



PROPOSTA DE TESTE INTERMÉDIO N.º 1

MATEMÁTICA A – 12.º ANO

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Como pelo menos três dos quatro cargos têm de ser ocupados por mulheres, então as mulheres podem ocupar três cargos ou quatro cargos:

1.º Caso → As mulheres ocupam três cargos e os homens um:

$$7C_1 \times {}^5C_3 \times 4! = 7 \times {}^5C_3 \times 4!$$

Dos sete homens escolhe-se um e das três mulheres escolhem-se três. Para cada uma destas maneiras, as quatro pessoas escolhidas permutam nos quatro cargos de $4!$ maneiras distintas.

2.º Caso → As mulheres ocupam os quatro cargos. Assim das cinco mulheres escolhem-se, onde necessariamente, qualuo, o número de maneiras de o fazer é 5A_4 .

(Também se podia escolher as quatro mulheres e depois permutá-las nos quatro cargos. O número de maneiras de o fazer é ${}^5C_4 \times 4! = {}^5A_4$)

Logo, o número pedido é $7 \times {}^5C_3 \times 4! + {}^5A_4$

Resposta: C

2.

n.º casos possíveis: ${}^{10}C_2$

n.º casos favoráveis: 10

as arestas perpendiculares ao eixo Oy são todas as da face $[ABCDE]$ e todas as da face $[FGHIJ]$.

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{10}{10C_2} = \frac{2}{9}$

Resposta: B

EXERCÍCIO EXTRA:

n.º casos possíveis: $10C_3$

n.º casos favoráveis: $10 \times {}^4C_3$

As faces $[AE]F$, $[ED]I$, $[DCH]I$, $[BCHG]$ e $[ABGF]$ são paralelas ao eixo Oy . Para cada uma dessas faces escolhem-se três dos quatro vértices. Dá $5 \times {}^4C_3$.

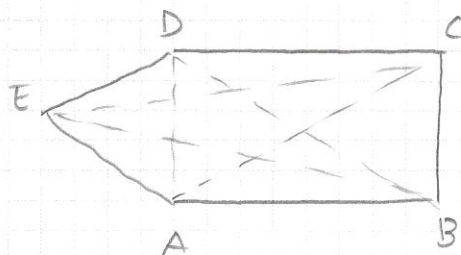
Depois temos de considerar mais cinco planos. Os planos que contêm os vértices*, são paralelos a Oy

$$\left. \begin{array}{l} D, B, G \text{ e } I \\ A, C, H \text{ e } F \\ A, D, I \text{ e } F \\ E, B, G \text{ e } J \\ E, C, H \text{ e } J \end{array} \right\} 5 \times {}^4C_3$$

Logo o n.º de casos favoráveis é $5 \times {}^4C_3 + 5 \times {}^4C_3 = 10 \times {}^4C_3$
e a probabilidade pedida é $\frac{10 \times {}^4C_3}{10C_3} = \frac{1}{3}$

NOTA:

Para contar os planos paralelos a Oy que não contém faces do prisma, bastaria contar os planos que contêm as diagonais faciais de face $[ABCDE]$, isto é, bastaria contar as diagonais faciais desta face.



5C_2 é o n.º de segmentos de recta que se podem formar com os cinco vértices desta face. Desks, cinco são arestas da face. Logo o n.º de diagonais faciais de $[ABCDE]$ é ${}^5C_2 - 5 = 5$.

3. Tem-se:

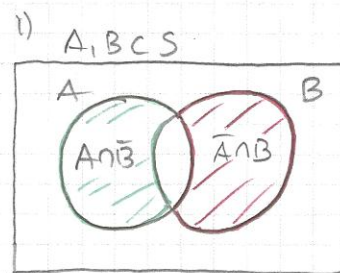
$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,9 = P(\bar{A}) + P(B) - (P(B) - P(A \cap B)) \Leftrightarrow$$

i)

$$\Leftrightarrow 0,9 = 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A) - 0,1} \quad (1)$$



$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,6 = P(A) + P(\bar{B}) - (P(A) - P(A \cap B)) \Leftrightarrow$$

i)

$$\Leftrightarrow 0,6 = P(A) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(B) - 0,4} \quad (2)$$

Assim, substituindo em (2) $P(A \cap B)$ por $P(A) - 0,1$, vem:

$$P(A) - 0,1 = P(B) - 0,4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) - 0,1 = 3P(A) - 0,4 \Leftrightarrow$$

$$\downarrow$$

$$P(B) = 3P(A)$$

$$\Leftrightarrow -2P(A) = -0,3 \Leftrightarrow P(A) = \frac{-0,3}{-2} = 0,15$$

Resposta: A

4. . Seja X a variável aleatória:

X : « n.º de vezes que sai face numerada com um n.º par em seis lançamentos ».

Tem-se que X é uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros $n=6$ e $p=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, isto é,
 $X \sim \text{Bin}(6, \frac{2}{3})$

Assim:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{13}{729}}{\frac{73}{729}} = \frac{13}{73}$$

Resposta: C

Cálculos auxiliares:

$$P(A \cap B) = P(\text{sair face par no máximo uma vez}) = P(X \leq 1) =$$

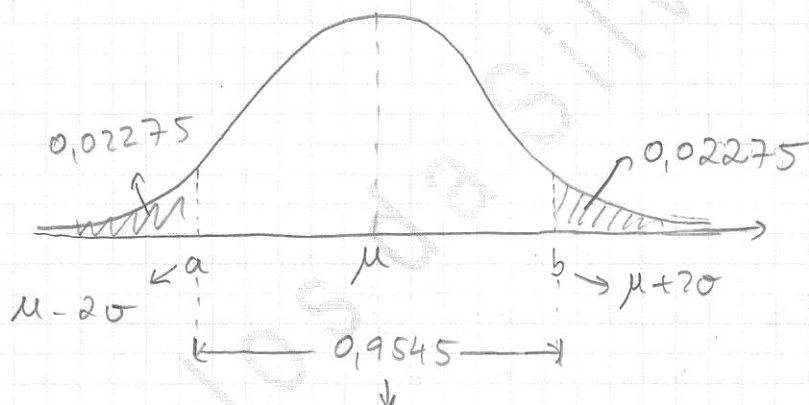
$$= P(X=0) + P(X=1) = {}^6C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^6 + {}^6C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{13}{729}$$

$$P(B) = P(\text{seir face par no máximo duas vezes}) = P(X \leq 2) =$$

$$= \underbrace{P(X=0) + P(X=1)}_{\frac{13}{729}} + P(X=2) = \frac{13}{729} + {}^6C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^4 =$$

$$= \frac{73}{729}$$

5)



$$P(a < X < b) = 1 - 2 \times 0,02275 = 0,9545$$

$$\text{logo } a = \mu - 2\sigma \text{ e } b = \mu + 2\sigma \text{ e } \mu = \frac{a+b}{2}$$

Assim, substituindo μ por $\frac{a+b}{2}$ em $a = \mu - 2\sigma$ (podia ser em $b = \mu + 2\sigma$) vem:

$$\begin{aligned} a &= \frac{a+b}{2} - 2\sigma \Leftrightarrow 2a = a+b - 4\sigma \Leftrightarrow 4\sigma = b-a \Leftrightarrow \\ (2) \quad \sigma &= \frac{b-a}{4} \end{aligned}$$

Resposta: D

GRUPO II - ITENS DE RESPOSTA ABERTA

$$1.1. \quad {}^{12}C_3 \times {}^9C_3 \times {}^6C_3 \times {}^3C_3 = 369600$$

escolher três pedras entre as doze para um dos compartimentos

escolher três pedras entre seis para outro compartimento

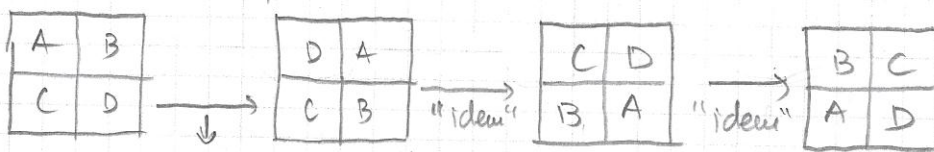
escolher três pedras entre as restantes nove para outro compartimento

as últimas três pedras ficam no compartimento que falta

NOTAS

1) Depois de se escolherem os grupos não há necessidade de permutá-los nos compartimentos. Esses casos já estão contabilizados na formação dos grupos. Se fizéssemos as permutações, estaríamos a repetir contagens. Por exemplo, se considerarmos quatro pedras distintas A, B, C e D e dois compartimentos distintos 1 e 2. Poderíamos colocar exactamente duas pedras em cada compartimento de ${}^4C_2 \times {}^2C_2 = {}^4C_2 = 6$ maneiras distintas: (AB, CD); (CD, AB); (AC, BD); (BD, AC); (AD, BC); (BC, AD).

2) Se os compartimentos fossem iguais, teríamos de dividir o n.º obtido por 4. Se A, B, C e D fossem os grupos, as maneiras ABCD; DABC; CDAB e BCDA seriam as mesmas:



Rotacão de 90º em torno do centro

EXERCÍCIO EXTRA → ÚLTIMA PÁGINA

1.2.

n.c.p.: ${}^{12}C_7$

A → Ametista D → Dolomita

$$\begin{aligned} \text{n.c.f.: } & {}^6C_5 \times {}^6C_2 + {}^6C_6 \times {}^6C_1 + {}^6C_2 \times {}^6C_5 + {}^6C_1 \times {}^6C_6 = \\ & \quad \quad \quad \begin{array}{cc} 5A \text{ e } 2D & 6A \text{ e } 1D \\ 2A \text{ e } 5D & 1A \text{ e } 6D \end{array} \\ & = 2 \times ({}^6C_5 \times {}^6C_2 + {}^6C_6 \times {}^6C_1) \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } p = \frac{2 \times ({}^6C_5 \times {}^6C_2 + {}^6C_6 \times {}^6C_1)}{{}^{12}C_7} = \frac{8}{33}$$

1.3. Seja n o nº de Jades. Agrupando num bloco as Ametistas e noutro bloco as Jades tem-se:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 6 \text{ ametistas} & n \text{ Jades} & & & & \\ \hline 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \boxed{n!} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

$$8! \times 6! \times n!$$

Os dois blocos e as restantes seis pedras (ou seja, temos oito "pedras" a permutar — os blocos contam como uma pedra) permutam entre si de $8!$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras, as seis ametistas permutam entre si de $6!$ maneiras distintas e as n jades de $n!$ maneiras distintas.

Assim:

$$8! \times 6! \times n! = 6\,967\,296\,000 \Leftrightarrow n! = \frac{6\,967\,296\,000}{8! \times 6!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n! = 24 \Leftrightarrow n = 4$$

∴ Foram colocadas quatro Jades na caixa.

2.

2.1.

i) Vamos começar por determinar a probabilidade de sair 1 no dado viciado.

Seja $P(i)$, com $i = 1, \dots, 6$ a probabilidade de sair face numerada com o nº i . Assim:

$$P(1) = 2P(i) \Leftrightarrow P(i) = \frac{P(1)}{2}, \quad i = 2, \dots, 5.$$

Portanto:

$$P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{(2)}{P(1)} + \frac{P(2)}{2} + \frac{P(3)}{2} + \frac{P(4)}{2} + \frac{P(5)}{2} + \frac{P(6)}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7P(1) = 2 \Leftrightarrow P(1) = \frac{2}{7}$$

ii) Vamos utilizar um diagrama em árvore para resolver este item. Seguem:

A/B : « retira-se uma bola da caixa A/B »

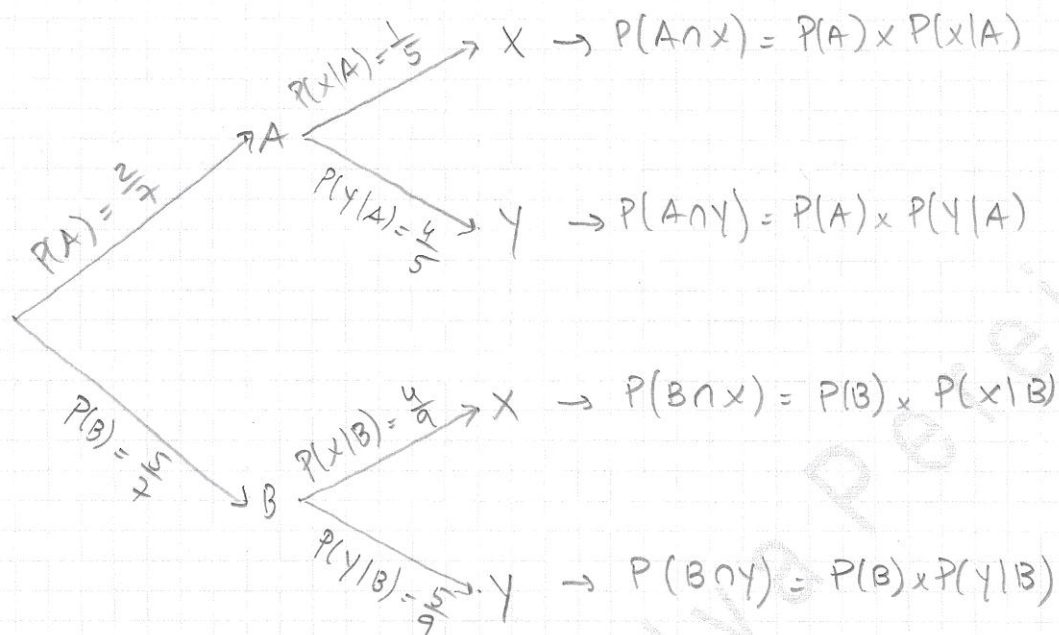
X/Y : « a bola retirada é branca / Preta »

Pretende-se determinar $P(A|Y)$

Tem-se que:

$$P(A) = P(1) = \frac{2}{7} \quad \text{e} \quad P(B) = 1 - P(1) = \frac{5}{7}$$

Assim:



Logo:

$$\begin{aligned}
 P(A|Y) &= \frac{P(A \cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(A \cap Y)}{P(A \cap Y) + P(B \cap Y)} = \\
 &= \frac{P(A) \times P(Y|A)}{P(A) \times P(Y|A) + P(B) \times P(Y|B)} = \frac{\frac{2}{7} \times \frac{4}{5}}{\frac{2}{7} \times \frac{4}{5} + \frac{5}{9} \times \frac{5}{9}} = \\
 &= \frac{\frac{8}{35}}{\frac{197}{315}} \approx 37\%.
 \end{aligned}$$

2.2.

$P(Y|\bar{X})$ é a probabilidade de pelo menos três das bolas retiradas serem brancas, sabendo que saiu face com nº par no lançamento do dado. Logo, não saiu face com o nº 3 ou com o nº 5 e portanto retiram-se cinco bolas da caixa B.

n.c.f. $\binom{n+5}{2} + \binom{4}{1} \times \binom{n+5}{1} =$

$\downarrow$ $\downarrow$
 2 em brancas Uma branca

$$= \frac{(n+5)!}{2!(n+5-2)!} + 4 \times (n+5) =$$

$$= \frac{(n+5)(n+4)(\cancel{n+3})!}{2(\cancel{n+3})!} + \frac{4n+20}{(2) \quad (2)} = \frac{(n+5)(n+4) + 8n+40}{2}$$

Assim, a probabilidade pedida é dada, em função de n , por:

$$= \frac{\frac{(n+5)(n+4) + 8n+40}{2}}{\frac{(n+9)(n+8)}{2}} = \frac{n^2+4n+5n+20+8n+40}{n^2+8n+9n+72} =$$

$$= \frac{n^2+17n+60}{n^2+17n+72}$$

Por tanto:

$$\frac{n^2+17n+60}{n^2+17n+72} = \frac{19}{20} \Leftrightarrow 20(n^2+17n+60) = 19(n^2+17n+72) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20n^2 + 340n + 1200 = 19n^2 + 323 + 1368 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 17n - 168 = 0 \Leftrightarrow n = 7 \vee n = -24 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$\downarrow$
 F.R.

Logo, foram colocadas na caixa B sete bolas azuis e nada.

3. Tem-se :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = P(A) + a - \frac{1}{18} - P(A) \times \left(a - \frac{1}{18}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{11}{9} - \cancel{a} + \cancel{a} - \frac{1}{18} - \left(\frac{11}{9} - a\right) \left(a - \frac{1}{18}\right) \Leftrightarrow$$

$$\downarrow$$

$$P(A) = \frac{11}{9} - a$$

1)

$$\Leftrightarrow a = \frac{7}{6} - \frac{11}{9}a + \frac{11}{162} + a^2 - \frac{1}{18}a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a^2 + a + \frac{11}{9}a + \frac{1}{18}a - \frac{11}{162} - \frac{7}{6} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a^2 + \frac{41}{18}a - \frac{100}{81} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{8}{9} \vee a = \frac{25}{18}$$

$$\downarrow$$

F.R.

Como $a = P(A \cup B)$, então $0 \leq a \leq 1$ e portanto

$$a = \frac{8}{9}$$

c) Como A e B são independentes, então $\bar{A}$ e B também o são. Logo:

$$P(\bar{A}|B) = P(\bar{A}) \Leftrightarrow a - \frac{2}{9} = 1 - P(A) \Leftrightarrow P(A) = 1 - a + \frac{2}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{11}{9} - a$$

De facto:

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = \\ = P(B) \times (1 - P(A)) = P(B) \times P(\bar{A})$$

Prova-se que se A e B são independentes então $\bar{A}$ e B também são.

4. Os valores que a variável aleatória X pode tomar são 1, 2 ou 3:

- Tome o valor 1 se saírem três cartões com o nº 1
- Tome o valor 2 se saírem dois cartões com o nº 1 e um com o nº 2 ou dois cartões com o nº 2 e um com o nº 1
- Tome o valor 3 se sair o cartão com o nº 3 e dois com outros dois números.

Pela regra de Laplace a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o nº de casos favoráveis e o nº de casos possíveis, quando estes são equiprováveis.

Para qualquer valor de variável aleatória X o nº de casos possíveis é 6A_3 , nº de maneiras de extrair, ordenadamente, três cartões entre os seis

(Estamos a considerar a ordem de extração, e como se os cartões fossem todos distintos, isto é, os três cartões com o 1 seriam distintos, o mesmo acontecendo com os dois cartões com o 2: $1_A, 1_B, 1_C, 2_A, 2_B, 3$)

Para $X=1$, o n.º de casos favoráveis é ${}^3A_3=3!$, que é o número de maneiras de extrair, ordenadamente, os três cartões com o n.º 1 (${}^1A_1, {}^1A_1, {}^1A_1$; ${}^1A_1, {}^1A_1, {}^1A_1$; ${}^1A_1, {}^1A_1, {}^1A_1$; ${}^1A_1, {}^1A_1, {}^1A_1$; ${}^1A_1, {}^1A_1, {}^1A_1$).

Para $X=2$:

${}^3C_2 \times {}^2C_1 \times 3! = {}^3C_2 \times 2 \times 3! \rightarrow$ é o n.º de maneiras de extrair, ordenadamente, dois cartões com o n.º 1 e um com o n.º 2.

${}^3C_1 \times {}^2C_2 \times 3! = 3 \times 3! \rightarrow$ é o n.º de maneiras de extrair, ordenadamente, um cartão com o n.º 1 e dois com o n.º 2.

Portanto, o n.º de casos favoráveis para $X=2$ é

$${}^3C_2 \times 2 \times 3! + 3 \times 3! = ({}^3C_2 \times 2 + 3) \times 3!$$

Para $X=3$, o n.º de casos favoráveis é ${}^5C_2 \times {}^1C_1 \times 3! = {}^5C_2 \times 3!$, que é o n.º de maneiras de extrair, ordenadamente, o cartão com o n.º 3 e dois dos restantes cinco cartões.

Assim, a distribuição de probabilidades de X pode ser dada pela tabela apresentada.

NOTA: Se não considerássemos a ordem de extração a tabela também poderia ser dada por:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6C_3}$	$\frac{{}^3C_2 \times 2 + 3}{6C_3}$	$\frac{{}^5C_2}{6C_3}$

EXERCÍCIO EXTRA (GEOMETRIA):

a) i) Tem-se:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 4}{(x-2)^2} + y^2 + \frac{z^2 - 4z + 4}{(z-2)^2} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4 \rightarrow \text{Superfície esférica}$$

Centrada em $(2, 0, 2)$ e raio $\sqrt{4} = 2$

Logo: $G(2, 0, 2)$, $A(2, 0, 0)$, $B(2, 2, 2)$; $C(0, 0, 2)$,
 $D(2, -2, 2)$, $E(4, 0, 2)$ e $F(2, 0, 4)$

ii) Por três pontos não colineares passa um único plano, logo, se os pontos A, B e E pertencem ao plano definido por $x + y - z = 2$, então esse plano é ABE.

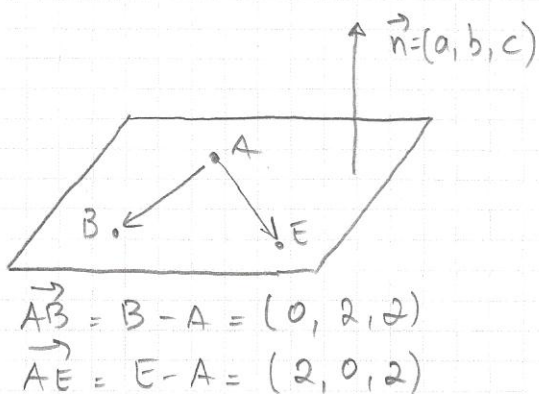
$$A(2, 0, 0) \rightarrow 2 + 0 - 0 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad \text{Prop. verdadeira.}$$

$$B(2, 2, 2) \rightarrow 2 + 2 - 2 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad \text{" "}$$

$$E(4, 0, 2) \rightarrow 4 + 0 - 2 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad \text{" "}$$

Portanto ABE: $x + y - z = 2$

OUTRA MANEIRA:



Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vector normal de ABE. Tem-se:

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \quad \wedge \quad \vec{n} \cdot \vec{AE} = 0$$

Assim:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AE} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 2, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 0, 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 2c = 0 \\ 2a + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = -2c \\ 2a = -2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -c \\ a = -c \end{cases}$$

Logo $\vec{n} = (-c, -c, c)$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Assim, fazendo $c = -1$ (por exemplo), vem: $\vec{n} = (1, 1, -1)$.

Logo ABE: $x + y - z + d = 0$. Como A $\in$ ABE, substituindo,

vem: $2 + 0 - 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$. Logo:

$$ABE: x + y - z - 2 = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 2$$

(ii) Intersecção de ABE com a recta R: $\frac{x-2}{3} = \frac{4-z}{4}$ $\wedge$ $y=2$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{4-z}{4} \\ y=2 \\ x+y-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-8 = 12-3z \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 20 - 3z \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - \frac{3}{4}z \\ y = 2 \\ 5 - \frac{3}{4}z + 2 - z = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ 20 - 3z + \cancel{8} - 4z = \cancel{8} \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

(4) (4) (4) (4)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ -7z = -20 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - \frac{3}{4} \times \frac{20}{7} \\ \text{---} \\ z = \frac{20}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{20}{7} \\ y = 2 \\ z = \frac{20}{7} \end{cases}$$

$$\therefore \left(\frac{20}{7}, 2, \frac{20}{7} \right)$$

b) i) O ponto T pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada de B. Logo $T(0, 2, 0)$.

O ponto Q pertence à recta R: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{4} \wedge y=2$.
pela alínea anterior verifica-se que a condição que define a recta R pode também ser dada por $x = 5 - \frac{3}{4}z \wedge y=2$.
portanto, as coordenadas de Q são da forma:

$$Q\left(5 - \frac{3}{4}z, 2, z\right)$$

ii) O triângulo $[TQF]$ é rectângulo em Q se $\vec{QT} \perp \vec{QF} \Leftrightarrow \vec{QT} \cdot \vec{QF} = 0$.

Tem-se:

$$\vec{QT} = T - Q = \left(\frac{3}{4}z - 5, 0, -z\right)$$

$$\vec{QF} = F - Q = \left(\frac{3}{4}z - 3, -2, 4 - z\right)$$

Assim:

$$\vec{QT} \cdot \vec{QF} = 0 \Leftrightarrow \left(5 - \frac{3}{4}z, 0, -z\right) \cdot \left(3 - \frac{3}{4}z, -2, 4-z\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(5 - \frac{3}{4}z\right)\left(3 - \frac{3}{4}z\right) + 0 \times (-2) - z(4-z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15 - \frac{15z}{4} - \frac{9z}{4} + \frac{9z^2}{16} - 4z + z^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{16}z^2 - 10z + 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 4 \quad \vee \quad z = \frac{12}{5}$$

↓
F.R.

Se $z = 4 \rightarrow Q\left(5 - \frac{3}{4} \times 4, 2, 4\right) = (2, 2, 4)$

Se $z = \frac{12}{5} \rightarrow Q\left(5 - \frac{3}{4} \times \frac{12}{5}, 2, \frac{12}{5}\right) = \left(\frac{16}{5}, 2, \frac{12}{5}\right)$

c) n.c.p: 7C_3

n.c.f: $2 \times {}^5C_3 - 4$

↓

os planos que contêm os pontos A, B, F, D e G e B, C, D, E e G são os únicos paralelos a Oy.

Contudo no plano que contém os pontos A, B, F, D e G as combinações DGB e FGA não formam um plano, pois D, G e B são colineares e F, G e A também o são. Da mesma forma no plano que contém os pontos B, C, D, E e G, as combinações DGB e EGC não formam um plano.

Logo a probabilidade pedida é $\frac{2 \times {}^5C_3 - 4}{{}^7C_3} = \frac{16}{35}$

EXERCÍCIO EXTRA:

$$\text{n.c.p.: } {}^{12}C_3 \times {}^9C_3 \times {}^6C_3$$

$$\begin{aligned} \text{n.c.f.: } {}^6C_3 \times {}^3C_3 \times {}^6C_3 \times {}^3C_3 \times \frac{4!}{2! \times 2!} &= \\ &= \left({}^6C_3\right)^2 \times \frac{4!}{2! \times 2!} \end{aligned}$$

Se nos casos favoráveis fizéssemos apenas ${}^6C_3 \times {}^6C_3$ estaríamos somente a contabilizar as permutações de compartimento entre grupos de pedras do mesmo tipo, não contando as permutações entre grupos de pedras de tipo diferentes (6C_3 , em cada caso representa todos os grupos de três pedras que é possível formar com seis pedras de um tipo. Por exemplo, se escolhermos as pedras A, B e C para um compartimento 1, num compartimento 2 ficam as pedras E, F e H. Se escolhermos para um compartimento 1 as pedras E, F e H, num compartimento 2, ficam as pedras A, B e C. Por tanto 6C_3 já inclui as permutações dos grupos de pedras do mesmo tipo pelos compartimentos). Assim, multiplicamos $\left({}^6C_3\right)^2$ por $\frac{4!}{2! \times 2!}$, que representa o nº de permutações entre os quatro grupos. (Dividimos por $2! \times 2!$ pois há dois grupos de Ametistas e dois grupos de Dolomitas e as permutações entre grupos do mesmo tipo já estão contabilizadas em $\left({}^6C_3\right)^2$).

$$\text{Logo, } P = \frac{\left({}^6C_3\right)^2 \times \frac{4!}{2! \times 2!}}{{}^{12}C_3 \times {}^9C_3 \times {}^6C_3} = \frac{1}{154}$$

OUTRO PROCESSO PARA DETERMINAR O N.º DE CASOS FAVORÁVEIS, "À MÃO"

Vamos designar por A, B, C, D, E e F as Ametistas e por G, H, I, J, K, L as Dolomitas e vamos começar por distribuir as Ametistas nos dois primeiros compartimentos

A B C	D E F	G H I	J K L
A B C	D E F	"	"
A B D	C E F	"	"
A B E	C D F	"	"
A B F	C D E	"	"
A C D	B E F	"	"
A C E	B D F	"	"
A C F	B D E	"	"
A D E	B C F	"	"
A D F	B C E	"	"
A E F	B C D	"	"

10 hipóteses (se permutarmos os dois grupos de Ametistas teríamos 20 hipóteses e $20 = {}^6C_3$)

Para cada uma destas maneiras as Dolomitas podem ser distribuídas nos dois compartimentos restantes, também de 10 maneiras distintas. Por exemplo, no caso em que nos dois primeiros compartimentos temos ABC e DEF, tem-se:

A B C	D E F	G H I	J K L
"	"	G H I	J K L
"	"	G H J	I K L
"	"	G H K	I J L
"	"	G H L	I J K
"	"	G I J	H K L
"	"	G I K	H J L
"	"	G I L	H J K
"	"	G J K	H I L
"	"	G J L	H I K
"	"	G K L	H I J

10 hipóteses

Falta agora permutar os quatro grupos pelos compartimentos, que pode ser feito de $4!$ maneiras distintas (nas contagens anteriores não efectuámos qualquer tipo de permutação, nem mesmo entre grupos de pedras do mesmo tipo). Logo, o n.º de casos favoráveis é $10 \times 10 \times 4! = ({}^6C_3)^2 \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 2400$.