



EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

PROVA MODELO N.º 1 – PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Site: <http://recursos-para-matematica.webnode.pt/>

Facebook: <https://www.facebook.com/recursos.para.matematica>

GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. O número de maneiras do director fazer a escolha é ${}^{500}C_{100} + {}^{500}C_{101} + {}^{501}C_{102}$ (pois tem de escolher **ou** 100 trabalhadores do 1.º turno, **ou** 101 trabalhadores do 2.º, **ou** 102 trabalhadores do 3.º). Assim, tendo em conta as propriedades do triângulo de Pascal, vem ${}^{500}C_{100} + {}^{500}C_{101} + {}^{501}C_{102} = {}^{501}C_{101} + {}^{501}C_{102} = {}^{502}C_{102}$.

Resposta: **D**

2. Como A , B e C são independentes e são independentes dois a dois, então:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C), P(A \cap C) = P(A) \times P(C) \text{ e } P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$

Assim:

$$\begin{aligned} P(C|(A \cup B)) &= \frac{P(C \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P((C \cap A) \cup (C \cap B))}{2P(C)} = \frac{P(C \cap A) + P(C \cap B) - P((C \cap A) \cap (C \cap B))}{2P(C)} = \\ &= \frac{P(C \cap A) + P(C \cap B) - P(A \cap B \cap C)}{2P(C)} = \frac{P(C) \times P(A) + P(C) \times P(B) - P(A) \times P(B) \times P(C)}{2P(C)} = \\ &= \frac{P(C) \times (P(A) + P(B) - P(A) \times P(B))}{2P(C)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)}{2} = \\ &= \frac{a + a - a \times a}{2} = \frac{2a - a^2}{2} = a - 0,5a^2 \end{aligned}$$

Outra resolução: Da resolução anterior conclui-se que os acontecimentos C e $A \cup B$ são independentes, pois:

$$P(C \cap (A \cup B)) = P(C) \times (P(A) + P(B) - \overbrace{P(A) \times P(B)}^{P(A \cap B)}) = P(C) \times P(A \cup B)$$

$$\text{Logo, } P(C|(A \cup B)) = P(C) = \frac{P(A \cup B)}{2} = \frac{P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)}{2} = a - 0,5a^2$$

Resposta: **B**

3. Tem-se:

$$\frac{n}{n_{C_2}} + \frac{n-1}{n_{C_2}} + \frac{n-2}{n_{C_2}} + \frac{n-4}{n_{C_2}} = 1 \Leftrightarrow n + n-1 + n-2 + n-4 = n_{C_2} \Leftrightarrow 4n-7 = \frac{n!}{2! \times (n-2)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4n-7 = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2 \times (n-2)!} \Leftrightarrow 8n-14 = n^2 - n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 9n + 14 = 0 \Leftrightarrow n = 2 \vee n = 7$$

Como n não pode ser 2, então $n = 7$. (n não pode ser 2 porque se assim fosse a probabilidade de sair a face numerada com o número 1 seria 2 e a probabilidade de sair a face numerada com o número 4 seria negativa)

Seja X a variável aleatória «número de vezes que a face numerada com número 2 fica voltada para baixo em quatro lançamentos». Tem-se que $X \sim \text{Bin}\left(4, \frac{7-1}{7} = \frac{2}{7}\right)$ e pretende-se determinar $P(X \leq 2)$. Assim:

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \\ &= {}^4C_0 \times \left(\frac{2}{7}\right)^0 \times \left(\frac{5}{7}\right)^4 + {}^4C_1 \times \left(\frac{2}{7}\right)^1 \times \left(\frac{5}{7}\right)^3 + {}^4C_2 \times \left(\frac{2}{7}\right)^2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^2 \approx 0,93 \end{aligned}$$

Nota: A variável aleatória X pode tomar os valores 0, 1, 2, 3 ou 4, ou seja, $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Resposta: **A**

4. Tem-se:

$$\begin{aligned} \log_{64} \left(\frac{x^5}{(xy)^2} \right) &= \log_{64} \left(\frac{x^5}{x^2 y^2} \right) = \log_{64} \left(\frac{x^3}{y^2} \right) = \log_{64} (x^3) - \log_{64} (y^2) = 3 \log_{64} x - 2 \log_{64} y = \\ &= 3 \frac{\log_2 x}{\log_2 64} - 2 \frac{\log_4 y}{\log_4 64} = 3 \frac{a}{\log_2 (2^6)} - 2 \frac{b}{\log_4 (4^3)} = \frac{3a}{6} - \frac{2b}{3} = \frac{3a-4b}{6} \end{aligned}$$

Resposta: **C**

5. Tem-se que $x_n \rightarrow 2$, portanto $2 - x_n \rightarrow 0$. Como $-1 < x_n < 2$, vem:

$$-1 < x_n < 2 \Leftrightarrow -2 < -x_n < 1 \Leftrightarrow 0 < 2 - x_n < 3$$

Portanto os termos da sucessão $(2 - x_n)$ são positivos, logo $2 - x_n \rightarrow 0^+$. Assim:

$$\lim \left(2 - e^{-\frac{1}{2-x_n}} \right) = 2 - e^{-\frac{1}{0^+}} = 2 - e^{-\infty} = 2 - 0^+ = 2^- \quad (e^{-\frac{1}{2-x_n}} > 0, \forall n \in \mathbb{N})$$

Assim, pela definição de limite segundo Heine, tem-se $\lim_{x \rightarrow 2^-} f \left(2 - e^{-\frac{1}{2-x_n}} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$.

Resposta: **A**

6.

▪ O contradomínio da função f é $]0,1[$, ou seja $0 < f(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Como a função logarítmica é negativa no intervalo $]0,1[$, então $\ln(f(x)) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

▪ Tem-se $g'(x) = (x^3 - 2x^2 + x)'e^{x^3-2x^2+x} = (3x^2 - 4x)e^{x^3-2x^2+x}$. Assim:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 4x + 1)e^{x^3-2x^2+x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \vee \quad \underbrace{e^{x^3-2x^2+x} = 0}_{\text{equação impossível em } \mathbb{R}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \quad \vee \quad x = 1$$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função h'' , vem:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$\ln(f(x))$	-	-	-	-	-
i) $g'(x)$	+	0	-	0	+
$h''(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	$\cap$	p.i.	$\cup$	p.i.	$\cap$

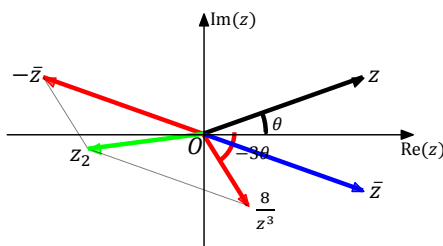
i) Observa que o sinal de g' depende apenas do sinal de $3x^2 - 4x + 1$ porque $e^{x^3-2x^2+x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, \frac{1}{3}]$ e em $[1, +\infty[$.

Resposta: **C**

7. Seja $z = 2\text{cis}\theta$. Assim, $\frac{8}{z^3} = \frac{8}{(2\text{cis}\theta)^3} = \frac{8}{2^3\text{cis}(3\theta)} = \frac{8\text{cis}(0)}{8\text{cis}(3\theta)} = \text{cis}(-3\theta)$ e portanto $\left|\frac{8}{z^3}\right| = 1$.

Vamos utilizar a regra do paralelogramo para resolver este problema:



Portanto $\frac{8}{z^3} - \bar{z}$ só pode ser igual a z_2 .

Resposta: **B**

8.

• Tem-se $\sqrt[3]{16\sqrt{2}\text{cis}\frac{3\pi}{4}} = \sqrt[3]{\sqrt{16^2 \times 2}\text{cis}\left(\frac{3\pi+2k\pi}{3}\right)} = \sqrt[6]{512}\text{cis}\left(\frac{3\pi+8k\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2^9}\text{cis}\left(\frac{3\pi+8k\pi}{3}\right) =$

$$= \sqrt{2^3}\text{cis}\left(\frac{3\pi+8k\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{3\pi+8k\pi}{3}\right), \text{ com } k \in \{0,1,2\}$$

Para $k = 0$ obtém-se a raiz cúbica de $16\sqrt{2}\text{cis}\frac{3\pi}{4}$ que cuja imagem geométrica é o ponto A . Assim, vem:

$$A \rightarrow 2\sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + 2i$$

Também se conclui que $\overline{AO} = 2\sqrt{2}$. Assim a circunferência de centro em A que contém o ponto O pode ser definida por $|z - (2 + 2i)| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |z - 2 - 2i| = 2\sqrt{2}$

• Tem-se $\overline{AB} = |-2 - i - (2 + 2i)| = |-4 - 3i| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$. Assim a circunferência de centro em B que contém o ponto A pode ser definida por $|z - (-2 - i)| = 5 \Leftrightarrow |z + 2 + i| = 5$

• A recta r é a mediatriz do segmento de reta $[AB]$. Assim pode ser definida por $|z - 2 - 2i| = |z + 2 + i|$.

Portanto a condição define a região sombreada da figura pode ser:

$$|z - 2 - 2i| \leq 2\sqrt{2} \wedge |z + 2 + i| \leq 5 \wedge |z - 2 - 2i| \leq |z + 2 + i|$$

Resposta: D

GRUPO II – ÍTENS DE RESPOSTA ABERTA

1.

1.1.

• $z_2 = \frac{-4i^{37}}{1+i} - \frac{1}{i} - i = \frac{-4i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} - \frac{1}{i} \times \frac{-i}{-i} - i = \frac{-4i+4i^2}{1^2-i^2} - \frac{-i}{-i^2} - i = \frac{-4i-4}{2} + \frac{i}{1} - i = -2 - 2i + i - i =$

$$= -2 - 2i = z_2 = 2\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}$$

Cálculos Auxiliares:

• $i^{37} = i^{4 \times 9 + 1} = i^1 = i$

• Para escrever $-2 - 2i$ na forma trigonométrica, vem: $|-2 - 2i| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Sendo θ um argumento de $-2 - 2i$, tem-se $\text{tg } \theta = \frac{-2}{-2} = 1$ e $\theta \in 3.^\circ$ quadrante, pelo que $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$. Assim $-2 - 2i = 2\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}$.

▪ Tem-se:

$$\begin{aligned}\left(\frac{z_2}{(z_1)^2 \times i}\right)^{3n} &= \left(\frac{2\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}}{(2\text{cis}\frac{5\pi}{12})^2 \times \text{cis}\frac{\pi}{2}}\right)^{3n} = \left(\frac{2\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}}{2^2\text{cis}(\frac{5\pi}{12} \times 2) \times \text{cis}\frac{\pi}{2}}\right)^{3n} = \left(\frac{2\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}}{4\text{cis}(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2})}\right)^{3n} = \left(\frac{2\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}}{4\text{cis}\frac{4\pi}{3}}\right)^{3n} = \\ &= \left(\frac{2\sqrt{2}}{4}\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\right)\right)^{3n} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{4}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)^{3n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{3n}\text{cis}\left(-\frac{3n\pi}{12}\right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{3n}\text{cis}\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

A imagem geométrica do número complexo $\left(\frac{z_2}{(z_1)^2 \times i}\right)^{3n}$ pertence à bissetriz do terceiro quadrante se o seu argumento for da forma $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$-\frac{n\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{n}{4} = \frac{5}{4} + 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -n = 5 + 8k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = -5 - 8k, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $n = 3 (k = -1)$.

1.2.

▪ Fazendo $z = \rho\text{cis}\theta$, com $z \neq 0$, vem:

$$\begin{aligned}z^3 \times (z_2)^2 - 32\bar{z} &= 0 \Leftrightarrow (\rho\text{cis}\theta)^3 \times \left(2\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}\right)^2 = 32\rho\text{cis}(-\theta) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho^3\text{cis}(3\theta) \times (2\sqrt{2})^2\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4} \times 2\right) = 32\rho\text{cis}(-\theta) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho^3\text{cis}(3\theta) \times 8\text{cis}\frac{5\pi}{2} = 32\rho\text{cis}(-\theta) \Leftrightarrow 8\rho^3\text{cis}\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 32\rho\text{cis}(-\theta) \Leftrightarrow \\ &\hspace{15em} \xrightarrow{\hspace{10em}} \frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 8\rho^3 = 32\rho \\ 3\theta + \frac{\pi}{2} = -\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 - 4\rho = 0 \\ 4\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho(\rho^2 - 4) = 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0 \vee \rho^2 - 4 = 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0 \vee \rho = 2 & (\rho > 0) \\ \theta = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}\end{aligned}$$

Se $\rho = 0$ então $z = 0$ que não é solução, pois $z \neq 0$. Se $\rho = 2$ e substituindo k por valores pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, obtém-se:

$$z = 2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{8}\right) \vee z = 2\text{cis}\frac{3\pi}{8} \vee z = 2\text{cis}\frac{7\pi}{8} \vee z = 2\text{cis}\frac{11\pi}{8}$$

Portanto, o conjunto solução da condição $z^3 \times (z_2)^2 - 32\bar{z} = 0 \wedge z \neq 0$ é:

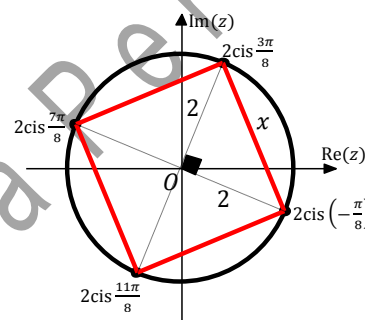
$$\left\{2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{8}\right), 2\text{cis}\frac{3\pi}{8}, 2\text{cis}\frac{7\pi}{8}, 2\text{cis}\frac{11\pi}{8}\right\}$$

▪ O polígono cujos vértices são as imagens geométricas das soluções da condição é o quadrado inscrito na circunferência de centro na origem e raio 2 que está representado na figura.

Sendo x a medida do lado desse quadrado, vem:

$$\text{Área}_{\text{quadrado}} = x^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \text{ (usando o teorema de Pitágoras)}$$

A área pedida é 8.



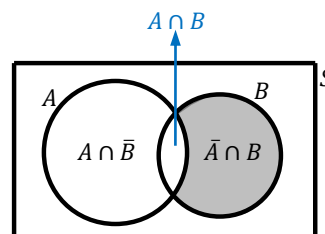
2.

2.1. Tem-se

$$\begin{aligned} P(A|\bar{B}) &\times \left(\frac{1}{P(B)} - 1\right) - \frac{P(A)}{P(B)} = P(A|\bar{B}) \times \frac{1-P(B)}{P(B)} - \frac{P(A)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \times \frac{P(\bar{B})}{P(B)} - \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap \bar{B}) - P(A)}{P(B)} \stackrel{i)}{=} \frac{P(A) - P(A \cap B) - P(A)}{P(B)} = \\ &= \frac{-P(A \cap B)}{P(B)} = -P(A|B) = -(1 - P(\bar{A}|B)) = P(\bar{A}|B) - 1 \end{aligned}$$

$P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$

i)



$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Ou, de uma outra forma, como $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) - P(B) = -P(A \cap B)$, ao chegarmos ao passo $\frac{-P(A \cap B)}{P(B)}$, podíamos resolver da seguinte forma:

$$\frac{-P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{A} \cap B) - P(B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} - \frac{P(B)}{P(B)} = P(\bar{A}|B) - 1$$

Q.E.D.

2.2. Considere-se os acontecimentos A : «a bola é preta» e B : «a bola está numerada com um número par». Do enunciado vem $P(A) = 2P(B)$, $P(A|\bar{B}) = 0,7$ e $P(\bar{A}|B) = \frac{2}{5} = 0,4$. Assim, por 2.1. vem:

$$0,7 \times \left(\frac{1}{P(B)} - 1 \right) - \frac{2P(B)}{P(B)} = 0,4 - 1 \Leftrightarrow \frac{0,7}{P(B)} - 0,7 - 2 = -0,6 \Leftrightarrow \frac{0,7}{P(B)} = 2,1 \Leftrightarrow P(B) = \frac{0,7}{2,1} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

Logo $P(A) = 2P(B) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Outra resolução:

Considere-se os acontecimentos A : «a bola é preta» e B : «a bola está numerada com um número par» e a seguinte tabela:

	A	$\bar{A}$	p.m.
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
p.m.	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

Tendo em conta a tabela, tem-se:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow P(A) = P(B) - P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2P(B) = P(B) - P(B) \times P(\bar{A}|B) + P(\bar{B}) \times P(A|\bar{B}) \Leftrightarrow$$

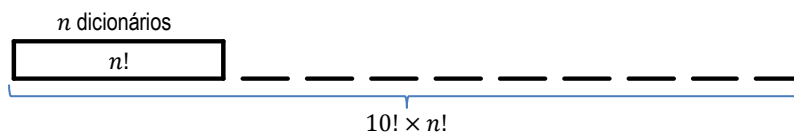
$$\Leftrightarrow P(B) = -0,4P(B) + 0,7 \times (1 - P(B)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,4P(B) = 0,7 - 0,7P(B) \Leftrightarrow 2,1P(B) = 0,7 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

Logo $P(A) = 2P(B) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

3. Pela regra de Laplace a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis, desde que os acontecimentos elementares sejam equiprováveis.

Primeira resposta: O número de casos possíveis é $(n + 9)!$ (número de maneiras de $n + 9$ livros permutarem entre si). Para o número de casos favoráveis vamos começar por agrupar os n dicionários num bloco. Este bloco e os restantes nove livros permutam entre si de $10!$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras os n dicionários que formam o bloco permutam entre si de $n!$ maneiras distintas. Assim, o número de casos favoráveis é $10! \times n!$ e a probabilidade pedida pode ser dada por $\frac{10! \times n!}{(n+9)!}$. Repare na figura seguinte:



Segunda resposta: Para esta resposta vamos apenas considerar a escolha das posições para os n dicionários. Assim, o número de casos possíveis é ${}^{n+9}C_n$ (número de maneiras de escolher n posições de entre as $n + 9$ disponíveis). O número de casos favoráveis é 10 (ficando os n dicionários juntos, num bloco, o bloco pode ocupar da posição 1 à posição n , da 2 à $n + 1$, da 3 à $n + 2$, da 4 à $n + 3$, da 5 à $n + 4$, da 6 à $n + 5$, da 7 à $n + 6$, da 8 à $n + 7$, da 9 à $n + 8$ ou da 10 à $n + 9$) Assim, probabilidade pedida pode ser dada por $\frac{10}{{}^{n+9}C_n}$.

Observe que $\frac{10}{{}^{n+9}C_n} = \frac{10}{\frac{(n+9)!}{n! \times (n+9-n)!}} = \frac{10}{\frac{(n+9)!}{n! \times 9!}} = \frac{10 \times 9! \times n!}{(n+9)!} = \frac{10! \times n!}{(n+9)!}$.

4.

▪ $\frac{m(t+5)}{m(t)} = 0,7$ significa que a cada cinco anos a massa desta substância radioactiva reduz-se 30%. ($1 - 0,7 = 0,3$)

▪ Pretende-se determinar $m(0) = e^{a(2 \times 0 - b)} = e^{-ab}$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} m(3) = 3 \\ \frac{m(t+5)}{m(t)} = 0,7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} e^{a(2 \times 3 - b)} = 3 \\ \frac{e^{a(2(t+5) - b)}}{e^{a(2t - b)}} = 0,7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{a(6 - b)} = 3 \\ e^{a(2t + 10 - b) - a(2t - b)} = 0,7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(6 - b) = \ln 3 \\ e^{2at + 10a - ab - 2at + ab} = 0,7 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} e^{10a} = 0,7 \\ 10a = \ln(0,7) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\ln(0,7)}{10} \\ 6 - b = \frac{10 \ln 3}{\ln(0,7)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - b = \frac{10 \ln 3}{\ln(0,7)} \\ a = \frac{\ln(0,7)}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b \approx 36,8015 \\ a \approx -0,0357 \end{cases} &\quad \text{Portanto } m(0) = e^{0,0357 \times 36,8015} \approx 3,72. \text{ A quantidade de substância que foi} \\ &\quad \text{colocada em repouso foi 3,72 gramas.} \end{aligned}$$

5.

5.1.

▪ Tem-se que $f(1) = \frac{3 \times 1 + \ln(2 \times 1)}{1} = 3 + \ln 2$. Assim:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3x + \ln(2x)}{x} - (3 + \ln 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3x + \ln(2x) - 3x - x \ln 2}{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x) - x \ln 2}{x(x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x) - x \ln 2}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{1}{1} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(2(y+1)) - (y+1) \ln 2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(2y+2) - \ln 2 - y \ln 2}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{2y+2}{2}\right)}{y} - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \ln 2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} - \ln 2 = 1 - \ln 2 = \ln e - \ln 2 = \ln\left(\frac{e}{2}\right) \end{aligned}$$

i) **Mudança de variável:** Se $x \rightarrow 1$ então $x - 1 \rightarrow 0$. Seja $y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1, y \rightarrow 0$.

▪ Seja t a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1. Assim, $m_t = f'(1) = \ln\left(\frac{e}{2}\right)$ e uma equação da recta t é do tipo $y = x \ln\left(\frac{e}{2}\right) + b$. O ponto de coordenadas $(1, f(1)) = (1, 3 + \ln 2)$ pertence à recta t , logo:

$$3 + \ln 2 = 1 \times \ln\left(\frac{e}{2}\right) + b \Leftrightarrow b = \ln(e^3) + \ln 2 - \ln\left(\frac{e}{2}\right) \Leftrightarrow b = \ln(2e^3) - \ln\left(\frac{e}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = \ln\left(\frac{2e^3}{\frac{e}{2}}\right) \Leftrightarrow \ln(4e^2)$$

Portanto $t: y = x \ln\left(\frac{e}{2}\right) + \ln(4e^2) \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{e}{2}\right)^x + \ln(4e^2) \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{e^x}{2^x} \times 4e^2\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{e^x \times 2^2 \times e^2}{2^x}\right) \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{e^{x+2}}{2^{x-2}}\right)$$

5.2.

▪ Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2x - \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2+1}}\right) = 2 \times 0 - \frac{0^2+0+1}{0 \times \sqrt{0^2+1}} = -\frac{1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x + \ln(2x)}{x} = \frac{3 \times 0 + \ln(0^+)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Logo não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ porque $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Conclui-se também que a recta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f . Como a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, o seu gráfico não tem mais assíntotas verticais.

▪ Assíntotas não verticais.

Quando $x \rightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2+1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x - \frac{x^2+x+1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+1}}\right) = 2 - \frac{1+\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{+\infty}}{\sqrt{+\infty+1}} = 2 - \frac{1-0+0}{+\infty} = 2 - \frac{1}{+\infty} = 2 - 0 = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x - \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2+1}} - 2x\right) \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x^2+x+1}{-x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1+\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{+\infty}}{\sqrt{1+\frac{1}{+\infty}}} = \frac{1-0+0}{\sqrt{1+0}} = 1$$

Nota: $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Como $x \rightarrow -\infty$ pode assumir-se que x é negativo, logo $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

Logo, a recta de equação $y = 2x + 1$ é assíntota oblíqua do gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$.

Quando $x \rightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x + \ln(2x)}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln(2x)}{x^2} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{x^2} + \frac{\ln(2x)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} \times \frac{\ln(2x)}{2x} \right) =$$

$$= \frac{3}{+\infty} + \frac{2}{+\infty} \times 0 = 0 + 0 \times 0 = 0$$

Se $x \rightarrow +\infty$ então $2x \rightarrow +\infty$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln(2x)}{x} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{x} + \frac{\ln(2x)}{x} \right) = 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \times \frac{\ln(2x)}{2x} \right) = 3 + 2 \times 0 = 3$$

Se $x \rightarrow +\infty$ então $2x \rightarrow +\infty$

Logo, a recta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$.

5.3. Para $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se:

$$f'(x) = \frac{(3 + \frac{2}{2x}) \times x - (3x + \ln(2x)) \times 1}{x^2} = \frac{3x + \frac{2x}{2} - 3x - \ln(2x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(2x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln(2x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(2x) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \ln(2x) = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = e^1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{e}{2} \wedge x \neq 0, \text{ como } x \in]-\infty, 0[, \text{ tem-se } x = -1.$$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função f' , vem:

x	0		$\frac{e}{2}$	$+\infty$
$1 - \ln(2x)$	n.d.	+	0	—
x^2	n.d.	+	+	+
$f'(x)$	n.d.	+	0	—
$f(x)$	n.d.	↗	min.	↘

A função f é crescente em $\left]0, \frac{e}{2}\right]$, é crescente em $\left[\frac{e}{2}, +\infty\right[$ e tem máximo em $x = \frac{e}{2}$ que é:

$$f\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{3 \times \frac{e}{2} + \ln\left(2 \times \frac{e}{2}\right)}{\frac{e}{2}} = \frac{\frac{3e}{2} + \ln e}{\frac{e}{2}} = \frac{\frac{3e}{2} + 1}{\frac{e}{2}} = \frac{\frac{3e+2}{2}}{\frac{e}{2}} = \frac{3e+2}{e} = 3 + \frac{2}{e}$$

6. O declive da recta tangente ao gráfico de uma função num ponto de abcissa c é a derivada da função em $x = c$. Vamos então mostrar que existe pelo menos um $c \in]0,3[$ tal que $f'(c) = g'(c) \Leftrightarrow f'(c) - g'(c) = 0$. Ao mostrarmos que para esse ponto c as derivadas são iguais estamos a mostrar que as rectas tangentes aos gráfico de f e g têm o mesmo declive e portanto são paralelas.

- Considere-se a função h de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x) = f'(x) - g'(x)$. Como f'' e g'' têm domínio $\mathbb{R}$, então $f''(x)$ e $g''(x)$ são finitas para todo o $x \in \mathbb{R}$, ou seja, f' e g' são deriváveis em $\mathbb{R}$ (isto é, têm derivada finita em $\mathbb{R}$) e portanto são contínuas em $\mathbb{R}$.

Logo, h é contínua em $\mathbb{R}$, pois é diferença de funções contínuas em $\mathbb{R}$ o que implica que h é contínua em $[0,3] \subset \mathbb{R}$.

- Tem-se que $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, logo f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e como $f'(1) = 0$, 1 é o seu único zero. Assim, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[$ e $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$.

- Tem-se que $g''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, logo g' é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$ e como $g'(2) = 0$, 2 é o seu único zero. Assim, $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]2, +\infty[$ e $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[$.

- $h(0) = \underbrace{f'(0)}_{<0} - \underbrace{g'(0)}_{>0} < 0$ e $h(3) = \underbrace{f'(3)}_{>0} - \underbrace{g'(3)}_{<0} > 0$.

Assim, como h é contínua em $[0,3]$ e $h(0)$ e $h(3)$ têm sinais contrários (e portanto $h(0) \times h(3) < 0$), então pelo corolário do teorema de Bolzano:

$$\exists c \in]0,3[: h(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = g'(c)$$

Ou seja, existe pelo menos um $c \in]0,3[$ tal que as rectas tangentes aos gráficos de f e g no ponto de abcissa c são paralelas.

7.

7.1. Considere-se a figura ao lado.

A amplitude do ângulo SQA é $\pi - \alpha$. Assim:

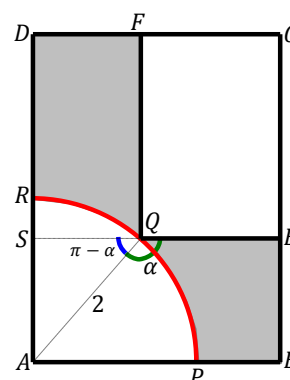
- $\sin(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AS}}{2} \Leftrightarrow \overline{AS} = 2\sin(\pi - \alpha) \Leftrightarrow \overline{AS} = 2\sin\alpha$
i)

- $\cos(\pi - \alpha) = \frac{\overline{QS}}{2} \Leftrightarrow \overline{QS} = 2\cos(\pi - \alpha) \Leftrightarrow \overline{AS} = -2\cos\alpha$
i)

Logo:

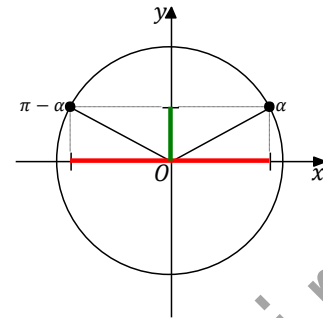
$$A_{\text{sombreada}} = A_{[ABCD]} - A_{\text{sector}RAP} - A_{[ECFQ]} =$$

$$= 4 \times 3 - \frac{\pi}{2} \times 2^2 - \overline{QE} \times \overline{EC} =$$



$$\begin{aligned}
 &= 12 - \frac{\pi}{4} \times 4 - (3 - \overline{QS}) \times (4 - \overline{AS}) = \\
 &= 12 - \pi - (3 + 2\cos\alpha) \times (4 - 2\sin\alpha) = \\
 &= 12 - \pi - 12 + 6\sin\alpha - 8\cos\alpha - 2 \times \overbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}^{\sin(2\alpha)} = \\
 &= \underbrace{6\sin\alpha - 8\cos\alpha - 2\sin(2\alpha) - \pi}_{h(\alpha)}
 \end{aligned}$$

i) Figura auxiliar:



$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

7.2.

- A amplitude do ângulo RAQ é $\pi - \frac{\pi}{2} - (\pi - \alpha) = \pi - \frac{\pi}{2} - \pi + \alpha = \alpha - \frac{\pi}{2}$. Portanto a área do sector RAQ é dada por $\frac{\alpha - \frac{\pi}{2}}{2} \times 2^2 = \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \times 2 = 2\alpha - \pi$.
- Pretende-se determinar $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ tal que $h(\alpha) > 2 \times (2\alpha - \pi) \Leftrightarrow h(\alpha) > 4\alpha - 2\pi$. Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = h(\alpha)$ e $y_2 = 4\alpha - 2\pi$ na janela de visualização $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \times [0, 8]$.

Assim, $h(\alpha) > 4\alpha - 2\pi \Leftrightarrow \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, a\right]$, com $a \approx 2,86$.

