



PROPOSTA DE TESTE INTERMÉDIO N.º 2

MATEMÁTICA A – 12.º ANO

"O Binómio de Newton é tão belo como a Vénus de Milo. O que há é pouca gente a dar por isso."

Álvaro de Campos

GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Seja x um número real. Quantas soluções tem a equação ${}^{x^2}C_x - {}^{x^2+1}C_{49-x} = -{}^{x^2}C_{x+1}$?

A uma

B duas

C três

D quatro

2. Um código de acesso às instalações de uma fábrica é constituído por três letras, seguidas de três algarismos que são seguidos de mais quatro letras.

Suponha que o código só admite as letras do conjunto $X = \{A, B, E, F, H, L, M, R, S\}$ e os algarismos do conjunto $Y = \{0, 3, 4, 5, 8\}$. Um exemplo de código é **ABB – 444 – FFML**.

Alguns destes códigos satisfazem as seguintes condições:

- têm exactamente quatro letras iguais e não têm mais letras repetidas;
- os algarismos são todos iguais.

Quantos são estes códigos?

A 15 120

B 378 000

C 529 200

D 13 230 000

Exercício extra:

a) Escolhendo ao acaso um destes códigos, qual é a probabilidade de ter as letras todas distintas e a soma dos algarismos ser 8? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às décimas.

b) Um dos funcionários da empresa tem apenas a informação que as letras do código são vogais e que os algarismos são distintos. Qual é a probabilidade de aceder às instalações da empresa à segunda tentativa. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabe-se que $P(A) = 0,4$ e $P(\bar{B}) = 0,2$. Qual pode ser o valor de $P(\bar{A}|B)$?

A 0,4

B 0,6

C 0,8

D 0,9

4. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{n!}$	$\frac{1}{2p}$	$\frac{6}{p^2}$	$\frac{15}{n!}$

(n e p designam números reais positivos)

Sabe-se que $P(1 < X \leq 3) = \frac{5}{6}$. O valor de n e o valor médio da variável aleatória X são, respectivamente:

- A** $5e^{\frac{23}{8}}$ **B** $4e^{\frac{25}{8}}$ **C** $5e^{\frac{25}{8}}$ **D** $4e^{\frac{23}{8}}$

5. Considere o desenvolvimento de $\left(\frac{x^3}{y} - \sqrt[3]{y}\right)^n$, com $y \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}_0$. Um dos termos deste desenvolvimento tem parte literal igual a $x^{30}y^{-8}$.

Escolhendo, simultaneamente e ao acaso, três dos termos deste desenvolvimento, qual é a probabilidade do produto dos seus coeficientes ser negativo?

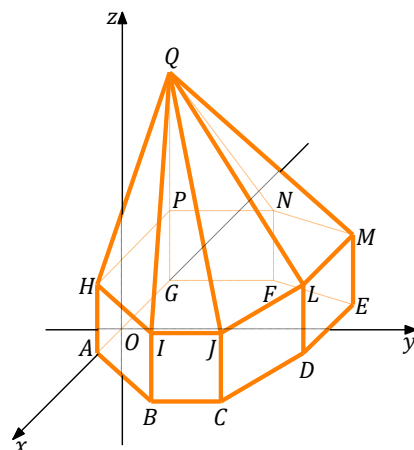
- A** $\frac{42}{85}$ **B** $\frac{80}{161}$ **C** $\frac{81}{161}$ **D** $\frac{43}{85}$

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ um sólido $[ABCDEFGH IJLMNPQ]$. O sólido é constituído por um prisma heptagonal e por uma pirâmide heptagonal. O polígono $[HIJLMNP]$ é simultaneamente base do prisma e da pirâmide.

Sabe-se que:

- a face $[AGQH]$ está contida no plano xOz ;
- a face $[DEML]$ é paralela ao plano xOz ;
- as faces $[FNQG]$ e $[BCJI]$ são paralelas ao plano yOz ;
- Os pontos A, D, L e H têm a mesma abscissa;
- Os pontos B, F, N e I têm a mesma ordenada;
- A base $[ABCDEFGH]$ está contida no plano xOy .



1.1. Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso dois vértices do sólido. Qual é a probabilidade de definirem uma diagonal espacial do sólido? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

1.2. Escolhendo, simultaneamente e ao acaso três vértices do sólido, qual é a probabilidade de definirem um plano perpendicular a Ox ou perpendicular a Oz ? Apresente o resultado na forma dízima com quatro casas decimais.

1.3. Dispõe-se de dez cores (amarelo, azul, encarnado, preto, branco, verde, roxo, laranja, rosa e castanho) para colorir o sólido. Pretende-se que sejam respeitadas as seguintes condições:

- cada face é pintada de uma só cor;
- a base $[ABCDEFGH]$ só pode ser pintada de preto, branco ou azul;
- cada uma das sete faces do sólido, perpendiculares a xOy , é pintada de amarelo, branco, verde ou roxo, não podendo serem pintadas todas com a mesma cor;
- duas faces laterais do sólido, oblíquas a xOy , não podem ser pintadas com a mesma cor.

De quantas maneiras diferentes pode ser pintado o sólido?

Uma resposta a este problema é $3 \times ({}^4A'_7 - 4) \times {}^{10}A_5$. Numa pequena composição explique porquê.

1.4. Considere o seguinte jogo:

- um jogador, escolhe, simultaneamente e ao acaso, três dos 16 pontos marcados na figura (incluído a origem);
- se os três vértices escolhidos estiverem marcados com uma vogal, o jogador ganha 6 pontos;
- se entre os três vértices escolhidos apenas um ou apenas dois estiverem marcados com uma vogal, o jogador ganha 2 pontos;
- se entre os três vértices escolhidos nenhum estiver marcado com uma vogal, o jogador perde 1 ponto.

Qual é a pontuação média por cada jogada?

Exercício Extra: Considere a figura anterior nas mesmas condições do enunciado e considere ainda que:

- o ponto Q pertence ao plano xOz e tem abcissa -4 ;
- uma equação que define o plano QJL é $2x + 8y + 15z = 82$;
- uma equação que define o plano CDL é $x + 4y - 26 = 0$.

a) Mostre que uma condição que define a recta JL é $\frac{26-x}{4} = y \wedge z = 2$.

b) Escreva uma equação do plano perpendicular à recta JL que contém o ponto Q .

c) Sejam R e S os pontos de intersecção da recta JL com os planos xOz e QGF , respectivamente. Determine o volume da pirâmide $[RPSQ]$.

d) Mostre que $\overrightarrow{HQ} \cdot \overrightarrow{QF} = -24$.

2. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$), tal que $P((A \cup B) | (A \cup \bar{B})) = \frac{P(A)}{P(B) \times (1 + P(A))}$.

Mostre que A e B são acontecimentos independentes se e só se B e $\bar{B}$ forem equiprováveis.

3. Num grupo de amigos, todos licenciados em Matemática ou em Engenharia, sabe-se que:

- 40% das mulheres e $\frac{3}{5}$ dos homens são licenciados em Matemática;
- o número de mulheres é metade do número de amigos licenciados em Matemática.

Escolhe-se ao acaso um destes amigos.

3.1. Qual é a probabilidade de ser mulher? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3.2. Qual é a probabilidade de ser homem, sabendo que é licenciado em Engenharia? Apresente o resultado na forma de percentagem.

4. Numa escola a variável aleatória X : «altura dos alunos da escola» segue uma distribuição normal de valor médio 1,65 metros. Sabe-se que $P(X < 1,50) = p$, com $p \in \mathbb{R}$.

Sabendo que numa amostra de seis alunos dessa escola, a probabilidade de exactamente três terem altura entre 1,65 metros e 1,80 metros é 27,648%, determine o valor de p . Apresente o resultado na forma de dízima.

SOLUCIONÁRIO

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. B 2. C Exercício Extra: a) $\approx 0,4\%$ b) $\frac{1}{7680}$ 3. B 4. A 5. D

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.1. $\frac{38}{91}$ 1.2. $\approx 0,1841$ 1.4. 0,85 pontos por jogada.

Exercício Extra:

b) $-4x + y = 16$ c) 150

3.1. $\frac{3}{11}$ 3.2. 64%

4. 0,1