



PROPOSTA DE TESTE INTERMÉDIO N.º 4

MATEMÁTICA A – 12.º ANO

“Conhece a Matemática e dominarás o Mundo.”
Galileu Galilei

GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Um grupo de dez pessoas vai ser dividido em dois grupos, um de quatro pessoas e outro de seis pessoas. O grupo de seis pessoas irá desempenhar tarefas diferenciadas ao contrário do grupo de quatro pessoas que irá desempenhar tarefas indiferenciadas.

De quantas maneiras distintas se podem formar os dois grupos?

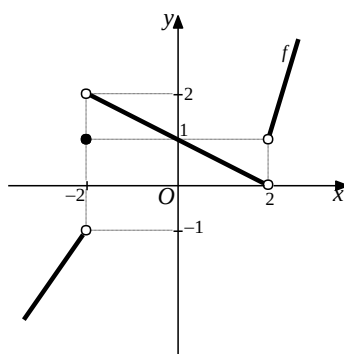
- [A] 210 [B] 5040 [C] 151200 [D] 3628800

Exercício Extra: Suponha agora que o grupo vai ser dividido em dois grupos de cinco pessoas, ambos com tarefas indiferenciadas. De quantas maneiras distintas se podem formar os dois grupos?

2. Sejam a, b, c três números reais positivos tais que $\log_a(b^2) = c$. A expressão $\log_a b + \log_b(a^2) - \log_{\sqrt[3]{a}}(b^3)$ igual a:

- [A] $\frac{(2-2c)(2+2c)}{c}$ [B] $\frac{(2-2c)^2}{c}$ [C] $\frac{(2-c)(2+c)}{c}$ [D] $\frac{(2-c)^2}{c}$

3. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy , parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.



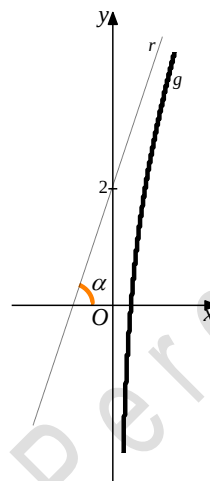
Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{15}}$. Qual é o valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(-u_n - 2)$?

- [A] -1 [B] 0 [C] 1 [D] 2

4. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy , parte do gráfico de uma função g de domínio $\mathbb{R}^+$ e uma recta r , assíntota do gráfico de g .

Sabe-se que:

- α é a inclinação da recta r , com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$;
- a recta r intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 2)$.



Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{g(x)} - x \right)$?

A -6

B $-\frac{2}{3}$

C $\frac{2}{3}$

D 6

5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, do tipo $f(x) = ax^2 + ax$ cujo gráfico tem a concavidade voltada para cima. Considere a função h , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = e^{-x} \times f(x)$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $[0, 3]$.

B O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $[0, 2]$.

C O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0]$ e em $[3, +\infty[$.

D O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$.

GRUPO II – ÍTEMS DE RESPOSTA ABERTA

1. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela:

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$P(A)$	$P(B)$	$P(A B)$

Sabendo que A e B dois acontecimentos contidos num espaço de resultados S , associado a uma experiência aleatória tais que $0 < P(A) < P(B)$, $P(A \cap B) = 0,09$ e $P(\bar{A}) = 3P(A)$, qual é o valor de $P(B)$?

2. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{2e^{0,5-0,5x}}{x-2} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

2.1. Mostre que $f'(1) = -1$ e escreva uma equação vectorial da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

2.2. Seja $g(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x}$. Mostre que $(f \circ g)'(-1) = -\frac{1}{3}$

2.3. Estude a função f quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

2.4. Determine $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e conclua sobre a existência de assíntota horizontal do gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$.

3. Seja g , a função de domínio $[-2\pi, +\infty[$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \sin x + \cos(2x) & \text{se } -2\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{x^3 + 3x}{e - e^{ax+1}} & \text{se } x > 0 \end{cases}, \text{ com } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

3.1. Determine a de modo que a função g seja contínua em todo o seu domínio.

3.2. Determine, no intervalo $[-2\pi, 0]$, os zeros da função g .

3.3. Seja $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Sabendo que $\operatorname{tg}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$, determine $g(\theta - \pi)$.

4. Considere a função h , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $h(x) = x^3 - 6 \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

4.1. Estude a função h , quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

4.2. Mostre que o gráfico de h e a bissectriz dos quadrantes pares se intersectam pelo menos uma vez no intervalo $]0, 2]$.

4.3. Considere a recta r definida por $2y - x = 4$. A recta r intersecta o gráfico de h em três pontos A , B e C , sendo que A tem a menor abscissa e C tem a maior abscissa.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine a área do triângulo $[AOC]$.

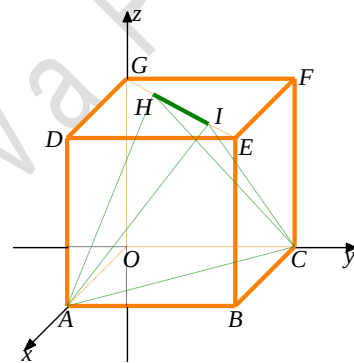
Na sua resposta deve:

- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema;
- representar o triângulo $[AOC]$;
- indicar as coordenadas dos pontos A e C , arredondadas às milésimas;
- indicar a área do triângulo $[AOC]$, arredondada às décimas.

5. Na figura estão representados, num referencial $Oxyz$, um cubo $[OABCDEFG]$ e um tetraedro não regular $[ACHI]$.

Sabe-se que:

- os vértices A , C e G pertencem aos eixos, Ox , Oy e Oz , respectivamente;
- os vértices H e I pertencem à diagonal facial $[EG]$;
- $\overline{OA} = 4$ e $\overline{GH} = \overline{IE} = \sqrt{2}$



5.1. Escreva uma equação cartesiana do plano ACI .

5.2. Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso, quatro dos dez vértices assinalados. Qual é a probabilidade de apenas dois serem vértices do cubo?