

**RESOLUÇÕES DO VOLUME 3 NY12**

Primitivas e Cálculo Integral	2
Teste	11
Números Complexos	13
Teste	44
Teste Global Volume 3	46

VOLUME 3

Primitivas e Cálculo Integral

DIAGNÓSTICO – PÁG. 6

1.1 $f'(x) = \frac{1}{x}$

1.2 $f'(x) = 2(x+1)$

1.3 $f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^3}$

1.4 $f'(x) = \frac{x^4 + 6x^2 - 3}{(x^2 + 1)^2}$

1.5 $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

1.6 $f'(x) = \frac{14x^{\frac{9}{5}}}{5}$

1.7 $f'(x) = 2e^{2x} + 3x^2 + 8x$

1.8 $f'(x) = 3e^x - \frac{1}{x}$

1.9 $f'(x) = 2 \cos(2x)$

1.10 $f'(x) = \frac{1}{x \ln 10} - 3 \sin(3x)$

1.11 $f'(x) = \frac{2}{\cos^2(2x)}$

1.12 $f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$

1.13 $f'(x) = 8x \cos(4x^2)$

1.14 $f'(x) = \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}$

2. O T. de Lagrange é aplicável a funções contínuas num intervalo fechado $[\alpha, \beta]$ do seu domínio e diferenciáveis no intervalo aberto $] \alpha, \beta[$.

Em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a função f é contínua pois é produto de funções contínuas.

Em $x = 0$, dado que

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0,$$

$$\text{então } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0), \text{ donde } f \text{ é contínua em } x = 0.$$

Assim, f é contínua em $\mathbb{R}$, logo em $[0, a]$, $a > 0$.

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ donde } f \text{ é dife-}$$

renciável em $]0, a[$, $a > 0$. Logo, é possível aplicar o T. de Lagrange à função f em $[0, a]$, $a > 0$.

3.1 A função f é contínua em $\mathbb{R}^+$, logo também é contínua em qualquer intervalo da forma $[1, x]$, $x > 1$.

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \text{ donde } f \text{ é diferenciável em qualquer intervalo da forma }]1, x[, x > 1.$$

Logo é possível aplicar o T. de Lagrange à função f em qualquer intervalo da forma $[1, x]$, $x > 1$.

$$f'(c) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{1 - 0}{e - 1} \Leftrightarrow c = e - 1$$

3.2 Aplicando o T. de Lagrange à função f num qualquer intervalo da forma $[1, x]$, $x > 1$ tem-se:

$$\exists c \in]1, x[: f'(c) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{\ln x - 0}{x - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \ln x = \frac{x - 1}{c}$$

Todavia,

$$1 < c < x \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{c} < 1 \Rightarrow \frac{x - 1}{x} < \frac{x - 1}{c} < x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 1}{x} < \ln x < x - 1 \text{ e como } x > 0 \text{ então}$$

$$\frac{x - 1}{x} < \ln x < x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x - 1)}{x} < x \ln x < x(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 1 < \ln(x^x) < x^2 - x$$

4. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$ donde $A(1, 0)$ e $B(4, 0)$.

Como $F(2, 6)$ pertence ao gráfico da função g , então

$$g(2) = 6 \Leftrightarrow -12a = 6 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$g(1) = g(4) = 5 \text{ donde } C(4, 5) \text{ e } D(1, 5).$$

A área do quadrilátero $[ABCD]$ é dada por

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = (4 - 1) \times (5 - 0) = 15.$$

5.1 Dada a simetria do polígono, considerem-se apenas os retângulos do 1.º quadrante:

As suas alturas são, respetivamente, as ordenadas dos pontos da circunferência cujas abcissas são

$$x_n = 0,2n \text{ onde } n \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ e}$$

$$y_n = \sqrt{1 - x_n^2} = \sqrt{1 - 0,04n^2}.$$

A área do polígono é dada pela expressão:

$$4 \times (0,2 \times y_1 + 0,2 \times y_2 + 0,2 \times y_3 + 0,2 \times y_4) =$$

$$= 0,8 \times (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

$$= 0,8 \times (\sqrt{0,96} + \sqrt{0,84} + \sqrt{0,64} + \sqrt{0,36}) \approx 2,6370$$

$$\frac{2,6370}{\pi} \approx 0,84, \text{ ou seja, a área do polígono é cerca de } 84\% \text{ da área do círculo.}$$

- 5.2** Novamente, dada a simetria do polígono, considerem-se apenas os retângulos do 1.º quadrante:

As suas alturas são, respetivamente, as ordenadas dos pontos da circunferência cujas abcissas são $x_n = 0,1n$ onde $n \in \{1, \dots, 9\}$ e

$$y_n = \sqrt{1 - x_n^2} = \sqrt{1 - 0,01n^2} = \sqrt{1 - \frac{n^2}{100}}.$$

A área do polígono é dada pela expressão:

$$4 \times \sum_{n=1}^9 (0,1 \times y_n) = 0,4 \times \sum_{n=1}^9 \sqrt{1 - \frac{n^2}{100}} = 0,4 \times (\sqrt{0,99} + \dots + \sqrt{0,19}) \approx 2,9045$$

$\frac{2,9045}{\pi} \approx 0,92$, ou seja, a área do polígono é cerca de 92% da área do círculo.

5.3

- a. A área do polígono é 3,1204.
b. A área do polígono é 3,1396.

1. PRIMITIVAS

PÁG. 13

1. As funções são todas primitivas da função f pois as suas derivadas são a função f .

A expressão geral das primitivas da função f é:

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

2. $G(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$, donde $G(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$
donde $G(x) = \frac{x^3}{3} + 1$

3. $F(x) = \frac{(2-x)x}{x^2} = \frac{2-x}{x} = \frac{2}{x} - 1$ donde $F'(x) = -\frac{2}{x^2}$, tal como $G'(x) = -\frac{2}{x^2}$ em $[-1, 1] \setminus \{0\}$

Basta tomar para I qualquer intervalo contido no domínio da função G , tal como, por exemplo, $I = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

4.1 $\int 2 dx = 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.2 $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.3 $\int 4x^3 dx = x^4 + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.4 $\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.5 $\int \frac{1}{2} x dx = \frac{x^2}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.6 $\int \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{x^3}{6} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.7 $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.8 $\int 3e^{4x} dx = \frac{3e^{4x}}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.9 $\int \frac{3}{x} dx = 3 \ln |x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.10 $\int 2 \cos x dx = 2 \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.11 $\int \frac{\cos x}{3} dx = \frac{\sin x}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.12 $\int -\sin x dx = \cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.13 $\int \frac{\sin x}{4} dx = -\frac{\cos x}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.14 $\int (2x - 1) dx = x^2 - x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.15 $\int (3x^2 - x) dx = x^3 - \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.16 $\int (x^4 + e^{2x}) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{e^{2x}}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.17 $\int \left(\frac{3x^2}{x^3} + 2 \right) dx = \int \left(\frac{3}{x} + 2 \right) dx = 3 \ln |x| + 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.18 $\int [\cos(2x) - x^2] dx = \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{x^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.19 $\int (x-1)^2 dx = \frac{(x-1)^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.20 $\int (x-1)^7 dx = \frac{(x-1)^8}{8} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.21 $\int e^{\frac{x}{3}} dx = 3e^{\frac{x}{3}} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.22 $\int e^{x^2} 2x dx = e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.23 $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \left(\ln^2 x \times \frac{1}{x} \right) dx = \frac{\ln^3 x}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.24 $\int [\sin(3x) + 2] dx = -\frac{\cos(3x)}{3} + 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.25 $\int \left[\cos\left(\frac{x}{3}\right) + x \right] dx = 3 \sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.26 $\int [(x^3 - 1)^5 \times 3x^2] dx = \frac{(x^3 - 1)^6}{6} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.27 $\int (3x+1)^4 dx = \frac{(3x+1)^5}{15} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

4.28 $\int x \cos(x^2) \sin^2(x^2) dx = \frac{\sin^3(x^2)}{6} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

PÁG. 16

5. $\int (3x^2 - 20x - 5) dx = x^3 - 10x^2 - 5x + c, c \in \mathbb{R}$

6. $f(x) = F'(x) = e^{-3x}$

7. $f(x) = F'(x) = 2x$ e $g(x) = G'(x) = 3$

Assim,

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int (2x - 3) dx = x^2 - 3x + c, c \in \mathbb{R}$$

8. $f'(x) = \int (2x - \cos x) dx = x^2 - \sin x + c, c \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \int (x^2 - \sin x + c) dx = \frac{x^3}{3} + \cos x + cx, c \in \mathbb{R}$$

9. Derivando as quatro funções:

$$\left(\frac{\sin^2 x}{2}\right)' = \frac{2 \sin x \cos x}{2} = \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin(2x)}{4}\right)' &= \frac{2 \cos(2x)}{4} = \frac{\cos(2x)}{2} = \\ &= \frac{1 - 2\sin^2 x}{2} = \frac{1}{2} - \sin^2 x \neq \sin x \cos x \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{\cos^2 x}{2}\right)' = -\frac{2 \cos x (-\sin x)}{2} = \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\cos(2x)}{4}\right)' &= -\frac{2[-\sin(2x)]}{4} = \\ &= \frac{2 \times 2 \sin x \cos x}{4} = \sin x \cos x \end{aligned}$$

Note-se também que

$$\int (\sin x \cos x) dx \stackrel{(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x}{=} \frac{\sin^2 x}{2} + c, c \in \mathbb{R}$$

10. $F(x) = \int \frac{(\ln x)^3}{x} dx \stackrel{[(\ln x)^4]' = 4(\ln x)^3 \times \frac{1}{x}}{=} \frac{(\ln x)^4}{4} + c, c \in \mathbb{R},$

onde $F(1) = -1 \Leftrightarrow c = -1$

Assim, $F(x) = \frac{(\ln x)^4}{4} - 1$ e $F(e) = \frac{(\ln e)^4}{4} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

11. Usando derivadas:

$$f(x) = x \tan x + \ln |\cos x| + c =$$

$$= \begin{cases} x \tan x + \ln(\cos x) + c & \text{se } \cos x > 0 \\ x \tan x + \ln(-\cos x) + c & \text{se } \cos x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \tan x + x \times \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} & \text{se } \cos x > 0 \\ \tan x + x \times \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{-\cos x} & \text{se } \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$$

Outra maneira:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x \times \frac{1}{\cos^2 x} dx \stackrel{\text{primitivação por partes}}{=} \text{onde } (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \underbrace{x \tan x}_{g(x) \times f(x)} - \int \underbrace{1}_{g'(x)} \times \underbrace{\tan x}_{f(x)} dx =$$

$$= x \tan x + \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx \stackrel{(\cos x)' = -\sin x}{=}$$

$$= x \tan x + \ln |\cos x| + c, c \in \mathbb{R}$$

12. $F(x) = \int (2x^3 - 4x^2 + 5x - 1) dx = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + c,$
 $c \in \mathbb{R}, \text{ donde } F(1) = 4 \Leftrightarrow c = \frac{10}{3}$

Assim, $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{10}{3}$

13.1 $\int 3x^2 dx = x^3 + c, c \in \mathbb{R}$

13.2 $\int \sin x dx = -\cos x + c, c \in \mathbb{R}$

13.3 $\int (2 \sin x + 3 \cos x) dx = -2 \cos x + 3 \sin x + c, c \in \mathbb{R}$

13.4 $\int (x^3 + x^2 + 1) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x + c, c \in \mathbb{R}$

13.5 $\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + c, c \in \mathbb{R}$

13.6 $\int 2xe^{x^2} dx \stackrel{(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}}{=} e^{x^2} + c, c \in \mathbb{R}$

13.7 $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx \stackrel{(\ln(x^2+1))' = 2x}{=} \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} + c, c \in \mathbb{R}$

13.8 $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx \stackrel{(\sin x)' = \cos x}{=} \ln |\sin x| + c, c \in \mathbb{R}$

13.9 $\int [x^3(x^4 + 1)^8] dx \stackrel{[(x^4+1)^9]' = 9(x^4+1)^8 \times 4x^3}{=} \frac{(x^4 + 1)^9}{36} + c, c \in \mathbb{R}$

13.10 $\int \sqrt{x+1} dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} =$
 $= \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} + c, c \in \mathbb{R}$

13.11 $\int \sin x \cos^3 x dx \stackrel{(\cos^3 x)' = 3 \cos^2 x \times (-\sin x)}{=} -\frac{\cos^3 x}{3} + c, c \in \mathbb{R}$

13.12 $\int \cos^3 x dx = \int \cos x \cos^2 x dx =$
 $= \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx = \underbrace{\int \cos x dx}_{\sin x + k} - \underbrace{\int \cos x \sin^2 x dx}_{(\sin^3 x)' = 3 \sin^2 x \cos x}$
 $= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c, c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 13.13 \quad \int \cos^4 x \, dx &= \int \cos^2 x (1 - \sin^2 x) \, dx = \\
 &= \int \cos^2 x \, dx - \int \cos^2 x \sin^2 x \, dx \\
 &= \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} \, dx - \int \frac{\sin^2(2x)}{4} \, dx \\
 &\quad \begin{array}{l} \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sin(2x) = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \\ \sin^2(2x) = 4 \sin^2 x \cos^2 x \end{array} \\
 &= \int \frac{1}{2} \, dx + \int \frac{\cos(2x)}{2} \, dx - \int \frac{1 - \cos(4x)}{8} \, dx \\
 &\quad \begin{array}{l} \cos(4x) = 1 - 2\sin^2(2x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^2(2x) = \frac{1 - \cos(4x)}{2} \end{array} \\
 &= \frac{1}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4} - \int \frac{1}{8} \, dx + \int \frac{\cos(4x)}{8} \, dx \\
 &= \frac{1}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{1}{8}x + \frac{\sin(4x)}{32} = \\
 &= \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + c, \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$13.14 \quad \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \stackrel{(\cos x)' = -\sin x}{=} -\ln|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 13.15 \quad \int \frac{\ln(3x)}{x} \, dx &= \int \left[\ln(3x) \times \frac{1}{x} \right] \, dx \stackrel{[\ln^2(3x)]' = 2\ln(3x) \times \frac{1}{x}}{=} \\
 &= \frac{\ln^2(3x)}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13.16 \quad \int (\sin x \cos x e^{\cos(2x)}) \, dx &\stackrel{[e^{\cos(2x)}]' = -2\sin(2x)e^{\cos(2x)} = -4\sin x \cos x e^{\cos(2x)}}{=} \\
 &= -\frac{e^{\cos(2x)}}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14.1 \quad f'(x) &= \int -\frac{1}{x^2} \, dx = \frac{1}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
 f(x) &= \int \left(\frac{1}{x} + c \right) \, dx = \ln x + cx + d, \quad c, d \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$14.2 \quad \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(e) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + d = 0 \\ 1 + ce + d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -\frac{1}{e-1} \\ c = \frac{1}{e-1} \end{cases}$$

$$\text{donde } f(x) = \ln x + \frac{x}{e-1} - \frac{1}{e-1}$$

$$\begin{aligned}
 15.1 \quad f(x) &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-6} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{(x-3)(x-6)} = \frac{(A+B)x - 6A - 3B}{(x-3)(x-6)} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -6A-3B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{3} \\ B=\frac{1}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15.2 \quad F(x) &= \int \frac{1}{(x-3)(x-6)} \, dx = \int \frac{-\frac{1}{3}}{x-3} \, dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{x-6} \, dx = \\
 &= -\frac{1}{3} \left(\int \frac{1}{x-3} \, dx - \int \frac{1}{x-6} \, dx \right) = \\
 &\stackrel{x \geq 7 \Rightarrow x-3 > 0 \wedge x-6 > 0}{=} -\frac{1}{3} (\ln(x-3) - \ln(x-6)) + c \\
 &= -\frac{1}{3} \ln \left(\frac{x-3}{x-6} \right) + c = \ln \left(\sqrt[3]{\frac{x-6}{x-3}} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\text{Dado que } F(7) = 0 \Leftrightarrow \ln \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \right) + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{\ln 4}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Assim, } F(x) &= \ln \left(\sqrt[3]{\frac{x-6}{x-3}} \right) + \frac{\ln 4}{3} = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x-6}{x-3} \right) + \frac{\ln 4}{3} = \\
 &= \frac{1}{3} \left[\ln \left(\frac{x-6}{x-3} \right) + \ln 4 \right] = \ln \left[\sqrt[3]{\frac{4(x-6)}{x-3}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16. \quad \frac{2x^2+5x+5}{(x^2-1)(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{2x^2+5x+5}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{(A+B+C)x^2 + (3A+B)x + 2A-2B-C}{(x^2-1)(x+2)}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=2 \\ 3A+B=5 \\ 2A-2B-C=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x^2+5x+5}{(x^2-1)(x+2)} \, dx &= 2 \int \frac{1}{x-1} \, dx - \int \frac{1}{x+1} \, dx + \int \frac{1}{x+2} \, dx = \\
 &= 2 \ln|x-1| - \ln|x+1| + \ln|x+2| = \\
 &= \ln \left| \frac{(x-1)^2(x+2)}{x+1} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17.1 \quad \int x \sin x \, dx &= -x \cos x - \int -\cos x \, dx = \\
 &= -x \cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17.2 \quad \int x e^{-x} \, dx &= -x e^{-x} - \int -e^{-x} \, dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c = \\
 &= -e^{-x}(x+1), \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17.3 \quad \int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \times \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + c = \\
 &= x(\ln x - 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17.4 \quad \int x^2 e^x \, dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx = x^2 e^x - \left(2x e^x - 2 \int e^x \, dx \right) = \\
 &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c = \\
 &= e^x(x^2 - 2x + 2) + c, \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

2. CÁLCULO INTEGRAL

PÁG. 23

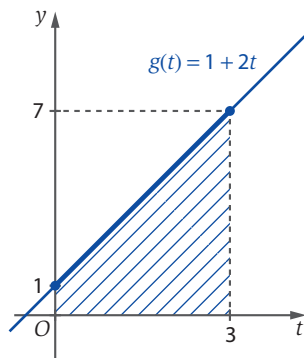
18. $2 \leq 3 \Rightarrow 2x \leq 3x, \forall x \in \mathbb{R}_0^+ \Leftrightarrow g(x) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}_0^+$

onde, em particular, $g(x) \leq f(x), \forall x \in [2, 4]$

$$0 \leq g(x) \leq f(x), \forall x \in [2, 4] \Rightarrow \int_2^4 g(x) dx \leq \int_2^4 f(x) dx$$

19.1 $g(x) = 1 + 2x$ onde $x \in [0, 3]$

$g(0) = 1$ e $g(3) = 7$



19.2 $\int_0^3 (1 + 2x) dx = [x + x^2]_0^3 = 3 + 9 = 12$

20. $\int_2^5 f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x \right]_2^5 = \frac{25}{2} + 15 - 2 - 6 = \frac{39}{2}$

21.1 $\int_0^3 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{9}{2}$

21.2 $\int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$

21.3 $\int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5}$

21.4 $\int_5^7 e^x dx = [e^x]_5^7 = e^7 - e^5 = e^5(e^2 - 1)$

21.5 $\int_e^{2e} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_e^{2e} = \ln(2e) - \ln e = \ln\left(\frac{2e}{e}\right) = \ln 2$

21.6 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin(x) dx = [-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

21.7 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos(x) dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -(-1) = 1$

21.8 $\int_{-1}^0 e^{3x} dx = \left[\frac{e^{3x}}{3} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{3} - \frac{e^{-3}}{3} = \frac{1}{3e^3}(e^3 - 1)$

21.9 $\int_1^2 (x^3 + 1) dx = \left[\frac{x^4}{4} + x \right]_1^2 = 4 + 2 - \frac{1}{4} - 1 = \frac{19}{4}$

21.10 $\int_{-2}^0 (5 + x) dx = \left[5x + \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 = -(-10 + 2) = 8$

21.11 $\int_{-2}^2 (x^2 + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-2}^2 = \frac{8}{3} + 4 - \left(-\frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{40}{3}$

21.12 $\int_0^\pi \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \right) dx = \left[-2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2x \right]_0^\pi = 2\pi - (-2) = 2\pi + 2$

22.1 $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c, c \in \mathbb{R}$ donde $\frac{1}{5} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{5}$

Assim, a primitiva é a função definida no dito intervalo cuja expressão analítica é $F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{1}{5}$.

22.2 $\int \frac{\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{x} dx = \int \ln\left(\frac{x}{3}\right) \times \frac{1}{x} dx \left[\ln^2\left(\frac{x}{3}\right) \right] = 2\ln\left(\frac{x}{3}\right) \times \frac{1}{x} = \frac{\ln^2\left(\frac{x}{3}\right)}{2} + c,$

$c \in \mathbb{R}$ donde $\frac{1}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}$

Assim, a primitiva é a função definida no dito intervalo cuja expressão analítica é $F(x) = \frac{\ln^2\left(\frac{x}{3}\right)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\ln^2\left(\frac{x}{3}\right) - 1 \right)$

23.1 $f(x) = \int_0^x \sin(2t) dt = \left[-\frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^x = \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)] \Rightarrow f'(x) = \sin(2x)$

23.2 $g(x) = \int_{-5}^x e^{3t} dt = \left[\frac{e^{3t}}{3} \right]_{-5}^x = \frac{1}{3} [e^{3x} - e^{-15}] \Rightarrow g'(x) = e^{3x}$

23.3 $h(x) = \int_1^{x^3} \frac{1}{y^2} dy = \left[-\frac{1}{y} \right]_1^{x^3} = -\frac{1}{x^3} + 1 \Rightarrow h'(x) = \frac{3}{x^4}$

23.4 $i(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2x} \cos y dy = [\sin y]_{-\frac{\pi}{2}}^{2x} = \sin(2x) + 1 \Rightarrow i'(x) = 2 \cos(2x)$

PÁG. 26

24.1 $\int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^2 = \frac{8}{3} - 8 + \frac{8}{3} - 8 = -\frac{32}{3}$

24.2 $\int_{-e}^{-1} \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_{-e}^{-1} = -1$

24.3 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \left[-\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

25.1 A função f é contínua em $]-\infty, 1[$ por ser uma função polinomial e é contínua em $]1, +\infty[$ por ser uma função racional (quociente de polinômios).

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, a função f é contínua em $\mathbb{R}$, logo em $[-2, 4]$.

$$\begin{aligned} 25.2 \quad \int_{-2}^4 f(x) dx &= \int_{-2}^1 (2-x^2) dx + \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \\ &= \left[2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^4 = 2 - \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

$$26.1 \quad \int_a^b 2f(x) dx = 2 \int_a^b f(x) dx = 2A$$

$$26.2 \quad \int_b^b (f(x) - 2g(x)) dx = \int_b^b f(x) dx - 2 \int_b^b g(x) dx = A - 2B$$

$$\begin{aligned} 26.3 \quad \int_a^b (f(x) + 2) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b 2 dx = \\ &= A + [2x]_a^b = A + 2(b-a) \end{aligned}$$

PÁG. 29

$$27.1 \quad \int_{-2}^2 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3} \right) = \frac{16}{3}$$

$$27.2 \quad \int_0^1 (5t^3 - 4t) dt = \left[\frac{5t^4}{4} - 2t^2 \right]_0^1 = \frac{5}{4} - 2 = -\frac{3}{4}$$

$$27.3 \quad \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt = \left[\frac{e^{2t}}{2} \right]_0^{\ln 2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$27.4 \quad \int_{-\ln 3}^{\ln 3} (e^t + e^{-t}) dt = [e^t - e^{-t}]_{-\ln 3}^{\ln 3} = 3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 3 = \frac{16}{3}$$

$$27.5 \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(2t) dt = \left[-\frac{\cos(2t)}{2} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$27.6 \quad \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 2 \cos t dt = [2 \sin t]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 1 + 1 = 2$$

$$27.7 \quad \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{t} dt = [\ln t]_{\frac{1}{e}}^e = 1 - (-1) = 2$$

$$\begin{aligned} 27.8 \quad \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t}{t^2+1} dt &= \left[\frac{\ln(t^2+1)}{2} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{1}{2} (\ln 6 - \ln 3) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{6}{3} \right) = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \ln \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$28.1 \quad F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \text{ donde:}$$

$$F'(x) = \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)' = e^{x^2}$$

$$28.2 \quad \underbrace{F(x^2)}_{\substack{(F \circ g)(x) \text{ com } g(x) = x^2 \\ (F \circ g)'(x) = F'(x^2) \times 2x \\ \frac{F'(g(x))}{g'(x)}}} = (F \circ g)(x) = \int_0^{x^2} \cos(t^3) dt \text{ donde:}$$

$$(F \circ g)'(x) = \left(\int_0^{x^2} \cos(t^3) dt \right)' = 2x \cos((x^2)^3) = 2x \cos(x^6)$$

$$\begin{aligned} 28.3 \quad \int_{2x}^0 \tan \sqrt[3]{t} dt &= - \int_0^{2x} \tan \sqrt[3]{t} dt \\ &= - \underbrace{F(2x)}_{\substack{(F \circ g)(x) \text{ com } g(x) = 2x \\ (F \circ g)'(x) = F'(2x) \times \frac{2}{g'(x)}}} = -(F \circ g)(x) = - \int_0^{2x} \tan \sqrt[3]{t} dt \text{ donde:} \\ &= -(F \circ g)'(x) = - \left(\int_0^{2x} \tan \sqrt[3]{t} dt \right)' = -2 \tan(\sqrt[3]{2x}) \end{aligned}$$

29. $3(x^3 - x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$ donde a curva intersesta o eixo Ox nos pontos de coordenadas $(-1, 0)$, $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

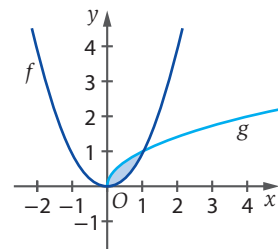
Por outro lado, considerando $f(x) = 3(x^3 - x)$, verifica-se que $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, donde a função f é ímpar, pelo que basta calcular a área em $x \in [-1, 0]$ e multiplicar por 2.

$$\int_{-1}^0 3(x^3 - x) dx = 3 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = -3 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}, \text{ donde a área delimitada é } 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

30. $2x = 2x^2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$ pelo que as curvas se interseam nos pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(1, 2)$.

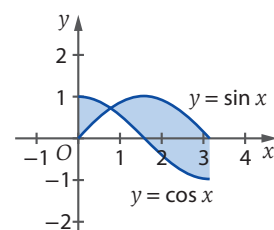
$$\int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \text{ donde a área delimitada é } \frac{1}{3}.$$

31. $x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$ pelo que as curvas se interseam nos pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(1, 1)$.



$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \text{ donde a área delimitada é } \frac{1}{3}.$$

32.1 $\sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ pelo que as curvas se interseam no ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

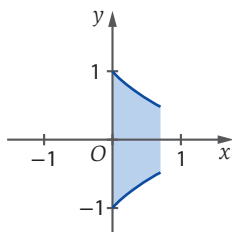


$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx =$$

$$= \underbrace{[\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}}_{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1} + \underbrace{[-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}}_{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2},$$

donde a área delimitada pelas curvas é $2\sqrt{2}$.

- 32.2 $e^{-x} = -e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = 0$ o que é uma equação impossível donde as curvas não se interseitam.



$$\int_0^{\ln 2} [e^{-x} - (-e^{-x})] dx = \int_0^{\ln 2} 2e^{-x} dx =$$

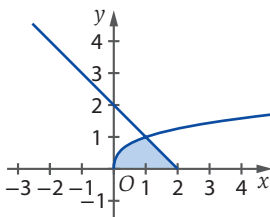
$$= 2 \int_0^{\ln 2} e^{-x} dx = 2[-e^{-x}]_0^{\ln 2} = 2\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = 1,$$

donde a área delimitada pelas curvas é 1.

- 32.3 A área resulta de $y \leq \sqrt[3]{x}$, $y \leq 2 - x$ e $y \geq 0$.

$\sqrt[3]{x} = 2 - x \Rightarrow x = (2 - x)^3 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 13x - 8 = 0$ (na primeira equação é fácil verificar que $x = 1$ é solução, pelo que $x^3 - 6x^2 + 13x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 5x + 8) = 0$, sendo que $x^2 - 5x + 8 = 0$ é uma equação impossível).

$$2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$



$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} dx + \int_1^2 (2 - x) dx = \underbrace{\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^1}_{\frac{3}{4}} + \underbrace{\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2}_{4 - 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2},$$

donde a área delimitada é $\frac{5}{4}$.

PÁG. 33

33. $\int_1^2 (x^2 + 2x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_1^2 = \frac{8}{3} + 4 + 2 - \frac{1}{3} - 1 - 1 = \frac{19}{3}$

34. $\left[\int_0^x \sin(t^2) dt\right]' = \sin(x^2)$

35. $5x - x^2 = 2x \Leftrightarrow 3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$ pelo que as curvas se interseitam nos pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(3, 6)$.

$$\int_0^3 (5x - x^2 - 2x) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 =$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}, \text{ donde a área delimitada é } \frac{9}{2}.$$

36. Dado que $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \stackrel{\cos(-x) = \cos x}{=} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, o

gráfico de $y = \cos x$ resulta de uma translação de vetor de coordenadas $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ do gráfico de

$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x, \text{ donde}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = \int_0^{\pi} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

37. Dado que $\int_a^b f(x) dx > 0$ e $\int_b^c f(x) dx < 0$, a área pode ser representada por $\int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$.

38. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \stackrel{(e^{\tan x})' = e^{\tan x} \times \frac{1}{\cos^2 x}}{=} \left[e^{\tan x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = e - 1$

39. $\int_a^b (f(x) - 2x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b 2x dx =$

$$= 2a + 2b - [x^2]_a^b = a^2 + 2a - b^2 + 2b$$

40. $\int_0^e f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + [\ln x]_1^e = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

41. Para que se possa definir $\int_0^4 f(x) dx$, a função f deverá ser contínua e não negativa em $[0, 4]$.

A função f é contínua em $]-\infty, 2[$ pois é uma função trigonométrica e é contínua em $]2, +\infty[$ por ser uma função racional.

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = k \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}k$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{2}$, para

que a função f seja contínua em $x = 2$ terá de se verifi-

car $\frac{\sqrt{3}}{2}k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Para $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$, a função f é contínua em $\mathbb{R}$, logo em $[0, 4]$.

Por outro lado, em $]2, +\infty[$, a função f é positiva e

em $[0, 2]$, para $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$, a função f toma todas as imagens entre 0 e $\frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, ou seja, é não negativa.

$$\int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) dx + \int_2^4 \frac{2}{x+2} dx =$$

$$= \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3} \left[-\frac{6}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right]_0^2}_{\frac{\sqrt{3}}{\pi}} + \underbrace{2[\ln(x+2)]_2^4}_{\ln\left(\frac{9}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} + \ln\left(\frac{9}{4}\right)$$

$$42.1 \int_0^1 \frac{1}{2t+1} dt = \left[\frac{\ln(2t+1)}{2} \right]_0^1 = \ln \sqrt{3}$$

$$42.2 \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{1}{\sqrt{3t}} dt = \left[\frac{2}{3} \sqrt{3t} \right]_{\frac{1}{3}}^3 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$42.3 \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} (2x \sin x(x^2) \cos(x^2)) dt \underset{[\sin^2(x^2)]' = 4x \sin x(x^2) \cos(x^2)}{=} \\ = \left[\frac{\sin^2(x^2)}{2} \right]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$42.4 \int_{-2}^2 (|t| - 1) dt \underset{|t| - 1 = \begin{cases} t - 1 & \text{se } t \geq 0 \\ -t - 1 & \text{se } t < 0 \end{cases}}{=} \\ = \int_{-2}^0 (-t - 1) dt + \int_0^2 (t - 1) dt = \\ = \left[-\frac{t^2}{2} - t \right]_{-2}^0 + \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_0^2 = 2 - 2 + 2 - 2 = 0$$

$$42.5 \int_{-4}^2 |t^2 + t - 2| dt = \\ = \int_{-4}^{-2} (t^2 + t - 2) dt + \int_{-2}^1 (-t^2 - t + 2) dt + \int_1^2 (t^2 + t - 2) dt \\ = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t \right]_{-4}^{-2} + \left[-\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t \right]_{-2}^1 + \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t \right]_1^2 = \\ = -\frac{8}{3} + 2 + 4 + \frac{64}{3} - 8 - 8 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 + \frac{8}{3} + \\ + 2 - 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = 15$$

$$* |t^2 + t - 2| = \begin{cases} t^2 + t - 2 & \text{se } t^2 + t - 2 \geq 0 \\ -t^2 - t + 2 & \text{se } t^2 + t - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |t^2 + t - 2| = \begin{cases} t^2 + t - 2 & \text{se } t \leq -2 \vee t \geq 1 \\ -t^2 - t + 2 & \text{se } -2 < t < 1 \end{cases}$$

$$42.6 \int_0^{\ln(\frac{3}{2})} e^x \cos(\pi e^x) dx \underset{[\sin(\pi e^x)]' = \pi e^x \cos(\pi e^x)}{=} \left[\frac{\sin(\pi e^x)}{\pi} \right]_0^{\ln(\frac{3}{2})} = -\frac{1}{\pi}$$

$$43.1 f(x) = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2}{(x+3)(x+1)} = \frac{(A+B)x + A + 3B}{(x+3)(x+1)} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A+3B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases} \text{ donde } f(x) = -\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+1}$$

$$43.2 F(x) = \int \left(-\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ = -\ln(x+3) + \ln(x+1) + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right) + c, c \in \mathbb{R}$$

Dado que $F(0) = 0$ obtém-se a equação

$$\ln\left(\frac{1}{3}\right) + c = 0 \Leftrightarrow -\ln 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = \ln 3$$

$$\text{donde } F(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right) + \ln 3 = \ln\left[\frac{3(x+1)}{x+3}\right]$$

$$\int_0^5 \frac{2}{(x+3)(x+1)} dx = \left[\ln\left[\frac{3(x+1)}{x+3}\right] \right]_0^5 = \ln\left(\frac{9}{4}\right)$$

$$44.1 \int_0^\pi x \sin x dx \underset{-x \cos x + \int \cos x dx}{=} [-x \cos x + \sin x]_0^\pi = \pi$$

$$44.2 \int_0^1 x e^{-x} dx \underset{-x e^{-x} + \int e^{-x} dx}{=} [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^1 = -\frac{2}{e} + 1$$

$$44.3 \int_1^e \ln x dx \underset{x \ln x - \int 1 dx}{=} [x \ln x - x]_1^e = 1$$

$$44.4 \int_0^1 x^2 e^x dx \underset{x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x dx)}{=} \\ = [x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x]_0^1 = e - 2$$

$$45.1 a(t) = v'(t) = 2$$

$$45.2 \text{ Como } v(2) = -1 \Leftrightarrow 4 + c = -1 \Leftrightarrow c = -5$$

$$v(t) = x'(t) = 2t - 5 \Rightarrow x(t) = t^2 - 5t + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Como } x(0) = -10 \Leftrightarrow c = -10, \text{ donde } x(t) = t^2 - 5t - 10$$

$$45.3 \int_0^{10} v(x) dx = \int_0^{10} (2x - 1) dx = [x^2 - x]_0^{10} = 90 \text{ m}$$

Significa que o deslocamento do ponto P , nos primeiros segundos, foi de 90 m.

$$46. a(t) = v'(t) = e^{-2t} \Rightarrow v(t) = -\frac{e^{-2t}}{2} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Como } v(0) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + c = 2 \Leftrightarrow c = \frac{5}{2},$$

$$\text{donde } v(t) = -\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{5}{2}$$

$$v(t) = x'(t) = -\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{5}{2} \Rightarrow x(t) = \frac{e^{-2t}}{4} + \frac{5}{2}t + d, d \in \mathbb{R}$$

$$\text{Como } x(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + d = 1 \Leftrightarrow d = \frac{3}{4},$$

$$\text{donde } x(t) = \frac{e^{-2t}}{4} + \frac{5}{2}t + \frac{3}{4}$$

$$47. a(t) = v'(t) = 4 \Rightarrow v(t) = 4t + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Como } v(5) = 10 \Leftrightarrow 20 + c = 10 \Leftrightarrow c = -10,$$

$$\text{donde } v(t) = 4t - 10$$

$$v(t) = x'(t) = 4t - 10 \Rightarrow x(t) = 2t^2 - 10t + d, d \in \mathbb{R}$$

$$\text{Como } x(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0, \text{ donde } x(t) = 2t^2 - 10t.$$

Assim, $x(10) = 100$ unidades de comprimento.

$$48. a(t) = v'(t) = \cos(5t) \Rightarrow v(t) = \frac{\sin(5t)}{5} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Uma vez que } v(0) = c, \text{ conclui-se que } v(t) = \frac{\sin(5t)}{5} + v(0)$$

$$v(t) = x'(t) = \frac{\sin(5t)}{5} + v(0) \Rightarrow x(t) = -\frac{\cos(5t)}{25} + v(0)t + d, \quad d \in \mathbb{R}$$

$$\text{Se } v(0) \neq 0, \text{ então como } x(t) = -\frac{\cos(5t)}{25} + v(0)t + d,$$

$d \in \mathbb{R}$, o ponto P atinge qualquer ponto arbitrariamente afastado da posição inicial pois o fator $v(0)t$ tende para $+\infty$ ou $-\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, consoante $v(0)$ seja um valor positivo ou negativo.

$$\begin{cases} x\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0 \\ x(5\pi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\cos\left(\frac{25\pi}{2}\right)}{25} + v(0)\frac{5\pi}{2} + d = 0 \\ -\frac{\cos(25\pi)}{25} + v(0)5\pi + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{1}{25} \\ v(0) = -\frac{2}{125\pi} \end{cases}$$

$$\text{Assim, } x(t) = -\frac{\cos(5t)}{25} - \frac{2}{125\pi}t + \frac{1}{25} \text{ e } x(0) = -\frac{1}{25} + \frac{1}{25} = 0.$$

49.1

c. A média de f em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ é

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \frac{2}{\pi} [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

A média de f em $[0, 2\pi]$ é

$$\frac{1}{2\pi - 0} \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = \frac{1}{2\pi} [\sin x]_0^{2\pi} = 0$$

d. A média de f em $[0, 5]$ é $\frac{1}{5-0} \int_0^5 x^2 \, dx = \frac{1}{5} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \frac{25}{3}$.

49.2 A função velocidade do ponto P é dada por $f'(x)$.

A média de f' em $[a, b]$ é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f'(x) \, dx &= \frac{1}{b-a} [g(x)]_a^b = \\ &= \frac{1}{b-a} [f(x) + c]_a^b = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \end{aligned}$$

50. Seja f a função definida por $f(t) = t^3 \cos(t^2)$.

$f(-t) = (-t)^3 \cos((-t)^2) = -t^3 \cos(t^2) = -f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, donde f é uma função ímpar, pelo que o seu gráfico é simétrico em relação à origem.

Assim, tomando $x \geq 0$, tem-se que

$$F(-x) = \int_0^{-x} (t^3 \cos(t^2)) \, dt = -\int_{-x}^0 (t^3 \cos(t^2)) \, dt =$$

$$= \int_0^x (t^3 \cos(t^2)) \, dt = F(x),$$

se o gráfico de f é simétrico face à origem
então $\int_{-x}^0 (t^3 \cos(t^2)) \, dt = -\int_0^x (t^3 \cos(t^2)) \, dt$

donde a função F é par.

$$51.1 \int_0^4 2x \, dx = [x^2]_0^4 = 16$$

$$51.2 \int_1^5 (x-1)^{\frac{1}{2}} \, dx = \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^5 = \frac{16}{3}$$

$$51.3 \int_2^4 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}$$

$$51.4 \int_0^3 (3x - x^2) \, dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}$$

$$51.5 \int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^e = 1$$

$$51.6 \int_0^1 e^{2x} \, dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$

52.1

$$\begin{aligned} \text{e. } \int_{-a}^a f(x) \, dx &= \int_{-a}^0 f(x) \, dx + \int_0^a f(x) \, dx \\ &= -\int_0^a f(x) \, dx + \int_0^a f(x) \, dx = 0 \end{aligned}$$

se o gráfico de f é simétrico face à origem então $\int_{-a}^0 f(x) \, dx = -\int_0^a f(x) \, dx$

$$\text{f. } \int_{-a}^0 f(x) \, dx = -\int_0^a f(x) \, dx = -A$$

$$\begin{aligned} \text{g. } \int_0^a f(-x) \, dx &= -\int_0^a f(x) \, dx = -A \\ &= \int_0^a -f(x) \, dx = -\int_0^a f(x) \, dx = -A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h. } \int_{-a}^0 -f(x) \, dx &= -\int_{-a}^0 f(x) \, dx = \int_0^a f(x) \, dx = A \\ &= -\left[-\int_0^a f(x) \, dx\right] = A \end{aligned}$$

$$\text{i. } \int_{-a}^a f(x) + 1 \, dx = \int_{-a}^a f(x) \, dx + \int_{-a}^a 1 \, dx = [x]_{-a}^a = 2a$$

$$\text{j. } \int_{-a}^a f(-x) \, dx = -\int_{-a}^a f(x) \, dx = -\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$$

52.2 Por exemplo, $f(x) = x^3 - x$ e $a = 1$.

$$\int_{-1}^1 |x^3 - x| \, dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x) \, dx + \int_0^1 (-x^3 + x) \, dx = \frac{1}{2} \neq 2$$

$$53. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} [g(x) - f(x)] \, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} 2 \, dx = [2x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} = 2\pi$$

$$54. \left| \int_a^b [g(x) - f(x)] \, dx \right| = \left| \int_a^b k \, dx \right| = |[kx]_a^b| = |k|(b-a)$$

55. As equações das retas que contêm os lados do quadrilátero são:

$$\text{Reta } AB: y = -\frac{1}{3}x + 2$$

$$\text{Reta } BC: y = 2x - 5$$

$$\text{Reta } CD: y = \frac{1}{5}x + 4$$

$$\text{Reta } AD: x = 0$$

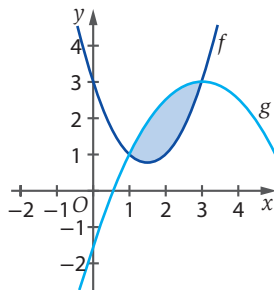
A medida da área do quadrilátero é:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left[\frac{1}{5}x + 4 - \left(-\frac{1}{3}x + 2 \right) \right] dx + \int_3^5 \left[\frac{1}{5}x + 4 - (2x - 5) \right] dx = \\ = \left[\frac{4}{15}x^2 + 2x \right]_0^3 + \left[-\frac{9}{10}x^2 + 9x \right]_3^5 = 12 \end{aligned}$$

56. Sejam f e g as funções definidas, respectivamente, por

$$f(x) = x^2 - 3x + 3 \text{ e } g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}.$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$



$$\int_1^3 [g(x) - f(x)] dx = \left[-\frac{x^3}{2} + 3x^2 - \frac{9}{2}x \right]_1^3 = 2,$$

donde a área delimitada é 2.

TESTE – PÁG. 42

1. $F'(x) = 3x^2$ e $G'(x) = 2x$, donde as funções F e G são primitivas, respectivamente, das funções $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = 2x$.

$$2.1 \quad \int 3 \times g(x) dx = 3 \int g(x) dx = 3[G(x) + k] = 3 \sin x + c$$

$$2.2 \quad \begin{aligned} \int f(x) + g(x) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx = \\ &= F(x) + a + G(x) + b = e^{2x} + 1 + \sin x + c \end{aligned}$$

$$2.3 \quad F(0) = e^0 + 1 = 2$$

$$3. \quad \begin{aligned} \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^5} \right) dx &= \int \frac{1}{x} dx + 2 \int x^{-5} dx = \\ &= \ln |x| + 2 \times \frac{x^{-4}}{-4} + c = \ln |x| - \frac{1}{2x^4} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$4. \quad \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = [F(x)]_1^4 = [\sqrt{x}]_1^4 = \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1$$

$$5.1 \quad \begin{aligned} \int \frac{5}{\sqrt[3]{x}} dx &= 5 \int x^{-\frac{1}{3}} dx = 5 \times \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c = \\ &= \frac{15}{2} \sqrt[3]{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$5.2 \quad \begin{aligned} \int \left(x^3 + 5x - \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^5} \right) dx &= \\ &= \int x^3 dx + 5 \int x dx - 4 \int x^{-2} dx - \int x^{-5} dx \\ &= \frac{x^4}{4} + 5 \times \frac{x^2}{2} - 4 \times \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-4}}{-4} + c \\ &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{4}{x} + \frac{1}{4x^4} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$6. \quad \begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = \\ &= \int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 2x dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + [x^2]_2^4 = \frac{8}{3} - 0 + 16 - 4 = \frac{44}{3} \end{aligned}$$

$$7. \quad \begin{aligned} a(x) &= \int_0^x f(x) du = \int_0^x \frac{e^{\frac{u}{2}} - 1}{3} du = \frac{1}{3} \left(\int_0^x e^{\frac{u}{2}} du - \int_0^x 1 du \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left([2e^{\frac{u}{2}}]_0^x - [u]_0^x \right) = \frac{1}{3} (2e^{\frac{x}{2}} - 2 - x) = \frac{2}{3} \left(e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$8.1 \quad \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} + 1 \end{aligned}$$

$$8.2 \quad \begin{aligned} \int_0^{\ln(2)} (e^{2x} \sin(\pi e^{2x})) dx &= \int_0^{\ln(2)} (e^{2x} \sin(\pi e^{2x})) dx \quad (-\cos(\pi e^{2x}))' = 2\pi e^{2x} \sin(\pi e^{2x}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\ln(2)} (2\pi e^{2x} \sin(\pi e^{2x})) dx = \frac{1}{2\pi} [-\cos(\pi e^{2x})]_0^{\ln(2)} \\ &= \frac{1}{2\pi} (-\cos(4\pi) + \cos \pi) = -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$$9.1 \quad \begin{aligned} \int_{-1}^2 (x^2 + 1 - x) dx &= \left[\frac{x^3}{3} + x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 = \\ &= \frac{8}{3} + 2 - 2 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

9.2 $\sqrt{x} = \sqrt{4-x} \Rightarrow x = 4-x \Leftrightarrow x = 2$

Como $x = 2$ verifica a equação anterior, os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{4-x}$ interseitam-se no ponto de abscissa 2.

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left(\sqrt{x} - \left(-\frac{1}{4}x \right) \right) dx + \int_2^4 \left(\sqrt{4-x} - \left(-\frac{1}{4}x \right) \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x \right) dx + \int_2^4 \left((4-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x \right) dx \\ &= \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{4} \frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left[-\frac{(4-x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{4} \frac{x^2}{2} \right]_2^4 \\ &= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{x^2}{8} \right]_0^2 + \left[-\frac{2}{3}(4-x)\sqrt{4-x} + \frac{x^2}{8} \right]_2^4 \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{2} + 2 + \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{3}\sqrt{2} + 2 \end{aligned}$$

Números complexos

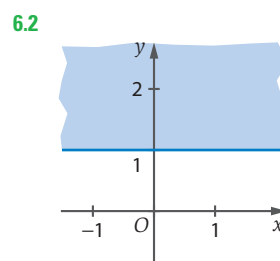
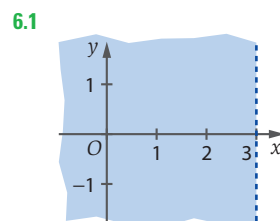
DIAGNÓSTICO – PÁG. 46

- 1.1 $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2 - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} = 3 + 2 - 2\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6}$
- 1.2 $(\sqrt{8} + \sqrt{2})^2 = \sqrt{8}^2 + \sqrt{2}^2 + 2 \times \sqrt{8} \times \sqrt{2} = 8 + 2 + 2\sqrt{16} = 10 + 2 \times 4 = 18$
- 1.3 $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt{7}) = \sqrt{7}^2 - \sqrt{3}^2 = 7 - 3 = 4$
- 1.4 $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + 1) = \sqrt{7}^2 + \sqrt{7} - \sqrt{3} \times \sqrt{7} - \sqrt{3} = 7 + \sqrt{7} - \sqrt{21} - \sqrt{3}$
- 1.5 $(\sqrt{2a} - \sqrt{a})(\sqrt{2a} + \sqrt{a}) = \sqrt{2a}^2 - \sqrt{a}^2 = 2a - a = a$
- 1.6 $(\sqrt{15a} + \sqrt{3b})^2 = \sqrt{15a}^2 + \sqrt{3b}^2 + 2 \times \sqrt{15a} \times \sqrt{3b} = 15a + 3b + 2\sqrt{45ab} = 15a + 3b + 2 \times 3\sqrt{5ab} = 15a + 3b + 6\sqrt{5ab}$
- 1.7 $\frac{(\sqrt[3]{a^2})^5 \times \sqrt[3]{b \times a^2}}{\sqrt[3]{b^2 \times a^5}} = \frac{(a^{\frac{2}{3}})^5 \times (b \times a^2)^{\frac{1}{3}}}{(b^2 \times a^5)^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{10}{3}} \times b^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{5}{3}}} = a^{\frac{10}{3} + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}} \times b^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{3}} \times b^{-\frac{1}{3}} = \frac{a^{\frac{7}{3}} \times a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = a^2 \times \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$
- 2.1 $\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{5}}} = \frac{a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{2}{5} + \frac{3}{5}}} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{a}$
- 2.2 $\frac{\sqrt[5]{a^2 - 2a + 1}}{\sqrt[5]{1 - a}} = \frac{\sqrt[5]{(1 - a)^2}}{\sqrt[5]{1 - a}} = \frac{(1 - a)^{\frac{2}{5}}}{(1 - a)^{\frac{1}{5}}} = (1 - a)^{\frac{2}{5} - \frac{1}{5}} = \sqrt[5]{1 - a} = -\sqrt[5]{a - 1}$
- 2.3 $\frac{a}{\sqrt{a+2} + \sqrt{2}} = \frac{a(\sqrt{a+2} - \sqrt{2})}{(\sqrt{a+2} + \sqrt{2})(\sqrt{a+2} - \sqrt{2})} = \frac{a(\sqrt{a+2} - \sqrt{2})}{a+2 - 2} = \frac{a(\sqrt{a+2} - \sqrt{2})}{a} = \sqrt{a+2} - \sqrt{2}$
- 2.4 $\frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{a^3}} = \frac{a}{\sqrt{a}(1 + \sqrt{a^2})} = \frac{a \times \sqrt{a}}{\sqrt{a}(1 + a) \times \sqrt{a}} = \frac{a\sqrt{a}}{a(1 + a)} = \frac{\sqrt{a}}{1 + a}$

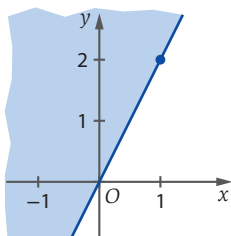
- 3.1 $b = -2$
 $10 + i = -2 \Leftrightarrow i = -12$
 $4a = i \Leftrightarrow a = \frac{-12}{4} = -3$
 $c = a \times b = 6$
 $d = -4 + c = 2$
 $e = a \times d = -6$
 $f = 3 + e = -3$
 $h = a \times f = 9$
 $g + h = 4 \Leftrightarrow g = -5$

- 3.2 $D(x) = -2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x + 10$
 $d(x) = x + 3$
 $Q(x) = -2x^3 + 2x^2 - 3x + 4$
 $R(x) = -2$

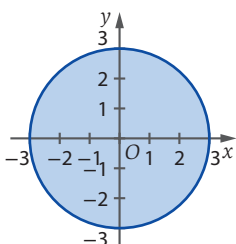
- 4.1 O polinómio é divisível por $x - 1$ se uma das suas raízes for 1, pelo que $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 1$.
- 4.2 $P(-2) = 0 \Leftrightarrow 13 + 2k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{13}{2}$
- 5.1 Semiplano fechado, donde $x \geq -2$.
- 5.2 Semiplano aberto, definido por $y < 1$.
- 5.3 Dado que a reta é a bissetriz dos quadrantes ímpares, tem-se o semiplano aberto definido por $y > x$.
- 5.4 Interior do círculo de centro na origem do referencial e raio 2, definido por $x^2 + y^2 < 4$.
- 5.5 Dado que a reta é a bissetriz dos quadrantes pares, tem-se o semiplano aberto definido por $y < -x$ intersecado com o círculo de centro na origem do referencial e raio 2, pelo que o domínio plano é definido por $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y < -x$.
- 5.6 Exterior do círculo de centro no ponto de coordenadas $(1, -2)$ e raio, definido por $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 > 1$.



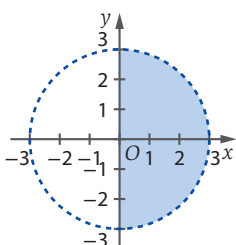
6.3



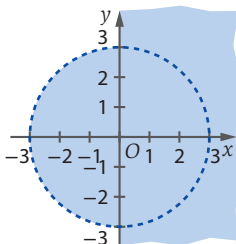
6.4



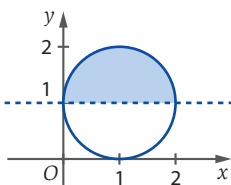
6.5



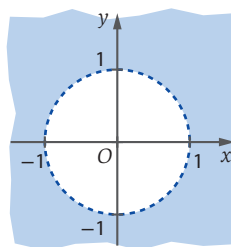
6.6



6.7



6.8



1. INTRODUÇÃO AOS NÚMEROS COMPLEXOS

PÁG. 54

$$\begin{aligned} 1. \quad & [(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) = \\ & = ((a + c) + e, (b + d) + f) \stackrel{\text{associatividade em } \mathbb{R}}{=} \\ & = (a + (c + e), b + (d + f)) \\ & = (a, b) + (c + e, d + f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)] \end{aligned}$$

2.1 A parte real é 4 e a parte imaginária é 5.

2.2 A parte real é 4 e a parte imaginária é -5.

2.3 A parte real é -4 e a parte imaginária é 5.

2.4 A parte real é -4 e a parte imaginária é -5.

$$3.1 \quad \operatorname{Re}(z) = 4 \text{ e } \operatorname{Im}(z) = -\frac{3}{2}.$$

$$3.2 \quad \operatorname{Re}(z) \neq 0 \text{ e } \operatorname{Im}(z) \neq 0.$$

$$4. \quad z = (2 + i) + (3 - 2i) = 5 - i. \text{ Então, } \operatorname{Re}(z) = 5 \text{ e } \operatorname{Im}(z) = -1.$$

5. Reais são os números -2 e 2 e imaginários puros são os números $-2i$ e $3i$.

$$6.1 \quad a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \vee a = 1$$

$$6.2 \quad 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$$

$$7.1 \quad (0, 2) = 2i$$

$$7.2 \quad (2, 0) = 2$$

$$7.3 \quad (1, 1) = 1 + i$$

$$7.4 \quad \left(1, -\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3}i$$

$$7.5 \quad (-\sqrt{2}, \pi) = -\sqrt{2} + \pi i$$

$$7.6 \quad (4, \sqrt{3}) = 4 + \sqrt{3}i$$

$$8.1 \quad z + w = \underbrace{(0, 1)}_i + \underbrace{(1, 0)}_1 = 1 + i$$

$$z \times w = \underbrace{(0, 1)}_i \times \underbrace{(1, 0)}_1 = i$$

$$8.2 \quad z + w = \underbrace{(2, 1)}_{2+i} + \underbrace{(0, -1)}_{-i} = 2$$

$$z \times w = \underbrace{(2, 1)}_{2+i} \times \underbrace{(0, -1)}_{-i} = -2i - \underbrace{i^2}_{-1} = 1 - 2i$$

$$8.3 \quad z + w = -2 - i + 1 + 2i = -1 + i$$

$$z \times w = (-2 - i) \times (1 + 2i) = -2 - 4i - i - 2i^2 = -5i$$

$$8.4 \quad z + w = \sqrt{2} + \frac{i}{2} + i = \sqrt{2} + \frac{3}{2}i$$

$$z \times w = \left(\sqrt{2} + \frac{i}{2}\right) \times i = \sqrt{2}i + \frac{i^2}{2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{2}i$$

$$8.5 \quad z + w = -\frac{1}{2} - 2i$$

$$z \times w = -\frac{1}{2} \times (-2i) = i$$

$$8.6 \quad z + w = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i + \underbrace{(-1, -1)}_{-1-i} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$$

$$z \times w = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}i\right) \times \underbrace{(-1, -1)}_{-1-i} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i - \frac{1}{3}i - \frac{1}{3}i^2 = -\frac{1}{3} - i$$

$$9.1 \quad (4 + i)^2 = 4^2 + \underbrace{i^2}_{-1} + 8i = 15 + 8i$$

$$9.2 \quad (i + 1)^2 - (i - 1)^2 = (i + 1 + i - 1)[i + 1 - (i - 1)] = 4i$$

PÁG. 61

$$10.1 \quad \operatorname{Re}(z) = -2$$

$$10.2 \quad \operatorname{Im}(z) = 3$$

$$10.3 \quad \bar{z} = -2 - 3i$$

$$10.4 \quad |z| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$11. \text{ Seja } z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$$11.1 \quad z \times \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 \underbrace{i^2}_{-1} = a^2 + b^2 \underset{a^2+b^2 \geq 0}{=} \sqrt{a^2 + b^2}^2 = |z|^2$$

$$11.2 \quad |z|^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (-b)^2 \underset{a^2+(-b)^2 \geq 0}{=} \sqrt{a^2 + (-b)^2}^2 = |z|^2$$

$$12.1 \quad z_1 - 3z_2 = 2 - 3i - 3(-5i) = 2 - 3i + 15i = 2 + 12i$$

$$12.2 \quad \bar{z}_1 - iz_4 = 2 + 3i - i(-1 - 2i) = 2 + 3i + i + 2i^2 = 4i$$

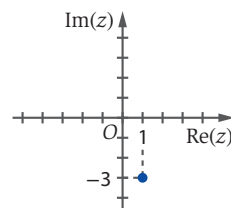
$$12.3 \quad -2z_3 + iz_1 - z_2 \times \bar{z}_4 = -2(-3 + i) + i(2 - 3i) - (-5i)(-1 + 2i) = 6 - 2i + 2i + 3 - 5i - 10 = -1 - 5i$$

$$13. \quad P_1(1, -1) \text{ e } P_2(3, 2)$$

Dado que $[P_1P_2]$ é um dos lados do quadrado, basta usar um vetor perpendicular $\overrightarrow{P_1P_2}(2, 3)$, com a mesma norma que $\overrightarrow{P_1P_2}$, para obter as coordenadas dos outros vértices, pelo que se têm duas soluções possíveis:

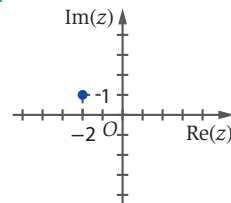
- Tomando o vetor $\vec{u}(-3, 2) \perp \overrightarrow{P_1P_2}$ tem-se $P_3 = P_2 + \vec{u}$, com coordenadas $(0, 4)$, e $P_4 = P_1 + \vec{u}$, com coordenadas $(-2, 1)$, donde $z_3 = 4i$ e $z_4 = -2 + i$;
- Tomando o vetor $\vec{u}(3, -2) \perp \overrightarrow{P_1P_2}$ tem-se $P_3 = P_2 + \vec{u}$, com coordenadas $(6, 0)$, e $P_4 = P_1 + \vec{u}$, com coordenadas $(4, -3)$, donde $z_3 = 6$ e $z_4 = 4 - 3i$.

$$14.1$$



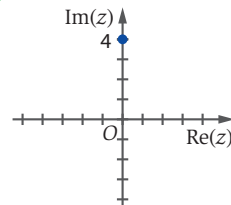
$$|1 - 3i| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$14.2$$



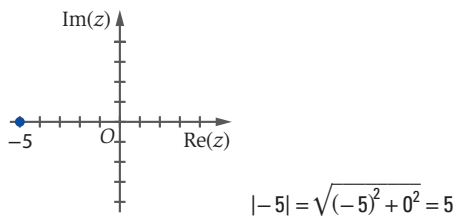
$$|-2 + i| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$14.3$$



$$|4i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$$

14.4



15.1 $\bar{z} = -1 + i$ e $-z = 1 + i$

15.2 $\bar{z} = -5 - 2i$ e $-z = 5 + 2i$

15.3 $\bar{z} = 4 + 2i$ e $-z = -4 + 2i$

15.4 $\bar{z} = \sqrt{2} - i$ e $-z = -\sqrt{2} - i$

15.5 $\bar{z} = -z = \frac{1}{2}i$

15.6 $\bar{z} = 7$ e $-z = -7$

16.1 Seja $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$$

Uma vez que $2a \in \mathbb{R}$, então $z + \bar{z}$ é um número real.

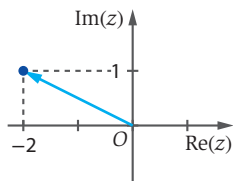
16.2 Seja $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$z - \bar{z} = a + bi - (a - bi) = 2bi$$

Uma vez que $2bi$ é um imaginário puro, então $z - \bar{z}$ é um imaginário puro.

17.1 $\text{Re}(z) = -2$ e $\text{Im}(z) = 1$.

17.2



17.3 $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

18.1 $z - w = 3 - 4i - (2 - i) = 1 - 3i$

18.2 $z + \bar{w} = 3 - 4i + 2 + i = 5 - 3i$

18.3 $w - z \times w = 2 - i - (3 - 4i)(2 - i) =$
 $= 2 - i - 6 + 3i + 8i + 4 = 10i$

19. $\frac{z_1 \times \bar{z}_1}{|z_1|^2} - z_2 = (-3)^2 + (-1)^2 - (2 - 6i) = 8 + 6i$,

donde $|z_1 \times \bar{z}_1 - z_2| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

PÁG. 65

20.1 $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2 - \underbrace{i^2}_{-1}} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

20.2 $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1^2 - \underbrace{i^2}_{-1}} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

20.3 $\frac{1}{\sqrt{3}-2i} = \frac{\sqrt{3}+2i}{(\sqrt{3}-2i)(\sqrt{3}+2i)} = \frac{\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}^2 - \underbrace{(2i)^2}_{-4}} =$
 $= \frac{\sqrt{3}+2i}{7} = \frac{\sqrt{3}}{7} + \frac{2}{7}i$

21.1 $z_1 \times z_2 = (2-4i)(-3-i) = -6 - 2i + 12i - 4 = -10 + 10i$

21.2 $z_1 \times z_3 = (2-4i)(-3i) = -6i - 12 = -12 - 6i$

21.3 $z_2 \times z_3 = (-3-i)(-3i) = 9i - 3 = -3 + 9i$

21.4 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-4i}{-3-i} = \frac{(2-4i)(-3+i)}{(-3-i)(-3+i)} = \frac{-6+2i+12i+4}{(-3)^2 - \underbrace{i^2}_{-1}} =$
 $= \frac{-2+14i}{10} = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$

21.5 $\frac{z_1}{z_3} = \frac{2-4i}{-3i} = \frac{(2-4i)3i}{(-3i)3i} = \frac{6i+12}{9} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i$

21.6 $\frac{z_3}{z_1} = \frac{-3i}{2-4i} = \frac{-3i(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)} = \frac{-6i+12}{2^2 - (4i)^2} = \frac{12-6i}{20} = \frac{3}{5} - \frac{3}{10}i$

22.1 $z_1 + z_2 = -1 + 3i + 3 - i = 2 + 2i$

22.2 $z_1 - z_2 = -1 + 3i - (3 - i) = -4 + 4i$

22.3 $z_1 \times z_2 = (-1+3i)(3-i) = -3 + i + 9i + 3 = 10i$

22.4 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+3i}{3-i} = \frac{(-1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{-3-i+9i-3}{3^2 - i^2} =$
 $= \frac{-6+8i}{10} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

22.5 Dado que $z_1, z_2 \neq 0$, tem-se

$$\frac{z_1}{\bar{z}_1} = \frac{z_1 \times z_1}{\bar{z}_1 \times z_1} = \frac{z_1^2}{|z_1|^2} = \frac{(-1+3i)^2}{(-1)^2 + 3^2} = \frac{1-9-6i}{10} = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$$

$$\text{e } \frac{\bar{z}_2}{z_2} = \frac{\bar{z}_2 \times \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{\bar{z}_2^2}{|z_2|^2} = \frac{(3+i)^2}{3^2 + (-1)^2} = \frac{9-1+6i}{10} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$$

Então,

$$\frac{z_1 \bar{z}_2}{z_1 z_2} = \frac{z_1}{\bar{z}_1} \times \frac{\bar{z}_2}{z_2} = \left(-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right) \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right) = -\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)^2 =$$

 $= -\frac{16}{25} + \frac{9}{25} - \frac{24}{25}i = -\frac{7}{25} - \frac{24}{25}i.$

$$22.6 \quad -z_1(\overline{z_1+z_2})_{z_1+z_2=2+2i} = -(-1+3i)(2-2i) = 2-2i-6i-6 = -4-8i$$

$$23. \quad \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-1+2i}{1^2-i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\text{e } \frac{1-i}{1+i} = \frac{1}{\frac{1+i}{1-i}} = \frac{1}{1-i} = \frac{-i}{-i^2} = -i,$$

$$\text{donde } z = \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} = i - (-i) = 2i.$$

$$24. \quad -\frac{\overline{w}}{2z+i} = -\frac{4+3i}{-2-2i+i} = -\frac{4+3i}{-2-i} = \frac{4+3i}{2+i} = \frac{(4+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{8-4i+6i+3}{2^2-i^2} = \frac{11+2i}{5} = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$25. \quad iz = 1-i \Leftrightarrow -i(iz) = -i(1-i) \Leftrightarrow \Leftrightarrow -i^2z = -i+i^2 \Leftrightarrow z = -1-i$$

$$26. \quad \text{Seja } z = a+bi, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$$i-3z = \overline{z} \Leftrightarrow i-3(a+bi) = a-bi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3a-a+i-3bi+bi = 0 \Leftrightarrow -2a+(1-2b)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a=0 \\ 1-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ donde a solução é } z = \frac{1}{2}i.$$

$$27. \quad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \times \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{1}{z} \text{ não é um número real nem um imaginário puro pois}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \neq 0 \wedge \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) \neq 0, \text{ uma vez que, quer } a, \text{ quer } b, \text{ são números reais não nulos.}$$

$$28.1 \quad \frac{1}{z} - \frac{1}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}-z}{z \times \overline{z}} = \frac{-2i}{z \times \overline{z} = |z|^2} = \frac{-2i}{a^2+1}$$

$$\text{Assim, } \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{\overline{z}} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{-2i}{a^2+1} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{a^2+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 3 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{3}.$$

$$28.2 \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}+z}{z \times \overline{z}} = \frac{2a}{z \times \overline{z} = |z|^2} = \frac{2a}{a^2+1}$$

$$\text{Assim, } \left| \frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{2a}{a^2+1} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2|a|}{a^2+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |a| = \frac{a^2+1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{a^2+1}{4} \vee a = -\frac{a^2+1}{4}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 1 = 0 \vee a^2 + 4a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \pm \sqrt{3} \vee a = -2 \pm \sqrt{3}.$$

$$29. \quad z = \frac{k-i}{1+2i} = \frac{(k-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{k-2ki-i-2}{1^2-(2i)^2} = \frac{k-2}{5} - \frac{2k+1}{5}i$$

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{k-2}{5} - \frac{2k+1}{5}i \right| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{k-2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2k+1}{5}\right)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5k^2+5} = 5 \Rightarrow 5k^2+5 = 25 \Leftrightarrow k = \pm 2$$

Como $5k^2+5 > 0$, os dois valores de k são soluções.

PÁG. 72

$$30. \quad e^{i\pi} + 1 = \underbrace{\cos \pi}_{-1} + i \underbrace{\sin \pi}_0 + 1 = 0$$

$$31.1 \quad z = -2-2i$$

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

Com $\theta = \operatorname{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$ tem-se

$$\tan \theta = \frac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow \theta = -\frac{3\pi}{4}$$

O afixo de $z \in 3.^\circ$ quadrante

$$\text{Assim, } z = 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}.$$

$$31.2 \quad z = -1+i$$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Como $\theta = \operatorname{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$, tem-se

$$\tan \theta = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

O afixo de $z \in 2.^\circ$ quadrante

$$\text{Assim, } z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

$$31.3 \quad z = i$$

$$|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

Como $\theta = \operatorname{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$, tem-se $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Assim, } z = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

$$31.4 \quad z = -3$$

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$$

Com $\theta = \operatorname{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$, tem-se $\theta = \pi$.

$$\text{Assim, } z = 3e^{i\pi}.$$

$$31.5 \quad z = -4i$$

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$$

Com $\theta = \operatorname{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$, tem-se $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

$$\text{Assim, } z = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

32. Com $\theta = \text{Arg}(w) \in]-\pi, \pi]$ tem-se

$$\tan \theta = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

O afixo de $w \in 4.^\circ$ quadrante

$$\begin{aligned} 33.1 \quad z &= 2\sqrt{2} e^{\frac{7\pi i}{4}} = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \\ &= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 - 2i \end{aligned}$$

$\cos \frac{7\pi}{4} = \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\sin \frac{7\pi}{4} = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned} 33.2 \quad z &= \sqrt{2} e^{-\frac{\pi i}{4}} = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - i \end{aligned}$$

$\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$33.3 \quad z = 4 e^{\pi i} = 4 (\cos \pi + i \sin \pi) = 4(-1) = -4$$

$\cos \pi = -1$
 $\sin \pi = 0$

$$\begin{aligned} 33.4 \quad z &= 2 e^{-\frac{\pi i}{2}} = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= 2(-i) = -2i \end{aligned}$$

$\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0$
 $\sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -1$

$$33.5 \quad z = 2 e^{\frac{\pi i}{3}} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
 $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} 33.6 \quad z &= \sqrt{3} e^{\frac{11\pi i}{6}} = \sqrt{3} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

$\cos \frac{11\pi}{6} = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\sin \frac{11\pi}{6} = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2}$

$$34.1 \quad -\frac{\pi}{5} \in]-\pi, \pi] \Rightarrow \text{Arg} \left(3 e^{-\frac{\pi i}{5}} \right) = -\frac{\pi}{5}$$

$$34.2 \quad -\pi \notin]-\pi, \pi] \Rightarrow \text{Arg}(e^{-\pi i}) = \pi$$

$$34.3 \quad \frac{9\pi}{4} \notin]-\pi, \pi] \Rightarrow \text{Arg} \left(2 e^{\frac{9\pi i}{4}} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$34.4 \quad \frac{19\pi}{3} \notin]-\pi, \pi] \Rightarrow \text{Arg} \left(\frac{3}{2} e^{\frac{19\pi i}{3}} \right) = \frac{\pi}{3}$$

34.5 Com $\theta = \text{Arg}(\sqrt{3} - i) \in]-\pi, \pi]$, tem-se

$$\tan \theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{6}$$

O afixo de $\sqrt{3} - i \in 4.^\circ$ quadrante

34.6 Com $\theta = \text{Arg}(-2 - 2i) \in]-\pi, \pi]$, tem-se

$$\tan \theta = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{3\pi}{4}$$

O afixo de $-2 - 2i \in 3.^\circ$ quadrante

34.7 Com $\theta = \text{Arg}(4) \in]-\pi, \pi]$, tem-se $\theta = 0$.

$$34.8 \quad 2\pi \notin]-\pi, \pi] \Rightarrow \text{Arg} \left(\frac{\pi}{2} e^{2\pi i} \right) = 0$$

35.1 Com $\theta = \text{Arg}(-1) \in]-\pi, \pi]$, tem-se $\theta = \pi$.

35.2 Com $\theta = \text{Arg}(3i) \in]-\pi, \pi]$, tem-se $\theta = \frac{\pi}{2}$.

35.3 Com $\theta = \text{Arg}(i - 1) \in]-\pi, \pi]$, tem-se

$$\tan \theta = \frac{1}{-1} = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

O afixo de $i - 1 \in 2.^\circ$ quadrante

$$\begin{aligned} 36.1 \quad z_1 &= 3 e^{i \left(-\frac{\pi}{5} \right)} = 3 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{5} \right) \right] = 3 \left[\cos \left(2\pi - \frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{5} \right) \right] \\ &= 3 \left(\cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5} \right) = z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 36.2 \quad -z_1 &= -3 e^{-\frac{\pi i}{5}} = 3 e^{\pi i} \times e^{-\frac{\pi i}{5}} = 3 e^{\left(-\frac{\pi}{5} + \pi \right) i} = 3 e^{\frac{4\pi i}{5}} \\ \overline{z_1} &= 3 e^{\frac{\pi i}{5}} \end{aligned}$$

$\frac{4\pi}{5} \in]-\pi, \pi]$

$$37. \quad z = -1 + 2i$$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Com $\theta = \text{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$, tem-se

$$\tan \theta = \frac{2}{-1} = -2 \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}(-2) + \pi \approx 2,03;$$

O afixo de $z \in 2.^\circ$ quadrante

$$\text{Assim, } z = \sqrt{5} e^{i2,03}.$$

$$38. \quad |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

Com $\theta = \text{Arg}(z_2) \in]-\pi, \pi]$; tem-se

$$\tan \theta = \frac{2}{-2} = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{3\pi}{4};$$

O afixo de $z \in 2.^\circ$ quadrante

$$\text{Assim, } z_2 = 2\sqrt{2} e^{\frac{3\pi i}{4}}.$$

$$38.1 \quad z_1 \times z_2 = 2 e^{\frac{\pi i}{3}} \times 2\sqrt{2} e^{\frac{3\pi i}{4}} = 4\sqrt{2} e^{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} \right) i} = 4\sqrt{2} e^{\frac{13\pi i}{12}}$$

$$38.2 \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 e^{\frac{\pi i}{3}}}{2\sqrt{2} e^{\frac{3\pi i}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} \right) i} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{5\pi i}{12}}$$

$$38.3 \quad -\frac{1}{z_2 - 1} = \frac{e^{\pi i}}{2\sqrt{2} e^{\frac{3\pi i}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{\left(\pi - \frac{3\pi}{4} \right) i} = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{\frac{\pi i}{4}}$$

$$38.4 \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{5\pi i}{12}}} = \frac{e^{0i}}{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{5\pi i}{12}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{5\pi i}{12}} = \sqrt{2} e^{\frac{5\pi i}{12}}$$

$$38.5 \quad z_1 \times \overline{z_2} = 2 e^{\frac{\pi i}{3}} \times 2\sqrt{2} e^{-\frac{3\pi i}{4}} = 4\sqrt{2} e^{\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} \right) i} = 4\sqrt{2} e^{-\frac{5\pi i}{12}}$$

$$\begin{aligned} 38.6 \quad \frac{z_1 \times \overline{z_1}}{z_2 \times \overline{z_2}} &= \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|^2 \times \overline{z_2}}{|z_2|^2 \times \overline{z_2}} = \left(\frac{|z_1|}{|z_2|} \right)^2 \times \overline{z_2} = \\ &= \left(\frac{2}{2\sqrt{2}} \right)^2 \times 2\sqrt{2} e^{-\frac{3\pi i}{4}} = \sqrt{2} e^{-\frac{3\pi i}{4}} \end{aligned}$$

$$39.1 \quad z = 3e^{i\frac{5\pi}{3}} = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \quad \begin{matrix} \cos \frac{5\pi}{3} = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \\ \sin \frac{5\pi}{3} = \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}$$

$$= 3 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$39.2 \quad z = 3e^{i\frac{5\pi}{3}} = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}, \text{ donde } |z| = 3 \text{ e } \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3} \in]-\pi, \pi].$$

$$39.3 \quad -z = \underbrace{(-1)}_{e^{i\pi}} \times z = e^{i\pi} \times 3e^{-i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i(\pi - \frac{\pi}{3})} = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$39.4 \quad \frac{-3\bar{z}}{z} = \frac{-3 \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right)}{\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i} = \frac{-3 \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right)^2}{\left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right) \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right)} =$$

$$= \frac{-3 \left(\frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{2}i - \frac{27}{4} \right)}{\left(\frac{3}{2} \right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}i \right)^2} = \frac{-3 \left(-\frac{18}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{2}i \right)}{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}}$$

$$= \frac{-\frac{27}{2} - \frac{27\sqrt{3}}{2}i}{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = \frac{-\frac{27}{2} - \frac{27\sqrt{3}}{2}i}{9} = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Então, } \left| -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} \right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^2} = 3;$$

$$\text{com } \theta = \text{Arg} \left(-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right) \in]-\pi, \pi],$$

$$\text{tem-se } \tan \theta = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}} = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{3}$$

O afixo de $z \in 4.^\circ$ quadrante

$$\text{Concluindo, } \frac{-3\bar{z}}{z} = 3e^{i(-\frac{\pi}{3})}.$$

PÁG. 75

$$40.1 \quad \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{6}e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})} = \sqrt{6}e^{i\pi} = -\sqrt{6}$$

$$40.2 \quad \frac{2}{3}e^{i\frac{7\pi}{4}} \times 3e^{i\frac{9\pi}{4}} = \frac{6}{3}e^{i(\frac{7\pi}{4} + \frac{9\pi}{4})} = 2e^{i4\pi} = 2$$

$$41.1 \quad \frac{1}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}, \text{ que já está com o argumento principal,}$$

pois $-\frac{\pi}{3} \in]-\pi, \pi].$

$$41.2 \quad \frac{1}{\frac{2}{3}e^{i\frac{7\pi}{4}}} = \frac{3}{2}e^{-i\frac{7\pi}{4}}, \text{ que não está com o argumento principal,}$$

$$\text{pois } -\frac{7\pi}{4} \notin]-\pi, \pi].$$

$$\text{Todavia, } -\frac{7\pi}{4} = -2\pi + \frac{\pi}{4}, \text{ donde } e^{-i\frac{7\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$\text{ou seja, } \frac{1}{\frac{2}{3}e^{i\frac{7\pi}{4}}} = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$42.1 \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\frac{1}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 3\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3})} = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$$

$$42.2 \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = 3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$42.3 \quad \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = 3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$42.4 \quad z_1^2 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^2 = 2e^{i(2 \times \frac{\pi}{4})} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$42.5 \quad z_2^3 = \left(\frac{1}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^3 = \frac{1}{27}e^{i(3 \times \frac{2\pi}{3})} = \frac{1}{27}e^{i2\pi} = \frac{1}{27}e^{i0}$$

$$42.6 \quad z_2^{100} = \left(\frac{1}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^{100} = \frac{1}{3^{100}}e^{i(100 \times \frac{2\pi}{3})} = \frac{1}{3^{100}}e^{i\frac{200\pi}{3}} = \frac{1}{3^{100}}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

PÁG. 76

$$43.1 \quad z_1 z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{2}e^{i(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$43.2 \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}} = 4e^{i(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6})} = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$43.3 \quad \frac{-z_1}{\bar{z}_2} = \frac{-z_1}{\overline{\left(\frac{z_1 z_2}{z_2} \right)}} = \frac{-z_1}{\overline{z_1} \times \bar{z}_1} = -\frac{z_1}{|z_1|^2} =$$

$$= -\frac{2}{2^2} = -\frac{1}{2} = 4e^{i\pi}$$

$$44.1 \quad i^{99} = i^{2 \times 49 + 1} = \underbrace{\left(i^2 \right)}_{-1}^{49} \times i = -i$$

$$44.2 \quad i^{42} = i^{2 \times 21} = \left(i^2 \right)^{21} = (-1)^{21} = -1$$

$$44.3 \quad i^{220} = i^{2 \times 110} = \left(i^2 \right)^{110} = (-1)^{110} = 1$$

$$44.4 \quad i^{221} = \underbrace{i^{220}}_1 \times i = i$$

$$44.5 \quad i^{223} = \underbrace{i^{221}}_i \times \underbrace{i^2}_{-1} = -i$$

44.6 $i^{43} = \underbrace{i^{42}}_{-1} \times i = -i$

45. $z^4 = (3+i)^4 = \underbrace{(3+i)^2}_{9-1+6i=8+6i} \times (3+i)^2 = (8+6i)^2 = 64 - 36 + 96i = 28 + 96i$

$z^5 = z^4 \times z = (28 + 96i) \times (3+i) = 84 + 28i + 288i - 96 = -12 + 316i$

46. $|1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$; por outro lado, sendo θ um argumento de $1 - \sqrt{3}i$, tem-se $\tan \theta = -\sqrt{3}$ Afixo no 4.º quadrante $\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); então, $1 - \sqrt{3}i = 2e^{i(-\frac{\pi}{3})}$. Portanto:

$z = \frac{3ie^{\frac{i\pi}{5}}}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{3e^{\frac{i\pi}{5}}e^{\frac{i\pi}{5}}}{2e^{i(-\frac{\pi}{3})}} = \frac{3}{2} \times e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} - (-\frac{\pi}{3}))} = \frac{3}{2}e^{\frac{31\pi}{30}}$

47. $w_1 \times w_2 = 3e^{\frac{4\pi i}{3}} \times \frac{1}{3}e^{\alpha i} = e^{(\frac{4\pi}{3} + \alpha)i}$ e este produto é um número real quando $\frac{4\pi}{3} + \alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{4\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

48.1 $w = 3 \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 3i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 3 \left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right] = 3e^{\frac{5\pi i}{3}}$
 $w = 3 \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 3i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 3 \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 3i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 3 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 3i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 3 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 3i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{2} + 3i \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

48.2.a $3e^{\frac{5\pi i}{3}} = 3e^{\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right)i} = 3e^{\frac{2\pi i}{3}} \times e^{\pi i}$ donde, por exemplo, $w_1 = 3e^{\frac{2\pi i}{3}}$ e $w_2 = e^{\pi i}$.

48.2.b $3e^{\frac{5\pi i}{3}} = \frac{3e^{\frac{2\pi i}{3}}}{e^{-\pi i}}$ donde, por exemplo, $w_1 = 3e^{\frac{2\pi i}{3}}$ e $w_2 = e^{-\pi i}$.

48.3 Seja $z = |z|e^{i\theta}$.

$z \times w = |z|e^{i\theta} \times 3e^{\frac{5\pi i}{3}} = 3|z|e^{i(\theta + \frac{5\pi}{3})}$,

e este produto é um imaginário puro quando

$\theta + \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta = -\frac{7\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

49. $\frac{z^4}{i} = \frac{e^{i4\theta}}{e^{\frac{\pi i}{2}}} = e^{i(4\theta - \frac{\pi}{2})}$,
 $i = e^{\frac{\pi i}{2}}$

e este quociente é um imaginário puro quando

$4\theta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 4\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = k\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

50. Seja $z = |z|e^{i\theta}$.

$\bar{z} = |z|e^{-i\theta}$ e $-z = -|z|e^{i\theta} = \underbrace{(-1)}_{e^{i\pi}} |z|e^{i\theta} = |z|e^{i(\theta + \pi)}$,

donde $-z\bar{z} = |z|e^{i(\theta + \pi)} \times |z|e^{-i\theta} = |z|^2 e^{i(\theta + \pi - \theta)} = |z|^2 e^{i\pi}$.

Dado que $\pi \in]-\pi, \pi]$, $\text{Arg}(-z\bar{z}) = \pi$.

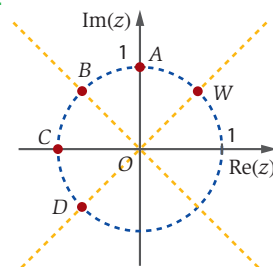
51.1 $w^2 = \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^2 = e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{\frac{i\pi}{2}}$, cujo afixo é o ponto A.

$w^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^3 = e^{\frac{3\pi i}{4}}$, cujo afixo é o ponto B.

$w^4 = \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^4 = e^{i\pi}$, cujo afixo é o ponto C.

$w^5 = \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^5 = e^{\frac{5\pi i}{4}}$, cujo afixo é o ponto D.

51.2



Circunferência de centro na origem do referencial e raio 1.

51.3 $|e^{i\theta}| = |\cos \theta + i \sin \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{1} = 1$

52.1.a $A(0, 1)$ e $A'(-1, 0)$, donde a amplitude dessa rotação é $\frac{\pi}{2}$.

$A(0, 1)$ e $A''(0, -1)$, donde a amplitude dessa rotação é π .

$A(0, 1)$ e $A'''(1, 0)$, donde a amplitude dessa rotação é $\frac{3\pi}{2}$.

52.1.b $z_1 = e^{\frac{i\pi}{2}}$ tem afixo A;

$w_1 = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3})} = e^{\frac{7\pi i}{6}}$ tem afixo B;

$t_1 = e^{i(\frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = e^{\frac{11\pi i}{6}}$ tem afixo C;

$z_2 = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})} = e^{i\pi}$ tem afixo A';

$$w_2 = e^{i\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{3}} \text{ tem afixo } B';$$

$$t_2 = e^{i\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ tem afixo } C';$$

$$z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ tem afixo } A'';$$

$$w_3 = e^{i\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{13\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ tem afixo } B'';$$

$$t_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ tem afixo } C'';$$

$$z_4 = e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i2\pi} = e^{i0} \text{ tem afixo } A''';$$

$$w_4 = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ tem afixo } B''';$$

$$t_4 = e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{4\pi}{3}} \text{ tem afixo } C''.$$

52.1.c $z_1^3 = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}, w_1^3 = \left(e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^3 = e^{i\frac{7\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

e $t_1^3 = \left(e^{i\frac{11\pi}{6}}\right)^3 = e^{i\frac{11\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

$$z_2^3 = \left(e^{i\pi}\right)^3 = e^{i3\pi} = e^{i\pi}, w_2^3 = \left(e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)^3 = e^{i5\pi} = e^{i\pi}$$

e $t_2^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i2\pi} = 1$

$$z_3^3 = \left(e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)^3 = e^{i\frac{9\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}, w_3^3 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

e $t_3^3 = \left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^3 = e^{i\frac{5\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$$z_4^3 = \left(e^{i0}\right)^3 = e^{i0}, w_4^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i2\pi} = e^{i0}$$

e $t_4^3 = \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^3 = e^{i4\pi} = e^{i0} = 1$

Conclui-se que, em cada triângulo, os cubos dos complexos cujos afixos são os vértices, são iguais.

52.2.a Na alínea anterior conclui-se também que:

- Os cubos dos complexos cujos afixos são os vértices A, B, C, A'', B'' e C'' são $\pm i$, donde as potências de expoente 6 destes complexos são os quadrados de $\pm i$, ou seja, $-1 = e^{i\pi}$.
- Os cubos dos complexos cujos afixos são os vértices A', B', C, A''', B''' e C''' são ± 1 , donde as potências de expoente 6 destes complexos são os quadrados de ± 1 , ou seja, $1 = e^{i0}$.

Conclui-se assim que, no hexágono regular $[AC''BA''CB']$, as potências de expoente 6 dos complexos cujos afixos são os vértices, são iguais a $-1 = e^{i\pi}$.

52.2.b Na alínea anterior já se concluiu que as potências de expoente 6 desses complexos são $1 = e^{i0}$.

52.3 Um polígono regular com 12 lados, ou seja, um dodecágono regular.

Dado que as potências de expoente 6 dos afixos de A, B, C, A'', B'' e C'' são -1 e as potências de expoente 6 dos afixos de A', B', C, A''', B''' e C''' são 1 , o menor expoente natural que origina potências iguais para todos os complexos cujos afixos são os vértices do dodecágono regular é 12, pois $\left(\frac{-1}{z^6}\right)^2 = \frac{1}{z^{12}}$.

PÁG. 81

53.1 As raízes cúbicas de z_1 são os números complexos

$$w_k = \sqrt[3]{3} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w_k = \sqrt[3]{3} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\} :$$

$$w_0 = \sqrt[3]{3} e^{i\frac{\pi}{12}}, w_1 = \sqrt[3]{3} e^{i\frac{3\pi}{4}} \text{ e } w_2 = \sqrt[3]{3} e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

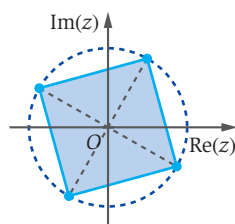
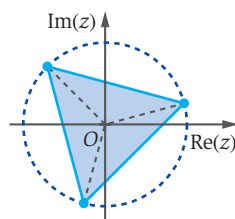
As raízes quartas de z_2 são os números complexos

$$w_k = e^{i\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi k}{4}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w_k = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\} :$$

$$w_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}, w_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, w_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \text{ e } w_3 = e^{i\frac{11\pi}{6}}.$$

53.2



54. $z = \left(2e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^3 = 8e^{i\frac{3\pi}{5}}$

As raízes cúbicas de z são os números complexos

$$w_k = \sqrt[3]{8} e^{i\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi k}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}.$$

As restantes raízes cúbicas de z são $w_1 = 2e^{i\frac{13\pi}{15}}$

e $w_2 = 2e^{i\frac{23\pi}{15}}.$

55. Dado que os vértices do pentágono regular são os afijos das raízes quintas de um determinado número complexo, os restantes vértices são os afijos dos complexos

$$w_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{5}\right)}, \quad k \in \{1, 2, 3, 4\}, \text{ ou seja, dos complexos}$$

$$w_1 = 2e^{i\frac{11\pi}{15}}, w_2 = 2e^{i\frac{17\pi}{15}}, w_3 = 2e^{i\frac{23\pi}{15}} \text{ e } w_4 = 2e^{i\frac{29\pi}{15}}.$$

- 56.1 São os afijos dos complexos

$$w_k = re^{i\left(\alpha + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}.$$

- 56.2 É n , uma vez que cada um dos w_k é a raiz índice n do mesmo número complexo.

57.1 $z^6 = 2 \Leftrightarrow z = \sqrt[6]{2} \Leftrightarrow z = 2e^{i0}$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[6]{2}e^{i0} = \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{0}{6} + \frac{2\pi k}{6}\right)}, \quad k \in \{0, \dots, 5\}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi k}{3}}, \quad k \in \{0, \dots, 5\}, \text{ ou seja, as soluções}$$

$$\text{são } \sqrt[6]{2}e^{i0}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ e } \sqrt[6]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}; \sqrt[6]{2}e^{i\pi}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{4\pi}{3}} \text{ e } \sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

Os afijos dos complexos soluções da equação anterior são os vértices de um hexágono regular, com centro na origem do referencial, no plano complexo.

- 57.2 Um hexágono regular decompõe-se em 6 triângulos equiláteros de lado igual ao lado do hexágono que, por sua vez, pode ser determinado pelo módulo da diferença de duas soluções consecutivas da equação anterior:

$$\left| \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{3}} - \sqrt[6]{2}e^{i0} \right| = \left| \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt[6]{2} \right| =$$

$$= \left| \sqrt[6]{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \sqrt[6]{2} \right| = \left| \frac{\sqrt[6]{2}}{2} \left(1 + i\sqrt{3} - 2 \right) \right|$$

$$= \sqrt[6]{2} \left| -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt[6]{2} \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt[6]{2}$$

A área de um triângulo equilátero de lado l é dada

por $\frac{l^2 \sin \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$, donde a área do hexágono regular é

$$6 \times \frac{(\sqrt[6]{2})^2 \times \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}.$$

58.1 $z = -3\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$

$$|z| = \sqrt{\left(-3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 3$$

Com $\theta = \text{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$, tem-se

$$\tan \theta = \frac{\frac{3}{2}}{-3\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{5\pi}{6}.$$

0 afixo de $z \in 2^\circ$ quadrante

Assim, $z = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Dado que os vértices do hexágono regular são os afijos das raízes sextas de um determinado número complexo, o ponto

B é o afixo de $3e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{6}\right)} = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = (0, 3)$; o ponto A é o afixo de

$$3e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{6}\right)} = 3e^{i\frac{\pi}{6}} = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} =$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right); \text{ o ponto } D \text{ é o afixo de}$$

$$3e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right)} = 3e^{i\frac{7\pi}{6}} = 3\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2} =$$

$$= \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right); \text{ o ponto } E \text{ é o afixo de}$$

$$3e^{i\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right)} = 3e^{i\frac{3\pi}{2}} = (0, -3) \text{ e o ponto } F \text{ é o afixo de}$$

$$3e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{6}\right)} = 3e^{i\frac{11\pi}{6}} = 3\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

- 58.2 Dado que os vértices do hexágono regular são os afijos das raízes sextas de um determinado número complexo w

tem-se que $w = z^6 = (3e^{i\frac{5\pi}{6}})^6 = 729e^{i5\pi} = -729$, ou seja, $z^6 = -729$.

59.1 $z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i^2}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \vee z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

59.2 $z^3 + z^2 = 2 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = 1 \vee z^2 + 2z + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \vee z = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \vee z = \frac{-2 \pm 2i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \vee z = -1 + i \vee z = -1 - i$$

59.3 $2z^2 - 6z + 29 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{-196}}{4} \Leftrightarrow z = \frac{6 \pm 14i}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}i \vee z = \frac{3}{2} - \frac{7}{2}i$$

59.4 $z^3 + 2z^2 + 5z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 + 2z + 5) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 + 2z + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \frac{-2 \pm 4i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = -1 + 2i \vee z = -1 - 2i$$

59.5 $z^4 - 2z^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow z^2 = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} \Leftrightarrow z^2 = 5 \vee z^2 = -3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = \pm\sqrt{5} \vee z = \pm\sqrt{-3}$$

$$\Leftrightarrow z = \pm\sqrt{5} \vee z = \pm\sqrt{3}i$$

59.6 $iz^3 - z^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (z - i)(iz^2 - 2z - 2i) = 0 \Leftrightarrow$

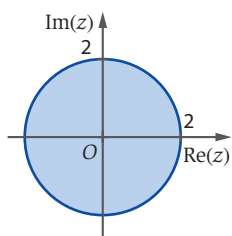
$$\Leftrightarrow z = i \vee iz^2 - 2z - 2i = 0 \Leftrightarrow z = i \vee z = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2i}$$

$$\Leftrightarrow z = i \vee z = \frac{2 \pm 2i}{2i}$$

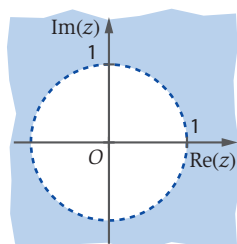
$$\Leftrightarrow z = i \vee z = \frac{1+i}{i} = \frac{-i(1+i)}{-i^2} = 1 - i \vee z = \frac{1-i}{i} = -1 - i$$

PÁG. 83

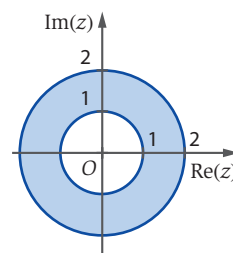
60.1 Círculo de centro no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e raio 2:



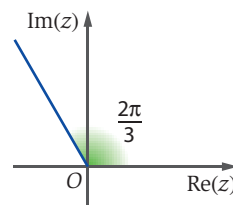
60.2 Exterior do círculo de centro no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e raio 1:



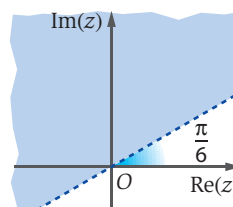
60.3 Coroa circular definida pelos círculos de centros no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e raios 1 e 2:



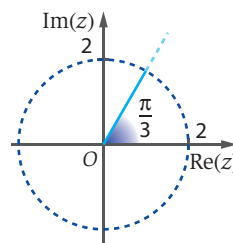
60.4 Semirreta de origem no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e que passa nos afixos dos complexos de argumento $\frac{2\pi}{3}$:



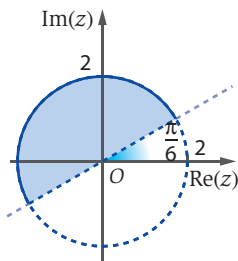
60.5 Semiplano aberto definido por $y > \frac{\sqrt{3}}{3}x$:



60.6 Interseção da semirreta de origem no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e que passa nos afixos dos complexos de argumento $\frac{\pi}{3}$ com o círculo de centro no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e raio 2:



- 60.7** Interseção do semiplano aberto $y > \frac{\sqrt{3}}{3}x$ com o círculo de centro no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e raio 2:

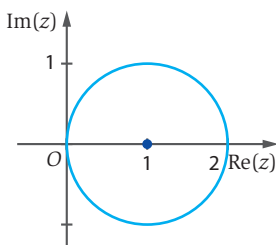


61.1 $|z_2 - z_1| = |1 - i| = \sqrt{2}$

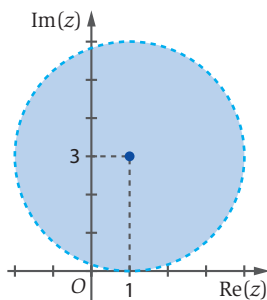
61.2 $|z_2 - z_1| = \left| e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{6}} \right| = \left| \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right| =$
 $= \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) \right|$
 $= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}$
 $= \sqrt{\frac{2}{4} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} + \frac{2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}}$
 $= \sqrt{8 - \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{8 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})}}{2}$

PÁG. 85

- 62.1** Circunferência de centro no ponto de coordenadas $(1, 0)$ e raio 1:

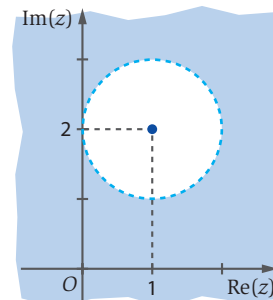


- 62.2** Interior do círculo de centro no ponto de coordenadas $(1, 3)$ e raio 3:



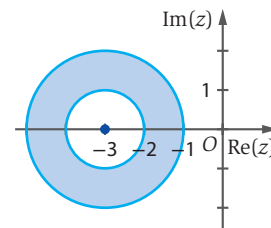
62.3 $|z - 1 - 2i| > 1 \Leftrightarrow |z - (1 + 2i)| > 1$

Exterior do círculo de centro no ponto de coordenadas $(1, 2)$ e raio 1:



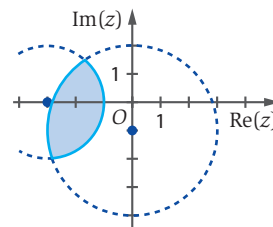
62.4 $1 \leq |z + 3| \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq |z - (-3)| \leq 2$

Coroa circular definida pelos círculos de centros no ponto de coordenadas $(-3, 0)$ e raios 1 e 2:



62.5 $|z + 3| \leq 2 \wedge |z + i| \leq 3 \Leftrightarrow |z - (-3)| \leq 2 \wedge |z - (-i)| \leq 3$

Interseção do círculo de centro no ponto de coordenadas $(-3, 0)$ e raio 2 com o círculo de centro no ponto de coordenadas $(0, -1)$ e raio 3:



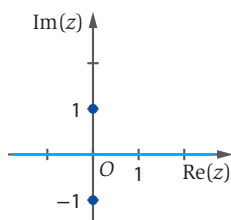
- 63.** Interseção do círculo de centro no ponto de coordenadas $(-1, 0)$ e raio 2 com o círculo de centro no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e raio 2:

$|z - (-1)| \leq 2 \wedge |z - (-i)| \leq 2 \Leftrightarrow |z + 1| \leq 2 \wedge |z + i| \leq 2$

PÁG. 90

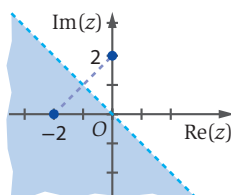
64.1 $|z - i| = |z + i| \Leftrightarrow |z - i| = |z - (-i)|$

Mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(0, 1)$ e $(0, -1)$:



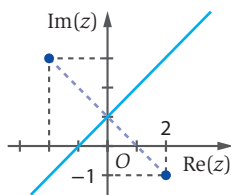
64.2 $|z - 2i| > |z + 2| \Leftrightarrow |z - 2i| > |z - (-2)|$

Semiplano aberto definido por $y < -x$ (obtido através da mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(0, 2)$ e $(-2, 0)$):



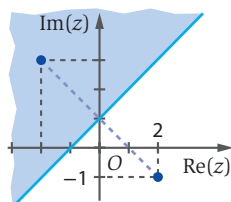
64.3 $|z - (2 - i)| = |z + 2 - 3i| \Leftrightarrow |z - (2 - i)| = |z - (-2 + 3i)|$

Mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(2, -1)$ e $(-2, 3)$:



64.4 $|z - (2 - i)| \geq |z + 2 - 3i| \Leftrightarrow |z - (2 - i)| \geq |z - (-2 + 3i)|$

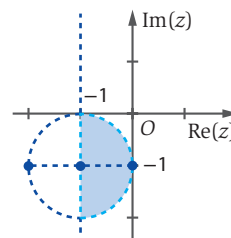
Semiplano fechado definido por $y \geq x + 1$ (obtido através da mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(2, -1)$ e $(-2, 3)$):



64.5 $|z + i| > |z + 2 + i| \wedge |z + 1 + i| < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z - (-i)| > |z - (-2 - i)| \wedge |z - (-1 - i)| < 1$

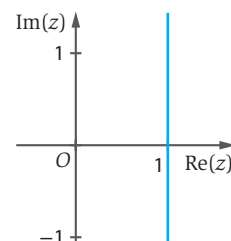
Interseção do semiplano aberto $x > -1$ (obtido através da mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(0, -1)$ e $(-2, -1)$) com o interior do círculo de centro em $(-1, -1)$ e raio 1:



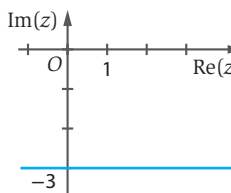
65. Pontos do plano complexo que se encontram à mesma distância dos pontos de coordenadas $(2, -3)$ e $(-4, 2)$, ou seja,

$|z - (2 - 3i)| = |z - (-4 + 2i)| \Leftrightarrow |z - 2 + 3i| = |z + 4 - 2i|$

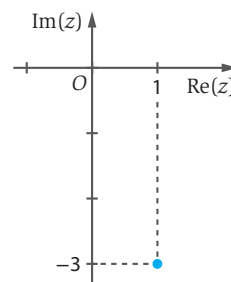
66.1 Reta de equação $x = 1$:



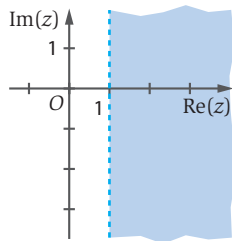
66.2 Reta de equação $y = -3$:



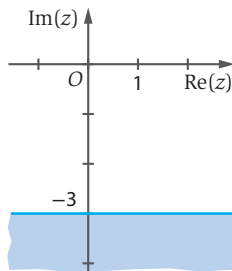
66.3 Ponto de interseção das retas de equações $x = 1$ e $y = -3$:



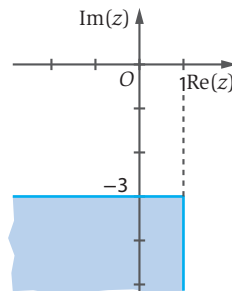
66.4 Semiplano aberto definido por $x > 1$:



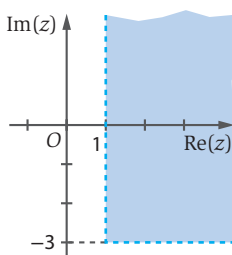
66.5 Semiplano fechado definido por $y \leq -3$:



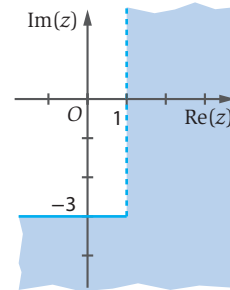
66.6 Interseção dos semiplanos fechados definidos por $x \leq 1$ e $y \leq -3$:



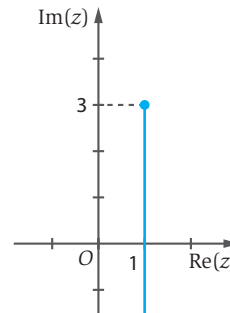
66.7 Interseção dos semiplanos abertos definidos por $x > 1$ e $y > -3$:



66.8 Reunião do semiplano aberto definido por $x > 1$ com o semiplano fechado definido por $y \leq -3$:



66.9 Interseção da reta de equação $x = 1$ com o semiplano fechado definido por $y \leq 3$:



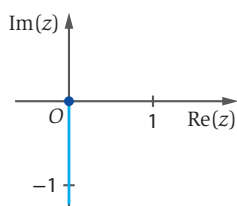
67.1 Semirreta de origem no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e que passa nos afixos dos complexos de argumento $\frac{\pi}{6}$, ou seja, a condição $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{6}$.

67.2 Reunião da semirreta de origem no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e que passa nos afixos dos complexos de argumento $\frac{\pi}{6}$ com a semirreta de origem no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e que passa nos afixos dos complexos de argumento $-\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$, ou seja, definida pela condição $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{6} \vee \text{Arg}(z) = -\frac{5\pi}{6}$.

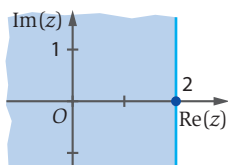
67.3 Semirreta de origem no ponto de coordenadas $(-1, 1)$ e que passa nos afixos dos complexos de argumento $\frac{3\pi}{4}$, ou seja, a condição $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$.

67.4 Ângulo convexo com vértice no ponto de coordenadas $(0, -2)$, de amplitude $\frac{\pi}{2}$, e cujos lados são as semirretas que passam nos afixos dos números complexos de argumentos $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$.

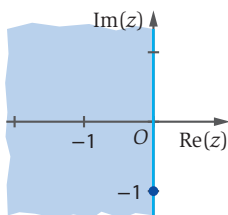
- 68.1** Semirreta de origem no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e que passa nos afixos dos complexos de argumento $-\frac{\pi}{2}$:



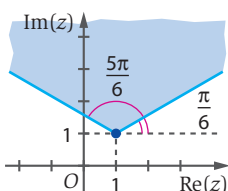
- 68.2** Reunião de dois ângulos retos orientados, com vértices no ponto de coordenadas $(2, 0)$:



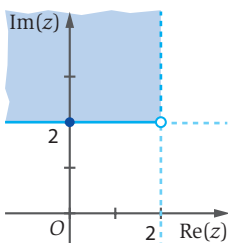
- 68.3** Reunião de dois ângulos retos orientados, com vértices no ponto de coordenadas $(0, -1)$:



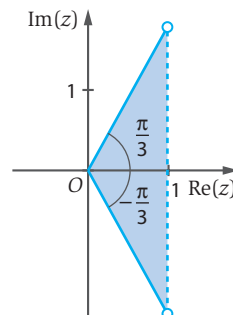
- 68.4** Ângulo orientado, com vértice no ponto de coordenadas $(1, 1)$ e amplitude $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$:



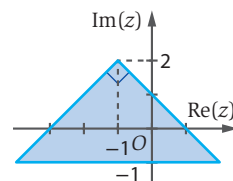
- 68.5** Interseção do ângulo raso orientado, com vértice no ponto de coordenadas $(0, 2)$, com o semiplano aberto definido por $x < 2$:



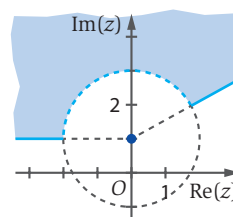
- 68.6** Interseção do ângulo orientado, com vértice no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e amplitude $\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$, com o semiplano aberto definido por $x < 1$:



- 68.7** Interseção do ângulo orientado, com vértice no ponto de coordenadas $(-1, 2)$ e amplitude $-\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$, com o semiplano fechado definido por $y \geq -1$:



- 68.8** Interseção do ângulo orientado, com vértice no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e amplitude $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, com o exterior do círculo de centro no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e raio 2:



- 69.** Interseção do ângulo orientado, com vértice no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e amplitude $-\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$, com o semiplano fechado definido por $y \geq -1$, ou seja, correspondente à condição $-\frac{3\pi}{4} \leq \text{Arg}(z - i) \leq -\frac{\pi}{4} \wedge \text{Im}(z) \geq -1$.

- 70.1** Interseção do exterior do círculo de centro no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e raio 2 com o semiplano aberto $y > 1$, ou seja, correspondente à condição $|z - i| > 2 \wedge \text{Im}(z) > 1$.

70.2 Interseção do ângulo convexo de amplitude

$\frac{\pi}{2} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \right)$, com vértice de coordenadas $(0, 0)$, e cujos lados são as semirretas que passam nos afixos dos números complexos com argumentos $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{2\pi}{3}$, com o interior do círculo de centro em $(0, 0)$ e raio 2, ou seja, correspondente à condição $\frac{\pi}{6} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{2\pi}{3} \wedge |z| < 2$.

$$71.1 \text{Arg}(iz) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \underbrace{\text{Arg}(i)}_{\frac{\pi}{2}} + \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Arg}(z) = 0 \Rightarrow \underbrace{\text{Por definição de}}_{\text{Arg}(z) \text{ tem-se } z \neq 0} z \in \mathbb{R}^+; \text{ semieixo real positivo.}$$

$$71.2 \text{Arg}\left(\frac{z^2}{-1}\right) = \pi \Leftrightarrow \underbrace{\text{Arg}(-1)}_{\pi} + \text{Arg}(z^2) = \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Arg}(z^2) = 0 \Rightarrow \underbrace{\text{Por definição de Arg}(z)}_{\text{tem-se } z \neq 0 \Rightarrow \bar{z} \neq 0} \bar{z} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow z \in \mathbb{R}^+;$$

semieixo real positivo.

$$71.3 \text{Arg}(2\bar{z}^4) = \pi \Leftrightarrow \underbrace{\text{Arg}(2)}_0 + \text{Arg}(\bar{z}^4) = \pi \Leftrightarrow \text{Arg}(\bar{z}^4) = \pi$$

$$\text{Se } \text{Arg}(z) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \text{ então } \text{Arg}(\bar{z}) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \text{ e}$$

$$\text{Arg}(\bar{z}^4) = 4\text{Arg}(\bar{z}) = -4\text{Arg}(z), \text{ donde}$$

$$-4\text{Arg}(z) = \pi \Leftrightarrow \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{4}; \text{ semirreta com origem } O \text{ que forma com } \dot{O}x \text{ um ângulo orientado de amplitude } -\frac{\pi}{4}.$$

$$71.4 \text{Arg}\left(\frac{-z}{-1}\right) = \underbrace{\text{Arg}(-1)}_{\pi} + \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}; \text{ semirreta com origem } O \text{ que}$$

$$\text{forma com } \dot{O}x \text{ um ângulo orientado de amplitude } -\frac{2\pi}{3}.$$

71.5 $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$, ou seja, os números complexos cujas partes real e imaginária são iguais; reta bissetriz dos quadrantes ímpares.

$$71.6 \underbrace{\text{Re}(2\bar{z})}_{\text{Re}(2z) = 2\text{Re}(z)} = \frac{\overbrace{\text{Im}(\bar{z})}^{-\text{Im}(z)}}{2} \Leftrightarrow 2\text{Re}(z) = -\frac{\text{Im}(z)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Im}(z) = -4\text{Re}(z); \text{ reta de equação } y = -4x.$$

71.7 $|z - 2i| = |z + 3| \Leftrightarrow |z - 2i| = |z - (-3)|$; mediatriz do segmento de reta com extremos nos pontos de coordenadas $(0, 2)$ e $(-3, 0)$.

$$71.8 |z - 2i| = 2|z + 3| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = 2\sqrt{(x + 3)^2 + y^2} \Leftrightarrow \begin{matrix} x^2 + (y - 2)^2 \geq 0 \\ (x + 3)^2 + y^2 \geq 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 4[(x + 3)^2 + y^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x + \frac{4}{3}y + \frac{32}{3} = 0 \Leftrightarrow (x + 4)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{52}{9};$$

a circunferência de centro no ponto de coordenadas

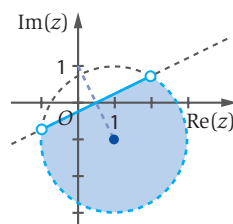
$$\left(-4, -\frac{2}{3}\right) \text{ e raio } \frac{2\sqrt{13}}{3}.$$

$$72.1 |z - i| \geq |z - 1 + i| \wedge |z - 1 + i| < 2 \Leftrightarrow$$

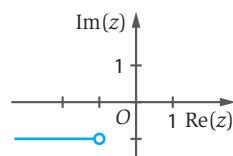
$$\Leftrightarrow |z - i| \geq |z - (1 - i)| \wedge |z - (1 - i)| < 2$$

Interseção do semiplano fechado definido por $y \leq \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

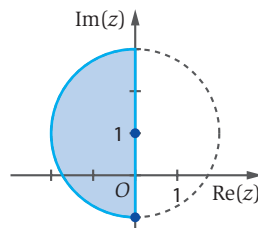
(obtido através da mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(0, 1)$ e $(1, -1)$) com o interior do círculo de centro no ponto de coordenadas $(1, -1)$ e raio 2:



72.2 Interseção do semiplano aberto definido por $x < -1$ com a reta de equação $y = -1$:

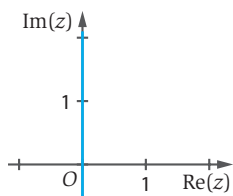


72.3 Interseção do círculo de centro no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e raio 2 com a reunião de dois ângulos orientados, com vértices no ponto de coordenadas $(0, -1)$:

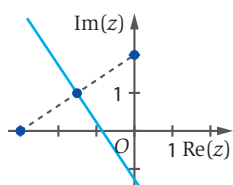


$$72.4 \quad \frac{\overbrace{\operatorname{Re}(\bar{z})}^{\operatorname{Re}(z)}}{3} = \operatorname{Im}\left(\underbrace{z\bar{z}}_{|z|^2 \in \mathbb{R}}\right) \Leftrightarrow \frac{\operatorname{Re}(z)}{3} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0,$$

ou seja, a reta de equação $x = 0$:



72.5 $|z - 2i| = |z + 3| \Leftrightarrow |z - 2i| = |z - (-3)|$, ou seja, a mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(0, 2)$ e $(-3, 0)$:



PÁG. 93

73. Seja $z = |z|e^{i\theta} = x + yi = (x, y)$.

73.1 Translação de vetor $\vec{u}(1, 1)$, pois

$$f(z) = z + 1 + i = x + 1 + (y + 1)i = (x + 1, y + 1) = (x, y) + (1, 1).$$

73.2 Rotação de centro O e ângulo de amplitude $\frac{\pi}{2}$, pois

$$f(z) = \underbrace{i}_{e^{i\frac{\pi}{2}}} z = |z|e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}.$$

73.3 Reflexão de eixo imaginário, pois

$$f(z) = -\bar{z} = -x + yi = (-x, y).$$

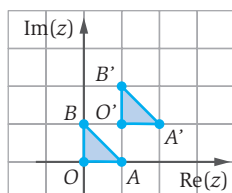
73.4 Homotetia de razão 3, pois

$$f(z) = 3z = 3x + 3yi = (3x, 3y) = 3(x, y).$$

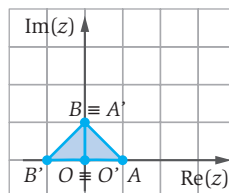
73.5 Reflexão deslizante de eixo imaginário e vetor $\vec{u}(0, 1)$,

$$\text{pois } f(z) = (-\bar{z}) + i = -x + yi + i = -x + (y + 1)i = (-x, y + 1) = (-x, y) + (0, 1).$$

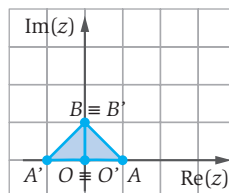
74.1



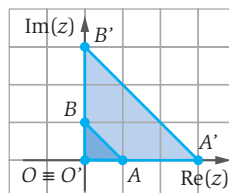
74.2



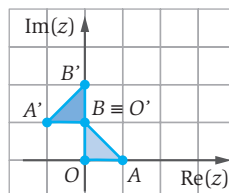
74.3



74.4



74.5



75. Seja $z = |z|e^{i\theta} = x + yi = (x, y)$.

75.1.1 $\bar{z} = x - yi = (x, -y)$; por exemplo, reflexão de eixo real.

75.1.2 $-z = \underbrace{(-1)}_{e^{i\pi}} z = |z|e^{i(\theta + \pi)}$; por exemplo, rotação de centro O e amplitude π .

$$75.1.3 \quad \frac{\bar{z}}{i} = \frac{-i\bar{z}}{-i^2} = -i\bar{z} = \underbrace{-i}_{e^{-i\frac{\pi}{2}}} \times \underbrace{\bar{z}}_{|z|e^{-i\theta}}; \text{ por exemplo, } \underbrace{\text{reflexão de eixo real}}_{\text{rotação de centro } O \text{ e amplitude } -\frac{\pi}{2}}$$

reflexão de eixo real seguida de rotação de centro O e amplitude $-\frac{\pi}{2}$.

$$75.2 \quad \frac{z}{i} = \frac{-iz}{-i^2} = \underbrace{-i}_{e^{-i\frac{\pi}{2}}} z = |z|e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}$$

PÁG. 95

76.1 $|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

Opção correta: D.

76.2 $Re(z) = 2$

Opção correta: A.

76.3 $Im(z) = -3$

Opção correta: B.

77. $2i$ é um imaginário puro pois $Re(2i) = 0$.

Opção correta: C.

78. $\bar{z} = x - yi$

Opção correta: C.

78.2 $-z = -x - yi$

Opção correta: D.

79. $-3 - 2i = (-3, -2)$

Opção correta: A.

80. $i^4 = \left(\underbrace{i^2}_{-1}\right)^2 = 1$

Opção correta: A.

81. $i^{41} = i^{2 \times 20 + 1} = \left(\underbrace{i^2}_{-1}\right)^{20} \times i = i$

Opção correta: C.

82. $i^{4n+2} = i^{2 \times 2n + 2} = \underbrace{(i^2)^{2n}}_{1 \text{ pois } 2n \text{ é um número par}} \times \underbrace{i^2}_{-1} = -1$

Opção correta: B.

83. $\sqrt{-2,25} = \sqrt{2,25 e^{i\pi}} = \sqrt{2,25} e^{i\left(\frac{\pi+k\pi}{2}\right)} = 1,5 e^{i\left(\frac{\pi+k\pi}{2}\right)}, k \in \{0, 1\}$

As raízes quadradas de $-2,25$ são $1,5 e^{i\frac{\pi}{2}} = 1,5i$

e $1,5 e^{i\frac{3\pi}{2}} = -1,5i$.

Opção correta: C.

84. $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4i^2} = \pm 2i$

Opção correta: C.

85. Sendo $z = i$ tem-se $\bar{z} = -i$ donde $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{i}{-i} = -1$.

Opção correta: C.

86. $e^{i\pi} = \underbrace{\cos \pi}_{-1} + i \underbrace{\sin \pi}_0 = -1 \in \mathbb{R}$

Opção correta: D.

87. $e^{i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 = i \notin \mathbb{R}$

Opção correta: C.

88. Sendo $\theta = Arg(z) \in]-\pi, \pi]$ tem-se

$$\tan \theta = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 \wedge \theta \in 4.^\circ \text{ quadrante}$$

donde $\theta = Arg(z) = -\frac{\pi}{4}$.

Opção correta: B.

89. $w = 2 \left(\underbrace{\cos \frac{\pi}{3}}_{\cos(2\pi + \frac{\pi}{3})} + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{3}}_{\sin(2\pi + \frac{\pi}{3})} \right) = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{3} + i \sin \frac{7\pi}{3} \right)$

Opção correta: D.

90. $\bar{z} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Opção correta: C.

90.2 $-z = \underbrace{(-1)}_{e^{i\pi}} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i(\pi + \frac{\pi}{3})} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Opção correta: D.

91.1 $z \times w = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 3e^{i\frac{\pi}{4}} = 6e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} = 6e^{i\frac{7\pi}{12}}$

Opção correta: B.

91.2 $\frac{1}{z} = \frac{1}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Opção correta: D.

91.3 $\frac{z}{w} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{3} e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = \frac{2}{3} e^{i\frac{\pi}{12}}$

Opção correta: B.

92. Os afixos das raízes quartas de z são os vértices de um quadrado centrado na origem do plano complexo e são obtidos por rotações sucessivas de $\frac{\pi}{2}$ a partir de uma qualquer raiz quarta de z (divisão do ângulo giro ao centro em ângulos de igual amplitude).

Assim, as outras raízes quartas de z são $2e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2})} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$,

$2e^{i(\frac{\pi}{3} + 2 \times \frac{\pi}{2})} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ e $2e^{i(\frac{\pi}{3} + 3 \times \frac{\pi}{2})} = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

Opção correta: B.

93. Os afijos das raízes cúbicas de um mesmo número complexo são os vértices de um triângulo equilátero centrado na origem do plano complexo e são obtidos por rotações sucessivas de $\frac{2\pi}{3}$ a partir de uma qualquer raiz cúbica desse número complexo (divisão do ângulo giro ao centro em 3 ângulos de igual amplitude).
- Assim, se uma das raízes cúbicas desse complexo é $e^{i\frac{\pi}{6}}$, as outras são $e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ e $e^{i(\frac{\pi}{6} + 2 \times \frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$.
- Opção correta: B.

94. Apenas na figura da opção A, pois os afijos das raízes cúbicas de um número complexo são os vértices de um triângulo equilátero centrado na origem do plano complexo.
- Opção correta: A.

95. Se o afixo de $z \neq 0$ pertence ao 2.º quadrante e está sobre a reta que contém as bissetrizes dos quadrantes pares, então $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$ e $\text{Arg}(\bar{z}) = -\frac{3\pi}{4}$,
 donde $\text{Arg}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}$.
- Opção correta: D.

- 95.2 $\text{Arg}(z \times \bar{z}) = \frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 0$
- Opção correta: A.

96. A bissetriz do 1.º quadrante é definida por $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$ e a bissetriz do 2.º quadrante é definida por $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$,
 donde a reunião das duas bissetrizes é definida por $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4} \vee \text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$.
- Opção correta: A.

97. O raio da circunferência é $\overline{AC} = |i - (-1 + i)| = |1| = 1$,
 donde, atendendo ao seu centro, a circunferência pode ser definida por $|z - (-1 + i)| = 1 \Leftrightarrow |z + 1 - i| = 1$.
- Opção correta: C.

98. Os números complexos cujos afijos pertencem à região sombreada têm o seu argumento principal no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.
- Opção correta: C.

99. A condição $|z| \leq 1$ define um círculo de centro (0, 0) e raio 1.
- Opção correta: C.

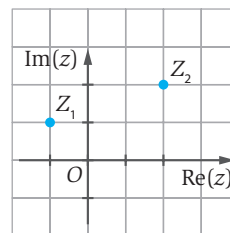
100. Os números complexos cujos afijos pertencem ao 1.º quadrante têm as partes real e imaginária positivas, pelo que a hipótese correta é a A.

- 101.1 O número complexo cujo afixo resulta da referida rotação é $-2 - 3i$, pois os vetores de coordenadas $(-3, 2)$ e $(-2, -3)$ são perpendiculares e têm a mesma norma.
- Opção correta: B.

- 101.2 O número complexo cujo afixo resulta da referida rotação é $2 + 3i$, pois os vetores de coordenadas $(-3, 2)$ e $(2, 3)$ são perpendiculares e têm a mesma norma.
- Somando o vetor de coordenadas $(2, 3)$ com o vetor $\vec{u}(1, -1)$ obtém-se o vetor de coordenadas $(3, 2)$.
- Opção correta: B.

102. O transformado de M por uma translação de vetor $\vec{u}(1, 0)$ é o ponto $M'(a + 1, b)$.
- O transformado de M' por uma homotetia de razão 2 é o ponto $M''\left(\frac{2a + 2}{2(a + 1)}, \frac{2b}{2(a + 1)}\right)$.
- Opção correta: D.

103.1



- 103.2 $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Com $\theta = \text{Arg}(z_1) \in]-\pi, \pi]$ tem-se

$$\tan \theta = \frac{1}{-1} = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{3\pi}{4},$$

O afixo de $z_1 \in 2.^\circ$ quadrante

$$\text{donde } z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

$$|z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

Com $\theta = \text{Arg}(z_2) \in]-\pi, \pi]$ tem-se

$$\tan \theta = \frac{2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \text{ donde } z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

O afixo de $z_2 \in 1.^\circ$ quadrante

- 103.3 $\frac{z_1 + z_2}{\bar{z}_1} = \frac{-1 + i + 2 + 2i}{-1 - i} = \frac{(1 + 3i)(-1 + i)}{(-1 - i)(-1 + i)} =$
 $= \frac{-1 + i - 3i - 3}{(-1)^2 - i^2} = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i$

RESOLUÇÕES – NC12

$$103.4 \quad \sqrt[4]{z_2^3} = \sqrt[4]{(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^3} = \sqrt[4]{16\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} =$$

$$= \sqrt[4]{16\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{k2\pi}{4}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

$$\text{donde } \sqrt[4]{z_2^3} = 2\sqrt[8]{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

$$\text{Os complexos são } 2\sqrt[8]{2}e^{i\frac{3\pi}{16}}, 2\sqrt[8]{2}e^{i\frac{11\pi}{16}}, 2\sqrt[8]{2}e^{i\frac{19\pi}{16}} \text{ e } 2\sqrt[8]{2}e^{i\frac{27\pi}{16}}.$$

$$104. w_1 = \frac{1}{i} = \frac{e^{i0}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{e } w_2 = -\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) - i\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$104.2 \quad \frac{w_1 w_2}{w_1 w_2} = \frac{w_1 w_2 \times w_1 w_2}{w_1 w_2 \times w_1 w_2} = \frac{(w_1 w_2)^2}{|w_1 w_2|^2} =$$

$$= \frac{(e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}})^2}{1^2 1^2} = \frac{(e^{-i\frac{\pi}{4}})^2}{1^2 1^2} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

$$105.1 \quad z + z_1 |z_2| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = -z_1 |z_2| = -\underbrace{e^{i\frac{2\pi}{3}}}_{\substack{\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}} \times 2 =$$

$$= -2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}i$$

$$105.2 \quad z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

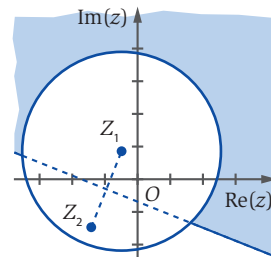
$$z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2\left(\underbrace{\cos\frac{5\pi}{4}}_{-\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\underbrace{\sin\frac{5\pi}{4}}_{-\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$|z - z_1| \leq |z - z_2|$ define o semiplano fechado

$y \geq -\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}x - \frac{3}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ (obtido através da mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$).

$|z - z_1| \geq 3$ define o conjunto S que resulta da reunião do exterior do círculo de centro $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e raio 3 com a circunferência de centro $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e raio 3.

Assim, $|z - z_1| \leq |z - z_2| \wedge |z - z_1| \geq 3$ representa a interseção do semiplano anterior com o conjunto S .



$$106.1 \quad |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Com $\theta = \text{Arg}(z_1) \in]-\pi, \pi]$ tem-se

$$\tan\theta = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow \theta = -\frac{3\pi}{4},$$

O afixo de z_1 está no 3.º quadrante

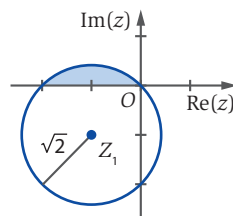
$$\text{donde } z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

$$\frac{z_1 \times z_2 + 1}{z_3} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \times \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{12}} + 1}{z_3} = \frac{-\sqrt{2}i + 1}{-\sqrt{2}i}$$

$$= \frac{(\sqrt{6}e^{-i\frac{2\pi}{3}} + 1)\sqrt{2}i}{-(\sqrt{2}i)^2} = \frac{\sqrt{12}ie^{-i\frac{2\pi}{3}} + \sqrt{2}i}{2}$$

$$= \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{3}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

106.2 $|z - z_1| \leq \sqrt{2} \wedge \text{Im}(z) \geq \text{Re}(z_3)$ representa a interseção do círculo de centro $(-1, -1)$ e raio $\sqrt{2}$ com o semiplano fechado $y \geq \underbrace{0}_{\text{Re}(z_3)}$.



$$107.1 \quad z(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}) = w + 1 \Leftrightarrow z = \frac{1-2i}{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1-2i}{3e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1-2i}{3i}$$

$$= \frac{1-2i}{\sqrt{6}(1+i)} = \frac{2\sqrt{6}(1-2i)(1-i)}{6(1+i)(1-i)} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}(1-i-2i-2)}{3(1^2-i^2)} = \frac{\sqrt{6}(-1-3i)}{6} = -\frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

- 107.2** Se o afixo do número complexo $-2i$ é um dos vértices desse losango, então o afixo do número complexo $2i$ é outro dos vértices desse losango.

Os restantes vértices são afixos de números complexos $z = a$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, dado que o perímetro é $4\sqrt{5}$ (o lado do losango é $\frac{4\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}$), obtém-se, por exemplo,
 $|z - 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |a - 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a^2 + 4 = 5 \Leftrightarrow a = \pm 1$, donde os restantes vértices dão os afixos dos números complexos -1 , 1 e $2i$.

- 108.** $(1 + \sqrt{3}i)^2 = 1 - 3 + 2\sqrt{3}i = -2 + 2\sqrt{3}i$
 $|-2 + 2\sqrt{3}i| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$
 Com $\theta = \text{Arg}(-2 + 2\sqrt{3}i) \in]-\pi, \pi]$ tem-se
 $\tan \theta = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$,
 donde $-2 + 2\sqrt{3}i = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
 $\sqrt[3]{(1 + \sqrt{3}i)^2} = \sqrt[3]{4e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \sqrt[3]{4}e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}\right)}$, $k \in \{0, 1, 2\}$,
 donde $\sqrt[3]{(1 + \sqrt{3}i)^2} = \sqrt[3]{4}e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}\right)}$, $k \in \{0, 1, 2\}$
 Os complexos são $\sqrt[3]{4}e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $\sqrt[3]{4}e^{i\frac{8\pi}{3}}$ e $\sqrt[3]{4}e^{i\frac{14\pi}{3}}$.

- 109.** $z_1 = i + \frac{3i + 1 - \sqrt{3}}{i} = i + \frac{(3i + 1 - \sqrt{3})(-i)}{-i^2} =$
 $= i + 3 - i + \sqrt{3}i = 3 + \sqrt{3}i$

$$|3 + \sqrt{3}i| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Com $\theta = \text{Arg}(3 + \sqrt{3}i) \in]-\pi, \pi]$ tem-se

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{donde } 3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

- 110.** $\frac{1 - \bar{z}}{\bar{z}} = \frac{1 - (a - \sqrt{2}i)}{a - \sqrt{2}i} = \frac{1 - a + \sqrt{2}i}{a - \sqrt{2}i} =$
 $= \frac{(1 - a + \sqrt{2}i)(a + \sqrt{2}i)}{(a - \sqrt{2}i)(a + \sqrt{2}i)}$
 $= \frac{a + \sqrt{2}i - a^2 - a\sqrt{2}i + a\sqrt{2}i - 2}{a^2 - (\sqrt{2}i)^2}$
 $= \frac{-a^2 - 2 + a + \sqrt{2}i}{a^2 + 2} = \frac{-a^2 - 2 + a}{a^2 + 2} + \frac{\sqrt{2}}{a^2 + 2}i \notin \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{111.} \quad z + z_1 = -2 \Leftrightarrow z = -2 - z_1 = -2 - 5i + 2 = -5i = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\mathbf{112.} \quad \frac{z^4}{4} - \sqrt{2}(1 + i)z = 0 \Leftrightarrow z \left[\frac{z^3}{4} - \sqrt{2}(1 + i) \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee \frac{z^3}{4} - \sqrt{2}(1 + i) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[3]{4\sqrt{2}(1 + i)}$$

Seja $w = 1 + i$.

$$|w| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Com $\theta = \text{Arg}(w) \in]-\pi, \pi]$ tem-se

$$\tan \theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \text{ donde } w = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$z = \sqrt[3]{4\sqrt{2}(1 + i)} = \sqrt[3]{4\sqrt{2}} \sqrt[3]{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\},$$

$$\text{donde } z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}.$$

Assim, as soluções de $\frac{z^4}{4} - \sqrt{2}(1 + i)z = 0$ são

$$z = 0 \vee z = 2e^{i\frac{\pi}{12}} \vee z = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \vee z = 2e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

$$\mathbf{113.1} \quad -i(3 + 2i)^2 = -i(9 - 4 + 12i) = 12 - 5i \text{ donde } \text{Re}(z) = 12$$

$$\text{e } \text{Im}(z) = -5.$$

$$\mathbf{113.2} \quad \frac{1}{1 + 3i} = \frac{1 - 3i}{(1 + 3i)(1 - 3i)} = \frac{1 - 3i}{1^2 - (3i)^2} = \frac{1 - 3i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$$

$$\text{donde } \text{Re}(z) = \frac{1}{10} \text{ e } \text{Im}(z) = -\frac{3}{10}.$$

$$\mathbf{113.3} \quad \frac{3 + 5i}{1 + 7i} = \frac{(3 + 5i)(1 - 7i)}{(1 + 7i)(1 - 7i)} = \frac{3 - 21i + 5i + 35}{1^2 - (7i)^2} =$$

$$= \frac{38 - 16i}{50} = \frac{19}{25} - \frac{8}{25}i \text{ donde } \text{Re}(z) = \frac{19}{25} \text{ e } \text{Im}(z) = -\frac{8}{25}.$$

$$\mathbf{113.4} \quad i^{191} = i^{2 \times 95 + 1} = \underbrace{(i^2)^{95}}_{-1} \times i = -i \text{ donde } \text{Re}(z) = 0$$

$$\text{e } \text{Im}(z) = -1.$$

$$\mathbf{113.5} \quad (1 - \sqrt{2}i)^3 = \underbrace{(x + y)^3}_{= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3} = 1 - 3\sqrt{2}i - 6 + 2\sqrt{2}i = -5 - \sqrt{2}i$$

$$\text{donde } \text{Re}(z) = -5 \text{ e } \text{Im}(z) = -\sqrt{2}.$$

114. Seja $z = a + bi$ com $z + 1 + i \neq 0 \Leftrightarrow z \neq -1 - i$, ou seja, com $a \neq -1 \wedge b \neq -1$.

$$\begin{aligned}\frac{z-1-i}{z+1+i} &= \frac{a+bi-1-i}{a+bi+1+i} = \frac{a-1+(b-1)i}{a+1+(b+1)i} = \\ &= \frac{[a-1+(b-1)i][a+1-(b+1)i]}{[a+1+(b+1)i][a+1-(b+1)i]} = \\ &= \frac{a^2-1-(a-1)(b+1)i+(a+1)(b-1)i+b^2-1}{(a+1)^2-[(b+1)i]^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{a^2+b^2-2-2(a-b)i}{(a+1)^2+(b+1)^2} =$$

$$= \frac{a^2+b^2-2}{(a+1)^2+(b+1)^2} - \frac{2(a-b)}{(a+1)^2+(b+1)^2}i$$

$\frac{z-1-i}{z+1+i}$ é um imaginário puro quando

$$\frac{a^2+b^2-2}{(a+1)^2+(b+1)^2} = 0 \wedge \frac{2(a-b)}{(a+1)^2+(b+1)^2} \neq 0.$$

$$\frac{a^2+b^2-2}{(a+1)^2+(b+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{|z|^2} - 2 = 0 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{2}$$

$$\frac{2(a-b)}{(a+1)^2+(b+1)^2} \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b$$

Resta verificar quais são os números complexos cuja parte real é igual à parte imaginária e cujo módulo é $\sqrt{2}$:

$$\text{Se } z = a + ai, |z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|a| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |a| = 1$$

$$\Leftrightarrow a = -1 \vee a = 1, \text{ ou seja, os números complexos } -1-i \text{ e } 1+i.$$

Assim, o conjunto dos números complexos z tais

que $\frac{z-1-i}{z+1+i}$ é um imaginário puro é o conjunto dos números complexos cujo módulo é $\sqrt{2}$, exceto os complexos

$-1-i$ e $1+i$.

115.1 $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow$
 $\begin{matrix} a^2+b^2 \geq 0 \\ c^2+d^2 \geq 0 \\ \alpha^2+\beta^2 \geq 0 \end{matrix}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{|z| \text{ com } z=a+bi} \times \underbrace{\sqrt{c^2+d^2}}_{|z'| \text{ com } z'=c+di} = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{|zz'|}$$

$$\text{Todavia, } |zz'| = \left| \underbrace{(a+bi)(c+di)}_{ac-bd+(ad+bc)i} \right| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2}$$

$$\text{Como } \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

com $(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2, \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$, então

$$\alpha^2 + \beta^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2.$$

Dado que $a, b, c, d \in \mathbb{N} \wedge ac - bd \neq 0 \Rightarrow ad + bc \in \mathbb{N}$ e $|ac - bd| \in \mathbb{N}$.

Tem-se, por exemplo, $\alpha = |ac - bd|$ e $\beta = ad + bc$.

115.2 $90 = 81 + 9 = 9^2 + 3^2$ e $68 = 64 + 4 = 8^2 + 2^2$

Dado que $\frac{6120}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{90}{9^2 + 3^2} \times \frac{68}{8^2 + 2^2}$, pela alínea anterior, podemos tomar $\alpha = |9 \times 8 - 3 \times 2| = 66$ e $\beta = 9 \times 2 + 3 \times 8 = 42$.

Tem-se, portanto, $6120 = 66^2 + 42^2$.

116.1 $|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Com $\theta = \text{Arg}(1-i) \in]-\pi, \pi]$ tem-se

$$\tan \theta = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4},$$

O afixo de $1-i$ está em 4.º quadrante

$$\text{donde } 1-i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

$$(1-i)^3 = \left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^3 = 2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}, \text{ donde o módulo}$$

de $(1-i)^3$ é $2\sqrt{2}$ e um seu argumento (que até é o principal) é $-\frac{3\pi}{4}$.

116.2 $|1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

Com $\theta = \text{Arg}(1-i\sqrt{3}) \in]-\pi, \pi]$ tem-se

$$\tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3},$$

O afixo de $1-i\sqrt{3}$ está em 4.º quadrante

$$\text{donde } 1-i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}.$$

$$(1-i\sqrt{3})^5 = \left(2e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^5 = 32e^{-\frac{5\pi}{3}i}, \text{ donde o módulo}$$

de $(1-i\sqrt{3})^5$ é 32 e um seu argumento é $-\frac{5\pi}{3}$.

116.3 $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

Com $\theta = \text{Arg}(1+i\sqrt{3}) \in]-\pi, \pi]$ tem-se

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3},$$

O afixo de $1+i\sqrt{3}$ está em 1.º quadrante

$$\text{donde } 1+i\sqrt{3} = 2e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Na alínea 116.1 já se tinha concluído que $1-i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

$$\begin{aligned}i \frac{(1-i)^2}{1+i\sqrt{3}} &= \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{2e^{\frac{\pi}{3}i}} \times \frac{\left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^2}{2e^{\frac{\pi}{3}i}} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i} \times 2e^{-\frac{\pi}{2}i}}{2e^{\frac{\pi}{3}i}} = \\ &= e^{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)i} = e^{-\frac{\pi}{3}i},\end{aligned}$$

donde o módulo de $i \frac{(1-i)^2}{1+i\sqrt{3}}$ é 1 e um seu argumento

(que é o principal) é $-\frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}
 117. \frac{i(1+\sqrt{3}i)^4}{(-1+i)^9} &= \frac{e^{\frac{\pi}{2}i} \times \left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^4}{\left(\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^9} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i} \times 16e^{\frac{4\pi}{3}i}}{16\sqrt{2}e^{\frac{27\pi}{4}i}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} - \frac{27\pi}{4}\right)i} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{59\pi}{12}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-5\pi + \frac{\pi}{12}i} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\underbrace{\cos\left(-5\pi + \frac{\pi}{12}\right)}_{-\cos\frac{\pi}{12}} + i \underbrace{\sin\left(-5\pi + \frac{\pi}{12}\right)}_{-\sin\frac{\pi}{12}} \right] \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \times \sin\frac{\pi}{4} = \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} \times \sin\frac{\pi}{4} = \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}
 \end{aligned}$$

Tem-se, então,

$$\begin{aligned}
 &-\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12} \right] = \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} + i \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{1-\sqrt{3}}{4}i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 118. z^2 &= (\sqrt{2+\sqrt{3}} - i\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = \\
 &= 2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3}) - 2i\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}} \\
 &= 2\sqrt{3} - 2i\sqrt{2^2 - \sqrt{3}^2} = 2\sqrt{3} - 2i\sqrt{1} = 2\sqrt{3} - 2i
 \end{aligned}$$

$$|z^2| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$$

Com $\theta = \text{Arg}(z^2) \in]-\pi, \pi]$ tem-se

$$\tan\theta = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6},$$

0 afixo de $z^2 \in 4^\circ$ quadrante

donde $z^2 = 4e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

$$z^2 = 4e^{-\frac{\pi}{6}i} \Leftrightarrow z = \sqrt{4e^{-\frac{\pi}{6}i}} = 2e^{-\left(\frac{\pi}{12} + k\pi\right)i}, \quad k \in \{0, 1\},$$

pelo que $z = 2e^{-\frac{\pi}{12}i} \vee z = 2e^{\frac{11\pi}{12}i}$.

Atendendo ao fato de o afixo de z pertencer ao 4.º quadrante, tem-se $z = 2e^{-\frac{\pi}{12}i}$.

$$\begin{aligned}
 119. \frac{w^n + \bar{w}^n}{w^n - \bar{w}^n} &= \frac{(re^{i\theta})^n + (re^{-i\theta})^n}{(re^{i\theta})^n - (re^{-i\theta})^n} = \frac{r^n e^{in\theta} + r^n e^{-in\theta}}{r^n e^{in\theta} - r^n e^{-in\theta}} = \\
 &= \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{e^{in\theta} - e^{-in\theta}} \\
 &= \frac{\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) + \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)}{\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) - [\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)]}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) + \cos(n\theta) - i \sin(n\theta)}{\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) - \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)}$$

$\cos(-n\theta) = \cos(n\theta)$
 $\sin(-n\theta) = -\sin(n\theta)$

$$= \frac{2 \cos(n\theta)}{2i \sin(n\theta)} = \frac{\cos(n\theta)}{i \sin(n\theta)} = \frac{-i \cos(n\theta)}{-i^2 \sin(n\theta)} = -\frac{\cos(n\theta)}{\sin(n\theta)} i$$

A expressão $-\frac{\cos(n\theta)}{\sin(n\theta)} i$ só está definida quando, fixado

$$n \in \mathbb{N}, \text{ se tem } n\theta \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \neq \frac{k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e só representa um imaginário puro quando

$$n\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \neq \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ de acordo}$$

com as condições constantes no enunciado.

$$\begin{aligned}
 120. w &= -\left(\frac{1}{i}\right)^{25} + (1-2i)^2 = -\left(\frac{-i}{-i^2}\right)^{25} + 1 - 4i = \\
 &= -(-i)^{25} - 3 - 4i = \frac{i^{25}}{(i^2)^{12} \times i} - 3 - 4i = -3 - 3i
 \end{aligned}$$

Assim, $\bar{w} = -3 + 3i$ e $|\bar{w}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

Com $\theta = \text{Arg}(\bar{w}) \in]-\pi, \pi]$ tem-se

$$\tan\theta = \frac{3}{-3} = -1 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4},$$

0 afixo de $\bar{w} \in 2^\circ$ quadrante

donde $\bar{w} = 3\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

$$121. z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha \Leftrightarrow z^2 - 2 \cos \alpha z + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2 \cos \alpha \pm \sqrt{4 \cos^2 \alpha - 4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2 \cos \alpha \pm 2 \sqrt{\cos^2 \alpha - 1}}{2} \Leftrightarrow z = \cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha - 1}$$

$$\Leftrightarrow z = \cos \alpha \pm \sqrt{i^2 \sin^2 \alpha}$$

$\cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha = i^2 \sin^2 \alpha$

$$\Leftrightarrow z = \cos \alpha \pm |\sin \alpha| i \Leftrightarrow z = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha} \vee$$

$$\vee z = \cos \alpha - i \sin \alpha = \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha) = e^{-i\alpha}$$

Se $z = e^{i\alpha}$, então

$$z^n + \frac{1}{z^n} = e^{in\alpha} + e^{-in\alpha} =$$

$$= \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) + \underbrace{\cos(-n\alpha)}_{\cos(n\alpha)} + i \underbrace{\sin(-n\alpha)}_{-\sin(n\alpha)} = 2 \cos(n\alpha).$$

Se $z = e^{-i\alpha}$, então

$$z^n + \frac{1}{z^n} = e^{-in\alpha} + e^{in\alpha} =$$

$$= \underbrace{\cos(-n\alpha)}_{\cos(n\alpha)} + i \underbrace{\sin(-n\alpha)}_{-\sin(n\alpha)} + \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$$

$$= 2 \cos(n\alpha).$$

$$122. z = (w + \bar{w})^2 - (w - \bar{w})^2 =$$

$$= w^2 + \bar{w}^2 + 2w\bar{w} - (w^2 + \bar{w}^2 - 2w\bar{w}) = 4w\bar{w} = 4|w|^2 \in \mathbb{R}^+,$$

pelo que o seu afixo pertence ao semieixo real positivo.

$$123.1 \quad w^2 \times e^{\frac{4\pi}{3}} = \left(3e^{\frac{\pi}{3}}\right)^2 \times e^{\frac{4\pi}{3}} = 9e^{\frac{2\pi}{3}} \times e^{\frac{4\pi}{3}} = 9e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)} =$$

$$= 9e^{2\pi} = 9e^{i0} = 9 \in \mathbb{R}$$

123.2 A região sombreada da figura é constituída pelos afijos dos complexos cuja distância ao complexo $z = 0$ é menor ou igual a 3 e cujo argumento varia de $2 \times \frac{2\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ a $4 \times \frac{2\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$.

Com o argumento em $]-\pi, \pi]$, é definida pela condição $|z| \leq 3 \wedge \left(\frac{2\pi}{3} \leq \text{Arg} z \leq \pi \vee -\pi < \text{Arg} z \leq -\frac{2\pi}{3}\right)$.

$$124.1 \quad w = \frac{(1+i)^4}{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}(1+i) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^4}{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{4e^{i\pi}}{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

Dado que $|w| = \frac{2\sqrt{3}}{3} < 2$, o afixo de w situa-se no interior da circunferência de raio 2 e pertence à reta r pois esta reta é definida pela condição

$$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4} \vee \text{Arg}(z) = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}, \text{ sendo que}$$

$$\text{Arg}(w) = -\frac{3\pi}{4}.$$

124.2 Dado que o ponto A se situa no 2.º quadrante e é o afixo de uma das raízes cúbicas de $8i$ e

$$\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8e^{i\frac{\pi}{2}}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}, \text{ o ponto } A \text{ é o}$$

$$\text{afixo de } 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Assim, a região sombreada da figura é constituída pelos afijos dos complexos cuja distância ao complexo $z = 0$ é menor ou igual a 2 e cujo argumento em $]-\pi, \pi]$ varia de $-\pi$ a $-\frac{3\pi}{4}$, de 0 a $\frac{\pi}{4}$ e de $\frac{5\pi}{6}$ a π , ou seja, é definida pela condição $|z| \leq 2 \wedge (-\pi < \text{Arg}(z) \leq -\frac{3\pi}{4} \vee$
 $\vee 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{4} \vee \frac{5\pi}{6} \leq \text{Arg}(z) \leq \pi).$

$$125.1 \quad |z \times w| \leq 10 \Leftrightarrow \underbrace{|z| \times |w|}_{p \in \mathbb{R}^+} \leq 10 \Leftrightarrow 2p \leq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < p \leq 5$$

$$125.2.1 \quad z \times w = \underbrace{pe^{\frac{i\pi}{2}}}_{p \in \mathbb{R}^+} \times 2e^{\frac{i\pi}{5}} = \underbrace{2pe^{\frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{5}}}_{>0}$$

O afixo de $z \times w$ pertence ao 3.º quadrante quando

$$\pi + k2\pi < \frac{\pi}{2} + \frac{t}{5}\pi < \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} + 10k < t < 5 + 10k, k \in \mathbb{Z}, \text{ uma vez que}$$

$$0 \notin \left] \frac{5}{2} + 10k, 5 + 10k \right[, k \in \mathbb{Z}.$$

$$125.2.2 \quad \frac{z}{w} = \frac{pe^{\frac{i\pi}{2}}}{2e^{\frac{i\pi}{5}}} = \frac{p}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{5}\pi\right)}$$

$\frac{z}{w}$ é um imaginário puro com $\text{Im}\left(\frac{z}{w}\right) < 0$ quando

$$\frac{\pi}{2} - \frac{t}{5}\pi = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = -5 - 10k, k \in \mathbb{Z}$$

uma vez que $-5 - 10k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}.$

126. Os lados do retângulo são dados por $|z - \bar{z}| = |2bi| = 2|b|$ e $|z - (-\bar{z})| = |z + \bar{z}| = |2a| = 2|a|.$

A área do retângulo é dada por

$$|z - \bar{z}| \times |z + \bar{z}| = 2|b| \times 2|a| = 4|ab|.$$

$$127.1 \quad |\text{Im}(w)| < |\text{Im}(z)| \wedge \text{Im}(w) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\text{Im}(w)| < 3 \wedge \text{Im}(w) < 0 \Leftrightarrow -3 < \text{Im}(w) < 0$$

Dado que

$\text{Re}(z) = 0 \wedge \text{Im}(z) = 3 \wedge \text{Re}(w) > 0 \wedge -3 < \text{Im}(w) < 0$,
 então $\text{Re}(z + w) > 0$ e $0 < \text{Im}(z + w) < 3$, donde o afixo de $z + w$ encontra-se no 1.º quadrante.

127.2 Dado que

$\text{Re}(z) = 0 \wedge \text{Im}(z) = 3 \wedge \text{Re}(-w) < 0 \wedge 0 < \text{Im}(-w) < 3$,
 então $\text{Re}(z - w) = \text{Re}[z + (-w)] < 0$ e
 $3 < \text{Im}(z - w) = \text{Im}[z + (-w)] < 6$, donde o afixo de $z - w$ encontra-se no 2.º quadrante.

127.3 Dado que

$\text{Re}(z) = 0 \wedge \text{Im}(z) = 3 \wedge \text{Re}(w) > 0 \wedge -3 < \text{Im}(w) < 0$,
 então $\text{Re}\left[\underbrace{z + \text{Re}(w)}_{3i + \text{Re}(w)}\right] = \text{Re}(w) > 0$ e

$\text{Im}[z + \text{Re}(w)] = \text{Im}(z) = 3$, donde o afixo de $z + \text{Re}(w)$ encontra-se no 1.º quadrante.

127.4 Dado que

$\text{Re}(z) = 0 \wedge \text{Im}(z) = 3 \wedge \text{Re}(w) > 0 \wedge -3 < \text{Im}(w) < 0$,
 então $\text{Re}(\bar{z}) = 0$ e $\text{Im}(\bar{z}) = -3$, pelo que $\text{Re}(\bar{z} + w) > 0$
 e $-6 < \text{Im}(\bar{z} + w) < -3$, donde o afixo de $\bar{z} + w$ encontra-se no 4.º quadrante.

128. Seja $z = 3 + 3i$ e $w = 2 - i$.

Os restantes vértices do quadrado resultam das imagens do ponto A (afixo de z) por rotações sucessivas de amplitude $\frac{\pi}{2}$, centradas no ponto P (afixo de w), ou seja, obtêm-se somando P às rotações de amplitude $\frac{\pi}{2}$ do vetor $\overrightarrow{PA}$.

Dado que fazer rotações de amplitude $\frac{\pi}{2}$ ao vetor $\overrightarrow{PA}$ equivale a multiplicar $z - w = 1 + 4i$ pelas sucessivas potências naturais de i , os números complexos cujos afijos são os restantes vértices do quadrado são

$$w + (z - w)i = 2 - i + (1 + 4i)i = -2,$$

$$w + (z - w)i^2 = 2 - i - (1 + 4i) = 1 - 5i$$

$$w + (z - w)i^3 = 2 - i - (1 + 4i)i = 6 - 2i$$

- 129.1 Basta fazer rotações sucessivas do afixo de $z = 3 = 3e^{i0}$, de amplitude $\frac{2\pi}{5}$, para obter os complexos cujos afijos são os restantes vértices do pentágono regular e que são
- $$3e^{i(0 + \frac{2\pi}{5})} = 3e^{i\frac{2\pi}{5}}, 3e^{i(\frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5})} = 3e^{i\frac{4\pi}{5}}, 3e^{i(\frac{4\pi}{5} + \frac{2\pi}{5})} = 3e^{i\frac{6\pi}{5}} \text{ e } 3e^{i(\frac{6\pi}{5} + \frac{2\pi}{5})} = 3e^{i\frac{8\pi}{5}}.$$

- 129.2 Dado que todos os vértices estão a 3 unidades de distância da origem do plano complexo, tem-se $|z| = 3$.

- 129.3 $w = ai$, $a \in \mathbb{R}^-$

$w^5 = (ai)^5 = a^5 \underbrace{i^5}_{\substack{\in \mathbb{R}^-}} = \underbrace{a^5}_{\in \mathbb{R}^-} i$, donde o afixo de w^5 pertence ao semieixo imaginário negativo.

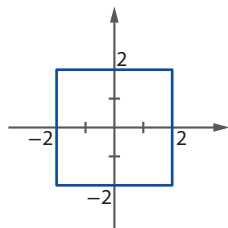
$w^4 = (ai)^4 = a^4 \underbrace{i^4}_1 = a^4 \in \mathbb{R}^+$, donde a imagem geométrica de w^4 pertence ao semieixo real positivo.

- 129.4 Os vértices deste pentágono são os afijos das raízes índice 5 do número complexo $(3)^5 = 243$, donde $n = 5$ e $c = 243$.

- 130.1 $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} \left(\underbrace{\cos \frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) = 2 + 2i$ e tem por afixo

o ponto de coordenadas $(2, 2)$.

Os restantes vértices têm coordenadas, respetivamente, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$ e $(2, -2)$.



- 130.2 Uma vez que o quadrado está centrado na origem, para obter os restantes vértices do quadrado, basta fazer rotações sucessivas do afixo do número complexo $z = 2 + 2i$, de amplitude $\frac{\pi}{2}$ e, como já se viu na resolução do exercício, isso equivale a multiplicar z pelas sucessivas potências naturais de i :

$$z_1 = iz = \begin{cases} i(2 + 2i) = -2 + 2i \\ 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \end{cases} \text{ cujo afixo}$$

tem coordenadas $(-2, 2)$.

$$z_2 = i^2 z = \begin{cases} i^2(2 + 2i) = -2 - 2i \\ 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + 2 \times \frac{\pi}{2})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \end{cases} \text{ cujo afixo}$$

tem coordenadas $(-2, -2)$.

$$z_3 = i^3 z = \begin{cases} i^3(2 + 2i) = 2 - 2i \\ 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + 3 \times \frac{\pi}{2})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} \end{cases} \text{ cujo afixo}$$

tem coordenadas $(2, -2)$.

- 130.3 A medida do lado é $2 \times 2 = 4$.

A medida da diagonal é $2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

- 130.4 Pelo que foi dito na alínea 130.2, são os números $re^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$, $re^{i(\theta + \frac{2\pi}{2})} = re^{i(\theta + \pi)}$ e $re^{i(\theta + \frac{3\pi}{2})}$.

131. Seja $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{-8 + 6i} = z \Leftrightarrow -8 + 6i = (a + bi)^2 \Leftrightarrow -8 + 6i =$$

$$= a^2 - b^2 + 2abi \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ a, b \neq 0 \\ b = \frac{3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{9}{a^2} = -8 \\ a^4 + 8a^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2} \\ a^2 = 1 \vee \underbrace{a^2 = -9}_{\text{Impossível porque } a \in \mathbb{R}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \end{cases}$$

Se $a = 1 \Rightarrow b = 3$ e se $a = -1 \Rightarrow b = -3$, donde as raízes quadradas de $-8 + 6i$ são os números complexos $1 + 3i$ e $-1 - 3i$.

- 132.1 $z_1 = 2 \cos \frac{\pi}{6} - 2i \sin \frac{7\pi}{6} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{7\pi}{6} \right) =$
- $$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

132.2 Basta mostrar que $z_1^3 = z_2$.

$$z_1^3 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 = 8 \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_i = z_2$$

132.3 $|z_3| = \left| \underbrace{i^2}_{-1} z_1 \right| = |-z_1| = |z_1|$

$$\begin{aligned} \text{Arg}(z_3) &= \text{Arg}(i^2 z_1) = \text{Arg}(-z_1) = \\ &= -\pi + \underbrace{\frac{\pi}{6}}_{\text{Arg}(z_1)} = \text{Arg}(z_1) - \pi \end{aligned}$$

133. Para $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a condição

$|z - ai| = |z + a| \Leftrightarrow |z - ai| = |z - (-a)|$ representa os pontos da mediatriz do segmento de reta de extremos $(0, a)$ e $(-a, 0)$, ou seja, a bissetriz dos quadrantes pares e a condição $|z + ai| = |z - a| \Leftrightarrow |z - (-ai)| = |z - a|$ representam os pontos da mediatriz do segmento de reta de extremos $(0, -a)$ e $(a, 0)$, que é também a bissetriz dos quadrantes pares.

Para $a = 0$, ambas as condições representam $\mathbb{C}$.

134. Se $\text{Arg}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{\pi}{2}$, então $\frac{z+1}{z-1} = ki$, $k \in \mathbb{R}_0^+$.

Seja $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{z+1}{z-1} = ki \Leftrightarrow z+1 = (z-1)ki \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+1+bi = (a-1+bi)ki$$

$$\Leftrightarrow a+1+bi = -bk + (a-1)ki \Leftrightarrow \begin{cases} a+1 = -bk \\ b = (a-1)k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+1 = (1-a)k^2 \\ b = -\frac{2k}{k^2+1} \end{cases}$$

onde $z = \frac{k^2-1}{k^2+1} - \frac{2k}{k^2+1}i$, pelo que

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{\left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^2 + \left(-\frac{2k}{k^2+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{k^4-2k^2+1+4k^2}{(k^2+1)^2}} = \\ &= \frac{1}{(k^2+1)} \sqrt{k^4+1-2k^2+4k^2} = \frac{1}{(k^2+1)} \sqrt{(k^2+1)^2} = \\ &= \frac{1}{(k^2+1)} \times (k^2+1) = 1. \end{aligned}$$

135.1 O raio da circunferência é

$$\left| 2 \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_i - \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} \right| = |1+2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}.$$

O afixo de $1+i$ pertence à circunferência pois

$$\left| 1+i - \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} \right| = |2+i| = \sqrt{5}.$$

135.2 A região sombreada da figura é constituída pelos afixos dos complexos cuja distância ao complexo $e^{i\pi} = -1$ é menor ou igual a $\sqrt{5}$ e cujas partes real e imaginária são positivas ou nulas, ou seja, é definida pela condição $|z+1| \leq \sqrt{5} \wedge \text{Re}(z) \geq 0 \wedge \text{Im}(z) \geq 0$.

135.3 O afixo de $2ie^{\frac{\pi}{2}}$ não pertence à circunferência

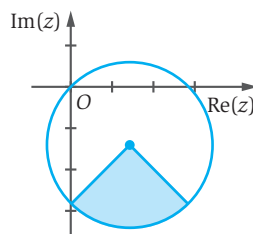
$$\text{pois } \left| 2i \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_i - \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} \right| = |2i^2+1| = |-1| = 1 \neq \sqrt{5}.$$

136.1 $\frac{|w|z^3 - w}{2} = 0 \Leftrightarrow 2z^3 - w = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{\frac{w}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2e^{i\frac{7\pi}{4}}}{2}} = \sqrt[3]{e^{i\frac{7\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}$$

Assim, as soluções são $e^{i\frac{7\pi}{12}}$, $e^{i\frac{5\pi}{4}}$ e $e^{i\frac{23\pi}{12}}$.

136.2 Complexos cujos afixos distam até 2 unidades do afixo do complexo w e, simultaneamente, têm afixos que pertencem ao ângulo orientado de vértice na origem do afixo do complexo w e amplitude $-\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.



137. Seja $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$

A condição $\text{Im}(z) < 0 \Leftrightarrow y < 0$ representa, no plano complexo, um semiplano aberto.

A condição

$$\underbrace{\text{Re}\left(iz - \frac{1}{2}\right)}_{i(x+iy) - \frac{1}{2} = -y - \frac{1}{2} + ix} \geq 1 \Leftrightarrow -y - \frac{1}{2} \geq 1 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{2} \text{ repre-}$$

senta, no plano complexo, um semiplano fechado.

O conjunto A é representado, no plano complexo, pela interseção dos dois semiplanos e é o semiplano definido por $y \leq -\frac{3}{2}$.

$$138.1 \quad w = \frac{2}{\sqrt{3}-i} + \underbrace{i^{43}}_{(i^2)^{21} \times i = -i} = \frac{2(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} - i =$$

$$= \frac{2(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}^2 - i^2} - i = \frac{2(\sqrt{3}+i)}{4} - i = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$|w| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

Com $\theta = \text{Arg}(w) \in]-\pi, \pi]$ tem-se

$$\tan \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{6},$$

O afixo de $w \in 4.^\circ$ quadrante

donde $w = e^{-\frac{\pi i}{6}}$.

$$w^{12} = \left(e^{-\frac{\pi i}{6}}\right)^{12} = e^{-2\pi i} = 1 \in \mathbb{R}$$

$$138.2 \quad z^4 + ze^{\frac{i\pi}{3}} = 0 \Leftrightarrow z(z^3 + e^{\frac{i\pi}{3}}) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^3 + e^{\frac{i\pi}{3}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[3]{-e^{\frac{i\pi}{3}}} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[3]{(-1)e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[3]{e^{\frac{4\pi i}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = e^{i\left(\frac{4\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = e^{\frac{4\pi i}{9}} \vee z = e^{\frac{10\pi i}{9}} \vee z = e^{\frac{16\pi i}{9}}$$

138.3 A inclinação da reta r é $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, pelo que a região sombreada da figura é constituída pelos afixos dos complexos cuja distância ao complexo $2i$ é menor ou igual a 2 e ângulos orientados de vértice no afixo de $2i$ com amplitude $\frac{\pi}{4}$, ou seja, é definida pela condição

$$|z - 2i| \leq 2 \wedge \left[-\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(z - 2i) \leq -\frac{\pi}{4} \vee\right.$$

$$\left. \vee \frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(z - 2i) \leq \frac{3\pi}{4} \right]$$

139. Seja $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

139.1 A condição $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) \Leftrightarrow y = x$ representa a bissetriz dos quadrantes ímpares.

139.2 A condição $\text{Re}(z) = 3 \Leftrightarrow x = 3$ representa a reta a que pertencem todos os pontos de abscissa 3.

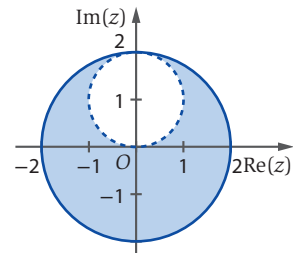
139.3 A condição $\text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ representa o eixo Oy .

139.4 A condição $\text{Re}(z) = -\text{Im}(z) \Leftrightarrow y = -x$ representa a bissetriz dos quadrantes pares.

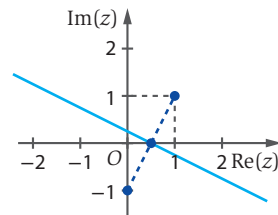
139.5 A condição $\text{Im}(z) = -2 \Leftrightarrow y = -2$ representa a reta a que pertencem todos os pontos de ordenada -2 .

139.6 A condição $|z| = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4^2$ representa a circunferência de centro de coordenadas $(0, 0)$ e raio 4.

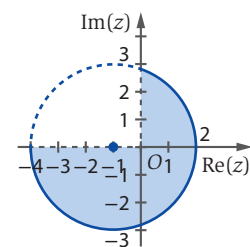
140.1 Interseção do círculo de centro no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e raio 2 com o exterior do círculo de centro no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e raio 1.



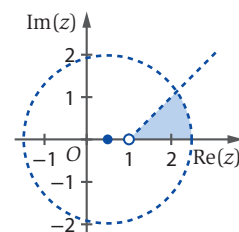
140.2 Mediatriz do segmento de reta de extremos nos pontos de coordenadas $(1, 1)$ e $(0, -1)$.



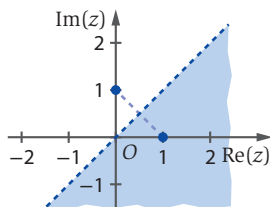
140.3 Interseção do interior do ângulo orientado de vértice no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e amplitude $\frac{\pi}{2} - (-\pi) = \frac{3\pi}{2}$ com o círculo de centro no ponto de coordenadas $(-1, 0)$ e raio 3.



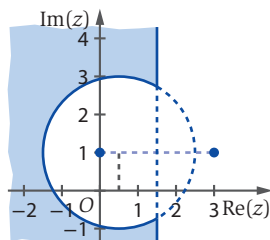
140.4 Interseção do ângulo orientado de vértice no ponto de coordenadas $(1, 0)$ e amplitude $\frac{\pi}{4}$ com o interior do círculo de centro no ponto de coordenadas $(\frac{1}{2}, 0)$ e raio 2, excluindo os pontos do interior do círculo que pertencem ao conjunto definido por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - 1 \wedge x \geq 1\}$.



- 140.5** Semiplano aberto definido por $y < x$ (obtido através da mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(1, 0)$ e $(0, 1)$).



- 140.6** Interseção do semiplano fechado definido por $x \leq \frac{3}{2}$ (obtido através da mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(3, 1)$ e $(0, 1)$) com a circunferência de centro no ponto de coordenadas $(\frac{1}{2}, 1)$ e raio 2 e exterior do círculo de centro no ponto de coordenadas $(\frac{1}{2}, 1)$ e raio 2.



- 140.7** Seja $z = re^{i\theta}$, $r > 0 \wedge \theta = \text{Arg}(z)$.

$$\frac{z}{z} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i(-\theta)}} = e^{i2\theta}$$

$$\text{Se } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \text{Arg}\left(\frac{z}{z}\right) = 2\theta \text{ e}$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq \underbrace{\text{Arg}\left(\frac{z}{z}\right)}_{2\theta} < \frac{\pi}{3} \Rightarrow -\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Se } \theta \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \text{Arg}\left(\frac{z}{z}\right) = 2\theta + 2\pi \text{ e}$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq \underbrace{\text{Arg}\left(\frac{z}{z}\right)}_{2\theta + 2\pi} < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \underbrace{-\pi < \theta < -\frac{5\pi}{6}}_{-\frac{7\pi}{6} \leq \theta < -\frac{5\pi}{6} \wedge \theta \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]}$$

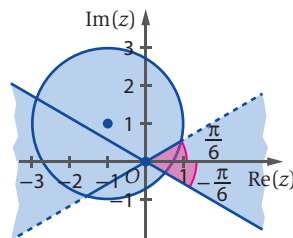
$$\text{Se } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow \text{Arg}\left(\frac{z}{z}\right) = 2\theta - 2\pi \text{ e}$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq \underbrace{\text{Arg}\left(\frac{z}{z}\right)}_{2\theta - 2\pi} < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \underbrace{\frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi}_{\frac{5\pi}{6} \leq \theta < \frac{7\pi}{6} \wedge \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]}$$

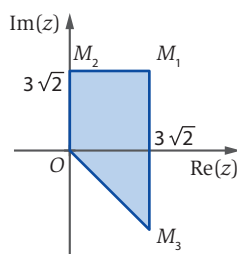
Reunião dos ângulos orientados de vértices no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e amplitudes, respetivamente,

$$\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}, \quad -\frac{5\pi}{6} - (-\pi) = \frac{\pi}{6} \text{ e } \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ com o}$$

círculo de centro no ponto de coordenadas $(-1, 1)$ e raio 2, excluindo os pontos da reta definida por $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ que pertencem ao exterior do dito círculo.



141.1



- 141.2** Dado que $\overrightarrow{OM_2}(0,3\sqrt{2})$ e $\overrightarrow{M_2M_1}(0,6\sqrt{2})$, então $OM_2 \perp M_3M_1$ e $\widehat{OM_2M_1} = 90^\circ$.

142.

1.º processo

$$\left| \frac{z-1-i}{z+1+i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-(1+i)|}{|z+(1+i)|} = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-1-i|}{|z-(-1-i)|} = 1$$

Mediatriz do segmento de reta $[AB]$, sendo A o afixo do número complexo $1+i$ e B o afixo do número complexo $-1-i$ (bisetritz dos quadrantes pares).

2.º processo

Seja $z = x + yi$ com $z + 1 + i \neq 0 \Leftrightarrow z \neq -1 - i$, ou seja, com $x \neq -1 \wedge y \neq -1$ e $w = 1 + i$.

$$\left| \frac{z-1-i}{z+1+i} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z-(1+i)}{z+(1+i)} \right| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{z-w}{z+w} \right| = 1 \Rightarrow \left| \frac{z-w}{z+w} \right|^2 = 1$$

Para abreviar os cálculos irão ser utilizadas as propriedades $\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z'}$ e $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$, válidas para os números complexos.

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-w}{z+w} \right|^2 = 1 &\Leftrightarrow \frac{z-w}{z+w} \times \frac{\overline{z-w}}{\overline{z+w}} = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{z-w}{z+w} \times \frac{\bar{z}-\bar{w}}{\bar{z}+\bar{w}} = 1 \Leftrightarrow \frac{(z-w)(\bar{z}-\bar{w})}{(z+w)(\bar{z}+\bar{w})} = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z \times \bar{z} - z \times \bar{w} - w \times \bar{z} + w \times \bar{w} = z \times \bar{z} + z \times \bar{w} + \\ &+ w \times \bar{z} + w \times \bar{w} \Leftrightarrow 2(z \times \bar{w} + w \times \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z \times \bar{w} + w \times \bar{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+yi)(1-i) + (1+i)(x-yi) = 0 \Leftrightarrow y = -x \end{aligned}$$

Assim, a condição $\left| \frac{z-1-i}{z+1+i} \right| = 1$ é verificada pelos números complexos cujos afixos pertencem à bissetriz dos quadrantes pares.

143.1

1.º processo

Com $z = re^{i\theta}$, tem-se $z^2 = r^2 e^{i2\theta}$ e $z^3 = r^3 e^{i3\theta}$.

Os afixos são distintos dois a dois se os respectivos números complexos também o forem.

$$\begin{aligned} z = z^2 &\Leftrightarrow re^{i\theta} = r^2 e^{i2\theta} \Leftrightarrow r = r^2 \wedge \theta = 2\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r(1-r) = 0 \wedge \theta = -2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow (r=0 \vee r=1) \wedge \theta = -2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow z=0 \vee z=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = z^3 &\Leftrightarrow re^{i\theta} = r^3 e^{i3\theta} \Leftrightarrow r = r^3 \wedge \theta = 3\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r(1-r^2) = 0 \wedge 2\theta = -2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow (r=-1 \vee r=0 \vee r=1) \wedge \theta = -k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow z=-1 \vee z=0 \vee z=1 \end{aligned}$$

Assim, os pontos são distintos dois a dois quando $z \neq 0 \wedge z \neq -1 \wedge z \neq 1$.

Observação: em bom rigor, o caso $z=0$ vem diretamente das igualdades $z=z^2$ e $z=z^3$, sem o recurso à escrita de z na forma trigonométrica, pois, por definição, $z = re^{i\theta} \neq 0$.

2.º processo

Com $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, o ponto M_1 tem coordenadas (a, b) .

$z^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, pelo que o ponto M_2 tem coordenadas $(a^2 - b^2, 2ab)$.

$z^3 = z^2 \times z = (a^2 - b^2 + 2abi)(a + bi) =$
 $= a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i$, pelo que o ponto M_3 tem coordenadas $(a^3 - 3ab^2, 3a^2b - b^3)$.

$$\begin{aligned} M_2 = M_1 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{a^2 - b^2 = a} \\ b(2a - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{b=0 \vee a=\frac{1}{2}} \\ \begin{cases} a(a-1)=0 \\ b=0 \end{cases} \vee \begin{cases} \frac{1}{4} - b^2 = \frac{1}{2} \\ \text{equação impossível} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{b=0 \vee a=\frac{1}{2}} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1)=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \vee a=1 \\ b=0 \end{cases}$$

Logo, $M_2 = M_1$ quando $z=0 \vee z=1$.

$$M_3 = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 = a \\ 3a^2b - b^3 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{a^3 - 3ab^2 = a} \\ b(3a^2 - 1 - b^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{b=0 \vee b^2 = 3a^2 - 1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2 - 1) = 0 \\ b=0 \end{cases} \vee \begin{cases} a(1 - 4a^2) = 0 \\ b^2 = 3a^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases} \vee \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \vee \begin{cases} a=0 \vee a=\pm\frac{1}{2} \\ b^2 = 3a^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases} \vee \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} a=0 \\ b^2 = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=\pm\frac{1}{2} \\ b^2 = \frac{3}{4} - 1 \end{cases}$$

equação impossível equação impossível

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases} \vee \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$$

Logo, $M_3 = M_1$ quando $z=0 \vee z=-1 \vee z=1$.

Assim, os pontos são distintos dois a dois quando $z \neq 0 \wedge z \neq -1 \wedge z \neq 1$.

143.2 Com $M_1 \neq M_2$, o triângulo definido por $[M_1 M_2 M_3]$ é retângulo em M_2 quando M_3 for a imagem do afixo de $z^2 + k(z - z^2) \times (\pm i)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, isto é, quando se soma M_2 com uma rotação de centro O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ a um vetor colinear com o vetor $\overrightarrow{M_2 M_1}$, ou seja, quando $M_3 = M_2 + (\pm i) \times k \overrightarrow{M_2 M_1}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} z^3 = z^2 + k(z - z^2) \times i &\Leftrightarrow z^3 + (ki - 1)z^2 - kiz = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z=0 \vee z^2 + (ki - 1)z - ki = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^3 = z^2 + k(z - z^2) \times (-i) &\Leftrightarrow z^3 - (ki + 1)z^2 + kiz = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z=0 \vee z^2 - (ki + 1)z + ki = 0 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} z^2 + (ki - 1)z - ki = 0 &\Leftrightarrow z = \\ &= \frac{(1 - ki) \pm \sqrt{-k^2 + 1 + 2ki}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{(1 - ki) \pm \sqrt{(ki + 1)^2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{e } z^2 - (ki + 1)z + ki = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(ki + 1) \pm \sqrt{-k^2 + 1 - 2ki}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(ki + 1) \pm \sqrt{(ki - 1)^2}}{2}.$$

Tomando $ki + 1 = re^{i\theta}$, $r \neq 0$ tem-se que

$\sqrt{(ki + 1)^2} = \sqrt{r^2 e^{i2\theta}} = re^{i(\theta + k\pi)}$, $k \in \{0, 1\}$, donde as soluções são $re^{i\theta} = ki + 1$ e $re^{i(\theta + \pi)} = -(ki + 1) = -1 - ki$.

De forma idêntica se conclui que $\sqrt{(ki - 1)^2} = \pm(ki - 1)$.

Voltando à equação $z = \frac{(1 - ki) \pm \sqrt{(ki + 1)^2}}{2}$ e fazendo a

substituição $\sqrt{(ki + 1)^2} = \pm(ki + 1)$, conclui-se que $z = 1 \vee z = -ki$.

Voltando à equação $z = \frac{(ki + 1) \pm \sqrt{(ki - 1)^2}}{2}$ e fazendo a

substituição $\sqrt{(ki - 1)^2} = \pm(ki - 1)$, conclui-se que $z = 1 \vee z = ki$.

Como para haver triângulo os afixos têm de ser distintos dois a dois, o triângulo será retângulo em M_2 quando $z = -ki \vee z = ki \Leftrightarrow z = mi$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pois para $z = 1$ há coincidência de afixos.

144. Seja $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$M_1(1, 1)$, $M_2(-a, 1 - b)$ e $M_3(1 - b, a)$.

As coordenadas de $\overrightarrow{M_1 M_2}$ são $(-a - 1, -b)$.

As coordenadas de $\overrightarrow{M_1 M_3}$ são $(-b, a - 1)$.

Os afixos são colineares quando $\frac{-a - 1}{-b} = \frac{-b}{a - 1}$, com $a \neq 1 \wedge b \neq 0$.

Simplificando a equação, obtém-se:

$-(a + 1)(a - 1) = b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$, com $b \neq 0$ (na condição $a^2 + b^2 = 1$, que define a circunferência de raio 1, centrada na origem do referencial, $b \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$).

Para além desta condição, é necessário garantir também que os afixos M_2 e M_3 não são coincidentes, ou seja, que $i - z \neq 1 + iz$.

$$1 + iz = i - z \Leftrightarrow 1 + i(a + bi) = i - (a + bi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + ai - b = i - a - bi$$

$$\Leftrightarrow 1 + a - b + (a + b - 1)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a - b = 0 \\ a + b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

Portanto, $z \neq i$ (em termos de a e b , bastará escrever $b \neq 1$).

Concluindo, os valores do número complexo z para os quais os pontos M_1 , M_2 e M_3 são colineares são da forma $z = a + bi$, tal que $a^2 + b^2 = 1$, com $b \neq 0 \wedge b \neq 1$, ou seja, são os complexos cujos afixos pertencem à circunferência de centro na origem do referencial e raio 1, exceto $z = -1$, $z = 1$ e $z = i$.

145. Seja $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|z - 2i| = 3|z + 3| \Leftrightarrow |z - 2i|^2 = (3|z + 3|)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 9[(x + 3)^2 + y^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{27}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{77}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{27}{4}x + \frac{729}{64} + y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = \frac{117}{64}$$

$$\Leftrightarrow \left[x - \left(-\frac{27}{8} \right) \right]^2 + \left[y - \left(-\frac{1}{4} \right) \right]^2 = \left(\frac{\sqrt{117}}{8} \right)^2,$$

pelo que o centro da circunferência é $\left(-\frac{27}{8}, -\frac{1}{4} \right)$,

afixo do número complexo $-\frac{27}{8} - \frac{1}{4}i$ e tem raio $\frac{\sqrt{117}}{8}$.

146.1 Dado que as bisettrizes têm inclinações, respetivamente, de $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$, a condição é $\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z) < \frac{3\pi}{4}$.

146.2 Dado que $\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, a condição é:

$$|z - (-1 - i)| < 2\sqrt{2} \wedge \text{Re}(z) < 0 \wedge \text{Im}(z) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z + 1 + i| < 2\sqrt{2} \wedge \text{Re}(z) < 0 \wedge \text{Im}(z) < 0$$

146.3 Dado que as quatro circunferências têm raio 1, a condição é $|z - 1 - i| \geq 1 \wedge |z + 1 - i| \geq 1 \wedge |z + 1 + i| \geq 1 \wedge |z - 1 + i| \geq 1$

146.4 Dado que a circunferência tem raio 1, a condição é: $|z + 1| \geq 1 \wedge \text{Re}(z) \geq -1 \wedge -1 \leq \text{Im}(z) \leq 1$

146.5 Dado que os pontos da região sombreada estão mais próximos do ponto $B(1, 0)$ do que do ponto $A(-2, -2)$ e pertencem ao 2.º quadrante, a condição é: $|z - 1| \leq |z - (-2 - 2i)| \wedge \text{Re}(z) < 0 \wedge \text{Im}(z) > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |z - 1| \leq |z + 2 + 2i| \wedge \text{Re}(z) < 0 \wedge \text{Im}(z) > 0$.

146.6 Dado que as retas AC e AB têm inclinações, respetivamente, de $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$, a condição é: $-\frac{3\pi}{4} \leq \text{Arg}(z - 2i) \leq -\frac{\pi}{4} \wedge \text{Im}(z) \geq 0$.

146.7 Dado que o polígono é um eneágono (9 lados) regular, a condição é:

$$-\frac{5\pi}{6} \leq \text{Arg}(z) \leq -\frac{2\pi}{3} \vee -\frac{\pi}{3} \leq \text{Arg}(z) \leq -\frac{\pi}{6} \vee$$

$$\vee \frac{\pi}{6} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{3} \vee \frac{2\pi}{3} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{5\pi}{6}$$

147.1 $i(z - 1 - i) = i(z - z_A)$ representa a rotação de amplitude $\frac{\pi}{2}$ e centro O do vetor $\overrightarrow{AM}$.

$i(z - 1 - i) + 1 + i = i(z - z_A) + z_A$ representa a soma do ponto A com rotação de amplitude $\frac{\pi}{2}$ e centro O do vetor $\overrightarrow{AM}$, o que é equivalente à imagem de M pela rotação de centro A e de ângulo de amplitude $\frac{\pi}{2}$.

147.2 $e^{i\theta}(z-1-i)+1+i$

148.1 O raio da circunferência é $|2i - (2+i)| = |-2+i| = \sqrt{5}$, pelo que a condição é $|z-2-i| = \sqrt{5}$.

148.2 $\text{Arg}(z-2-i) = k \frac{\pi}{9}$, $k \in \{-8, \dots, 9\}$

148.3
$$\left[-\frac{\pi}{9} \leq \text{Arg}(z-2-i) \leq \frac{\pi}{9} \vee \right. \\ \vee \frac{2\pi}{9} \leq \text{Arg}(z-2-i) \leq \frac{\pi}{3} \vee \frac{2\pi}{3} \leq \text{Arg}(z-2-i) \leq \frac{7\pi}{9} \vee \\ \vee \frac{8\pi}{9} \leq \text{Arg}(z-2-i) \leq \pi \vee \\ \vee -\pi < \text{Arg}(z-2-i) \leq -\frac{8\pi}{9} \vee \\ \vee -\frac{7\pi}{9} \leq \text{Arg}(z-2-i) \leq -\frac{2\pi}{3} \vee \\ \left. \vee -\frac{\pi}{3} \leq \text{Arg}(z-2-i) \leq -\frac{2\pi}{9} \right] \wedge |z-2-i| \leq \sqrt{5}$$

149. $f(z) = -iz$, $g(z) = z+1+2i$ e $h(z) = z-2+i$.

$$(f \circ h)(z) = f[h(z)] = f(z-2+i) = -i(z-2+i) = -iz+2i+1$$

$$(g \circ f)(z) = g[f(z)] = g(-iz) = -iz+1+2i$$

Conclui-se assim que $f \circ h = g \circ f$.

150.1 Designemos o pentágono descrito por $[OBCDE]$. Consideremos o pentágono com vértices O' , B' , C' , D' e E' , obtido do pentágono $[OBCDE]$ pela translação de vetor $\vec{u}(-2, -2)$, que tem centro na origem do referencial e vértice de $O'(-2, -2)$. As coordenadas dos restantes vértices do pentágono $[O'B'C'D'E']$ obtêm-se, sucessivamente a partir de O' , por rotações centradas na origem do referencial e amplitude $\frac{2\pi}{5}$. As coordenadas de B , C , D e E obtêm-se das de B' , C' , D' e E' , respetivamente, pela translação de vetor $\vec{v}(2, 2)$.

Desta forma, obtêm-se:

$$B' \left(2\sqrt{2} \cos \left(-\frac{7\pi}{20} \right) + 2, 2\sqrt{2} \sin \left(-\frac{7\pi}{20} \right) + 2 \right)$$

$$C' \left(2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{20} + 2, 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{20} + 2 \right)$$

$$D' \left(2\sqrt{2} \cos \frac{9\pi}{20} + 2, 2\sqrt{2} \sin \frac{9\pi}{20} + 2 \right)$$

$$E' \left(2\sqrt{2} \cos \frac{17\pi}{20} + 2, 2\sqrt{2} \sin \frac{17\pi}{20} + 2 \right)$$

150.2 Se o pentágono regular estivesse centrado na origem, o vértice que agora está na origem teria coordenadas $O + \vec{AO} = (-2, -2)$, ou seja, seria o afixo de $-2-2i$ e os vértices do pentágono eram os afixos das raízes quintas do número complexo $(-2-2i)^5 = 128+128i$, isto é, eram as soluções de $z^5 = 128+128i$.

Dado que o pentágono regular está centrado no ponto A , o afixo de cada número complexo w , vértice deste pentágono, é obtido do afixo de cada número complexo z , correspondente no pentágono centrado na origem, por soma desse afixo com o vetor $\vec{OA} = (2, 2)$, isto é, $w = z+2+2i \Leftrightarrow z = w-2-2i$.

Assim, os afixos dos números complexos w , vértices do pentágono centrado no ponto A , são as soluções de $(w-2-2i)^5 = 128+128i$ ou, na variável complexa z , $(z-2-2i)^5 = 128+128i$.

151.

1.º processo

$$z^7 = 1 \Leftrightarrow z = \sqrt[7]{1} = \sqrt[7]{e^{i0}} = e^{i\frac{k2\pi}{7}}, k \in \{0, \dots, 6\}$$

Utilizando a sugestão, as soluções da equação são

$$e^{i0} = 1, e^{i\frac{2\pi}{7}}, e^{i\frac{4\pi}{7}}, e^{i\frac{6\pi}{7}}, e^{i\frac{8\pi}{7}}, e^{i\frac{10\pi}{7}} \text{ e } e^{i\frac{12\pi}{7}}$$

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{6\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}} + e^{i\frac{10\pi}{7}} + e^{i\frac{12\pi}{7}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{10\pi}{7} +$$

$$+ \cos \frac{12\pi}{7} + \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} + \sin \frac{10\pi}{7} + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{12\pi}{7} \right) i = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \underbrace{\cos \frac{8\pi}{7} + \cos \left(2\pi - \frac{6\pi}{7} \right)}_{= \cos \frac{6\pi}{7}} +$$

$$+ \underbrace{\cos \frac{10\pi}{7} + \cos \left(2\pi - \frac{4\pi}{7} \right)}_{= \cos \frac{4\pi}{7}} + \underbrace{\cos \frac{12\pi}{7} + \cos \left(2\pi - \frac{2\pi}{7} \right)}_{= \cos \frac{2\pi}{7}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

2.º processo

$$z^7 = 1 \Leftrightarrow z = \sqrt[7]{1} = \sqrt[7]{e^{i0}} = e^{i\frac{k2\pi}{7}}, k \in \{0, \dots, 6\}$$

As raízes da equação $z^7 = 1$ são:

$$z = e^{i0} = 1, z = e^{i\frac{2\pi}{7}}, z = e^{i\frac{4\pi}{7}}, z = e^{i\frac{6\pi}{7}}, z = e^{i\frac{8\pi}{7}}, z = e^{i\frac{10\pi}{7}} \text{ e } z = e^{i\frac{12\pi}{7}}.$$

Como a sua soma é nula, tem-se:

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{6\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}} + e^{i\frac{10\pi}{7}} + e^{i\frac{12\pi}{7}} = 0$$

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{6\pi}{7}} + e^{-i\frac{6\pi}{7}} + e^{-i\frac{4\pi}{7}} + e^{-i\frac{2\pi}{7}} = 0$$

$$e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{-i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{-i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{6\pi}{7}} + e^{-i\frac{6\pi}{7}} = -1$$

$$2 \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \cos \frac{6\pi}{7} = -1$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$$

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

Como queríamos demonstrar.

TESTE – PÁG. 112

1. $i^{4n+1} = \left(\frac{i^2}{-1}\right)^{2n} \times i = i$ $2n$ é um número par

Opção correta: D.

2. A condição $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ representa o semiplano definido por $x \leq 0$ e a condição $|z - 2i| = |z - 2|$ representa a mediatriz do segmento de reta de extremos nos pontos de coordenadas $(0, 2)$ e $(2, 0)$, ou seja, a bissetriz dos quadrantes ímpares (reta de equação $y = x$), pelo que a conjunção das duas condições resulta na bissetriz do 3.º quadrante.

Opção correta: C.

3. Um argumento do número complexo $-z$ é $\pi + \left(-\frac{\pi}{5}\right) = \frac{4\pi}{5}$. Por outro lado, um argumento do número complexo $-\bar{z}$ é $-\frac{4\pi}{5} \in]-\pi, \pi]$, pelo que é o argumento principal de $-\bar{z}$.

Opção correta: A.

4. $z = z_1^7 \times (-z_2) = \left(\sqrt{5}e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^7 \times (-2e^{\theta i}) = -2\sqrt{5}^7 e^{\left(\frac{7\pi}{3} + \theta\right)i}$

Dado que

$$-2\sqrt{5}^7 e^{\left(\frac{7\pi}{3} + \theta\right)i} = -2\sqrt{5}^7 \left[\cos\left(\frac{7\pi}{3} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{3} + \theta\right) \right],$$

para que o complexo z seja um imaginário puro e

$\operatorname{Im}(z) < 0$, tem de se verificar

$$\cos\left(\frac{7\pi}{3} + \theta\right) = 0 \wedge \sin\left(\frac{7\pi}{3} + \theta\right) > 0.$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{3} + \theta\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \vee \theta = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$$

$\theta \in]-\pi, \pi]$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{3} + \theta\right) > 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) > 0, \text{ inequações que,}$$

para os dois valores anteriores de θ , só são verdadeiras

$$\text{quando } \theta = -\frac{5\pi}{6}.$$

Opção correta: C.

5. Seja $z = a + ib$.

O afixo de z é o ponto $A(a, b)$ e o afixo de $\bar{z}$ é o ponto de coordenadas $(a, -b)$.

A imagem do ponto A pela reflexão de eixo imaginário é o ponto $A'(-a, b)$, ou seja, o afixo de $-\bar{z}$.

A imagem do ponto A' pela translação de vetor $(0, -1)$ é o ponto $A''(-a, b-1)$, ou seja, o afixo de $-\bar{z} + t$ onde $t = -i$.

Dado que $|-i| = 1 \wedge \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$, então $t = e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

Opção correta: B.

6.
$$\frac{i^2 - i^{31} + (4 + 3i)(5 - 2i)}{\frac{1}{2}i} = \frac{-1 - (i^2)^{15} \times i + 20 - 8i + 15i - 6i^2}{\frac{1}{2}i} = \frac{-1 + i + 20 + 7i + 6}{\frac{1}{2}i}$$

$$= \frac{-1 + i + 20 + 7i + 6}{\frac{1}{2}i} = \frac{25 + 8i}{\frac{1}{2}i} = \frac{50 + 16i}{i}$$

$$= \frac{(50 + 16i) \times i}{i^2} = -50i - 16i^2 = 16 - 50i$$

7. $A \rightarrow 3e^{i\left(\frac{4\pi}{9} - \frac{2\pi}{8}\right)} = 3e^{\frac{7\pi}{36}}, C \rightarrow 3e^{i\left(\frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi}{8}\right)} = 3e^{\frac{25\pi}{36}},$
 $D \rightarrow 3e^{i\left(\frac{4\pi}{9} + 2 \times \frac{2\pi}{8}\right)} = 3e^{\frac{17\pi}{18}},$
 $E \rightarrow 3e^{i\left(\frac{4\pi}{9} + 3 \times \frac{2\pi}{8}\right)} = 3e^{\frac{43\pi}{36}}, F \rightarrow 3e^{i\left(\frac{4\pi}{9} + 4 \times \frac{2\pi}{8}\right)} = 3e^{\frac{13\pi}{9}},$
 $G \rightarrow 3e^{i\left(\frac{4\pi}{9} + 5 \times \frac{2\pi}{8}\right)} = 3e^{\frac{61\pi}{36}},$
 $H \rightarrow 3e^{i\left(\frac{4\pi}{9} + 6 \times \frac{2\pi}{8}\right)} = 3e^{\frac{35\pi}{18}}$

8. Seja $z = |z|e^{i\theta}$.

Tem-se $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}e^{-i\theta}$ e dado que os números complexos z

e $\frac{1}{z}$ têm imagens sobre a mesma circunferência de centro

na origem do referencial, então têm o mesmo módulo, ou seja,

$$|z| = \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1, \text{ donde}$$

$$z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Por outro lado, recorrendo à trigonometria,

$$|z - 1| = \sqrt{(\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta} = \sqrt{2 - 2 \cos \theta} \text{ e como}$$

$$|z - 1| = |z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2 - 2 \cos \theta} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 2 \cos \theta = 1 \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}, \text{ donde se obtém que}$$

$$\operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3} \vee \operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Conclui-se, assim, que } z = e^{-\frac{\pi}{3}i} \vee z = e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Em alternativa, recorrendo às propriedades dos números complexos e sendo $z = a + bi$, tem-se:

$$\frac{(z-1)(\bar{z}-1)}{(\bar{z}-1) = \bar{z} - 1 = \bar{z} - 1} = \frac{|z-1|^2}{|z-1| = |z| = 1} \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z\bar{z} - z - \bar{z} + 1}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z + \bar{z} = 1 \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = \pm \sqrt{1 - a^2} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Conclui-se, assim, que } z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \vee z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

- 9.1 Sejam $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, $r_2 \neq 0$.

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}}\right)} = \overline{\left(\frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}\right)} = \frac{r_1}{r_2} e^{i[-(\theta_1 - \theta_2)]} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{r_1 e^{i\theta_2}}{r_2 e^{i\theta_1}} = \frac{r_1 e^{-i\theta_1}}{r_2 e^{-i\theta_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \end{aligned}$$

- 9.2 Sejam $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, $r_2 \neq 0$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} \right| &= \left| \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \right| = \frac{r_1}{r_2} > 0 \\ &= \frac{r_1}{r_2} |e^{i(\theta_1 - \theta_2)}| = \frac{r_1}{r_2} \sqrt{\cos^2(\theta_1 - \theta_2) + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} = \sqrt{1} = 1 \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \end{aligned}$$

10.1 $w = \frac{2-3i}{-2+3i} = \frac{(2-3i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = \frac{(3i)^2 - 2^2}{(-2)^2 + 3^2} =$
 $= -1 \frac{= e^{i\pi}}{|w|=1, \text{ Arg}(w)=\pi}$

As raízes cúbicas de w são os números complexos

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}.$$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}, z_1 = e^{i\pi} \text{ e } z_2 = e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

- 10.2 Triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1.

11. Seja z um número complexo tal que w e $\bar{w}$ são duas das suas raízes de índice n , ou seja, tal que $w^n = z \wedge (\bar{w})^n = z$ e seja $w = |w| e^{i\theta}$.

$$\text{Tem-se } \bar{w} = |w| e^{i(-\theta)}, w^n = |w|^n e^{i(n\theta)} \text{ e } (\bar{w})^n = |w|^n e^{i(-n\theta)}$$

Conclui-se assim que

$$\begin{aligned} |w|^n e^{i(n\theta)} &= |w|^n e^{i(-n\theta)} \Leftrightarrow \underbrace{\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)}_{|w| \neq 0} = \\ &= \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta) \text{ e dado que} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(-n\theta) &= \cos(n\theta) \text{ e } \sin(-n\theta) = -\sin(n\theta), \text{ obtém-se a} \\ \text{igualdade } \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) &= \cos(n\theta) - i \sin(n\theta) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2i \sin(n\theta) &= 0 \Leftrightarrow \sin(n\theta) = 0 \end{aligned}$$

z um número real pois

$$\begin{aligned} z = w^n &= |w|^n e^{i(n\theta)} = |w|^n \left[\cos(n\theta) + i \underbrace{\sin(n\theta)}_0 \right] = \\ &= |w|^n \cos(n\theta) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

12. Excluindo a solução $z = 0$ (imediatamente observável), tome-se $z = |z| e^{i\theta}$, $|z| \neq 0$:

$$\frac{z^3}{-\sqrt{3} + i} = \bar{z} \Leftrightarrow \frac{(|z| e^{i\theta})^3}{-\sqrt{3} + i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = |z| e^{i(-\theta)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|z|^3}{2} e^{i\left(3\theta - \frac{5\pi}{6}\right)} = |z| e^{i(-\theta)} \Leftrightarrow \frac{|z|^2}{2} e^{i\left(4\theta - \frac{5\pi}{6}\right)} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{i\left(4\theta - \frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2}{|z|^2} \in \mathbb{R}$$

Conclui-se, assim, que

$$\begin{aligned} e^{i\left(4\theta - \frac{5\pi}{6}\right)} &= \cos\left(4\theta - \frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(4\theta - \frac{5\pi}{6}\right) \text{ é o número} \\ \text{real } \frac{2}{|z|^2}, \text{ pelo que } \sin\left(4\theta - \frac{5\pi}{6}\right) &= 0 \Leftrightarrow 4\theta - \frac{5\pi}{6} = k\pi, \\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta &= \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\text{Em }]-\pi, \pi] \text{ tem-se } \theta = -\frac{19\pi}{24} \vee \theta = -\frac{13\pi}{24} \vee$$

$$\vee \theta = -\frac{7\pi}{24} \vee \theta = -\frac{\pi}{24} \vee \theta = \frac{5\pi}{24} \vee \theta = \frac{11\pi}{24} \vee$$

$$\vee \theta = \frac{17\pi}{24} \vee \theta = \frac{23\pi}{24}$$

$$\text{Quando } k = -4 \vee k = -2 \vee k = 0 \vee k = 2, \text{ tem-se } \cos\left(4\theta - \frac{5\pi}{6}\right) = 1.$$

$$\text{Quando } k = -3 \vee k = -1 \vee k = 1 \vee k = 3, \text{ tem-se } \cos\left(4\theta - \frac{5\pi}{6}\right) = -1.$$

Assim, de

$$e^{i\left(4\theta - \frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2}{|z|^2} \Leftrightarrow \cos\left(4\theta - \frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(4\theta - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{2}{|z|^2}$$

$$\text{obtem-se que } \frac{2}{|z|^2} = \pm 1 \Leftrightarrow |z|^2 = \pm 2.$$

$$\text{De } |z|^2 = 2, \text{ conclui-se que } |z| = \sqrt{2}.$$

De $|z|^2 = -2$ (equação impossível), conclui-se que

$$\theta \neq -\frac{13\pi}{24} \wedge \theta \neq -\frac{\pi}{24} \wedge \theta \neq \frac{11\pi}{24} \wedge \theta \neq \frac{23\pi}{24}.$$

Tornando novamente a $z = |z| e^{i\theta}$, temos para soluções

$$z = 0, z = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{19\pi}{24}\right)}, z = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{7\pi}{24}\right)}, z = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{24}} \text{ e}$$

$$z = \sqrt{2} e^{i\frac{17\pi}{24}}.$$

TESTE GLOBAL – PÁG. 114

1. A enésima linha do triângulo de Pascal é composta pelos números do conjunto $\{^nC_0, \dots, ^nC_n\}$, ou seja, é composta por $n+1$ elementos.

$n+1=24 \Leftrightarrow n=23$, pelo que é composta pelos números do conjunto $\{^{23}C_0, \dots, ^{23}C_{23}\}$.

A linha seguinte é composta pelos números do conjunto $\{^{24}C_0, \dots, ^{24}C_{24}\}$, ou seja, é composta por 25 elementos, sendo que dois deles ($^{24}C_0, ^{24}C_{24}$) são o número 1,

donde a probabilidade pedida é $\frac{2}{25}$.

Opção correta: A.

$$2. \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \left[{}^{10}C_k \times \left(\frac{1}{x}\right)^{10-k} \times (\sqrt{x})^k \right] = \sum_{k=0}^{10} \left[{}^{10}C_k \times x^{k-10} \times x^{\frac{k}{2}} \right] = \sum_{k=0}^{10} \left[{}^{10}C_k \times x^{\frac{3k}{2}-10} \right]$$

Se o grau é 2, então $\frac{3}{2}k - 10 = 2 \Leftrightarrow k = 8$, pelo que o termo de grau 2 é ${}^{10}C_8 \times x^2 = 45x^2$.

Opção correta: D.

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \frac{f'(x) = 3e^{-3x} \sin(e^{-3x})}{f'(x) = 3e^{-3x} \sin(e^{-3x})} = 3e^{-3a} \sin(e^{-3a}).$$

Opção correta: B.

$$4. z = -3e^{i\theta} = -3e^{i\pi} \times e^{i\theta} = 3e^{i(\pi+\theta)}$$

$$\text{Se } \theta \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right[\Rightarrow \pi + \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\subset \left] -\pi, \pi \right],$$

donde $0 < \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{2}$.

Opção correta: A.

5. O círculo de centro no afixo do número complexo $1+i$ é definido pela condição $|z - (1+i)| \leq 1 \Leftrightarrow |z - 1 - i| \leq 1$. O semiplano $\text{Im}(z) \geq 1$ contém o semicírculo representado no plano de Argand.

Opção correta: B.

$$6. \text{Seja } z = |z|e^{i\theta}, \text{ onde } |z| \neq 0 \text{ e } \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[.$$

$$-zi = \underbrace{|z|e^{i\theta}}_{|z|e^{i\theta}} \times \underbrace{(-i)}_{e^{i(-\frac{\pi}{2})}} = |z|e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}, \text{ ou seja,}$$

$\text{Arg}(-zi) = \theta - \frac{\pi}{2} \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$, pelo que o afixo do número complexo $-zi$ é o ponto D.

Opção correta: D.

$$7. \int \sin(6x+2) dx = -\frac{1}{6} \cos(6x+2) + C$$

Opção correta: B.

$$8. A = \int_0^a f(x) dx = \int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx$$

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx = \int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx - \int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx = A - A = 0$$

Opção correta: D.

9. Utilizando o acontecimento contrário a «os 2 ovos de codorniz não ficarem juntos», isto é, o acontecimento «os 2 ovos de codorniz ficarem juntos», tem-se:

Casos favoráveis: $11 \times {}^{10}C_8$ (os 2 ovos de codorniz podem ocupar as posições 1 e 2, 2 e 3, 3 e 4, ..., 11 e 12, sendo que nos 10 recipientes restantes colocam-se os 8 ovos de galinha).

Casos possíveis: ${}^{12}C_8 \times {}^4C_2$ (nos 12 recipientes colocam-se os 8 ovos de galinha e, nos 4 recipientes sobranes, colocam-se 2 ovos de codorniz).

$$P = 1 - \frac{11 \times {}^{10}C_8}{{}^{12}C_8 \times {}^4C_2} \approx 0,83$$

$$10. \underbrace{P(\overline{A \cup B})}_{P(\overline{A \cap B})} - P(A \cup B) = \underbrace{P(\overline{A \cap B})}_{1 - P(A \cap B)} - P(A \cup B) =$$

$$= 1 - P(A \cap B) - P(A \cup B)$$

$$= 1 - P(A \cap B) - \left[\underbrace{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}_{P(A \cup B)} \right]$$

$$= 1 - P(A \cap B) - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= \underbrace{1 - P(A) - P(B)}_{P(\overline{A})} = P(\overline{A}) - P(B)$$

$$11.1 \ M(t) = \frac{M(0)}{2} \Leftrightarrow 15 \times e^{-0,02t} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow e^{-0,02t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,02t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{0,02} \approx 34 \text{ h } 39 \text{ min}$$

- 11.2 A função M é contínua em $\mathbb{R}_0^+$, logo também o é em $[0, 4]$.

Por outro lado, $M(0) = 15 > 14$ e $M(4) = 15e^{-0,08} < 14$ donde, pelo Teorema de Bolzano, a função M toma todos os valores entre $M(4)$ e 14, no intervalo $]0, 4[$, isto é, $\exists c \in]0, 4[: M(c) = 14$.

12. $g'(x) = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$ e $g''(x) = \frac{1 - \ln x}{x(1 + \ln x)^3}$.

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x(1 + \ln x)^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \in D_g$$

x	0		$\frac{1}{e}$		e	$+\infty$
$g''(x)$	N.D.	-	N.D.	+	0	-
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g	N.D.	$\cap$	N.D.	$\cup$	$\frac{e}{2}$ P.I.	$\cap$

Concavidade voltada para baixo em $\left] 0, \frac{1}{e} \right[$ e em $\left[e, +\infty \right[$, concavidade voltada para cima em $\left] \frac{1}{e}, e \right]$ e ponto de inflexão de coordenadas $\left(e, \frac{e}{2} \right)$.

13.1 No domínio considerado a função é contínua, pelo que só poderá ter assíntotas verticais em $x = -\frac{\pi}{2}$ e em $x = \frac{3\pi}{2}$; além disso, por ter domínio limitado, não pode ter assíntotas não verticais.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\sin x} = -1, \text{ onde a reta de equação } x = -\frac{\pi}{2} \text{ é assíntota ao gráfico da função } f.$$

$x = -\frac{\pi}{2}$ é assíntota ao gráfico da função f .

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\sin x} = -1, \text{ onde a reta de equação } x = \frac{3\pi}{2} \text{ é assíntota ao gráfico da função } f.$$

$x = \frac{3\pi}{2}$ é assíntota ao gráfico da função f .

13.2 $f'(x) = \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	N.D.	+	0	-	N.D.
Monotonia e extremos de f	N.D.	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ Máx. abs.	$\searrow$	N.D.

13.3 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = 2\sqrt{3} - 3$,
donde $\overline{AD} = 2\sqrt{3} - 3$.

Por outro lado, $f(x) = 2\sqrt{3} - 3 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{1 + \sin x} = 2\sqrt{3} - 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x = 2\sqrt{3} - 3 + (2\sqrt{3} - 3) \sin x$$

$$\Leftrightarrow (3 - 2\sqrt{3}) \sin x + \sin x = 2\sqrt{3} - 3$$

$$\Leftrightarrow (4 - 2\sqrt{3}) \sin x = 2\sqrt{3} - 3 \Leftrightarrow \sin x = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4 - 2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{(2\sqrt{3} - 3)(4 + 2\sqrt{3})}{(4 - 2\sqrt{3})(4 + 2\sqrt{3})} \Leftrightarrow \sin x = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, \text{ pelo que } \overline{CD} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Assim, a área do retângulo é dada por:

$$\overline{AD} \times \overline{CD} = (2\sqrt{3} - 3) \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} - \pi$$

14.1 $\frac{2z_1 - i^{18} - 3}{1 - 2i} = \frac{2(1 - i) - (i^2)^9 - 3}{1 - 2i} = \frac{2 - 2i + 1 - 3}{1 - 2i} = -\frac{2i}{1 - 2i} = -\frac{2i(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{4 - 2i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$

14.2 Seja $z = |z|e^{i\theta}$.

As raízes quartas de z são os números complexos

$$z_k = \sqrt[4]{|z|} e^{i\left(\theta + \frac{2\pi k}{4}\right)} = \sqrt[4]{|z|} e^{i\left(\theta + \frac{\pi k}{2}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \text{ donde, para que o afixo da outra raiz quarta de } z \text{ pertença ao } 3.^\circ \text{ quadrante, basta tomar}$$

para argumento $\text{Arg}(z_1) - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$, donde se tem

$$z_2 = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}.$$

15.1 Atendendo a que $(x^2 + 2x + 3)' = 2x + 2 = 2(x + 1)$, a expressão geral das primitivas é:

$$\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{1}{2} \times \int \frac{2(x + 1)}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{1}{2} \times \ln |x^2 + 2x + 3| + c, c \in \mathbb{R}$$

15.2 $F'(x) = \frac{1}{x}$

16. O gráfico da função definida em $[0, 4]$ por

$y = \sqrt{4 - (x - 2)^2} \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 2^2$ é a semicircunferência de raio 2 e centro no ponto de coordenadas $(2, 0)$, cujos pontos têm ordenada não negativa e o integral é igual à área da região do plano delimitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico dessa função, ou seja, é igual à área do semicírculo de raio 2 e centro no ponto de coordenadas $(2, 0)$.