

**RESOLUÇÕES PREPARAR O EXAME NY12**

Teste 1	2
Teste 2	4
Teste 3	6
Teste 4	8
Teste 5	10
Teste Global 1	12
Teste Global 2	15
Teste Global 3	17

RESOLUÇÕES PREPARAR O EXAME NYI 2 – TESTE 1

TESTE 1

PÁG. 20

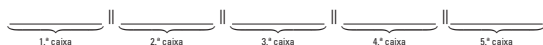
1. Se o número é par, então o algarismo das unidades terá de ser 0, 6 ou 8.

Por outro lado, se o número de cinco algarismos utiliza todos os algarismos do conjunto $\{0, 6, 7, 8, 9\}$, então o algarismo da dezena de milhares não pode ser 0.

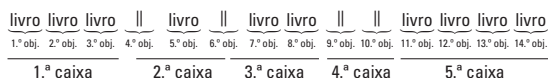
Assim, há $3 \times 4!$ sequências desses cinco algarismos em que o algarismo das unidades é 0, 6 ou 8. Mas em $2 \times 3!$ sequências o algarismo das dezenas de milhar é o 0, pelo há $3 \times 4! - 2 \times 3! = 60$ números nas condições pedidas, donde a hipótese correta é C.

2. Como cada caixa pode levar pelo menos 10 livros, não há restrições ao número de livros que se podem colocar em cada caixa.

Para facilitar a contagem, pensando nas caixas juntas e em fila, haverá 4 divisórias de separação entre caixas, tal como sugere o esquema seguinte:



Dado que os livros são indistinguíveis, quando colocados de uma qualquer maneira nas caixas, formam, em conjunto com as divisórias, uma sequência de 14 objetos como, por exemplo, a que se segue onde estão 3 livros na 1.ª caixa, 1 na 2.ª, 2 na 3.ª, nenhum na 4.ª e 4 na 5.ª:



Assim, o número de diferentes formas de guardar os livros nas caixas corresponde à escolha de 4 objetos para divisórias de entre os 14 objetos, isto é, ${}^{14}C_4 = 1001$, ou à escolha de 10 objetos para livros de entre os 14 objetos, isto é, ${}^{14}C_{10} = 1001$.

3. Como $P(A \cup B) = \frac{P(A)}{0,8} + \frac{P(B)}{0,4} - P(A \cap B)$ e

$0 \leq P(A \cup B) \leq 1$, conclui-se que $0,2 \leq P(A \cap B) \leq 1$, pelo que, necessariamente,

$A \cap B \neq \emptyset$, donde a hipótese correta é B.

4. Da igualdade ${}^nC_p + {}^nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$ conclui-se que

${}^nC_p = {}^{n+1}C_{p+1} - {}^nC_{p+1} = b - a$, donde a hipótese correta é C.

5. Considerando que $n \in \mathbb{N}$ representa o número dessa linha e que os elementos dessa linha do triângulo de Pascal são dados por nC_k , $k \in \{0, \dots, n\}$, tem-se

que $\sum_{n=0}^n {}^nC_{n-1} + \sum_{n=1}^n {}^nC_n = 20 \Leftrightarrow n = 19$.

Por outro lado, essa linha tem 20 elementos

$({}^{19}C_0, \dots, {}^{19}C_{19})$ e dado que ${}^{19}C_0 = 1 < 171$,

${}^{19}C_1 = 19 < 171$, ${}^{19}C_2 = 171$ e ${}^nC_k = {}^nC_{n-k}$, $k \in \{0, \dots, n\}$,

então há $20 - 2 \times 3 = 14$ elementos maiores que 171, donde a hipótese correta é D.

$$6.1 \quad P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) - P[(A \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap B)] =$$

$$= P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) - P\left[\underbrace{A \cap \bar{A}}_{\emptyset} \cap \underbrace{\bar{B} \cap B}_{\emptyset}\right] =$$

$$= P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) \quad \begin{matrix} P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) \\ P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) \Leftrightarrow P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A) \end{matrix}$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + \underbrace{P(B)}_{P(A)} - P(B \cap A) =$$

$$= 2P(A) - 2P(A \cap B)$$

- 6.2 Considere-se os seguintes acontecimentos:

A: o inquirido utiliza os transportes da empresa A

B: o inquirido utiliza os transportes da empresa B

Segundo os dados do inquérito, $P(A) = P(B) = 22\% = 0,22$ e $P(A \cap B) = 12\% = 0,12$.

O uso de apenas transportes de uma das empresas corresponde ao acontecimento $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ e da alínea anterior conclui-se que

$$P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = 2P(A) - 2P(A \cap B) = 2 \times 0,22 - 2 \times 0,12 = 0,2.$$

7. Tem-se que $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B|A) = 20\% = 0,2$,

$P(\bar{B}|\bar{A}) = 40\% = 0,4$ e é pedido o valor de

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Da igualdade $P(B|A) = 0,2$ conclui-se

$$\text{que } \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0,2 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{25}.$$

Da igualdade $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0,4$ conclui-se que

$$P(B|\bar{A}) = 1 - P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - 0,4 = 0,6.$$

$$\text{Como } P(B) = P(B \cap A) + \underbrace{P(B \cap \bar{A})}_{P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A})} = \frac{2}{25} + 0,6 \times \frac{3}{5} = \frac{11}{25}.$$

$$\text{Conclui-se assim que } P(A|B) = \frac{\frac{2}{25}}{\frac{11}{25}} = \frac{2}{11}.$$

8.1 $P(\text{retirar uma goma de cola sabendo que escolheu o 2.º frasco}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

8.2 É pedido o valor de $P(\text{escolher o 2.º frasco sabendo que retirou uma goma de banana})$.

Considerem-se os acontecimentos:

B : retirar uma goma de banana

F_2 : escolher o 2.º frasco de gomas

$P(\text{escolher o 2.º frasco sabendo que retirou uma goma de banana}) = P(F_2|B) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{P(F_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(F_2 \cap B)}{P(B \cap F_1) + P(B \cap F_2)} \\ &= \frac{\frac{10}{15} \times \frac{1}{2}}{\frac{8}{18} \times \frac{1}{2} + \frac{10}{15} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9} + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

9. Não considerando as 4 peças não brancas tem-se:

Número de casos favoráveis: 8C_4 (há 8 casas com número par para colocar as 4 peças brancas indistinguíveis)

Número de casos possíveis: ${}^{16}C_4$ (há 16 casas no tabuleiro para colocar as 4 peças brancas indistinguíveis)

$$P = \frac{{}^8C_4}{{}^{16}C_4}$$

Considerando também as 4 peças não brancas tem-se:

Número de casos favoráveis: ${}^8C_4 \times {}^{12}A_4$ (há 8 casas com número par para colocar as 4 peças brancas indistinguíveis e 12 casas sobrantes para as restantes 4 peças distinguíveis)

Número de casos possíveis: ${}^{16}C_4 \times {}^{12}A_4$ (há 16 casas no tabuleiro para colocar as 4 peças brancas indistinguíveis e 12 casas sobrantes para as restantes 4 peças distinguíveis)

$$P = \frac{{}^8C_4 \times {}^{12}A_4}{{}^{16}C_4 \times {}^{12}A_4}$$

Por simplificação tem-se que: $\frac{{}^8C_4}{{}^{16}C_4} = \frac{{}^8C_4 \times {}^{12}A_4}{{}^{16}C_4 \times {}^{12}A_4}$

10. $\left(\frac{2}{x} + \sqrt{x}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \left[{}^{15}C_k \times \left(\frac{2}{x}\right)^k \times \sqrt{x}^{15-k} \right] = \sum_{k=0}^{15} \left[{}^{15}C_k \times 2^k \times x^{-k} \times x^{\frac{15-k}{2}} \right] = \sum_{k=0}^{15} \left[{}^{15}C_k \times 2^k \times x^{\frac{15-3k}{2}} \right]$

O termo de terceiro grau corresponde a $\frac{15-3k}{2} = 3 \Leftrightarrow k = 3$,
pelo que o coeficiente desse termo é ${}^{15}C_3 \times 2^3 = 3640$.

11. $\sum_{p=0}^n {}^nC_p = \sum_{p=0}^n \left[{}^nC_p \times 1^p \times 1^{n-p} \right] = (1+1)^n = 2^n$, pelo que
 $2^n = 8192 \Leftrightarrow 2^n = 2^{13} \Leftrightarrow n = 13$

Assim, ${}^{n+1}C_6 = {}^{14}C_6 = 3003$.

RESOLUÇÕES PREPARAR O EXAME NYI 2 – TESTE 2

TESTE 2

PÁG. 22

1. $-1 \leq \sin n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$

Considerando as sucessões de termos gerais, respetivamente, $a_n = -\frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$ tem-se que $\lim a_n = \lim b_n = 0$, pelo que, pelo teorema das sucessões enquadadas $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$, donde a hipótese correta é C.

2. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, pelo que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+h}} - \frac{1}{2}}{h} \stackrel{0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+h}}{2h\sqrt{1+h}} \stackrel{0}{=}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1+h})(1 + \sqrt{1+h})}{2h\sqrt{1+h}(1 + \sqrt{1+h})}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - h}{2h\sqrt{1+h}(1 + \sqrt{1+h})}$
 $= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{1+h}(1 + \sqrt{1+h})} = -\frac{1}{4}$, donde a hipótese

correta é A.

3. O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$, sendo que a função f é contínua também em $\mathbb{R}$.

Admitindo, tal como a figura sugere, que a função f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, conclui-se que $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, donde a hipótese correta é C.

4. A velocidade do ponto, como função de t , é dada pela expressão $x'(t) = -2t + 4$ e a aceleração do ponto, como função de t , é dada pela expressão $x''(t) = -2$, donde a hipótese correta é A.

5. Pelo teorema de Weierstrass é necessariamente verdadeiro que a função admite, nesse intervalo, um máximo e um mínimo absolutos, donde a hipótese correta é C.

6. $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -1 - \pi \leq \sin x - \pi \leq 1 - \pi, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1+\pi}{2x^2+x} \leq \frac{\sin x - \pi}{2x^2+x} \leq \frac{1-\pi}{2x^2+x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Considerando as funções f e g definidas, respetivamente,

por $f(x) = -\frac{1+\pi}{2x^2+x}$ e $g(x) = \frac{1-\pi}{2x^2+x}$ tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \text{ pelo que, pelo teorema das}$$

funções enquadadas, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - \pi}{2x^2+x} = 0$.

7.1 $f(x) = \sqrt{\frac{5}{\pi}}x + \frac{5}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}$

$$f'(x) = \sqrt{\frac{5}{\pi}} + \frac{5}{2\sqrt{\pi}\sqrt{x}} \text{ e } f''(x) = \frac{5}{2\sqrt{\pi}} \times \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{\pi}} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{5}{4\sqrt{\pi} \times x\sqrt{x}}$$

Como $-\frac{5}{4\sqrt{\pi} \times x\sqrt{x}} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$, conclui-se que

a segunda derivada da função f é sempre negativa no domínio da função f , pelo que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo no seu domínio.

7.2 A função f é contínua em $\mathbb{R}^+$ (é soma e quociente de funções contínuas em $\mathbb{R}^+$), pelo que também o é em $[1, 2]$.

Por outro lado, $f(1) - 5 < 0$ e $f(2) - 5 > 0$ donde, pelo teorema de Bolzano, $\exists c \in]1, 2[: f(c) - 5 = 0$, ou seja, a equação $f(x) - 5 = 0$ tem pelo menos uma solução em $]1, 2[$.

8.1 $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

8.2 A função g é uma função racional, pelo que é infinitamente derivável no seu domínio.

8.3 $g'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$
e $g''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{x(x+2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = -2}_{\in D_g} \vee \underbrace{x = 0}_{\in D_g}, g''(-2) < 0 \text{ e } g''(0) > 0,$$

donde se conclui que $g(2) = \frac{4}{3}$ e $g(0) = 0$ são,

respetivamente, máximo e mínimo relativos da função g .

9.1 $h(t) = 0 \Leftrightarrow -5t^2 + 20t + 300 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-20 \pm \sqrt{6400}}{-10} \Leftrightarrow t = 10, \text{ isto é, o projétil atingiu}$$

o solo passados 10 segundos.

Nesse período de tempo, a sua velocidade média

é dada pela expressão $\frac{h(10) - h(0)}{10 - 0}$,

pelo que foi $\frac{0 - 300}{10} = -30$.

9.2 A aceleração do projétil, em função de t , é dada pela expressão $h''(t) = -10$, pelo que é -10 m/s^2 durante todo o movimento do projétil.

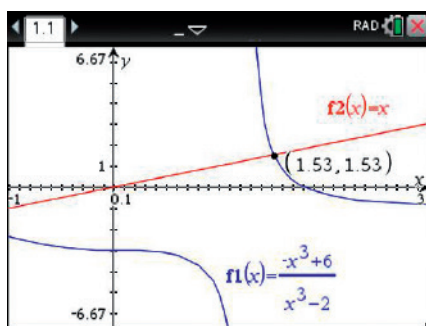
10.1 $\frac{-x^3+6}{x^3-2} = x \Leftrightarrow \frac{-x^3+6}{x^3-2} - x = 0$

Seendo $f(x) = \frac{-x^3+6}{x^3-2} - x$, tem-se $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ e $f(2) > 0$;

como f é contínua em $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$, o corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de, pelo menos, um zero em $\left]\frac{3}{2}, 2\right[$.

O facto de f ser decrescente em $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ garante que esse zero é único, pelo que a equação dada tem exactamente uma solução no referido intervalo.

10.2



1,53 ; $f(1,525) > 0$ e $f(1,535) < 0$.

11.1 Considere-se os seguintes acontecimentos:

A : o António leva as ovelhas a pastar

M : a Maria leva as ovelhas a pastar

P : as ovelhas vão pastar para o Monte Picado

V : as ovelhas vão pastar para o Monte Ventoso

Segundo o enunciado, $P(A) = 40\% = 0,4$,

$P(M) = 60\% = 0,6$, $P(P|M) = 20\% = 0,2$ e

$P(V|M) = 80\% = 0,8$.

É pedido o valor de $P(M \cap V)$.

$P(M \cap V) = P(V|M) \times P(M) = 0,8 \times 0,6 = 0,48 = 48\%$

11.2 Há 7C_5 possibilidades diferentes de escolher os 5 dias em que a Maria leva as ovelhas a pastar e, para cada um desses dias, a probabilidade de ser a Maria a levar as ovelhas a pastar é 0,6, sendo que para cada um dos restantes 2 dias a probabilidade de não ser a Maria a levar as ovelhas a pastar é 0,4, donde a probabilidade pedida é ${}^7C_5 \times 0,6^5 \times 0,4^2 \approx 0,26$.

RESOLUÇÕES PREPARAR O EXAME NYI 2 – TESTE 3

TESTE 3

PÁG. 25

1. Dado que, dos 80 alunos, apenas 2 não farão nenhum dos exames, então serão 78 alunos a fazer pelo menos um dos exames.

Uma vez que a soma do número de alunos que fazem exame a uma das duas disciplinas é $70 + 75 = 145$ e sabemos que, efetivamente, só 78 alunos fazem exame, conclui-se que $145 - 78 = 67$ alunos fazem os dois exames, pelo que, a fazer apenas o exame de Álgebra Linear, são apenas $70 - 67 = 3$ alunos, donde a hipótese correta é D.

2. Número de casos favoráveis: $4 \times 9^3 = 2916$ (o algarismo 7 pode ocupar uma das quatro posições e, para cada uma das três posições restantes há 9 algarismos (0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9)).

Número de casos possíveis: $10^4 = 10\,000$ (de 0000 a 9999)

$$P = \frac{4 \times 9^3}{10^4}$$

Donde a hipótese correta é D.

3. $\sin(4x) = \sin[2 \times (2x)] =$

$$= 2 \sin(2x) \cos(2x) \stackrel{\sin(2x)=2\sin x \cos x}{=} \stackrel{\cos(2x)=\cos^2 x - \sin^2 x}{=}$$

$$= 4 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= 4 \sin x \cos^3 x - 4 \sin^3 x \cos x, \text{ donde a hipótese correta é D.}$$

- 4.1 Num oscilador harmónico definido por uma expressão do tipo $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, com $A > 0$, $\omega > 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi[$, a constante A representa a amplitude, donde a hipótese correta é A.

- 4.2 Uma vez que $\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$, sendo T o período do movimento, e a frequência do movimento é dada $\frac{1}{T}$, conclui-se que $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ s e a frequência é $\frac{1}{2}$ Hz, donde a hipótese correta é B.

5. $-\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x =$

$$= - \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) \stackrel{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)}{=} \stackrel{\sin(\frac{\pi}{6})}{=} \stackrel{\cos(\frac{\pi}{6})}{=}$$

$$= - \sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right)$$

6.1 $f'(x) = 1 + 2 \cos x$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \underbrace{\frac{2\pi}{3}}_{\pi - \frac{\pi}{3}} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \underbrace{\frac{4\pi}{3}}_{\pi + \frac{\pi}{3}} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

No domínio da função f, os zeros da derivada são

$$x = \frac{2\pi}{3} \text{ e } x = \frac{4\pi}{3}, \text{ sendo a monotonia de } f:$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	0	↗	$\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$	↘	$\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$	↗	2π
	Mín. abs.		Máx. rel.		Mín. rel.		Máx. abs.

Conclui-se assim que a ordenada do ponto A é

$$\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{3} \text{ e a ordenada do ponto B é}$$

$$\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}.$$

- 6.2 De acordo com a tabela da alínea anterior é $[0, 2\pi]$.

- 6.3 A equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto B tem declive 0 e passa no ponto

$$\left(\frac{4\pi}{3}, f\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) = \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3} \right),$$

$$\text{pelo que é definida por } y = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}.$$

Uma vez que a abcissa do ponto pedido resulta das coordenadas do ponto de interseção das curvas definidas por

$$y = x + 2 \sin x \text{ e } y = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}, \text{ tomando a função}$$

$$\text{definida por } g(x) = f(x) - \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}, \text{ continua em } [0, 2\pi] \text{ (logo também em } [0, 8; 1] \text{), e como}$$

$$g(0,8) = f(0,8) - \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3} < 0$$

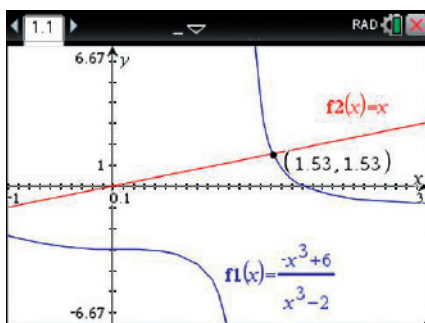
$$\text{e } g(1) = f(1) - \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3} > 0, \text{ conclui-se, pelo Teorema}$$

de Bolzano, que $\exists c \in]0,8; 1[: g(c) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(c) = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}.$$

Assim, recorrendo à calculadora gráfica, verifica-se que, com aproximação às centésimas, a abcissa do ponto de interseção das curvas definidas por $y = x + 2 \sin x$

e $y = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}$ é $x = 0,90$, de acordo com o gráfico que se segue.



7.1 $g(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x (\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

No domínio da função g os zeros são $x = -\pi$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = 0$ e $x = \pi$.

7.2 $g'(x) = 2 \left(\underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin(2x)} + \cos x \right) = 2 \sin(2x) + 2 \cos x$

7.3 $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + \cos x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos x (2 \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

No domínio da função g os zeros da derivada são $x = -\frac{5\pi}{6}$, $x = -\frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

$$g''(x) = (2 \sin(2x) + 2 \cos x)' = 4 \cos(2x) - 2 \sin x$$

Como $g''\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 3 > 0$, $g''\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 3 > 0$ e

$g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -6 < 0$, da análise da figura, conclui-se que o máximo absoluto de g é $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

7.4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (\sin x + 1)}{x} =$

$$= 2 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}_1 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + 1)}_1 = 2$$

8.1 A área do trapézio é dada pela expressão $\frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times h$ onde $h = 5 \sin \alpha$ representa a sua altura.

Dado que $D\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ e a circunferência tem raio 5, então $\overline{AD} = 5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$.

Por outro lado, sendo os pontos B e C simétricos em relação ao eixo Oy e a abscissa do ponto B igual a $5 \cos \alpha$, então $\overline{BC} = 2 \times 5 \cos \alpha = 10 \cos \alpha$.

Conclui-se assim que a área do trapézio é dada por

$$\frac{\frac{15}{2} + 10 \cos \alpha}{2} \times 5 \sin \alpha = \left(\frac{15}{4} + 5 \cos \alpha \right) \times 5 \sin \alpha =$$

$$= \frac{75}{4} \sin \alpha + \underbrace{25 \sin \alpha \cos \alpha}_{\frac{25}{2} \times 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{25}{2} \sin(2\alpha)} = A(\alpha).$$

8.2 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} A(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{25}{2} \sin(2x) + \frac{75}{4} \sin x \right] = \frac{75}{4}$

Geometricamente, o valor do limite obtido representa a área do triângulo de vértices nos pontos A , D e o ponto de coordenadas $(0, 5)$, ou seja, de base $\frac{15}{2}$ e altura 5.

O triângulo resulta da aproximação do trapézio quando α tende para o ângulo reto.

RESOLUÇÕES PREPARAR O EXAME NYI 2 – TESTE 4

TESTE 4

PÁG. 28

1. Dado que $(e^{kx})' = ke^{kx}$, $(ke^{x-k})' = ke^{x-k}$, $(e^{2-k})' = 0$ e $(e^k)' = 0$, a hipótese correta é B.

2. Dado que $\log_b\left(\frac{b^3}{k}\right) = \log_b(b^3) - \log_b(k) = 3 \log_b(b) - \log_b(k) = 3 - \log_b(k)$, a hipótese correta é B.

3. Dado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{-2x} = -\frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = -\infty$, a hipótese correta é C.

4. O domínio de existência da expressão é o conjunto

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge 1-x \neq 0 \wedge \frac{1+x}{1-x} > 0 \right\}.$$

O conjunto solução da inequação $\frac{1+x}{1-x} > 0$ é $] -1, 1[$ pois:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{1+x}{1-x}$	$-$	0	$+$	N.D.	$-$

Assim, o domínio de existência é $] -1, 1[\setminus \{0\}$, donde a hipótese correta é D.

5. A equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto

de abscissa $x = \frac{1}{3}$ passa no ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ e é do tipo $y = f'\left(\frac{1}{3}\right)x + k$, sendo k o valor da ordenada na origem.

$$\text{Dado que } f\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} + k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \underbrace{f\left(\frac{1}{3}\right)}_{\ln 1 + 5 = 0 + 5} - \underbrace{f'\left(\frac{1}{3}\right)}_{f'(x) = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}} \times \frac{1}{3} = 5 - 1 = 4,$$

donde a hipótese correta é C.

- 6.1 $D = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0 \wedge \ln(x+1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > -1 \wedge x+1 \neq 1\} =]-1, +\infty[\setminus \{0\}$

- 6.2 Dado o domínio da função e uma vez que se trata de uma função contínua no seu domínio, a haver assíntotas paralelas ao eixo Oy são as retas de equação, respetivamente, $x = -1$ e $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^{2x} - e^x}{\ln(x+1)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - e^x}{\ln(x+1)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x(e^x - 1)}{\ln(x+1)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x}_1 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}_1 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\ln(x+1)}}_1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - e^x}{\ln(x+1)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x(e^x - 1)}{\ln(x+1)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x}_1 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x}}_1 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(x+1)}}_1 = 1$$

Dos três limites anteriores conclui-se que o gráfico da função f não tem assíntotas paralelas ao eixo Oy .

$$\text{Por outro lado, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - e^x}{\ln(x+1)} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{2y-2} - e^{y-1}}{\ln y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{y-1}(e^{y-1} - 1)}{\ln y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y(e^{y-1} - 1)}{\ln y}$$

$$= \frac{1}{e} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}_{+\infty \text{ (limite notável)}} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} (e^{y-1} - 1)}_{+\infty} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln y}}_{0^+ \text{ (limite notável)}} = +\infty,$$

pelo que o gráfico da função f também não tem assíntotas paralelas ao eixo Ox .

- 7.1 Uma vez que a função g é contínua em $] -\infty, 1[$ por ser uma função exponencial e é contínua em $]1, +\infty[$ por ser uma função logarítmica, será contínua em $\mathbb{R}$ se

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1).$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1 + e^{x-1}) = -1 + 1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} [\ln(x+1) - k] = \ln 2 - k \text{ e } g(1) = \ln 2 - k, \text{ pelo que}$$

a função g será contínua quando $\ln 2 - k = 0 \Leftrightarrow k = \ln 2$.

7.2 a. $g'(x) = \begin{cases} 2xe^{x^2-1} & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{x+1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{g(1)=0} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1 + e^{x^2-1}}{x - 1} =$$

$$\stackrel{\substack{0 \\ y=x^2-1 \\ y \rightarrow 0^-}}{=} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{\sqrt{y+1} - 1}$$

$x^2 = y + 1 \Rightarrow x = \sqrt{y+1}$
 x é um valor positivo

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y(\sqrt{y+1} + 1)}{y}$$

$$= \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_1 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} (\sqrt{y+1} + 1)}_2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{g(1)=0} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x - 1} \stackrel{\substack{0 \\ y=x-1}}{=}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(y+2) - \ln 2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{y}{2} + 1\right)}{y} \stackrel{\substack{0 \\ z=\frac{y}{2}}}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \times \underbrace{\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\ln(z+1)}{z}}_1 = \frac{1}{2}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$, conclui-se que não existe $g'(1)$ e, portanto,

$$g'(x) = \begin{cases} 2xe^{x^2-1} & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{x+1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

7.2 b. Para $x < 1$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow e^{x^2-1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow x = 0$ e $g'(x) > 0, \forall x \in]1, +\infty[$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	N.D.	+
$g(x)$	$\searrow$	$-1 + \frac{1}{e}$ Mín. abs.	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Conclui-se assim que a função g é crescente em $[0, +\infty[$, é decrescente em $]-\infty, 0]$ e tem um mínimo absoluto, $-1 + \frac{1}{e}$, em $x = 0$.

7.2 c. A equação da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa $x = e - 1$ passa no ponto de coordenadas $(e - 1, g(e - 1)) \stackrel{e-1 \geq 1}{=} (e - 1, 1 - \ln 2)$ e é do tipo $y = g'(e - 1)x + k$.

Dado que $g'(e - 1) = \frac{1}{e}$,

$$\text{então } 1 - \ln 2 = \frac{1}{e} \times (e - 1) + k \Leftrightarrow k = \frac{1}{e} - \ln 2,$$

pelo que uma equação da reta tangente é $y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{e} - \ln 2$.

8.1 $t = -33 \ln\left(\frac{T - 25}{50}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{T - 25}{50}\right) = -\frac{t}{33} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{T - 25}{50} = e^{-\frac{t}{33}} \Leftrightarrow T = 50e^{-\frac{t}{33}} + 25$

8.2 $T(t) = 50e^{-\frac{t}{33}} + 25, (t \geq 0)$ pelo que
 $T(0) = 50e^0 + 25 = 75^\circ\text{C}$

8.3 $T(30) = 50e^{-\frac{30}{33}} + 25 \approx 45^\circ\text{C}$

8.4 $T(t) = 50 \Leftrightarrow 50e^{-\frac{t}{33}} + 25 = 50 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{33}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\frac{t}{33} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow t = 33 \ln 2 \approx 23 \text{ min}$

9. $P(x) \geq 60 \Leftrightarrow 80(1 - e^{-0,15x}) \geq 60 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,15x} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{-0,15x} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{0,15x} \geq 4 \Leftrightarrow \stackrel{y=e^{0,15x} \text{ é uma função crescente}}{e^{0,15} > 1}$$

$$\Leftrightarrow 0,15x \geq \ln 4 \Leftrightarrow x \geq \frac{\ln 4}{0,15} \approx 9,242$$

A despesa a suportar será, pelo menos, cerca de 9242 euros.

10.1 A área do triângulo $[OBC]$ é dada pela expressão $\frac{\overline{OC} \times \overline{BC}}{2}$.

Uma vez que os pontos B e C têm coordenadas, respetivamente, $(x, f(x)) = (x, 2^{-x})$ e $(x, 0)$, então $\overline{BC} = 2^{-x}$ e $\overline{OC} = x$, pelo que a área do triângulo $[OBC]$ é dada por $\frac{x \times 2^{-x}}{2} = x \times 2^{-x-1}$.

10.2 $A'(x) = 2^{-x-1} + x(-\ln 2 \times 2^{-x-1}) = 2^{-x-1}(1 - x \ln 2)$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{2^{-x-1}}_{\neq 0, \forall x \in \mathbb{R}} (1 - x \ln 2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 2}$$

$$A''(x) = (-\ln 2 \times 2^{-x-1})(1 - x \ln 2) + 2^{-x-1}(-\ln 2) =$$

$$= -\ln 2 \times 2^{-x-1}(2 - x \ln 2)$$

Dado que $A''\left(\frac{1}{\ln 2}\right) < 0$, então a função A tem um máximo absoluto em $x = \frac{1}{\ln 2}$.

RESOLUÇÕES PREPARAR O EXAME NYI 2 – TESTE 5

TESTE 5

PÁG. 31

1. Dado que $(\sin x)^n = -\sin x$, $(2x^3)^n = 6$, $(e^{4x})^n = 16e^{4x}$ e $(4e^x)^n = 4e^x$, a hipótese correta é A.

2. Dado que $\log_3 \left(\frac{9^5}{3^k} \right) = \log_3 \left[\frac{(3^2)^5}{3^k} \right] = \log_3 (3^{10-k}) = (10-k) \log_3 3 = 10-k$, a hipótese correta é C.

3. O argumento principal de $\bar{z}$ é $\frac{\pi}{7}$ e o argumento principal de $-\bar{z}$ é $-\pi + \frac{\pi}{7} = -\frac{6\pi}{7}$, a hipótese correta é C.

4. Dado que a origem da semirreta é o afixo de $1+i$ e forma um ângulo de amplitude $\theta \in]-\pi, \pi]$ com o eixo Ox , então é definida por $\text{Arg}[z - (1+i)] = \theta \Leftrightarrow \text{Arg}(z - 1 - i) = \theta$, donde a hipótese correta é B.

5. $\text{Re}(z) \geq 0$ corresponde ao semiplano fechado definido por $x \geq 0$.

$|z - 2i| = |z - 2|$ corresponde à mediatriz do segmento de reta de extremos nos pontos de coordenadas $(0, 2)$ e $(2, 0)$, ou seja, à bisetriz dos quadrantes ímpares.

Assim, a conjunção das duas condições corresponde à semirreta de origem no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e que forma com o eixo Ox um ângulo orientado de amplitude $\frac{\pi}{4}$, donde a hipótese correta é A.

6.1 Supondo que $z = \frac{-2+2i}{i} = \frac{(-2+2i)(-i)}{i^2} = 2+2i$,

então, sendo $\theta = \text{Arg}(z)$ e dado que o afixo de z pertence

ao 1.º quadrante, tem-se $\tan \theta = \frac{1}{1} = 1$, donde

$\theta = \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$, o que contraria o enunciado.

Supondo que $w = \frac{-2+2i}{i} = 2+2i$, então,

$|w| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, o que também contraria o enunciado.

6.2 Se z e w são duas raízes quartas do mesmo número complexo, então $|z| = |w| = 3$ e dado que $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$, conclui-se que $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Uma vez que o afixo de z pertence ao 1.º quadrante e nos é dito que o afixo de w pertence ao 3.º quadrante, então

conclui-se que $w = 3e^{i\left(\frac{\pi}{3} + 2 \times \frac{2\pi}{4}\right)} = 3e^{i\frac{5\pi}{3}}$

$= 3 \left(\underbrace{\cos \frac{4\pi}{3}}_{-\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}} + i \underbrace{\sin \frac{4\pi}{3}}_{-\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

$$7.1 \quad z_1 = 8e^{i\frac{5\pi}{6}} = 8 \left(\underbrace{\cos \frac{5\pi}{6}}_{-\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}} + i \underbrace{\sin \frac{5\pi}{6}}_{\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}} \right) = -4\sqrt{3} + 4i,$$

donde $z_1 + z_2 = -4\sqrt{3} + 4i + \sqrt{3} - i = -3\sqrt{3} + 3i$.

7.2 As raízes cúbicas de z_1 são os números complexos obtidos a partir da expressão $\sqrt[3]{2} e^{i\left(\frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}\right)}$, $k \in \{0, 1, 2\}$, pelo que têm módulo 2.

Assim, os afijos das raízes cúbicas de z_1 são pontos equidistantes na circunferência de centro no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e raio 2, circunferência definida pela condição $|z| = 2$.

$$8.1 \quad w_1 = 2 \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} = -2, \text{ donde } w_3 = w_1 + w_2 = -2 - 1 + \sqrt{3}i = -3 + \sqrt{3}i \text{ e } |w_3| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

Sendo $\theta = \text{Arg}(w_3)$ e dado que o afixo de w_3

pertence ao 2.º quadrante, tem-se $\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

donde $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Conclui-se assim que, na forma trigonométrica,

$$w_3 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

$$8.2 \quad |w_2 - w_1| = |-1 + \sqrt{3}i + 2| = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$|w_3 - w_1| = |w_2| = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$|w_3 - w_2| = |w_1| = 2$$

Conclui-se assim que os afijos de w_1 , w_2 e w_3 são vértices de um triângulo equilátero pois cada um está a igual distância dos outros dois.

$$9.1 \text{ a. } z^2 + z_1 = 0 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{-16i} = \pm \sqrt{16i^2} = \pm 4i$$

$$9.1 \text{ b. } z^2 + z = z_1^2 \Leftrightarrow z^2 + z + 256 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1023i^2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1023}}{2}i \vee z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1023}}{2}i$$

$$9.2 \quad z_2^2 = -12 + 16i \Leftrightarrow [a(1+2i)]^2 = -12 + 16i \Leftrightarrow [a(1+2i)]^2 = a^2(1-4+4i)$$

$$\Leftrightarrow a^2(-3+4i) = 4(-3+4i) \Leftrightarrow \underbrace{a^2}_{-3+4i \neq 0} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -2 \vee a = 2$$

$$10.1 \quad \int (3 \cos x + 5x^2) = 3 \sin x + \frac{5}{3}x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

10.2 $\int x e^{-x^2} dx = \int_{(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}} -\frac{1}{2} \times \int -2xe^{-x^2} = -\frac{e^{-x^2}}{2} + c, c \in \mathbb{R}$

11. Uma vez que a função é não negativa, a área da região sombreada é dada por:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 4} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2} dx = \int_{\frac{1}{(x+2)^2}} \frac{1}{(x+2)^2} dx = \int_{(x+2)^{-2}} (x+2)^{-1} = -\frac{1}{x+2} \\ &= \left[-\frac{1}{x+2} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

TESTE GLOBAL 1

PÁG. 33

1. Negar que, «para qualquer número real x , a sua soma com 5 é menor que 11», é equivalente a afirmar que, «existe um número real x tal que a sua soma com 5 é maior ou igual que 11», donde a hipótese correta é A .

2. O vetor $\vec{n}(1, 1, 1)$ é um vetor normal ao plano definido por $x + y + z = 0$, isto é, é perpendicular ao plano, pelo que também é um vetor diretor de uma reta perpendicular ao plano, ou seja, qualquer reta com a direção deste vetor é perpendicular ao plano, donde a hipótese correta é B .

3. Uma vez que para qualquer natural n se tem $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}$, conclui-se que (u_n) é uma progressão geométrica de primeiro termo -2 e razão $\frac{1}{3}$, donde a hipótese correta é A .

4. Uma vez que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$, conclui-se que (u_n) é uma sucessão com $\lim u_n = -\infty$ ou em que $\lim u_n = 2$ e $u_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que (u_n) não pode ser definida pelo termo geral $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ pois ter-se-ia $u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$, donde a hipótese correta é C .

5. O facto de o sinal do coeficiente de correlação ser igual ao sinal do declive da reta dos mínimos quadrados elimina as alíneas que apresentam um valor negativo.

Por outro lado, se a correlação entre as variáveis é forte, então o valor do coeficiente de correlação é próximo de 1, donde a hipótese correta é C .

$$\begin{aligned} 6. \sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \\ &= -\sin \alpha + \sin \alpha + \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{1}{\tan \alpha} \end{aligned}$$

Da figura conclui-se que $\tan \alpha = -3$, pelo que

$$\sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{3},$$

donde a hipótese correta é D .

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - 1}{x - 1} \stackrel{0-1}{\stackrel{+\infty}{=}} 0, \text{ donde a hipótese correta é } B.$$

8. Como ${}^{14}C_6$ representa o número de subgrupos distintos, com 6 rapazes, que se podem formar a partir do grupo dos 14 rapazes e, para cada um destes subgrupos, podem formar-se ${}^{10}C_6$ subgrupos distintos com 6 raparigas, então o número de grupos distintos que se podem formar com 6 rapazes e 6 raparigas é ${}^{14}C_6 \times {}^{10}C_6$, donde a hipótese correta é D .

9.1 Uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} [x - \ln(-x - 1)] \stackrel{-1-(-\infty)}{=} +\infty,$$

não existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, pelo que a função f não é contínua em $x = -1$.

9.2 A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ pois neste conjunto é obtida à custa de funções contínuas, pelo que o seu gráfico apenas poderá ter como assíntota vertical a reta de equação $x = -1$.

Esta reta é assíntota ao gráfico da função f pois

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \ln(-x - 1)}{x} \stackrel{\infty}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x - 1)}{x} \stackrel{y = -x - 1}{=} 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y - 1} = \\ &= 1 + \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{0 \text{ (limite notável)}} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y + 1}}_{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y + 1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{y}} = 1} = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + e^{1-x^2}}{x} \stackrel{\frac{-1+0}{\infty}}{=} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1 + e^{1-x^2}) = -1$$

Conclui-se assim que a reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico da função f .

9.3 Dado que a função f não é contínua em $x = -1$, então

também não tem derivada em $x = -1$, pelo que:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x+1} & \text{se } x < -1 \\ -2xe^{1-x^2} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

Para $x < -1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \underbrace{x=0}_{\notin]-\infty, -1[}$, donde $f'(x) > 0$, $\forall x \in]-\infty, -1[$

Para $x > -1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2xe^{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x=0}_{\substack{e^{1-x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \in]-1, +\infty[}}$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	N.D.	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0 Mín. rel.	$\nearrow$	$e-1$ Máx. rel.	$\searrow$

Como $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$, conclui-se assim que a função f é crescente em $]-\infty, -1[$ e $[-1, 0]$, é decrescente em $[0, +\infty[$, tem um mínimo relativo, 0 , em $x = -1$ e tem um máximo relativo, $e-1$, em $x = 0$.

- 9.4** Dado que a função f não é derivável em $x = -1$, então também não tem segunda derivada em $x = -1$, pelo que:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{se } x < -1 \\ -2e^{1-x^2}(1-2x^2) & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

Para $x < -1$, $f''(x) > 0$.

Para $x > -1$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2e^{1-x^2}(1-2x^2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{1-2x^2=0}_{e^{1-x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e, neste } \begin{matrix} \in]-1, +\infty[\\ \in]-1, +\infty[\end{matrix}$$

conjunto, a função f'' é negativa em $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ pois neste intervalo $-2e^{1-x^2} < 0$ e $1-2x^2 > 0$.

Conclui-se assim que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -1[$,

$$\left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \text{ e } \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[\text{ e tem a concavidade}$$

$$\text{voltada para baixo em } \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Além disso, tem pontos de inflexão de coordenadas

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}-1\right) \text{ e}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}-1\right).$$

9.5 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1+e^{1-x^2}}{x-1}$ $\frac{0}{0}$
 $y=1-x^2$
 $y \rightarrow 0$
 $x^2=1-y$
 x é um valor positivo $x=\sqrt{1-y}$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sqrt{1-y} - 1} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y(\sqrt{1-y} + 1)}{-y}$$

$$= - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}}_1 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} (\sqrt{1-y} + 1)}_2 = -2$$

- 10.1** O plano DGF é obtido à custa, por exemplo, dos vetores não colineares $\overrightarrow{DG} = G - D = (-6, 2, 0)$ e $\overrightarrow{GF} = F - G = (0, 0, 1)$.

Assim, uma equação vetorial do plano DGF é

$$(x, y, z) = (0, 2, 0) + \alpha(-6, 2, 0) + \beta(0, 0, 1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- 10.2** Se a reta é paralela à diagonal $[DF]$, então um vetor diretor dessa reta é o vetor $\overrightarrow{DF} = F - D = (-6, 2, 1)$ e, dado que a reta passa na origem do referencial, uma equação vetorial da reta é $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \theta(-6, 2, 1)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

- 10.3** O volume do paralelepípedo é dado pela expressão $\|\overrightarrow{DC}\| \times \|\overrightarrow{CG}\| \times \|\overrightarrow{GF}\|$.

$$\text{Como } \overrightarrow{DC} = (0, 2, 0), \overrightarrow{CG} = (-6, 0, 0) \text{ e } \overrightarrow{GF} = (0, 0, 1),$$

$$\text{conclui-se que } \underbrace{\|\overrightarrow{DC}\|}_2 \times \underbrace{\|\overrightarrow{CG}\|}_6 \times \underbrace{\|\overrightarrow{GF}\|}_1 = 12.$$

- 10.4** As retas correspondentes aos eixos coordenados têm como vetores diretores, respetivamente, os vetores $\vec{e}_1(1, 0, 0)$, $\vec{e}_2(0, 1, 0)$ e $\vec{e}_3(0, 0, 1)$.

Dado que $\overrightarrow{GF} = \vec{e}_3$, $\overrightarrow{DC}$ é colinear com $\vec{e}_2$ e $\overrightarrow{CG}$ é colinear com $\vec{e}_1$, conclui-se que os pontos C , D e G pertencem ao plano xOy , pois o plano xOy é definido à custa de um ponto e dos vetores $\overrightarrow{CG}$ e $\overrightarrow{DC}$.

Dado que $\overrightarrow{GF} = \vec{e}_3$, então as retas perpendiculares ao plano xOy têm vetores diretores paralelos a $\overrightarrow{GF}$, pelo que se conclui que, com os vértices do paralelepípedo, só as retas AD , BC , FG e EH são perpendiculares ao plano xOy .

Assim, o número de casos favoráveis é 4 e o número de casos possíveis é 8C_2 (subconjuntos de 2 vértices a partir de um conjunto de 8 vértices), donde $P = \frac{4}{{}^8C_2} = \frac{1}{7}$.

RESOLUÇÕES PREPARAR O EXAME NYI 2 – TESTE GLOBAL I

11. $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27e^{i\pi}} = \sqrt[3]{27}e^{i\left(\frac{\pi+k2\pi}{3}\right)} = 3e^{i\left(\frac{\pi+k2\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}$

Assim, na forma algébrica, as raízes cúbicas de -27 são:

$$z_0 = 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{\frac{1}{2}} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{3}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i;$$

$$z_1 = 3e^{i\pi} = 3\left(\underbrace{\cos\pi}_{-1} + i\underbrace{\sin\pi}_0\right) = -3 \text{ e}$$

$$z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{3}} = 3\left(\underbrace{\cos\frac{5\pi}{3}}_{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}} + i\underbrace{\sin\frac{5\pi}{3}}_{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

12.1 $R(47) = 175 \Leftrightarrow R_0 e^{-0,01 \times 47} = 175 \Leftrightarrow R_0 = \frac{175}{e^{-0,47}} \approx 280 \text{ g}$

12.2 $R(t) < 100 \Leftrightarrow 280e^{-0,01t} < 100 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{0,01t} > 2,8 \quad \Leftrightarrow \quad y=e^{0,01x} \text{ é uma função crescente}$$

$$\Leftrightarrow 0,01t > \ln 2,8 \Leftrightarrow t > \frac{\ln 2,8}{0,01} \approx 102,96$$

Restam menos de 100 gramas a partir do começo da 103.^a semana.

13.1 $g'(x) = -2 \cos x + 1$ e $g''(x) = 2 \sin x$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$g''\left(-\frac{\pi}{3} + k2\pi\right)_{k \in \mathbb{Z}} = 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0 \text{ e}$$

$$g''\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right)_{k \in \mathbb{Z}} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$$

Atendendo ao sinal da 2.^a derivada, conclui-se que em $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, a função g tem máximos relativos e em $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, a função g tem mínimos relativos, pelo que $x = \frac{\pi}{3}$ é um minimizante da função g .

13.2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x + x}{x} \stackrel{0}{=} -2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_1 + \lim_{x \rightarrow 0} 1 = -1$

13.3 Considere-se o ponto $P(a, b)$ pertencente ao gráfico da função g tal que $b = a^2$.

Uma vez que P pertencente ao gráfico da função g , então $b = g(a)$, donde se tem $a^2 = -2 \sin a + a \Leftrightarrow 2 \sin a + a^2 - a = 0$.

Seja f a função definida por $f(x) = 2 \sin x + x^2 - x$.

A função f é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que também o é em $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$. Por outro lado, $f(-1) > 0$ e

$f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ donde, pelo Teorema de Bolzano,

$$\exists a \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[: f(a) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin a + a^2 - a = 0.$$

Através da calculadora gráfica obtém-se, com aproximação às milésimas, $a = -0,796$, pelo que

$$P\left(-0,796; \underbrace{0,633616}_{(-0,796)^2}\right).$$

Dado que $g(-0,796) \approx 0,633127$ e

$0,633616 - g(-0,796) = 0,000489$, então o valor obtido é uma aproximação com erro inferior a uma milésima do valor pedido.

TESTE GLOBAL 2

PÁG. 37

1. Uma vez que a amplitude do ângulo entre os dois vetores é 0 e a norma de cada um deles é igual ao raio, então
 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \times \cos 0 = 16$, donde a hipótese correta é D.

2. Como $u_n = \frac{2n+3}{n+2} = 2 - \frac{1}{n+2}$, conclui-se que

$$\frac{5}{3} \leq u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ pois o fator } \frac{1}{n+2} \text{ é máximo quando } n=1,$$

e é decrescente, pelo que se conclui que a sucessão (u_n) é monótona crescente e limitada, donde a hipótese correta é A.

3. Dado que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_k \times x^{n-k} \times y^k$ e $120x^7y^3$ é um dos termos do desenvolvimento binomial, conclui-se que $n=10$ pois a soma dos expoentes das expressões x^{n-k} e y^k é sempre n , donde a hipótese correta é A.

4. $z^4 = (bi)^4 = b^4 \underbrace{i^4}_1 = b^4 \in \mathbb{R}^+$, donde a hipótese correta é A.

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x)}{x} = 2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{f(x)}{x}}_0 = 0$, donde a hipótese correta é B.

6. Na situação apresentada sabe-se que a equação da reta dos mínimos quadrados é do tipo $y = mx + 3$, sendo m o declive dessa reta.

Por outro lado, a reta dos mínimos quadrados passa sempre no ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$, sendo $\bar{x}$ e $\bar{y}$, respetivamente, as médias de cada uma das amostras.

$$\bar{x} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} x_i = \frac{1}{50} \times 200 = 4 \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} y_i = \frac{1}{50} \times 100 = 2,$$

pelo que $(\bar{x}, \bar{y}) = (4, 2)$.

Assim, conclui-se que $2 = 4m + 3 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$, donde a hipótese correta é A.

7. $\frac{1}{2} \log(\sqrt{10^x}) = \frac{1}{2} \log(10^{\frac{x}{2}}) = \frac{x}{2} \times \frac{1}{2} \log 10 = \frac{x}{4}$, donde a hipótese correta é C.

8. Como a função f tem extremos em $[3, 4]$ (máximo 0 e mínimo -1), a afirmação incorreta é a da hipótese D.

9.1
$$\frac{I(t)}{E(t)} = \frac{(0,75t^2 - 0,5t + 2)e^{-0,5t + \ln 2}}{4e^{-0,5t}} =$$

$$= \frac{0,75t^2 - 0,5t + 2}{4} \times e^{-0,5t + \ln 2 + 0,5t} =$$

$$= (0,1875t^2 - 0,125t + 0,5) \underbrace{e^{\ln 2}}_2 = 0,375t^2 - 0,25t + 1$$

- 9.2 Se a quantidade de medicamento ativo é igual nas duas cobaias, então o quociente da alínea anterior é 1.

$$\underbrace{\frac{I(t)}{E(t)}}_{0,375t^2 - 0,25t + 1} = 1 \Leftrightarrow 0,375t^2 - 0,25t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t(0,375t - 0,25) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{0,25}{0,375} = 0,6 \text{ h} = 40 \text{ min}$$

- 9.3 $E(t) < 0,1 \times \frac{E(0)}{4} \Leftrightarrow 4e^{-0,5t} < 0,4 \Leftrightarrow e^{0,5t} > \frac{4}{0,4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{0,5t} > 10 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} e^{0,5t} > 1 \\ y = e^{0,5x} \text{ é uma função crescente} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow 0,5t > \ln 10 \Leftrightarrow t > \frac{\ln 10}{0,5} \approx 4,6 \text{ h} = 4 \text{ h } 36 \text{ min},$$

pelo que deve ser administrada nova dose à cobaia em que a substância foi injetada por via endovenosa, aproximadamente, ao fim de 4 horas e 36 minutos.

- 10.1 A área do retângulo $[ABCD]$ é dada pela expressão $\overline{AB} \times \overline{AD}$, ou seja, $b \times h$.

Por outro lado, sendo $0 < a < 6$, a abscissa do ponto A, como $\overline{AD} = h$, tem-se que $D(a, h)$, $B(a+b, 0)$ e $C(a+b, h)$ e, uma vez que os pontos D e C pertencem, respetivamente, às retas de equações $y = 3x$ e $y = 6 - x$, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} h = 3a \\ h = 6 - (a+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{h}{3} \\ b = 6 - \frac{4h}{3} \end{cases}$$

Conclui-se assim que a área do retângulo é dada por $b \times h = \left(6 - \frac{4h}{3}\right) \times h = 6h - \frac{4h^2}{3}$.

- 10.2 Sendo $A(h) = 6h - \frac{4h^2}{3}$ a função que nos dá a área do retângulo $[ABCD]$ tem-se que $A'(h) = 6 - \frac{8}{3}h$ e $A'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{9}{4}$.

Por outro lado, $A''(h) = -\frac{8}{3} < 0, \forall h \in \left]0, \frac{9}{2}\right[$,

donde se conclui que, para $h = \frac{9}{4}$, a área do retângulo $[ABCD]$ é máxima pois $A\left(\frac{9}{4}\right)$ é um máximo absoluto da função A em $\left]0, \frac{9}{2}\right[$.

Assim, as dimensões do retângulo para o qual a área

$$\text{é máxima são } \overline{AD} = h = \frac{9}{4} \text{ e } \overline{AB} = b = 6 - \frac{4 \times \frac{9}{4}}{3} = 3.$$

11.1 $P(A|B) = P(\text{retirar bola azul sabendo que se tirou uma bola com número par}) = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$, pois há 2 bolas azuis com número par e 3 bolas verdes com número par.

11.2 Dado que todas as bolas são distinguíveis (pois são numeradas), há 9A_4 maneiras distintas de colocar as 4 bolas azuis no tabuleiro e, para cada uma dessas maneiras, há $6 \times 5! = 6!$ maneiras distintas de colocar as 5 bolas verdes (todas exceto a bola 1, ou a bola 2, ..., ou a bola 6) nas restantes 5 casas do tabuleiro.

Há assim, ao todo, ${}^9A_4 \times 6!$ configurações diferentes.

12.1 $f'(x) = e^{1-x}$ e $f''(x) = -e^{1-x} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, donde, o gráfico da função tem sempre a concavidade voltada para baixo.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{1-x}) = -\infty$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{1-x}) = 1$$

donde, o gráfico da função admite exatamente uma só assíntota, que é horizontal e tem equação $y = 1$.

$$\mathbf{12.2} \quad D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} \stackrel{D_f = \mathbb{R}}{=} \stackrel{D_g = \mathbb{R}^+}{=} \mathbb{R}^+$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : 1 - e^{1-x} > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : e^{1-x} < 1\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : e^{x-1} > 1\} \stackrel{y=e^{x-1} \text{ é uma função crescente}}{=} \mathbb{R}^+$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x - 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} =]1, +\infty[$$

13. Sejam $w = ae^{i\theta}$, com $a \in \mathbb{R}_0^+$ e θ um argumento de w , e $z = be^{i\varphi}$, com $b \in \mathbb{R}^+$ e φ um argumento de z .

$$\frac{w}{z} = \frac{ae^{i\theta}}{be^{i\varphi}} = \frac{a}{b} e^{i(\theta-\varphi)}, \text{ pelo que } \overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{a}{b} e^{-i(\theta-\varphi)} = \frac{a}{b} e^{i(\varphi-\theta)}$$

14.1 $D(0) = 10 - 3 \underbrace{\cos(-\pi)}_{-1} = 13$, pelo que a distância do

corpo ao tampo da mesa depois de a mola ter sido esticada era 13 centímetros.

$$\mathbf{14.2} \quad D'(t) = 3\pi \sin(\pi t - \pi)$$

$$D'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(\pi t - \pi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi t - \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} + k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

pelo que no intervalo considerado,

$$D'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} = 0,5 \vee t = \frac{3}{2} = 1,5 \vee t = \frac{5}{2} = 2,5 \vee$$

$$\vee t = \frac{7}{2} = 3,5.$$

A cada instante, a aceleração do corpo é dada por

$$D''(t) = 3\pi^2 \cos(\pi t - \pi).$$

Em termos físicos, na posição de equilíbrio, a velocidade do corpo é máxima e a aceleração é nula, pelo que basta ver, relativamente aos zeros da 1.ª derivada, quais são zeros da 2.ª derivada.

$$D''\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad D''\left(\frac{3}{2}\right) = 0, \quad D''\left(\frac{5}{2}\right) = 0 \text{ e } D''\left(\frac{7}{2}\right) = 0,$$

donde, nos instantes $t = 0,5$ s, $t = 1,5$ s, $t = 2,5$ s e $t = 3,5$ s o corpo esteve na posição de equilíbrio.

14.3 A amplitude A é o desvio máximo em relação à posição de equilíbrio.

Neste caso, dado que inicialmente o afastamento do corpo face ao tampo da mesa era máximo e o corpo passou pela primeira vez na posição de equilíbrio ao fim de meio segundo, tem-se

$$A = D(0) - D\left(\frac{1}{2}\right) = 13 - 10 = 3 \text{ cm.}$$

Seja h a função definida por

$$\begin{aligned} h(t) &= 3 \cos(\pi t - \pi) \stackrel{\cos x = \cos(x+2\pi), \forall x \in \mathbb{R}}{=} \\ &= 3 \cos(\pi t - \pi + 2\pi) = 3 \cos(\pi t + \pi). \end{aligned}$$

A função h representa um oscilador harmónico, pois é da forma $A \cos(\omega t + \varphi)$, com $A > 0$, $\omega > 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi[$.

Uma vez que o gráfico da função D resulta do gráfico da função h por meio de uma simetria e translação, quer o período T , quer a fase

φ relativos à função D , são iguais ao período e à fase relativos à função h , donde,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s e } \varphi = \pi \text{ rad.}$$

Por fim, a frequência do oscilador é $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} \text{ Hz}$.

TESTE GLOBAL 3

PÁG. 41

1. Uma vez que o declive da reta é $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, com $\alpha \in [0, \pi[$, então $\alpha = \frac{\pi}{6}$, donde a hipótese correta é B.

2. Dado que $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0$, conclui-se que (u_n) é uma sucessão com $\lim u_n = 3$ e $u_n \geq 3, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que (u_n) não pode ser definida pelo termo geral $u_n = 3 - \frac{1}{n}$ pois ter-se-ia $u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Se (u_n) fosse uma progressão geométrica de primeiro termo positivo e razão $\frac{1}{2}$, então $\lim u_n = 0$.

Se (u_n) fosse uma progressão aritmética de primeiro termo 0 e razão 3, então $\lim u_n = +\infty$.

Assim, a hipótese correta é C.

3. Os múltiplos de 5 têm como algarismo das unidades o 0 ou o 5.

Neste caso, sendo o número uma capicua, o 0 não pode ser o algarismo das unidades pois o algarismo da dezena de milhares também seria 0, logo o número teria quatro algarismos.

Conclui-se assim que o algarismo das unidades é 5, tal como o da dezena de milhares.

Como, quer para o algarismo das dezenas, quer para o das centenas, há 10 possibilidades, e uma vez que o algarismo das unidades de milhar é igual ao das dezenas, há apenas $10 \times 10 = 100$ capicuas múltiplos de 5 com cinco algarismos, donde a hipótese correta é C.

4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x^2 - a^2} = 2 \Leftrightarrow -\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x + a} = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g'(a) = -4a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x + a} = \frac{1}{2a}$$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2x}{3x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + \frac{2}{3} = 3 \Leftrightarrow$
- $$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 7,$$

pelo que se conclui que o gráfico da função f apenas poderá ter como assíntota uma reta de equação $y = 7x + k, k \in \mathbb{R}$, donde a hipótese correta é D.

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$, donde a hipótese correta é A.

7. $|z - 2i| = 2$ define a circunferência de centro no ponto de coordenadas $(0, 2)$ e raio 2.

$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$ define a semirreta de origem no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e ângulo orientado de amplitude $\frac{\pi}{3}$.

$2z + 3i = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{3}{2}i$ define um número complexo.

$|z + 1| = |z - i| \Leftrightarrow |z - (-1)| = |z - i|$ define a mediatriz do segmento de reta de extremos nos pontos de coordenadas $(-1, 0)$ e $(0, 1)$.

Assim, a hipótese correta é D.

8. $h'(x) = 2 \cos x \times (-\sin x) = -\sin(2x)$, donde a hipótese correta é C.

9. $P(\overline{A \cap \overline{B}}) + P(A) = 1 - P(A \cap \overline{B}) + P(A) =$
- $$= 1 - \underbrace{P(A) - P(\overline{B}) + P(A \cup \overline{B})}_{-P(A \cap \overline{B})} + P(A) =$$
- $$= \underbrace{1 - P(\overline{B})}_{P(B)} + P(A \cup \overline{B}) = P(B) + P(A \cup \overline{B})$$

- 10.1 Dado que a área da base é 4 unidades quadradas, então as arestas das bases medem $\sqrt{4} = 2$ unidades e as arestas laterais medem $\frac{16}{4} = 4$ unidades, pelo que as coordenadas dos pontos A e I são, respetivamente, $(0, 0, 4)$ e $(-1, 1, 0)$.

Um vetor normal ao plano perpendicular à reta

IA é $\overrightarrow{IA} = A - I = (1, -1, 4)$, pelo que uma equação cartesiana desse plano é $x - y + 4(z - 4) = 0 \Leftrightarrow x - y + 4z = 16$.

- 10.2 Número de casos favoráveis: 4C_3 (com 3 dos vértices do prisma só o plano da base da pirâmide contém uma face da pirâmide e este é definido por 3 dos 4 vértices da base)

Número de casos possíveis: 8C_3 (subconjuntos de 3 vértices não colineares formados a partir de um conjunto de 8 vértices)

$$P = \frac{{}^4C_3}{{}^8C_3} = \frac{1}{14}$$

- 10.3 Dado que as faces do prisma são distinguíveis (pelos vértices) e há três conjuntos de faces opostas no prisma, então pode-se pintar o prisma de ${}^4A_3 = 24$ formas diferentes, pois para um conjunto de faces opostas há 4 cores possíveis, para um segundo conjunto de faces opostas já só há 3 cores possíveis e para o conjunto de faces opostas restante já só há 2 cores possíveis.

RESOLUÇÕES PREPARAR O EXAME NYI 2 – TESTE GLOBAL 3

$$11.1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \stackrel{0}{=} \frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k(1 - e^{2x})}{x} \stackrel{0}{=} -2k \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = -2k$$

A função f é contínua em $x=0$ quando $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, ou seja, quando $-2k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$.

$$11.2 \quad g(x) = x \times \frac{1 - e^{2x}}{x} = 1 - e^{2x} \text{ e}$$

$g'(x) = -2e^{2x} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, donde a função g é uma função decrescente no seu domínio.

$$12.1 \quad \text{Se } \text{Arg}(w_1) = \frac{\pi}{6}, \text{ então}$$

$\text{Arg}(w_2) = \text{Arg}(w_1^4) = 4 \times \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$, pelo que a diferença entre os dois argumentos principais justifica que o ângulo entre as semirretas é reto.

Todavia, de um ponto de vista mais geral, considerando $w_1 = r_1 e^{i\frac{\pi}{6}}$, com $r_1 > 0$ e $w_2 = w_1^4 = r_1^4 e^{i\frac{2\pi}{3}}$, os afixos de w_1 e w_2 são os pontos, respetivamente,

$$A_1 \left(r_1 \cos \frac{\pi}{6}, r_1 \sin \frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{r_1 \sqrt{3}}{2}, \frac{r_1}{2} \right) \text{ e}$$

$$A_2 \left(r_1^4 \cos \frac{2\pi}{3}, r_1^4 \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \left(-\frac{r_1^4}{2}, \frac{r_1^4 \sqrt{3}}{2} \right).$$

Os vetores $\overrightarrow{OA_1}$ e $\overrightarrow{OA_2}$ têm coordenadas, respetivamente,

$$\left(\frac{r_1 \sqrt{3}}{2}, \frac{r_1}{2} \right) \text{ e } \left(-\frac{r_1^4}{2}, \frac{r_1^4 \sqrt{3}}{2} \right), \text{ pelo que}$$

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = -\frac{r_1^5 \sqrt{3}}{4} + \frac{r_1^5 \sqrt{3}}{4} = 0, \text{ donde os vetores}$$

são perpendiculares e o triângulo $[A_1 O A_2]$ é retângulo em O .

$$12.2 \quad \text{Se a circunferência de centro na origem e raio igual}$$

$$|w_1| \text{ tem área } 16\pi, \text{ então } \pi |w_1|^2 = 16\pi \Leftrightarrow |w_1| = 4.$$

Assim, como as coordenadas do afixo de w_1 são

$$A_1 \left(\frac{4\sqrt{3}}{2}, \frac{4}{2} \right) = (2\sqrt{3}, 2), \text{ então } w_1 = 2\sqrt{3} + 2i.$$

$$13.1 \quad Q'(t) = -k \underbrace{Q_0 e^{-k(t-t_0)}}_{Q(t)} = -kQ(t), \text{ o que mostra que a}$$

massa de carbono 14 existente nesse corpo vai decrescendo a cada instante, ao longo do tempo, a uma taxa proporcional à massa de carbono 14 existente no corpo nesse instante.

$$13.2 \text{ a. } Q(5730) = \frac{Q_0}{2} \Leftrightarrow Q_0 e^{-5730k} = \frac{Q_0}{2} \Leftrightarrow e^{-5730k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5730k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{5730} / \text{ano}$$

$$13.2 \text{ b. } Q(1000) = 90 \Leftrightarrow Q_0 e^{-1000 \times \frac{\ln 2}{5730}} = 90 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q_0 = \frac{90}{e^{-\frac{1000 \ln 2}{5730}}} \approx 102 \text{ g}$$

14. A função f é contínua em $]-1, +\infty[$, pelo que também o é em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$$\text{Por outro lado, } f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{8} > 0 \text{ e } f(1) = \ln 2 - 1 < 0$$

donde, pelo Teorema de Bolzano, $\exists c \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[: f(c) = 0$.

Através da calculadora gráfica obtém-se, com aproximação às centésimas, $c = 0,85$.

$$\text{Dado que } f'(x) = \frac{1}{x+1} - 3x^2, \frac{1}{2} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}, \forall x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$$

$$\text{e } -3 < -3x^2 < -\frac{3}{4}, \forall x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[, \text{ conclui-se que}$$

$$-\frac{5}{2} < \underbrace{\frac{1}{x+1} - 3x^2}_{f'(x)} < -\frac{1}{12}, \forall x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[, \text{ ou seja, a primeira}$$

derivada da função f é negativa em $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, donde a função f é decrescente nesse intervalo e, portanto, tem aí um único zero.

15. O limite pedido lembra a definição de derivada de uma função f no ponto de abcissa 2, pelo que podemos considerar como função f a função definida por $f(x) = \int_1^x t^2 dt$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_1^{2+h} t^2 dt - \int_1^2 t^2 dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$= f'(2)$$

$$f'(x) = \left(\int_1^x t^2 dt \right)' = x^2 \quad 2^2 = 4$$