



## PROPOSTA DE TESTE INTERMÉDIO N.º 1

## MATEMÁTICA A – 12.º ANO

"Pascal e Fermat criaram um mundo novo: submeteram o acaso à ordem, o arbitrário à lei."  
Bell

## GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. De um conjunto de sete homens e cinco mulheres pretendem-se escolher quatro pessoas para ocuparem quatro cargos distintos na administração de uma empresa. Sabe-se que todos têm as mesmas possibilidades de serem escolhidos. De quantas maneiras pode ser feita a escolha de modo que pelo menos três desses cargos sejam ocupados por mulheres?

[A]  $7 \times {}^5C_3 + {}^5C_4$

[B]  $7 \times 4 \times {}^5A_3$

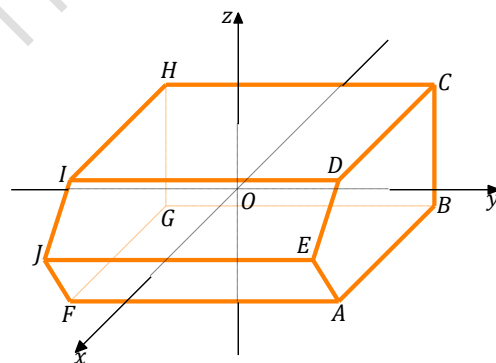
[C]  $7 \times {}^5C_3 \times 4! + {}^5A_4$

[D]  $7 \times {}^5A_3 + {}^5A_4$

2. Na figura está representado num referencial o.n.  $Oxyz$  um prisma pentagonal  $[ABCDEFGH]$ .

Sabe-se que:

- as bases pentagonais são paralelas ao plano  $xOz$ ;
- a face  $[BCHG]$  e o plano  $ADI$  são paralelos ao plano  $yOz$ ;
- as faces  $[ABGF]$  e  $[DCHI]$  são paralelas ao plano  $xOy$ .



Escolhendo ao acaso dois vértices deste prisma, qual é a probabilidade de serem extremos de uma aresta perpendicular ao eixo  $Oy$ ?

[A]  $\frac{2}{15}$

[B]  $\frac{2}{9}$

[C]  $\frac{4}{15}$

[D]  $\frac{4}{9}$

**Exercício extra:** Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso, três vértices do prisma. Qual é a probabilidade de definirem um plano paralelo ao eixo  $Oy$ ?

3. Seja  $S$  o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos possíveis ( $A \subset S$  e  $B \subset S$ ). Sabe-se que  $P(\bar{A} \cup B) = 0,9$ ;  $P(A \cup \bar{B}) = 0,6$  e  $P(B) = 3P(A)$ .

Qual é o valor de  $P(A)$ ?

[A] 0,15

[B] 0,20

[C] 0,25

[D] 0,30

4. Um dado cúbico equilibrado com as faces numeradas com os números 1, 1, 2, 2, 4, e 6 é lançado seis vezes. Considere os acontecimentos:

$A$ : «sair face numerada com um número par no máximo uma vez»

$B$ : «sair face numerada com um número par no máximo duas vezes»

Qual é o valor de  $P(A|B)$ ?

**A**  $\frac{13}{729}$

**B**  $\frac{12}{73}$

**C**  $\frac{13}{73}$

**D**  $\frac{72}{73}$

5. Considere uma variável aleatória  $X$  com distribuição normal. Sabe-se que  $P(X < a) = P(X > b) = 0,02275$ . Qual é o desvio padrão da variável aleatória  $X$ ?

**A**  $\frac{a+b}{4}$

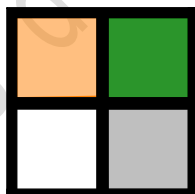
**B**  $\frac{b-a}{2}$

**C**  $\frac{a+b}{2}$

**D**  $\frac{b-a}{4}$

### GRUPO II – ÍTEMS DE RESPOSTA ABERTA

1. Na figura está a representação de uma caixa com quatro divisões. O Francisco trabalha numa empresa que fabrica jóias com pedras preciosas. No final de um dia de trabalho tem de arrumar na caixa, seis Ametistas e seis Dolomitas, de modo que fiquem exactamente três pedras em cada divisão. Admita que não existem duas pedras iguais.



1.1. De quantas maneiras pode o Francisco arrumar as pedras preciosas na caixa?

**Exercício Extra:** Admitindo que as arruma ao acaso, qual é a probabilidade de em cada divisão não ficarem pedras preciosas de tipos diferentes? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

1.2. Escolhendo, simultaneamente e ao acaso, sete das doze pedras, qual é a probabilidade de pelo menos cinco serem do mesmo tipo de pedra preciosa? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

1.3. No dia seguinte, o Francisco tem de fazer uma faixa de cabedal incrustada com as doze pedras preciosas que arrumou na caixa e com mais algumas Jades, todas distintas.

Suponha que as pedras irão ser colocadas numa só fila. Depois de fazer alguns cálculos, o Francisco determinou que o número de maneiras de colocar as pedras de modo que as Ametistas fiquem juntas e que as Jades também fiquem juntas é 696 729 600.

Quantas Jades serão colocadas na faixa de cabedal?

2. Considere duas caixas, A e B que contêm bolas pretas e brancas com a composição indicada na figura.



Considere um dado viciado com as faces numeradas de 1 a 6, tal que a probabilidade de sair face com o número 1 é o dobro de sair qualquer uma das outras faces.

**2.1.** Considere a experiência aleatória que consiste em lançar o dado e retirar uma bola de uma das caixas. Se sair face numerada com o número 1, retira-se uma bola da caixa A, caso contrário, retira-se uma bola da caixa B.

Depois de realizada a experiência, verificou-se que a bola extraída era preta. Qual é a probabilidade de ter sido retirada da caixa A? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

**2.2.** Considere a seguinte experiência aleatória:

Lança-se o dado. Se sair face numerada com o número 3 ou 5, retiram-se quatro bolas da caixa A, caso contrário, retiram-se cinco bolas da caixa B.

Sejam  $X$  e  $Y$  os acontecimentos:

$X$ : «sair um número ímpar no lançamento do dado»

$Y$ : «pelo menos três das bolas retiradas são brancas»

Sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada, indique, justificando, o valor de  $P(Y|\bar{X})$ . Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

**2.3.** Considere agora que foram acrescentadas algumas bolas encarnadas à caixa B. Extraíndo, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa B, a probabilidade de no máximo uma ser branca é  $\frac{19}{20}$ . Quantas bolas encarnadas foram acrescentadas à caixa B?

**Exercício extra:** Considere as caixas A e B com a sua composição inicial. Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa A e três bolas da caixa B. Qual é a probabilidade de exactamente duas das cinco bolas extraídas serem pretas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Seja  $S$  o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos independentes ( $A \subset S$  e  $B \subset S$ ). Seja  $a$  um número real positivo tal que:

$$P(A \cup B) = a, \quad P(\bar{A}|B) = a - \frac{2}{9} \quad \text{e} \quad P(B) = a - \frac{1}{18}$$

Qual é o valor de  $a$ ?

4. Numa caixa estão seis cartões numerados, três com o número 1, dois com o número 2 e um com o número 3. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, três cartões da caixa. A tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória  $X$ : «maior dos números retirados» é dada por:

| $x_i$        | 1                 | 2                                               | 3                                |
|--------------|-------------------|-------------------------------------------------|----------------------------------|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{3!}{6A_3}$ | $\frac{({}^3C_2 \times 2 + 3) \times 3!}{6A_3}$ | $\frac{{}^5C_2 \times 3!}{6A_3}$ |

Numa pequena composição, explique porquê. A composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace;
- uma explicação para os valores que a variável aleatória  $X$  pode tomar;
- uma explicação para cada uma das probabilidades, indicando o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, justificando devidamente.

#### Exercício extra (Geometria):

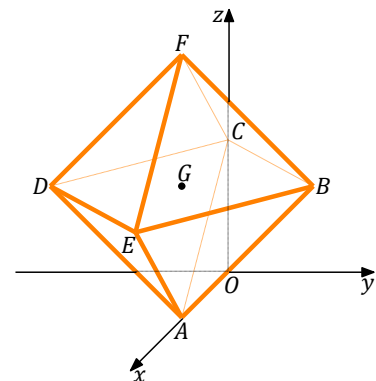
Na figura está representado, num referencial o.n.  $Oxyz$ , um octaedro.

Sabe-se que:

- o quadrado  $[ACFE]$  está contida no plano  $xOz$ ;
- o ponto  $A$  pertence ao eixo  $Ox$ ;
- o ponto  $C$  pertence ao eixo  $Oz$ ;
- os vértices do octaedro pertencem à superfície esférica de equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0$$

Seja  $r$  a recta definida pela condição  $\frac{x-2}{3} = \frac{4-z}{4} \wedge y = 2$



a) Mostre que uma equação cartesiana do plano  $ABE$  é  $x + y - z = 2$  e determine as coordenadas do ponto de intersecção do plano  $ABE$  com a recta  $r$ .

b) Sejam  $T$  um ponto pertencente ao eixo  $Oy$  com a mesma ordenada de  $B$  e  $Q$  um ponto que se desloca sobre a recta  $r$ . Quais são as coordenadas de  $Q$  de modo que o triângulo  $[TQF]$  seja rectângulo em  $Q$ ?

c) Considere os seis vértices do octaedro e o seu centro. Escolhendo, simultaneamente e ao acaso, três dos sete pontos, qual é a probabilidade de definirem um plano paralelo ao eixo  $Oy$ ? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

## SOLUCIONÁRIO

## GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. C

2. B

Exercício Extra:  $\frac{1}{3}$ 

3. A

4. C

5. D

## GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.1. 369 600

Exercício Extra:  $\frac{1}{154}$ 1.2.  $\frac{8}{33}$ 

1.3. Quatro Jades.

2.1.  $\approx 37\%$ 2.2.  $\frac{5}{14}$ 

2.3. Sete bolas encarnadas.

Exercício Extra:  $\frac{6}{35}$ 3.  $a = \frac{8}{9}$ 

Exercício Extra:

a)  $\left(\frac{20}{7}, 2, \frac{20}{7}\right)$ b)  $Q(2,2,4)$  ou  $Q\left(\frac{16}{5}, 2, \frac{12}{5}\right)$ c)  $\frac{16}{35}$