



EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

PROVA MODELO N.º 5 – PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Site: <http://recursos-para-matematica.webnode.pt/>

Facebook: <https://www.facebook.com/recursos-para-matematica>

GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Começa-se por escolher doze compartimentos entre os vinte para colocar todas as bolas. O número de maneiras de o fazer é ${}^{20}C_{12}$. Para cada uma destas maneiras, as cinco bolas pretas, indistinguíveis, podem ser distribuídas pelos doze compartimentos distintos de ${}^{12}C_5$ formas diferentes. Finalmente, as restantes sete bolas, distintas entre si, permutam nos restantes sete compartimentos de $7!$ maneiras distintas.

Assim, o número pedido é ${}^{20}C_{12} \times {}^{12}C_5 \times 7!$.

Outra resolução:

Começa-se por escolher cinco compartimentos entre os vinte para as cinco bolas pretas, indistinguíveis. O número de maneiras de o fazer é ${}^{20}C_5$. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^{15}A_7$ formas distintas de escolher, ordenadamente, sete compartimentos entre os restantes quinze para as restantes sete bolas, distintas entre si.

Logo, o número pedido é ${}^{20}C_5 \times {}^{15}A_7$.

$${}^{20}C_{12} \times {}^{12}C_5 \times 7! = {}^{20}C_5 \times {}^{15}A_7 = 502831929600$$

Resposta: B

2. Tem-se que ${}^nC_{308} + {}^nC_{309} = {}^{n+1}C_{1707} \Leftrightarrow {}^{n+1}C_{309} = {}^{n+1}C_{1707}$.

Assim, pela regra da simetria (${}^nC_p = {}^nC_{n-p}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}_0, n \geq p$) vem:

$${}^{n+1}C_{309} = {}^{n+1}C_{1707} \Leftrightarrow n+1-309=1707 \Leftrightarrow n=2015$$

O primeiro e o último elemento de qualquer linha é o 1. A linha seguinte à 2015 é a 2016. Logo, a soma de todos os elementos da linha 2016, excluindo o primeiro e o último é igual a $2^{2016} - 2 = 2 \times 2^{2015} - 2 = 2 \times (2^{2015} - 1)$.

Resposta: A

3. Tem-se:

$$v_{n+1} - v_n = \log_4 \left(2^{3(n+1)-1} \right) - \log_4 \left(2^{3n-1} \right) = \log_4 \left(\frac{2^{3n+3-1}}{2^{3n-1}} \right) = \log_4 \left(2^{3n+2-3n-1} \right) = \log_4 \left(2^3 \right) = \log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$$

Logo, (v_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{3}{2}$.

Resposta: **D**

4. Tem-se $\lim(u_n) = \lim \frac{1}{n \sin\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{y} \sin y} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1^+.$

Logo, $u_n - 2 \rightarrow 1^+ - 2 = -1^+$ e portanto, pela definição de limite segundo Heine, $\lim(u_n - 2) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x).$

Assim, pretende-se identificar o gráfico onde $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$. Esse gráfico é o da opção **C**.

i) Mudança de variável: Se $n \rightarrow +\infty$ então $\frac{1}{n} \rightarrow 0^+$ Seja $y = \frac{1}{n} \Leftrightarrow n = \frac{1}{y}, y \rightarrow 0^+$

Resposta: **C**

5. Tem-se que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC}$. Assim:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC}) = \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FA}}_{=0(\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{FA})} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{FA} + \underbrace{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC}}_{=0(\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AC})} =$$

$$= 0 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\| \times \|\overrightarrow{FA}\| \times \cos(180^\circ) + 0 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{CD}\| \times \|\overrightarrow{FA}\|$$

Como $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ e $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DE} \Leftrightarrow \overrightarrow{DE} = \frac{\overrightarrow{CD}}{2}$ vem, $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CD} + \frac{\overrightarrow{CD}}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{FA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{FA}\| = \frac{3}{2}\|\overrightarrow{CD}\|.$

$$\text{Assim, } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FC} = \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{CD}\| \times \|\overrightarrow{FA}\| = \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{CD}\| \times \frac{3}{2}\|\overrightarrow{CD}\| = \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \frac{3}{2}\|\overrightarrow{CD}\|^2 =$$

$$= \underbrace{\|\overrightarrow{AC}\|^2}_{A_{ACEF}} - \underbrace{\|\overrightarrow{CD}\|^2}_{A_{BCDG}} - \frac{1}{2}\|\overrightarrow{CD}\|^2 = a - \frac{1}{2}\|\overrightarrow{CD}\|^2$$

$A_{ABGDEF} = a$

Como $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{CD}\|^2 > 0$ então $a - \frac{1}{2}\|\overrightarrow{CD}\|^2 < a$ e portanto $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FC} < a.$

Outra resolução: Seja $\overline{DE} = x$, pelo que $\overline{CD} = 2\overline{DE} = 2x$ e $\overline{CE} = x + 2x = 3x$. Assim:

$$a = A_{[ABGDEF]} = A_{[ACEF]} - A_{[BCDG]} = (\overline{DE})^2 - (\overline{CD})^2 = (3x)^2 - (2x)^2 = 9x^2 - 4x^2 = 5x^2$$

Assim:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC}) = \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FA}}_{=0(\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{FA})} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{FA} + \underbrace{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC}}_{=0(\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AC})} =$$

$$= 0 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\| \times \|\overrightarrow{FA}\| \times \cos(180^\circ) + 0 \stackrel{\overline{AC}=\overline{FA}=\overline{CE}}{=} (3x)^2 - 2x \times 3x$$

$$= 9x^2 - 6x^2 = 3x^2$$

Portanto $a = A_{[ABGDEF]} = 5x^2$ e $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FC} = 3x^2$. Como $3x^2 < 5x^2$, então $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FC} < a$.

Resposta: **C**

6. Como a função g tem limite no ponto de abscissa 0, então $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos(2ax)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - (\cos^2(ax) - \sin^2(ax))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{1 - \cos^2(ax)}^{\sin^2(ax)} + \sin^2(ax)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sin^2(ax)}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2(ax)}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin(ax)}{x} \right)^2 = 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(ax)}{ax} \times a \right)^2 = 2 \times (1 \times a)^2 = 2a^2 \end{aligned}$$

Se $x \rightarrow 0^-$ então $ax \rightarrow 0$ (limite notável)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+a) - \ln a}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{x+a}{a}\right)}{x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{x}{a} + 1\right)}{\frac{x}{a}} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4a} \\ &\quad \text{Se } x \rightarrow 0^+ \text{ então } \frac{x}{a} \rightarrow 0 \text{ (limite notável)} \end{aligned}$$

$$\therefore 2a^2 = \frac{1}{4a} \Leftrightarrow 8a^3 = 1 \Leftrightarrow a^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Resposta: **B**

7. Sejam a, b e c , com $a < b < c$, respectivamente, o zero, o maximizante e o minimizante da função f .

Tem-se que $D_g = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} =]a, +\infty[$ e que $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, $\forall x \in]a, +\infty[$.

Para $x \in]a, +\infty[$, $f(x) > 0$ pelo que o sinal de g' depende apenas do sinal de f' , isto é, têm o mesmo sinal.

Fazendo um quadro de variação da monotonia da função f , vem:

x	a		b		c	$+\infty$
$f(x)$	n.d.	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$
$f'(x)$	n.d.	+	0	-	0	+

Logo, $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]a, b] \cup [c, +\infty[$ e $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [b, c]$.

Portanto, o único gráfico que é compatível com a conclusão retirada a partir da tabela é o gráfico da opção **D**.

Resposta: **D**

8. Tem-se:

- o polinómio p tem grau 3. Portanto tem três raízes complexas;
- o polinómio p tem todos os coeficientes reais. Portanto, se z_1 for raiz de p então $\bar{z}_1$ também é raiz de p .

Assim:

- 2 e $1+i$ **podem** ser raízes de p . A outra raiz teria de ser $1-i$, conjugado de $1+i$;
- $\text{cis} \frac{\pi}{4}$ e $\text{cis} \frac{3\pi}{4}$ **não podem ser** raízes de p , visto que o conjugado de $\text{cis} \frac{\pi}{4}$ não é $\text{cis} \frac{3\pi}{4}$. Se $\text{cis} \frac{\pi}{4}$ e $\text{cis} \frac{3\pi}{4}$ fossem raízes de p , então $\text{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)$ e $\text{cis} \left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ também seriam raízes. Portanto, p teria quatro raízes complexas, o que não pode ser uma vez que p tem apenas três raízes complexas;
- $i^{4n+5} = i^5 = i$ e $\text{cis} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$ **podem** ser raízes de p , pois o conjugado de i é $-i$. A outra raiz teria de ser real.
- $2+3i$ e $2-3i$ **podem** ser raízes de p , pois o conjugado de $2+3i$ é $2-3i$. A outra raiz teria de ser real.

Resposta: **B**

1. Tem-se:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}_{\cos\left(\frac{\pi-\pi}{2-5}\right)} + i \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}_{\sin\left(\frac{\pi-\pi}{2-5}\right)} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \text{cis } \frac{3\pi}{10} \\ \bullet \quad \left(i \text{cis } \frac{\pi}{9}\right)^{27} &= i^{27} \times \left(\text{cis } \frac{\pi}{9}\right)^{27} = i^3 \times \text{cis}\left(27 \times \frac{\pi}{9}\right) = -i \text{cis}(3\pi) = -i \text{cis } \pi = -i \times (-1) = i \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1 + \left(i \text{cis } \frac{\pi}{9}\right)^{27}}{\sqrt{3}i - 1} \times \left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{\sqrt{2} \text{cis } \frac{\pi}{4}}{2 \text{cis } \frac{2\pi}{3}} \times \text{cis } \frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{cis}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) \times \text{cis } \frac{3\pi}{10} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \text{cis}\left(-\frac{5\pi}{12} + \frac{3\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{cis}\left(-\frac{7\pi}{60}\right) \end{aligned}$$

Logo, $(z_1)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \text{cis}\left(-\frac{7n\pi}{60}\right)$.

Como $|\arg z| = \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \arg z = -\frac{\pi}{12} \vee \arg z = \frac{\pi}{12}$, a imagem geométrica de $(z_1)^n$ pertence à região do plano

definida por $|\arg z| = \frac{\pi}{12}$ se:

$$-\frac{7n\cancel{\pi}}{60} = -\frac{\cancel{\pi}}{12} + 2k\cancel{\pi} \quad \vee \quad -\frac{7n\cancel{\pi}}{60} = \frac{\cancel{\pi}}{12} + 2k\cancel{\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7n = -\frac{60}{12} + 120k \quad \vee \quad -7n = \frac{60}{12} + 120k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -7n = -5 + 120k \quad \vee \quad -7n = 5 + 120k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{5}{7} - \frac{120k}{7} \quad \vee \quad n = -\frac{5}{7} - \frac{120k}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ver nota

Nota: poderia ter-se optado por deixar positivo o sinal de $\frac{120k}{7}$, pois $k \in \mathbb{Z}$.

Então:

$$\text{se } k=0 \rightarrow n = \frac{5}{7} \notin \mathbb{N} \quad \vee \quad n = -\frac{5}{7} \notin \mathbb{N}$$

$$\text{se } k=1 \rightarrow n = \frac{5}{7} - \frac{120}{7} = -\frac{115}{7} \notin \mathbb{N} \quad \vee \quad n = -\frac{5}{7} - \frac{120}{7} = -\frac{125}{7} \notin \mathbb{N} \quad (\text{para qualquer } k \text{ inteiro positivo, } n \text{ é sempre negativo e portanto não poderá ser natural})$$

$$\text{se } k=-1 \rightarrow n = \frac{5}{7} + \frac{120}{7} = \frac{125}{7} \notin \mathbb{N} \quad \vee \quad n = -\frac{5}{7} + \frac{120}{7} = \frac{115}{7} \notin \mathbb{N}$$

$$\text{se } k=-2 \rightarrow n = \frac{5}{7} + \frac{120 \times 2}{7} = \frac{245}{7} = 35 \in \mathbb{N} \quad \vee \quad n = -\frac{5}{7} + \frac{120 \times 2}{7} = \frac{235}{7} \notin \mathbb{N}$$

$$\therefore n = 35$$

i) Para escrever $1+i$ na forma trigonométrica, vem: $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Sendo θ um argumento de $1+i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} = 1$ e $\theta \in 1.^\circ$ quadrante, pelo que $\theta = \frac{\pi}{4}$. Assim $1+i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$.

Para escrever $\sqrt{3}i-1$ na forma trigonométrica, vem: $|\sqrt{3}i-1| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Sendo θ um argumento de $\sqrt{3}i-1$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\theta \in 2.^\circ$ quadrante, pelo que $\theta = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$. Assim $\sqrt{3}i-1 = 2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$.

2.

2.1. Considere-se os acontecimentos:

E / V : «o dado extraído é equilibrado/viciado»

P / I : «sair face numerada com um número par/ímpar»

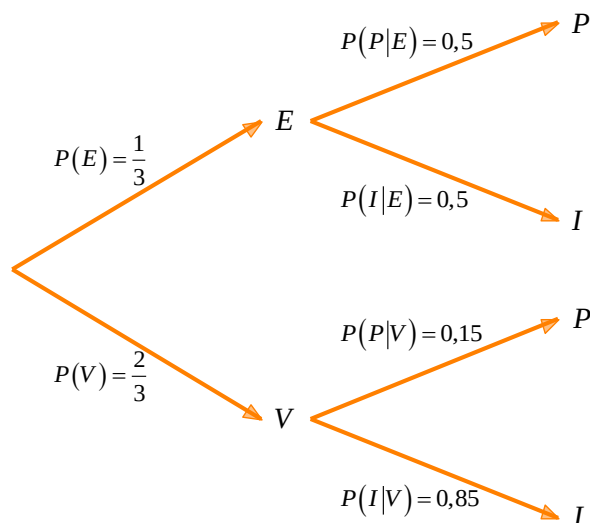
Pretende-se determinar, $P(E|I)$.

Tem-se que $P(V) = 2P(E)$. Assim:

$$P(V) + P(E) = 1 \Leftrightarrow 2P(E) + P(E) = 1 \Leftrightarrow 3P(E) = 1 \Leftrightarrow P(E) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(V) = \frac{2}{3}$$

Além disso, sabe-se também que $P(P|V) = 0,15 \Rightarrow P(I|V) = 0,85$.

Recorrendo a um diagrama de árvore:



$$\begin{aligned} \text{Logo, } P(E|I) &= \frac{P(E \cap I)}{P(I)} = \frac{P(I|E) \times P(E)}{P(I|E) \times P(E) + P(I|V) \times P(V)} = \\ &= \frac{0,5 \times \frac{1}{3}}{0,5 \times \frac{1}{3} + 0,85 \times \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{15}} = \frac{15}{66} = \frac{5}{22} \end{aligned}$$

Outra resolução: Pode-se responder a esta questão construindo uma tabela. Considerando os mesmos acontecimentos, tem-se:

	P	I	p.m.
E	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
V	$\frac{1}{10}$	$\frac{17}{30}$	$\frac{2}{3}$
p.m.	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{15}$	1

Justificações:

- $P(P|V) = 0,15 \Leftrightarrow \frac{P(P \cap V)}{P(V)} = 0,15 \Leftrightarrow P(P \cap V) = 0,15 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{10}$
- $P(I \cap V) = \frac{2}{3} - \frac{1}{10} = \frac{17}{30}$
- $P(P|E) = 0,5 \Leftrightarrow \frac{P(P \cap E)}{P(E)} = 0,5 \Leftrightarrow P(P \cap E) = 0,5 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
- $P(I \cap E) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

$$\text{Logo, } P(E|I) = \frac{P(E \cap I)}{P(I)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{15}} = \frac{15}{66} = \frac{5}{22}$$

2.2. A variável aleatória X pode tomar os valores 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, ou seja, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Os acontecimentos elementares $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ e $\{6\}$ são incompatíveis, isto é:

$$\begin{aligned} P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) &= P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}) = \\ &= P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) \end{aligned}$$

Tem-se:

- $P(\text{sair face numerada com um número par}) = 0,15$, ou seja, $P(\{2, 4, 6\}) = 0,15$.

Como $P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\})$, vem $P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\}) = \frac{0,15}{3} = 0,05$.

$$\therefore P(X = 2) = P(X = 4) = P(X = 6) = 0,05$$

- $P(\text{sair face numerada com um número ímpar}) = 0,85$, ou seja, $P(\{1, 3, 5\}) = 0,85$.

- $P(\text{sair face numerada com um número ímpar} \mid \text{sa ir face numerada com um número ímpar}) = \frac{1}{5}$, ou seja:

$$P(\{2, 3, 5\} \mid \{1, 3, 5\}) = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } P(\{2, 3, 5\} \mid \{1, 3, 5\}) &= \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{P(\{2, 3, 5\} \cap \{1, 3, 5\})}{P(\{1, 3, 5\})} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{P(\{3, 5\})}{0,85} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(\{3, 5\}) = \frac{1}{5} \times 0,85 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(\{3, 5\}) = 0,17 \end{aligned}$$

Assim, como $P(\{1, 3, 5\}) = P(\{1\}) + P(\{3, 5\})$, vem:

$$P(\{1, 3, 5\}) = P(\{1\}) + P(\{3, 5\}) \Leftrightarrow 0,85 = P(\{1\}) + 0,17 \Leftrightarrow P(\{1\}) = 0,85 - 0,17 \Leftrightarrow P(\{1\}) = 0,68$$

$$\therefore P(X = 1) = 0,68$$

- $P(\text{sair face numerada com um múltiplo de 3} \mid \text{sa ir face numerada com um número primo}) = 0,55$, ou seja:

$$P(\{3, 6\} \mid \{2, 3, 5\}) = 0,55$$

Assim,

$$P(\{3,6\}|\{2,3,5\}) = 0,55 \Leftrightarrow \frac{P(\{3,6\} \cap \{2,3,5\})}{\underbrace{P(\{2,3,5\})}_{P(\{2\})+P(\{3,5\})=0,05+0,17=0,22}} = 0,55 \Leftrightarrow \frac{P(\{3\})}{0,22} = 0,55 \Leftrightarrow P(\{3\}) = 0,55 \times 0,22 = 0,121$$

$$\therefore P(X = 3) = 0,121$$

$$\text{Finalmente, } P(\{3,5\}) = P(\{3\}) + P(\{5\}) \Leftrightarrow 0,17 = 0,121 + P(\{5\}) \Leftrightarrow P(\{5\}) = 0,17 - 0,121 \Leftrightarrow P(\{5\}) = 0,049$$

$$\therefore P(X = 5) = 0,049$$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é dada por:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,68	0,05	0,121	0,05	0,049	0,05

3.

3.1. Seja a a abscissa com ponto V . Tem-se:

$$\bullet V(a, y, 5). \text{ Como } V \in ACV, \text{ vem } 5a + 8y + 10 \times 5 = 30 \Leftrightarrow 8y = -20 - 5a \Leftrightarrow y = -\frac{20}{8} - \frac{5a}{8} \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2} - \frac{5a}{8}.$$

$$\text{Logo, } V\left(a, -\frac{5}{2} - \frac{5a}{8}, 5\right)$$

$$\bullet \text{ A abscissa do ponto } A \text{ é igual ao do dobro da abscissa do ponto } V \text{ e } A \in xOz \Rightarrow A(2a, 0, z).$$

$$\text{Como } A \in ACV, \text{ vem } 5 \times 2a + 8 \times 0 + 10z = 30 \Leftrightarrow 10a + 10z = 30 \Leftrightarrow a + z = 3 \Leftrightarrow z = 3 - a.$$

$$\text{Logo, } A(2a, 0, 3 - a)$$

$$\bullet C \in Oz \Rightarrow C(0, 0, z). \text{ Como } C \in ACV, \text{ vem } 5 \times 0 + 8 \times 0 + 10z = 30 \Leftrightarrow 10z = 30 \Leftrightarrow z = 3. \text{ Logo, } C(0, 0, 3).$$

$$\bullet \overrightarrow{AV} = V - A = \left(a, -\frac{5}{2} - \frac{5a}{8}, 5\right) - (2a, 0, 3 - a) = \left(-a, -\frac{5}{2} - \frac{5a}{8}, 2 + a\right)$$

$$\bullet \overrightarrow{CA} = A - C = (2a, 0, 3 - a) - (0, 0, 3) = (2a, 0, -a)$$

$$\text{Assim, } \overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{CA} = -56 \Leftrightarrow \left(-a, -\frac{5}{2} - \frac{5a}{8}, 2+a\right) \cdot (2a, 0, -a) = -56 \Leftrightarrow -2a^2 + (2+a)(-a) = -56 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2a^2 - 2a - a^2 + 56 = 0 \Leftrightarrow -3a^2 - 2a + 56 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-3) \times 56}}{2 \times (-3)}$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{14}{3} \vee a = 4.$$

Como $a > 0$, vem $a = 4$.

Logo, as coordenadas do ponto A são $(2 \times 4, 0, 3 - 4) = (8, 0, -1)$ e as do ponto V são $\left(4, -\frac{5}{2} - \frac{5 \times 4}{8}, 5\right) = (4, -5, 5)$.

3.2. Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vector normal do plano ABC . Este vector é perpendicular aos vectores $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AC}$, dois vectores não colineares do plano ABC (o ponto D pertence ao plano ABC).

Tem-se, $\overrightarrow{AD} = D - A = (0, -4, -1) - (8, 0, -1) = (-8, -4, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 0, 3) - (8, 0, -1) = (-8, 0, 4)$.

Logo,

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-8, -4, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-8, 0, 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8a - 4b = 0 \\ -8a + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4b = 8a \\ 4c = 8a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = 2a \end{cases}$$

Concluimos então que as coordenadas do vector $\vec{n}$ são da forma $(a, -2a, 2a)$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tomando, por exemplo, $a = 1$, um vector normal de ABC é $\vec{n}(1, -2, 2)$. Logo, como $C \in ABC$, uma equação do plano ABC pode ser, $1(x - 0) - 2(y - 0) + 2(z - 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z - 6 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z = 6$.

De uma outra forma: o plano ABC contém os pontos A , C e D que não são colineares. Por três quaisquer pontos não colineares passa um único plano. Assim, se os pontos A , C e D pertencerem ao plano definido pela condição $x - 2y + 2z = 6$, então esta é uma condição que define o plano ABC :

$$A(8, 0, -1): 8 - 2 \times 0 + 2 \times (-1) = 6 \Leftrightarrow 8 - 2 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6. \text{ Afirmação verdadeira}$$

$$C(0, 0, 3): 0 - 2 \times 0 + 2 \times 3 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6. \text{ Afirmação verdadeira}$$

$$D(0, -4, -1): 0 - 2 \times (-4) + 2 \times (-1) = 6 \Leftrightarrow 8 - 2 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6. \text{ Afirmação verdadeira}$$

Logo, $ABC: x - 2y + 2z = 6$.

▪ A altura da pirâmide é dada por $\overline{VP} = \|\overline{VP}\|$, sendo P o ponto de intersecção da recta que contém o ponto V e é perpendicular ao plano ABC . Assim, um vector director dessa recta pode ser $\vec{n}(1, -2, 2)$ e portanto uma sua equação vectorial é $(x, y, z) = (4, -5, 5) + k(1, -2, 2)$, $k \in \mathbb{R}$. Assim:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x, y, z) = (4, -5, 5) + k(1, -2, 2), & k \in \mathbb{R} \\ x - 2y + 2z = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + k \\ y = -5 - 2k \\ z = 5 + 2k \\ 4 + k - 2(-5 - 2k) + 2(5 + 2k) = 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 4 + k + 10 + 4k + 10 + 4k = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 9k = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2 \\ y = -5 - 2 \times (-2) \\ z = 5 + 2 \times (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, $P(2, -1, 1)$.

Assim, $\overline{VP} = P - V = (2, -1, 1) - (4, -5, 5) = (-2, 4, -4)$. Portanto, a altura da pirâmide é:

$$\|\overline{VP}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

4.

4.1. A função g é contínua em $x=1$ se $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - x^2}{e^{-2x+2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\overbrace{(\sqrt{x} - x^2)(\sqrt{x} + x^2)}^{(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2}}{(e^{-2x+2} - 1)(\sqrt{x} + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - x^4}{(e^{-2x+2} - 1)(\sqrt{x} + x^2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(-x^3 - x^2 - x)}{(e^{-2x+2} - 1)(\sqrt{x} + x^2)} = -\frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2(x-1)}{e^{-2(x-1)} - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^3 - x^2 - x}{\sqrt{x} + x^2} = -\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{-1^3 - 1^2 - 1}{\sqrt{1} + 1^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{-3}{2} = \frac{3}{4}$$

Se $x \rightarrow 1^-$ então $-2(x-1) \rightarrow 0^+$ (inverso de um limite notável)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 \ln x - 2}{x} = \frac{1^2 \ln(1) - 2}{1} = \frac{1 \times 0 - 2}{1} = -2$$

$$\bullet g(1) = \frac{1^2 \ln(1) - 2}{1} = \frac{1 \times 0 - 2}{1} = -2$$

Logo, g não é contínua em $x=1$, pois $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$.

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ são finitos, a recta de equação $x=1$ não é assíntota vertical do gráfico de g . Como g é contínua em $[0, +\infty[\setminus \{1\}$, o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

i) Utilizando a regra de Ruffini podemos decompor os polinómios $x - x^4 = -x^4 + x$:

	-1	0	0	1	0
1	-1	-1	-1	-1	0
	-1	-1	-1	0	0

$$\text{Logo, } x - x^4 = (x-1)(-x^3 - x^2 - x)$$

4.2. Para $x \in [1, +\infty[$, tem-se $g(x) = \frac{x^2 \ln x - 2}{x} = \frac{x^2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} = x \ln x - \frac{2}{x}$.

$$\bullet g'(x) = 1 \times \ln x + \cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} - \frac{0 \times x - 2 \times 1}{x^2} = \ln x + 1 - \frac{-2}{x^2} = \ln x + 1 + \frac{2}{x}$$

$$\bullet g''(x) = \frac{1}{x} + 0 + \frac{0 \times x^2 - 2 \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-4x}{x^4} = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} = \frac{x^2 - 4}{x^3}$$

$$\bullet g''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \wedge x^3 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Condição universal em $[1, +\infty[$

Como $x \in [1, +\infty[$, vem $x=2$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g'' , vem:

x	1		2	$+\infty$
$x^2 - 4$	-	-	0	+
x^3	+	+	+	+
$g''(x)$	-	-	0	+
$g(x)$		$\cap$	p.i.	$\cup$

Para $x \in [1, +\infty[$, o gráfico da função g tem a concavidade votada para baixo em $[1, 2]$, tem a concavidade votada para cima em $[2, +\infty[$ e tem ponto de inflexão em $x=2$. As coordenadas do ponto de inflexão são $(2, g(2)) = \left(2, \ln\left(\frac{4}{e}\right)\right)^*$.

$$^* g(2) = 2 \ln 2 - \frac{2}{2} = \ln(2^2) - 1 = \ln(4) - \ln(e) = \ln\left(\frac{4}{e}\right)$$

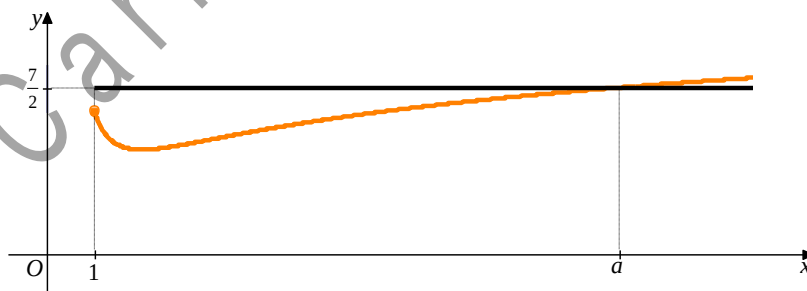
4.3. A recta r tem inclinação α , portanto $m_r = \operatorname{tg} \alpha$.

$$\text{Tem-se que, } \underbrace{7 \sin(\alpha + \pi)}_{-\sin \alpha} = -2 \underbrace{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}_{-\cos \alpha} \Leftrightarrow -7 \sin \alpha = 2 \cos \alpha \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{2}{7} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{7} \Leftrightarrow m_r = -\frac{2}{7}.$$

Para $x \in [1, +\infty[$, pretende-se determinar as coordenadas de um ponto P pertencente ao gráfico de g , $P(x, g(x))$, tal que a recta tangente ao gráfico de g em P seja perpendicular à recta r . Logo, essa recta terá de ter declive $-\frac{1}{m_r} = \frac{7}{2}$.

Como declive da recta tangente ao gráfico de uma função num ponto é dado pela derivada nesse ponto, a abcissa do ponto P é a solução da equação $g'(x) = -\frac{1}{m_r} = \frac{7}{2}$.

Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = g'(x) = \ln x + 1 + \frac{2}{x^2}$ e $y_2 = \frac{7}{2}$ na janela de visualização $[1, 15] \times [0, 7]$.

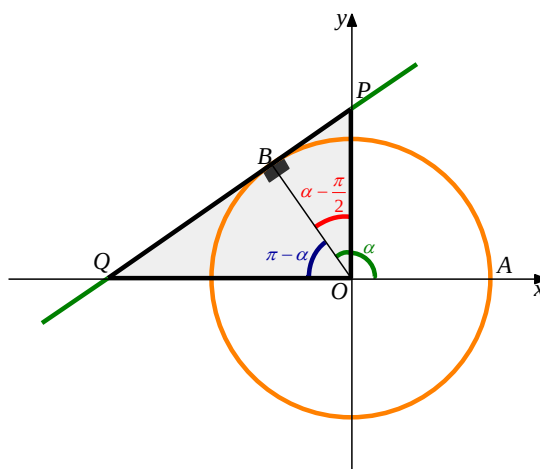


Logo, $g'(x) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = a$, com $a \approx 12$.

Portanto, as coordenadas de P são $(a, g(a))$, onde $g(a) \approx g(12) = 12 \ln(12) - \frac{2}{12} \approx 29,7$.

5.

5.1. Considere-se a figura seguinte:



A recta QP é tangente à circunferência no ponto B . Logo, QP é perpendicular ao segmento de recta $[OB]$ e portanto os triângulos $[OBQ]$ e $[OPB]$ são rectângulos em B .

Tem-se, $\overline{OB} = 1$, a amplitude do ângulo OBQ é $\pi - \alpha$ e a do ângulo OBP é $\alpha - \frac{\pi}{2}$. Assim:

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{1}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow -\cos \alpha = \frac{1}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow \overline{OQ} = -\frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{OP} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\text{Logo, } A_{[OPQ]} = \frac{\overline{OQ} \times \overline{OP}}{2} = \frac{-\frac{1}{\cos \alpha} \times \frac{1}{\sin \alpha}}{2} = -\frac{1}{2 \cos \alpha \sin \alpha} = -\frac{1}{\underbrace{\sin(2\alpha)}_{g(\alpha)}}.$$

Outra resolução:

As coordenadas do ponto B são $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, onde $\cos \alpha < 0$ e $\sin \alpha > 0$. O ponto Q pertence ao eixo Ox , portanto as suas coordenadas são do tipo $(x, 0)$ e o ponto P pertence ao eixo Oy , portanto as suas coordenadas são do tipo $(0, y)$.

Como $QP \perp OB$, vem:

$$\bullet \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0 \Leftrightarrow (\cos \alpha, \sin \alpha) \cdot (x - \cos \alpha, -\sin \alpha) = 0 \Leftrightarrow x \cos \alpha - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \cos \alpha = \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 \Leftrightarrow x \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Portanto, $Q\left(\frac{1}{\cos \alpha}, 0\right)$. Como $\cos \alpha < 0$, vem $\overrightarrow{OQ} = -\frac{1}{\cos \alpha}$.

$$\bullet \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (\cos \alpha, \sin \alpha) \cdot (-\cos \alpha, y - \sin \alpha) = 0 \Leftrightarrow -\cos^2 \alpha + y \sin \alpha - \sin^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y \sin \alpha = \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 \Leftrightarrow y \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sin \alpha}$$

Portanto, $P\left(0, \frac{1}{\sin \alpha}\right)$. Como $\sin \alpha > 0$, vem $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{\sin \alpha}$.

$$\text{Logo, } A_{[OPQ]} = \frac{\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP}}{2} = \frac{-\frac{1}{\cos \alpha} \times \frac{1}{\sin \alpha}}{2} = -\frac{1}{2 \cos \alpha \sin \alpha} = -\frac{1}{\underbrace{\sin(2\alpha)}_{g(\alpha)}}.$$

5.2. Para determinar o valor de α para o qual a área do triângulo $[ABOCD]$ é mínima, recorre-se ao estudo do sinal de g' :

$$\bullet g'(\alpha) = -\frac{0 \times \sin(2\alpha) - 1 \times 2 \cos(2\alpha)}{(\sin(2\alpha))^2} = \frac{2 \cos(2\alpha)}{\sin^2(2\alpha)}$$

$$\bullet g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cos(2\alpha)}{\sin^2(2\alpha)} = 0 \Leftrightarrow 2 \cos(2\alpha) = 0 \quad \wedge \quad \underbrace{\sin^2(2\alpha) \neq 0}_{\text{Condição universal em } \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[} \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Como $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, vem $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ($k=1$)

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g' , vem:

α	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$g'(\alpha)$	n.d.	—	0	+	n.d.
$g(\alpha)$	n.d.	$\searrow$	mín.	$\nearrow$	n.d.

A área do triângulo $[OPQ]$ é mínima se $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. O valor dessa área mínima é dado por:

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sin\left(2 \times \frac{3\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -\frac{1}{-1} = 1$$

Se $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ então $\overline{OP} = \overline{OQ}$, pelo que o triângulo $[OPQ]$ é rectângulo e isósceles.

6. Tem-se que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3+x) - f(3)}{x^2 - 3x} = 0 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3+x) - f(3)}{x(x-3)} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3+x) - f(3)}{x}}_{f'(3)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-3} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f'(3) \times \frac{1}{-3} = 0 \Leftrightarrow f'(3) = 0 \end{aligned}$$

Assim, visto que $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, vem $f''(3) > 0$. Logo, $f'(3) = 0$ e $f''(3) > 0$ e portanto a função f tem um mínimo em $x = 3$. A afirmação A é falsa.

A função g é contínua em $[-3, 4]$ pois é a diferença entre funções contínuas no seu domínio. Como $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, a função f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$. Portanto, $f'(-3) < f'(2)$ e $f'(4) > f'(2)$. Assim:

$$g(-3) = f'(-3) - f'(2) < 0, \text{ pois } f'(-3) < f'(2) \text{ e } g(4) = f'(4) - f'(2) > 0, \text{ pois } f'(4) > f'(2)$$

Logo, como g é contínua em $[-3, 4]$ e $g(-3)$ e $g(4)$ têm sinais contrários, pelo corolário do teorema de Bolzano, a função g tem pelo menos um zero. A afirmação B é verdadeira.

A recta de equação $y = -2x + 2$, é assíntota do gráfico de h , quando $x \rightarrow -\infty$, se:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - (-2x + 2)) = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - (-2x + 2)) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + \frac{x^3 + 1}{e^{-x}} - x + 2x - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + x + \frac{x^3 + 1}{e^{-x}} - 2 \right) = \\
&= -2 + \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)}_2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{e^{-x}} \stackrel{\substack{y = -x \\ y \rightarrow +\infty}}{=} -2 + 2 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(-y)^3 + 1}{e^y} = \\
&= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^3 \left(-1 - \frac{1}{y^3} \right)}{e^y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^3}{e^y} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-1 - \frac{1}{y^3} \right) = 0 \times \left(-1 - \frac{1}{+\infty} \right) = \\
&= 0 \times (-1 - 0) = 0 \times (-1) = 0
\end{aligned}$$

Logo, a recta de equação $y = -2x + 2$ é assíntota do gráfico de h , quando $x \rightarrow -\infty$. A afirmação **C** é verdadeira.

Outra justificação para a afirmação C:

Tem-se que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = 2$, logo a recta de equação $y = -x + 2$ é assíntota do gráfico de f , quando

$x \rightarrow -\infty$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$. Assim:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + \frac{x^3 + 1}{e^{-x}} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3 + 1}{e^{-x}}}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{xe^{-x}} - 1 = \\
&\stackrel{\substack{y = -x \\ y \rightarrow +\infty}}{=} -2 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(-y)^3 + 1}{-ye^y} = -2 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y^3 + 1}{-ye^y} = -2 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^3 \left(1 - \frac{1}{y^3} \right)}{-ye^y} = -2 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{e^y} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y^3} \right) = \\
&= -2 - 0 \times \left(1 - \frac{1}{+\infty} \right) = -2 - 0 \times (1 - 0) = -2 - 0 \times 1 = -2 + 0 = -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + \frac{x^3 + 1}{e^{-x}} - x + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + x + \frac{x^3 + 1}{e^{-x}} \right) = \\
&= \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)}_2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{e^{-x}} = 2 + 0 = 2 \quad (\text{o cálculo de } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{e^{-x}} \text{ é igual à apresentada na primeira resolução})
\end{aligned}$$

Logo, a recta de equação $y = -2x + 2$ é assíntota do gráfico de h , quando $x \rightarrow -\infty$.