



EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

PROVA MODELO N.º 2

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Site: <http://recursos-para-matematica.webnode.pt/>

Facebook: https://www.facebook.com/recursos_para_matematica

GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Num certo dia entraram numa loja de telemóveis n pessoas ($n \in \mathbb{N}$) todas proprietárias de um único telemóvel. Qual é a probabilidade do último algarismo do número do telemóvel de cada uma destas pessoas ser igual?

A $\frac{1}{10^{n-1}}$

B $\frac{10}{n!}$

C $\frac{9!}{10^{n-1}}$

D $\frac{10!}{n!}$

2. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabe-se que $P(A) = 0,3$ e que $P(B|\bar{A}) = 0,2$. Qual pode ser o valor de $P(B)$?

A 0,1

B 0,3

C 0,5

D 0,7

3. A quantidade de água, em mL, presente nas garrafas de água que uma empresa produz é uma variável aleatória com distribuição normal. Todas as garrafas de água passam pelo controle de qualidade e só são aprovadas se o seu volume estiver a menos de dois desvios padrões da média. Num lote de doze garrafas, qual é a probabilidade, arredondada às milésimas, de exactamente três serem rejeitadas?

A 0,013

B 0,014

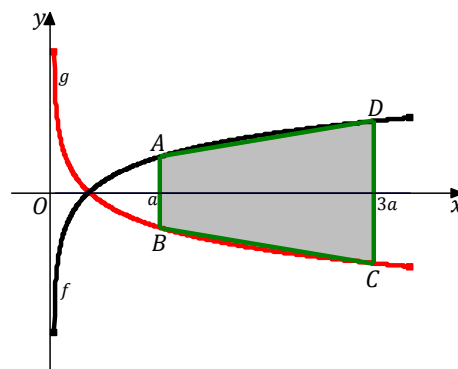
C 0,226

D 0,227

4. Na figura estão representados num referencial o.n. xOy os gráficos das funções f e g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definidas por $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ e o trapézio $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- Os pontos A e D pertencem ao gráfico de f e os pontos B e C pertencem ao gráfico de g .
- Os pontos A e B têm abcissa a e os pontos C e D têm abcissa $3a$.



Qual é a expressão que dá a área do trapézio $[ABCD]$ em função de a ?

A $a \log_3 (3a^2)$

B $2a \log_3 (9a^2)$

C $2a \log_3 (3a^2)$

D $a \log_3 (9a^2)$

5. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a^2 \cos(\pi x) & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{e^{b-bx}-1}{\ln(ax-a+1)} & \text{se } x > 1 \end{cases}, \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Quais podem ser os valores de a e de b ?

- A** $a = -2$ e $b = -6$ **B** $a = -1$ e $b = 1$ **C** $a = 1$ e $b = 3$ **D** $a = 2$ e $b = 8$

6. De uma função h par, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se 3 é um zero de h e que $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x}{h(x)} = 1$. Qual das seguintes, é a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa -3 ?

- A** $y = 3x + 9$ **B** $y = -3x + 9$ **C** $y = -3x - 9$ **D** $y = 3x - 9$

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número $z = \text{cis } \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Quais são os valores de α para os quais $z - (\bar{z})^2$ é um número real?

- A** $\alpha = \pi + 2k\pi \quad \vee \quad \alpha = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ **B** $\alpha = \pi + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
C $\alpha = 2k\pi \quad \vee \quad \alpha = \pi + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ **D** $\alpha = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

8. Em $\mathbb{C}$, os números complexos $2\text{cis } \theta$ e $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i) \cos \theta + (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) \sin \theta$, com $\theta \in \mathbb{R}$, são duas raízes de índice n de um número complexo z , com $n \geq 2$. Qual pode ser o valor de n ?

- A** 6 **B** 10 **C** 12 **D** 16

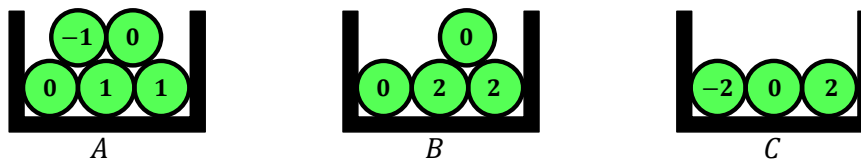
GRUPO II – ÍTENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2 + 2xi + x^2 i^{8n+3}$ e $z_2 = -3 + x^2 + x^3 i^{5-16n}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.

1.1. Nesta alínea, considere $x = -1$. Determine, na forma trigonométrica $\frac{z_1}{\bar{z}_2 - \text{cis} \frac{3\pi}{2}} + \frac{1+4i}{4i} + \frac{\sqrt{3}}{4} \text{cis} \frac{\pi}{2}$.

1.2. Determine x de modo que z_2 seja igual ao simétrico do conjugado de z_1 .

2. Considere três caixas, A , B e C que contêm bolas numeradas com a composição indicada na figura.



2.1. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa A e duas bolas da caixa C e calcular o produto dos números das quatro bolas extraídas.

Repete-se esta experiência quinze mil vezes e somam-se todos os produtos obtidos. De que valor é de esperar que essa soma esteja próxima?

Sugestão: Comece por construir a tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória X : «produto dos números inscritos nas quatro bolas retiradas».

2.2. Considere agora a experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso três bolas da caixa A e duas bolas da caixa B e colocá-las na caixa C . Em seguida retiram-se, simultaneamente e ao acaso, quatro bolas da caixa C . Considere os acontecimentos:

X : «os números das três bolas retiradas da caixa A têm o mesmo valor absoluto»

Y : «os números das duas bolas retiradas da caixa B são iguais»

Z : «o produto dos números das quatro bolas retiradas da caixa C é positivo»

Qual é o valor de $P(Z|(X \cap \bar{Y}))$?

Uma resposta a esta questão é $\frac{1+4C_2}{8C_4}$. Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada explique esta resposta, começando por interpretar o significado de $P(Z|(X \cap \bar{Y}))$ no contexto da situação descrita. A composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace.
- uma explicação do número de casos possíveis.
- uma explicação do número de casos favoráveis.

3. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$). Mostre que:

$$P(\bar{A} \cup B) - P(A|\bar{B}) \times P(B) = P(\bar{A}) \text{ se e só se } A \text{ e } B \text{ forem independentes.}$$

4. Considere a função g de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = -xe^{4-x^2}$.

4.1. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

4.2. Seja f a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0,4\}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \ln(-x) & \text{se } x < 0 \\ \frac{4-x}{x-\sqrt{4x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

5. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$ tal que $g(x) = mx + b$, com $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$ e $b \in \mathbb{R}$. Sabe-se que o gráfico de g é assíntota do gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$.

Considere a função h , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \frac{x^2}{f(-x)-g(\frac{x}{m})}$. Mostre que o gráfico de h admite uma assíntota quando $x \rightarrow -\infty$ e escreva uma equação que a defina.

6. Num hipermercado o preço de venda, em euros, de um quilograma de cerejas é dado por:

$$V(t) = \frac{2}{3}t + 8 - 2 \ln(t^2 + 7t + 1), \text{ com } t \in [0,10]$$

onde t representa o tempo, em semanas, decorrido após o início da sua comercialização.

6.1. Ao fim de quanto tempo foi mínimo o preço de venda de cada quilograma de cerejas? Qual foi esse preço?
[Apresente o resultado em euros.](#)

6.2. Durante as dez semanas que as cerejas estiveram à venda, o hipermercado comprou cada quilograma por 3 euros. O número de quilogramas que vendeu, em milhares, é dado por:

$$Q(t) = 4t^2 e^{-0,5t}, \text{ com } t \in [0,10]$$

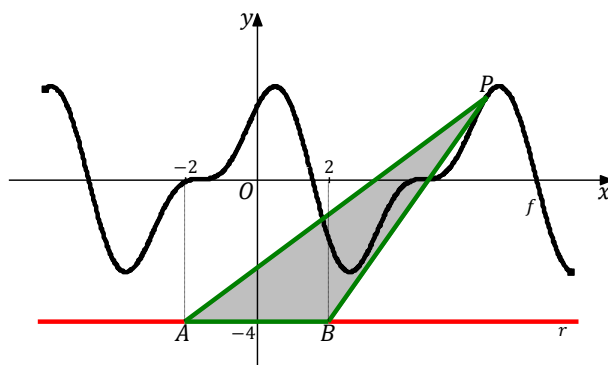
Recorrendo à calculadora gráfica, determine durante quanto tempo o lucro do hipermercado foi superior a 2000 euros.

Na sua resposta deve:

- escrever a condição que permite resolver o problema.
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema.
- indicar os valores que t que são solução do problema.

[Apresente os valores que retirar da calculadora arredondados às milésimas e a resposta à questão em semanas e dias, com os dias arredondados às unidades.](#)

7. Na figura estão representados em referencial o.n. xOy parte do gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a \sin(2x) + a^2 \cos x$, com $a > 1$, a reta r de equação $y = -4$ e o triângulo $[ABP]$.



Os pontos A e B pertencem à recta r e têm abcissa -2 e 2 respetivamente. O ponto P desloca-se sobre o gráfico da função f , para cada posição de P seja x a sua abcissa.

Mostre que existe pelo menos uma abcissa de P , pertencente ao intervalo $]0, \pi[$, tal que a área do triângulo $[ABP]$ é igual a $4a + 4$.

SOLUCIONÁRIO

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. A 2. B 3. B 4. C 5. D 6. C 7. A 8. D

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.1. $\frac{1}{2} \text{cis } \frac{2\pi}{3}$ 1.2. $x = 1$

2.1

x_i	-4	0	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{15}$

$\mu = \frac{2}{15}$; soma esperada: $\frac{2}{15} \times 15000 = 2000$.

4.1. $g''(x) = xe^{4-x^2}(6 - 4x^2)$; O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $[-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0]$ e em $[\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty[$, tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}]$ e em $[0, \frac{\sqrt{6}}{2}]$ e tem pontos de inflexão em $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, em $x = 0$ e em $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

4.2. A.V.: $x = 0$; A.H.: $y = 0$, quando $x \rightarrow -\infty$ e $y = -1$, quando $x \rightarrow +\infty$.

5. $y = -\frac{x}{m+1}$.

6.1. O preço de venda de cada quilograma de cerejas foi mínimo passadas quatro semanas. Esse preço foi de, aproximadamente, 3,05 euros ($V(4) \approx 3,05$)

6.2. $(V(t) - 2) \times Q(t) > 2 \Leftrightarrow t \in]a, b[\cup]c, 10]$, com $a \approx 0,572$, $b \approx 2,37$ e $c \approx 6,126$. O lucro do hipermercado foi superior a 2000 euros durante $(b - a) + (10 - c) \approx 5,672$ semanas, isto é, durante, aproximadamente, 5 semanas e 5 dias ($0,672 \times 7 \approx 5$).