

**EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A****PROVA MODELO N.º 1****12.º ANO DE ESCOLARIDADE**Site: <http://recursos-para-matematica.webnode.pt/>Facebook: <https://www.facebook.com/recursos.para.matematica>**GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA**

1. Uma empresa tem 1501 trabalhadores divididos em três turnos, o 1.º turno tem 500 trabalhadores, o 2.º tem também 500 trabalhadores e o 3.º tem 501 trabalhadores. O director da empresa pretende escolher alguns trabalhadores de um mesmo turno para representarem a empresa num evento. Para tal ou escolhe 100 trabalhadores do 1.º turno, ou 101 trabalhadores do 2.º, ou 102 trabalhadores do 3.º. De quantas maneiras o pode fazer?

**A**  ${}^{501}C_{101}$

**B**  ${}^{502}C_{101}$

**C**  ${}^{501}C_{102}$

**D**  ${}^{502}C_{102}$

2. Seja  $S$  o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três acontecimentos possíveis ( $A \subset S$ ,  $B \subset S$  e  $C \subset S$ ). Sabe-se que,  $A$ ,  $B$  e  $C$  são independentes e são independentes dois a dois, que  $P(A \cup B) = 2P(C)$  e que  $P(A) = P(B) = a$ , com  $0 < a < 1$ . Qual é o valor de  $P(C|(A \cup B))$ ?

**A**  $a - a^2$

**B**  $a - 0,5a^2$

**C**  $2a - a^2$

**D**  $0,5a - 0,5a^2$

**Nota:** Diz-se que os acontecimentos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são independentes se  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$ . Diz-se que os acontecimentos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são independentes dois a dois se  $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$ ,  $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ , com  $i \neq j$ .

3. Considere um dado tetraédrico viciado, com as faces numeradas de 1 a 4. As probabilidades dos acontecimentos elementares estão apresentadas na tabela:

| Acontecimentos Elementares | 1                | 2                  | 3                  | 4                  |
|----------------------------|------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Probabilidades             | $\frac{n}{nC_2}$ | $\frac{n-1}{nC_2}$ | $\frac{n-2}{nC_2}$ | $\frac{n-4}{nC_2}$ |

$n \in \mathbb{N}$

Lançam-se este dado quatro vezes e considere-se a face que fica voltada para baixo. Qual é a probabilidade, arredondada às centésimas, de sair a face numerada com 2, no máximo duas vezes?

**A** 0,93

**B** 0,67

**C** 0,25

**D** 0,09

4. Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $x, y \in \mathbb{R}^+$  tal que  $a = \log_2 x$  e  $b = \log_4 y$ . A que é igual a expressão  $\log_{64} \left( \frac{x^5}{(xy)^2} \right)$ ?

**A**  $\frac{3a-2b}{6}$

**B**  $\frac{a-4b}{6}$

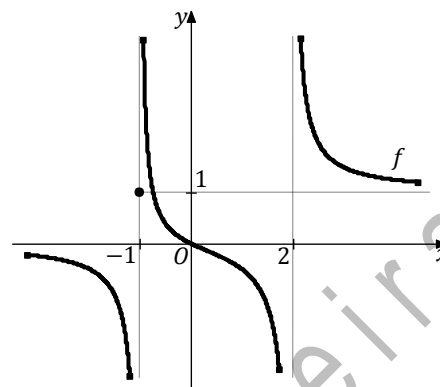
**C**  $\frac{3a-4b}{6}$

**D**  $\frac{4a-3b}{6}$

5. Na figura está representado parte do gráfico de uma função  $f$  de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

Sabe-se que:

- $f(-1) = 1$
- as rectas de equação  $x = -1$ ,  $x = 2$  e  $y = 0$  são assíntotas do gráfico de  $f$ .



Seja  $(x_n)$  uma sucessão tal que  $x_n \rightarrow 2$  e  $-1 < x_n < 2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

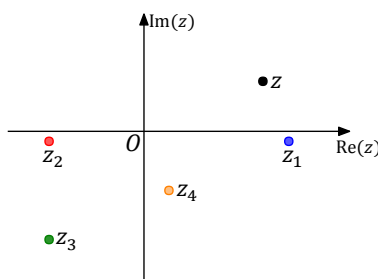
Qual é o valor de  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(2 - e^{-\frac{1}{2-x_n}}\right)$ ?

- A**  $-\infty$       **B**  $0$       **C**  $1$       **D**  $+\infty$

6. Sejam  $f$ ,  $g$  e  $h$  três funções de domínio  $\mathbb{R}$ , tal que o contradomínio de  $f$  é  $]0,1[$ , a função  $g$  é definida por  $g(x) = e^{x^3-2x^2+x}$  e a segunda derivada de  $h$  é definida por  $h''(x) = \ln(f(x)) \times g'(x)$ . Qual das afirmações é verdadeira?

- A** O gráfico de  $h$  tem a concavidade voltada para baixo em  $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ .
- B** O gráfico de  $h$  tem a concavidade voltada para cima em  $\left[0, \frac{4}{3}\right]$ .
- C** O gráfico de  $h$  tem a concavidade voltada para baixo em  $]-\infty, \frac{1}{3}[$  e em  $[1, +\infty[$ .
- D** O gráfico de  $h$  tem a concavidade voltada para cima em  $]-\infty, 0]$  e em  $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right]$ .

7. Na figura estão representados, no plano complexo, as imagens geométricas dos números complexos  $z$ ,  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  e  $z_4$ .



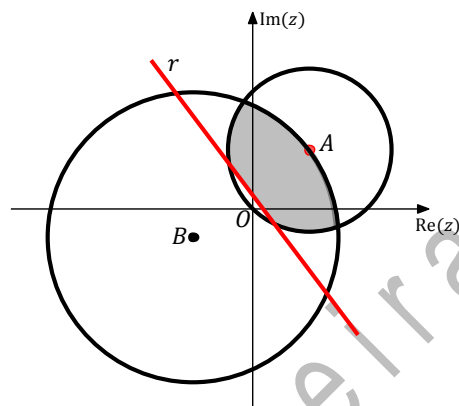
Sabendo que  $|z| = 2$ , qual deles pode ser igual a  $\frac{8}{z^3} - \bar{z}$ ?

- A**  $z_1$       **B**  $z_2$       **C**  $z_3$       **D**  $z_4$

8. Considere a figura a sombreado, representada no plano complexo.

Sabe-se que

- o ponto  $A$  é a imagem geométrica de uma das raízes cúbicas do número complexo  $16\sqrt{2}\text{cis}\frac{3\pi}{4}$ .
- o ponto  $B$  é a imagem geométrica do número complexo  $-2 - i$ .
- uma das circunferências está centrada em  $A$  e contém a origem, e a outra está centrada em  $B$  e contém o ponto  $A$ .
- a recta  $r$  é a mediatriz do segmento de recta  $[AB]$ .



Qual das condições define a região sombreada da figura?

- A**  $|z - 2 - 2i| \leq 2\sqrt{2} \wedge |z + 2 + i| \leq 5 \wedge |z - 2 - 2i| \geq |z + 2 + i|$
- B**  $|z - 1 - i| \leq \sqrt{2} \wedge |z + 2 + i| \leq \sqrt{13} \wedge |z - 1 - i| \leq |z + 2 + i|$
- C**  $|z - 1 - i| \leq \sqrt{2} \wedge |z + 2 + i| \leq \sqrt{13} \wedge |z - 1 - i| \geq |z + 2 + i|$
- D**  $|z - 2 - 2i| \leq 2\sqrt{2} \wedge |z + 2 + i| \leq 5 \wedge |z - 2 - 2i| \leq |z + 2 + i|$

#### GRUPO II – ÍTEMS DE RESPOSTA ABERTA

1. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere os números  $z_1 = 2\text{cis}\frac{5\pi}{12}$  e  $z_2 = \frac{-4i^{37}}{1+i} - \frac{1}{i} - i$ .

1.1. Mostre que  $z_2 = 2\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}$  e determine o menor natural  $n$  de modo que a imagem geométrica do número complexo  $\left(\frac{z_2}{(z_1)^2 \times i}\right)^{3n}$  pertença à bissetriz do terceiro quadrante.

1.2. Resolva, em  $\mathbb{C}$ , a equação  $z^3 \times (z_2)^2 - 32\bar{z} = 0 \wedge z \neq 0$  e determine a área do polígono cujos vértices são as imagens geométricas das soluções da condição. [Apresente as soluções na forma trigonométrica.](#)

2. Seja  $S$  o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos possíveis ( $A \subset S$  e  $B \subset S$ ).

2.1. Mostre que  $P(A|\bar{B}) \times \left(\frac{1}{P(B)} - 1\right) - \frac{P(A)}{P(B)} = P(\bar{A}|B) - 1$ .

**2.2.** Uma caixa contém bolas pretas e encarnadas numeradas com números naturais.

Sabe-se que:

- O número de bolas pretas é o dobro do número de bolas numeradas com um número par.
- Entre as bolas numeradas com um número ímpar, 70% são pretas.
- Entre as bolas numeradas com um número par, dois quintos são encarnadas.

Escolhendo ao acaso uma bola da caixa, qual é a probabilidade de ser preta? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

**Sugestão:** Pode utilizar a igualdade enunciada em 2.1. Nesse caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos  $A$  e  $B$ , no contexto da situação apresentada.

**3.** A Marta pretende arrumar numa só fila alguns livros, seis de Divulgação Científica, três romances e  $n$  dicionários, com  $n \in \mathbb{N}$ .

Arrumando os livros ao acaso, qual é a probabilidade de os dicionários ficarem em lugares consecutivos? Duas respostas a este problema são:

$$\frac{10! \times n!}{(n+9)!} \quad \text{e} \quad \frac{10}{n+9} C_n$$

Numa pequena composição, explique porquê. A composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace.
- uma explicação do número de casos possíveis para cada uma das respostas.
- uma explicação do número de casos favoráveis para cada uma das respostas.

**4.** Uma substância radioactiva desintegra-se segundo uma expressão do tipo  $m(t) = e^{a(2t-b)}$ , em que  $m$  é a massa, em gramas,  $t$  é o tempo em anos e  $a, b \in \mathbb{R}$ . Uma amostra de uma substância radioactiva é colocada em repouso.

Sabe-se que passados três anos a massa desta substância era de 3 gramas e que  $\frac{m(t+5)}{m(t)} = 0,7, \forall t \geq 0$ . Interprete o valor de  $\frac{m(t+5)}{m(t)}$  no contexto do problema e determine a quantidade de substância colocada em repouso. Apresente o resultado em gramas, arredondado às centésimas. Caso faça arredondamentos nos cálculos intermédios, utilize pelo menos quatro casas decimais.

**5.** Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x + \ln(2x)}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 2x - \frac{x^2 + x + 1}{x\sqrt{x^2 + 1}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

5.1. Determine, por definição,  $f'(1)$  e mostre que uma equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 1 é  $y = \ln\left(\frac{e^{x+2}}{2^{x-2}}\right)$ .

5.2. Verifique se existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  e estude a função  $f$  quanto à existência de assíntotas do seu gráfico. Caso existam, indique as suas equações.

5.3. Estude, para  $x \in \mathbb{R}^+$ , a função  $f$  quanto à monotonia e existência de extremos relativos, determinando-os caso existam.

6. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções de domínio  $\mathbb{R}$  tais que,  $f'$ ,  $g'$ ,  $f''$  e  $g''$ , todas de domínio  $\mathbb{R}$ , satisfazem as condições:

- $f''(x) > 0$  e  $g''(x) < 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$
- $f'(1) = 0$  e  $g'(2) = 0$

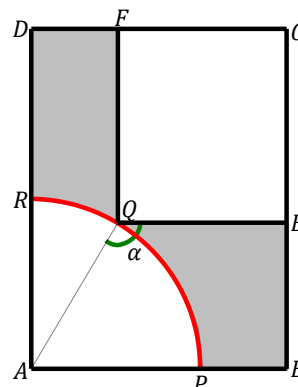
Mostre que existe pelo menos um  $c \in ]0,3[$  tal que as rectas tangentes aos gráficos de  $f$  e  $g$  no ponto de abscissa  $c$  são paralelas.

7. Na figura estão representados um retângulo  $[ABCD]$  e o retângulo  $[ECFQ]$ .

Sabe-se que:

- $\overline{AD} = 4$ ,  $\overline{AB} = 3$  e  $\overline{AD} = 2 \times \overline{AR}$
- O ponto  $Q$  desloca-se sobre o arco  $RP$ .
- $\alpha$  é a amplitude do ângulo  $AQE$ ,  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ .

Seja  $h$  a função que dá a área da região sombreada da figura em função de  $\alpha$ .



7.1. Mostre que  $h(\alpha) = 6 \sin \alpha - 8 \cos \alpha + 2 \sin(2\alpha) - \pi$ .

7.2. Recorrendo à calculadora gráfica determine os valores de  $\alpha$  de modo que a área da região sombreada da figura seja maior que o dobro da área sector  $RAQ$ .

Na sua resposta deve:

- escrever a área do sector  $RAQ$  em função de  $\alpha$ .
- escrever a condição que permite resolver o problema.
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema.
- indicar os valores que  $\alpha$  que são solução do problema.

Apresente todos os valores que retirar da calculadora arredondados às centésimas.

## GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. D      2. B      3. A      4. C      5. A      6. C      7. B      8. D

## GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

- 1.1.  $n = 3$       1.2.  $\left\{ 2\text{CIS}\left(-\frac{\pi}{8}\right), 2\text{CIS}\frac{3\pi}{8}, 2\text{CIS}\frac{7\pi}{8}, 2\text{CIS}\frac{11\pi}{8} \right\}; \text{Área}_{\text{polígono}} = 8$
- 2.2.  $\frac{2}{3}$
4. A cada cinco anos a massa da substância radioactiva reduz-se 30%;  $m(0) \approx 3,72$  gramas ( $a \approx -0,0357$  e  $b \approx 36,8015$ )
- 5.1.  $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 - \ln 2 = \ln\left(\frac{e}{2}\right)$
- 5.2. Não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , porque  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ . A.V.:  $x = 0$ ; A.O.:  $y = 2x + 1$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ ; A.H.:  $y = 3$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ .
- 5.3. Para  $x \in \mathbb{R}^+$ , a função  $f$  é crescente em  $\left]0, \frac{e}{2}\right]$ , é decrescente em  $\left[\frac{e}{2}, +\infty\right[$  e tem máximo em  $x = \frac{e}{2}$  que é  $f\left(\frac{e}{2}\right) = 3 + \frac{2}{e}$ .
- 7.2.  $h(\alpha) > 4\alpha - 2\pi \Leftrightarrow \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, a\right]$ , com  $a \approx 2,86$ .