



EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

PROVA MODELO N.º 4 – PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

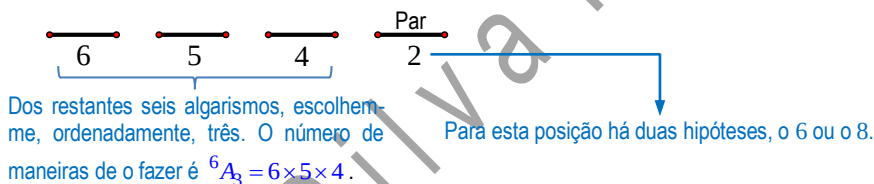
Site: <http://recursos-para-matematica.webnode.pt/>

Facebook: <https://www.facebook.com/recursos.para.matematica>

GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Começamos por determinar o número de elementos de cada conjunto.

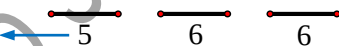
Conjunto X : os elementos deste conjunto são todos os números pares de quatro algarismos distintos que se podem formar com os algarismos 1, 3, 5, 6, 7, 8 e 9:



Logo, o número de elementos do conjunto X é $2 \times {}^6A_3 = 2 \times 6 \times 5 \times 4 = 240$.

Conjunto Y : os elementos deste conjunto são todos os números de três algarismos se podem formar com os algarismos 0, 3, 5, 6, 7 e 9.

Nesta posição não pode ficar o 0, pois assim o número teria apenas dois algarismos.



Logo, o número de elementos do conjunto Y é $5 \times 6 \times 6 = 180$.

Portanto, o número de maneiras de escolher três elementos de X e dois de Y é dado por ${}^{240}C_3 \times {}^{180}C_2$.

Resposta: B

2. Tem-se que:

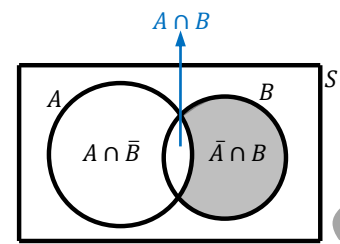
$$P(A) + 0,75P(B) = 1 \Leftrightarrow 0,75P(B) = 1 - P(A) \Leftrightarrow 0,75P(B) = P(\bar{A})$$

$$P(A|B) = 0,5 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,5 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,5P(B)$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 P((A \cup B) | \bar{A}) &= \frac{P((A \cup B) \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\overbrace{(A \cap \bar{A})}^{\emptyset} \cup (B \cap \bar{A}))}{0,75P(B)} = \\
 &= \frac{P(\emptyset \cup (B \cap \bar{A}))}{0,75P(B)} = \frac{P(B \cap \bar{A})}{0,75P(B)} \stackrel{i)}{=} \frac{P(B) - P(A \cap B)}{0,75P(B)} = \\
 &= \frac{P(B) - 0,5P(B)}{0,75P(B)} = \frac{0,5P(B)}{0,75P(B)} = \frac{0,5}{0,75} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

i)



$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Resposta: **C**

3. Vamos começar por determinar uma equação da recta r usando o produto escalar. Sendo $Q(x, y)$ um ponto do plano, Q pertence à recta r se $\overrightarrow{TQ} \cdot \overrightarrow{TC} = 0$, onde C é o centro da circunferência c . Portanto, $C(1, 1)$. Assim:

$$\overrightarrow{TQ} \cdot \overrightarrow{TC} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y-1) \cdot (1, 1) = 0 \Leftrightarrow x-1+y-1=0 \Leftrightarrow x+y=2$$

O número de casos possíveis é $4^2 = 16$. O ponto P pertence à recta r se a soma das suas coordenadas for 2. Assim, o número de casos favoráveis é 3: sair 1 no primeiro lançamento e 1 no segundo, formando o ponto de P de coordenadas $(1, 1)$; sair 2 no primeiro lançamento e 0 no segundo, formando o ponto de P de coordenadas $(2, 0)$; sair 0 no primeiro lançamento e 2 no segundo, formando o ponto de P de coordenadas $(0, 2)$.

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{3}{16}$.

Resposta: **B**

4. Tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \log_4(9000c^5) &= \log_4(9 \times 1000 \times c^2 \times c^3) = \log_4(9c^2 \times 1000c^3) = \log_4(9c^2) + \log_4(1000c^3) = \\
 &= \log_4(3c)^2 + \log_4(10c)^3 \stackrel{c>0}{=} 2\log_4(3c) + 3\log_4(10c) = 2 \times \frac{\log_2(3c)}{\log_2 4} + 3b = \\
 &= 2 \times \frac{a}{\log_2(2^2)} + 3b = \cancel{2} \times \frac{a}{\cancel{2}} + 3b = a + 3b
 \end{aligned}$$

Resposta: **A**

5. Tem-se que $v_{n+1} = \frac{2v_n}{3} \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2}{3}$. Portanto, (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$. Assim:

$$v_n = v_1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^- \quad (v_n < 0, \forall n \in \mathbb{N})$$

Logo, pela definição de limite segundo Heine:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(v_n) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e - e^{-2x+1}}{3x} = \frac{1}{3} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e - e^{-2x} \times e}{x} = -\frac{e}{3} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} \times (-2) = -\frac{e}{3} \times 1 \times (-2) = \frac{2e}{3}$$

Se $x \rightarrow 0^-$ então $-2x \rightarrow 0^+$ (limite notável)

Resposta: D

6. Tem-se que $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$. Portanto, $(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \times g'(1)$.

Seja t a recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1. Como t é perpendicular a r , vem:

$$m_t = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

Logo, $g'(1) = m_t = 2$. O ponto de coordenadas $(2, 3)$, pertence à recta t , assim, a sua equação é dada por:

$$t: y - 3 = 2(x - 2) \Leftrightarrow y = 2x - 4 + 3 \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

O ponto de coordenadas $(1, g(1))$ é o ponto de tangência, portanto $(1, g(1)) \in t$. Logo, $g(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$.

Tem-se $f'(x) = \frac{(x^2 + x)'}{x^2 + x} = \frac{2x + 1}{x^2 + x}$.

$$\text{Assim, } (f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \times g'(1) = f'(1) \times 2 = \frac{2 \times 1 + 1}{1^2 + 1} \times 2 = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

Resposta: C

7.

$$i^{5-16n} = \frac{i^5}{i^{16n}} = \frac{i^{4 \times 1 + 1}}{i^{4 \times 4n + 0}} = \frac{i^1}{i^0} = \frac{i}{1} = i = \text{cis } \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{z^2 \times i^{5-16n}}{\bar{z}} = \frac{(2 \text{cis } \theta)^2 \times \text{cis } \frac{\pi}{2}}{2 \text{cis } (-\theta)} = \frac{4 \text{cis } (2\theta) \times \text{cis } \frac{\pi}{2}}{2 \text{cis } (-\theta)} = \frac{4 \text{cis } \left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{2 \text{cis } (-\theta)} = 2 \text{cis } \left(2\theta + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = 2 \text{cis } \left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

A imagem geométrica do número complexo $\frac{z^2 \times i^{5-16n}}{\bar{z}}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se o seu argumento for da forma $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$3\theta + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $\theta = \frac{11\pi}{12}$ ($k=3$).

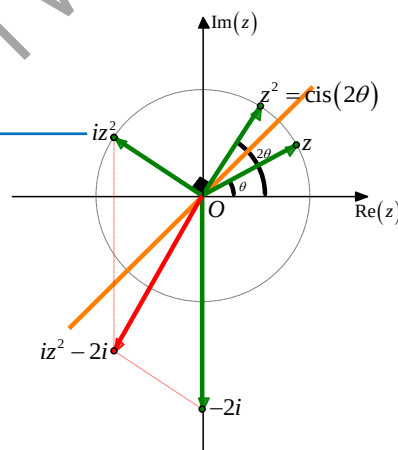
Resposta: **A**

8. Tem-se que $|z|=1$, portanto $z = \text{cis } \theta$, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, pois a condição $\text{Im}(z) - \text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(z) = \text{Re}(z)$, define a bissetriz dos quadrantes ímpares. Assim:

$$iz^2 - 2i = \text{cis } \frac{\pi}{2} \times (\text{cis } \theta)^2 - 2i = \text{cis } \frac{\pi}{2} \times \text{cis}(2\theta) - 2i = \text{cis}\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) + (-2i)$$

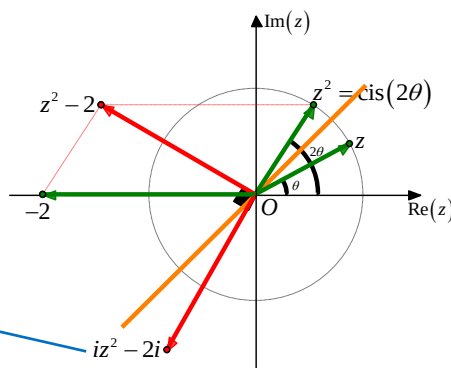
Utilizando a regra do paralelogramo:

A imagem geométrica de iz^2 obtém-se rodando a imagem geométrica de z^2 , $+90^\circ$ em torno da origem.



Logo, a imagem geométrica de $iz^2 - 2i$ pertence ao terceiro quadrante.

Outra resolução: Tem-se que $iz^2 - 2i = i(z^2 - 2) = i(\text{cis}(2\theta) - 2) = i(\text{cis}(2\theta) + (-2))$. Utilizando a regra do paralelogramo:



A imagem geométrica de $iz^2 - 2i$ obtém-se rodando a imagem geométrica de $i(z^2 - 2)$, $+90^\circ$ em torno da origem.

Logo, a imagem geométrica de $iz^2 - 2i$ pertence ao terceiro quadrante.

Resposta: **C**

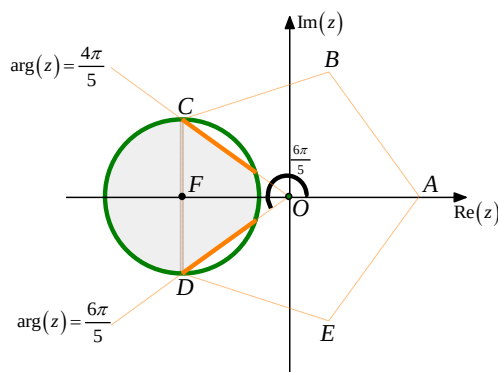
1.

1.1. Como $[ABCDE]$ é um pentágono regular inscrito numa circunferência centrada na origem e $\overline{OA} = 2$, então $\overline{OC} = 2$ e portanto $|z_3| = 2$. Os vértices do pentágono dividem a circunferência em que está inscrito em cinco arcos de amplitude $\frac{2\pi}{5}$, ou seja, $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \dots = \widehat{EOA} = \frac{2\pi}{5}$. Logo, um argumento de z_3 é $2 \times \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$. Assim:

$$\begin{aligned} \frac{(z_3)^5 \times \operatorname{cis} \frac{\pi}{12} - \frac{2-6i}{1-i}}{-\sqrt{6} + \sqrt{2}i} &= \frac{\left(2 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{5}\right)^5 \times \operatorname{cis} \frac{\pi}{12} - \frac{2-6i}{1-i}}{2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{2^5 \operatorname{cis} \left(\cancel{5} \times \frac{4\pi}{\cancel{5}}\right) \times \operatorname{cis} \frac{\pi}{12} - \frac{2+2i-6i-6i^2}{1^2-i^2}}{2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}} = \\ &= \frac{\overbrace{32 \operatorname{cis}(4\pi)}^{=\operatorname{cis} 0} \times \operatorname{cis} \frac{\pi}{12} - \frac{8-4i}{2}}{2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}} = \frac{32 \operatorname{cis} \left(0 + \frac{\pi}{12}\right) - 4 + 2i}{2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}} = \frac{32}{2\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{12} - \frac{5\pi}{6}\right) - 4 + 2i = \\ &= \frac{16}{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left(-\frac{3\pi}{4}\right) - 4 + 2i = \frac{16}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) - 4 + 2i = \\ &= \frac{16}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 4 + 2i = \frac{16\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\sqrt{2}}} - \frac{16\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\sqrt{2}}}i - 4 + 2i = -8 - 8i - 4 + 2i = -12 - 6i \end{aligned}$$

i) Para escrever $-\sqrt{6} + \sqrt{2}i$ na forma trigonométrica, vem: $|\sqrt{-6} + \sqrt{2}i| = \sqrt{(-\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Sendo θ um argumento de $-\sqrt{6} + \sqrt{2}i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\theta \in 2.^\circ$ quadrante, pelo que $\theta = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$. Assim $-\sqrt{6} + \sqrt{2}i = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$.

1.2. Tem em atenção a figura seguinte:



As coordenadas do ponto C são dadas por $\left(2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), 2\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$ e, consequentemente, as do ponto F são dadas por $\left(2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), 0\right)$. Assim, F é a imagem geométrica do número complexo $2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 0i = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ e a medida do comprimento do raio da circunferência de centro em F que contém o ponto C é igual $\overline{CF} = 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Logo, uma condição que define essa circunferência é $\left|z - 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

As semi-recta OC e OD são definidas, respectivamente, pelas condições $\arg(z) = \frac{4\pi}{5}$ e $\arg(z) = \frac{4\pi}{5}$.

Portanto, uma condição que define a região sombreada da figura, incluindo as fronteiras, é:

$$\left|z - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right| \leq 2\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \quad \wedge \quad \frac{4\pi}{5} \leq \arg(z) \leq \frac{6\pi}{5}$$

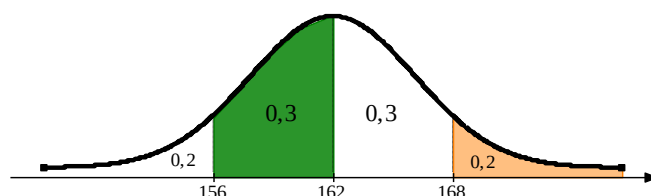
2.

2.1. Pela regra de Laplace a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis, desde que os acontecimentos elementares sejam equiprováveis.

Como se sabe que entre os quatro funcionários escolhidos pelo menos dois são do sexo masculino, o número de casos possíveis é ${}^7C_2 \times {}^3C_2 + {}^7C_3 \times {}^3C_1 + {}^7C_4 = {}^7C_2 \times {}^3C_2 + {}^7C_3 \times 3 + {}^7C_4$: dos sete homens escolhem-se dois e das três mulheres escolhem-se duas ou dos sete homens escolhem-se três e das três mulheres escolhe-se uma ou dos sete homens escolhem-se quatro. Pretende-se calcular a probabilidade de os quatro funcionários escolhidos serem homens. Portanto, o número de casos favoráveis é 7C_4 : dos sete homens escolhem-se quatro.

Logo, pela regra de Laplace, a probabilidade pedida é $\frac{{}^7C_4}{{}^7C_2 \times {}^3C_2 + {}^7C_3 \times {}^3C_1 + {}^7C_4}$.

2.2. A variável aleatória Y : «altura das funcionárias da empresa» tem distribuição normal de valor médio 162 cm e $P(Y > 168) = 0,2$. Tem em atenção a seguinte figura:



Tem-se que $P(156 < Y < 162) = P(162 < Y < 168) = 0,5 - 0,2 = 0,3$.

A variável aleatória X : «número de funcionárias do Departamento Financeiro com altura entre 156 cm e 162 cm» tem distribuição binomial de parâmetros $n=3$ e $p=(162 < Y < 168)=0,3$, ou seja, $X \sim \text{Bin}(3;0,3)$. Assim, $X = \{0,1,2,3\}$ e portanto tem-se:

$$\bullet P(X=0) = {}^3C_0 \times (0,3)^0 \times (1-0,3)^3 = 0,343$$

$$\bullet P(X=1) = {}^3C_1 \times (0,3)^1 \times (1-0,3)^2 = 0,441$$

$$\bullet P(X=2) = {}^3C_2 \times (0,3)^2 \times (1-0,3)^1 = 0,189$$

$$\bullet P(X=3) = {}^3C_3 \times (0,3)^3 \times (1-0,3)^0 = 0,027$$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é dada por:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,343	0,441	0,189	0,027

2.3. Seja n o número de funcionárias que foram contratadas. Assim, o Departamento Financeiro da empresa fica constituído por $n+10$ funcionários, sete homens e $n+3$ mulheres.

O número de maneiras distintas de escolher dois funcionários entre os $n+10$ é:

$${}^{n+10}C_2 = \frac{(n+10)!}{2! \times (n+10-2)!} = \frac{(n+10)(n+9)(\cancel{n+8})!}{2(\cancel{n+8})!} = \frac{(n+10)(n+9)}{2}$$

O número de maneiras distintas de escolher dois funcionários do sexo feminino entre os $n+3$ é:

$${}^{n+3}C_2 = \frac{(n+3)!}{2! \times (n+3-2)!} = \frac{(n+3)(n+2)(\cancel{n+1})!}{2(\cancel{n+1})!} = \frac{(n+3)(n+2)}{2}$$

Logo, como a probabilidade de escolher ao acaso dois funcionários do Departamento Financeiro a e estes serem do sexo feminino é $\frac{4}{15}$, vem:

$$\frac{{}^{n+3}C_2}{{}^{n+10}C_2} = \frac{4}{15} \Leftrightarrow \frac{\frac{(n+3)(n+2)}{\cancel{2}}}{\frac{(n+10)(n+9)}{\cancel{2}}} = \frac{4}{15} \Leftrightarrow \frac{(n^2 + 2n + 3n + 6)}{(n^2 + 9n + 10n + 90)} = \frac{4}{15} \Leftrightarrow 15(n^2 + 5n + 6) = 4(n^2 + 19n + 90) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15n^2 + 75n + 90 = 4n^2 + 76n + 360 \Leftrightarrow 11n^2 - n - 270 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 11 \times (-270)}}{2 \times 11} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{11881}}{22} \Leftrightarrow n = \frac{1-109}{22} \vee n = \frac{1+109}{22} \Leftrightarrow n = -\frac{54}{11} \vee n = 5$$

Portanto, foram contratadas cinco funcionárias para o Departamento Financeiro.

3.

3.1. $3x - \ln(3-x) - f(x) \geq \ln(2x+2)$

▪ $D = \left\{ x \in \mathbb{R} : 3-x > 0 \wedge \underbrace{x^2+2 > 0}_{\text{Condição Universal}} \wedge 2x+2 > 0 \right\} = \{ x \in \mathbb{R} : x < 3 \wedge x > -1 \} =]-1, 3[$

▪ Neste domínio tem-se

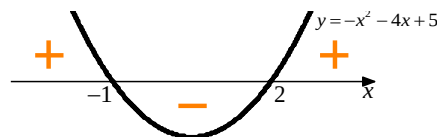
$$3x - \ln(3-x) - f(x) \geq \ln(2x+2) \Leftrightarrow 3x - \ln(3-x) - (3x - \ln(x^2+2)) \geq \ln(2x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{3x} - \ln(3-x) - \cancel{3x} + \ln(x^2+2) \geq \ln(2x+2) \Leftrightarrow \ln(x^2+2) \geq \ln(2x+2) + \ln(3-x) \Leftrightarrow$$

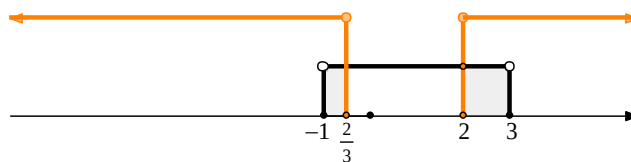
$$\Leftrightarrow \ln(x^2+2) \geq \ln((2x+2)(3-x)) \Leftrightarrow x^2+2 \geq 6x-2x^2+6-2x \Leftrightarrow 3x^2-4x-4 \geq 0$$

Cálculo Auxiliar: Tem-se $3x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 3 \times (-4)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \vee x = 2$

Como a função $y = 3x^2 - 4x - 4$ é quadrática e o seu gráfico tem a concavidade voltada para cima, então as soluções da inequação $3x^2 - 4x - 4 \geq 0$ são os valores de x tais que $x \in \left] -\infty, -\frac{2}{3} \right] \cup [2, +\infty[$.



Tendo em conta o domínio D calculado, os valores de x que satisfazem a inequação dada são os valores de x que satisfazem a condição $-1 < x < 3 \wedge \left(x \leq -\frac{2}{3} \vee x \geq 2 \right)$:



Conjunto Solução: $\left]-1, \frac{2}{3}\right] \cup [2, 3[$

3.2.

Assíntotas verticais

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x - \ln(x^2 + 2)}{x} = \frac{3 \times 0 - \ln(0^2 + 2)}{0^-} = \frac{-\ln 2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x - \ln(x^2 + 2)}{x} = \frac{3 \times 0 - \ln(0^2 + 2)}{0^+} = \frac{-\ln 2}{0^+} = -\infty$$

Logo, a recta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de g .

Como a função g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, o seu gráfico não tem mais assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - \ln(x^2 + 2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 2)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 2)}{x^2 + 2} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2} = \frac{3}{-\infty} - 0 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 0 - 0 \times 1 = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - \ln(x^2 + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{1} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 2)}{x} =$$

$$= 3 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln((-y)^2 + 2)}{-y} = 3 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y^2 + 2)}{y} = 3 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(y^2 \left(1 + \frac{2}{y^2}\right)\right)}{y} = 3 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y^2) + \ln\left(1 + \frac{2}{y^2}\right)}{y} =$$

$$= 3 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln y}{y} + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{y^2}\right)}{y} = 3 + 2 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} + \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{+\infty}\right)}{+\infty} = 3 + 2 \times 0 + \frac{\ln 1}{+\infty} = 3 + \frac{0}{+\infty} = 3 + 0 = 3$$

i) Se $x \rightarrow -\infty$ então $x^2 + 2 \rightarrow +\infty$. Portanto $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 2)}{x^2 + 2} = 0$ (limite notável).

ii) Mudança de variável: Se $x \rightarrow -\infty$ então $-x \rightarrow +\infty$. Seja $y = -x \Leftrightarrow x = -y$, $y \rightarrow +\infty$.

Logo, a recta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de g , quando $x \rightarrow -\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \ln(x^2 + 2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 2)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 2)}{x^2 + 2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2} = \frac{3}{+\infty} - 0 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 0 - 0 \times 1 = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \ln(x^2 + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)\right)}{x} =$$

$$= 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}{x} = 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}{x} = 3 + 2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{+\infty}\right)}{+\infty} =$$

$$= 3 + 2 \times 0 + \frac{\ln 1}{+\infty} = 3 + \frac{0}{+\infty} = 3 + 0 = 3$$

i) Se $x \rightarrow +\infty$ então $x^2 + 2 \rightarrow +\infty$. Portanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 2)}{x^2 + 2} = 0$ (limite notável).

Logo, a recta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de g , quando $x \rightarrow +\infty$.

3.3.

$$\bullet f'(x) = 3 - \frac{2x}{x^2 + 2}$$

$$\bullet f''(x) = 0 - \frac{2 \times (x^2 + 2) - 2x \times 2x}{(x^2 + 2)^2} = -\frac{2x^2 + 4 - 4x^2}{(x^2 + 2)^2} = -\frac{-2x^2 + 4}{(x^2 + 2)^2} = \frac{2x^2 - 4}{(x^2 + 2)^2}$$

$$\bullet f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4 = 0 \quad \wedge \quad \underbrace{(x^2 + 2)^2 \neq 0}_{\text{Condição Universal}} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \quad \vee \quad x = \sqrt{2}$$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função f'' , vem:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$2x^2 - 4$	+	0	-	0	+
$(x^2 + 2)^2$	+	+	+	+	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cup$	p.i.	$\cap$	p.i.	$\cup$

O gráfico da função f tem a concavidade votada para baixo em $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, tem a concavidade votada para cima em $]-\infty, -\sqrt{2}[$ e em $[\sqrt{2}, +\infty[$ e tem pontos de inflexão em $x = -\sqrt{2}$ e em $x = \sqrt{2}$.

4. Pretende-se mostrar que os gráficos de f e g se intersectam pelo menos uma vez em cada intervalo do tipo $[k, k+1]$, com $k \in \mathbb{N}$, ou seja, pretende-se mostrar que existe pelo menos um $c \in [k, k+1]$, com $k \in \mathbb{N}$, tal que $f(c) = g(c) \Leftrightarrow f(c) - g(c) = 0$.

▪ Seja h a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) - g(x)$. h é contínua em $\mathbb{R}$, pois é a diferença entre funções contínuas em $\mathbb{R}$. Logo, h é contínua em cada intervalo do tipo $[k, k+1] \subset \mathbb{R}$, com $k \in \mathbb{N}$.

▪ k par:

$$h(k) = f(k) - g(k) = \underbrace{(-1)^k}_1 \times (k^2 + k) - \underbrace{(-1)^{k+1}}_{-1} \times k^3 = k^2 + k + k^3 > 0$$

$$\begin{aligned} h(k+1) &= f(k+1) - g(k+1) = \underbrace{(-1)^{k+1}}_{-1} \times ((k+1)^2 + k+1) - \underbrace{(-1)^{k+2}}_1 \times (k+1)^3 = -((k+1)^2 + k+1) - (k+1)^3 = \\ &= -(k+1)^2 - (k+1) - (k+1)^3 = -(k+1)(k+1+1+(k+1)^2) = -(k+1)(k^2 + 2k + 1 + k + 2) = \\ &= -\underbrace{(k+1)}_{>0} \underbrace{(k^2 + 3k + 3)}_{>0} < 0 \end{aligned}$$

▪ k ímpar:

$$h(k) = f(k) - g(k) = \underbrace{(-1)^k}_{-1} \times (k^2 + k) - \underbrace{(-1)^{k+1}}_1 \times k^3 = -k^2 - k - k^3 = -\underbrace{(k^3 + k^2 + k)}_{>0} < 0$$

$$\begin{aligned}
 h(k+1) &= f(k+1) - g(k+1) = \underbrace{(-1)^{k+1}}_1 \times ((k+1)^2 + k+1) - \underbrace{(-1)^{k+2}}_{-1} \times (k+1)^3 = (k+1)^2 + k+1 + (k+1)^3 = \\
 &= (k+1) \left((k+1) + 1 + (k+1)^2 \right) = \underbrace{(k+1)}_{>0} \underbrace{(k^2 + 3k + 3)}_{>0} > 0
 \end{aligned}$$

Nota: $(-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 1 & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$. Se k é par, então $k+1$ é ímpar e $k+1$ é par. Se k é ímpar, então $k+1$ é par e $k+1$ é ímpar.

Assim, como h é contínua em cada intervalo do tipo $[k, k+1]$, com $k \in \mathbb{N}$ e como $h(k)$ e $h(k+1)$ têm sinais contrários, $\forall k \in \mathbb{N}$ ($h(k) \times h(k+1) < 0$), pelo corolário do teorema de Bolzano:

$$\exists c \in]k, k+1[: k(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = g(c)$$

Ou seja, os gráficos de f e g se intersectam pelo menos uma vez em cada intervalo do tipo $[k, k+1]$, com $k \in \mathbb{N}$.

5.

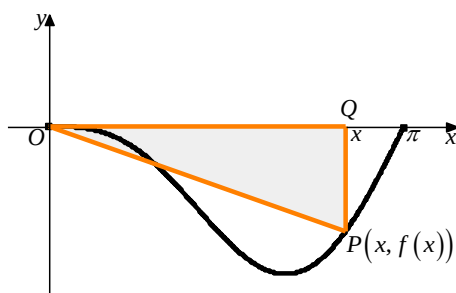
5.1. Tem-se que $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \pi - 2 \times 1 = 0 - 2 = -2$. Assim:

$$\begin{aligned}
 h'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{h(x) - h\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x) - 2\sin x + 2\left(\frac{0}{0}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \stackrel{i)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin\left(2\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 2\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + 2}{y} = \\
 &\stackrel{ii)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(2y + \pi) - 2\cos y + 2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin(2y) - 2\cos y + 2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin(2y)}{y} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2\cos y + 2}{y} = \\
 &= -2 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(2y)}{2y} + 2 \times \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos y}{y} \times \frac{1 + \cos y}{1 + \cos y} \right) = -2 \times 1 + 2 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos y)(1 + \cos y)}{y(1 + \cos y)} = \\
 &= -2 + 2 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 y}{y(1 + \cos y)} = -2 + 2 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 y}{y(1 + \cos y)} = -2 + 2 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{1 + \cos y} = \\
 &= -2 + 2 \times 1 \times \frac{\sin(0)}{1 + \cos(0)} = -2 + 2 \times \frac{0}{1 + 1} = -2 + 2 \times 0 = -2
 \end{aligned}$$

i) **Mudança de variável:** Se $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ então $x - \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$. Seja $y = x - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = y + \frac{\pi}{2}$, $y \rightarrow 0$.

ii) Recorrendo ao Círculo Trigonométrico, verifica-se que $\sin(2y + \pi) = -\sin(2y)$ e $\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos y$.

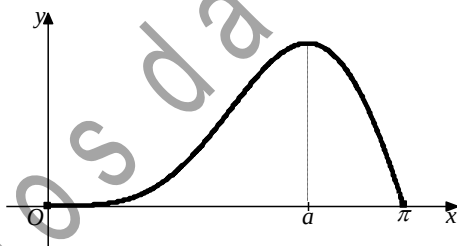
5.2. Começemos por fazer uma representação do triângulo $[OPQ]$:



A área do triângulo $[OPQ]$ é dada por $\frac{\overline{OQ} \times \overline{QP}}{2}$. Tem-se que $\overline{OQ} = x$ e $\overline{QP} = |f(x)| = -f(x)$, pois $f(x) < 0$, $\forall x \in [0, \pi]$. Assim:

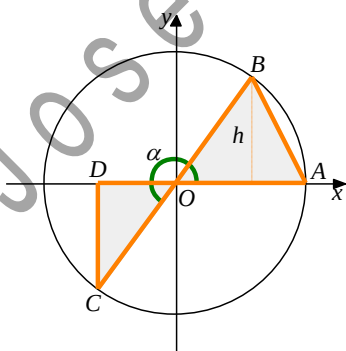
$$A_{[OPQ]} = \frac{\overline{OQ} \times \overline{QP}}{2} = \frac{x(-\sin(2x) + 2\sin x)}{2} = \frac{2x\sin x - x\sin(2x)}{2}$$

Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = \frac{2x\sin x - x\sin(2x)}{2}$ na janela de visualização $[0, \pi] \times [0, 4]$.



A área do triângulo $[OPQ]$ é máxima se $x = a$, com $a \approx 2,3$.

5.3. Começemos por ter em atenção a figura:



A área do polígono $[ABOCD]$ é dada por:

$$A_{[ABOCD]} = A_{[ABO]} + A_{[ODC]} = \frac{\overline{OA} \times h}{2} + \frac{\overline{OD} \times \overline{CD}}{2}$$

Uma equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 4$, logo o seu a medida do seu raio é 2. Como os ângulos AOB e COD são verticalmente oposto, então $h = \overline{CD}$. Assim:

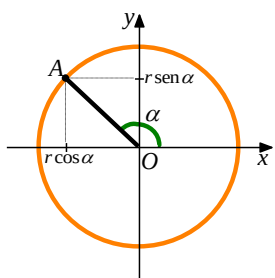
$$A_{[ABOCD]} = \frac{\cancel{2} \times \overline{CD}}{\cancel{2}} + \frac{\overline{OD} \times \overline{CD}}{2} = \overline{CD} + \frac{\overline{OD} \times \overline{CD}}{2}$$

Como as coordenadas do ponto C são com tipo $C(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$, onde $2\cos\alpha < 0$ e $2\sin\alpha < 0$, pois $\alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$. Portanto, $\overline{CD} = -2\sin\alpha$ e $\overline{OD} = -2\cos\alpha$. Assim:

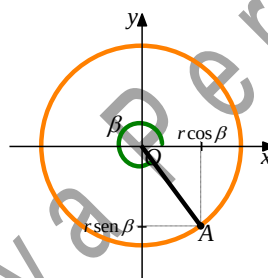
$$A_{[ABOCD]} = \overline{CD} + \frac{\overline{OD} \times \overline{CD}}{2} = -2\sin\alpha + \frac{-2\cos\alpha \times (-2\sin\alpha)}{2} = -2\sin\alpha + 2\sin\alpha \cos\alpha =$$

$$= \sin(2\alpha) - 2\sin\alpha = h(\alpha)$$

Nota: Seja A um ponto pertencente a uma circunferência centrada na origem e raio r



As coordenadas do ponto A são dadas por $A(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$



As coordenadas do ponto A são dadas por $A(r\cos\beta, r\sin\beta)$

Para determinar o valor de α para o qual a área do polígono $[ABOCD]$ é máxima, recorre-se ao estudo do sinal de h' :

- $h'(\alpha) = 2\cos(2\alpha) - 2\cos\alpha$
- $h'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2\alpha) - 2\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2\alpha) = 2\cos\alpha \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \cos\alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \alpha + 2k\pi \vee 2\alpha = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \vee 3\alpha = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \vee \alpha = \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Como $\alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$, vem $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ ($k = 2$)

Fazendo um quadro de variação do sinal da função h' , vem:

α	π		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$
$h'(\alpha)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$h(\alpha)$	n.d.	$\nearrow$	mín.	$\searrow$	n.d.

A área do polígono $[ABOCD]$ é máxima se $\alpha = \frac{4\pi}{3}$. O valor dessa área máxima é dado por:

$$h\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(2 \times \frac{4\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sin\left(\frac{8\pi}{3} - 2\pi\right) + \sqrt{3} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

6.

6.1. Os planos ABF e BCF e a recta BF . Assim:

$$\begin{cases} 6x + 2y + z = 34 & (E_1) \\ 8x + 32y + 5z = 192 & (E_2) \end{cases} \xrightarrow{-5E_1 + E_2} \begin{cases} 6x + 2y + z = 34 \\ -22x + 22y = 22 \end{cases} \xrightarrow{\frac{E_2}{22}} \begin{cases} 6x + 2y + z = 34 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2(x+1) + z = 34 \\ y = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2x + 2 + z = 34 \\ y = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + z = 32 \\ y = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{32-z}{8} \\ y-1 = x \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} -5E_1 + E_2 : -30x - 10y - 5z = -170 \\ \hline 8x + 32y + 5z = 192 \\ \hline -22x + 22y + 0 = 22 \end{array}$$

Logo, as equações cartesianas da recta BF podem ser $x = y - 1 = \frac{32 - z}{8}$.

6.2.

▪ O ponto A pertence ao plano xOy . Portanto, as suas coordenadas são do tipo $A(x, y, 0)$. Como A pertence à recta AF , vem:

$$(x, y, 0) = (6 - 3k, 5k - 1, 8k), \quad k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 3k \\ y = 5k - 1 \\ 0 = 8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \\ k = 0 \end{cases}$$

Logo, $A(6, -1, 0)$.

▪ O ponto C pertence ao eixo Oy . Portanto, as suas coordenadas são do tipo $C(0, y, 0)$. Como C pertence ao plano BCF , vem:

$$8 \times 0 + 32y + 5 \times 0 = 192 \Leftrightarrow y = \frac{192}{32} \Leftrightarrow y = 6$$

Logo, $C(0, 6, 0)$.

- F é o ponto de intersecção entre a recta AF e o plano BCF . (não podemos usar o plano ABF pois a recta AF está contida nesse plano). Assim:

$$\begin{cases} (x, y, z) = (6 - 3k, 5k - 1, 8k), & k \in \mathbb{R} \\ 8x + 32y + 5z = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 3k \\ y = 5k - 1 \\ z = 8k \\ 8(6 - 3k) + 32(5k - 1) + 5 \times 8k = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 176k = 176 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 8 \\ k = 1 \end{cases}$$

Logo, $F(3, 4, 8)$.

- Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vector normal ao plano ACF . Este vector é perpendicular aos vectores $\vec{AC}$ e $\vec{AF}$, dois vectores não colineares do plano ACF . Assim tem-se:

$$\begin{cases} \vec{AC} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{AF} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-6, 7, 0) \cdot (a, b, c) = 0 \\ (-3, 5, 8) \cdot (a, b, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a + 7b = 0 \\ -3a + 5b + 8c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7b}{6} \\ -3 \times \frac{7b}{6} + 5b + 8c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -\frac{7b}{2} + 5b + 8c = 0 \\ -7b + 10b + 16c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7b}{6} \\ c = -\frac{3b}{16} \end{cases}$$

Concluimos então que as coordenadas do vector $\vec{n}$ são da forma $\vec{n} = \left(\frac{7b}{6}, b, -\frac{3b}{16}\right)$, com $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Fazendo, por exemplo, $b = 48$ (m.m.c.(6,16) = 48), um vector normal de ACF é $\vec{n} = (56, 48, -9)$. Logo, como $C \in ACF$, uma equação do plano ACF é:

$$56(x - 0) + 48(y - 6) - 9(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 56x + 48y - 288 - 9z = 0 \Leftrightarrow 56x + 48y - 9z = 288$$

De uma outra forma:

O plano ACF pode ser definido por uma equação do tipo $56x + 48y - 9z = d$. Como o ponto C pertence ao plano ACF , vem:

$$56 \times 0 + 48 \times 6 - 9 \times 0 = d \Leftrightarrow d = 288$$

Logo, uma equação do plano ACF é $56x + 48y - 9z = 288$.

Cálculos Auxiliares: $\vec{AC} = C - A = (0, 6, 0) - (6, -1, 0) = (-6, 7, 0)$; $\vec{AF} = F - A = (3, 4, 8) - (6, -1, 0) = (-3, 5, 8)$