



EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

PROVA MODELO N.º 3 – PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Site: <http://recursos-para-matematica.webnode.pt/>

Facebook: <https://www.facebook.com/recursos-para-matematica>

GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Tem em atenção a figura seguinte:



Agrupando num bloco as seis bolas azuis, o bloco e as restantes seis bolas permutam entre si de $7!$ maneiras distintas. Dentro do bloco, as seis bolas azuis só podem ser colocadas de uma maneira, visto serem indistinguíveis.

Como fora do bloco há duas bolas pretas indistinguíveis, o número pedido é $\frac{7! \times 1}{2!} = \frac{7!}{2!}$.

Resposta: A

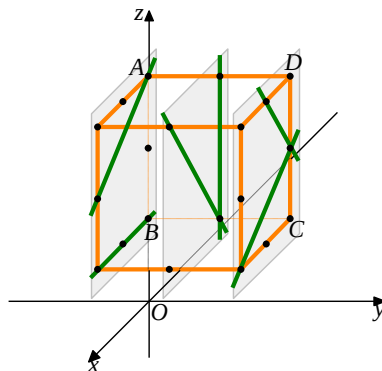
2. Tem-se que ${}^{2012}C_{1713} = {}^{2012}C_{2012-1713} = {}^{2012}C_{299}$. Assim, vem:

$$\begin{aligned} \frac{{}^{2012}C_{298} + {}^{2012}C_{300}}{{}^{2014}C_{300}} + \frac{a}{{}^{2014}C_{300}} + \frac{{}^{2012}C_{1713}}{{}^{2014}C_{300}} &= 1 \Leftrightarrow \frac{{}^{2012}C_{298} + {}^{2012}C_{300} + a + {}^{2012}C_{299}}{{}^{2014}C_{300}} = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underbrace{{}^{2012}C_{298} + {}^{2012}C_{299}}_{{}^{2013}C_{299}} + \underbrace{{}^{2012}C_{300} + a}_{{}^{2013}C_{299} + {}^{2013}C_{300}} &= \underbrace{{}^{2014}C_{300}}_{{}^{2013}C_{299} + {}^{2013}C_{300}} \Leftrightarrow \cancel{{}^{2013}C_{299}} + {}^{2012}C_{300} + a = \cancel{{}^{2013}C_{299}} + \underbrace{{}^{2013}C_{300}}_{{}^{2012}C_{299} + {}^{2012}C_{300}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cancel{{}^{2012}C_{300}} + a = {}^{2012}C_{299} + \cancel{{}^{2012}C_{300}} &\Leftrightarrow a = {}^{2012}C_{299} \end{aligned}$$

Resposta: B

3. O número de casos possíveis é ${}^{20}C_2$.

Uma recta é perpendicular ao eixo Oy se estiver contida num plano perpendicular a esse eixo. Assim, para que os dois pontos escolhidos definam uma recta perpendicular a Oy , os dois têm de estar contido num mesmo plano perpendicular a Oy .



Na figura, estão representados a cinzentos os planos perpendiculares a Oy (que contêm os pontos assinalados) e algumas das rectas contidas nesses planos a verde.

Logo, o número de casos favoráveis é ${}^8C_2 + {}^4C_2 + {}^8C_2 = 2 \times {}^8C_2 + {}^4C_2$.

Portanto, a probabilidade pedida é $\frac{2 \times {}^8C_2 + {}^4C_2}{{}^{20}C_2} = \frac{31}{95}$.

Resposta: **D**

4. Sabe-se que $\log_4 a = \frac{1}{2}$. Assim, vem:

$$\begin{aligned}\log_{16}(16a^3) - \log_4(a^3) &= \log_{16} 16 + \log_{16}(a^3) - 3\log_4 a = \\ &= 1 + \frac{\log_4(a^3)}{\log_4 16} - 3 \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{2} + \frac{3\log_4 a}{\log_4(4^2)} = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3 \times \frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Resposta: **A**

5. Seja r a razão da progressão geométrica (x_n) . Assim tem-se:

$$\begin{aligned}x_5 &= x_2 \times r^3 \Leftrightarrow -\frac{128}{81} = -\frac{16}{3}r^3 \Leftrightarrow \frac{128}{81} = \frac{16}{3}r^3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 128 \times 3 = 16 \times 81r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{384}{1296} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r^3 = \frac{8}{27} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Logo, $x_n = x_2 \times r^{n-2} = -\frac{16}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} \rightarrow 0^-$ (Tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{3-n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty} = 0^+$ e $x_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$)

Assim, $x_n + 1 \rightarrow 1^-$ e portanto, pela definição de limite segundo Heine, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$.

Resposta: **D**

6. Tem-se que $h''(x) = (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$. Assim:

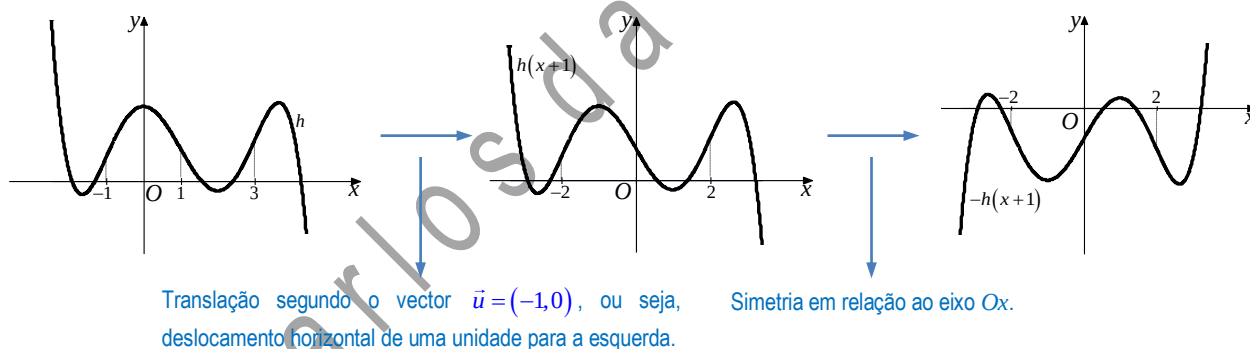
$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \vee x = 1$$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função h'' , vem:

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$g(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$h''(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$h(x)$	$\cup$	p.i.	$\cap$	p.i.	$\cup$	p.i.	$\cap$

O gráfico da função h tem a concavidade votada para baixo em $[-1, 1]$ e em $[3, +\infty[$, tem a concavidade votada para cima em $] -\infty, -1]$ e em $[1, 3]$ e tem pontos de inflexão em $x = -1$, em $x = 1$ e em $x = 3$.

Assim, tendo em conta as opções, o gráfico da função $-h(x+1)$ pode ser:



Resposta: C

7. O polígono $[ABCDEFGHIJ]$ é um decágono regular inscrito numa circunferência centrada na origem. Logo,

$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \dots = \widehat{JOA} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$. Além disso o ponto D é o simétrico de I em relação à origem do referencial.

Portanto, as coordenadas de D são $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, ou seja, D é a imagem geométrica de $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$. Assim:

$$\left| -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i \right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$$

Seja θ um argumento de $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$. Tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{\frac{6}{2}} = -\sqrt{3}$ e $\theta \in 2.^\circ Q$. Logo,

$$\theta = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \text{ e portanto } -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}.$$

Assim, o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto G é $\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} + 3 \times \frac{\pi}{5} \right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{19\pi}{15}$.

Resposta: **B**

8.

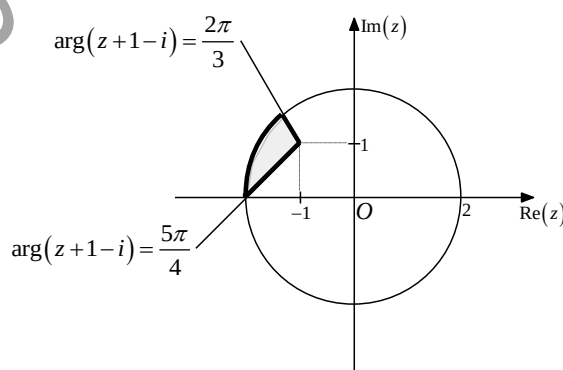
▪ Seja $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Tem-se, $z \times \bar{z} \leq 4 \Leftrightarrow (x + yi)(x - yi) \leq 4 \Leftrightarrow x^2 - y^2 i^2 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$.

Portanto a condição $z \times \bar{z} \leq 4$ define no plano complexo um círculo de raio 2 centrado na origem.

▪ A condição $\arg(z + 1 - i) = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \arg(z - (-1 + i)) = \frac{2\pi}{3}$ define uma semi-recta com origem na imagem geométrica de $-1 + i$, o ponto de coordenadas $(-1, 1)$ e que faz um ângulo de amplitude $\frac{2\pi}{3}$ com o semi-eixo positivo real.

▪ A condição $\arg(z + 1 - i) = \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \arg(z - (-1 + i)) = \frac{5\pi}{4}$ define uma semi-recta com origem na imagem geométrica de $-1 + i$, o ponto de coordenadas $(-1, 1)$ e que faz um ângulo de amplitude $\frac{5\pi}{4}$ com o semi-eixo positivo real.

Representando no plano complexo:



Resposta: **C**

1.

$$\bullet i^{9-26n} = \frac{i^9}{i^{16n}} = \frac{i^{4 \times 2 + 1}}{i^{4 \times 4n + 0}} = \frac{i^1}{i^0} = i$$

• Recorrendo ao círculo trigonométrico, verifica-se que $\cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$.

• $|-1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$. Seja θ um argumento de $-1 - \sqrt{3}i$. Tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$ e

$$\theta \in 3.^\circ Q. \text{ Logo, } \theta = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \bullet (z \times i^{9-16n})^2 &= \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha - i \cos \alpha}{\operatorname{cis}(3\alpha) \times 2 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}} \times i \right)^2 = \left(\frac{i \operatorname{sen} \alpha - i^2 \cos \alpha}{2 \operatorname{cis} \left(3\alpha + \frac{4\pi}{3} \right)} \right)^2 = \left(\frac{\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha}{2 \operatorname{cis} \left(3\alpha + \frac{4\pi}{3} \right)} \right)^2 = \left(\frac{\operatorname{cis} \alpha}{2 \operatorname{cis} \left(3\alpha + \frac{4\pi}{3} \right)} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2} \operatorname{cis} \left(\alpha - 3\alpha - \frac{4\pi}{3} \right) \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \operatorname{cis} \left(-2\alpha - \frac{4\pi}{3} \right) \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \operatorname{cis} \left(-4\alpha - \frac{8\pi}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{cis} \left(-4\alpha - \frac{8\pi}{3} + 2\pi \right) = \frac{1}{4} \operatorname{cis} \left(-4\alpha - \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$(z \times i^{9-16n})^2$ é um número real negativo se o seu argumento for da forma $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$-4\alpha - \frac{2\pi}{3} = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -4\alpha = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{5\pi}{12} - \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Logo, } \alpha = \frac{7\pi}{12} \quad (k = -2).$$

2. Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Tem-se:

$$\bullet |z|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)^2 = a^2 + b^2$$

$$\bullet |w|^2 = \left(\sqrt{c^2 + d^2} \right)^2 = c^2 + d^2$$

$$\bullet \bar{z} \times w = (a - bi)(c + di) = ac + adi - bci - bdi^2 = ac + bd + i(ad - bc)$$

$$\text{Logo, } \operatorname{Re}(\bar{z} \times w) = ac + bd$$

Assim:

$$|z - w|^2 = |a + bi - c - di|^2 = |a - c + i(b - d)|^2 = \left(\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \right)^2 = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 =$$

$$= \underbrace{a^2 + c^2}_{|z|^2} - 2 \underbrace{(ac + bd)}_{\operatorname{Re}(\bar{z} \times w)} + \underbrace{c^2 + d^2}_{|w|^2} = |z|^2 - 2 \operatorname{Re}(\bar{z} \times w) + |w|^2$$

José Carlos da Silva Pereira