$



As abcissas dos pontos de interseção do gráfico de d com a reta de equação $y=4$, com aproximação às centésimas, são $-3,99$, $-0,61$, $1,05$ e $3,55$.

TESTE – PÁG. 80

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} + n\right) = +\infty$ pois $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$

Opção correta: A

2. $-2 \leq \sin x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Se $x > -1$, $-\frac{2}{x^3+1} \leq \frac{\sin x - 1}{x^3+1} \leq \frac{0}{x^3+1}$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x^3+1}\right) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$, $g(x) = -\frac{2}{x^3+1}$

e $h(x) = 0$

Opção correta: B.

3. f é contínua em $\mathbb{R}$; logo, é contínua em qualquer intervalo fechado de números reais.

$$f(-3) < 0, f(-2) < 0, f(-1) > 0, f(0) > 0, f(1) > 0$$

Como $f(-2) \times f(-1) < 0$ o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que, sendo f contínua em $[-2, -1]$, f tem pelo menos um zero em $]-2, -1[$.

Opção correta: B.

4. $f'(2) = -1$, uma vez que a reta tangente ao gráfico de f em $x=2$ tem declive $f'(2)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -1 = f'(2), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) + x] = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x + 3)] = 0, \text{ uma vez que a reta de equação}$$

$y = -x + 3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g e $D_g = \mathbb{R}^+$,

$$\text{donde } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 3) = -\infty.$$

Como f é diferenciável em $x=2$ então é contínua em

$x=2$ donde existe limite de f nesse ponto e, portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2).$$

Opção correta: D.

5. Equação da reta tangente ao gráfico de f em $x=1$:

$$f'(1) = \frac{5 - (-1)}{2 - (-1)} = 2$$

$y = 2x + b$ passa no ponto $A(-1, -1)$, donde

$$-1 = 2(-1) + b \Leftrightarrow b = 1$$

$$y = 2x + 1$$

Como $(1, f(1))$ é ponto de inflexão do gráfico de f , então $f''(1) = 0$.

Por outro lado, a reta tangente ao gráfico de f em $x=1$

passa no ponto de coordenadas $(1, f(1))$, donde

$$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3.$$

$$\text{Logo } f''(1) + f'(1) \times f(1) = 0 + 2 \times 3 = 6.$$

Opção correta: C.

6.1 $\pi - 1 \leq \cos x + \pi \leq \pi + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Se } x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[,$$

$$\frac{\pi - 1}{x^2 - 2} \leq \frac{\cos x + \pi}{x^2 - 2} \leq \frac{\pi + 1}{x^2 - 2}$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 1}{x^2 - 2} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi + 1}{x^2 - 2}, \text{ então}$$

$$f(x) = \frac{\pi - 1}{x^2 - 2} \text{ e } h(x) = \frac{\pi + 1}{x^2 - 2}.$$

- 6.2** Como existem funções f e h tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ em $]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ tais que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$, então pelo teorema das funções encastradas, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

- 7.1** $\mathbb{R} \setminus \{6\}$

7.2 $f(0) = -\frac{5}{3}$

O gráfico de f interseja o eixo Oy no ponto de coordenadas

$(0, -\frac{5}{3})$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 5$

O gráfico de f interseja o eixo Ox nos pontos de coordenadas $(2, 0)$ e $(5, 0)$.

- 7.3** $\lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 6} = +\infty$; logo, a reta de equação $x = 6$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 10}{x - 6} = -1$$

Logo, a reta de equação $y = x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2}}{1 - \frac{6}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 10}{x - 6} = -1$$

Donde, a reta de equação $y = x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow \pm\infty$.

7.4 $f'(x) = \frac{x^2 - 12x + 32}{(x - 6)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 32 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 8$

x	$-\infty$	4		6		8	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	ND	-	0	-
Monotonia e extremos de f		Máx. rel.		ND		Mín. rel.	

f é decrescente em $[4, 6[$ e em $]6, 8]$.

f é crescente em $]-\infty, 4]$ e em $[8, +\infty[$.

7.5 $f''(x) = \frac{8}{(x - 6)^3}$

$f''(x) = 0$ é uma equação impossível.

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$f''(x)$	-	ND	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g	$\cap$	ND	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]6, +\infty[$ e voltada para baixo em $]-\infty, 6[$.

- 7.6** Não tem pontos de inflexão pois, apesar de a segunda derivada mudar de sinal, f não está definida em $x = 6$.

- 8.1** Em $]-\infty, 0[$, h é contínua pois é uma função irracional.

Em $]0, 1[$, h é contínua pois é uma função polinomial.

Em $]1, +\infty[$, h é contínua pois é uma função racional.

Em $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 + a) = a$$

Para haver $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$, o valor de a terá de ser 0.

Em $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 + a) = 2 + a, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{x} = b$$

Para haver $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$, o valor de b terá de ser 2, uma vez que $a = 0$.

- 8.2**

a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x} - 0}{x - 0} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x\sqrt{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty$

Logo, h não é diferenciável em $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x + 1) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{2}{x} - 2}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2(x - 1)}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{x} = -2$$

Logo, h não é diferenciável em $x = 1$.

b.
$$h'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0 \\ 4x & \text{se } 0 < x < 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Em $]-\infty, 0[$, h' não tem zeros.

Em $]0, 1[$, h' não tem zeros.

Em $]1, +\infty[$, h' não tem zeros.

Logo:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$h'(x)$	-	ND	+	ND	-
Monotonia e extremos de h	$\searrow$	0 Mín. rel.	$\nearrow$	2 Máx. rel.	$\searrow$

h tem mínimo relativo 0 para $x=0$.

h tem máximo relativo 2 para $x=1$.

8.3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{0}{+\infty} = 0$.

Logo, a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de h (em $+\infty$).

9.1 O volume é dado, em função de r e de h , por $\pi r^2 \times h$.

Como o volume é 300 cm^3 então $\pi r^2 \times h = 300 \Leftrightarrow h = \frac{300}{\pi r^2}$

$$A(r) = 2\pi r \times \frac{300}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{600}{r} + \pi r^2$$

9.2 $A'(r) = -\frac{600}{r^2} + 2\pi r = \frac{2\pi r^3 - 600}{r^2}$

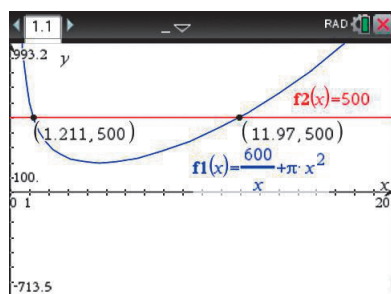
9.3 $A'(r) = 0 \Leftrightarrow 2\pi r^3 - 600 = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{300}{\pi}} \text{ cm}$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{300}{\pi}}$	$+\infty$
$A'(r)$	ND	-	0	+
Monotonia e extremos de A	ND	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$

A área da superfície do frasco é mínima quando $r = \sqrt[3]{\frac{300}{\pi}} \text{ cm}$.

9.4 $h = \frac{300}{\pi \left(\frac{300}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{300^{1-\frac{2}{3}}}{\pi^{1-\frac{2}{3}}} = \frac{300^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{300}{\pi}} \text{ cm}$

9.5 $r \approx 1,2 \text{ cm}$ ou $r \approx 12,0 \text{ cm}$.



Trigonometria e Funções Trigonométricas

DIAGNÓSTICO – PÁG. 84

1.1 $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

1.2 $\sqrt{2}\sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

1.3 $\sin x = -\frac{1}{2} \wedge x \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}\right]$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Na expressão $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$,

para que $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}\right]$, $k \in \{0, 1\}$,

logo $x = -\frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$.

Na expressão $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$,

para que $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}\right]$, $k \in \{0\}$, logo $x = \frac{7\pi}{6}$.

Em resumo, $x \in \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

1.4 $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

1.5 $-2\cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

1.6 $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x \in \left[-\frac{5\pi}{4}, 3\pi\right]$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Na expressão $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$,

para que $x \in \left[-\frac{5\pi}{4}, 3\pi\right]$, $k \in \{0, 1\}$,

logo $x = \frac{3\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$.

Na expressão $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$,

para que $x \in \left[-\frac{5\pi}{4}, 3\pi\right]$, $k \in \{-1, 0\}$,

logo $x = \frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4}$.

Em resumo, $x \in \left\{-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}\right\}$.

1.7 $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

Logo, $\cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \vee x = -\frac{3\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

1.8 $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

1.9 $\sqrt{3}\tan x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

1.10 $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1 \wedge x \in \left[-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}\right]$

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ com } x \in \left[-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow k \in \{0, 1\}$$

Donde $x = -\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$

Em resumo, $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

2.1 Falsa. No intervalo $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, a função seno é negativa e crescente.

2.2 Verdadeira.

2.3 Falsa. No intervalo $\left]5\pi, \frac{11\pi}{2}\right[$, a função seno é negativa e decrescente.

2.4 Verdadeira.

2.5 Falsa. No intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right[$, a função cosseno é negativa e decrescente.

2.6 Falsa. No intervalo $\left]5\pi, \frac{11\pi}{2}\right[$, a função cosseno é negativa e crescente.

3.1 $-1 \leq \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

Logo, $-\sqrt{3} - 2 \leq f(x) \leq -\sqrt{3} + 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2 - \sqrt{3} \leq f(x) \leq 2 - \sqrt{3}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Donde, $D_f = [-2 - \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}].$

3.2 $-\sqrt{3} + 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi \vee x = 2\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3.3 Dado que, na alínea 3.1, se concluiu que

$D_f = [-2 - \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}]$, os minimizantes de f são os valores de x para os quais $f(x) = -2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} + 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -2 - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, a expressão geral dos minimizantes de f é

$$x = -\frac{\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3.4 $f(x + 4\pi) = -\sqrt{3} + 2 \sin\left(\frac{x + 4\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) =$

$$= -\sqrt{3} + 2 \sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= -\sqrt{3} + 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, 4π é o período de f .

$$f(x + 6\pi) = -\sqrt{3} + 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} + 3\pi\right) =$$

$$= -\sqrt{3} - 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \neq f(x).$$

4.1 $D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

4.2 $D'_h = \mathbb{R}$, pois $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \in \mathbb{R}.$

4.3 $\sqrt{3} + \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se $x \in]-2\pi, \pi[\Rightarrow k \in \{-1, 0, 1\}$, logo,

$$x = -\frac{2\pi}{3} - \pi = -\frac{5\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3}$$

5.1 $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$; logo, $\sin \alpha < 0 \wedge \tan \alpha > 0$; $\alpha \in 3.^\circ Q.$

5.2 $\sin \alpha = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{\frac{8}{9}} - 1 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{8}$$

$$\text{Logo, } \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (\tan \alpha > 0).$$

6.1 $\sin\left(\frac{2\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{AC}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2 \sin \alpha$

$$f(\alpha) = 2 + 2 \sin \alpha$$

6.2 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 3$

Quando $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad $\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad e como $\overline{AB} = \overline{AC}$,

o triângulo $[ABC]$ é equilátero e o seu perímetro é

$$3 \quad (\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 1).$$

6.3 $\tan \alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{25}{144}$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \frac{25}{144}} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{144}{169}$$

$$\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \sin \alpha > 0$$

Assim, de $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ obtém-se $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}.$

$$f(\alpha) = 2 + 2 \times \frac{5}{13} = \frac{36}{13}$$

6.4 $0 < \sin \alpha < 1$, dado que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$

$$\forall \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, 2 + 0 < f(\alpha) < 2 + 2 \Leftrightarrow 2 < f(\alpha) < 4$$

$$D'_f =]2, 4[$$

6.5 $f(\alpha) = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow_{\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[} \alpha = \frac{\pi}{3}$ rad

6.6 $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \text{altura}}{2}$

Seja h a altura do triângulo $[ABC].$

$$\cos\left(\frac{2\alpha}{2}\right) = \frac{h}{1} \Leftrightarrow h = \cos \alpha$$

De 6.1 já se tinha concluído que $\overline{AC} = 2 \sin \alpha$;

logo, $A_{[ABC]}$ é dada por

$$g(\alpha) = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \sin \alpha \cos \alpha.$$

6.7

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha \cos \alpha$	$\sin(2\alpha)$	$\frac{\sin(2\alpha)}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$

Verifica-se para os valores de alfa da tabela, que:

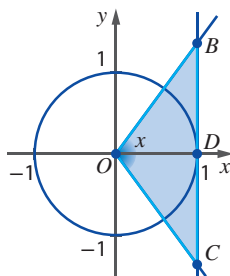
$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}(2 \sin \alpha \cos \alpha) = \frac{1}{2} \sin(2\alpha)$$

6.8 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \|\vec{BA}\| \times \|\vec{BC}\| \times \cos\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = 1 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

7.1 Seja $D(1, 0)$.

$$\overline{DB} = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \overline{DC}$$

$$A(x) = \frac{(\overline{DB} + \overline{DC}) \times 1}{2} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$



7.2 $A\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

7.3 $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$
 $\frac{x}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$

1. DIFERENCIAÇÃO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

PÁG. 89

1.1 $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) =$

$$= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

1.2 $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \times 1} =$
 $= \frac{(\sqrt{3} + 1)(1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{3 + 1 + 2\sqrt{3}}{1 - 3} = -2 - \sqrt{3}$

1.3 $\cos\left(\frac{\pi}{20}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{5} =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}} \sqrt{2}}{4} =$
 $= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{10}}{8} + \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{4}$

Cálculos auxiliares:

$$\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{1 - \frac{3 + \sqrt{5}}{8}} =$$

 $= \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}} \sqrt{2}}{4}$

2.1 $2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \sin\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2.2 $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2.3 $\sin \frac{5\pi}{8} \cos \frac{5\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{5\pi}{8} \cos \frac{5\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(2 \times \frac{5\pi}{8}\right) =$
 $= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

3.1 $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$

3.2 $\cos \frac{\pi}{4} = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}$$

Como $\frac{\pi}{8} \in 1.^\circ Q \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

4. $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, dado que $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin \alpha \geq 0$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = -\frac{24}{7}$$

$$\begin{aligned}
 5.1 \quad \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x &= 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = 1 \\
 &\Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.2 \quad \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x &= \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \sin x = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \vee x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
 &\Leftrightarrow x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.3 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{4} \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \vee x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.4 \quad \cos^2 x - \sin^2 x &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \vee 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.5 \quad \cos(2x) - 3 \sin x - 2 &= 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \vee \sin x = -1 \\
 &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
 &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.6 \quad \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(2x)} &= \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \sqrt{3} \\
 &\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Como o domínio de resolução obriga a que

$1 + \cos(2x) \neq 0$, tem-se:

$$1 + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Assim, a expressão geral das soluções da equação é $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
 6.1 \quad \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \\
 &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}
 \end{aligned}$$

$$6.2 \quad \tan(2\alpha) = \tan(\alpha + \alpha) \stackrel{6.1}{=} \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$7.1 \quad \widehat{\theta'} = \widehat{QD} = \frac{\widehat{\theta}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 7.2 \quad \overline{QR} &= \sin \theta, \quad \overline{OR} = \cos \theta, \quad \overline{PS} = \overline{SQ} = \cos \theta' = \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \\
 \overline{QR}^2 + \overline{PR}^2 &= \overline{PQ}^2 \Leftrightarrow \sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2 = \left(2 \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.3 \quad \left(2 \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)^2 &= \sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2 = \\
 &= \sin^2 \theta + 1 + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta
 \end{aligned}$$

Como $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ obtém-se que

$$\left(2 \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)^2 = 2(1 + \cos \theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{2(1 + \cos \theta)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{\sqrt{2(1 + \cos \theta)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{\frac{2(1 + \cos \theta)}{4}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

Por outro lado,

$$\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{1 - \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} = \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1 + \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

8.1

α (graus)	α (rad)	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
$7,5^\circ$	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{1}{4}\sqrt{2(4-\sqrt{6}-\sqrt{2})}$	$\frac{1}{4}\sqrt{2(4+\sqrt{6}+\sqrt{2})}$	$\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}} (*)$
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$
$22,5^\circ$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}-1$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$37,5^\circ$	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{1}{4}\sqrt{2(4-\sqrt{6}+\sqrt{2})}$	$\frac{1}{4}\sqrt{2(4+\sqrt{6}-\sqrt{2})}$	$\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}} (*)$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$52,5^\circ$	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{1}{4}\sqrt{2(4+\sqrt{6}-\sqrt{2})}$	$\frac{1}{4}\sqrt{2(4-\sqrt{6}+\sqrt{2})}$	$\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}} (*)$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$67,5^\circ$	$\frac{9\pi}{24}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}+1$
75°	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$
$82,5^\circ$	$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{1}{4}\sqrt{2(4+\sqrt{6}+\sqrt{2})}$	$\frac{1}{4}\sqrt{2(4-\sqrt{6}-\sqrt{2})}$	$\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}}$

$$(*) \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}} = \sqrt{12-10\sqrt{2}+8\sqrt{3}-6\sqrt{6}} =$$

$$= (\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

8.2 $\cos(18^\circ 45') = \cos\left(\frac{37,5^\circ}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+\cos(37,5^\circ)}}{2} =$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{2(4+\sqrt{6}-\sqrt{2})}}$$

$$\sin(18^\circ 45') = \frac{\sqrt{1-\cos(37,5^\circ)}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{2(4+\sqrt{6}-\sqrt{2})}}$$

$$\tan(18^\circ 45') = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{2(4+\sqrt{6}-\sqrt{2})}}{8+2\sqrt{2(4+\sqrt{6}-\sqrt{2})}}}$$

PÁG. 91

9.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \stackrel{0}{=} \lim_{\substack{2x=y \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0}} \frac{\sin y}{y} = 1$

9.2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{5x} \stackrel{0}{=} \lim_{\substack{4x=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{4} \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0}} \frac{\sin y}{\frac{5}{4}y} = \frac{4}{5} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{4}{5}$

9.3 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x} = 1 \times \frac{1}{0^-} = -\infty$

9.4 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x} = -\infty$.

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$.

9.5 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{\pi}$

9.6 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right) \stackrel{0 \times \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \times \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \times \cos x = 1$$

9.7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{x \tan(3x)} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{x \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)\cos(3x)}{x} \stackrel{3x=y}{=} \lim_{\substack{3x=y \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0}} \frac{\sin y \cos y}{\frac{y}{3}}$$

$$= 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \times \cos y = 3$$

$$9.8 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{2}{x}\right) \stackrel{\infty \times 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{y=\frac{2}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{\frac{1}{2}y} =$$

$$= 2 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = 2 \times 1 = 2$$

$$9.9 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{1-x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y=x-1} \frac{\sin y}{-y(y+2)} =$$

$$= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \times \frac{1}{y+2} = -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

PÁG. 94

$$10.1 \quad f'(x) = 3 \cos(3x)$$

$$10.2 \quad g'(x) = 2x \cos(x^2)$$

$$10.3 \quad h'(x) = 4x^3 \cos(x^4)$$

$$10.4 \quad i'(x) = 6x^2 \sin(x^3) \cos(x^3) = 3x^2 \sin(2x^3)$$

$$10.5 \quad j'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$10.6 \quad k'(x) = -5 \sin(5x)$$

$$10.7 \quad l'(x) = -7 \sin(7x - 3)$$

$$10.8 \quad m'(x) = \cos(2x) - 2x \sin(2x)$$

$$10.9 \quad n'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$10.10 \quad o'(x) = 2x \cos(2x) - 2x \sin(2x) = 2x (\cos(2x) - \sin(2x))$$

$$10.11 \quad p'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$$

$$10.12 \quad q'(x) = \frac{4}{\cos^2(4x)}$$

$$10.13 \quad r'(x) = \frac{2}{\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$10.14 \quad s'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$10.15 \quad t'(x) = \frac{4x}{\cos(2x^2)}$$

$$10.16 \quad u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2(\sqrt{x})}$$

$$10.17 \quad v'(x) = \sin x \times \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan x \times \frac{1 + \cos^2 x}{\cos x}$$

$$10.18 \quad w'(x) = -\frac{2}{\sin^2(2x)}$$

$$10.19 \quad a'(x) = \cos x (1 - 3\sin^2 x)$$

$$10.20 \quad b'(x) = 2 \sin(2x)$$

$$10.21 \quad c'(x) = \frac{2(\tan x + 1)}{\cos^2 x}$$

$$11.1 \quad f'(x) = 4 \cos(4x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \cos(4x) = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$11.2 \quad f'(x) = 8x \cos(4x^2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x \cos(4x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \cos(4x^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 4x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}} \vee x = -\sqrt{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}}, \quad k \in \mathbb{Z}_0^+$$

$$11.3 \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \times 2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}, \quad \text{com } x \neq 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{2}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$11.4 \quad f'(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

PÁG. 99

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = 1 \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Opção correta: D.

13. A função f é contínua em $]0, +\infty[$ e em $]-\infty, 0[$ pois, em ambos os casos, é o quociente de funções contínuas.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - k}{x - \sqrt{k}} = \frac{-k}{-\sqrt{k}} = \sqrt{k} \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(3x)}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} 3 \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = 3$$

Para haver $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ tem de se verificar

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow \sqrt{k} = 3 \Leftrightarrow k = 9$$

Opção correta: C.

14. $\frac{\sin(2x)}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} = 2 \sin x$ em $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Opção correta: C.

15. $\sin(3x) = \sin(x + 2x) = \sin x \cos(2x) + \cos x \sin(2x) =$
 $= \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos x 2 \sin x \cos x =$
 $= \sin x \cos^2 x - \sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x = \cos^2 x \times 3 \sin x - \sin^3 x$

Opção correta: B.

16. $\cos(3x) = \cos(x + 2x) = \cos x \cos(2x) - \sin x \sin(2x) =$
 $= \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x 2 \sin x \cos x =$
 $= \cos^3 x - \cos x \sin^2 x - 2 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$

Opção correta: D.

17. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = f'(a)$, sendo $f(x) = \sin x$.
 $f'(x) = \cos x, f'(a) = \cos a, f'(a) = -\frac{1}{2}$

$$\cos a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee a = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee a = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Opção correta: A.

18. $g'(x) = -\cos x, g'(a) = -\cos a$
 $-\cos a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$
 $g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Opção correta: D.

19. $f'(x) = \sin x - x \cos x, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 1$

Opção correta: B.

PÁG. 100

20. $h'(x) = -2 \cos x \sin x = -\sin(2x)$

Opção correta: C.

21. $f'(x) = 3x^2 \cos(x^3)$

Opção correta: D.

22. $g'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - x \frac{\pi}{x^2} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\pi}{x} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

Opção correta: C.

23. $f'(x) = \frac{2}{\cos^2(2x)}, f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 4$

Opção correta: D.

24. $H'(t) = -3\pi \sin(\pi t)$

$$H'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(\pi t) = 0 \Leftrightarrow_{t \geq 0} \pi t = k\pi, k \in \mathbb{Z}_0^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = k, k \in \mathbb{Z}_0^+$$

$$H''(t) = -3\pi^2 \cos(\pi t)$$

A altura máxima ocorre nos maximizantes de H (valores de t com $H''(t) < 0$).

Para $H''(t) < 0 \Rightarrow \cos(\pi t) > 0$, onde $t = k, k \in \mathbb{Z}_0^+$.

Logo, $t = 2i, i \in \mathbb{N}_0$.

$$H(2i) = 5 + 3 \cos(\pi 2i) = 5 + 3 \times 1 = 8 \text{ m}$$

Opção correta: C.

25. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
 $f(x+p) = f(x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{\pi p}{2} = 2\pi \Leftrightarrow p = 4$
 $\Rightarrow x = 2k, k \in \{0, 1, 2\}$

$$B(4, 0)$$

Basta estudar a área do triângulo $[ABO]$ quando $x \in [0, 2]$, dado que se $x \in [2, 4]$, obtêm-se triângulos geometricamente iguais a esse.

Seja g a função que, a cada $x \in [0, 2]$, sendo x a abscissa do ponto A , faz corresponder a área do triângulo $[ABO]$.

$$g(x) = \frac{4 \times 4 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{2} = 8 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), x \in [0, 2]$$

$$g'(x) = 4\pi \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para que $x \in [0, 2]$ então $k = 0$ logo $x = 1$.

$$g''(x) = -2\pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$g''(1) = -2\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi^2 < 0 \text{ donde } g(1) \text{ é máximo.}$$

$$g(1) = 8 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8.$$

Opção correta: A.

26. Se o período positivo mínimo é $\frac{8\pi}{5}$, a abscissa de B é $\frac{8\pi}{5}$, e como a ordenada de A é -2 , a ordenada de B é 2 .

Opção correta: A.

PÁG. 101

$$\begin{aligned} 27. \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{|\tan x| - |\tan \pi|}{x - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{|\tan x|}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\frac{-\tan x}{x - \pi} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\frac{-\tan x}{x - \pi} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\tan(y + \pi)}{y} \right) \\ &= -\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\tan y}{y} = -\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} \times \frac{1}{\cos y} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{|\tan x| - |\tan \pi|}{x - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\tan x}{x - \pi} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\tan(\pi + y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\tan y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} \times \frac{1}{\cos y} = 1 \end{aligned}$$

Logo, não existe a derivada em $x = \pi$.

Opção correta: D.

$$\begin{aligned} 28. f'(x) &= -ad \sin(ax + b) \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow ax + b = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} + k\frac{\pi}{a}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Opção correta: A.

$$\begin{aligned} 29. f'(x) &= 2 \cos x \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{Em } [2\pi, 4\pi] \text{ os zeros da função derivada são} \\ x &= \frac{5\pi}{2} \text{ e } x = \frac{7\pi}{2}. \end{aligned}$$

Opção correta: B.

$$\begin{aligned} 30. f'(x) &= (\cos(2x))' = -2 \sin(2x) \\ f''(x) &= (-2 \sin(2x))' = -4 \cos(2x) \\ f''(x) &= 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Se $x \in [0, 17\pi]$, então $k \in \{0, 1, \dots, 33\}$

$$\left(17\pi = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k = \frac{67}{2} \right).$$

Assim, em $[0, 17\pi]$, tem-se

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \{0, 1, \dots, 33\}.$$

Seja P o período positivo mínimo da função f :

$$f(x + P) = f(x) \Leftrightarrow 2x + 2P = 2x + 2\pi \Leftrightarrow P = \pi$$

$y = \cos(2x)$ define uma função
periódica de período 2π

O sinal da segunda derivada muda em $x = \frac{\pi}{4}$ e em $x = \frac{3\pi}{4}$; logo, no intervalo $[0, \pi]$, o gráfico da função de f tem dois pontos de inflexão.

Como $P = \pi$, então em cada intervalo da forma $[k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \{0, 1, \dots, 16\}$ há dois pontos de inflexão do gráfico de f , donde há no total $2 \times 17 = 34$ pontos de inflexão do gráfico de f em $[0, 17\pi]$.

Opção correta: D.

$$\begin{aligned} 31. f'(x) &= (x^2 \sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x = x(2 \sin x + x \cos x) \\ f''(x) &= (x(2 \sin x + x \cos x))' = \\ &= 2 \sin x + x \cos x + x(2 \cos x + \cos x - x \sin x) \\ &= 2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x = 4x \cos x + (2 - x^2) \sin x \\ f'(x) &= 0, \text{ logo, a primeira afirmação é verdadeira.} \end{aligned}$$

$f''(x) = 0$; logo, apesar de $f'(0) = 0$, a função não tem extremo relativo em $x = 0$ e, assim, a segunda afirmação é falsa.

$f(-x) = (-x)^2 \sin(-x) = -x^2 \sin x = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$; logo, a função é ímpar e, portanto, a terceira afirmação é verdadeira.

Consideremos o intervalo $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ para verificar se o gráfico de f tem um ponto de inflexão em $x = 0$.

Se $\left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$, então

$$\left. \begin{aligned} 2 - x^2 &> 0 \\ 4x &< 0 \\ \sin x &< 0 \\ \cos x &> 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4x \cos x < 0 \wedge (2 - x^2) \sin x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$

$$\text{Se } \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[, \text{ então } \left. \begin{aligned} 2 - x^2 &> 0 \\ 4x &> 0 \\ \sin x &> 0 \\ \cos x &> 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f''(x) > 0.$$

Como f'' muda de sinal em $x = 0$, a quarta afirmação é verdadeira.

Opção correta: B.

32. A função f tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{Como } \left| \frac{\pi}{2} + k\pi \right| > 1, \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left| \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \right| < 1, \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \in [-1, 1], \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, em $[-1, 1]$, os zeros da função derivada são infinitos e corresponderão a infinitos extremos da função f

se, por exemplo, existir $f''\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right), \forall k \in \mathbb{Z}$, com

$$f''\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right) \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^4} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f''\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^3 \times \underset{\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}}{0} - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^4 \times \underset{\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pm 1, \forall k \in \mathbb{Z}}{(\pm 1)}$$

$$= \pm \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^4 \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Conclui-se assim que a função f tem uma infinidade de extremantes em $[-1, 1]$.

Opção correta: B.

$$33. \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos(2\alpha) = 2\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{2 + 2\sqrt{12} + 6}{16} - 1 = \\ = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sendo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, tem-se $0 < 2\alpha < \pi$.

$$\cos(2\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge 0 < \alpha < \pi \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{12}$$

$$34. x + 2y^2 = \cos(2\alpha) - 1 + 2\sin^2\alpha =$$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha$$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = 0$$

$$35.1 \cos^2\alpha + \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$$

$$= 2(1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 2 - 3\sin^2\alpha$$

$$35.2 \tan(2\alpha) - 2 \tan(2\alpha) \times \sin^2\alpha = \tan(2\alpha)(1 - 2\sin^2\alpha) =$$

$$= \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha)$$

$$= \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

$$= \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} \times \cos(2\alpha) = \sin(2\alpha)$$

$$35.3 \frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)} = \frac{1 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{1 + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha} = \\ = \frac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha$$

35.4

$$\frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2 \times \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} = \frac{2 \times \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{\frac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} = \\ = \frac{2 \times \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin \alpha$$

36. 1.º Processo

$$\sin(2x)\cos(\pi - x) + \cos(2x)\sin(\pi - x) =$$

$$= 2 \sin x \cos x (-\cos x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x$$

$$= \sin x (-2\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= \sin x (-\cos^2 x - \sin^2 x) = -\sin x$$

2.º Processo

$$\sin(2x)\cos(\pi - x) + \cos(2x)\sin(\pi - x) =$$

$$= \sin(2x + \pi - x) = \sin(x + \pi) = -\sin x$$

PÁG. 102

$$37. D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Zeros:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) - \tan x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \sin x \cos^2 x - \sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x (2\cos^2 x - 1)}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos(2x) = 0 \wedge \cos x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x = 0 \vee \cos(2x) = 0) \wedge \cos x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x = k\pi \vee 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1}$$

$$\begin{aligned} 38.1 \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \\ &= \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 38.2 \quad f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 39.1 \quad h(x) = \cos x + \sin x &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 39.2 \quad \cos x = -\sin x &\Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

40.1 Dado que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + 1}{x} = -\infty$ conclui-se que a função f não é contínua em $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{3x - \pi} \stackrel{0}{=} \frac{1}{3} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left[3x^2 - (\pi + 3)x + \pi + \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{3} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, conclui-se que

existe $\lim f(x)$ e, portanto, a função f é contínua em $x = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} 40.2 \quad \frac{x^3 + 1}{x} = 0 &\Leftrightarrow x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in]-\infty, 0[\\ \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{3x - \pi} = 0 &\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \notin \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \forall k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

donde a função f não tem zeros em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

$$3x^2 - (\pi + 3)x + \pi + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 3(\pi + 3)x + 3\pi + 1 = 0,$$

sendo esta equação impossível em $\mathbb{R}$.

Assim, o único zero da função f é $x = -1$.

40.3 Da alínea 40.1 e atendendo à continuidade da função, conclui-se que o gráfico da função f tem como única assíntota vertical a reta de equação $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty,$$

donde se conclui que o gráfico da função f não tem assíntotas não verticais quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - (\pi + 3)x + \pi + \frac{1}{3}}{x} = +\infty, \text{ donde se conclui que o gráfico da função } f \text{ não tem assíntotas não verticais quando } x \rightarrow +\infty.$$

$$41.1 \quad D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned} 41.2 \quad g(x) = 0 &\Leftrightarrow \sin x = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = k\pi \wedge x \neq 0, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

41.3 Como a função g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, o gráfico de g só poderá ter a assíntota vertical de equação $x = 0$. Verifique-mos se assim acontece.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{0^+} \times 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{0^-} \times 1 = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical (bilateral) ao gráfico de g .

Em relação às assíntotas não verticais temos, quando $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^3} = 0, \text{ dado que} \\ -1 &\leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0, \text{ dado que} \\ -1 &\leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$.

Como a função g é ímpar ($g(-x) = -g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), a reta de equação $y = 0$ também é assíntota ao gráfico de g quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned} 41.4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} [(g \circ f)(x) \times x^2] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(2x^2)}{(2x^2)^2} \times x^2 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{4x^2} = \\ &= \lim_{\substack{2x^2 = y \\ x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin y}{2y} = \frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$42. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{4 \cos x}{\pi - 2x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2 \sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\frac{\pi}{2} - x} =$$

$$\stackrel{0}{=} \lim_{\substack{y = \frac{\pi}{2} - x \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \\ y \rightarrow 0^+}} \frac{2 \sin y}{y} = 2 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = 2$$

Para que g seja contínua em $x = \frac{\pi}{2}$ tem de existir

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x); \text{ logo, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ e, portanto,}$$

tem de se ter $k = 2$.

43. Para que h seja contínua em $x = 3$ tem de existir $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$, ou seja, tem de se ter $\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = h(3)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 - 5x - 3}{\sin(3 - x)} =$$

$$\stackrel{0}{=} \lim_{\substack{y = 3 - x \\ x \rightarrow 3^- \\ y \rightarrow 0^+}} \frac{2(3 - y)^2 - 5(3 - y) - 3}{\sin y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{18 - 12y + 2y^2 - 15 + 5y - 3}{\sin y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-7y + 2y^2}{\sin y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-7 + 2y}{\frac{\sin y}{y}} = \frac{-7}{1} = -7$$

$$h(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(7 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right) = -7$$

Logo, h é contínua em $x = 3$.

PÁG. 103

- 44.1 g é diferenciável em $x = 0$ se existir $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ e este for finito.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0, \text{ pois:}$$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ e}$$

se $x > 0$, $-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$, pelo teorema das funções

enquadradas, dado que $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$,

$$\text{então } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0;$$

se $x < 0$, $-x \geq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x$, pelo teorema das funções

enquadradas, dado que $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0.$$

Assim, g é diferenciável em $x = 0$.

- 44.2 Para que se possa aplicar o teorema de Lagrange no intervalo $[0, a]$, com $a \in \mathbb{R}^+$, g tem de ser contínua nesse intervalo e diferenciável em $]0, a[$.

g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pois é o produto de funções contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Em $x = 0$, temos de verificar se existe limite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0 \text{ (pelo teorema das funções enquadradas, conforme alínea anterior)}$$

Logo, g também é contínua em $x = 0$ e, portanto, é contínua em $\mathbb{R}$. Sendo contínua em $\mathbb{R}$, também o é em qualquer intervalo de números reais, como por exemplo $[0, a]$.

g é diferenciável em $\mathbb{R}$ dado que, como vimos na alínea anterior, é diferenciável em $x = 0$ e é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, por ser o produto de funções diferenciáveis nesse conjunto. Assim, g é diferenciável em $]0, a[$.

Concluindo, o teorema de Lagrange é aplicável à função g no intervalo $[0, a]$.

$$45. f'(x) = \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right)' =$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)' \times (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \times (\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin x - \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= -\frac{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

Como $\forall x \in D_f$, $(\sin x - \cos x)^2 > 0$, $f'(x) < 0$, e, portanto, a função f é decrescente em qualquer intervalo em que se encontre definida.

$$46.1 f(-x) = \sin^2(-x) \sin(-2x) = \sin^2 x \sin(2x) =$$

$$= -f(x), \forall x \in \mathbb{R}; \text{ logo, } f \text{ é ímpar.}$$

$$f'(x) = (\sin^2 x \sin(2x))' =$$

$$= 2 \sin x \cos x \sin(2x) + 2 \sin^2 x \cos(2x)$$

$$= 2 \sin x \cos x \times 2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= 4 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \sin^2 x (1 - 2 \sin^2 x)$$

$$= 4 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) + 2 \sin^2 x - 4 \sin^4 x$$

$$= 4 \sin^2 x - 4 \sin^4 x + 2 \sin^2 x - 4 \sin^4 x = -8 \sin^4 x + 6 \sin^2 x$$

$$= 2 \sin^2 x (3 - 4 \sin^2 x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x (3 - 4 \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \vee 3 - 4 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como a função definida por $y = \sin x$ tem período positivo mínimo 2π e a função definida por $y = \sin(2x)$ tem período positivo mínimo π , a função f tem período positivo mínimo 2π . No entanto, atendendo ao facto de f ser ímpar, basta estudar a monotonia no intervalo $[0, \pi]$.

Zeros de f' : $x = 0 \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \pi$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	0
Monotonia e extremos de f	(Mín.)	↗	(Máx.)	↘	(Mín.)	↗	(Máx.)

Em $[0, \pi]$, f é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$

e f é decrescente em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

$$46.2 \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 + \cos x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq -1\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{1 + \cos(-x)} = \frac{\cos x}{1 + \cos x} = f(x), \quad \forall x \in D_f;$$

logo, f é par.

$$f'(x) = \left(\frac{\cos x}{1 + \cos x}\right)' = \frac{-\sin x(1 + \cos x) - \cos x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \\ = -\frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \wedge 1 + \cos x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \wedge x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $y = \cos x$ tem período positivo mínimo 2π e atendendo ao domínio e à paridade de f , basta estudar a monotonia no intervalo $]-\pi, \pi[$.

x	$-\pi$		0		π
$f'(x)$	ND	+	0	-	ND
Monotonia e extremos de f	ND	↗	(Máx.)	↘	ND

Em $]-\pi, \pi[$, f é crescente em $]-\pi, 0]$

e f é decrescente em $[0, \pi[$.

$$46.3 \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : \cos x + 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq -1\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$f(-x) = \frac{\sin(-x) - 1}{\cos(-x) + 1} = \frac{-\sin x - 1}{\cos x + 1}; \text{ como não se verifica}$$

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in D_f, \text{ nem } f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in D_f,$$

f não é par nem ímpar.

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}\right)' = \frac{\cos x(\cos x + 1) - (\sin x - 1)(-\sin x)}{(\cos x + 1)^2} = \\ = \frac{\cos^2 x + \cos x + \sin^2 x - \sin x}{(\cos x + 1)^2} = \frac{1 + \cos x - \sin x}{(\cos x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \cos x - \sin x}{(\cos x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos x - \sin x = 0 \wedge \cos x + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = -1 \wedge \cos x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \cos x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \cos x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \cos x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \cos x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \wedge \\ \wedge x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi\right) \wedge x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $y = \cos x$ e $y = \sin x$ têm período positivo mínimo 2π e atendendo ao domínio de f , basta estudar a monotonia no intervalo $]-\pi, \pi[$.

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	ND	-	0	+	ND
Monotonia e extremos de f	ND	↘	(Máx.)	↗	ND

Em $]-\pi, \pi[$, f é crescente em $\left] -\pi, \frac{\pi}{2} \right]$

e f é decrescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right[$.

47.1 $f'(x) = -4\pi \sin(4\pi x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(4\pi x) = 0 \Leftrightarrow 4\pi x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

Se $x \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{4} \vee x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{4}$$

x	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0
Monotonia e extremos de f	1 (Máx.)	$\searrow$	-1 (Mín.)	$\nearrow$	1 (Máx.)	$\searrow$	-1 (Mín.)

f é crescente em $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$; f é decrescente em $\left[0, \frac{1}{4}\right]$

e $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$; f tem máximo relativo (e absoluto) 1, em $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$;

f tem mínimo relativo (e absoluto) -1, em $x = \frac{1}{4}$ e $x = \frac{3}{4}$.

47.2 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow x = -\pi \vee x = 0 \vee x = \pi$

$$\left(\text{em }]-2\pi, 2\pi[\setminus \left\{-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}\right)$$

f é crescente em $\left]-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right[$, $\left]-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right]$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

e $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; f é decrescente em $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$,

$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ e $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$; f tem máximo relativo -1, em

$x = -\pi$ e $x = \pi$; f tem mínimo relativo 1 em $x = 0$. (Ver quadro abaixo)

x	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	ND	+	ND	+	0	-	ND	-	0	+	ND	+	0	-	ND	-	ND
Monotonia e extremos de f	ND	$\nearrow$	ND	$\nearrow$	-1 Máx.	$\searrow$	ND	$\searrow$	1 Mín.	$\nearrow$	ND	$\nearrow$	-1 Máx.	$\searrow$	ND	$\searrow$	ND

48.1 $f'(x) = \left(\cos x + \frac{x}{2}\right)' = -\sin x + \frac{1}{2}$

$$f''(x) = \left(-\sin x + \frac{1}{2}\right)' = -\cos x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Sendo $x \in [-2\pi, 2\pi]$,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$$

x	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f''(x)$	-	-	0	+	0	-	0	+	0	-	-
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cap$	$\cap$	PI	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$	PI	$\cap$	$\cap$

$$f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{4}; f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}; f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo nos intervalos $\left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$ e

$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Os pontos de inflexão têm coordenadas

$$\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \text{ e } \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right).$$

48.2 $f'(x) = (2 \sin x + \sin^2 x)' = 2 \cos x + 2 \sin x \cos x = 2 \cos x + \sin(2x)$

$$f''(x) = (2 \cos x + \sin(2x))' = -2 \sin x + 2 \cos(2x) = -2 \sin x + 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x = -2 \sin x + 2 - 4 \sin^2 x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \sin x + 2 - 4 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \sin x = -1 \vee \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

(Continua na página seguinte.)

Se $]-\pi, \pi[$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		2π
$f''(x)$	ND	+	0	+	0	-	0	+	ND
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	ND	∪		∪	PI	∩	PI	∪	ND

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}$; $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo

em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. Tem a concavidade voltada para cima

em $]-\pi, \frac{\pi}{6}[$ e $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$. Os pontos de inflexão têm

coordenadas $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{4}\right)$ e $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5}{4}\right)$.

49.1 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 + \cos x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq -1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

49.2 $f(0) = \frac{1}{2}$; logo, o gráfico de f interseca o eixo Oy no ponto de coordenadas $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \wedge \cos x \neq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

O gráfico de f interseca o eixo Ox no ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$.

49.3 f é uma função par ($\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$) de período mínimo positivo 2π , pelo que basta estudar as assíntotas verticais no intervalo $[0, \pi]$.

Como $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$, a reta de equação $x = \pi$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Atendendo à paridade e ao domínio de f , tem-se:

as retas de equação da forma $x = \pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$,

são assíntotas verticais ao gráfico de f . Como nos restantes

pontos do domínio a função é contínua, conclui-se que o

gráfico de f apenas tem estas assíntotas verticais.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x(1 + \cos x)} = 0$,

dado que $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{1 + \cos x}$ não existe pois tomando, por

exemplo, $a_n = 2n\pi$ e $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, tem-se

$\lim a_n = \lim b_n = +\infty$ e $\lim f(a_n) = \frac{1}{2}$ e $\lim f(b_n) = 0$.

Assim, o gráfico de f não tem assíntota não vertical quando $x \rightarrow +\infty$.

Como f é par, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ e não existe $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$,

donde o gráfico de f também não tem assíntota não vertical quando $x \rightarrow -\infty$.

49.4 $f'(x) = \left(\frac{\cos x}{1 + \cos x}\right)' = \frac{-\sin x(1 + \cos x) - \cos x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} =$
 $= \frac{-\sin x - \sin x \cos x + \cos x \sin x}{(1 + \cos x)^2} = -\frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2}$

49.5 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \wedge 1 + \cos x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = k\pi \wedge x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

No intervalo $]-\pi, \pi[$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\pi$		0		π
$f'(x)$	ND	+	0	-	ND
Monotonia e extremos de f	ND	↗	$\frac{1}{2}$ (Máx.)	↘	ND

Atendendo ao período mínimo positivo de $f(2\pi)$, f tem o máximo absoluto $\frac{1}{2}$, para $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

49.6 $f''(x) = \left(-\frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2}\right)' =$
 $= -\frac{\cos x(1 + \cos x)^2 - \sin x \times 2(1 + \cos x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^4} =$
 $= -\frac{(1 + \cos x)(\cos x(1 + \cos x) + 2\sin^2 x)}{(1 + \cos x)^4} =$
 $= -\frac{\cos x + \cos^2 x + 2\sin^2 x}{(1 + \cos x)^3} = -\frac{\cos x + \sin^2 x + 1}{(1 + \cos x)^3}$

$$\begin{aligned}
 49.7 \quad f''(x) &= \Leftrightarrow -\frac{\cos x + \sin^2 x + 1}{(1 + \cos x)^3} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos x + \sin^2 x + 1 = 0 \wedge 1 + \cos x \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow -\cos^2 x + \cos x + 2 = 0 \wedge \cos x \neq -1 \\
 &\Leftrightarrow \cos x = \frac{-1 \pm 3}{-1} \wedge \cos x \neq -1 \\
 &\Leftrightarrow \left(\cos x = -1 \vee \underbrace{\cos x = 2}_{\text{impossível}} \right) \wedge \cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \in \{ \} \\
 f''(x) &= -\frac{\cos x + \sin^2 x + 1}{(1 + \cos x)^3} < 0, \forall x \in D_f
 \end{aligned}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em todos os intervalos do seu domínio. Não tem pontos de inflexão.

PÁG. 104

50.1 Fixado $x \geq 0$, a função h estará bem definida se $\sin x - k \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq k$.
Como $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}_0^+$, para qualquer $k \in [-1, 1]$, existe $x \geq 0$ tal que $\sin x = k$, pelo que a função ficará bem definida para $k \notin [-1, 1] \Leftrightarrow k < -1 \vee k > 1$.

50.2 A função h é contínua em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ pois, em ambos os casos, é o quociente de funções contínuas.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \stackrel{0}{=} \frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x - k} = -\frac{1}{k}.$$

Para haver $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ tem de se verificar

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{k} \Leftrightarrow k = -2.$$

$$50.3 \quad h(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{\sin x - 2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Pela alínea 50.2, como $k \neq -2$, a função h não é contínua em $x = 0$, pelo que também não é diferenciável em $x = 0$.
Em $]0, 2\pi[$:

$$h'(x) = -\frac{\cos x}{(\sin x - 2)^2} \text{ e } h'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$$

Dado que $(\sin x - 2)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $\cos x$ é positivo nos 1.º e 4.º quadrantes e negativo nos 2.º e 3.º quadrantes conclui-se que:

- na vizinhança de $x = \frac{\pi}{2}$, a função h' muda de sinal, de negativo para positivo; logo, em $x = \frac{\pi}{2}$ há um mínimo relativo $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$;
- na vizinhança de $x = \frac{3\pi}{2}$, a função h' muda de sinal, de positivo para negativo; logo, em $x = \frac{3\pi}{2}$ há um máximo relativo $h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3}$.

Como a função h' é negativa em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a função h é decrescente nesse intervalo e, dado que, pela alínea

50.2, $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \frac{1}{2}$, como $h(0) = -\frac{1}{2} < \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$ então em $x = 0$ não ocorre nenhum extremo.

50.4 1.º processo

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{\sin x + \frac{3}{2}} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} - \frac{2}{3}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2x}{3x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{y = \frac{x}{2}} \frac{3 \sin y - 4y}{12y^2} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{3 \sin y - 4y}{12y^2} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y} \times \left(\frac{1}{4} \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin y}{y} - \frac{1}{3} \right) = +\infty$$

Dado que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = +\infty$, não existe $h'(0)$,

ou seja, função h não é diferenciável em $x = 0$.

2.º processo

Pela alínea 50.2, como $k \neq -2$, a função h não é contínua em $x = 0$, pelo que também não é diferenciável em $x = 0$.

$$\begin{aligned}
 51.1 \quad f'(x) &= (\sqrt{x^2 - 2x + 2} \times \cos x)' = \\
 &= (\sqrt{x^2 - 2x + 2})' \times \cos x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} \times (\cos x)' \\
 &= \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \times \cos x - \sqrt{x^2 - 2x + 2} \times \sin x \\
 &= \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \times \cos x - \sqrt{x^2 - 2x + 2} \times \sin x
 \end{aligned}$$

51.2 Como $f'(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e a reta tangente passa no ponto de coordenadas $(0, f(0)) = (0, \sqrt{2})$, então o declive desta reta é $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e a sua ordenada na origem é $\sqrt{2}$, donde a equação desta reta é $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$.

51.3

a. Como $f'(x) = \frac{(x-1)\cos x - (x^2-2x+2)\sin x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

é produto e quociente de funções contínuas, então a função f' também é uma função contínua (em $\mathbb{R}$ pois $x^2-2x+2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Como f' é contínua em $\mathbb{R}$ (logo em $\left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$), $f'(\pi) < 0$ e $f'\left(\frac{5\pi}{4}\right) > 0$, então,

pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in \left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[: f'(c) = 0$.

b. Dado que, por hipótese, há apenas um extremo em

$\left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[$, f' está definida em $\left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[$, muda apenas

uma vez de sinal e como $f'(\pi) < 0$ e $f'\left(\frac{5\pi}{4}\right) > 0$, então

f' muda de negativa para positiva, donde o extremo é um mínimo relativo.

52. $g'(x) = \left(\frac{x^2}{4} + \cos x\right)' = \frac{x}{2} - \sin x$

$$g''(x) = \left(\frac{x}{2} - \sin x\right)' = \frac{1}{2} - \cos x$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como as abscissas dos pontos estão compreendidas entre -6 e 6 , tem-se:

$$x_A = -\frac{\pi}{3}, x_B = \frac{\pi}{3}, x_C = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \text{ e } x_D = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$$

Note-se que a função g é duas vezes diferenciável em todos os pontos do domínio. Assim, os pontos de inflexão têm de corresponder a zeros da segunda derivada, sendo que as quatro abscissas acima apresentadas são os únicos zeros de g'' entre -6 e 6 .

A área do trapézio é dada por:

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{CD} + \overline{AB}}{2} \times \left(g\left(\frac{5\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{2 \times \frac{5\pi}{3} + 2 \times \frac{\pi}{3}}{2} \times \left(\frac{25\pi^2}{36} + \frac{1}{2} - \left(\frac{\pi^2}{36} + \frac{1}{2}\right)\right) = 2\pi \times \frac{24\pi^2}{36} = \frac{4\pi^3}{3}$$

53. Consideremos a função definida, em $\mathbb{R}$, por

$$f(x) = \tan(\arctan(x)).$$

Pela definição da função $\arctan$, temos $f(x) = x$.

Determinemos $f'(x)$ de duas maneiras.

Por um lado, temos: $f'(x) = 1$.

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\tan(\arctan(x)))' = \\ &= (\arctan(x))' \times (1 + \tan^2(\arctan(x))) \\ &= (\arctan(x))' \times (1 + x^2), \end{aligned}$$

supondo que $\arctan$ é diferenciável.

$$\text{Assim, } (\arctan(x))' \times (1 + x^2) = 1 \Leftrightarrow (\arctan(x))' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Mostremos agora que, para todo o $x > 0$,

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Seja } g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$g'(x) = \left(\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{1 + x^2} + \left(\frac{1}{x}\right)' \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 + 1} = 0; \text{ logo, } g \text{ é constante, para } x > 0.$$

$$\text{Como } g(1) = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \text{ tem-se:}$$

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

PÁG. 105

54. Seja $f(x) = \cos x - x - 2$.

f é contínua em $\mathbb{R}$, logo, é contínua em $[-2\pi, 0]$.

$$f(-2\pi) = 1 + 2\pi - 2 = 2\pi - 1 > 0, f(0) = 1 - 2 = -1 < 0$$

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy existe pelo menos um valor de c em $]-2\pi, 0[$ tal que

$$f(c) = 0 \Leftrightarrow \cos c = c + 2.$$

$$f'(x) = -\sin x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Em }]-2\pi, 0[, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}.$$

x	-2π		$-\frac{\pi}{2}$		0
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$-$	$-$
Monotonia e extremos de f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	-1

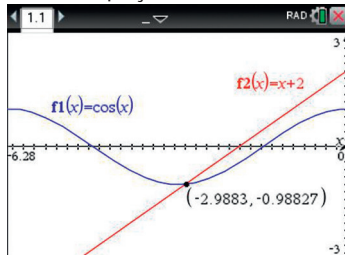
Como f é monótona decrescente em $\left[-2\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ e

$$f(-2\pi) = 2\pi - 1 > 0 \text{ e } f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2 < 0, f \text{ tem um}$$

único zero neste intervalo.

Em $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, tendo em conta a monotonia e o facto de $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$ e $f(0) < 0$, f não tem zeros.

Assim, a equação tem uma única solução em $]-2\pi, 0[$.



A solução da equação $\cos x = x + 2$ no intervalo $[-2\pi, 0]$ é, com aproximação às décimas, $x \approx -3,0$.

55. Seja f a função definida por $f(x) = \sin x - x$. Como $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$, f é monótona decrescente em $\mathbb{R}$, donde a solução será única. Aplicando, por exemplo, o teorema de Bolzano-Cauchy à função no intervalo $[-\pi, \pi]$ tem-se que: f é contínua em $\mathbb{R}$ (diferença de funções contínuas em $\mathbb{R}$); logo, também o é em $[-\pi, \pi]$.

$$f(-\pi) = \underbrace{\sin(-\pi)}_0 - (-\pi) = \pi > 0 \text{ e}$$

$$f(\pi) = \underbrace{\sin(\pi)}_0 - \pi = -\pi < 0$$

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy

$$\exists c \in]-\pi, \pi[: f(c) = 0 \Leftrightarrow \sin(c) = c$$

A determinação da solução, que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi[$, pode ser feita por mera inspeção da função, pois $\sin 0 = 0 \Leftrightarrow \sin 0 - 0 = 0$, ou seja, o valor de $c \in]-\pi, \pi[: \sin(c) = c$ é $c = 0$.

56. $f'(x) = \left(\frac{x}{2} + \sin x\right)' = \frac{1}{2} + \cos x$
 $f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

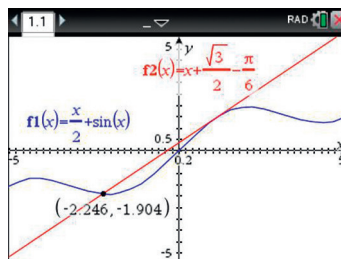
A reta t passa em A , pelo que,

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \times \frac{\pi}{3} + b \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

A equação reduzida da reta t é $y = x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$.

Para determinar as coordenadas do ponto B , recorremos a uma calculadora gráfica para determinar aproximadamente a solução negativa da equação:

$$f(x) = x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$



As coordenadas do ponto B , com arredondamento às milésimas, são $(-2,246; -1,904)$.

- 57.1 $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$

O declive da reta r é $f'(a) = \cos a$.

O declive da reta s é

$$f'(b) = \cos b = \cos(\pi - a) = -\cos a.$$

$\downarrow$
 $a + b = \pi$

Como $f'(b) = -f'(a)$, conclui-se que as retas têm declives simétricos.

- 57.2

$$\bullet A\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$b = \pi - a = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$B\left(\frac{2\pi}{3}, f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = B\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

- A reta r tem declive $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} + k \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

A equação reduzida de reta r é $y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$.

A reta s tem declive $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} + k \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

A equação reduzida de reta s é $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$.

- $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$$y = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}$$

$$C\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$$

- A área do triângulo $[ABC]$ é dada por:

$$A_{[ABC]} = \frac{\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) \times \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{\pi^2}{72}$$

57.3 $D_g =]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$

A função g é contínua em $]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ pois é o quociente de funções contínuas nesse conjunto, sendo $f(x) \neq 0, \forall x \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$. Portanto, as possíveis assíntotas verticais ao gráfico de g são as retas de equações $x=0$, $x=\pi$ e $x=2\pi$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\pi}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\pi}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} \frac{2\pi}{0^-} = -\infty$$

Conclui-se que as retas de equações $x=\pi$ e $x=2\pi$ são assíntotas verticais ao gráfico de g .

Tendo em conta o domínio da função, não existem assíntotas não verticais.

2. APLICAÇÕES AOS OSCILADORES HARMÔNICOS

PÁG. 111

$$58.1 \sin\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = -\cos x, \text{ donde}$$

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) + 3 = -\cos x + 3 = 3 - \cos x$$

58.2 Como $f(x) = -\cos x + 3$ e dado que $g(x) = \cos x$ tem período fundamental 2π , então a função f também tem período fundamental 2π dado que resulta da função simétrica da função g a cujo gráfico se aplicou uma translação de vetor de coordenadas $(0, 3)$.

Também se pode mostrar o resultado verificando as seguintes igualdades:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = -\cos(x+2\pi) + 3 = -\cos x + 3 = f(x)$$

58.3 Como $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq -\cos x \leq 1$ então

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2 \leq -\cos x + 3 \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq f(x) \leq 4.$$

Assim, o contradomínio da função f é o intervalo $[2, 4]$.

$$58.4 f'(x) = \sin x$$

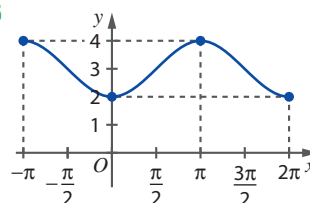
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ pelo que se}$$

$$x \in [-\pi, 2\pi] \Rightarrow k \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

x	$-\pi$		0		π		2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
Monotonia e extremos de f	Máx. abs.	$\searrow$	Mín. abs.	$\nearrow$	Máx. abs.	$\searrow$	Mín. abs.

Assim, f é crescente em $[0, \pi]$ e decrescente em $[-\pi, 0]$ e $[\pi, 2\pi]$.

58.5



$$59.1 \text{ Como } 0 \leq x \leq 2\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{23\pi}{6},$$

$$\text{sendo que } [0, 2\pi] \subset \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}\right].$$

Assim, $-1 \leq \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1, \forall x \in [0, 2\pi]$, pelo que $-1 \leq g(x) \leq 3 \forall x \in [0, 2\pi]$, ou seja, o contradomínio da função g é o intervalo $[-1, 3]$.

59.2 Com base na alínea anterior, g tem máximo absoluto 3 e mínimo absoluto -1 .

$$59.3 g(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$59.4 g'(x) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$$

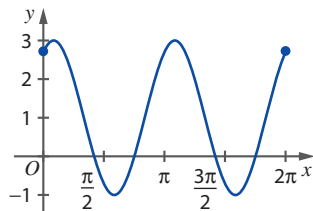
pelo que se $x \in [0, 2\pi] \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, 3\}$

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{19\pi}{12}$	2π
$g'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\sqrt{3}+1$ Mín. rel.	3 Máx. abs.	-1 Mín. abs.	3 Máx. abs.	-1 Mín. abs.	$\sqrt{3}+1$ Máx. rel.

Assim, g é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{12}\right], \left[\frac{7\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}\right]$ e em

$\left[\frac{19\pi}{12}, 2\pi\right]$ e é decrescente em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ e $\left[\frac{13\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\right]$.

59.5



60.1 $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$

pelo que $D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$

60.2 Como $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \in \mathbb{R}$

pelo que o contradomínio da função h é $\mathbb{R}.$

60.3 $h(x) = 0 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

60.4 Como $\frac{x}{2} + \frac{P}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} + \pi \Leftrightarrow P = 2\pi$ a função h é

periódica de período fundamental 2π , pelo que basta estudar as assíntotas verticais em $[0, 2\pi]$ e generalizar. Em $[0, 2\pi]$ só poderá existir assíntota vertical no ponto de abscissa $\frac{\pi}{3}.$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} \left[\sqrt{3} - \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \right] = +\infty$ donde $x = \frac{\pi}{3}$ é assíntota

vertical ao gráfico de $h.$

Generalizando, $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ é a expressão geral das assíntotas verticais ao gráfico de $h.$

O que ocorre em $[0, 2\pi]$ ocorre nos outros intervalos de amplitude 2π do domínio h , pelo que não há assíntotas não verticais ao gráfico de $h.$

60.5 $h'(x) = -\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}$

$h'(x) < 0, \forall x \in D_h$, pelo que h é decrescente em todos os intervalos

$\left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2\pi + 2k\pi \right[= \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{7\pi}{3} + 2k\pi \right[, k \in \mathbb{Z}$

60.6 $h''(x) = -\frac{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}{2\cos^3\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}$

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Restringindo a tabela de concavidades a $[0, 2\pi]$ tem-se:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$h''(x)$	-	ND	+	-
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de h	$\cap$	$\cap$	ND $\cup$ PI	$\cap$

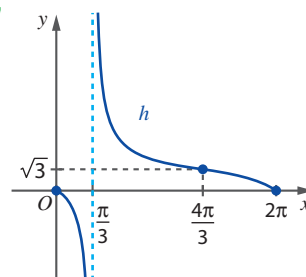
Generalizando, o gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em todos os intervalos $\left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right], k \in \mathbb{Z}$

e a concavidade voltada para baixo em todos os intervalos

$\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{7\pi}{3} + 2k\pi \right], k \in \mathbb{Z}.$

Os pontos de inflexão têm coordenadas $\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \sqrt{3} \right), k \in \mathbb{Z}.$

60.7



61.1 Verificam-se as seguintes desigualdades:

$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(bx + c) \leq 1$

Se $a > 0$ então $d - a \leq a \sin(bx + c) + d \leq d + a, \forall x \in \mathbb{R}$ pelo que o contradomínio é $[d - a, d + a]$ e a amplitude do contradomínio é $d + a - d - a = 2a.$

Se $a < 0$ então $d + a \leq a \sin(bx + c) + d \leq d - a, \forall x \in \mathbb{R}$ pelo que o contradomínio é $[d + a, d - a]$ e a amplitude do contradomínio é $d - a - d - a = 2(-a).$

Assim, em qualquer dos casos, a amplitude do contradomínio é $2|a|.$

61.2 Dado que $b \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, a \sin\left[b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right) + c\right] + d = a \sin(bx + c + 2\pi) + d = a \sin(bx + c) + d.$

61.3

a. Dado que $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$,

a função $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ tem contradomínio

$[-1, 1]$; a amplitude do contradomínio é 2, sendo este simétrico em relação à reta de equação $y = 0$.

Para obter a função representada graficamente, cujo contradomínio é $[-1, 3]$ e tem amplitude 4, é necessário proceder a uma dilatação vertical (no caso uma multiplicação por 2); como o contradomínio não é simétrico em relação à reta de equação $y = 0$, é também necessário proceder a uma translação vertical de vetor de coordenadas $(0, 1)$.

Por fim, tal como mostra a expressão analítica de f , é necessário proceder a uma translação horizontal de vetor de coordenadas $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

b. Pela alínea 61.1, conclui-se que

$$2|a| = 4 \Leftrightarrow |a| = 2 \Leftrightarrow a = \pm 2.$$

Também se vê, na representação gráfica, que o período

$$\text{é } \frac{3\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi, \text{ donde, pela alínea 61.2, conclui-se}$$

$$\text{que } \frac{2\pi}{b} = 2\pi \Leftrightarrow b = 1.$$

Como $d - 2 \leq d \pm 2 \cos(x + c) \leq 2 + d, \forall x \in \mathbb{R}$ e o contradomínio desta função é $[-1, 3]$, então

$$-1 \leq d \pm 2 \cos(x + c) \leq 3 \Rightarrow d = 1.$$

Seja $f(x) = 1 \pm 2 \cos(x + c)$:

como $f(0) = 1 \Leftrightarrow \cos c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, basta tomar $c = \frac{\pi}{2}$.

De $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, conclui-se que $a = 2$ pois, então

$$a = -2 \Rightarrow \cos \pi = 1 \text{ (absurdo)}.$$

Concluindo, $a = 2, b = 1, c = \frac{\pi}{2}$ e $d = 1$.

PÁG. 115

62.1 A amplitude A , afastamento máximo em relação à posição de equilíbrio, é 5.

O período T , intervalo de tempo correspondente a um ciclo completo do movimento, é 1.

A pulsação ω , que é definida por $\frac{2\pi}{T}$, é 2π .

A fase $\varphi \in [0, 2\pi[$, que é obtida a partir da igualdade

$$A \cos \varphi = x(0), \text{ é } \frac{\pi}{2}.$$

62.2 A expressão que representa o movimento do oscilador é da forma $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, pelo que

$$x(t) = 5 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$62.3 \quad 5 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 2,5 \Leftrightarrow \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\pi t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2\pi t + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{12} + k \vee t = -\frac{5}{12} + k, k \in \mathbb{Z}$$

Atendendo a que $t \in [0, 4]$, os instantes obtêm-se atribuindo valores inteiros à constante k e são

$$t = \frac{11}{12} \vee t = \frac{23}{12} \vee t = \frac{35}{12} \vee t = \frac{47}{12} \vee t = \frac{7}{12} \vee t = \frac{19}{12} \vee$$

$$\vee t = \frac{31}{12} \vee t = \frac{43}{12}.$$

$$63.1 \quad x(0,5) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} \text{ e } x(2,75) = 2(-1) = -2$$

63.2 A expressão que representa o movimento do oscilador é da forma $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.

$$A = 2, \omega = \pi \text{ e } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

$$63.3 \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \text{ s e } f = \frac{1}{T} = 0,5 \text{ Hz}.$$

63.4

$$a. \quad 2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} + k, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $[0, 8]$:

$$t = \frac{1}{4} + k \text{ segundos, } k \in \{0, \dots, 7\}$$

$$b. \quad 2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{4} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $[0, 8]$:

$$t = -\frac{1}{4} + 2k \text{ segundos, } k \in \{1, \dots, 4\}$$

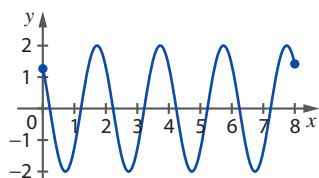
$$c. \quad 2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = -2 \Leftrightarrow \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{3}{4} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $[0, 8]$:

$$t = \frac{3}{4} + 2k \text{ segundos, } k \in \{0, \dots, 3\}$$

63.5



$$\begin{aligned} 64.1 \quad f(x) &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \\ &= 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \right] = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Como } 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4} + 2\pi\right),$$

$$\text{então } f(x) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{7\pi}{4}\right).$$

$$A = 2, \quad \omega = \frac{\pi}{3} \text{ e } \varphi = \frac{7\pi}{4}$$

$$64.2 \quad 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{7\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{7\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}x + \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{15}{4} + 3k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Para que $x = -\frac{15}{4} + 3k, \quad k \in \mathbb{Z}$, seja um real não negativo, basta $k \geq 2$, pelo que se tem a equivalência

$$x = -\frac{15}{4} + 6 + 3k, \quad k \in \mathbb{Z}_0^+ \Leftrightarrow x = \frac{9}{4} + 3k, \quad k \in \mathbb{Z}_0^+.$$

PÁG. 119

$$65.1 \quad A = 7, \quad \omega = 4\pi \text{ rad/s e } \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$65.2 \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,5 \text{ s e } f = \frac{1}{T} = 2 \text{ Hz}$$

$$65.3 \quad x'(t) = -28\pi \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$65.4 \quad x''(t) = -112\pi^2 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} 65.5 \quad x''(t) &= -112\pi^2 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= -16\pi^2 \times 7 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = -16\pi^2 x(t) \end{aligned}$$

$$66.1 \quad x'(t) = 2,5\pi a \cos(2,5\pi t + b)$$

$$x''(t) = -6,25\pi^2 a \sin(2,5\pi t + b)$$

$$\begin{aligned} x''(t) &= -6,25\pi^2 a \sin(2,5\pi t + b) = \\ &= -6,25\pi^2 a \sin(2,5\pi t + b) = -6,25\pi^2 x(t) \end{aligned}$$

66.2

$$a. \quad \begin{cases} x(0,4) = 0 \\ x(3) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \sin(\pi + b) = 0 \\ a \sin\left(\frac{15\pi}{2} + b\right) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a \sin b = 0 \\ -a \cos b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \vee \sin b = 0 \\ a \cos b = 4 \end{cases}$$

Se $a = 0$, $a \cos b = 4$ é uma equação impossível, pelo que é válida a igualdade $\sin b = 0$.

$$\sin b = 0 \Rightarrow \cos b = \pm 1 \Leftrightarrow b = k\pi \text{ rad}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$a \cos b = 4 \Leftrightarrow a = \frac{4}{\cos b} = \frac{4}{\pm 1} = \pm 4$$

$$\begin{aligned} x(t) &= a \sin(2,5\pi t + b) = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2,5\pi t - b\right) = \\ &= a \cos\left(-2,5\pi t + \frac{\pi}{2} - b\right) = \cos(-x) = \cos x \\ &= a \cos\left(2,5\pi t + b - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Como a representa a amplitude do movimento (portanto, um valor positivo), conclui-se que $a = 4$ e $\cos b = 1 \Leftrightarrow b = 2k\pi \text{ rad}, \quad k \in \mathbb{Z}$; como $b - \frac{\pi}{2}$ representa a fase do oscilador (portanto,

$$b - \frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi[), \text{ conclui-se que } b = 2\pi \text{ rad},$$

$$\text{donde } x(t) = 4 \cos\left(2,5\pi t + \frac{3\pi}{2}\right).$$

$$b. \quad A = 4, \quad \omega = 2,5\pi \text{ rad/s e } \varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}.$$

$$67.1 \quad A = 2, \quad \omega = 10 \text{ rad/s e } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{5} \text{ s e } f = \frac{1}{T} = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}.$$

$$\begin{aligned} 67.2 \quad x'(t) &= -20 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \\ x''(t) &= -200 \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -100 \times 2 \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -100x(t) \end{aligned}$$

67.3 A velocidade, que é dada por $x'(t)$, é máxima quando $x''(t) = 0$ e a função x'' muda de sinal (neste caso, de positiva para negativa).

$$x''(t) = 0 \Leftrightarrow -100x(t) = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 10t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = k \frac{\pi}{10}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como $t \geq 0 \Rightarrow t = k \frac{\pi}{10}, \quad k \in \mathbb{Z}_0^+$ e, dado que x'' muda de positiva para negativa na vizinhança de $\frac{\pi}{10}$, então em

$$x = \frac{\pi}{10} \text{ atinge a velocidade máxima que é}$$

$$x'\left(\frac{\pi}{10}\right) = -20 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 20 \text{ unidades/s}.$$

O instante em que esta velocidade é atingida pela primeira vez é $\frac{\pi}{10} \text{ s} \approx 0,3 \text{ s}.$

67.4 Na alínea anterior conclui-se que

$$x''(t) = 0 \Leftrightarrow t = k \frac{\pi}{10}, \quad k \in \mathbb{Z}_0^+,$$

pelo que, no intervalo considerado, tem-se

$$t = \frac{\pi}{10} \text{ s} \vee t = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \text{ s} \vee t = \frac{3\pi}{10} \text{ s} \vee t = \frac{4\pi}{10} = \frac{2\pi}{5} \text{ s}.$$

PÁG. 122

68. $\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s}$ e $\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$.

Opção correta: B

69. $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \times \frac{1}{T} = 2\pi \times f = 2\pi \times 50 = 100\pi \text{ rad/s}$.

Opção correta: D

70. $A = 4 \text{ m}$ e $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ Hz}$.

Opção correta: C

71. Como $T = 4,5 - 0,5 = 4 \text{ s}$, então $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$.

Por outro lado, $A = 2 \text{ m}$ e $\varphi \in [0, 2\pi[$, donde

$$x(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Opção correta: A

PÁG. 123

72.1 $x(0) = 5 \times (-1) - 1 = -6$ e $x(1) = 5 \times 0 - 1 = -1$.

72.2 Dado que $-6 \leq 5 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) - 1 \leq 4, \forall t \in [0, 4]$,
a amplitude do movimento é $A = \frac{4 - (-6)}{2} = 5$.

72.3 O período e a frequência do movimento do oscilador

harmónico definido por $y(t) = 5 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right), t \in [0, 4]$,

são, respetivamente, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \text{ s}$ e $f = \frac{1}{T} = 0,25 \text{ Hz}$.

O gráfico da função x resulta de uma translação de vetor de coordenadas $(0, -1)$ do gráfico da função y , pelo que mantém a amplitude, período, frequência, pulsação e fase. Assim, $T = 4 \text{ s}$ e $f = 0,25 \text{ Hz}$.

72.4 $|x(t)| = 2,5 \Leftrightarrow x(t) = 2,5 \vee x(t) = -2,5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = 0,7 \vee \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = -0,3 \quad \Leftrightarrow \begin{matrix} \arccos(0,7) \approx 0,8 \\ \arccos(-0,3) \approx 1,9 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}t + \pi \approx 0,8 + 2k\pi \vee \frac{\pi}{2}t + \pi \approx -0,8 + 2k\pi \vee$$

$$\vee \frac{\pi}{2}t + \pi \approx 1,9 + 2k\pi \vee \frac{\pi}{2}t + \pi \approx -1,9 + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \approx -1,5 + 4k \vee t \approx -2,5 + 4k \vee$$

$$\vee t \approx -0,8 + 4k \vee t \approx -3,2 + 4k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Atendendo a que $t \in [0, 4]$, os instantes são $t \approx 0,8 \text{ s}$,
 $t \approx 1,5 \text{ s}$, $t \approx 2,5 \text{ s}$ e $t \approx 3,2 \text{ s}$.

72.5 Dado que $\forall t \in [0, 4], -6 \leq 5 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) - 1 \leq 4$,
então o ponto estará à distância máxima da origem quando
 $x(t) = -6$.

$$x(t) = -6 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}t + \pi = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 4k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Atendendo a que $t \in [0, 4]$, os instantes são
 $t = 0 \text{ s}$ e $t = 4 \text{ s}$.

73.1 $x(0) = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 = 2\sqrt{2} + 3$ e $x(1,75) = 4 \times 1 + 3 = 7$.

73.2 O período e a frequência do movimento do oscilador

harmónico definido por $y(t) = 4 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right), t \in [0, 6]$,

são, respetivamente, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s}$ e $f = \frac{1}{T} = 0,5 \text{ Hz}$.

O gráfico da função x resulta de uma translação de vetor de coordenadas $(0, 3)$ do gráfico da função y , pelo que mantém a amplitude, período, frequência, pulsação e fase $f = 0,5 \text{ Hz}$.

73.3 Uma vez que o período do movimento é 2 s , no instante
 $t = 4 \text{ s}$ o ponto P encontra-se na mesma posição que
estava no instante $t = 2 \text{ s}$, relativamente à origem, pelo
que a velocidade média do ponto neste intervalo é
 0 unidades/s .

73.4 $x'(t) = -4\pi \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$, donde

$$x'(2) = -4\pi \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -4\pi \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\pi\sqrt{2} \text{ unidades/s}$$

73.5 $\frac{x'(5) - x'(4)}{5 - 4} = -4\pi \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 4\pi \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\pi\sqrt{2} \text{ unidades/s}^2$

73.6 $x''(t) = -4\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

$$x''(t) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} + k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Atendendo a que $t \in [0, 6]$, os instantes são

$$t = \frac{1}{4} \text{ s}, t = \frac{5}{4} \text{ s}, t = \frac{9}{4} \text{ s}, t = \frac{13}{4} \text{ s}, t = \frac{17}{4} \text{ s} \text{ e } t = \frac{21}{4} \text{ s}.$$

Apesar de bastar estudar a segunda derivada em $[0, 2]$ (uma vez que o período é 2 s) apresenta-se na tabela seguinte o estudo completo da segunda derivada:

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{4}$		$\frac{9}{4}$		$\frac{13}{4}$		$\frac{17}{4}$		$\frac{21}{4}$		6
$x''(t)$	–	–	0	+	0	–	0	+	0	–	0	+	0	–	–
$x'(t)$	$-2\pi\sqrt{2}$ Máx. rel.	$\searrow$	-4π Mín. abs.	$\nearrow$	4π Máx. abs.	$\searrow$	-4π Mín. abs.	$\nearrow$	4π Máx. abs.	$\searrow$	-4π Mín. abs.	$\nearrow$	4π Máx. abs.	$\searrow$	$-2\pi\sqrt{2}$ Máx. rel.

A velocidade é máxima em $t = \frac{5}{4}$ s, $t = \frac{13}{4}$ s e $t = \frac{21}{4}$ s.

A velocidade é mínima em $t = \frac{1}{4}$ s, $t = \frac{9}{4}$ s e $t = \frac{17}{4}$ s.

Em todos estes instantes a aceleração do ponto é 0 unidades/s².

74.1 $D'(t) = -2\pi \sin(\pi t + \pi)$

$$D'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(\pi t + \pi) = 0 \Leftrightarrow \pi t + \pi = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -1 + k, k \in \mathbb{Z}$$

Atendendo a que $t \in [0, 4]$, os instantes são $t = 0$ s, $t = 1$ s, $t = 2$ s e $t = 3$ s.

t	0		1		2		3		4
$D'(t)$	0	+	0	–	0	+	0	–	ND
Monotonia e extremos de D	1 Mín. abs.	$\nearrow$	5 Máx. abs.	$\searrow$	1 Mín. abs.	$\nearrow$	5 Máx. abs.	$\searrow$	ND

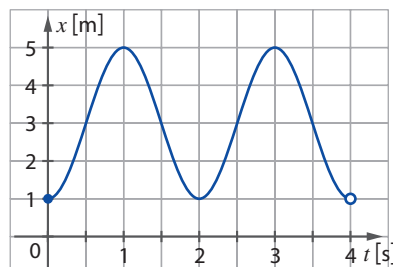
A distância máxima do corpo C ao solo é 5 m e a distância mínima do corpo C ao solo é 1 m.

74.2 Uma vez que o gráfico da função D resulta de uma translação de vetor de coordenadas $(0, 3)$ do gráfico da função $x(t) = 2 \cos(\pi t + \pi)$, $t \in [0, 4]$, mantém-se a amplitude, o período, a frequência, a pulsação e a fase.

Assim, a amplitude é $A = 2$ m.

74.3 $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ s e $f = \frac{1}{T} = 0,5$ Hz.

74.4



A fase é $\varphi = \pi \text{ rad} \in [0, 2\pi[$.

74.5 $D(t) = 4 \Leftrightarrow \cos(\pi t + \pi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \pi t + \pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \pi t + \pi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{2}{3} + 2k \vee t = -\frac{4}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}.$$

Atendendo a que $t \in [0, 4]$, os instantes são

$$t = \frac{2}{3} \text{ s}, t = \frac{4}{3} \text{ s}, t = \frac{8}{3} \text{ s} \text{ e } t = \frac{10}{3} \text{ s}.$$

PÁG. 124

75.1 $A = 3$ e $T = 2$ s, pelo que $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$.

A expressão da função representada é da forma

$$f(t) = 3 \cos(\pi t + \varphi)$$

A fase é $\varphi \in [0, 2\pi[$ tal que

$$3 \cos(0\pi + \varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

75.2 Com os dados da alínea anterior, tem-se $g(t) = 3 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$.

75.3 $g(t) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{2} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \vee$$

$$\vee \pi t + \frac{\pi}{2} = -\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \right] + 2k \vee$$

$$\vee t = -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \right] + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Admitindo que } t \in [0, 6] \text{ e } \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

os instantes são:

$$t = \frac{3}{2} + \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \text{ s}, t = \frac{7}{2} + \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \text{ s},$$

$$t = \frac{11}{2} + \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \text{ s}, t = \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \text{ s},$$

$$t = \frac{7}{2} - \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \text{ s} \text{ e } t = \frac{11}{2} - \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \text{ s}.$$

76.1 $x(0) = 4 \text{ cm}$ e $x'(0) = 87 \text{ cm/s}$

De $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ s}$ e $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi \text{ rad/s}$ obtém-se

$x(t) = A \cos(4\pi t + \varphi)$, donde $x'(t) = -4\pi A \sin(4\pi t + \varphi)$.

$$\begin{cases} x(0) = 4 \\ x'(0) = 87 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cos \varphi = 4 \\ -4\pi A \sin \varphi = 87 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{\cos \varphi} \\ \tan \varphi = -\frac{87}{16\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \approx 8 \text{ cm} \\ \varphi \approx 5,24 \text{ rad} \end{cases}$$

Assim, $x(t) \approx 8 \cos(4\pi t + 5,24)$.

76.2 $x'(t) \approx -32\pi \sin(4\pi t + 5,24)$, donde $x'(0,5) \approx 87 \text{ cm/s}$.

76.3 $x''(t) \approx -128\pi^2 \cos(4\pi t + 5,24)$

$$x''(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(4\pi t + 5,24) \approx 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\pi t + 5,24 \approx \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \xRightarrow{t \geq 0}$$

$$\Rightarrow t \approx -0,29 + \frac{k}{4}, k \in \mathbb{Z} \wedge k \geq 2$$

Como $T = 0,5 \text{ s}$, basta estudar x'' nos primeiros $0,5 \text{ s}$:

Os zeros de x'' nos primeiros $0,5 \text{ s}$ são

$$t \approx -0,29 + \frac{2}{4} = 0,21 \text{ s e } t \approx -0,29 + \frac{3}{4} = 0,46 \text{ s}.$$

t	0		$\approx 0,21$		$\approx 0,46$		0,5
$x''(t)$	-	-	0	+	0	-	-
$x'(t)$	≈ 87 Máx. rel.	$\searrow$	≈ -101 Mín. abs.	$\nearrow$	≈ 101 Máx. abs.	$\searrow$	≈ 87

Donde, o valor máximo da velocidade é $\approx 101 \text{ cm/s}$.

$$x'''(t) \approx 512\pi^3 \sin(4\pi t + 5,24)$$

$$x'''(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(4\pi t + 5,24) \approx 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\pi t + 5,24 \approx k\pi, k \in \mathbb{Z} \xRightarrow{t \geq 0}$$

$$\Rightarrow t \approx -0,42 + \frac{k}{4}, k \in \mathbb{Z} \wedge k \geq 2$$

Novamente, como $T = 0,5 \text{ s}$, basta estudar x''' nos primeiros $0,5 \text{ s}$:

Os zeros de x''' nos primeiros $0,5 \text{ s}$ são

$$t \approx -0,42 + \frac{2}{4} = 0,08 \text{ s e } t \approx -0,42 + \frac{3}{4} = 0,33 \text{ s}.$$

t	0		$\approx 0,08$		$\approx 0,33$		0,5
$x'''(t)$	-	-	0	+	0	-	-
$x''(t)$	≈ -636 Máx. rel.	$\searrow$	≈ -1262 Mín. abs.	$\nearrow$	≈ 1262 Máx. abs.	$\searrow$	≈ -636

Donde, o valor máximo da aceleração é $\approx 1262 \text{ cm/s}^2$.

76.4 $m = 5 \text{ g} = 0,005 \text{ kg}$ (S.I.)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow k = m \times \omega^2 = 0,005 \times (4\pi)^2 = 0,08\pi^2 \text{ N/cm}$$

77.1 $x(t) = \sin(\pi t) - \sqrt{3}\cos(\pi t) = 2 \left[\frac{1}{2}\sin(\pi t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\pi t) \right] =$

$$= 2 \left[\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\sin(\pi t) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cos(\pi t) \right]$$

$$= 2 \cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{6} + 2\pi\right) = 2 \cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$$

$x(t)$ é da forma $A \cos(\omega t + \varphi)$, com $A > 0$, $\omega > 0$ e

$$\varphi \in [0, 2\pi[.$$

77.2 $A = 2$, $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s}$, $f = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ Hz}$ e $\varphi = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$.

77.3 $x'(t) = -2\pi \sin\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$

$$|x'(t)| = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi t + \frac{7\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = -\frac{7}{6} + k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } t \geq 0 \Rightarrow t = -\frac{7}{6} + k, k \in \mathbb{Z} \wedge k \geq 2, \text{ ou seja,}$$

$$t = \frac{5}{6} + k, k \in \mathbb{Z}_0^+$$

77.4 $x''(t) = -2\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right) = -\pi^2 \underbrace{2 \cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)}_{x(t)} =$
 $= -\pi^2 x(t)$, donde $k = \pi^2$.

PÁG. 125

78.1 $x'(t) = \frac{\sin(kt)}{2k} + k \cos(kt) + \frac{t \cos(kt)}{2}$

$$x''(t) = \cos(kt) - k^2 \sin(kt) - \frac{tk \sin(kt)}{2}$$

$$\text{Assim, } x''(t) + k^2 x(t) = \cos(kt) - k^2 \sin(kt) - \frac{tk \sin(kt)}{2} +$$

$$+ k^2 \left(1 + \frac{t}{2k}\right) \sin(kt) = \cos(kt)$$

78.2 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{t}{2k}\right) \sin(kt)}{t} \stackrel{kt=y}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{y}{2k}\right) \sin(y)}{\frac{y}{k}} =$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\left(k + \frac{y}{2}\right) \sin(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(k + \frac{y}{2}\right) \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = k$$

79.1 $y'(t) = \left[x(t) - \frac{2}{5} \right]' = x'(t)$

$$y''(t) = [x'(t)]' = x''(t) =$$

$$= -5x(t) + 2 =$$

$$y(t) = x(t) - \frac{2}{5} \Leftrightarrow x(t) = y(t) + \frac{2}{5}$$

$$= -5 \left[y(t) + \frac{2}{5} \right] + 2 = -5y(t)$$

79.2 Quando $x(t) = 0$, tem-se $y(t) = -\frac{2}{5}$, logo, deve tomar-se o ponto de abscissa $-\frac{2}{5}$.

79.3 $y'(t) = -a\sqrt{5}\sin(\sqrt{5}t) + b\sqrt{5}\cos(\sqrt{5}t) =$
 $= \sqrt{5} [-a\sin(\sqrt{5}t) + b\cos(\sqrt{5}t)]$

$$y''(t) = \sqrt{5} [-a\sqrt{5}\cos(\sqrt{5}t) - b\sqrt{5}\sin(\sqrt{5}t)] =$$

 $= -5 [a\cos(\sqrt{5}t) + b\sin(\sqrt{5}t)] = -5y(t)$

79.4 $y(0) = 4 \Leftrightarrow a = 4$

$$y'(10) = -10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5} [-4\sin(10\sqrt{5}) + b\cos(10\sqrt{5})] = -10$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{-2\sqrt{5} + 4\sin(10\sqrt{5})}{\cos(10\sqrt{5})} (\approx 6,3)$$

79.5

a. $y(t) = 4\cos(\sqrt{5}t) + 6,35\sin(\sqrt{5}t)$

$$y'(t) = -4\sqrt{5}\sin(\sqrt{5}t) + 6,35\sqrt{5}\cos(\sqrt{5}t)$$

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\sqrt{5}\sin(\sqrt{5}t) + 6,35\sqrt{5}\cos(\sqrt{5}t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan(\sqrt{5}t) = \frac{6,35}{4} = 1,5875$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}t = \arctan(1,5875) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}t \approx 1,009 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t \approx 0,451 + 1,405k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Admitindo } t \geq 0 \text{ e } \arctan(1,5875) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\text{os instantes são } t \approx 0,451 + 1,405k, k \in \mathbb{Z}_0^+.$$

$$\text{Como } y(t) = A\cos(\sqrt{5}t + \varphi) \text{ então } \omega = \sqrt{5} \text{ rad/s}$$

$$\text{donde o período é } T = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \approx 2,81 \text{ s.}$$

$$\text{Assim, basta estudar a função em } [0; 2,81]:$$

t	0		$\approx 0,451$		$\approx 1,856$		$\approx 2,81$
$y'(t)$	+	+	0	-	0	+	+
Monotonia e extremos de y	4	Mín. rel.	$\nearrow$	$\approx 7,505$	Máx. abs.	$\searrow$	$\approx -7,505$
					Mín. abs.	$\nearrow$	4

Logo, o contradomínio da função y é $\approx [-7,505; 7,505]$, pelo que a amplitude do movimento é $A \approx 7,5$.

b. Por um lado, $y(t) \approx 7,5\cos(\sqrt{5}t + \varphi)$

$$\text{Por outro lado, } y(0) = 4 \Leftrightarrow 7,5\cos\varphi \approx 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\varphi \approx 0,5(3) \Leftrightarrow \varphi \approx \arccos[0,5(3)] \Leftrightarrow$$

$$\varphi \in [0, 2\pi[$$

$$\Leftrightarrow \varphi \approx 1,008 \text{ rad} \vee \varphi \approx 2\pi - 1,008 = 5,275 \text{ rad}$$

$$\text{Como } 7,5\cos(\sqrt{5}t + \varphi) =$$

$$= 7,5\cos\varphi\cos(\sqrt{5}t) - 7,5\sin\varphi\sin(\sqrt{5}t), \text{ tem-se:}$$

$$\begin{cases} 4 = a = 7,5\cos\varphi \\ 6,35 = b = -7,5\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = a = 7,5\cos\varphi \\ 6,35 = b = -7,5\sin\varphi \end{cases}$$

Este sistema só é verificado pelo segundo valor de φ , ou seja, $\varphi \approx 5,275 \text{ rad}$.

TESTE – PÁG. 127

1. $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ e $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$$\text{Como a reta tangente passa em } \left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$$

$$\text{e tem declive } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \text{ então verifica-se que}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2} \times \frac{\pi}{4} + b \Leftrightarrow b = \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = \frac{\pi}{4}$ é $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

Opção correta: B.

2. $g'(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' \cos\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{2}{x^2} \cos\left(\frac{2}{x}\right)$

Opção correta: A.

3. $f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin^2(2x) = 2 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 2x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee$$

$$\vee 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 2x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi \vee x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \vee$$

$$\vee x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Atendendo a que $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, as soluções da referida equação são $x = \frac{\pi}{8} \vee x = \frac{3\pi}{8} \vee x = -\frac{\pi}{8} \vee x = -\frac{3\pi}{8}$.

Opção correta: D.

4.1 $d(0) = 4 \cos(0) + 9 = 13$ cm

Opção correta: C.

4.2 Dado que o período mínimo positivo do cosseno é 2π tem-se:

$$d(t+T) = d(t) \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}(t+T) = \frac{\pi}{6}t + 2\pi \Leftrightarrow T = 12 \text{ s},$$

pelo que, $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{12}$ Hz.

Opção correta: A.

5.1 $\cos \beta = \frac{\overline{AC}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2 \cos \beta$ e $\sin \beta = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2 \sin \beta$

$$A(\beta) = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{2 \cos \beta \times 2 \sin \beta}{2} = 2 \cos \beta \times \sin \beta = \sin(2\beta)$$

5.2 $A'(\beta) = 2 \cos(2\beta)$

$$A'(\beta) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\beta) = 0 \Leftrightarrow 2\beta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Atendendo a que $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a solução de

$$A'(\beta) = 0 \text{ é } \beta = \frac{\pi}{4}.$$

β	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$A'(\beta)$	ND	+	0	-	ND
$A(\beta)$	ND	$\nearrow$	1 Máx. abs.	$\searrow$	ND

A área máxima do triângulo é 1 cm² para $\beta = \frac{\pi}{4}$.

5.3 $P(\beta) = \overline{AC} + \overline{BC} + \overline{AB} = 2 \cos \beta + 2 \sin \beta + 2 = 2(\cos \beta + \sin \beta + 1)$

5.4 $P'(\beta) = 2(-\sin \beta + \cos \beta)$

$$P'(\beta) = 0 \Leftrightarrow -\sin \beta + \cos \beta = 0 \Leftrightarrow \tan \beta = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Atendendo a que $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a solução de $P'(\beta) = 0$ é $\beta = \frac{\pi}{4}$.

β	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$P'(\beta)$	ND	+	0	-	ND
$P(\beta)$	ND	$\nearrow$	$2(\sqrt{2}+1)$ Máx. abs.	$\searrow$	ND

O perímetro máximo do triângulo é $2\sqrt{2} + 2$ cm para $\beta = \frac{\pi}{4}$.

6.1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{-x} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$,

donde a função f não é contínua em $x = 0$.

6.2 Em $x > 0$, $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$, donde

$$f'(\pi) = -\frac{1}{\pi}.$$

Como $f(\pi) = 0$, e dado que a reta tangente passa no ponto de coordenadas $(\pi, f(\pi)) = (\pi, 0)$ e tem declive

$$f'(\pi) = -\frac{1}{\pi}, \text{ então verifica-se que } 0 = -\frac{1}{\pi} \times \pi + b \Leftrightarrow b = 1.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = \pi$ é $y = -\frac{1}{\pi}x + 1$.

7.1 $f'(x) = -3 \sin x \sin(2x) + 6 \cos x \cos(2x)$

7.2 $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{2 \sin x \cos x} = \frac{2}{\sin(2x)}$

$$f'(x) = -\frac{4 \cos(2x)}{\sin^2(2x)}$$

$$\text{Como } -\frac{4 \cos(2x)}{\sin^2(2x)} = -\frac{4(2\cos^2 x - 1)}{4\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - 2\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^4 x} - 2 \times \frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 - 2(\tan^2 x + 1)}{\tan^2 x}$$

$$= \frac{(1 + \tan^2 x)^2 - 2\tan^2 x - 2}{\tan^2 x} = \frac{\tan^4 x - 1}{\tan^2 x},$$

$$\text{então } f'(x) = \frac{\tan^4 x - 1}{\tan^2 x}.$$

$$\begin{aligned}
 7.3 \quad f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{3-\cos x}} \times \\
 &\times \frac{\sin x [3 - \sin(5x)] - (3 - \cos x)[-5 \cos(5x)]}{[3 - \sin(5x)]^2} = \\
 &= \sqrt{3 - \sin(5x)} \times \\
 &\times \frac{3 \sin x - \sin x \sin(5x) + 15 \cos(5x) - 5 \cos x \cos(5x)}{2\sqrt{3 - \cos x} [3 - \sin(5x)]^2}
 \end{aligned}$$

$$8.1 \quad d_1(0) = 35 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}
 8.2 \quad -1 &\leq \cos(5\pi t) \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{Z}_0^+ \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 20 \leq \underbrace{30 + 10 \cos(5\pi t)}_{d_2(t)} \leq 40, \quad \forall t \in \mathbb{Z}_0^+
 \end{aligned}$$

donde, o ponto B situar-se-á, em relação ao solo, a uma altura de 20 cm a 40 cm.

$$\begin{aligned}
 8.3 \quad \text{O período do movimento do ponto } A &\text{ é } \frac{2\pi}{10\pi} = \frac{1}{5} \text{ s, pelo que} \\
 \text{a sua frequência é } &\frac{1}{\frac{1}{5} \text{ s}} = 5 \text{ voltas/s.} \\
 \text{O período do movimento do ponto } B &\text{ é } \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5} \text{ s, pelo que} \\
 \text{a sua frequência é } &\frac{1}{\frac{2}{5} \text{ s}} = 2,5 \text{ voltas/s.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8.4 \quad -1 &\leq \cos(10\pi t) \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{Z}_0^+ \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 25 \leq \underbrace{30 + 5 \cos(10\pi t)}_{d_1(t)} \leq 35, \quad \forall t \in \mathbb{Z}_0^+
 \end{aligned}$$

donde, o ponto A situar-se-á, em relação ao solo, a uma altura entre 25 cm e 35 cm.

Assim, como o ponto A está situado na periferia da roda dentada, pelas distâncias máxima e mínima do ponto A ao solo, conclui-se que a roda dentada tem um diâmetro de 10 cm, sendo que o diâmetro da roda traseira é $2 \times 25 + 10 = 60$ cm.

$$8.5 \quad \text{Em cada segundo, o ponto } A \text{ dá 5 voltas enquanto o ponto } B \text{ dá 2,5 voltas.}$$

Assim, se o ponto B der 100 voltas, o ponto A dará 200 voltas.

Como o diâmetro da roda traseira é 6 vezes maior do que o diâmetro da roda dentada (onde está o ponto A), o perímetro da roda traseira também é 6 vezes maior do que o perímetro da roda dentada.

O ponto A percorre, nas 200 voltas, $200 \times 10\pi = 2000\pi$ cm, pelo que a roda traseira percorre $6 \times 2000\pi = 12000\pi$ cm $\approx 376,99$ m.

$$\begin{aligned}
 8.6 \quad d_2(t) = 35 &\Leftrightarrow 30 + 10 \cos(5\pi t) = 35 \Leftrightarrow \cos(5\pi t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 5\pi t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}_0^+ \vee 5\pi t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}^+ \\
 &\Leftrightarrow t = \frac{1}{15} + \frac{2}{5}k, \quad k \in \mathbb{Z}_0^+ \vee t = -\frac{1}{15} + \frac{2}{5}k, \quad k \in \mathbb{Z}^+
 \end{aligned}$$

Assim, o primeiro instante para o qual o ponto B está a 35 cm do solo é $t = \frac{1}{15}$ s.

$$8.7 \quad t \approx 0,12 \text{ s e } t \approx 0,28 \text{ s.}$$

Dado que, quer d_1 , quer d_2 são funções contínuas em $\mathbb{R}_0^+$, também o é a função $f(t) = d_1(t) - d_2(t)$.

Por outro lado, $f(0) = d_1(0) - d_2(0) < 0$ e

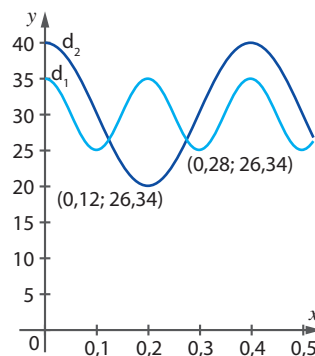
$f(0,2) = d_1(0,2) - d_2(0,2) > 0$, donde,

pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]0, 0,2[: f(c) = 0 \Leftrightarrow d_1(c) = d_2(c)$

Da mesma forma, como $f(0,4) = d_1(0,4) - d_2(0,4) < 0$,

pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$\exists k \in]0,2; 0,4[: f(k) = 0 \Leftrightarrow d_1(k) = d_2(k)$.



Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas

DIAGNÓSTICO – PÁG. 132

1.1 $4^{\frac{1}{2}}$

1.2 $2^{\frac{1}{3}}$

1.3 $5^{\frac{7}{4}}$

1.4 $6^{\frac{5}{6}}$

2.1 $\sqrt{72} - 8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{72} - \sqrt{8} = 3\sqrt{8} - \sqrt{8} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$

2.2 $3^{\frac{4}{3}} + 9^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^4} + \sqrt[3]{9^2} = 3\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{(3^2)^2} = 3\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^4} = 3\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{3}$

2.3 $3^{\frac{4}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{4}{3}} \times (3^2)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}} = 3^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{3^8} = 3^2 \sqrt[3]{3^2} = 9\sqrt[3]{9}$

2.4 $\sqrt{72} : 16^{\frac{1}{4}} = \frac{3\sqrt{8}}{(2^4)^{\frac{1}{4}}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

2.5 $\frac{\sqrt[3]{2} \times 4^{\frac{2}{3}} \times \sqrt{2 \times \sqrt[3]{2}}}{\sqrt[6]{2^4} \times \sqrt[3]{\frac{1}{4}}} = \frac{2^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{\frac{2}{3}} \times (2 \times 2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{4}{6}} \times (2^{-2})^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} - \frac{4}{6} + \frac{2}{3}} = 2^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{2^7} = 2^2 \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

3.1 $a^{\frac{1}{5}} \times b^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a \times b} = (a \times b)^{\frac{1}{5}}$

3.2 $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[5]{a^3} \times \sqrt{a} = \sqrt[5 \times 2]{a^{3 \times 2}} \times \sqrt[2 \times 5]{a^{1 \times 5}} = \sqrt[10]{a^6 \times a^5} = \sqrt[10]{a^{11}} = a^{\frac{11}{10}}$

3.3 $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{(a^{\frac{2}{3}})^4} = \sqrt[5]{a^{\frac{8}{3}}} = \sqrt[3 \times 5]{a^8} = a^{\frac{8}{15}}$

3.4 $a^{\frac{1}{3}} : b^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = (a : b)^{\frac{1}{3}}$

3.5 $a^{\frac{3}{5}} : a^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[5 \times 2]{a^{3 \times 2}}}{\sqrt[10]{a^5}} = \frac{\sqrt[10]{a^6}}{\sqrt[10]{a^5}} = \sqrt[10]{\frac{a^6}{a^5}} = \sqrt[10]{a} = a^{\frac{1}{10}}$

4. $\frac{(a^{n^2})^3 \times a^{\frac{19}{3}}}{a^{9n}} = \sqrt[3]{a} \Leftrightarrow a^{3n^2 - 9n + 6} \times \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a} \Leftrightarrow \Leftrightarrow a^{3n^2 - 9n + 6} = 1 \Leftrightarrow 3n^2 - 9n + 6 = 0 \Leftrightarrow n = 1 \vee n = 2$
 $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

5.1 $a_{n+1} - a_n = \frac{5}{\sqrt{n+1} + 1} - \frac{5}{\sqrt{n} + 1} = 5 \left(\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+1} - 1}{\sqrt{n+1} + 1} \right) = 5 \left(\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + 1} \right) = 5 \left[\frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+1} + 1)(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} \right] = -\frac{5}{(\sqrt{n+1} + 1)(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} < 0, \forall n \in \mathbb{N},$

donde (a_n) é decrescente.

5.2 $\frac{5}{\sqrt{n+1}} < \frac{5}{11} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{11} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} > 11 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sqrt{n} > 10 \Leftrightarrow n > 100,$
 donde, o primeiro termo inferior a $\frac{5}{11}$ é o 101.º termo.

5.3 $a_n \in V_{0,05}(0) \Leftrightarrow -0,05 < \frac{5}{\sqrt{n+1}} - 0 < 0,05 \Leftrightarrow \Leftrightarrow -0,05 < \frac{5}{\sqrt{n+1}} < 0,05;$

Como $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, basta ver quais os termos que

verificam a desigualdade $\frac{5}{\sqrt{n+1}} < 0,05$.

$\frac{5}{\sqrt{n+1}} < 0,05 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} > 100 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sqrt{n} > 99 \Leftrightarrow n > 99^2 = 9801,$
 $n > 0$

donde o termo de menor ordem que verifica a condição é o

$a_{9802} = \frac{5}{\sqrt{9802+1}}.$

6.1 $v_{n+1} - v_n = \frac{3n+5}{n+2} - \frac{3n+2}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N},$
 donde (v_n) é crescente.

6.2 Dado que (v_n) é crescente, então

$v_n \geq v_1 = \frac{5}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$

Por outro lado, $v_n = \frac{3n+2}{n+1} = 3 - \frac{1}{n+1}$ e, dado que

$\frac{1}{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então $v_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}.$

6.3 É uma sucessão convergente, pois é monótona e limitada.

6.4 $\lim v_n = \lim \left(3 - \frac{1}{n+1} \right) = 3$

7.1 $u_1 = 1, u_2 = \frac{5}{2}, u_3 = \frac{5}{3}, u_4 = \frac{9}{4} \text{ e } u_5 = \frac{9}{5}$

7.2 $1 \leq 2 - \underbrace{\frac{1}{n}}_{n \text{ ímpar}} \leq 2 + \frac{(-1)^n}{n} \leq 2 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{n \text{ par}} \leq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \forall n \in \mathbb{N},$

donde a sucessão é limitada e são majorantes os elementos do conjunto $\left[\frac{5}{2}, +\infty \right[$ e minorantes os elementos do conjunto $] -\infty, 1]$, por exemplo, $\frac{5}{2}$ e 1, respetivamente.

7.3 $u_n \in V_{0,03}(2) \Leftrightarrow -0,03 < 2 + \frac{(-1)^n}{n} - 2 < 0,03 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -0,03 < \frac{(-1)^n}{n} < 0,03$

Quando n é par, $\frac{1}{n} < 0,03 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{3}{100} \Leftrightarrow n > \frac{100}{3};$

quando n é ímpar, $-\frac{1}{n} > -0,03 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{3}{100} \Leftrightarrow n > \frac{100}{3};$

Assim, o termo de menor ordem que verifica a condição é

$u_{34} = \frac{69}{34}.$

7.4 Na alínea 7.2, concluiu-se que $\forall n \in \mathbb{N}, 2 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{1}{n}.$

Como $\lim \left(2 - \frac{1}{n} \right) = \lim \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2$, pelo teorema das sucessões enquadadas tem-se $\lim u_n = 2.$

8.1 $a_1 = 10, a_2 = 34, a_3 = 106, a_4 = 322 \text{ e } a_5 = 970;$

$b_1 = 12, b_2 = 36, b_3 = 108, b_4 = 324 \text{ e } b_5 = 972.$

8.2 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} + 2}{a_n + 2} = \frac{4 + 3a_n + 2}{a_n + 2} = \frac{3(a_n + 2)}{a_n + 2} = 3,$

donde (b_n) é uma progressão geométrica de razão $r = 3.$

8.3 $b_n = b_1 \times r^{n-1} = 12 \times 3^{n-1} = 4 \times 3 \times 3^{n-1} = 4 \times 3^n$

8.4 $S_n = b_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 12 \times \frac{1-3^n}{-2} = 6 \times (3^n - 1)$

9.1 $\lim \left(5 - \frac{1}{n+1} \right) = 5$

9.2 $\lim \left(4 + \frac{1}{n} \right)^2 = 4^2 = 16$

9.3 $\lim \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{-2} = \lim \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} \right)^{-2} = \left(\frac{1}{2} \right)^{-2} = 4$

9.4 $\lim \left(\frac{3n}{2n+2} \right)^{-2} = \lim \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2n+2} \right)^{-2} = \left(\frac{3}{2} \right)^{-2} = \frac{4}{9}$

10. Seja (A_n) a sucessão que representa a área de cada triângulo equilátero.

Dado que o comprimento do lado de cada novo triângulo é

$\frac{1}{2}$ do comprimento do lado do triângulo anterior, a área de cada novo triângulo será $\frac{1}{4}$ da área do triângulo anterior, ou

seja, tem-se a igualdade $\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N},$ o que mostra

que (A_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{4}.$

Como a área do triângulo inicial, de lado l , é

$\frac{l \times l \sin 60^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$, então $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \times \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{4^n} l^2.$

Por fim, a soma das áreas de todos os triângulos é dada por

$\lim S_n = \lim \left[\frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \right] = \frac{\sqrt{3}}{3} l^2.$

1. JUROS COMPOSTOS E NÚMERO DE NEPER

PÁG. 137

1.1 $5000 \text{ €} \times 0,05 \times 12 = 3000 \text{ €}$

1.2 $5000 \text{ €} \times 0,05 \times 24 = 6000 \text{ €}$

2. $3000 \text{ €} \times 0,02 \times 4 = 240 \text{ €}$

3. A duplicação do montante acontece quando o juro acumulado iguala o montante aplicado.

Seja n o número de anos até o juro acumulado igualar o montante aplicado.

Com uma taxa de 6% ao ano tem-se

$200 \text{ €} \times 0,06 \times n = 200 \text{ €} \Leftrightarrow n = \frac{1}{0,06} = 16,6 \text{ anos};$

com uma taxa de 10% ao ano tem-se

$200 \text{ €} \times 0,1 \times n = 200 \text{ €} \Leftrightarrow n = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ anos}.$

Assim, com a taxa de 6% são precisos 17 anos e com a taxa de 10% são precisos 10 anos.

4. $2000 \times (1 + 0,04)^4 \approx 2339,72 \text{ €}$

5. Seja C o montante inicial investido

$C(1 + 0,01)^4 = 260,15 \Leftrightarrow C = \frac{260,15}{1,01^4} \approx 250 \text{ €}$

6. Ambos os bancos têm taxa de juro anual de 12%, mas com diferentes momentos de capitalização.

O rendimento anual no banco X é

$$5000 \times (1 + 0,06)^2 = 5618 \text{ €};$$

o rendimento anual no banco Y é

$$5000 \times (1 + 0,04)^3 = 5624,32 \text{ €}.$$

Assim, o banco Y é mais favorável ao investidor.

7. Seja Q a quantia a investir.

O investimento A gera um retorno final de

$$Q(1 + 0,02)^{12} \approx 1,27Q, \text{ ou seja, há um ganho de } \approx 27\%;$$

o investimento B gera um retorno final de

$$Q(1 + 0,12)^2 \approx 1,25Q, \text{ ou seja, há um ganho de } \approx 25\%;$$

o investimento C gera um retorno final de

$$Q(1 + 0,24)^1 = 1,24Q, \text{ ou seja, há um ganho de } 24\%.$$

Assim, o investimento aconselhado é o investimento A.

8. Seja t a taxa de juro mensal (em percentagem).

$$5000 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^7 = 5862,72 \Leftrightarrow 1 + \frac{t}{100} = \sqrt[7]{\frac{5862,72}{5000}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 100 \left(\sqrt[7]{\frac{5862,72}{5000}} - 1 \right) \approx 2,3\%$$

PÁG. 140

9. Seja t a taxa de juro anual (em percentagem).

$$3000 \times \frac{\frac{t}{100}}{12} \times 9 = 112,50 \Leftrightarrow t = \frac{100 \times 12 \times 112,50}{3000 \times 9} = 5\%$$

Opção correta: C.

10. $12600 \times (1 + 0,05)^4 - 12600 \approx 2715,38 \text{ €}$

Opção correta: C.

11. $100 \times (1 + 0,1)^3 = 133,10 \text{ €}$

Opção correta: B.

12. Seja C o capital inicial investido.

$$C(1 + 0,055)^5 = 13\,069,60 \Leftrightarrow C = \frac{13\,069,60}{1,055^5} \approx 10\,000 \text{ €}$$

Opção correta: D.

13. Seja Q a quantia a investir.

Desde o 25.º aniversário da pessoa até ao seu 40.º aniversário passarão 15 anos, ou seja, 30 semestres, pelo que se tem a igualdade

$$Q(1 + 0,025)^{15 \times 2} = 50\,000 \Leftrightarrow Q = \frac{50\,000}{1,025^{30}} \approx 23\,837,14 \text{ €}.$$

O arredondamento final está feito por excesso, pois se o montante inicial fosse 23 837,13 €, ao fim de 15 anos obter-se-iam 49 999,99 €, montante inferior a 50 000 € (e com 23 837,14 €, obtém-se 50 000,01 €).

Opção correta: A.

- 14.1 Seja (C_n) a sucessão de capitais acumulados no fim de cada ano.

$$C_n = 400 \times (1 + 0,034)^n = 400 \times 1,034^n.$$

$\frac{C_{n+1}}{C_n} = 1,034$, pelo que (C_n) é uma progressão geométrica de razão $r = 1,034$.

Opção correta: D.

- 14.2 Na alínea anterior concluiu-se que

$$C_n = 400 \times (1 + 0,034)^n = 400 \times \left(1 + \frac{3,4}{100}\right)^n.$$

Opção correta: B.

PÁG. 141

15. Como o rendimento foi 6250 € e o capital final foi 156 250 €, conclui-se que o capital inicial aplicado foi $156\,250 - 6250 = 150\,000 \text{ €}$.

Sendo n o número de meses que durou a aplicação,

$$150\,000 \times \frac{0,05}{12} \times n = 6250 \Leftrightarrow n = \frac{6250 \times 12}{150\,000 \times 0,05} = 10 \text{ meses}.$$

16. O 1.º pagamento pagará juros correspondentes a 6 meses de atraso e o 2.º pagamento pagará juros correspondentes a 3 meses de atraso.

Assim, o 1.º pagamento terá o valor de

$$20\,000 + 20\,000 \times \frac{0,20}{12} \times 6 = 22\,000 \text{ €} \text{ e o 2.º pagamento terá}$$

$$\text{o valor de } 40\,000 + 40\,000 \times \frac{0,20}{12} \times 3 = 42\,000 \text{ €}.$$

17. $7500 \times (1 + 0,04)^4 - 7500 \approx 1273,94 \text{ €}$

18. Seja C o capital aplicado.

$$C(1 + 0,045)^6 = 65\,113 \Leftrightarrow C = \frac{65\,113}{1,045^6} = 50\,000 \text{ €}$$

19. Sendo C o capital aplicado, tem-se

$$C(1 + 0,05)^3 = 11\,576,25 \Leftrightarrow C = \frac{11\,576,25}{1,05^3} = 10\,000 \text{ €},$$

donde o juro obtido foi $11\,576,25 - 10\,000 = 1576,25 \text{ €}$.

20. Se o pagamento fosse feito à taxa convencionada, o devedor

$$\text{deveria ter pago } 25\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^{5 \times 2} \approx 32\,002,11 \text{ €}$$

findos os 10 semestres do empréstimo.

Seja t a taxa de juro anual (em percentagem).

$$25\,000 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^{10} = 33\,455,64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 200 \times \left(\sqrt[10]{\frac{33\,455,64}{25\,000}} - 1\right) \approx 5,91\%$$

Verifica-se assim que o devedor pagou o empréstimo à taxa anual aproximada de 5,91 %.

21.1 $5800 \times (1 + 0,021) = 5921,80 \text{ €}$

21.2 $5800 \times (1 + 0,021)^5 \approx 6435,12 \text{ €}$

- 21.3 Seja (C_n) a sucessão de capitais acumulados no fim de cada ano.

$$C_n = 5800 \times (1 + 0,021)^n = 5800 \times 1,021^n, \text{ e}$$

$\frac{C_{n+1}}{C_n} = 1,021$, pelo que (C_n) é uma progressão geométrica de razão $r = 1,021$.

- 21.4 Na alínea anterior concluiu-se que

$$C_n = 5800 \times (1 + 0,021)^n = 5800 \times \left(1 + \frac{2,1}{100}\right)^n.$$

21.5 $C_{21} = 5800 \times 1,021^{21} \approx 8973,64 \text{ €}$ e

$C_{22} = 5800 \times 1,021^{22} \approx 9162,09 \text{ €}$, donde só após o 22.º ano de depósito se terá um capital acumulado superior a 9000 €

21.6 $5800 \times \left(1 + \frac{1,9}{100}\right)^4 \approx 5910,99 \text{ €}$,

valor que é inferior ao obtido na alínea 21.1.

2. FUNÇÕES EXPONENCIAIS E FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

PÁG. 145

- 22.1 Seja f a função que representa o número de bactérias a cada instante, t horas após o momento da contagem inicial.

$$\begin{cases} f(t+1) = 3 \times f(t) \\ f(0) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(t+1)}{f(t)} = 3 \\ f(0) = 10 \end{cases}$$

A função f é definida por $f(t) = 10 \times 3^t$ e

$$f(1,5) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 10 \times 3^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{3^3} = 10 \times 3\sqrt{3} = 30\sqrt{3} \approx 51,961,$$

ou seja, passada uma hora e meia haverá 51 bactérias.

22.2 $f(t) = 7290 \Leftrightarrow 10 \times 3^t = 7290 \Leftrightarrow 3^t = 729 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^t = 3^6 \Leftrightarrow t = 6 \text{ horas}$$

funções exponenciais
são injetivas

22.3 $f(t) = 10 \times 3^t$ com $t \geq 0$

23.1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^x = 0$

23.2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 7^x = +\infty$

23.3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$

23.4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x = +\infty$

24.1 $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - 4^{\frac{3}{2}} = 2 - \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2 - 2^3 = -6$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 2 - 4^{\frac{5}{2}} = 2 - \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^5 = 2 - 2^5 = -30$$

24.2 $2 - 4^x = 0 \Leftrightarrow 2 - (2^2)^x = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

24.3 $\forall x \in \mathbb{Q}, 4^x > 0 \Leftrightarrow \underbrace{2 - 4^x}_{f(x)} < 2$ donde $D'_f =]-\infty, 2[$.

Assim, o menor dos majorantes do contradomínio é 2.

25. $g(x) = 0 \Leftrightarrow 4^{\frac{x+1}{2}} = 1 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$,
donde $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

$$g(0) = -1 + 4^{\frac{1}{2}} = -1 + \sqrt{4} = 1, \text{ donde } B(0, 1).$$

Assim, a área do triângulo $[AOB]$ é dada por

$$\frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{2} = \frac{1}{4}$$

PÁG. 147

- 26.1 A função f está representada a verde, a função g a laranja e a função h a rosa.

26.2 $i(x) = 2 + h(x) = 2 + 3^{-x} - 1 = 1 + 3^{-x}$

26.3 $D'_f = D'_g =]0, +\infty[$ e $D'_h =]-1, +\infty[$.

26.4

$$\text{a. } f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3^x = \left(\frac{9}{2}\right)^x \Leftrightarrow \frac{3^x}{\left(\frac{9}{2}\right)^x} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{b. } f(x) > g(x) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x < 0$$

$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ define uma
função decrescente

$$\text{c. } f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ define uma
função decrescente

26.5

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -1$$

$$27.1 \quad 3^{\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{32}} = 3^{\sqrt{2} + \sqrt{32}} = 3^{\sqrt{2} + 4\sqrt{2}} = 3^{5\sqrt{2}}$$

$$27.2 \quad 2^{1+\sqrt{5}} : 2^{\sqrt{5}} = 2^{1+\sqrt{5}-\sqrt{5}} = 2^1$$

$$27.3 \quad (7^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 7^2$$

$$27.4 \quad (\sqrt{5})^3 \times (\sqrt{125})^3 = (\sqrt{5} \times \sqrt{125})^3 = \sqrt{125 \times 5}^3 = 25^3$$

$$27.5 \quad (\sqrt{125})^3 : (\sqrt{5})^3 = \left(\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{125}{5}}\right)^3 = 5^3$$

$$27.6 \quad (\sqrt{16})^{-2} = \left(16^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} = 16^{\frac{1}{2} \times (-2)} = 16^{-1}$$

$$28.1 \quad 2^{x+1} = 2 \times \underbrace{2^x}_6 = 12$$

$$28.2 \quad 4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = 6^2 = 36$$

$$28.3 \quad 16^x = (2^4)^x = (2^x)^4 = 6^4$$

$$28.4 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = (2^{-1})^{x-2} = (2^{x-2})^{-1} = \left(\frac{2^x}{2^2}\right)^{-1} = \left(\frac{6}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$$

$$29.1 \quad 2^{5x} = 128 \Leftrightarrow 2^{5x} = 2^7 \Leftrightarrow 5x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$$

$$29.2 \quad 3^{4x-1} = 81 \Leftrightarrow 3^{4x-1} = 3^4 \Leftrightarrow 4x-1 = 4 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$29.3 \quad 2^{x^2-5x} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow 2^{x^2-5x} = \frac{1}{2^6} \Leftrightarrow 2^{x^2-5x} = 2^{-6} \Leftrightarrow x^2-5x = -6 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

$$29.4 \quad 4^{2x-x^2} = 1 \Leftrightarrow 4^{2x-x^2} = 4^0 \Leftrightarrow 2x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$30.1 \quad 4^{x+1} - 4^x = 24 \Leftrightarrow 4 \times 4^x - 4^x = 24 \Leftrightarrow 3 \times 4^x = 24 \Leftrightarrow 4^x = \frac{24}{3} \Leftrightarrow (2^2)^x = 2^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$30.2 \quad 12 \times 3^x - 3^{2x} = 27 \Leftrightarrow -(3^x)^2 + 12 \times 3^x - 27 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 108}}{-2} \Leftrightarrow 3^x = 3 \vee 3^x = 9$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3^1 \vee 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

$$31.1 \quad 2^{1-x} < (\sqrt{2})^x \Leftrightarrow 2^{1-x} < \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{1-x} < 2^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow 1-x < \frac{x}{2} \Leftrightarrow x > \frac{2}{3},$$

$y = 2^x$ define uma
função crescente

donde o conjunto solução é $\left] \frac{2}{3}, +\infty \right[$.

$$31.2 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < 4^{2-x} \Leftrightarrow (2^{-1})^{x+1} < (2^2)^{2-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{-x-1} < 2^{4-2x} \Leftrightarrow -x-1 < 4-2x \Leftrightarrow x < 5,$$

$y = 2^x$ define uma
função crescente

donde o conjunto solução é $]-\infty, 5[$.

$$31.3 \quad 5^{3-x^2} < 25^x \Leftrightarrow 5^{3-x^2} < (5^2)^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^{3-x^2} < 5^{2x} \Leftrightarrow 3-x^2 < 2x \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 1,$$

$y = 5^x$ define uma
função crescente

donde o conjunto solução é $]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$.

$$31.4 \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{x^2-x} \geq \frac{1}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^{x^2-x} \geq \left(\frac{1}{10}\right)^2 \Leftrightarrow x^2-x \leq 2 \Leftrightarrow$$

$y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ define uma
função decrescente

$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$, donde o conjunto solução é $[-1, 2]$.

PÁG. 151

$$32.1 \lim \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n = e^5$$

$$32.2 \lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n = e^{-2}$$

$$32.3 \lim \left(\frac{n-7}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{-7}{n}\right)^n = e^{-7}$$

$$32.4 \lim \left(\frac{n+\sqrt{2}}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)^n = e^{\sqrt{2}}$$

$$32.5 \lim \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{n}\right)^n = e^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

$$32.6 \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{3}} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{3}} = \left[\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}}$$

$$33. \lim \left[\frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-3n}}{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n+1}} + e^{-n} \right] =$$

$$= \frac{\left[\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right]^{-3}}{\lim \left(1 + \frac{-3}{n}\right)^n \times \lim \left(1 - \frac{3}{n}\right)} + \lim e^{-n} = \frac{(e^2)^{-3}}{e^{-3} \times 1} + 0 = e^{-3}$$

$$34.1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{4x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{2} \times \lim_{y=2x} \underbrace{\frac{e^y - 1}{y}}_1 = \frac{1}{2}$$

$$34.2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} -2 \times \lim_{y=-2x} \underbrace{\frac{e^y - 1}{y}}_1 = -2$$

$$34.3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{3x} = \frac{1}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \right) = \frac{1}{3} \times (1 - 1) = 0$$

$$34.4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y=\sqrt{x}} \frac{e^y - 1}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} = +\infty$$

$$34.5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^4 - e^{x+4}}{3x} = -\frac{e^4}{3} \times \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_1 = -\frac{e^4}{3}$$

$$34.6 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - e^{x-2}}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y=x-2} \underbrace{\frac{e^y - 1}{y}}_1 = -1$$

$$35. \text{ Como } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2} - 1}{x^4} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y=x^2} \frac{e^y - 1}{y^2} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} = +\infty, \text{ não existe } \lim_{x \rightarrow 0} f(x),$$

donde a função não é contínua em $x = 0$.

36.1 O gráfico de f está representado a verde (pois $f(0) = -2 < 0$) e o gráfico de g está representado a laranja (pois $g(0) = e^3 - 3 > 0$).

$$36.2 \forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} > 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{2x} - 3}_{f(x)} > -3 \text{ donde } D'_f =]-3, +\infty[$$

$$36.3 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -3.$$

$$36.4 f'(x) = 2e^{2x}, \text{ pelo que } f'(3) = 2e^6.$$

$$36.5 f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^{2x} = e^{3-x} \Leftrightarrow 2x = 3 - x \Leftrightarrow x = 1, \text{ donde a abcissa do ponto } A \text{ é } 1.$$

36.6 Como $f(0) = -2$, então $B(0, -2)$;
como $g(0) = e^3 - 3$, então $C(0, e^3 - 3)$;
como a abcissa do ponto A é 1, então
 $(1, f(1)) = A(1, e^2 - 3)$.

$$\text{Assim, a área do triângulo } [ABC] \text{ é dada por}$$

$$\frac{\overline{BC} \times \text{abcissa do ponto } A}{2} = \frac{(e^3 - 1) \times 1}{2} = \frac{e^3 - 1}{2}.$$

PÁG. 153

$$37.1 \log_2 16 = \log_2 (2^4) = 4$$

$$37.2 5^{2 \log_5 3} = 5^{\log_5 (3^2)} = 3^2 = 9$$

$$37.3 \log_{\sqrt{5}} (\log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})) = \log_{\sqrt{5}} (1) = 0$$

$$37.4 \log (\log 10) = \log 1 = 0$$

$$37.5 \log_{0,1} 0,01 = \log_{0,1} 0,1^2 = 2$$

$$37.6 \log_9 (3\sqrt{3}) = \log_9 \left(3 \times 3^{\frac{1}{2}}\right) = \log_9 \left(3^{\frac{3}{2}}\right) = \log_9 (3^2)^{\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{3}{4} \times \log_9 9 = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$$

37.7 $e^{\ln 5} + \ln(e^3) = 5 + 3 = 8$

37.8 $\log 100 + \log 1000 = \log(10^2) + \log(10^3) = 2 + 3 = 5$

37.9 $7^{3 + \log_3 27} = 7^3 \times 7^{\log_3(3^3)} = 7^3 \times 7^3 = 7^6$

38.1 $5^{2\log_5(x)} = 5^{\log_5(x^2)} = x^2$

38.2 $\log_5(25 \times 5^{-x}) = \log_5(5^2 \times 5^{-x}) = \log_5(5^{2-x}) = 2 - x$

39.1 $D = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 > 0 \wedge 6 - x > 0\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} : 3 < x < 6\} =]3, 6[$

$$\log(x - 3) = \log(6 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log(x - 3) - \log(6 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{x-3}{6-x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{6-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-9}{6-x} = 0 \Leftrightarrow 2x-9=0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \left(\frac{9}{2} \in D\right)$$

39.2 $D = \{x \in \mathbb{R} : 2x > 0 \wedge x + 2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[$

$$\ln(2x) = \ln(x+2) \Leftrightarrow \ln(2x) - \ln(x+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x}{x+2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \quad (2 \in D)$$

39.3 $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[$

$$e^{\frac{2-\ln(x)}{2}} = e \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{2-\ln(x)}{2}}}{e} = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{2-\ln(x)}{2}-1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{\ln(x)}{2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{2} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (1 \in D)$$

39.4 $D = \{x \in \mathbb{R} : x + 3 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > -3\} =]-3, +\infty[$

$$2 + \ln(x+3) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+3) = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3 = e^{-2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^2} - 3 \quad \left(\frac{1}{e^2} - 3 \in D\right)$$

39.5 $D = \mathbb{R}$

$$2^x \times x^2 - 2^x = 0 \Leftrightarrow 2^x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} 2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2 - 1 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad (-1 \in D) \vee x = 1 \quad (1 \in D)$$

39.6 $D = \mathbb{R}$

$$e^{2x} - e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \vee \underbrace{e^x = -1}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow x = \ln 2 \quad (\ln 2 \in D)$$

40.1 $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 3\} =]3, +\infty[$

40.2 $2 - \log_5(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \log_5(x - 3) = 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x - 3 = 5^2 \Leftrightarrow x = 28 \quad (28 \in D_g)$

40.3 Uma vez que o contradomínio da função definida por $y = \log_5(x - 3)$ é $\mathbb{R}$, então o contradomínio da função g também é $\mathbb{R}$.

$$g(x) = y \Leftrightarrow 2 - \log_5(x - 3) = y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5(x - 3) = 2 - y \Leftrightarrow x - 3 = 5^{2-y} \Leftrightarrow x = 5^{2-y} + 3$$

Assim, o domínio da função g^{-1} é $\mathbb{R}$, o seu contradomínio é $]3, +\infty[$ e $g^{-1}(x) = 5^{2-x} + 3$.

PÁG. 157

41.1 $\log_5 2 + \log_5 3 = \log_5 6$

41.2 $\log_3 4 + \log_3 2 = \log_3 8$

41.3 $2\log_3 9 = \log_3 9^2 = \log_3 81$

41.4 $1 + \log_3 5 = \log_3 3 + \log_3 5 = \log_3 15$

41.5 $\frac{\ln 3}{4} + \ln 3 = \frac{1}{4} \ln 3 + \ln 3 = \ln\left(3^{\frac{1}{4}}\right) + \ln 3 =$
 $= \ln\left(3^{\frac{1}{4}} \times 3\right) = \ln\left(3^{\frac{5}{4}}\right) = \ln\left(3 \sqrt[4]{3}\right)$

42.1 $10^{\log x} + 10^{3 \log x} = 10^{\log x} + 10^{\log(x^3)} = x + x^3$

42.2 $10^{x \log(\log 10)} = 10^{x \log 1} = 10^0 = 1$

42.3 $e^{3 + \ln(x)} - e^{3 - \ln(x)} = e^3 e^{\ln(x)} - \frac{e^3}{e^{\ln(x)}} = e^3 x - \frac{e^3}{x}$

42.4 $\ln((e^{2+x})^x) - \ln(e^{x^2}) = x \ln(e^{2+x}) - x^2 \ln e =$
 $= x(2+x) \ln e - x^2 = 2x + x^2 - x^2 = 2x$

43. $\log_4\left(\frac{64 \times \sqrt[3]{0,25}}{\sqrt{2}}\right) = \log_4 64 + \log_4(\sqrt[3]{0,25}) - \log_4(\sqrt{2}) =$
 $= \log_4(4^3) + \log_4\left(4^{-\frac{1}{3}}\right) - \log_4(\sqrt[4]{4}) = \frac{1}{\sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{4}}}$
 $= 3\log_4 4 - \frac{1}{3}\log_4 4 - \frac{1}{4}\log_4 4 = 3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{29}{12}$

44.1 $D = \{x \in \mathbb{R} : 3x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[$
 $(x^2 - 3) \times \ln(3x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \vee \ln(3x) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3} \vee 3x = 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \quad (\notin D) \vee x = \sqrt{3} \quad (\in D) \vee x = \frac{1}{3} \quad (\in D)$
 O conjunto solução da equação é $\left\{\frac{1}{3}, \sqrt{3}\right\}$.

44.2 $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[$

$$e^{3+2\ln(x)} = (3x-2) \times e^3 \Leftrightarrow e^3 e^{\ln(x^2)} = (3x-2) \times e^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 (\in D) \vee x = 2 (\in D)$$

O conjunto solução da equação é $\{1, 2\}$.

44.3 $D = \{x \in \mathbb{R} : x+3 > 0 \wedge x-3 > 0\} =$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x > 3\} =]3, +\infty[$$

$$\log_5(x+3) - \log_5 7 = -\log_5(x-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5(x+3) - \log_5 7 + \log_5(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5\left(\frac{x^2-9}{7}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-9}{7} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-16}{7} = 0 \Leftrightarrow x^2-16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -4 (\notin D) \vee x = 4 (\in D)$$

O conjunto solução da equação é $\{4\}$.

44.4 $D = \{x \in \mathbb{R} : 3x-4 > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{4}{3}\right\} = \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$

$$\ln(x^2+1) \times \ln(3x-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2+1) = 0 \vee \ln(3x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+1 = 1 \vee 3x-4 = 1 \Leftrightarrow x = 0 (\notin D) \vee x = \frac{5}{3} (\in D)$$

O conjunto solução da equação é $\left\{\frac{5}{3}\right\}$.

44.5 $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2-3 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}\} =$

$$=]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$$

$$\log_2(x^2-3) > 0 \Leftrightarrow$$

$y = \log_2 x$ define uma
função crescente

$$\Leftrightarrow x^2-3 > 1 \Leftrightarrow x^2-4 > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$$

O conjunto solução da inequação é

$$]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[= \mathbb{R} \setminus [-2, 2].$$

44.6 $D = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2x+1} - x > 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{-2x^2-x+1}{2x+1} > 0\right\}$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x^2-x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$2x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-2x^2-x+1}{2x+1}$	$+$	0	$-$	ND	$+$	0	$-$

Donde $D =]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

$$\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{1}{2x+1} - x\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$y = \log_{\frac{1}{e}} x$ define uma
função decrescente

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2-x+1}{2x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-2x^2-3x}{2x+1} \leq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
$-2x^2-3x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$2x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-2x^2-3x}{2x+1}$	$+$	0	$-$	ND	$+$	0	$-$

O conjunto solução da inequação é:

$$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right] \cup [0, +\infty) \cap \left(-\infty, -1\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left[-\frac{3}{2}, -1\right] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

45.1 $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x-1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} =]1, +\infty[$

45.2 $g(x) = 0 \Leftrightarrow \log_b(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2,$

donde o ponto A tem coordenadas $(2, 0)$ e $\overline{AB} = 3;$

$g(5) = \log_b 4$, donde o ponto C tem coordenadas

$(5, \log_b 4)$ e $\overline{AC} = \log_b 4.$

Como a área do retângulo é 6 , então

$$3 \times \log_b 4 = 6 \Leftrightarrow \log_b 4 = 2 \Leftrightarrow b^2 = 4 \xRightarrow{b>1} b = 2.$$

45.3

a. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \log_b(x-1) = -\infty$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_b(x-1) = +\infty$

45.4 Uma vez que o contradomínio da função definida por

$y = \log_2(x-1)$ é $\mathbb{R}$, então o contradomínio da função

g também é $\mathbb{R}$.

$$g(x) = y \Leftrightarrow \log_2(x-1) = y \Leftrightarrow x-1 = 2^y \Leftrightarrow x = 2^y + 1$$

Assim, o domínio da função g^{-1} é $\mathbb{R}$, o seu contradomínio é $]1, +\infty[$, e $g^{-1}(x) = 2^x + 1.$

PÁG. 161

46.1 $f'(x) = 2e^x + 2^x \ln 2$

46.2 $f'(x) = 4x^3 + \frac{1}{x} + 3^x \ln 3$

$$46.3 \quad f'(x) = 2x \times \log_3 x + x^2 \times \frac{1}{\ln 3} \times \frac{1}{x} = x \left(2\log_3 x + \frac{1}{\ln 3} \right) = x \left[\log_3(x^2) + \frac{1}{\ln 3} \right]$$

$$46.4 \quad f'(x) = 3x^2 \times e^x + (x^3 - 1)e^x = e^x(x^3 + 3x^2 - 1)$$

$$46.5 \quad f'(x) = 2x \times \ln x + (x^2 - 3) \times \frac{1}{x} = 2x \times \ln(x) + x - \frac{3}{x}$$

$$46.6 \quad f'(x) = 4x^3 \times \log_3(x^4) + x^4 \times \frac{1}{\ln 3} \times \frac{4x^3}{x^4} = 4x^3 \left[\log_3(x^4) + \frac{1}{\ln 3} \right]$$

$$46.7 \quad f'(x) = 2x \times \log_2(x^2) + x^2 \times \frac{1}{\ln 2} \times \frac{2x}{x^2} + e^x = 2x \left[\log_2(x^2) + \frac{1}{\ln 2} \right] + e^x$$

$$47.1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y=3x} \frac{\ln(y+1)}{y} = 3 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y}}_1 = 3$$

$$47.2 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln(x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y=x-1} \frac{y}{\ln(y+1)} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y}}_1} = 1$$

$$47.3 \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\ln(x+4)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y=x+3} \frac{y}{\ln(y+1)} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y}}_1} = 1$$

$$47.4 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y=x-1} \frac{\ln(y+1)}{y(y+2)} = \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y}}_1 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y+2}}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$48. \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + 1$$

O declive da reta tangente é dado por $f'(2) = \frac{1}{\ln 4} + 1$

e como essa reta passa no ponto de coordenadas

$(2, f(2)) = (2, 3)$, então verifica-se a equação

$$3 = \left(\frac{1}{\ln 4} + 1 \right) \times 2 + b \Leftrightarrow b = 1 - \frac{2}{\ln 4}, \text{ donde a equação}$$

da reta tangente é $y = \left(\frac{1}{\ln 4} + 1 \right)x + 1 - \frac{2}{\ln 4}$.

$$49.1 \quad f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x + 2 \ln(x) - 4}{x - 1} = \lim_{y=x-1} \frac{3y^2 + 7y + 2 \ln(y+1)}{y} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3y^2 + 7y + 2 \ln(y+1)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \underbrace{(3y + 7)}_7 + 2 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y}}_1 = 9$$

49.2 Sim, pois a função é diferenciável em $x = 1$.

49.3 $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = 6x + 1 + \frac{2}{x} > 0$, donde a função f é estritamente crescente no seu domínio.

50.1 $f'(x) = 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$
 $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, donde a função f é crescente em $[1, +\infty[$ e decrescente em $] -1, 1]$.

50.2 Pela alínea anterior, como a função f é diferenciável no seu domínio, tem um extremo relativo em $x = 1$, que é mínimo pois a função f decresce à esquerda de $x = 1$ e cresce à direita de $x = 1$. $f(1) = 1 - \ln 4$.

$$50.3 \quad \text{tmv}_{f, [1, 3]} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3 - 2 \ln 4 - (1 - \ln 4)}{2} = \frac{2 - \ln 4}{2} = 1 - \ln 2 = \ln e - \ln 2 = \ln\left(\frac{e}{2}\right)$$

$$51.1 \quad \lim \left(1 + \frac{1}{5n} \right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}}$$

$$51.2 \quad \lim \left(\frac{n}{n - \frac{3}{2}} \right)^{2n} = \lim \left(\frac{1}{1 - \frac{3}{2n}} \right)^{2n} = \frac{1}{\left[\lim \left(1 - \frac{3}{2n} \right)^n \right]^2} = \frac{1}{e^{-3}} = e^3$$

$$51.3 \quad \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n^2} = \lim \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} = \lim \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^{n^2} = \frac{1}{\lim \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^n} = \frac{1}{e^{\lim n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$51.4 \quad \lim \left(\frac{n-4}{4+n} \right)^n = \lim \left[\frac{n \left(1 - \frac{4}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{4}{n} \right)} \right]^n = \frac{\overbrace{\lim \left(1 - \frac{4}{n} \right)^n}^{e^{-4}}}{\underbrace{\lim \left(1 + \frac{4}{n} \right)^n}_{e^4}} = e^{-8}$$

$$51.5 \quad \lim \left(1 - \frac{2}{n^4} \right)^{n^2} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{n^4}{2}} \right)^{-\frac{n^4}{2}} \right]^{-\frac{2}{n^2}} \stackrel{\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y = e, \text{ com } y = -\frac{n^4}{2}}{=} = e^{\lim \left(-\frac{2}{n^2} \right)} = e^0 = 1$$

$$\begin{aligned}
 51.6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4+3n}{2+n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 \times \frac{\frac{4}{n} + 1}{\frac{2}{n} + 1} \right)^n = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n \left(\frac{4}{n} + 1 \right)}{n \left(\frac{2}{n} + 1 \right)} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \times \underbrace{\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n} \right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n}}_{e^2} = \\
 &= \underbrace{e^{-\frac{2}{3}}}_{>0} \times \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 51.7 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4 + n + 1}{n^4 + 2n^2} \right)^{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^4 + 2n^2}{-2n^2 + n + 1}} \right)^{n^2} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^4 + 2n^2}{-2n^2 + n + 1}} \right)^{\frac{n^2(-2n^2 + n + 1)}{n^4 + 2n^2}} \right] = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 + 2}{-2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} \right)^{\frac{-2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}}} \right] = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 + 2}{-2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} \right)^{\frac{-2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}}} = e^{-2} \\
 &\quad \downarrow \\
 &\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y = e \\
 &\text{com } y = \frac{n^2 + 2}{-2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}
 \end{aligned}$$

PÁG. 166

$$52. \quad 2^{3+3x} = 2^{3(1+x)} = (2^1)^{3(1+x)} = 3^3 = 27$$

Opção correta: D.

$$\begin{aligned}
 53. \quad 3^{\frac{x}{2}+1} &= 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}+1} = 3 \times 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}+1} = 3^{1+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{x}{2} + 1 = 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1
 \end{aligned}$$

Opção correta: C.

$$\begin{aligned}
 54. \quad \ln(a \times b) + \ln(a^2) &= \ln a + \ln b + 2 \ln a = 3 \ln a + \ln b = \\
 &= 3 \times 1,1 + 1,6 = 4,9
 \end{aligned}$$

Opção correta: A.

$$55. \quad 6^x = 6^{\log_5(5) \times \log_5(4)} = [6^{\log_5(5)}]^{\log_5(4)} = 5^{\log_5(4)} = 4$$

Opção correta: B.

$$56. \quad a^{2+\log_a(4)} = a^2 \times \underbrace{a^{\log_a(4)}}_4 = 4a^2$$

Opção correta: C.

57. Dado que o perímetro é o quádruplo do lado, tem-se

$$P = 4 \log(a^2) = \log[(a^2)^4] = \log(a^8) = 8 \log(a).$$

Opção correta: A.

$$\begin{aligned}
 58. \quad \ln(2a) &= -\ln\left(\frac{b}{2}\right) \Leftrightarrow \ln(2a) + \ln\left(\frac{b}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \ln\left(2a \times \frac{b}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln(a \times b) = 0 \Leftrightarrow a \times b = 1
 \end{aligned}$$

Opção correta: D.

$$59. \quad e^{1-4\ln(a)} = \frac{e}{e^{4\ln(a)}} = \frac{e}{e^{\ln(a^4)}} = \frac{e}{a^4}$$

Opção correta: D.

$$\begin{aligned}
 60. \quad \log_{\sqrt{a}}\left(\frac{3}{a^2}\right) &= \frac{\ln\left(\frac{3}{a^2}\right)}{\ln(\sqrt{a})} = \frac{\ln(3) - 2\ln(a)}{\frac{1}{2}\ln(a)} = \frac{\ln(3) - 2\ln(a)}{\frac{1}{2}\ln(a)} = \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{3}{a^2}\right) - 2\ln(a)}{\frac{1}{2}\ln(a)} = \frac{\frac{b}{2}\ln(a) - 2\ln(a)}{\frac{1}{2}\ln(a)} = b - 4
 \end{aligned}$$

Opção correta: A.

$$61.1 \quad f(x) = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3^1 \Leftrightarrow x = 1$$

Opção correta: C.

$$61.2 \quad f'(x) = \ln 3 \times 3^x, \text{ donde } m = f'(1) = 3 \ln 3.$$

Opção correta: D.

$$62. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^4} \stackrel{0}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} = +\infty$$

Opção correta: C.

PÁG. 167

$$63. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Opção correta: C.

$$64. \quad D = \{x \in \mathbb{R} : 5 - 5x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\} =]-\infty, 1[$$

$$\log(5 - 5x) > 1 \Leftrightarrow 5 - 5x > 10 \Leftrightarrow x < -1$$

$y = \log x$ define uma
função crescente

O conjunto solução da inequação é $]-\infty, -1[$.

Usando o acontecimento contrário, o valor da probabilidade

$$\text{pedida é } 1 - \frac{{}^3C_2}{{}^4C_2} = \frac{1}{2}.$$

Opção correta: B.

65. $D = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > -2\} =]-2, +\infty[$
 $\log_{\sqrt{2}}(x+2) = 6 \Leftrightarrow x+2 = \sqrt{2}^6 \Leftrightarrow x+2 = 2^3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 6 \quad (\in D)$

Opção correta: D.

66. A função f é crescente no seu domínio, pois a base é superior a 1, donde $D_f = [f(-1), f(1)] = \left[\frac{1}{6}, 6\right]$.

Opção correta: A.

67. Se o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo em $]0, \pi[$ e se, neste intervalo, a função for duas vezes diferenciável, então a segunda derivada da função em qualquer ponto deste intervalo aberto é negativa.

Para $f(x) = e^{\sin x}$ tem-se:

- $f'(x) = \cos x \times e^{\sin x}$

- $f''(x) = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x) = e^{\sin x}(-\sin^2 x - \sin x + 1)$

e verifica-se facilmente que $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{e}}{4} > 0$, pelo que a função f não pode ser definida pela expressão $f(x) = e^{\sin x}$.

Para $f(x) = \ln(\sin x)$ tem-se:

- $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$
 $\sin x > 0, \forall x \in]0, \pi[$

- $f''(x) = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0, \forall x \in]0, \pi[$,

pelo que a função pode ser definida pela expressão

$f(x) = \ln(\sin x)$, donde a hipótese correta é a B.

Para $f(x) = e^{\cos x}$ tem-se:

- $f'(x) = -\sin x \times e^{\cos x}$

- $f''(x) = e^{\cos x}(\sin^2 x - \cos x) = e^{\cos x}(-\cos^2 x - \cos x + 1)$

e verifica-se facilmente que $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{e}}{4} > 0$, pelo que a função f não pode ser definida pela expressão $f(x) = e^{\cos x}$.

Por fim, a função $f(x) = \ln(\cos x)$ não está definida em $]0, \pi[$, pelo que a função não pode ser definida pela expressão $f(x) = \ln(\cos x)$.

Opção correta: B.

68. $(g \circ f)(x) = \log_3(3^{x+2}) = x + 2$

Opção correta: C.

69. A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pois é obtida à custa de funções contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Em $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} 3 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log_3(k + 3 + x) = \log_3(k + 3)$$

Para que a função seja contínua em $x = 0$ é necessário que

$$\log_3(k + 3) = 3 \Leftrightarrow k + 3 = 3^3 \Leftrightarrow k = 24.$$

Opção correta: C.

70. $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} \stackrel{D_g = \mathbb{R} \text{ e } D_f = \mathbb{R}^+}{=}]-3, 3[$
 $-x^2 + 9 > 0$

Opção correta: C.

71. $f'(x) = \ln 3 \times 3^{x-2}$

Opção correta: A.

72. $f'(x) = \frac{a}{ax} + 1 = \frac{1}{x} + 1$, donde $f'(2) = \frac{3}{2}$

Opção correta: D.

PÁG. 168

73. Uma vez que a função f é crescente (base $a > 1$) e a função g é decrescente (base $\frac{1}{a} < 1$), os gráficos das funções, ambas exponenciais, interseccionam-se exclusivamente num ponto, donde as afirmações I e III são falsas.

$$f'(x) = \ln a \times a^x \text{ e } g'(x) = -\ln a \times a^{-x}, \text{ donde}$$

$$f'(1) - g'(-1) = a \ln(a) + a \ln(a) = 2a \times \ln(a),$$

pelo que a afirmação II é verdadeira.

Opção correta: C.

74. Do triângulo de Pascal obtêm-se as igualdades

$$\begin{cases} \log_a(b^3) + c = b^{\log_b 15 + \log_b 3} \\ c - 84 \log_a\left(\frac{1}{a}\right) = d \end{cases}$$

Por outro lado:

$$\log_a(b^3) = 3 \log_a b = 3 \log_a(a^3) = 3 \times 3 = 9$$

$$b^{\log_b 15 + \log_b 3} = b^{\log_b 45} = 45$$

$$\log_a\left(\frac{1}{a}\right) = \log_a(a^{-1}) = -1$$

$$\text{Voltando ao sistema, tem-se } \begin{cases} 9 + c = 45 \\ c + 84 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 36 \\ d = 120 \end{cases}$$

Opção correta: B.

$$\begin{aligned} 75.1 \quad & \log_3\left(\frac{1}{9}\right) + \log_3(\sqrt{729}) = \\ & = \log_3(3^{-2}) + \log_3\left[(3^6)^{\frac{1}{2}}\right] = -2 + 3 = 1 \end{aligned}$$

$$75.2 \quad \ln(e^{-2} \times e^6) - \log_3 81 = \ln(e^4) - \log_3(3^4) = 4 - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} 75.3 \quad & 2^{\log_2 3} + \log_5 25 - 2\log_3 3 = \\ & = 3 + \log_5(5^2) - 2 \times 1 = 3 + 2 - 2 = 3 \end{aligned}$$

$$76.1 \quad 5^{5x} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 5^{5x} = 5^{-2} \Leftrightarrow 5x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} 76.2 \quad & 10^{x^2} = 100^2 \Leftrightarrow 10^{x^2} = (10^2)^2 \Leftrightarrow 10^{x^2} = 10^4 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 76.3 \quad & 8^{2x+1} = 16 \times 2^{2x} \Leftrightarrow (2^3)^{2x+1} = 2^4 \times 2^{2x} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2^{6x+3} = 2^{4+2x} \Leftrightarrow 6x+3 = 4+2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 76.4 \quad & x^2 e^x + 3x e^x = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x}_{\substack{\downarrow \\ \forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0}} x(x+3) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 76.5 \quad & e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$76.6 \quad e^{2x + \log(x)} = 0 \text{ é uma equação impossível, pois a exponencial é uma função positiva.}$$

$$\begin{aligned} 76.7 \quad & e^{x^2} - 4x^2 \times e^x = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x}_{\substack{\downarrow \\ \forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0}} (e^2 - 4x^2) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow e^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{e}{2} \vee x = \frac{e}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 76.8 \quad & D = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\} =]-1, +\infty[\\ & (e^x + 4e^{-x} - 5) \times \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow e^x + 4e^{-x} - 5 = 0 \vee \ln(x+1) = 0 \\ & \Leftrightarrow e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 \vee x+1 = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{5 \pm 3}{2} \vee x = 0 \\ & \Leftrightarrow x = \ln 4 (\in D) \vee x = \ln 1 = 0 (\in D) \end{aligned}$$

$$76.9 \quad D = \{x \in \mathbb{R} : x+3 > 0 \wedge x-1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} =]1, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \ln(x+3) &= \ln(x-1) + \ln 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln(x+3) - \ln(x-1) - \ln 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \ln\left[\frac{x+3}{2(x-1)}\right] &= 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{2(x-1)} = 1 \\ \Leftrightarrow \frac{5-x}{2(x-1)} &= 0 \Leftrightarrow 5-x = 0 \Leftrightarrow x = 5 (\in D) \end{aligned}$$

$$76.10 \quad D = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\} =]-1, +\infty[$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+1 < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ define uma
função decrescente

O conjunto solução da inequação é $] -1, 0[$.

$$76.11 \quad D = \{x \in \mathbb{R} : 3x+1 > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{1}{3}\right\} =]-\frac{1}{3}, +\infty[$$

$$\log_{\frac{1}{e}}(3x+1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+1 < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

$y = \log_{\frac{1}{e}} x$ define uma
função decrescente

O conjunto solução da inequação é $] -\frac{1}{3}, 0[$.

$$\begin{aligned} 76.12 \quad & D = \left\{x \in \mathbb{R} : 2x > 0 \wedge \frac{2-x}{x} > 0\right\} = \\ & = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2\} =]0, 2[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}}(2x) &< 2 - \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2-x}{x}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(2x) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2-x}{x}\right) &< 2 \\ \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left[\frac{2x(2-x)}{x}\right] &< 2 \\ \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(4-2x) < 2 \quad \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ define uma
função decrescente

$$\Leftrightarrow 4-2x > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x < \frac{15}{8}$$

O conjunto solução da inequação é $]0, \frac{15}{8}[$.

$$\begin{aligned} 77.1 \quad & 2^{2x} - 12 \times 2^x + 32 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 12 \times 2^x + 32 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^x &= \frac{12 \pm 4}{2} \Leftrightarrow 2^x = 8 = 2^3 \vee 2^x = 4 = 2^2 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \vee x = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 77.2 \quad & 9^{x-1} + 3^{x-1} = 6 \Leftrightarrow (3^{x-1})^2 + 3^{x-1} - 6 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3^{x-1} &= \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \underbrace{3^{x-1} = -3}_{\text{equação impossível}} \vee 3^{x-1} = 2 \\ \Leftrightarrow x-1 &= \log_3 2 \Leftrightarrow x = 1 + \log_3 2 = \log_3 3 + \log_3 2 = \log_3 6 \end{aligned}$$

$$78.1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{y = -\frac{3}{x} \atop y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{-3y} =$$

$$= \left[\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^{-3} = e^{-3}$$

$$78.2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x} = \left[\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^5 = e^5$$

$$78.3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{2}{7x}\right)^x \right]^{-2} = \lim_{y = -\frac{2x}{7} \atop y \rightarrow -\infty} \left[\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^{\frac{4}{7}} = e^{\frac{4}{7}}$$

$$78.4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} -2 \times \lim_{y = -2x \atop y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = -2$$

$$78.5 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+x} - 1}{x^3 - 2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{x^2+x} - 1}{x^2 + x} \times \frac{x^2 + x}{x^3 - 2x} \right] =$$

$$= \lim_{y = x^2 + x} \frac{e^y - 1}{y} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2-2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$78.6 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{e^{x^3+3} - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{x^3} - 1}{x^3} \times \frac{x^3}{e^{x^3+3} - 1} \right] =$$

$$= \lim_{y = x^3} \frac{e^y - 1}{y} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{e^{x^3+3} - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \times 0 = 0$$

$$78.7 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)}{3x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{2}{3} \times \lim_{y = 2x \atop y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = \frac{2}{3}$$

$$78.8 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)^2}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times \ln(x+1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$78.9 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\ln(x-2)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\ln(x-2)} \times \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) =$$

$$= \frac{6}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y}} = 6$$

$$78.10 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^x}{x} \times \frac{x}{\sin x} \right) =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = -1 \times \frac{1}{1} = -1$$

PÁG. 169

$$79.1 \quad D = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 > 0 \wedge x^2 + 1 > 0\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x > 2\} =]2, +\infty[$$

$$\log_2(y) = 1 + 3 \log_2(x-2) - \log_2(x^2+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(y) = 1 + \log_2 \left[\frac{(x-2)^3}{x^2+1} \right]$$

$$\Leftrightarrow \log_2(y) = \log_2 2 + \log_2 \left[\frac{(x-2)^3}{x^2+1} \right]$$

$$\Leftrightarrow \log_2(y) = \log_2 \left[\frac{2(x-2)^3}{x^2+1} \right] \quad \Leftrightarrow$$

$y = \log_2 x$ define uma
função injetiva

$$\Leftrightarrow y = \frac{2(x-2)^3}{x^2+1}, \forall x \in]2, +\infty[$$

$$79.2 \quad D = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > -2\} =]-2, +\infty[$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(y) = -2 + \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{2}}(x+2) - \log_{\frac{1}{2}}(3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(y) = -2 \times \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) + \log_{\frac{1}{2}}(x+2)^{\frac{2}{3}} - \log_{\frac{1}{2}}(3)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(y) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \log_{\frac{1}{2}}\left[\frac{(x+2)^{\frac{2}{3}}}{3}\right]$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(y) = \log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_{\frac{1}{2}}\left[\frac{(x+2)^{\frac{2}{3}}}{3}\right]$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(y) = \log_{\frac{1}{2}}\left[\frac{4(x+2)^{\frac{2}{3}}}{3}\right] \quad \Leftrightarrow$$

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ define uma
função injetiva

$$\Leftrightarrow y = \frac{4(x+2)^{\frac{2}{3}}}{3} = \frac{4\sqrt[3]{(x+2)^2}}{3}, \forall x \in]-2, +\infty[$$

$$80. \quad f(a+1) - f(a) = 2^{a+1} - 2^a = 2^a(2-1) = 2^a = f(a)$$

$$81. \quad \begin{cases} f(0) = 900 \\ f(10) = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 900 \\ 900 \times 3^{10b} = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 900 \\ 3^{10b} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 900 \\ 10b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 900 \\ b = -\frac{1}{10} \end{cases}$$

$$f(c) = 100 \Leftrightarrow 900 \times 3^{-\frac{c}{10}} = 100 \Leftrightarrow 3^{-\frac{c}{10}} = \frac{1}{9} = 3^{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{c}{10} = -2 \Leftrightarrow c = 20$$

82.1

- a. $f(0) = e^0 = 1$ donde o ponto C tem coordenadas $(0, 1)$
e $f(1) = e^2$ donde o ponto A tem coordenadas $(0, e^2)$,
pelo que $\overline{AC} = e^2 - 1$.

A área do triângulo $[ABC]$ é dada por

$$\frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} = \frac{1 \times (e^2 - 1)}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

donde o ponto D tem coordenadas $(\frac{1}{2}, 0)$ e

$g(4) = \ln 8$, donde o ponto E tem coordenadas $(4, \ln 8)$,

pelo que $\overline{EF} = \ln 8$.

A área do triângulo $[DEF]$ é dada por

$$\frac{\overline{DF} \times \overline{EF}}{2} = \frac{(4 - \frac{1}{2}) \times \ln 8}{2} = \frac{7}{4} \ln 8.$$

b. $m = \frac{e^2 - 0}{1 - \frac{1}{2}} = 2e^2$

c. $g'(x) = \frac{1}{x}$, donde $g'(4) = \frac{1}{4}$.

Por outro lado, a reta tangente passa no ponto

$E(4, \ln 8)$, pelo que se verifica a igualdade

$$\ln 8 = \frac{1}{4} \times 4 + b \Leftrightarrow b = \ln 8 - \frac{1}{4}.$$

A equação da reta tangente é $y = \frac{1}{4}x + \ln 8 - \frac{1}{4}$.

82.2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$

- 83.1 $f(0) = -1 + e$, donde o gráfico da função f interseja o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, -1 + e)$.

83.2 $f(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + e^{1-2x} = 0 \Leftrightarrow e^{1-2x} = 1 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 3e^{3x} = 0 \Leftrightarrow e^{3x} = 1 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

83.3 $\forall x \in \mathbb{R}, e^{1-2x} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{-1 + e^{1-2x}}_{f(x)} > -1$

$$D'_f =]-1, +\infty[$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{3x} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -3e^{3x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{3 - 3e^{3x}}_{g(x)} < 3$$

$$D'_g =]-\infty, 3[$$

- 83.4 Uma vez que o contradomínio de g é $]-\infty, 3[$, então o domínio da função g^{-1} é $]-\infty, 3[$ e o contradomínio da função g^{-1} é $\mathbb{R} = D_g$.

$$g(x) = y \Leftrightarrow 3 - 3e^{3x} = y \Leftrightarrow e^{3x} = \frac{3-y}{3} \Leftrightarrow$$

 $\Leftrightarrow 3x = \ln\left(\frac{3-y}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{3-y}{3}\right)$

Assim, o domínio da função g^{-1} é $]-\infty, 3[$, o seu

contradomínio é $\mathbb{R}$ e $g^{-1}(x) = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{3-x}{3}\right)$.

84.1 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\} =]-2, 2[$

Dado que a função f é contínua,

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \log_2 x = -\infty, y = \log_2 x \text{ define}$$

uma função crescente e $\forall x \in]-2, 2[, 0 < 4 - x^2 \leq 4$,

conclui-se que $D'_f =]-\infty, \log_2 4] =]-\infty, 2]$.

$$\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

- 84.2 A função f não admite inversa pois não é injetiva (logo, não é bijetiva); por exemplo, $f(-1) = f(1) = \log_2 3$, ou seja, há objetos diferentes que têm a mesma imagem.

84.3 $f'(x) = \frac{-2x}{\ln 2(4 - x^2)}$

Como $\forall x \in]-2, 2[, 0 < 4 - x^2 \leq 4$ conclui-se que a

função f' é positiva em $]-2, 0[$, negativa em $]0, 2[$ e é zero em $x = 0$, pelo que a função f cresce em $]-2, 0[$ e decresce em $]0, 2[$, além de que tem um máximo absoluto $f(0) = 2$.

84.4 $\lim_{x \rightarrow 0} \log_2(4 - x^2) = \log_2 4 = 2$, como existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

a função f é contínua em $x = 0$.

85.1 $D_f = \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 3^{-1+2x} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{-2 + 3^{-1+2x}}_{f(x)} > -2$$

$$D'_f =]-2, +\infty[$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\} =]-1, +\infty[$$

Dado que a função definida por $y = \log_3 x$ tem por

contradomínio $\mathbb{R}$, a função g também tem por

contradomínio $\mathbb{R}$, uma vez que resulta graficamente da

função $y = \log_3 x$ através da composição de uma

translação horizontal com uma translação vertical.

85.2 $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2 + 3^{-1+2x} = 0 \Leftrightarrow 3^{-1+2x} = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -1 + 2x = \log_3 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_3 2$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \log_3(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \log_3(x + 1) = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 3^{-2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9} (\in D_g)$$

85.3 Uma vez que o contradomínio de f é $]-2, +\infty[$, então o domínio da função f^{-1} é $]-2, +\infty[$ e o contradomínio da função f^{-1} é $\mathbb{R} = D_f$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow -2 + 3^{-1+2x} = y \Leftrightarrow 3^{-1+2x} = y + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 + 2x = \log_3(y + 2) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_3(y + 2)$$

Assim, o domínio da função f^{-1} é $]-2, +\infty[$,

o seu contradomínio é $\mathbb{R}$ e $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_3(x + 2)$.

Uma vez que o contradomínio de g é $\mathbb{R}$, então o domínio

da função g^{-1} é $\mathbb{R}$, e o contradomínio da função g^{-1}

é $]-1, +\infty[= D_g$.

$$g(x) = y \Leftrightarrow 2 + \log_3(x + 1) = y \Leftrightarrow \log_3(x + 1) = y - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 3^{y-2} \Leftrightarrow x = 3^{y-2} - 1$$

Assim, o domínio da função g^{-1} é $\mathbb{R}$, o seu contradomínio

é $]-1, +\infty[$ e $g^{-1}(x) = 3^{x-2} - 1$.

85.4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2 + 3^{-1+2x}) = -2$

PÁG. 170

86.1 $(f \circ g)(x) = 2(1 + 3e^{2x})$

86.2 $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} \stackrel{D_g = \mathbb{R} \text{ e } D_f =]1, +\infty[}{=}]1, +\infty[\subset D_f = \mathbb{R}$

$= \mathbb{R}$

Uma vez que $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^{2x} > 0 \Leftrightarrow \underbrace{2(1 + 3e^{2x})}_{(f \circ g)(x)} > 2, \text{ então } D'_{f \circ g} =]2, +\infty[.$$

86.3 Na alínea anterior concluiu-se que $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

Por outro lado, $D_h = \mathbb{R}$, uma vez que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$.

$$D_{(f \circ g) + h} = D_{f \circ g} \cap D_h = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

$$((f \circ g) + h)(x) = 6e^{2x} + 3 - \frac{2}{e^{2x}}$$

86.4 $(f \circ g)(x) = y \Leftrightarrow 2(1 + 3e^{2x}) = y \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{6}(y - 2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln \left[\frac{1}{6}(y - 2) \right] \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1}{6}(y - 2) \right]$$

Assim, o domínio da função $(f \circ g)^{-1}$ é $]2, +\infty[$, o seu

contradomínio é $\mathbb{R}$ e $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x - 2}{6} \right)$.

$$h(x) = y \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{e^{2x}} = y \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{2}{1 - y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln \left(\frac{2}{1 - y} \right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{1 - y} \right)$$

Assim, o domínio da função h^{-1} é $]-\infty, 1[$, o seu

contradomínio é $\mathbb{R}$ e $h^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{1 - x} \right)$.

86.5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{e^{2x}} \right) = 1 - 0 = 1$

87.1 $D_f = \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{1-x} > 0 \Leftrightarrow \underbrace{-2e^{1-x} + 2}_{f(x)} < 2$$

$$D'_f =]-\infty, 2[$$

87.2

a. $f(x) = f(1) \Leftrightarrow -2e^{1-x} + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{1-x} = 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

b. $f(x) > 0 \Leftrightarrow -2e^{1-x} + 2 > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{1-x} < 1 = e^0 \Leftrightarrow$$

$\downarrow$
 $y = e^x$ define uma
função crescente

$$\Leftrightarrow 1 - x < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

87.3 $f'(x) = 2e^{1-x}$

87.4 $\forall x \in \mathbb{R}, e^{1-x} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, donde a função f é crescente em todo o seu domínio.

87.5 O declive dessa reta é $f'(3) = \frac{2}{e^2}$ e a reta passa no ponto

de coordenadas $(3, f(3)) = \left(3, 2 - \frac{2}{e^2} \right)$, pelo que se

verifica a igualdade $2 - \frac{2}{e^2} = \frac{2}{e^2} \times 3 + b \Leftrightarrow b = 2 - \frac{8}{e^2}$.

A equação da reta tangente é $y = \frac{2}{e^2}x + 2 - \frac{8}{e^2}$.

87.6 f é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva.

É injetiva, pois a cada imagem corresponde um e um só objeto.

É sobrejetiva pois o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

87.7 $y = -2e^{1-x} + 2 \Leftrightarrow e^{1-x} = \frac{2-y}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 - x = \ln \left(\frac{2-y}{2} \right) \Leftrightarrow x = 1 - \ln \left(\frac{2-y}{2} \right)$$

$$f^{-1}(x) = 1 - \ln \left(\frac{2-x}{2} \right)$$

87.8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2e^{1-x} + 2) = 2$, pelo que o gráfico da função f admite uma assíntota, que é horizontal, de equação $y = 2$, quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \mathbf{88.1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(2x)}{3x} &\stackrel{\infty}{=} \frac{1}{\ln 10} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x)}{3x} \underset{y=2x}{=} \\ &= \frac{2}{3 \ln 10} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{88.2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\sqrt{x+1})}{-2x} &\stackrel{\infty}{=} -\frac{1}{2 \ln 10} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x+1})}{x} = \\ &= -\frac{1}{2 \ln 10} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)^{\frac{1}{2}}}{x} = -\frac{1}{4 \ln 10} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \\ &\underset{y=x+1}{=} -\frac{1}{4 \ln 10} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_0 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y-1}}_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{88.3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x^3} \stackrel{\infty}{=} 27 \times \lim_{y=3x} \frac{e^y}{y^3} = +\infty$$

$$\mathbf{88.4} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+4}}{-5x+7} \stackrel{\infty}{=} \lim_{y=x+4} \frac{e^y}{y} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{27-5y} = -\infty$$

$$\begin{aligned} \mathbf{88.5} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt[3]{x^2+1}}}{2x-4} &\stackrel{\infty}{=} \lim_{y=\sqrt[3]{x^2+1}} \frac{e^y}{2y-4} \underset{x=\pm\sqrt{y^3-1}}{=} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty \Rightarrow x=\sqrt{y^3-1}}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^y}{y} \times \frac{y}{2\sqrt{y^3-1}-4} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^y}{y} \times \frac{1}{2\sqrt{y-\frac{1}{y^2}}-\frac{4}{y}} \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^y}{y} \times \frac{1}{\sqrt{y} \left(2\sqrt{1-\frac{1}{y^3}}-\frac{4}{y\sqrt{y}} \right)} \right] \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^y}{y^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{y^3}}-\frac{4}{y^{\frac{3}{2}}}} \right) \\ &= \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^{\frac{3}{2}}}}_{+\infty} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{y^3}}-\frac{4}{y^{\frac{3}{2}}}}}_{\frac{1}{2}} = +\infty \end{aligned}$$

$$\mathbf{88.6} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{\sqrt[3]{x^2+1}}}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{\sqrt[3]{x^2+1}}}{\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x-4) = 0^-} = -\infty$$

$$\begin{aligned} \mathbf{89.1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+3 \ln(x)}{x-1} &\stackrel{\infty}{=} \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-1}}_0 + 3 \times \underbrace{\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \right]}_0 \times \underbrace{\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} \right]}_1 = 0 \end{aligned}$$

Não existe $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2+3 \ln(x)}{x-1}$ pois

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2+3 \ln(x)}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2+3 \ln(x)}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{89.2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [3x - 5 \ln(x)] &\stackrel{\infty}{=} \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x)}_{+\infty} \times \left[1 - \underbrace{\frac{5}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}}_0 \right] = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{89.3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^4+1} &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^4} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^4+1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x^4+1} &= \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{89.4} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{4x}-1}{x^2} \times \ln(2x) \right] &\stackrel{\ln(2x)=y \Leftrightarrow x=\frac{e^y}{2}}{=} \\ &= 4 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{2e^y}-1}{e^{2y}} \times y \right) \\ &= 4 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\left(e^{2e^y-2y} - \frac{1}{e^{2y}} \right) \times y \right] \\ &= 4 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(e^{2e^y-2y} \times y - \frac{y}{e^{2y}} \right) \\ &= 4 \times \underbrace{\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2e^y-2y} \times y) \right]}_{+\infty} - \underbrace{\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^{2y}} \right]}_{z=2y} = +\infty \\ &\quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^{2y}} = \frac{1}{2} \times \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z}{e^z} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^{4x}-1}{x^2} \times \ln(2x) \right] &= \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{4x}-1}{x^2}}_{y=4x} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(2x)}_{-\infty} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{4x}-1}{x^2} &= 16 \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y-1}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 89.5 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x)} = \lim_{y = \frac{1}{x}} e^{\frac{\ln(y)}{y}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{\frac{-\ln y}{y}} = e^{-\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$89.6 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$

89.7 Uma vez que a potência de expoente real só está definida para bases positivas, forçosamente a base $\frac{x^2}{x-1}$ tem de ser positiva, pelo que $x > 1$. Então:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2}{x-1} \right)^{\frac{1}{x}} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln \left(\frac{x^2}{x-1} \right)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln \left(\frac{x^2}{x-1} \right)}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x^2) - \ln(x-1)}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2 \ln(x)}{x} - \frac{\ln(x-1)}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x}} = e^{0 - 0} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y+1} = 0 \times 1 = 0$

$$89.8 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\ln(x+1)} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^x(e^x - 1)}{x} \times \frac{x}{\ln(x+1)} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^x \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - e^x}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x(e^x - 1)}{x} \times \frac{x}{\ln(x+1)} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) \times$$

$$\times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y-1} = 0^+$$

$$89.9 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{2x} - 9}{x^2 - 4x + 3} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9(3^{2x-2} - 1)}{(x-1)(x-3)} =$$

$$= 9 \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{2(x-1)} - 1}{(x-1)(x-3)} = 9 \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\ln[3^{2(x-1)}]} - 1}{(x-1)(x-3)}$$

$$= 9 \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2(x-1)\ln 3} - 1}{(x-1)(x-3)} \stackrel{0}{=} \lim_{y=2(x-1)\ln 3}$$

$$= 9 \times 4 \ln^2 3 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y(y-4 \ln 3)}$$

$$= 9 \times 4 \ln^2 3 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y-4 \ln 3}$$

$$= 9 \times 4 \ln^2 3 \times \frac{1}{-4 \ln 3} = -\frac{9 \times 4 \ln^2 3}{4 \ln 3} = -9 \ln 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{2x} - 9}{x^2 - 4x + 3} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9(3^{2x-2} - 1)}{(x-1)(x-3)} =$$

$$= 9 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{2(x-1)} - 1}{(x-1)(x-3)} = 9 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln[3^{2(x-1)}]} - 1}{(x-1)(x-3)}$$

$$= 9 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2(x-1)\ln 3} - 1}{(x-1)(x-3)} \stackrel{0}{=} \lim_{y=2(x-1)\ln 3}$$

$$= 9 \times 4 \ln^2 3 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y - 1}{y(y-4 \ln 3)}$$

$$= 9 \times 4 \ln^2 3 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y - 1}{y^2} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y-4 \ln 3}$$

$$= 9 \times 4 \ln^2 3 \times \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^2} \right) - \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^2} \right) = +\infty$$

PÁG. 171

$$90. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^k e^x) = \lim_{y=-x} \lim_{y \rightarrow +\infty} [(-y)^k e^{-y}] =$$

$$= (-1)^k \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^k}{e^y} = (-1)^k \times 0 = 0$$

91. As funções definidas por $y=2^{-x}$ e $y=2^x$ têm domínio $\mathbb{R}$, pelo que $D_f=\mathbb{R}$.

Seja y a imagem do objeto x pela função f ,

ou seja, $2^{-x}+2^x=y$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2^{-x} > 0 \wedge 2^x > 0 \Rightarrow y > 0$$

$$2^{-x}+2^x=y \Leftrightarrow \frac{1}{2^x}+2^x=y \Leftrightarrow (2^x)^2-y \times 2^x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x=\frac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2}$$

e, como $2^{-x}+2^x=y$ tem solução, então

$$y^2-4 \geq 0 \Rightarrow_{y>0} y \geq 2, \text{ donde } D'_f=[2, +\infty[.$$

$$f'(x)=-\ln 2 \times 2^{-x}+\ln 2 \times 2^x=-\ln 2(2^{-x}-2^x)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\ln 2(2^{-x}-2^x)=0 \Leftrightarrow 2^{-x}-2^x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{-x}=2^x \Leftrightarrow -x=x \Leftrightarrow x=0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
Monotonia e extremos de f	$\searrow$	2 Mín. abs.	$\nearrow$

$$f''(x)=-\ln 2(-\ln 2 \times 2^{-x}-\ln 2 \times 2^x)=\ln^2 2(2^{-x}+2^x)=\ln^2 2 \times f(x)$$

Uma vez que $D'_f=[2, +\infty[$ e $\ln^2 2 > 0$, conclui-se que $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Assim, a função tem um mínimo absoluto, 2, em $x=0$.

É decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$, tendo o seu gráfico a concavidade voltada para cima.

92. $g'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$ e $g''(x)=\frac{2-\ln x}{x \ln^3 x}$

$$g''(x)=\Leftrightarrow \frac{2-\ln x}{x \ln^3 x}=0 \Leftrightarrow 2-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=e^2 \quad (\in D_g)$$

x	0		1		e^2	$+\infty$
$g''(x)$	ND	-	ND	+	0	-
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g	ND	$\cap$	ND	$\cup$	PI	$\cap$

$$h'(x)=\frac{1-x}{e^{x-1}} \text{ e } h''(x)=\frac{x-2}{e^{x-1}}$$

$$h''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{e^{x-1}}=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \quad (\in D_h)$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h''(x)$	-	0	+
Concavidade e pontos de inflexão do gráfico de h	$\cap$	PI	$\cup$

Assim, o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]0, 1[$ e em $[e^2, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]1, e^2]$; o gráfico de h tem ponto de inflexão no ponto de abscissa e^2 .

Por outro lado, o gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 2]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[2, +\infty[$; o gráfico de h tem ponto de inflexão no ponto de abscissa 2.

- 93.1 $D=\mathbb{R}$

$$f'(x)=xe^x(x+2)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x \cdot e^x(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2$$

$\downarrow$
 $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
Monotonia e extremos de f	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$ Máx. rel.	$\searrow$	0 Mín. rel.	$\nearrow$

f é crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[0, +\infty[$;

f é decrescente em $[-2, 0]$; tem um máximo relativo, $4e^{-2}$, em $x=-2$, e um mínimo relativo, 0, em $x=0$.

$$f''(x)=e^x(x^2+4x+2)$$

$$f''(x)=\Leftrightarrow e^x(x^2+4x+2)=0 \Leftrightarrow x^2+4x+2=0 \Leftrightarrow$$

$\downarrow$
 $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

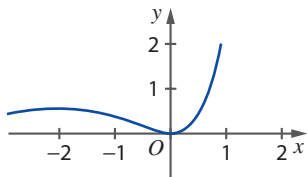
$$\Leftrightarrow x=-2-\sqrt{2} \vee x=-2+\sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$

Pontos de inflexão em $x=-2-\sqrt{2}$ e em $x=-2+\sqrt{2}$.

Concavidade voltada para cima

em $]-\infty, -2 - \sqrt{2}]$ e $[-2 + \sqrt{2}, +\infty[$; concavidade voltada para baixo em $[-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}]$.



93.2 $D = \{x \in \mathbb{R} : 4x - 1 > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{4}\right\} = \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$

$$f'(x) = -\frac{4}{\ln 3(4x-1)}$$

A função f' é negativa em todo o seu domínio.

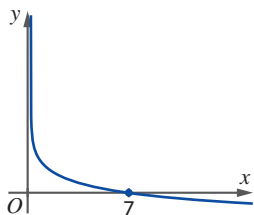
f é estritamente decrescente em $\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$; não tem máximos nem mínimos.

$$f''(x) = \frac{16}{\ln 3(4x-1)^2}$$

A função f'' é positiva em todo o seu domínio.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima

em $\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$; não tem pontos de inflexão.

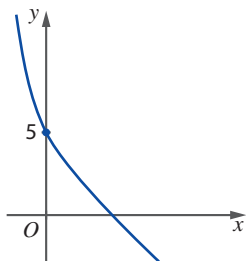


93.3 $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = -1 - e^{-x} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pelo que f é estritamente decrescente.

$f''(x) = e^{-x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pelo que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.

f não tem pontos de inflexão; não tem máximos nem mínimos.



93.4 $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[$

$$f'(x) = x^2(3 \ln x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(3 \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 3 \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee \ln x = -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ (\notin D) \vee x = e^{-\frac{1}{3}} \ (\in D)$$

x	0		$e^{-\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	ND	-	0	+
Monotonia e extremos de f	ND	$\searrow$	$-\frac{1}{3e}$ Mín. rel.	$\nearrow$

A função é estritamente decrescente em $]-\infty, \frac{1}{\sqrt[3]{e}}]$ e

estritamente crescente em $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, +\infty\right[$. Tem um mínimo

relativo (e absoluto), $-\frac{1}{3e}$, em $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

$$f''(x) = x(6 \ln x + 5)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(6 \ln x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 6 \ln x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

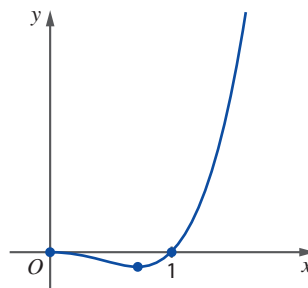
$$\Leftrightarrow \underbrace{x=0}_{\notin D} \vee \underbrace{x=e^{-\frac{5}{6}}}_{\in D}$$

x	0		$e^{-\frac{5}{6}}$	$+\infty$
$f''(x)$	ND	-	0	+
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	ND	$\cap$	PI	$\cup$

Ponto de inflexão em $x = \frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$.

Concavidade voltada para cima em $\left[\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}, +\infty\right[$;

concavidade voltada para baixo em $\left]0, \frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}\right]$.



93.3 $D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{x-1} > 0 \wedge x-1 \neq 0 \right\}$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x-1}$	$+$	0	$-$	ND	$+$

Assim, $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

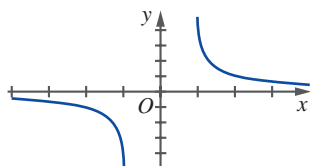
$\forall x \in D, f'(x) = -\frac{2}{x^2-1} < 0$, pelo que f é estritamente decrescente; f não tem máximos nem mínimos.

$$f''(x) = \frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (\notin D)$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	ND	ND	ND	$+$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cap$	ND	ND	ND	$\cup$

O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e a concavidade voltada para cima em $]1, +\infty[$; não tem pontos de inflexão.



94.1 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + e^{\frac{2}{x-1}}\right) = +\infty, \text{ pelo que a reta de equação}$$

$x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico da função f .

Como f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, o seu gráfico não tem mais assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + e^{\frac{2}{x-1}}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + e^{\frac{2}{x-1}}\right) = 2, \text{ pelo que a reta}$$

de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico da função f .

94.2 $1 + e^{\frac{2}{x-1}} = 3 \Leftrightarrow e^{\frac{2}{x-1}} = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} = \ln 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{2}{\ln 2} \quad (\in D_f)$$

94.3 $1 + e^{\frac{2}{x-1}} = y \Leftrightarrow e^{\frac{2}{x-1}} = y - 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} = \ln(y-1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{2}{\ln(y-1)}, \text{ donde } f^{-1}(x) = 1 + \frac{2}{\ln(x-1)}$$

$$D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} : x-1 > 0 \wedge \ln(x-1) \neq 0\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x > 1 \wedge x \neq 2\} =]1, +\infty[\setminus \{2\}$$

94.4 $\forall x \in D_f, f'(x) = -\frac{2e^{\frac{2}{x-1}}}{(x-1)^2} < 0$

Assim, a função f é decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$.

94.5 $D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-3}{x+2} > 0 \wedge x+2 \neq 0 \right\}$

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-3}{x+2}$	$+$	ND	$-$	0	$+$

Assim, $D_g =]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$.

94.6 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right) = \ln\left(\frac{1}{1}\right) = 0,$

pelo que a reta de equação $y = 0$ (eixo Ox) é assíntota horizontal ao gráfico da função g .

94.7 $\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) = +\infty$, pelo que a reta de equação

$x = -2$ é assíntota vertical ao gráfico da função g ;

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) = -\infty, \text{ pelo que a reta de equação } x = 3$$

é assíntota vertical ao gráfico da função g .

$$94.8 \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} < 1 \Leftrightarrow -\frac{5}{x+2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{x+2} > 0 \Rightarrow x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$$

Uma vez que $D_g =]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$, então o conjunto solução da inequação é $]3, +\infty[$.

$$95.1 D_f = \mathbb{R}$$

$$e^{2x+1} > 1 \Leftrightarrow 2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

$$95.2 \lim_{x \rightarrow 0} e^{-3x-2} = e^{-2};$$

como existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, a função g é contínua em $x=0$.

$$95.3 f'(x) = 2e^{2x+1} \text{ e } g'(x) = -3e^{-3x-2}.$$

$$95.4 \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -3e^{-3x-2} < 0,$$

donde a função g é decrescente.

$$\text{Por outro lado, } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-3x-2} > 0,$$

donde a função g é positiva.

$$95.5 f(0) = e, \text{ donde o ponto } A \text{ tem coordenadas } (0, e)$$

$$\text{e } g(0) = e^{-2}, \text{ donde o ponto } B \text{ tem coordenadas } (0, e^{-2}),$$

$$\text{pelo que } \overline{AB} = e - e^{-2} = e - \frac{1}{e^2} = \frac{e^3 - 1}{e^2}.$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^{2x+1} = e^{-3x-2} \Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{e^{-3x-2}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{5x+3} = 1 \Leftrightarrow 5x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5},$$

donde o ponto C tem coordenadas

$$\left(-\frac{3}{5}, f\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \left(-\frac{3}{5}, e^{-\frac{1}{5}}\right).$$

A área do triângulo $[ABC]$ é dada por

$$\frac{\overline{AB} \times \left|-\frac{3}{5}\right|}{2} = \frac{\frac{e^3 - 1}{e^2} \times \frac{3}{5}}{2} = \frac{3}{10} \times \frac{e^3 - 1}{e^2}.$$

PÁG. 172

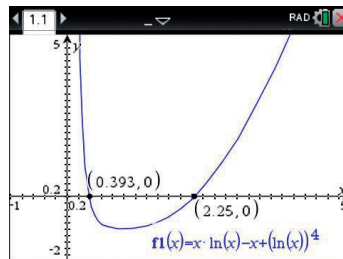
96.1 A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pois é obtida à custa de funções contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, donde, só poderá existir a assíntota vertical ao seu gráfico de equação $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{x}} \stackrel{y=2x}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \stackrel{0 \times \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln 1 - \ln y}{y} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$$

Como nenhum dos limites laterais é infinito, o gráfico da função g não admite assíntotas verticais.

96.2 As abscissas dos pontos A e B podem determinar-se resolvendo a equação $x \ln x - x + \ln^4 x = 0$ e são, respetivamente, com aproximação às centésimas, 0,39 e 2,25.



A ordenada do ponto C pode determinar-se calculando $f(1) = -1$, pelo que a área aproximada do triângulo $[ABC]$

$$\text{é } \frac{(2,25 - 0,39) \times |-1|}{2} = 0,93.$$

$$97.1 m = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = 1 - e^{-2} + 1 = 2 - e^{-2}$$

97.2 A função f é diferenciável em $\mathbb{R}$, logo, também o é em $]-1, 0[$.

Por outro lado, a função f é contínua em $\mathbb{R}$, logo, também o é em $[-1, 0]$.

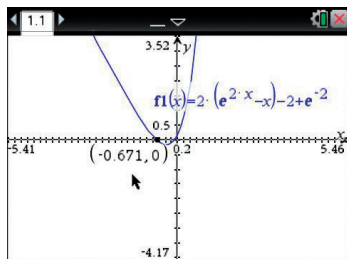
Assim, pelo teorema de Lagrange,

$$\exists c \in]-1, 0[: m = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = f'(c).$$

97.3 $f'(x) = 2e^{2x} - 2x$ e $f'(c) = 2 - e^{-2}$

Consideremos a função definida por $g(x) = f'(x) - m$,
ou seja, definida pela expressão

$g(x) = 2(e^{2x} - x) - 2 + e^{-2}$ e procuremos o zero da função
em $]-1, 0[$, que é $x \approx -0,67$.



A garantia da existência deste ponto é dada pelo teorema
de Lagrange (ver alínea anterior).

98.1 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 1 > 0\} =]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{4x}{2x^2 - 1}$$

Dado que $2x^2 - 1 > 0$, $\forall x \in D_f$, então a função f'
é negativa se $x \in]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}[$ e é positiva se
 $x \in]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$, pelo que a função f' é negativa em
 $]-2, -1[$, sendo a função f decrescente nesse intervalo.

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = -2(x+1)e^{(x+1)^2}$$

Dado que o fator $e^{(x+1)^2} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
então a função g' é negativa se $x \in]-1, +\infty[$
e é positiva se $x \in]-\infty, -1[$, pelo que a função g'
é positiva em $]-2, -1[$, sendo a função g crescente
nesse intervalo.

98.2 Considere-se a função $g - f$.

$$D_{g-f} = D_g \cap D_f \Rightarrow D_{g-f} \subset D_g \cap D_{g-f} \subset D_f$$

A função $g - f$ é contínua em $[-2, -1]$ porque as
funções g e f também o são.

$$(g - f)(-2) = g(-2) - f(-2) = 2 - e - \ln 7 < 0 \text{ e}$$

$$(g - f)(-1) = g(-1) - f(-1) = 1 > 0$$

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$$\exists c \in]-2, -1[: (g - f)(c) = 0 \Leftrightarrow g(c) = f(c), \text{ ou seja,}$$

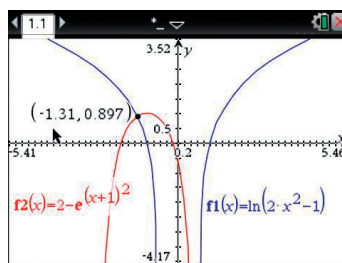
os gráficos das funções g e f interseitam-se num ponto
de abscissa c no intervalo $]-2, -1[$.

Este ponto de abscissa c no intervalo $]-2, -1[$ é único
pois, dado que a função g cresce e a função f decresce
neste intervalo, a função $g - f$ é sempre positiva em

$-2 < c < x < -1$ e é sempre negativa em

$-2 < x < c < -1$, donde, o ponto de abscissa c é único em
 $]-2, -1[$.

As coordenadas desse ponto, arredondadas às centésimas,
são $(-1,31; 0,90)$.



99.1 $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x(x^2 + 2x)$ e $f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$

A função f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

O declive da reta tangente ao gráfico da função f num
ponto de abscissa $x \in \mathbb{R}$ é dado por $f'(x)$.

Os zeros da função f'' correspondem aos extremos
da função f' .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\downarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 - \sqrt{2} \vee x = -2 + \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{2}$		$-2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
Monotonia e extremos de f		$2e^{-2-\sqrt{2}}$ $(1 + \sqrt{2})$ Máximo relativo		$2e^{-2+\sqrt{2}}$ $(1 - \sqrt{2})$ Mínimo relativo	

Dado que a função f' também é contínua em $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x(x^2 + 2x)] = 0 \text{ e}$$

$2e^{-2+\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2}) < 0$, então em $x = -2 + \sqrt{2}$ o mínimo
da função f' é absoluto, o que prova que o ponto do gráfico
de f com menor declive é o ponto de abscissa $-2 + \sqrt{2}$:

$$f'(-2 + \sqrt{2}) = 2e^{-2+\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2}) \approx -0,5$$

- 99.2** Na alínea anterior já se concluiu que a função f' também é contínua em $\mathbb{R}$ e também é diferenciável em $\mathbb{R}$, logo, em particular, também é contínua em $[-2, -1]$ e diferenciável em $] -2, -1[$.

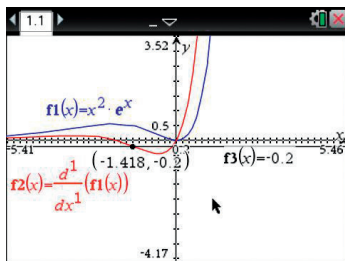
Por outro lado, $f'(-2) = 0 > -0,2$ e $f'(-1) = -e^{-1} < -0,2$, donde, pelo teorema de Bolzano-Cauchy

$$\exists c \in] -2, -1[: f'(c) = -0,2$$

$$f'(x) = -0,2 \wedge x \in] -2, -1[\Leftrightarrow x \approx -1,42$$

$$f(-1,42) = (-1,42)^2 \times e^{-1,42} \approx 0,49$$

$$A(-1,42; 0,49)$$



- 100.** Considere-se a função f definida por $f(x) = e^x$ de domínio $\mathbb{R}$. A função f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, logo também o é em qualquer intervalo $[0, x]$, $\forall x \in]0, 1[$, e $f'(x) = e^x$

Pelo teorema de Lagrange

$$\exists c \in]0, x[: \underbrace{f'(c)}_{e^c} = \underbrace{\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}}_{\frac{e^x - 1}{x}} \Leftrightarrow e^c = \frac{e^x - 1}{x}$$

Dado que $c \in]0, x[$ com $x \in]0, 1[\Rightarrow 1 = e^0 < e^c < e^x$, ou seja, $1 < e^c < e^x$.

A condição $e^c = \frac{e^x - 1}{x} \Leftrightarrow e^x = e^c x + 1$, donde

$$e^x = \underbrace{e^c}_{>1} x + 1 > x + 1, \forall x \in]0, 1[.$$

Por outro lado, $e^x = \underbrace{e^c}_{e^c < e^x} x + 1$, donde

$$e^x < e^x x + 1 \Leftrightarrow e^x - e^x x < 1 \Leftrightarrow e^x (1 - x) < 1 \Leftrightarrow \downarrow x \in]0, 1[\Rightarrow 1 - x > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x < \frac{1}{1 - x}.$$

Conclui-se assim que, $\forall x \in]0, 1[$, $1 + x < e^x < \frac{1}{1 - x}$.

3. MODELOS EXPONENCIAIS

PÁG. 174

- 101.1** Uma vez que por hipótese $Q'(t) = -0,00012Q(t)$, então a função que modela a quantidade de Carbono 14 existente ao fim de t anos é do tipo $Q(t) = Q_0 e^{-0,00012t}$, pois todas as soluções da equação diferencial linear de 1.ª ordem $f' = kf$ são do tipo $f(t) = ce^{kt}$ onde $c = f(0)$.

$$\begin{aligned} 101.2 \quad Q(t) = 0,3Q_0 &\Leftrightarrow Q_0 e^{-0,00012t} = 0,3Q_0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{-0,00012t} = 0,3 \Leftrightarrow -0,00012t = \ln 0,3 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{\ln 0,3}{-0,00012} \approx 10\,033 \text{ anos} \end{aligned}$$

- 101.3** $Q(15\,200) = Q_0 e^{-0,00012 \times 15200} \approx 0,1614Q_0$, ou seja, resta aproximadamente 16,14% de Carbono 14 da quantidade inicial.

PÁG. 175

- 102.** A situação tem por base a Lei de Newton do arrefecimento/ aquecimento, pelo que é modelada por uma função do tipo $T(t) = (T_0 - T_a)e^{-k(t-t_0)} + T_a$ onde T_0 representa a temperatura inicial e T_a representa a temperatura ambiente.

Neste caso $T_0 = 100^\circ\text{C}$ e $T_a = 25^\circ\text{C}$, donde a temperatura da água ao fim de t minutos é dada pela função $T(t) = 75e^{-kt} + 25$, $t \geq 0$, com t em minutos e T em graus Celsius.

$$\text{Então: } T(2) = 80 \Leftrightarrow 75e^{-2k} + 25 = 80 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-2k} = \frac{11}{15} \Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{11}{15}\right)}{-2} \approx 0,155$$

$$\text{Assim, } T(t) = 50 \Leftrightarrow 75e^{-0,155t} + 25 = 50 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,155t} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-0,155} \approx 7 \text{ minutos}$$

PÁG. 177

- 103.1** A situação tem por base o modelo Malthusiano, pelo que é modelada por uma função do tipo $P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}$ onde P_0 representa o número inicial de elementos da população, sendo t medido em anos.

Neste caso, sabe-se que $P_0 = 500$ e que

$$P(1) = 800 \Leftrightarrow 500e^k = 800 \Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{8}{5}\right).$$

Assim, tem-se a função definida por

$$P(t) = 500e^{\ln\left(\frac{8}{5}\right)t} = 500 \left[e^{\ln\left(\frac{8}{5}\right)} \right]^t = 500 \left(\frac{8}{5} \right)^t$$

103.2 $P(4) = 500 \left(\frac{8}{5} \right)^4 \approx 3276$ chinchilas

PÁG. 178

- 104.1** Uma vez que, por hipótese, $M'(t) = kM(t)$, então a função que representa a massa (em mg) da substância presente em cada instante t (em horas) é do tipo $M(t) = M(0)e^{kt}$, pois todas as soluções da equação diferencial linear de 1.ª ordem $f' = kf$ são do tipo $f(t) = ce^{kt}$, onde $c = f(0)$.

Como se sabe que $M(0) = 12$ e $M(0,5) = 4$, tem-se

$$12e^{\frac{k}{2}} = 4 \Leftrightarrow k = 2 \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{1}{9}\right) = -\ln 9, \text{ donde}$$

$$M(t) = 12e^{-\ln(9)t} = 12 \left(\frac{1}{e^{\ln 9}} \right)^t = 12 \times \frac{1}{9^t} = \frac{4 \times 3}{3^{2t}} = 4 \times 3^{1-2t}.$$

- 104.2** Taxa de desintegração média na 1.ª hora:

$$\frac{M(1) - M(0)}{1 - 0} = M(1) - M(0) = \frac{4}{3} - 12 = -\frac{32}{3} \text{ mg/h}$$

Taxa de desintegração média na 2.ª hora:

$$\frac{M(2) - M(1)}{2 - 1} = M(2) - M(1) = \frac{4}{27} - \frac{4}{3} = -\frac{32}{27} \text{ mg/h}$$

Vê-se assim que na 1.ª hora a desintegração ocorre a uma taxa média inferior à da 2.ª hora.

- 104.3** Utilizando a relação $M'(t) = kM(t)$ conclui-se que

$$M'(t) = \underbrace{-\ln 9}_k M(t) = -4 \ln 9 \times 3^{1-2t},$$

$$M'(1,5) = -4 \ln 9 \times 3^{-2} = -\frac{4}{9} \ln 9 \text{ mg/h e}$$

$$M'(3) = -4 \ln 9 \times 3^{-5} = -\frac{4}{243} \ln 9 \text{ mg/h}.$$

- 104.4** Utilizando a relação $M'(t) = kM(t)$, conclui-se que

$$M''(t) = kM'(t) = k^2 M(t) = 4 \ln^2 9 \times 3^{1-2t}$$

$\forall t \geq 0$, $M''(t) = 4 \ln^2 9 \times 3^{1-2t} > 0$, donde a taxa de desintegração ($M'(t)$) é crescente ao longo do tempo.

Como $M'(t) = \underbrace{-\ln 9}_{k < 0} \underbrace{M(t)}_{> 0} < 0$, $\forall t \geq 0$, conclui-se que a

massa (em mg) da substância presente em cada instante t (em horas) vai decrescendo a uma taxa cada vez menor, pois $|M'(t)|$ é cada vez menor.

- 105.** Uma vez que, por hipótese, $m'(t) = km(t)$, então a função que representa a massa de Rádio 226 (em gramas) na amostra é dada a cada instante t (em anos) por $m(t) = m_0 e^{kt}$, pois todas as soluções da equação diferencial linear de 1.ª ordem $f' = kf$ são do tipo $f(t) = ce^{kt}$ onde $c = f(0)$.

Como se sabe que $m_0 = 50$ e $m(1) = 49,975$ tem-se

$$50e^k = 49,975 \Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{49,975}{50}\right), \text{ donde}$$

$$m(t) = 50e^{\ln\left(\frac{49,975}{50}\right)t}$$

$$m(t) = 25 \Leftrightarrow e^{\ln\left(\frac{49,975}{50}\right)t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{49,975}{50}\right)} \approx 1386 \text{ anos}$$

PÁG. 179

- 106.1** Segundo a Lei de Newton do arrefecimento/aquecimento, a temperatura do café ao longo do tempo é modelada por uma função do tipo $T(t) = (T_0 - T_a)e^{-k(t-t_0)} + T_a$ onde T_0 representa a temperatura inicial e T_a representa a temperatura ambiente, pelo que, neste caso,

$$a = T_0 - T_a = 80 - 25 = 55 \text{ e } b = T_a = 25.$$

- 106.2** $55e^{-0,35t} + 25 > 40 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{-0,35t} > \frac{15}{55} \Leftrightarrow -0,35t > \ln\left(\frac{15}{55}\right)$$

$y = e^x$ define uma
função crescente

$$\Leftrightarrow t < -\frac{\ln\left(\frac{15}{55}\right)}{0,35} \approx 3 \text{ min } 43 \text{ seg},$$

ou seja, o café esteve a uma temperatura superior a 40°C durante cerca de 3 minutos e 43 segundos.

- 107.1** $T(0) = 30 - 24e^0 = 6^\circ\text{C}$

- 107.2** $T(t) = 15 \Leftrightarrow 30 - 24e^{-0,04t} = 15 \Leftrightarrow -24e^{-0,04t} = -15 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{-0,04t} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow -0,04t = \ln\left(\frac{5}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{-0,04} \approx 11,7501 \approx 11 \text{ min } 45 \text{ s}$$

- 107.3** A temperatura do sumo ao fim de 1 hora é :
 $T(60) = 30 - 24e^{-0,04 \times 60} \approx 27,8228^\circ \text{C}$

A temperatura ambiente no terraço da casa da Sofia é igual a $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (30 - 24e^{-0,04t}) = 30 - 0 = 30^\circ \text{C}$

Em percentagem do valor da temperatura ambiente no terraço da casa da Sofia, a temperatura do sumo ao fim de 1 hora é : $\frac{30 - 24e^{-0,04 \times 60}}{30} \approx 0,93 = 93\%$.

108.1 $T(0) = 18 + 56 = 74^\circ \text{C}$

108.2 $T(5) = 18 + 56e^{-\frac{1}{6}} \approx 65,4^\circ \text{C}$

108.3 $18 + 56e^{\left(-\frac{t}{30}\right)} = 32 \Leftrightarrow e^{\left(-\frac{t}{30}\right)} = 0,25 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\frac{t}{30} = \ln(0,25) \Leftrightarrow t = -30 \ln(0,25) \approx 42 \text{ min}$

- 109.** A situação tem por base a Lei de Newton do arrefecimento/ aquecimento, pelo que é modelada por uma função do tipo $T(t) = (T_0 - T_a)e^{-k(t-t_0)} + T_a$, onde T_0 representa a temperatura inicial e T_a representa a temperatura ambiente.

Neste caso $T_0 = 211^\circ \text{C}$ e $T_a = 28^\circ \text{C}$, donde a temperatura do frango ao fim de t minutos é dada pela função $T(t) = 183e^{-kt} + 28, t \geq 0$, com t em minutos e T em graus Celsius.

Portanto:

$$T(10) = 103 \Leftrightarrow 183e^{-10k} + 28 = 103 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-10k} = \frac{75}{183} \Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{75}{183}\right)}{-10} \approx 0,089$$

Assim, $183e^{-0,089t} + 28 < 37 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{-0,089t} < \frac{9}{183} \Leftrightarrow -0,089t < \ln\left(\frac{9}{183}\right)$$

$y = e^x$ define uma função crescente

$$\Leftrightarrow t > -\frac{\ln\left(\frac{9}{183}\right)}{0,089} \approx 33 \text{ min } 51 \text{ seg, ou seja, o frango}$$

estará a uma temperatura inferior a 37°C , cerca de 33 minutos e 51 segundos depois de ter saído do forno.

110.1 $\begin{cases} N(0) = 35 \\ N(1) = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 35 \\ 35e^b = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 35 \\ b = \ln\left(\frac{44}{35}\right) \end{cases}, \text{ donde}$

$$N(t) = 35e^{\ln\left(\frac{44}{35}\right)t} = 35\left(e^{\ln\left(\frac{44}{35}\right)}\right)^t = 35 \times \left(\frac{44}{35}\right)^t$$

$$N(2) \approx 55, N(3) \approx 70 \text{ e } N(4) \approx 87$$

- 110.2** Dado que $P(2) = 64$, $P(3) = 90$ e $P(4) = 127$, verifica-se que estes valores estão mais próximos dos valores reais do que os valores obtidos com a função N .

PÁG. 180

111.1 $\begin{cases} T(0) = 100 \\ T(15) = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 100 - T_A \\ 25 + 75e^{15b} = 55 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 75 \\ b = \frac{\ln(0,4)}{15} \approx -0,061 \end{cases}, \text{ donde } T(t) = 25 + 75e^{-0,061t}$$

111.2 $T(30) = 25 + 75e^{-0,061 \times 30} \approx 37^\circ \text{C}$

112.1 $\begin{cases} P(0) = 170000000 \\ P(10) = 190000000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 170000000 \\ 170000000e^{10b} = 190000000 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 170000000 \\ b = \frac{\ln\left(\frac{19}{17}\right)}{10} \end{cases}, \text{ donde } P(t) = 170000000e^{\frac{\ln\left(\frac{19}{17}\right)}{10}t}$$

112.2 $P(20) = 170000000e^{\frac{\ln\left(\frac{19}{17}\right)}{10} \times 20} \approx 212\,352\,941 \text{ habitantes}$

113.1 $\begin{cases} L(1) = 60 \\ L(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ae^{-b} = 60 \\ ae^{-2b} = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{60}{e^{-b}} \\ \frac{60}{e^{-b}}e^{-2b} = 30 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 120 \\ e^{-b} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 120 \\ -b = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 120 \\ b = \ln 2 \end{cases}$$

113.2 $L(x) = 15 \Leftrightarrow 120e^{-\ln 2x} = 15 \Leftrightarrow -\ln 2x = \ln\left(\frac{15}{120}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(0,125)}{-\ln 2} = 3 \text{ m}$$

114.1 $\begin{cases} P(0) = 100 \\ P(3) = 250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1000}{1+a} = 100 \\ \frac{1000}{1+ae^{-3k}} = 250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ e^{-3k} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ k = \frac{\ln 3}{3} \end{cases}, \text{ donde } P(t) = \frac{1000}{1+9e^{-\frac{\ln 3}{3}t}}$$

114.2 $\frac{1000}{1+9e^{-\frac{\ln 3}{3}t}} \geq 900 \Leftrightarrow e^{-\frac{\ln 3}{3}t} \leq \frac{1}{81} \Leftrightarrow -\frac{\ln 3}{3}t \leq -\ln 81 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{3 \ln 81}{\ln 3} = 3 \times \log_3 81 = 12 \text{ meses}$$

PÁG. 181

$$\begin{aligned}
 115.1 \quad P'(t) &= -\frac{100 \times \left(-\frac{4}{5}A\right) e^{-\frac{4}{5}t}}{\left(1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}\right)^2} = \frac{80Ae^{-\frac{4}{5}t}}{\left(1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{125} P(t) [100 - P(t)] = \\
 &= \frac{1}{125} \times \frac{100}{1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}} \times \left[100 - \frac{100}{1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}}\right] \\
 &= \frac{1}{125} \times \frac{100^2}{1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}} \times \frac{1 + Ae^{-\frac{4}{5}t} - 1}{1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}} \\
 &= \frac{80Ae^{-\frac{4}{5}t}}{\left(1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}\right)^2} = P'(t)
 \end{aligned}$$

$$115.2 \quad P(0) = P_0 = \frac{100}{1+A} \Leftrightarrow A = \frac{100}{P_0} - 1$$

$$115.3 \quad A = \frac{100}{P_0} - 1 = 9 \text{ e } P'(t) = \frac{720e^{-\frac{4}{5}t}}{\left(1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}\right)^2}$$

Da equação diferencial resulta que:

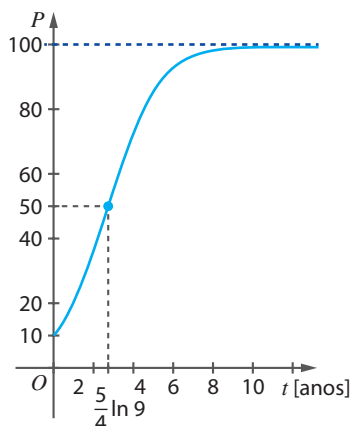
$$\begin{aligned}
 P''(t) &= \frac{1}{125} [P'(t)(100 - P(t)) - P(t)P'(t)] = \\
 &= \frac{2}{125} P'(t)[50 - P(t)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P''(t) > 0 &\Leftrightarrow P(t) < 50 \Leftrightarrow \frac{100}{1 + 9e^{-\frac{4}{5}t}} < 50 \Leftrightarrow \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \forall t \in [0, +\infty[, \\
 &\quad P'(t) > 0 \\
 &\Leftrightarrow e^{\frac{4}{5}t} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow -\frac{4}{5}t > -\ln 9 \Leftrightarrow t < \frac{5 \ln 9}{4}
 \end{aligned}$$

Conclui-se assim que a função P' é crescente em

$\left[0, \frac{5 \ln 9}{4}\right]$ e decrescente em $\left[\frac{5 \ln 9}{4}, +\infty\right]$, donde

$t_1 = \frac{5 \ln 9}{4}$ anos é o instante onde $P'(t_1)$ é máxima.



$$116.1 \quad x(0) = 10 \text{ e } x(5) = \frac{10}{\sqrt{e}}$$

$$\begin{aligned}
 116.2 \quad A(t) = \frac{1}{2} A(0) &\Leftrightarrow 10e^{-0,1t} = 5 \Leftrightarrow e^{-0,1t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -0,1t = \ln 2^{-1} \Leftrightarrow -0,1t = -\ln 2 \Leftrightarrow t = 10 \ln 2 \text{ s}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 116.3 \quad -1 \leq \cos(8\pi t) \leq 1, \forall t \in \mathbb{Z}_0^+ &\Leftrightarrow \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad 10e^{-0,1t} > 0, \\
 &\quad \forall t \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow -10e^{-0,1t} \leq \underbrace{10e^{-0,1t} \cos(8\pi t)}_{x(t)} \leq 10e^{-0,1t}, \forall t \in \mathbb{Z}_0^+
 \end{aligned}$$

$$\text{Como } \lim_{t \rightarrow +\infty} (-10e^{-0,1t}) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} (10e^{-0,1t}) = 0,$$

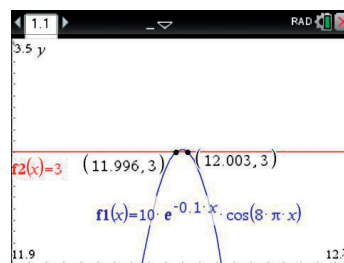
pelo teorema das funções encaixadas, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

Significa que, com o passar do tempo, o ponto tende a estabilizar na origem.

$$\begin{aligned}
 116.4 \quad x'(t) &= -e^{-0,1t} \cos(8\pi t) - 80\pi e^{-0,1t} \sin(8\pi t) = \\
 &= -e^{-0,1t} [\cos(8\pi t) + 80\pi \sin(8\pi t)]
 \end{aligned}$$

$$x'(4) = -e^{-0,4} \text{ unidades/s}$$

$$116.5 \quad t \approx 11,996 \text{ s e } t \approx 12,003 \text{ s}$$



A função definida por $x(t)$ é contínua em $[11,9; 12]$,

$$x(11,9) < 3 \text{ e } x(12) > 3.$$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$$\exists c \in]11,9; 12[: x(c) = 3$$

Resultado análogo se verifica no intervalo $[12; 12,1]$.

$$116.6 \quad x(t) = 10e^{-0,1t} \cos(8\pi t)$$

$$x'(t) = -e^{-0,1t} [\cos(8\pi t) + 80\pi \sin(8\pi t)]$$

$$x''(t) = e^{-0,1t} [(0,1 - 640\pi^2) \cos(8\pi t) + 16\pi \sin(8\pi t)]$$

$$\begin{aligned}
 x''(t) + (64\pi^2 + 0,1^2)x(t) &= \\
 &= e^{-0,1t} \left[(0,1 - 640\pi^2) \cos(8\pi t) + 16\pi \sin(8\pi t) \right] + \\
 &+ (64\pi^2 + 0,1^2) 10e^{-0,1t} \cos(8\pi t) = \\
 &= e^{-0,1t} \left[(0,1 - 640\pi^2) \cos(8\pi t) + 16\pi \sin(8\pi t) + \right. \\
 &+ (640\pi^2 + 0,1) \cos(8\pi t) \left. \right] = \\
 &= e^{-0,1t} [0,2 \cos(8\pi t) + 16\pi \sin(8\pi t)] \\
 -2 \times 0,1x'(t) &= -0,2 \left[-e^{-0,1t} [\cos(8\pi t) + 80\pi \sin(8\pi t)] \right] = \\
 &= e^{-0,1t} [0,2 \cos(8\pi t) + 16\pi \sin(8\pi t)]
 \end{aligned}$$

TESTE – PÁG. 186

1. $f(1) = -6 \Leftrightarrow 3 - 3^a = -6 \Leftrightarrow 3^a = 9 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3^a = 3^2 \Leftrightarrow a = 2$
 f é injetiva

Opção correta: A.

2. $e^{2 \ln(x)} - 10^{3 \log(x)} = e^{\ln(x^2)} - 10^{\log(x^3)} = x^2 - x^3$

Opção correta: D.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x) - f(x)}{x} \right] =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x} = \frac{0}{\infty} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{2}{3}$

Opção correta: B.

4.1 A abscissa do ponto B obtém-se da equação $f(x) = g(x)$.
 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1 - \log_3(x) = \log_3(x+2)$

$$\begin{aligned}
 1 - \log_3(x) &= \log_3(x+2) \Leftrightarrow \log_3(x+2) + \log_3(x) = 1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x+2}{x}\right) &= 1 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x} = 3 \Leftrightarrow x = 1.
 \end{aligned}$$

As coordenadas do ponto B são $(1, f(1)) = (1, 1)$.

A área do triângulo $[ABC]$ é dada por $\frac{\overline{AC} \times f(1)}{2}$.

A abscissa do ponto C obtém-se da equação $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log_3(x) = 1 \Leftrightarrow x = 3$$

As coordenadas do ponto C são $(3, 0)$.

Assim, a área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$.

Opção correta: D.

4.2 $g(x) = y \Leftrightarrow \log_3(x+2) = y \Leftrightarrow x+2 = 3^y \Leftrightarrow x = 3^y - 2$,
 donde se obtém $g^{-1}(x) = 3^x - 2$.

Opção correta: D.

4.3 $f(x) > 3 \Leftrightarrow 1 - \log_3(x) > 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_3(x) < -2 \Leftrightarrow x < 3^{-2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{9}$
 f é crescente

Opção correta: C.

5.1 $(x^2 - 4)e^{x-1} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$
 $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x-1} > 0$
 $\Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$

5.2 O domínio de resolução é

$$x - 1 > 0 \wedge x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$$

$$2 \ln(x-1) - \ln(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln[(x-1)^2] - \ln(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\frac{(x-1)^2}{x+1}\right] \leq 0 \Leftrightarrow$$

$y = \ln x$ define uma função crescente

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x}{x+1} \leq 0$$

x	1		3	$+\infty$
$x^2 - 3x$	ND	-	0	+
$x+1$	ND	+	+	+
$\frac{x^2 - 3x}{x+1}$	ND	-	0	+

Assim, $\frac{x^2 - 3x}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow 1 < x \leq 3 \Leftrightarrow x \in]1, 3]$

6.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+1) \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \right] \stackrel{\infty \times 0}{=}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+1) \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \right] \stackrel{\downarrow}{=}$
 $y = \frac{2}{x}$
 $x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$
 $= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{y+2}{y} \times \ln(1+y) \right] =$
 $= \lim_{y \rightarrow 0} \left[(y+2) \times \frac{\ln(1+y)}{y} \right] = 2 \times 1 = 2$

$$6.2 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x^2 - 3x + 2)}{\ln(x^2 - 4)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)}{x^2 - 4 = (x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x-2) + \ln(x-1)}{\ln(x-2) + \ln(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 + \frac{\ln(x-1)}{\ln(x-2)}}{1 + \frac{\ln(x+2)}{\ln(x-2)}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

$$6.3 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\ln(x-2)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 + 6y}{\ln(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y+6}{\frac{\ln(y+1)}{y}} = \frac{6}{1} = 6$$

$$7.1 \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2e^x - 1 \neq 0\}$$

$$2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2^{-1}) = -\ln 2,$$

donde $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\ln 2\}$.

$$7.2 \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{x+1} - 1}{2e^x - 1} = 0 \Leftrightarrow e^{x+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x+1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$7.3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} - 1}{2e^x - 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} \left(1 - \frac{1}{e^{x+1}}\right)}{e^{x+1} \left(\frac{2}{e} - \frac{1}{e^{x+1}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{x+1}}}{\frac{2}{e} - \frac{1}{e^{x+1}}} = \frac{1}{\frac{2}{e}} = \frac{e}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+1} - 1}{2e^x - 1} = \frac{0 - 1}{0 - 1} = 1$$

$$7.4 \quad f'(x) = \frac{e^{x+1}(2e^x - 1) - (e^{x+1} - 1)2e^x}{(2e^x - 1)^2} = \frac{e^x(2 - e)}{(2e^x - 1)^2}$$

Como $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(2e^x - 1)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

e $2 - e < 0$, então a função f' é negativa em $\mathbb{R} \setminus \{-\ln 2\}$,

donde a função f é decrescente em $]-\infty, -\ln 2[$

e em $]-\ln 2, +\infty[$.

$$7.5 \quad f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^{x+1} - 1}{2e^x - 1} = y \Leftrightarrow e^x(e - 2y) = 1 - y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{1 - y}{e - 2y} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1 - y}{e - 2y}\right) = \ln\left(\frac{y - 1}{2y - e}\right)$$

A expressão analítica da função inversa da função f

$$\text{é } f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x - 1}{2x - e}\right).$$

$$\text{Estudo de } \frac{x - 1}{2x - e} > 0:$$

x	$-\infty$	1		$\frac{e}{2}$	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+	+	+
$2x - e$	-	-	-	0	+
$\frac{x - 1}{2x - e}$	+	0	-	ND	+

$$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \left[1, \frac{e}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-\ln 2\}$$

$$x \mapsto \ln\left(\frac{x - 1}{2x - e}\right)$$

$$8.1 \quad g(x) = \log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2 + 18}{x^2 - 3x + 2}\right)$$

$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + 18}{x^2 - 3x + 2} > 0 \wedge x^2 - 3x + 2 \neq 0\right\}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

$$\text{Como } x^2 + 18 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ para que } \frac{x^2 + 18}{x^2 - 3x + 2} > 0,$$

$$\text{basta que } x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 2,$$

$$\text{donde } D_g = \mathbb{R} \setminus [1, 2].$$

$$8.2 \quad g(0) = \log_{\sqrt{3}}(9) = \frac{\ln 9}{\ln \sqrt{3}} = \frac{\ln(3^2)}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{2 \ln 3}{\frac{1}{2} \ln 3} = 4$$

$$8.3 \quad \log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2 + 18}{x^2 - 3x + 2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 18}{x^2 - 3x + 2} = 1 \Leftrightarrow$$

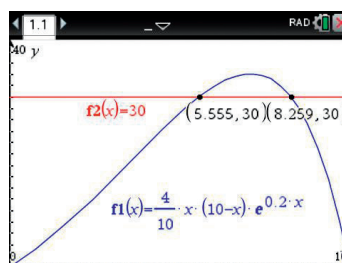
$$\Leftrightarrow \frac{3x + 16}{x^2 - 3x + 2} = 0 \Leftrightarrow 3x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{16}{3} \quad (\in D_g)$$

9.1 Dado que só é possível visitar os subterrâneos de Lisboa a partir das 10h, a essa hora já tinham decorrido três horas desde as 7 da manhã pelo que

$$c(3) = \frac{4}{10} \times 21 \times e^{0,6} \approx 15,3 \text{ m}.$$

9.2 Às 14 horas já tinham decorrido 7 horas desde as 7 da manhã pelo que $c(7) = \frac{4}{10} \times 21 \times e^{1,4} \approx 34 \text{ m}.$

9.3 $c(t) > 30 \Leftrightarrow t \in]5,555; 8,259[$, donde o comprimento da fila esteve superior a 30 metros durante $8,259 - 5,555 = 2,704 \text{ h} \approx 2 \text{ h } 42 \text{ min } 14 \text{ seg}.$



TESTE GLOBAL – PÁG. 188

1. Os casos favoráveis são $7 \times 2 = 14$.

Os casos possíveis são ${}^9C_2 = 36$.

A probabilidade é $\frac{14}{36} = \frac{7}{18}$.

Opção correta: D.

2. Para o algarismo das unidades há 4 possibilidades ($\{2, 4, 6, 8\}$).

Para os algarismos das dezenas e centenas basta escolher dois números diferentes entre os 8 números que sobram depois de se escolher o algarismo das unidades (8A_2).

Assim, há no total ${}^8A_2 \times 4 = 224$.

Opção correta: C.

3. É mais fácil a determinação do valor de probabilidade usando o acontecimento contrário pois o acontecimento contrário a «ir pelo menos um dos membros do casal ao concerto» é «não ir nenhum dos membros do casal ao concerto».

Os casos favoráveis ao acontecimento contrário são ${}^6C_2 = 15$ (subconjuntos de 2 elementos obtidos a partir de um conjunto de 6 elementos – todos exceto o casal Sofia e Carlos).

Os casos possíveis são ${}^8C_4 = 70$ (subconjuntos de 4 elementos obtidos a partir de um conjunto de 8 elementos).

A probabilidade é $1 - \frac{{}^6C_2}{{}^8C_4} = \frac{{}^8C_4 - {}^6C_2}{{}^8C_4} = \frac{55}{70} = \frac{11}{14}$.

Opção correta: C.

- 4.1 Se $\lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) = +\infty$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0^+$.

Das sucessões definidas nas opções, a única para a qual se

tem $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0^+$ é a que é definida por $\left(\frac{e}{3}\right)^n$ (já que, $0 < \frac{e}{3} < 1$).

Opção correta: D.

- 4.2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(10^{-x} + 10)}{f(x)} = \frac{\log 10}{e} = \frac{1}{e}$

Opção correta: B.

5. Em todas as opções a função g é contínua em $[1, 6]$, pois é obtida à custa de transformações de funções contínuas nesse intervalo.

Opção A)

$g(1) = 3 - f(1) > 0$ e $g(6) = -2 - f(6) > 0$, donde o teorema de Bolzano-Cauchy não garante a existência de pelo menos uma solução da equação $g(x) = 0$.

Opção B)

$g(1) = 4 - |f(1) + 1| > 0$ e $g(6) = 4 - |f(6) + 6| > 0$, donde o teorema de Bolzano-Cauchy não garante a existência de pelo menos uma solução da equação $g(x) = 0$.

Opção C)

$g(1) = 4 - |f(1) - 1| > 0$ e $g(6) = 4 - |f(6) - 6| < 0$, donde o teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de pelo menos uma solução da equação $g(x) = 0$.

Opção D)

$g(1) = 5 - f(1) > 0$ e $g(6) = 10 - f(6) > 0$, donde o teorema de Bolzano-Cauchy não garante a existência de pelo menos uma solução da equação $g(x) = 0$.

Opção correta: C.

6. $f\left(\frac{1}{3}\right) = e^0 = 1$, $f(0) = e^{-1}$, $f(\ln 3) = e^{3 \ln 3 - 1} = \frac{e^{\ln 27}}{e} = 27e^{-1}$

e $f(\ln 4) = e^{3 \ln 4 - 1} = \frac{e^{\ln 64}}{e} = 64e^{-1}$, donde o ponto D

não pertence ao gráfico da função.

Opção correta: D.

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) - 3 \ln(x)}{2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

donde o declive da reta que é assíntota oblíqua é $\frac{1}{2}$, pelo que só a reta de equação $y = \frac{1}{2}x + 1$ pode definir essa assíntota.

Opção correta: B.

8. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sin(x^2 - 6x - 7)}{x - 7} \stackrel{0}{=} \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \left[\frac{\sin(x^2 - 6x - 7)}{x^2 - 6x - 7} \times \frac{x^2 - 6x - 7}{x - 7} \right] \stackrel{\substack{x^2 - 6x - 7 = \\ = (x - 7)(x + 1)}}{=} \lim_{x \rightarrow 7} \left[\frac{\sin(x^2 - 6x - 7)}{x^2 - 6x - 7} \times (x + 1) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sin(x^2 - 6x - 7)}{x^2 - 6x - 7} \times \lim_{x \rightarrow 7} (x + 1) \stackrel{\substack{x^2 - 6x - 7 = y \\ x \rightarrow 7 \Rightarrow \\ \Rightarrow y \rightarrow 0}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \times \lim_{x \rightarrow 7} (x + 1) = 1 \times 8 = 8$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \times \lim_{x \rightarrow 7} (x + 1) = 1 \times 8 = 8$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \times \lim_{x \rightarrow 7} (x + 1) = 1 \times 8 = 8$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \times \lim_{x \rightarrow 7} (x + 1) = 1 \times 8 = 8$$

Opção correta: D.

9. Os casos favoráveis são ${}^5C_3 \times 9^2 \times {}^{23}A_4$ (escolhe-se um subconjunto de 2 posições entre os cinco algarismos para colocar o número 4; para cada um dos restantes dois algarismos há 9 possibilidades (os números de 0 a 9 exceto o 4) e para a 1 letra há 23 possibilidades, para a 2 já só há 22 possibilidades e para a 3 já só há 20 possibilidades).

Os casos possíveis são $10^5 \times 23^4$ (para cada um dos cinco números há 10 possibilidades e para cada uma das quatro letras há 23 possibilidades).

A probabilidade é $\frac{{}^5C_3 \times 9^2 \times {}^{23}A_4}{10^5 \times 23^4} \approx 0,0062$.

10.1 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \neq 1 = f(1)$

Logo, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, pelo que a função não é contínua em $x = 1$, portanto não é contínua em $[1, 3]$.

- 10.2 Como $0 < x - 1 \leq 2$, $\forall x \in]1, 3]$ e $f(1) = 1$, então $0 < f(x) \leq 2$, $\forall x \in [1, 3]$, donde a função f tem máximo igual a 2 nesse intervalo, embora não tenha mínimo nesse intervalo.

- 10.3 Não, pois a função f não é contínua em $[1, 3]$.

11.1 $\ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{x^2} = x^2 \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) = x^2 \ln\left(\frac{x^2 + 4}{x^2}\right) =$
 $= x^2 [\ln(x^2 + 4) - \ln(x^2)] = x^2 \ln(x^2 + 4) - x^2 \ln(x^2)$

11.2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1 \times x^3) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x \times x^3) = \lim_{\frac{1}{x} = y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^3} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{x^2} \stackrel{1 + \frac{4}{x^2} = y}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y^{\frac{4}{y-1}} = 4 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y-1} =$$

$$= 4 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_0 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y-1}}_1 = 0$$

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

- 11.3 Da alínea anterior e da continuidade da função h em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, conclui-se que a única assíntota vertical ao gráfico de h é a reta de equação $x = 0$.

Estudo das assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1} \times x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} \times x^2 \right) = +\infty$$

O gráfico de h não tem assíntota não vertical quando x tende para $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) \right] \stackrel{\frac{4}{x^2} = y, x = -\frac{2}{\sqrt{y}} (x \rightarrow -\infty)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[-\frac{2}{\sqrt{y}} \ln(1+y) \right] =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[-2\sqrt{y} \times \frac{\ln(1+y)}{y} \right] \stackrel{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1}{=} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^2 \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) \right] \stackrel{\frac{4}{x^2} = y}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[4 \times \frac{\ln(1+y)}{y} \right] \stackrel{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1}{=} 4$$

Assim, a reta de equação $y = 4$ é assíntota horizontal ao gráfico de h , quando x tende para $+\infty$.

- 11.4 Se $x > 0$:

$$h'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} \times x^3 \right)' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \times x^3 + 3e^{\frac{1}{x}} \times x^2 = e^{x^{-1}} x(3x - 1) =$$

$$= e^{x^{-1}} (3x^2 - x)$$

Para $x < 0$, utilizando a igualdade da alínea 11.1, tem-se:

$$h'(x) = 2x \ln(x^2 + 4) + x^2 \times \frac{2x}{x^2 + 4} - 2x \ln(x^2) - x^2 \times \frac{2x}{x^2} =$$

$$= 2x \ln\left(\frac{x^2 + 4}{x^2}\right) + 2x \left(\frac{x^2}{x^2 + 4} - 1 \right) =$$

$$= 2x \left[\ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) - \frac{4}{x^2 + 4} \right]$$

$$h'(-2) = -4 \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) = -4 \ln 2 + 2$$

12. $g''(x) = 1 + \sin x$

$$g'(x) = \cos x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad x \in]0, \pi[$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$g'(x)$	ND	+	0	–	ND
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g	ND	$\cup$	PI	$\cap$	ND

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para cima em $]0, \frac{\pi}{2}[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[\frac{\pi}{2}, \pi[$.

O ponto de coordenadas $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1)$ é ponto de inflexão do gráfico de g .

13.1 $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \cos x - e^{-\frac{1}{2}x} \sin x = -e^{-\frac{1}{2}x} \left(\frac{1}{2} \cos x + \sin x \right)$

13.2 $m = f'(0) = -\frac{1}{2}$

A reta passa no ponto de coordenadas $(0, f(0)) = (0, 1)$, pelo que se verifica a equação

$$1 = -\frac{1}{2} \times 0 + b \Leftrightarrow b = 1.$$

A equação da reta tangente é $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

13.3 $f'(x) = -e^{-\frac{1}{2}x} \left(\frac{1}{2} \cos x + \sin x \right)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, logo, também o é em $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{4}} < 0 \text{ e } f'(\pi) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{2} > 0.$$

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy

$$\exists c \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[: f'(c) = 0.$$

NOTAS

[illegible]