



PROPOSTA DE TESTE INTERMÉDIO N.º 2

MATEMÁTICA A – 12.º ANO

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

GRUPO I - ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Tem-se:

$$\frac{x^2}{C_x} - \frac{x^2+1}{C_{49-x}} = -\frac{x^2}{C_{x+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{C_x} + \frac{x^2}{C_{x+1}} = \frac{x^2+1}{C_{49-x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{C_{x+1}} = \frac{x^2+1}{C_{49-x}}$$

$$\downarrow$$

$${}^nC_p + {}^nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}, \quad n, p \in \mathbb{N}, \quad n \geq p$$

Assim, atendendo à regra da simetria, ${}^nC_p = {}^nC_{n-p}$,
 $n, p \in \mathbb{N}, \quad n \geq p$, vem:

$$x+1 = 49-x \quad \vee \quad x+1 = x^2+1 - (49-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 48 \quad \vee \quad x = x^2 - 49 + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 24 \quad \vee \quad x^2 = 49 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 24 \quad \vee \quad x = \pm \sqrt{49} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 24 \quad \vee \quad x = -7 \quad \vee \quad x = 7$$

x tem de ser positivo, pois, caso contrário, o número ${}^{x^2}C_x$ não existia. Logo a equação tem duas soluções, $x = 7$ e $x = 24$

Resposta: B

2. Vamos começar por escolher as posições para as quatro letras iguais. O n.º de maneiras de o fazer é 7C_4 .

Depois de escolhidas essas posições as mesmas podem ser ocupadas de nove maneiras distintas (com quebra A, ou quebra B, ..., ou quebra S)

As restantes três letras não podem ser iguais entre si, nem podem ser iguais à letra que se repete quatro vezes. Portanto, para as restantes três posições, estão disponíveis oito letras. Dessas escolhem-se, ordenadamente, três. O n.º de maneiras de o fazer é 8A_3 (ou ${}^8C_3 \times 3!$)

Finalmente as posições relativas aos algarismos podem ser ocupadas de cinco maneiras distintas, uma vez que os algarismos têm de ser todos iguais (três 0, ou três 3, ..., ou três 8)

Assim, o n.º pedido é ${}^7C_4 \times 9 \times {}^8A_3 \times 5 = 529\,200$

Resposta: C

EXERCÍCIO EXTRA:

a) n.º e. p.: $9^7 \times 5^3$

n.º c. f.: ${}^9A_7 \times 12^*$

logo, a probabilidade pedida é $\frac{{}^9A_7 \times 12}{9^7 \times 5^3} \approx 0,4\%$

*

9A_7 é o nº de maneiras de escolher, ordenadamente, sete letras entre as nove disponíveis.

12 → nº de maneiras de colocar três organismos cuja soma é 8:

0 3 5 → pode ocorrer de $3! = 6$ maneiras distintas
(035; 053; 350; 305; 530; 503)

0 4 4 → pode ocorrer de $\frac{3!}{2!} = 3$ maneiras distintas
(044; 404; 440)

0 0 8 → pode ocorrer de $\frac{3!}{2!} = 3$ maneiras distintas
(008; 080; 800)

b) O nº total de códigos em que as letras são vogais e os organismos são distintos é:

$$2^7 \times {}^5A_3 = 7680$$

Logo:

$$\text{n.º c. p.} \quad 7680 \times 7679$$

$$\text{n.º c. f.} \quad 7679 \times 1$$

↓
Talhar à
1.ª tentativa

↳ acenar à 2.ª tentativa

Logo, a probabilidade de perda é $\frac{7679 \times 1}{7680 \times 7679} = \frac{1}{7680}$

3.

NOTA PRÉVIA

Sejam S um espaço de resultados associado a uma experiência aleatória, $X \subset S$ e $Y \subset S$

Tem-se

$$\max \{P(X), P(Y)\} \leq P(X \cup Y) \leq \min \{P(X) + P(Y), 1\}$$

$$\max \{0, P(X) + P(Y) - 1\} \leq P(X \cap Y) \leq \min \{P(X), P(Y)\}$$

Tem-se:

$$P(A) = 0,4 \Leftrightarrow P(\bar{A}) = 0,6 \quad \text{e} \quad P(\bar{B}) = 0,2 \Leftrightarrow P(B) = 0,8$$

Assim, vem:

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{0,8}$$

$$\text{Como } 0,4 \leq P(\bar{A} \cap B) \leq 0,6, \text{ vem:}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \max \{0, P(\bar{A}) + P(B) - 1\} & & \min \{P(\bar{A}), P(B)\} \end{array}$$

$$0,4 \leq P(\bar{A} \cap B) \leq 0,6 \Leftrightarrow \frac{0,4}{0,8} \leq \frac{P(\bar{A} \cap B)}{0,8} \leq \frac{0,6}{0,8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,5 \leq P(\bar{A}|B) \leq 0,75$$

Portanto, das opções apresentadas, $P(\bar{A}|B)$ só pode ser 0,6

Resposta: B

4. Tem-se:

$$\bullet \quad P(1 < X \leq 3) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow P(X=2) + P(X=3) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2p} + \frac{6}{p^2} = \frac{5}{6} \quad \Leftrightarrow \frac{3p + 36}{6p^2} = \frac{5p^2}{6p^2} \quad \Leftrightarrow$$

(3p) (6) p² p > 0

$$\Leftrightarrow \frac{5p^2 - 3p - 36}{6p^2} = 0$$

Como $6p^2 > 0$ ($p > 0$) vem $5p^2 - 3p - 36 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow p = 3 \quad \vee \quad p = -\frac{12}{5}$$

Como $p > 0$, então $p = 3$. Logo $P(X=2) = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$

e $P(X=3) = \frac{6}{3^2} = \frac{2}{3}$

• Por outro lado:

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{n!} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{15}{n!} = 1 \Leftrightarrow$$

(6) (n!) (2n!) (6) (6n!)

$$\Leftrightarrow \frac{30 + n! + 4n! + 90}{6n!} = \frac{6n!}{6n!}$$

$$\Leftrightarrow 120 + 5n! = 6n! \Leftrightarrow n! = 120 \Leftrightarrow n = 5$$

↓
 $6n! > 0$

Logo, $P(X=1) = \frac{5}{5!} = \frac{1}{24}$ e $P(X=4) = \frac{15}{5!} = \frac{1}{8}$

Assim, o valor médio de v.a. X é:

$$\mu = 1 \times \frac{1}{24} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{2}{3} + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{23}{8}$$

Portanto, $n = 5$ e $\mu = \frac{23}{8}$

resposta: A

5. Tem-se:

$$\bullet \left(\frac{x^3}{y} - \sqrt[3]{y} \right)^n = \sum_{p=0}^n {}^nC_p \left(\frac{x^3}{y} \right)^{n-p} \cdot (-\sqrt[3]{y})^p$$

Portanto, os termos do desenvolvimento de $\left(\frac{x^3}{y} - \sqrt[3]{y} \right)^n$, com $y \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}_0$, são da forma:

$$\begin{aligned} {}^nC_p \left(\frac{x^3}{y} \right)^{n-p} \cdot (-\sqrt[3]{y})^p &= {}^nC_p \frac{x^{3n-3p}}{y^{n-p}} \cdot (-1)^p \cdot (y^{1/3})^p = \\ &= {}^nC_p (-1)^p x^{3n-3p} \cdot \frac{y^{p/3}}{y^{n-p}} = \\ &= {}^nC_p (-1)^p \cdot x^{3n-3p} \cdot y^{p/3 - n + p} = \\ &= {}^nC_p (-1)^p \cdot x^{3n-3p} \cdot y^{\frac{4p}{3} - n} \end{aligned}$$

Como um dos termos do desenvolvimento tem parte literal igual a $x^{30} y^{-8}$, vem:

$$\begin{cases} 3n - 3p = 30 \\ \frac{4p}{3} - n = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(\frac{4p}{3} + 8\right) - 3p = 30 \\ \frac{4p}{3} + 8 = n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4p + 24 - 3p = 30 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 6 \\ n = 8 + \frac{4 \times 6}{3} = 16 \end{cases}$$

portanto o desenvolvimento tem 17 termos. Desse nove têm coeficiente positivo ($p=0, p=2, p=4, \dots, p=16$) e oito têm coeficiente negativo ($p=1, p=3, \dots, p=15$).

- Para que o produto de três números seja negativo, dois deles têm de ser positivos e o outro negativo, ou os três têm de ser negativos.

Assim:

$$\text{n.º C.p.: } {}^{17}C_3$$

$$\text{n.º C.-f.: } {}^9C_2 \times {}^8C_1 + {}^8C_3$$

$$\text{A probabilidade pedida é } \frac{{}^9C_2 \times {}^8C_1 + {}^8C_3}{{}^{17}C_3} = \frac{43}{85}$$

Resposta: D

GRUPO II - ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.

1.1.

$$n.º \text{ c.p.} : {}^{14}C_2$$

$$n.º \text{ c.f.} : {}^{14}C_2 - \left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{n.º de} \\ \text{arestas}}}{25} + \underbrace{{}^7C_2 - 7 + 7 \times 2}_{\substack{\downarrow \\ \text{n.º de diagonais} \\ \text{da base [ABCDEFG]}}} \right)$$

n.º de diagonais das faces laterais

Logo, a probabilidade pedida é:

$$\frac{{}^{14}C_2 - (25 - {}^7C_2 - 7 + 7 \times 2)}{{}^{14}C_2} = \frac{38}{91}$$

1.2.

$$n.º \text{ c.p.} : {}^{14}C_3$$

$$n.º \text{ c.f.} : 3 \times {}^4C_3 + {}^7C_3 + {}^6C_3$$

$3 \times {}^4C_3 \rightarrow$ escolhem-se três dos quatro vértices que estão contidos nos planos BCJ (B, C, J e I); ADL (A, D, L e H); GFN (G, F, N e P). Planos perpendiculares a OZ

${}^7C_3 \rightarrow$ escolhem-se três dos sete vértices do plano que contém a base [ABCDEFG]. Plano perpendicular a OZ

${}^6C_3 \rightarrow$ escolhem-se três dos seis vértices contidos no plano IJL (H, I, J, L, M e N). Plano perpendicular a OZ.

Logo, a probabilidade pedida é:

$$\frac{3 \times {}^4C_3 + {}^7C_3 + {}^6C_3}{{}^{14}C_3} \approx 0,1841$$

1.3. A base $[ABCDEFGG]$ pode ser pintada ${}^3C_1 = 3$ maneiras distintas (das três cores disponíveis escolhe-se uma)

Para as sete faces laterais, perpendiculares a xOy , estão disponíveis quatro cores:

$$\overline{4} \quad \overline{4} \quad \overline{4} \quad \overline{4} \quad \overline{4} \quad \overline{4} \quad \overline{4} \rightarrow 4^7 = {}^4A_7$$

Como estas faces não podem ficar todas pintadas com a mesma cor, ao número 4A_7 temos de retirar o n.º de maneiras de pintar as sete faces todas com a mesma cor. O n.º de maneiras de o fazer é 4, que são os casos:

AAAAAAA $\rightarrow$ todas de amarelo

BBBBBBB $\rightarrow$ " " branco

VVVVVVV $\rightarrow$ " " verde

RRRRRRR $\rightarrow$ " " roxo

Finalmente, para as cinco faces laterais, oblíquas a xOy , escolhem-se, ordenadamente, cinco das dez cores disponíveis. O n.º de maneiras de o fazer é ${}^{10}A_5$.

Poranto, uma resposta a este problema é $3 \times ({}^4A_7 - 4) \times {}^{10}A_5$.

1.4. Vamos considerar a variável aleatória:

X : « n.º de pontos obtidos por Jogada »

Assim, $X = \{-1, 2, 6\}$. Logo:

$$P(X = -1) = \frac{{}^{12}C_3}{{}^{16}C_3} = \frac{11}{28}$$

$$P(X = 2) = \frac{{}^4C_1 \times {}^{12}C_2 + {}^4C_2 \times {}^{12}C_1}{{}^{16}C_3} = \frac{3}{5}$$

$$P(X = 6) = \frac{{}^4C_3}{{}^{16}C_3} = \frac{1}{140}$$

Quatro vogais:

A, E, I e O

Doze consoantes

B, C, D, F, G, H, J

L, M, N, P e Q

A distribuição de probabilidades da v.a. X é dada pela tabela:

x_i	-1	2	6
$P(X=x_i)$	$\frac{11}{28}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{140}$

Portanto, a pontuação média por jogada é:

$$\mu = -1 \times \frac{11}{28} + 2 \times \frac{3}{5} + 6 \times \frac{1}{140} = 0,85$$

ou seja, 0,85 pontos por jogada.

EXERCÍCIO EXTRA:

a) A intersecção dos planos QJL e CDL é a recta JL . Assim, a condição que define a recta JL pode ser obtida pelo sistema formado pela equações dos dois planos:

$$\begin{cases} 2x + 8y + 15z = 82 \\ x + 4y - 26 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(26 - 4y) + 8y + 15z = 82 \\ x = 26 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 52 - 8y + 8y + 15z = 82 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15z = 30 \\ x - 26 = -4y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ 26 - x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ \frac{26 - x}{4} = y \end{cases}$$

$$\therefore JL: \frac{26 - x}{4} = y \quad \wedge \quad z = 2$$

b)

• O ponto Q pertence ao plano xOz e tem abscissa -4 .

Logo as suas coordenadas são do tipo $Q(-4, 0, z)$. Como

Q pertence ao plano $QJL: 2x + 8y + 15z = 82$, substituindo, vem:

$$2x(-4) + 8 \times 0 + 15z = 82 \Leftrightarrow 15z = 90 \Leftrightarrow z = 6$$

$$\therefore Q(-4, 0, 6)$$

- Um vector director da recta JL: $\frac{26-x}{4} = y \wedge z=2$ pode ser $\vec{R} = (-4, 1, 0)$

NOTA: Sem ser directamente, as coordenadas de um vector director da recta JL poderão ser obtidas da seguinte forma:

$$\frac{26-x}{4} = y \wedge z=2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{26-x}{4} = y \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\text{Fazendo } y=0 \rightarrow \begin{cases} \frac{26-x}{4} = 0 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=26 \\ z=2 \end{cases}$$

(por exemplo)

$\therefore$ O ponto S(26, 0, 2) pertence à recta JL

$$\text{Fazendo } y=1 \rightarrow \begin{cases} \frac{26-x}{4} = 1 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26-x=4 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=22 \\ z=2 \end{cases}$$

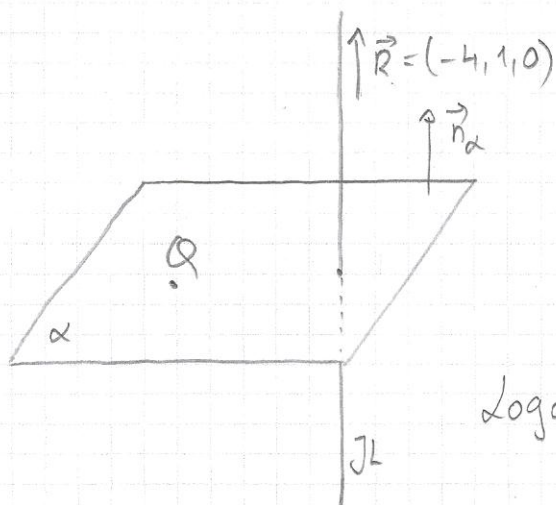
(por exemplo)

$\therefore$ O ponto T(22, 1, 2) pertence à recta JL

Logo, um vector director de JL pode ser:

$$\vec{ST} = T - S = (22, 1, 2) - (26, 0, 2) = (-4, 1, 0)$$

- Seja α o plano, perpendicular a JL que contém o ponto Q.



Assim, um vector normal do plano α pode ser:

$$\vec{n}_{\alpha} = \vec{R} = (-4, 1, 0)$$

Logo, $\alpha: -4x + 1y + 0z + d = 0$

Como $Q \in \alpha$, vem: $-4 \times (-4) + 1 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -16$

$$\therefore \alpha: -4x + y - 16 = 0 \Leftrightarrow -4x + y = 16$$

c)

- R é o ponto de intersecção do plano $xOz: y=0$ com a recta JL. Assim:

$$\begin{cases} y=0 \\ \frac{26-x}{4} = y \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \frac{26-x}{4} = 0 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ 26-x=0 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=26 \\ z=2 \end{cases}$$

Logo, $R(26, 0, 2)$

OUTRA MANEIRA: Como R pertence ao plano xOz , as suas coordenadas são da forma $(x, 0, z)$. Como R também pertence a JL, substituindo, vem:

$$\frac{26-x}{4} = 0 \quad \wedge \quad z=2 \quad \Leftrightarrow \quad x=26 \quad \wedge \quad z=2$$

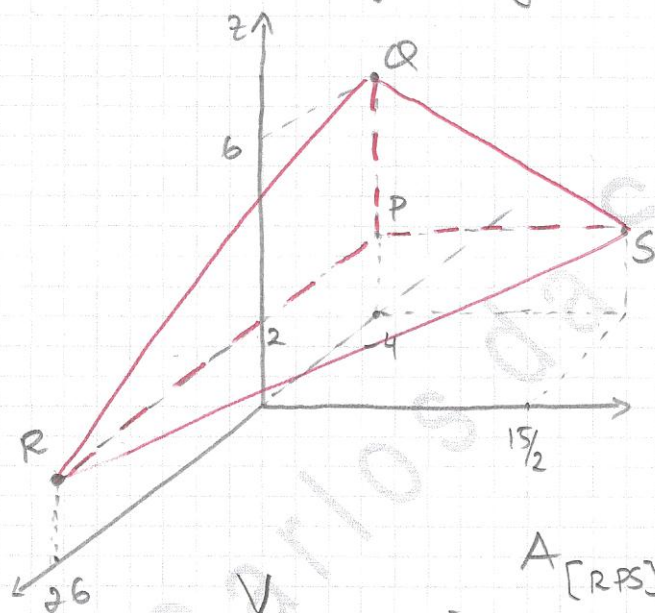
$$\therefore R(26, 0, 2)$$

- S é o ponto de intersecção do plano QGF: $x = -4$ com a recta JL. Assim:

$$\begin{cases} x = -4 \\ \frac{26-x}{4} = y \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{26+4}{4} = y \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = \frac{15}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

Logo, $S(-4, \frac{15}{2}, 2)$

- Observe a figura seguinte (não está à escala)



$$\overline{PS} = \frac{15}{2}$$

$$\overline{PR} = 30$$

$$\overline{QP} = 4$$

$$V_{[RPSQ]} = \frac{A_{[RPS]} \times \overline{QP}}{3} = \frac{\frac{\overline{RP} \times \overline{PS}}{2} \times 4}{3} =$$

$$= \frac{2 \overline{RP} \times \overline{PS}}{3} = \frac{2 \times \frac{15}{2} \times 30}{3} =$$

$$= \frac{450}{3} = 150$$

d) Tem-se:

$$\vec{HQ} = \vec{HP} + \vec{PQ} \quad \text{e} \quad \vec{QF} = \vec{QG} + \vec{GF}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \vec{HQ} \cdot \vec{QF} &= (\vec{HP} + \vec{PQ}) \cdot (\vec{QG} + \vec{GF}) = \\ &= \underbrace{\vec{HP} \cdot \vec{QG}}_0 + \underbrace{\vec{HP} \cdot \vec{GF}}_0 + \vec{PQ} \cdot \vec{QG} + \underbrace{\vec{PQ} \cdot \vec{GF}}_0 = \\ &\quad \vec{HP} \perp \vec{QG} \quad \vec{HP} \perp \vec{GF} \quad \vec{PQ} \perp \vec{GF} \\ &= \vec{PQ} \cdot \vec{QG} = \|\vec{PQ}\| \times \|\vec{QG}\| \times \cos(180^\circ) = \\ &\quad \text{colineares com sentido oposto} \\ &= 4 \times 6 \times (-1) = -24 \end{aligned}$$

2. Tem-se

$$P((A \cup B) | (A \cup \bar{B})) = \frac{P(A)}{P(B)(1+P(A))} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P((A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}))}{P(A \cup \bar{B})} = \frac{P(A)}{P(B)(1+P(A))} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A \cup \overbrace{(B \cap \bar{B})}^{\phi})}{P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B})} = \frac{P(A)}{P(B)(1+P(A))} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(\overbrace{A \cup \phi}^A)}{P(A) + P(\bar{B}) - P(A) + P(A \cap B)} = \frac{P(A)}{P(B)(1+P(A))} \Leftrightarrow$$

i)

$$\Leftrightarrow \frac{P(A)}{P(B) + P(A \cap B)} = \frac{P(A)}{P(B)(1 + P(A))} \Leftrightarrow$$

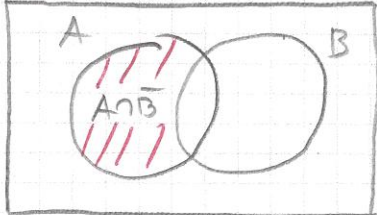
$$\Leftrightarrow P(B)(1 + P(A)) = P(\bar{B}) + P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\downarrow$$

$$P(A) > 0$$

$$\Leftrightarrow P(B) + P(A) \times P(B) = P(\bar{B}) + P(A \cap B) \quad (1)$$

c) A, B, C, S



$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$(\Rightarrow)$ Se A e B são independentes, então

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Portanto a equação (1) fica:

$$P(B) + P(A) \times P(B) = P(\bar{B}) + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) = P(\bar{B})$$

ou seja, B e $\bar{B}$ são equiprováveis.

$(\Leftarrow)$ Se B e $\bar{B}$ são equiprováveis, então $P(B) = P(\bar{B})$. Portanto a equação (1) fica:

$$P(B) + P(A) \times P(B) = P(\bar{B}) + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

ou seja, A e B são independentes.

$\therefore A$ e B são independentes se e só se B e $\bar{B}$ são equiprováveis.

$(\Leftrightarrow)$

3.

3.1. Consideremos os acontecimentos:

F: « o amigo escolhido é mulher »

M/E « o amigo escolhido é licenciado em ~~Técnica~~ / Engenharia »

Do enunciado, tem-se:

$$P(M|F) = 0,4 \Leftrightarrow \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = 0,4 \Leftrightarrow P(M \cap F) = 0,4 P(F)$$

$$P(M|\bar{F}) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{P(M \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = 0,6 \Leftrightarrow P(M \cap \bar{F}) = 0,6 P(\bar{F})$$

$$P(F) = \frac{1}{2} P(M) \Leftrightarrow P(M) = 2P(F)$$

Construindo uma tabela, vem:

	F	$\bar{F}$	P.m.
M	$0,4 P(F)$	$0,6 P(F)$	$2P(F)$
E			
P.m.			

$$\text{Logo, } P(M) = P(M \cap F) + P(M \cap \bar{F}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2P(F) = 0,4 P(F) + 0,6 P(\bar{F}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,6 P(F) = 0,6 (1 - P(F)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,6 P(F) = 0,6 - 0,6 P(F) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2,2 P(F) = 0,6 \Leftrightarrow P(F) = \frac{0,6}{2,2} = \frac{3}{11}$$

3.2. Da alínea anterior, tem-se:

$$\bullet P(M \cap F) = 0,4 P(F) = 0,4 \times \frac{3}{11} = \frac{6}{55}$$

$$\bullet P(M \cap \bar{F}) = 0,6 \times P(\bar{F}) = 0,6 \times \frac{8}{11} = \frac{24}{55}$$

$$\bullet P(M) = 2 P(F) = 2 \times \frac{3}{11} = \frac{6}{11}$$

Preenchendo o resto da tabela, vem:

	F	$\bar{F}$	p.m.
M	$\frac{6}{55}$	$\frac{24}{55}$	$\frac{6}{11}$
$\bar{E}$	$\frac{9}{55}$	$\frac{16}{55}$	$\frac{5}{11}$
p.m.	$\frac{3}{11}$	$\frac{8}{11}$	1

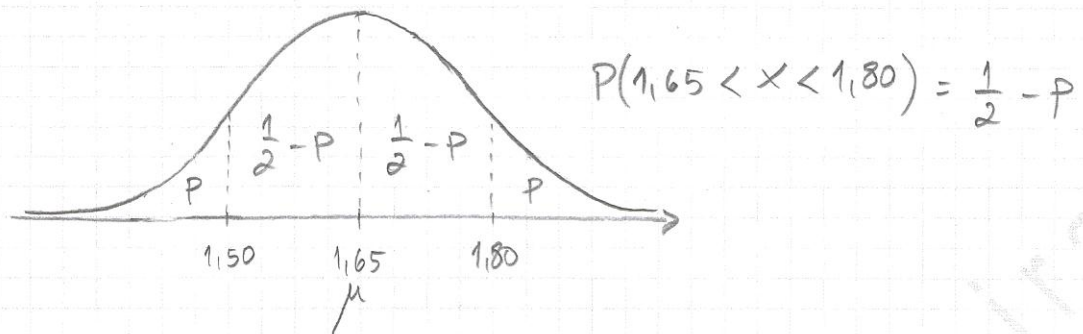
$$P(E \cap F) = P(F) - P(M \cap F) = \frac{3}{11} - \frac{6}{55} = \frac{9}{55}$$

$$P(E \cap \bar{F}) = P(\bar{F}) - P(M \cap \bar{F}) = \frac{8}{11} - \frac{24}{55} = \frac{16}{55}$$

$$\text{Logo, } P(\bar{F} | E) = \frac{P(\bar{F} \cap E)}{P(E)} =$$

$$= \frac{\frac{16}{55}}{\frac{5}{11}} = \frac{16 \times 11}{5 \times 55} = \frac{16}{25} = 64\%$$

4. Considere a seguinte figura:



Seja Y a variável aleatória:

Y : «n.º de alunos da escola, numa amostra de seis, que têm uma altura compreendida entre 1,65 e 1,80 metros»

Tem-se que Y é uma v.a. com distribuição binomial de parâmetros $n=6$ e probabilidade de ocorrer sucesso igual a $\frac{1}{2} - p$, isto é, $Y \sim \text{Bin}(6, \frac{1}{2} - p)$

Assim, tem-se:

$$P(Y=3) = 0,27648 \Leftrightarrow \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2} - p\right)^3 \left(1 - \left(\frac{1}{2} - p\right)\right)^3 = 0,27648 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 \left(\frac{1}{2} - p\right)^3 \left(\frac{1}{2} + p\right)^3 = 0,27648 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{1}{2} - p\right)\left(\frac{1}{2} + p\right)\right]^3 = \frac{0,27648}{20} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} - p^2\right)^3 = 0,013824 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} - p^2 = \sqrt[3]{0,013824} \Leftrightarrow \frac{1}{4} - p^2 = 0,24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} - 0,24 = p^2 \Leftrightarrow p^2 = 0,01 \Leftrightarrow p = \pm \sqrt{0,01}$$

Como $p > 0$, vem $p = \sqrt{0,01} = 0,1$