



EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

PROVA MODELO N.º 2 – PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Site: <http://recursos-para-matematica.webnode.pt/>

Facebook: https://www.facebook.com/recursos_para_matematica

GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. O último algarismo de cada um dos n telemóveis pode ser um dos dez algarismos (do 0 ao 9), logo o número de casos possíveis é $\underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ vezes}} = 10^n$.

O número de casos favoráveis é 10 (ou todos os números dos n telemóveis terminam em 0, ou em 1, ou em 2, ou em 3, ..., ou em 9).

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{10}{10^n} = \frac{1}{10^{n-1}}$.

Resposta: A

2. Tem-se que:

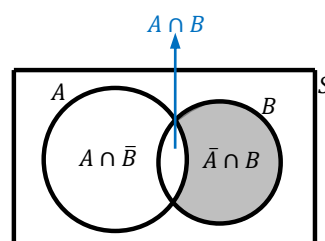
$$P(B|\bar{A}) = 0,2 \Leftrightarrow \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = 0,2 \Leftrightarrow \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = 0,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(B) - P(A \cap B)}{0,7} = 0,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0,2 \times 0,7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = 0,14 + P(A \cap B)$$

i)



$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Como a probabilidade da intersecção de dois acontecimentos não pode ser maior que a probabilidade de cada um desses acontecimentos, então $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) \Leftrightarrow 0 \leq P(A \cap B) \leq 0,3$. Portanto:

$$0 \leq P(A \cap B) \leq 0,3 \Leftrightarrow 0,14 \leq 0,14 + P(A \cap B) \leq 0,3 + 0,14 \Leftrightarrow 0,14 \leq P(B) \leq 0,44$$

Assim, tendo em conta as opções, $P(B)$ só pode ser igual a 0,3.

Nota: Sejam $X, Y \subset S$. Tem-se que:

$$\max\{P(X), P(Y)\} \leq P(X \cup Y) \leq \min\{1, P(X) + P(Y)\} \text{ e que } \max\{0, P(X) + P(Y) - 1\} \leq P(X \cap Y) \leq \min\{P(X), P(Y)\}$$

Resposta: B

3. A variável aleatória X : «quantidade de água, em mL, presente nas garrafas que a empresa produz» tem distribuição normal, isto é, $X \sim N(\mu, \sigma)$, sendo μ o valor médio e σ o desvio padrão. Assim:

$$P(\text{garrafa de água ser aprovada}) = P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0,9545$$

Logo, $P(\text{garrafa de água ser reprovada}) = 1 - (\text{garrafa de água ser aprovada}) = 1 - 0,9545 = 0,0455$.

Seja Y a variável aleatória «número de garrafas de água rejeitadas num lote de doze». Tem-se que $Y \sim \text{Bin}(12; 0,0455)$ e portanto $P(Y = 3) = {}^{12}C_3 \times (0,0455)^3 \times (0,9545)^9 \approx 0,014$.

Resposta: B

4. Tem-se que $A_{[ABCD]} = \frac{\overline{CD} + \overline{AB}}{2} \times \text{altura}$, onde $\overline{CD} = f(3a) - g(3a)$, $\overline{AB} = f(a) - g(a)$ e a altura é igual a $3a - a = 2a$. Logo:

$$\bullet \overline{CD} = f(3a) - g(3a) = f(3a) - f\left(\frac{1}{3a}\right) = \log_3(3a) - \log_3\left(\frac{1}{3a}\right) \underset{i)}{=} 2 \log_3(3a)$$

$$\bullet \overline{AB} = f(a) - g(a) = f(a) - f\left(\frac{1}{a}\right) = \log_3 a - \log_3\left(\frac{1}{a}\right) \underset{i)}{=} 2 \log_3 a$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } A_{[ABCD]} &= \frac{\overline{CD} + \overline{AB}}{2} \times \text{altura} = \frac{2 \log_3(3a) + 2 \log_3 a}{2} \times 2a = (2 \log_3(3a) + 2 \log_3 a) \times a = \\ &= 2a(\log_3(3a) + \log_3 a) = 2a \log_3(3a \times a) = 2a \log_3(3a^2) \end{aligned}$$

i) Nota: $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a 1 - \log_a x = 0 - \log_a x = -\log_a x, \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Resposta: C

5. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, logo também o é em $x = 1$ e portanto $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$. Assim:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a^2 \cos(\pi x)) = a^2 \cos(\pi \times 1) = a^2 \times (-1) = -a^2$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{b-bx}-1}{\ln(ax-a+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{-b(x-1)}-1}{\ln(a(x-1)+1)} \underset{i)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{-by}-1}{\ln(ay+1)} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\frac{e^{-by}-1}{y}}{\frac{\ln(ay+1)}{y}} = \frac{-b \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{-by}-1}{-by}}{a \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\ln(ay+1)}{ay}} = \\ &= \frac{-b \times 1}{a \times 1} = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Se $y \rightarrow 0^-$ então $ay \rightarrow 0$ e $-by \rightarrow 0$

i) Mudança de variável: Se $x \rightarrow 1^-$ então $x - 1 \rightarrow 0^-$. Seja $y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1, y \rightarrow 0^-$.

$$\bullet f(1) = a^2 \cos(\pi \times 1) = a^2 \times (-1) = -a^2$$

Logo $-\frac{b}{a} = -a^2 \Leftrightarrow b = a^3$. Das opções apresentadas a única verifica esta equação é a **D**, pois se $a = 2$ então $b = 2^3 = 8$.

Resposta: D

6. A função h tem um zero em $x = 3$, logo $h(3) = 0$. Assim:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{h(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{h(x)-h(3)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} x \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{h(x)-h(3)} = 1 \Leftrightarrow 3 \times \frac{1}{h'(3)} = 1 \Leftrightarrow h'(3) = 3$$

Como h é par, então h' é ímpar. Logo $h'(-3) = -h'(3) = -3$ i).

Seja t recta a tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa -3 . Assim, $m_t = h'(-3) = -3$ e uma equação da recta t é do tipo $y = -3x + b$. O ponto de coordenadas $(-3, h(-3)) = (-3, 0)$ pertence à recta t , logo:

$$0 = -3 \times (-3) + b \Leftrightarrow 0 = 9 + b \Leftrightarrow b = -9$$

Portanto $t: y = -3x - 9$.

$$\text{i) } h'(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{h(x)-h(-3)}{x+3} = \lim_{y \rightarrow 3} \frac{h(-y)-h(-3)}{-y+3} \stackrel{h \text{ é par}}{=} \lim_{y \rightarrow 3} \frac{h(y)-h(3)}{-(y-3)} = -\lim_{y \rightarrow 3} \frac{h(y)-h(3)}{y-3} = -h'(3) = -3.$$

Seja $y = -x \Leftrightarrow x = -y$. Se $x \rightarrow -3$ então $y \rightarrow 3$

Resposta: C

De facto, se uma função é par, a sua derivada é ímpar e se uma função é ímpar a sua derivada é par. Vamos provar que se uma função f derivável em $D \subseteq \mathbb{R}$ é par, então f' é ímpar e que se uma função f derivável em $D \subseteq \mathbb{R}$ é ímpar, então f' é par.

I) Se f é par, então $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$. Seja $a \in D$, tem-se:

$$f'(-a) = \lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(x)-f(-a)}{x+a} \stackrel{\text{Seja } y = -x \Leftrightarrow x = -y. \text{ Se } x \rightarrow -a \text{ então } y \rightarrow a}{=} \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(-y)-f(-a)}{-y+a} = \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(y)-f(a)}{-(y-a)} = -\lim_{y \rightarrow a} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = -f'(a)$$

Logo f' é ímpar.

II) Se f é ímpar, então $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$. Seja $a \in D$, tem-se:

$$f'(-a) = \lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(x)-f(-a)}{x+a} \stackrel{\text{Seja } y = -x \Leftrightarrow x = -y. \text{ Se } x \rightarrow -a \text{ então } y \rightarrow a}{=} \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(-y)-f(-a)}{-y+a} = \lim_{y \rightarrow a} \frac{-f(y)+f(a)}{-(y-a)} = \lim_{y \rightarrow a} \frac{-(f(y)-f(a))}{-(y-a)} = \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(a)$$

Logo f' é par.

7. Tem-se:

$$\begin{aligned} z - (\bar{z})^2 &= \operatorname{cis} \alpha - (\operatorname{cis}(-\alpha))^2 = \operatorname{cis} \alpha - \operatorname{cis}(-2\alpha) = \\ &= \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha - (\cos(-2\alpha) + i \operatorname{sen}(-2\alpha)) = \\ &= \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha - \cos(-2\alpha) - i \operatorname{sen}(-2\alpha) = \\ &= \cos \alpha - \cos(-2\alpha) + i(\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}(-2\alpha)) \end{aligned}$$

O número complexo $z - (\bar{z})^2$ é real se $\text{Im}(z - (\bar{z})^2) = 0$. Assim:

$$\text{Im}(z - (\bar{z})^2) = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha - \sin(-2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = \sin(-2\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -2\alpha + 2k\pi \quad \vee \quad \alpha = \pi - (-2\alpha) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha = 2k\pi \quad \vee \quad -\alpha = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{3} \quad \vee \quad \alpha = -\pi - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{3} \quad \vee \quad \alpha = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Observa que $-2k\pi$ é o mesmo que $2k\pi$ pois $k \in \mathbb{Z}$. Como $2k\pi$ representa voltas completas e π e $-\pi$ estão separados por uma volta, a expressão $\alpha = \frac{2k\pi}{3} \quad \vee \quad \alpha = -\pi - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ é equivalente a $\alpha = \frac{2k\pi}{3} \quad \vee \quad \alpha = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Outra resolução para a equação $\text{Im}(z - (\bar{z})^2) = 0$:

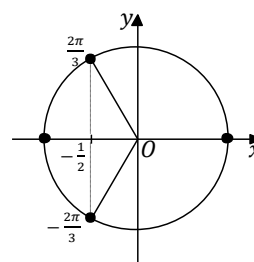
$$\text{Im}(z - (\bar{z})^2) = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha - \sin(-2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha + \sin(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

A função seno é ímpar

$$\Leftrightarrow \sin \alpha (1 + 2 \cos \alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = 0 \quad \vee \quad \cos \alpha = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = k\pi \quad \vee \quad \alpha = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad \alpha = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{2k\pi}{3} \quad \vee \quad \alpha = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



Resposta: A

8. Sejam $z_1 = 2\text{cis } \theta$ e $z_2 = (\sqrt{2} - \sqrt{2}i) \cos \theta + (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) \sin \theta$, com $\theta \in \mathbb{R}$. Os números complexos z_1 e z_2 são raízes de índice n de um número complexo z se $|\text{arz}(z_2) - \text{arz}(z_1)| = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} \text{Tem-se, } z_2 &= (\sqrt{2} - \sqrt{2}i) \cos \theta + (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) \sin \theta = (\sqrt{2} - \sqrt{2}i) \cos \theta + \left(\frac{\sqrt{2}}{i} + \sqrt{2}\right) i \sin \theta = \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{2}i) \cos \theta + \left(\frac{\sqrt{2}}{i} \times \frac{-i}{-i} + \sqrt{2}\right) i \sin \theta = (\sqrt{2} - \sqrt{2}i) \cos \theta + \left(\frac{-\sqrt{2}i}{-i^2} + \sqrt{2}\right) i \sin \theta = \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{2}i) \cos \theta + (\sqrt{2} - \sqrt{2}i) i \sin \theta = (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)(\cos \theta + i \sin \theta) = \\ &= 2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \times \text{cis } \theta = 2\text{cis}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } |\text{arz}(z_2) - \text{arz}(z_1)| = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left|\theta - \frac{\pi}{4} - \theta\right| = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left|-\frac{\pi}{4}\right| = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \cancel{\pi} = 8k \cancel{\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 8k, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, n é um múltiplo de 8 e portanto, tendo em conta as opções apresentada, n só pode ser 16.

i) Para escrever $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ na forma trigonométrica, vem: $|\sqrt{2} - \sqrt{2}i| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$. Sendo θ um argumento de $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$ e $\theta \in 4.^\circ$ quadrante, pelo que $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Assim $\sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Resposta: D

GRUPO II – ÍTENS DE RESPOSTA ABERTA

1.

1.1. Para $x = -1$, tem-se:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 + 2 \times (-1)i + (-1)^2 i^{8n+3} = 2 - 2i + i^{8n} \times i^3 = 2 - 2i + i^{4 \times 2n} \times (-i) = \\ &= 2 - 2i + (i^4)^{2n} \times (-i) = 2 - 2i + 1^{2n} \times (-i) = 2 - 2i - i = 2 - 3i \end{aligned}$$

$$z_2 = -3 + (-1)^2 + (-1)^3 i^{5-16n} = -3 + 1 - \frac{i^5}{i^{16n}} = -2 - \frac{i^4 \times i}{i^{4 \times 4n}} = -2 - \frac{i}{(i^4)^{4n}} = -2 - \frac{i}{1^{4n}} = -2 - i$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } \frac{z_1}{z_2 - \operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}} + \frac{1+4i}{4i} + \frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} &= \frac{2-3i}{-2+i-(-i)} + \frac{1}{4i} + \frac{4i}{4i} + \frac{\sqrt{3}}{4} i = \frac{2-3i}{-2+2i} \times \frac{-2-2i}{-2-2i} + \frac{1}{4i} \times \frac{-i}{-i} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} i = \\ &= \frac{-4-4i+6i+6i^2}{(-2)^2-(2i)^2} + \frac{-i}{-4i^2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} i = \frac{-10+2i}{8} - \frac{i}{4} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} i = \\ &= -\frac{10}{8} + \frac{2i}{8} - \frac{i}{4} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} i = -\frac{5}{4} + \frac{i}{4} - \frac{i}{4} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} i = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i = \frac{1}{2} \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Cálculo Auxiliar: Para escrever $-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ na forma trigonométrica, vem: $\left|-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Sendo θ um argumento de $-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$, tem-se $\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{-\frac{1}{4}} = -\sqrt{3}$ e $\theta \in 2.^\circ$ quadrante, pelo que $\theta = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$.

Assim $-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{1}{2} \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$.

1.2. Pela alínea anterior sabe-se que $i^{8n+3} = -i$ e $i^{5-16n} = i$, logo $z_1 = 2 + 2xi - x^2i$ e $z_2 = -3 + x^2 + x^3i$. Pretende-se determinar x de modo que $z_2 = -\bar{z}_1$ (z_2 seja igual ao simétrico do conjugado de z_1). Assim:

$$z_2 = -\bar{z}_1 \Leftrightarrow -3 + x^2 + x^3i = -\overline{(2 + 2xi - x^2i)} \Leftrightarrow -3 + x^2 + x^3i = -\overline{(2 + i(2x - x^2))} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 + x^2 + x^3i = -2 + i(2x - x^2) \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + x^2 = -2 \\ x^3 = 2x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -2 + 3 \\ x^3 + x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x(x^2 + x - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \vee x = 1 \\ x = 0 \vee x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \vee x = 1 \\ x = 0 \vee x = -2 \vee x = 1 \end{cases}$$

Logo $x = 1$.

2.

2.1. Considere-se a variável aleatória X : «produto dos números inscritos nas quatro bolas extraídas». O produto das cinco bolas extraídas pode ser:

- -4 , se entre as quatro bolas extraídas, duas estiverem numeradas com o número 1, uma com o -2 e uma com o 2.
- 0, se pelo menos uma das quatro bolas extraídas estiver numerada com o número 0.
- 4, se as quatro bolas extraídas, estiverem numeradas com os números -1 , 1, -2 e 2.

Assim, $X = \{-4, 0, 4\}$ e portanto tem-se:

$$P(X = -4) = \frac{{}^2C_2 \times {}^1C_1 \times {}^1C_1}{{}^5C_2 \times {}^3C_2} = \frac{1}{30}$$

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(\text{pelo menos uma das quatro bolas estar numerada com o número zero}) = \\ &= 1 - P(\text{nenhuma das quatro bolas estar numerada com o número zero}) = \\ &= 1 - \frac{{}^3C_2 \times {}^2C_2}{{}^5C_2 \times {}^3C_2} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

$$P(X = 4) = \frac{{}^1C_1 \times {}^2C_2 \times {}^1C_1 \times {}^1C_1}{{}^5C_2 \times {}^3C_2} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é dada por:

x_i	-4	0	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{15}$

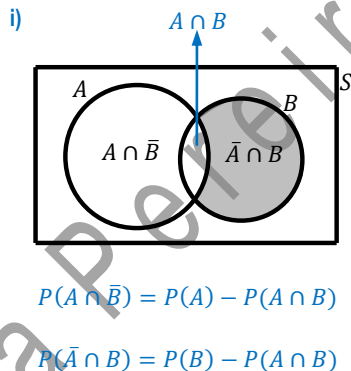
O valor médio da variável aleatória X é dado por $\mu = -4 \times \frac{1}{30} + 0 \times \frac{9}{10} + 4 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$, ou seja, em cada realização da experiência o “produto médio” (ou “produto esperado”) é de $\frac{2}{15}$, portanto em 15 000 realizações desta experiência é de esperar que a soma dos produtos obtidos esteja próxima de $\frac{2}{15} \times 15000 = 2000$.

2.2. $P(Z|(X \cap \bar{Y}))$ designa a probabilidade do produto dos números das quatro bolas retiradas da caixa C ser positivo, sabendo que os números das três bolas retiradas da caixa A têm o mesmo valor absoluto e os números das duas bolas retiradas da caixa B são diferentes. Assim as bolas retiradas da caixa A são as numeradas com os números -1 , 1 e 1 (pois $|-1| = |1| = |1| = 1$) e as bolas retiradas da caixa B estão numeradas com os números 0 e 2 (pois são diferentes). Portanto na caixa C ficam oito bolas, uma numerada com o número -2 , uma com o -1 , duas com o 0, duas com o 1 e duas com o 2. Logo, o número de casos possíveis é 8C_4 (das oito bolas, retiram-se quatro). Para que o produto dos números seja positivo temos de considerar dois casos: retirar quatro bolas numeradas com números positivos, o número de maneiras de o fazer é ${}^4C_4 = 1$ (retirar as duas bolas numeradas com o número 1 e as duas com o número 2); retirar duas bolas numeradas com números negativos e duas com números positivos, o número de

maneiras de o fazer é ${}^2C_2 \times {}^4C_2 = {}^4C_2$ (retirar as duas bolas numeradas com um número negativo e duas bolas entre quatro numeradas com um número positivo). Logo, o número de casos favoráveis é $1 + {}^4C_2$. Pela lei de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis, desde que estes sejam equiprováveis. Como qualquer uma das bolas tem igual probabilidade de ser escolhida, a lei de Laplace pode ser aplicada a este problema. Portanto, $P(Z|(X \cap \bar{Y})) = \frac{1 + {}^4C_2}{8C_4}$.

3. Tem-se:

$$\begin{aligned}
 P(\bar{A} \cup B) - P(A|\bar{B}) \times P(B) &= P(\bar{A}) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) - P(A|\bar{B}) \times (1 - P(\bar{B})) &= P(\bar{A}) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(\bar{B}) - P(\bar{B}) + P(A \cap B) - P(A|\bar{B}) + P(A|\bar{B}) \times P(\bar{B}) &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(A \cap B) - \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} + \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \times P(\bar{B}) &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(A \cap B) - \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\bar{B})} + P(A) - P(A \cap B) &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(A) = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\bar{B})} \Leftrightarrow P(A) \times P(\bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) &= P(A \cap B) = P(A) - P(A) \times P(\bar{B}) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times (1 - P(\bar{B})) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) &\Leftrightarrow A \text{ e } B \text{ são acontecimentos independentes}
 \end{aligned}$$



4.

4.1. Tem-se:

$$g'(x) = -e^{4-x^2} + (-x \times (-2x)e^{4-x^2}) = -e^{4-x^2} + 2x^2e^{4-x^2} = e^{4-x^2}(2x^2 - 1)$$

$$\begin{aligned}
 g''(x) &= -2xe^{4-x^2}(2x^2 - 1) + e^{4-x^2} \times 4x = e^{4-x^2}(2x - 4x^3) + e^{4-x^2} \times 4x = \\
 &= e^{4-x^2}(2x - 4x^3 + 4x) = e^{4-x^2}(6x - 4x^3) = xe^{4-x^2}(6 - 4x^2)
 \end{aligned}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{4-x^2}(6 - 4x^2) = 0 \Leftrightarrow xe^{4-x^2} = 0 \vee 6 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee \underbrace{e^{4-x^2} = 0}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}} \vee x^2 = \frac{6}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{\frac{6}{4}} \vee x = \sqrt{\frac{6}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função g'' , vem:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		0		$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
i) xe^{4-x^2}	—	—	—	0	+	+	+
$6 - 4x^2$	—	0	+	+	+	0	—
$g''(x)$	+	0	—	0	+	0	—
$g(x)$	∪	p.i.	∩	p.i.	∪	p.i.	∩

i) Observa que o sinal de xe^{4-x^2} depende apenas do sinal de x , pois $e^{4-x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ e em $\left[0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ e tem pontos de inflexão em $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, em $x = 0$ e em $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

4.2.

▪ Assíntotas verticais

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (g(x) \ln(-x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-xe^{4-x^2} \ln(-x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{4-x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x \ln(-x)) = \\ &= e^{4-0^2} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right)\right) = e^4 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln y}{y} = -e^4 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = -e^4 \times 0 = 0\end{aligned}$$

i) Mudança de variável: Se $x \rightarrow 0^-$ então $-\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$. Seja $y = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{y}, y \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4-x}{x-\sqrt{4x}} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

Logo a recta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{4x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(x+\sqrt{4x})}{(x-\sqrt{4x})(x+\sqrt{4x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(x+\sqrt{4x})}{x^2-(\sqrt{4x})^2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(x+\sqrt{4x})}{x^2-4x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x-4)(x+\sqrt{4x})}{x(x-4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x+\sqrt{4x})}{x} = \frac{-4-\sqrt{4 \times 4}}{4} = \frac{-4-4}{4} = -2\end{aligned}$$

Logo a recta de equação $x = 4$ não é assíntota vertical do gráfico de f .

Como a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$, o seu gráfico não tem mais assíntotas verticais.

▪ Assíntotas Horizontais

Quando $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) \ln(-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^{4-x^2} \ln(-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-xe^4}{e^{x^2}} \ln(-x) \right) = \\ &= e^4 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x}{e^{x^2}} \ln(-x) \right) \stackrel{ii)}{=} e^4 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{e^{(-y)^2}} \ln y \right) = e^4 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{e^{y^2}} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = \\ &= e^4 \times 0 \times 0 = 0\end{aligned}$$


 Se $y \rightarrow +\infty$ então $y^2 \rightarrow +\infty$

ii) Mudança de variável: Se $x \rightarrow -\infty$ então $-x \rightarrow +\infty$. Seja $y = -x \Leftrightarrow x = -y, y \rightarrow +\infty$.

Logo a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$.

Quando $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x}{x-\sqrt{4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(\frac{4}{x}-1\right)}{x\left(1-\sqrt{\frac{4x}{x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x}-1}{1-\sqrt{\frac{4}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x}-1}{1-\sqrt{\frac{4}{x}}} = \frac{\frac{4}{+\infty}-1}{1-\sqrt{\frac{4}{+\infty}}} = \frac{0-1}{1-\sqrt{0}} = 1$$

Nota: $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Como $x \rightarrow +\infty$ pode assumir-se que x é positivo, logo $\sqrt{x^2} = |x| = x$.

Logo a recta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$.

5. O gráfico da função $g(x) = mx + b$, com $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ e $b \in \mathbb{R}$ é assíntota do gráfico de f . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = b.$$

Assim, quando $x \rightarrow -\infty$, uma assíntota do gráfico de h terá declive:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{f(-x)-g\left(\frac{x}{m}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x\left(f(-x)-\left(m \times \frac{x}{m}+b\right)\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(-x)-x-b} \stackrel{i)}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y}{f(y)+y-b} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y}{y\left(\frac{f(y)}{y}+1-\frac{b}{y}\right)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\frac{f(y)}{y}+1-\frac{b}{y}} = \frac{-1}{m+1-\frac{b}{+\infty}} = \frac{-1}{m+1-0} = -\frac{1}{m+1}\end{aligned}$$

$-\frac{1}{m+1} \in \mathbb{R}$, pois $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

E terá ordenada na origem:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(h(x) + \frac{1}{m+1} x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{f(-x)-g\left(\frac{x}{m}\right)} + \frac{x}{m+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{f(-x)-x-b} + \frac{x}{m+1} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-y)^2}{f(y)+y-b} - \frac{y}{m+1} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2(m+1)-y(f(y)+y-b)}{(f(y)+y-b)(m+1)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2m+y^2-yf(y)-y^2+yb}{(f(y)+y-b)(m+1)} = \\
&= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2m-yf(y)+yb}{(f(y)+y-b)(m+1)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y(f(y)-my-b)}{y\left(\frac{f(y)}{y}+1-\frac{b}{y}\right)(m+1)} = \frac{-(b-b)}{\left(m+1-\frac{b}{+\infty}\right)(m+1)} = \frac{0}{(m+1)^2} = 0 \quad (m \neq -1)
\end{aligned}$$

i) **Mudança de variável:** Se $x \rightarrow -\infty$ então $-x \rightarrow +\infty$. Seja $y = -x \Leftrightarrow x = -y, y \rightarrow +\infty$.

Logo, o gráfico da função h tem uma assíntota de equação $y = -\frac{x}{m+1}$, quando $x \rightarrow -\infty$.

6.

6.1. Tem-se:

$$\begin{aligned}
\bullet V'(t) &= \frac{2}{3} - 2 \times \frac{(t^2+7t+1)'}{t^2+7t+1} = \frac{2}{3} - 2 \times \frac{2t+7}{t^2+7t+1} = \frac{2}{3} - \frac{4t+14}{t^2+7t+1} = \frac{2t^2+14t+2-12t-42}{3t^2+21t+3} = \frac{2t^2+2t-40}{3t^2+21t+3} \\
\bullet V'(t) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2t^2+2t-40}{3t^2+21t+3} = 0 \Leftrightarrow 2t^2+2t-40 = 0 \wedge \frac{3t^2+21t+3 \neq 0}{\text{Condição universal em } [0,10]} \Leftrightarrow t = -5 \vee t = 4
\end{aligned}$$

Como $t \in [0,10]$ então $t = 4$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função V' , vem:

t	0		4		10
i) $V'(t)$	-	-	0	+	+
$V(t)$	máx.	↘	mín.	↗	máx.

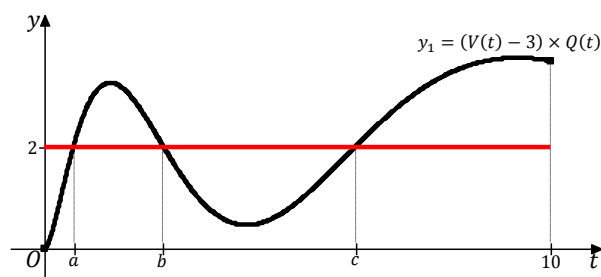
i) Observa que o sinal de V' depende apenas do sinal de $2t^2 + 2t - 40$, pois $3t^2 + 21t + 3 > 0, \forall t \in [0,10]$.

A função V tem mínimo em $t = 4$, ou seja, o preço de venda de cada quilograma de cerejas foi mínimo passadas quatro semanas. Esse preço foi de, aproximadamente, $V(4) = \frac{2}{3} \times 4 + 8 - 2 \ln(4^2) \approx 3,05$ euros.

6.2.

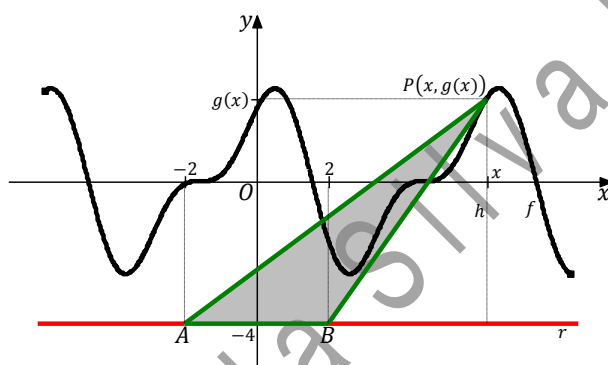
• O lucro do hipermercado por cada quilograma de cerejas, em função de t , em semanas, é dado por $V(t) - 3$. Como o hipermercado vende $Q(t)$ milhares de quilogramas de cerejas, então o seu lucro, em milhares de euros, é dado por $(V(t) - 3) \times Q(t)$, com t em semanas.

• Pretende-se determinar $t \in [0,10]$ tal que $(V(t) - 3) \times Q(t) > 2$. Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = (V(t) - 3) \times Q(t)$ e $y_2 = 2$ na janela de visualização $[0,10] \times [0,4]$.



Assim, $(V(t) - 2) \times Q(t) > 2 \Leftrightarrow t \in]a, b[\cup]c, 10]$, com $a \approx 0,572$, $b \approx 2,37$ e $c \approx 6,126$. O lucro do hipermercado foi superior a 2000 euros durante $(b - a) + (10 - c) \approx 5,672$ semanas, isto é, durante, aproximadamente, 5 semanas e 5 dias ($0,672 \times 7 \approx 5$).

7. Considere-se a figura:



A área do triângulo $[ABP]$ é dada por $\frac{\overline{AB} \times h}{2}$, onde $\overline{AB} = 4$ e $h = g(x) - (-4) = g(x) + 4$. Assim:

$$A_{[ABP]} = \frac{4 \times (g(x) + 4)}{2} = 2 \times (a \sin(2x) + a^2 \cos x + 4) = 2a \sin(2x) + 2a^2 \cos x + 8$$

Pretende-se mostrar que existe pelo menos uma abscissa de P , pertencente ao intervalo $]0, \pi[$, tal que a área do triângulo $[ABP]$ é igual a $4a + 4$, ou seja, tal que:

$$2a \sin(2x) + 2a^2 \cos x + 8 = 4a + 4 \Leftrightarrow 2a \sin(2x) + 2a^2 \cos x - 4a + 4 = 0, \text{ com } a > 1$$

Seja $f(x) = 2a \sin(2x) + 2a^2 \cos x - 4a + 4$, com $a > 1$. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, pois é composição e soma entre funções contínua em $\mathbb{R}$. Logo f é contínua em $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \blacksquare f(0) &= 2a \sin(0) + 2a^2 \cos(0) - 4a + 4 = 2a \times 0 + 2a^2 \times 1 - 4a + 4 = 2a^2 - 4a + 4 = \\ &= 2(a^2 - 2a) + 4 = 2(\underbrace{a^2 - 2a + 1}_{(a-1)^2} - 1) + 4 = 2(a - 1)^2 - 2 + 4 = 2(a - 1)^2 + 2 \end{aligned}$$

Como $a > 1$, então $a - 1 > 0 \Leftrightarrow 2(a - 1)^2 > 0$ e portanto $2(a - 1)^2 + 2 > 2 \Leftrightarrow f(0) > 2 \Rightarrow f(0) > 0$

$$\begin{aligned} \blacksquare f(\pi) &= 2a \operatorname{sen}(2\pi) + 2a^2 \cos(2\pi) - 4a + 4 = 2a \times 0 + 2a^2 \times (-1) - 4a + 4 = -2a^2 - 4a + 4 = \\ &= -2(a^2 + 2a) + 4 = -2\left(\underbrace{a^2 + 2a + 1}_{(a+1)^2} - 1\right) + 4 = -2(a+1)^2 + 2 + 4 = -2(a+1)^2 + 6 \end{aligned}$$

Como $a > 1$, então:

$$a + 1 > 2 \Leftrightarrow (a + 1)^2 > 2^2 \Leftrightarrow -2(a + 1)^2 < -8 \Leftrightarrow -2(a + 1)^2 + 6 < -2 \Leftrightarrow f(\pi) < -2 \Rightarrow f(\pi) < 0$$

Assim, como f é contínua em $[0, \pi]$ e $f(0)$ e $f(\pi)$ têm sinais contrários (e portanto $f(0) \times f(\pi) < 0$), então pelo corolário do teorema de Bolzano:

$$\exists c \in]0, \pi[: f(c) = 0 \Leftrightarrow 2a \operatorname{sen}(2c) + 2a^2 \cos c + 8 = 4a + 4$$

ou seja, existe pelo menos uma abscissa de P , pertencente ao intervalo $]0, \pi[$, tal que a área do triângulo $[ABP]$ é igual a $4a + 4$.