



GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Considere uma caixa com vinte compartimentos numerados de 1 a 20. Pretende-se guardar nessa caixa doze bolas, uma por compartimento: cinco pretas, indistinguíveis; quatro brancas numeradas de 1 a 4; três azuis, numeradas de 1 a 3.

De quantas maneiras distintas se pode fazê-lo?

A ${}^{20}C_5 \times {}^{15}A_4 \times 3!$

B ${}^{20}C_{12} \times {}^{12}C_5 \times 7!$

C ${}^{20}C_5 \times 7!$

D ${}^{20}C_{12} \times {}^{12}C_5 \times 4! \times 3!$

2. Considere uma certa linha n do triângulo de Pascal tal que ${}^nC_{308} + {}^nC_{309} = {}^{n+1}C_{1707}$.

Qual é o valor da soma de todos os elementos da linha seguinte, excluindo o primeiro e o último?

A $2 \times (2^{2015} - 1)$

B 2^{2016}

C $2 \times (2^{2014} - 1)$

D 2^{2015}

3. Seja (v_n) a sucessão definida por $v_n = \log_4(2^{3n-1})$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

A (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{2}$.

B (v_n) é uma progressão aritmética de razão 2.

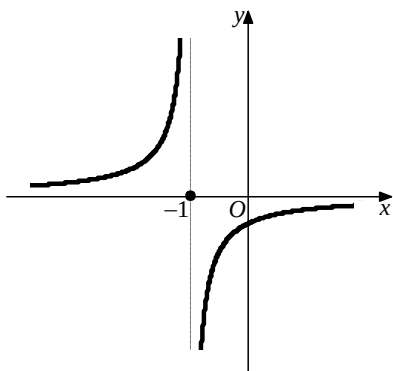
C (v_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

D (v_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{3}{2}$.

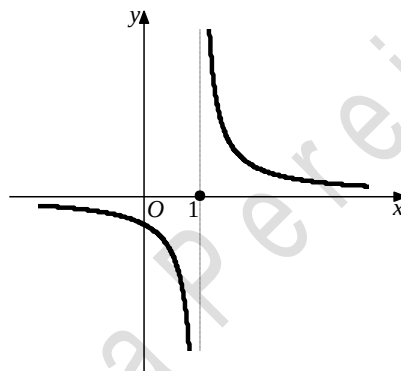
4. Sejam (u_n) a sucessão definida por $u_n = \frac{1}{n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}$ e f uma função de domínio $\mathbb{R}$ tal que $\lim f(u_n - 2) = +\infty$.

Em qual das seguintes opções pode estar representado parte do gráfico da função f ?

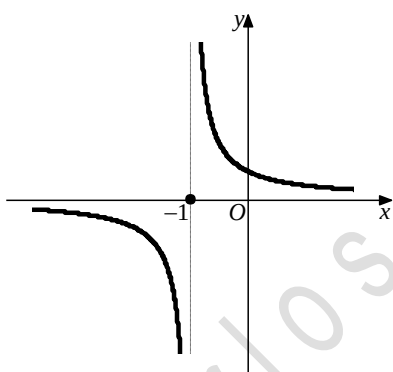
A



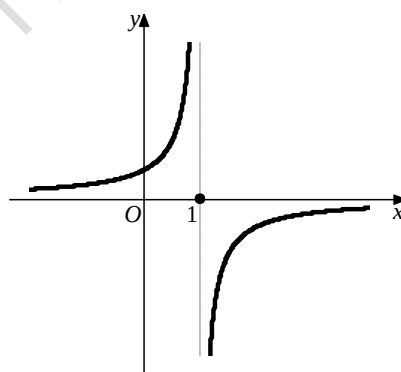
B



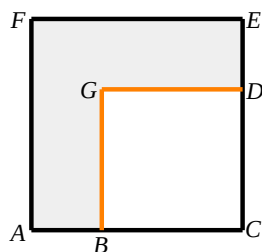
C



D



5. Na figura estão representados os quadrados $[ACEF]$ e $[BCDG]$. Sabe-se que o Ponto D pertence ao lado $[CE]$ de tal modo que $\overline{CD} = 2\overline{DE}$.



Seja a o valor da área do polígono $[ABGDEF]$ e b o valor da área do trapézio $[DEFG]$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A

$$\overline{AD} \cdot \overline{FC} = a$$

B

$$\overline{AD} \cdot \overline{FC} = b$$

C

$$\overline{AD} \cdot \overline{FC} < a$$

D

$$\overline{AD} \cdot \overline{FC} > a$$

6. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(2ax)}{x^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{\ln(x+a) - \ln a}{4x} & \text{se } x > 0 \end{cases}, \text{ com } a \in \mathbb{R}^+$$

Sabe-se que a função g tem limite no ponto de abscissa 0. Qual é o valor de a ?

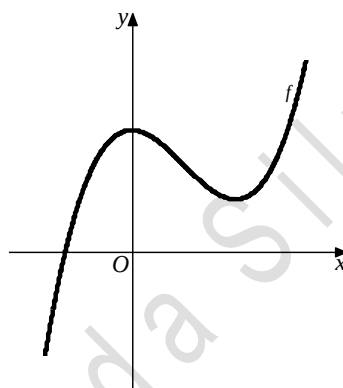
A $\frac{1}{8}$

B $\frac{1}{2}$

C 2

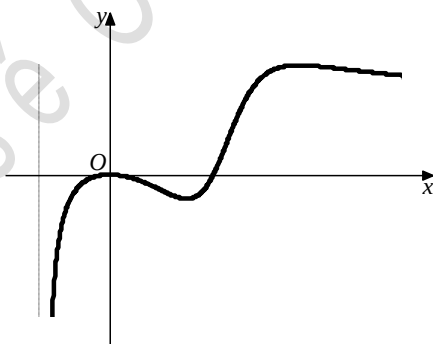
D 8

7. Na figura está representado em referencial o.n. xOy parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.

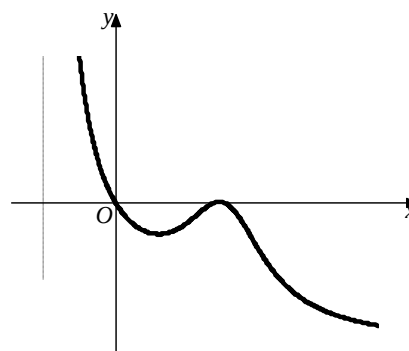


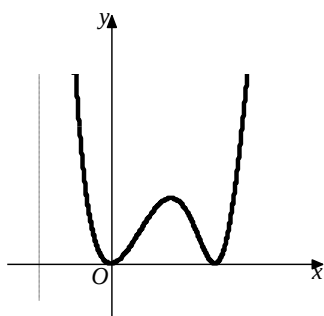
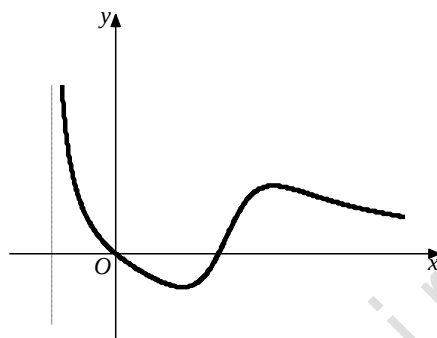
Seja g a função definida por $g(x) = \ln(f(x))$. Em qual das opções seguintes pode estar representado parte do gráfico da função g' , função derivada de g .

A



B



C**D**

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o polinómio $p(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Em qual das seguintes opções não podem estar duas raízes do polinómio p ?

A 2 e $1+i$

B $\text{cis } \frac{\pi}{4}$ e $\text{cis } \frac{3\pi}{4}$

C i^{4n+5} , $n \in \mathbb{N}$ e $\text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

D $2+3i$ e $2-3i$

GRUPO II – ÍTEMS DE RESPOSTA ABERTA

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \frac{1 + \left(i \text{cis } \frac{\pi}{9}\right)^{27}}{\sqrt{3}i - 1} \times \left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$.

Determine o menor $n \in \mathbb{N}$, de modo que a imagem geométrica de $(z_1)^n$ pertença à região do plano de Argand definida pela condição $|\arg(z)| = \frac{\pi}{12}$.

2. Num saco estão alguns dados cúbicos numerados de 1 a 6 e indistinguíveis ao tacto.

Sabe-se que:

- o número de dados viciados é o dobro do número de dados equilibrados;
- lançando qualquer um dos dados viciados, a probabilidade de sair face numerada com um número par é 15%.

2.1. Escolhe-se, ao acaso, um dos dados do saco. Depois de lançado, verifica-se que saiu um número ímpar. Qual é a probabilidade de ser um dado equilibrado?

2.2. Lançando qualquer um dos dados viciados, sabe-se ainda que:

- qualquer uma das faces numeradas com um número par tem igual probabilidade de sair;
- a probabilidade de sair uma face numerada com um número primo, sabendo que está numerada com um número ímpar é $\frac{1}{5}$;
- saindo uma face numerada com um número primo, a probabilidade de estar numerada com um múltiplo de 3 é 0,55.

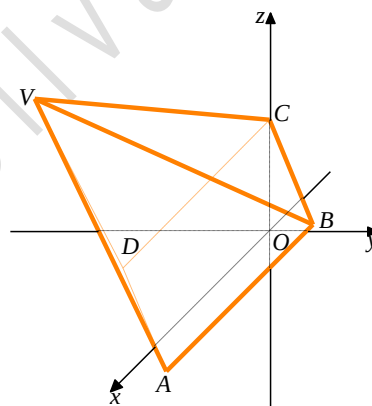
Lança-se um dado viciado. Considere a variável aleatória X : «número da face voltada para cima».

Defina por meio de uma tabela a distribuição de probabilidades da variável aleatória X . [Apresente as probabilidades na forma de dízima.](#)

3. Na figura está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[ABCDV]$ cuja base é o quadrilátero $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- o ponto V tem a cota igual a 5 e abscissa positiva;
- o ponto A pertence ao plano xOz ;
- a abscissa do ponto A é o dobro da abscissa do ponto V ;
- O ponto C pertence ao eixo Oz ;
- uma equação do plano ACV é $5x + 8y + 10z = 30$;
- $\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{CA} = -56$



3.1. Mostre que $A(8, 0, -1)$ e que $V(4, -5, 5)$.

Sugestão: designe por a , com $a > 0$, a abscissa do ponto V .

3.2. Admita que $D(0, -4, -1)$. Mostre que uma condição que define o plano ABC é $x - 2y + 2z = 6$ e determine a altura da pirâmide.

4. Considere a função g , de domínio $[0, +\infty[$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - x^2}{e^{-2x+2} - 1} & \text{se } x < 1 \\ \frac{x^2 \ln x - 2}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

4.1. Verifique se a função g é contínua em $x=1$ e conclua sobre a existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

4.2. Para $x \in [1, +\infty[$, estude o gráfico da função g quando ao sentido das concavidades e mostre que tem um único ponto de inflexão de coordenadas $\left(2, \ln\left(\frac{4}{e}\right)\right)$.

4.3. Seja r uma recta de inclinação α , com $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $7\sin(\alpha + \pi) = -2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

Para $x \in [1, +\infty[$, considere o ponto P , pertencente ao gráfico de g , tal que a recta tangente ao gráfico de g no ponto P é perpendicular à recta r .

Recorrendo à calculadora gráfica, determine as coordenadas de P .

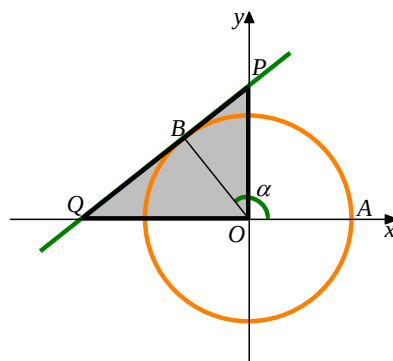
Na sua resposta deve:

- escrever a condição que permite resolver o problema;
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema;
- indicar as coordenadas do ponto P , arredondadas às décimas.

5. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy , o círculo trigonométrico e o triângulo $[OPQ]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência e ao semi-eixo positivo Ox ;
- o ponto P pertence ao eixo Oy ;
- o ponto Q pertence ao eixo Ox ;
- a recta QP é tangente ao círculo no ponto B .



Seja α a amplitude do ângulo AOB , $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

5.1. Mostre que a área do triângulo $[OPQ]$ é dada em função α de por $g(\alpha) = -\frac{1}{\sin(2\alpha)}$.

5.2. Determine o valor de α para o qual a área do triângulo $[OPQ]$ é mínima.

Interprete geometricamente o resultado obtido e determine o valor mínimo da área do triângulo $[OPQ]$.

6. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que a sua derivada, f' , também é contínua em $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3+x) - f(3)}{x^2 - 3x} = 0;$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = 2.$

Sejam g , a função de domínio $[-3, 4]$, definida por $g(x) = f'(x) - f'(2)$ e h , a função de domínio $\mathbb{R}^-$, definida por

$$h(x) = f(x) + \frac{x^3 + 1}{e^{-x}} - x.$$

Considere as seguintes afirmações:

- A** A função f não tem extremos relativos.
- B** A função g tem pelo menos um zero.
- C** O gráfico da função h tem uma assíntota de equação $y = -2x + 2$, quando $x \rightarrow -\infty$.

Elabore uma composição na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Na sua resposta apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

F I M

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. B 2. A 3. D 4. C 5. C 6. B 7. D 8. B

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. $n = 35$

2.1. $\frac{5}{22}$

2.2.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,68	0,05	0,121	0,05	0,049	0,05

3.2. 6

4.1. A função g não é contínua em $x = 1$; Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\frac{3}{4}$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -2$ e como g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, o gráfico de g não tem assíntotas verticais.

4.2. Para $x \in [1, +\infty[$, o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $[1, 2]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[2, +\infty[$.

4.3. $P(a, g(a))$, com $a \approx 12$ e $g(a) = \frac{a^2 \ln a - 2}{a} \approx 29,7$

5.2. A área do triângulo $[OPQ]$ é mínima se $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. Se $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ então $\overline{OP} = \overline{OQ}$ pelo que o triângulo $[OPQ]$ é rectângulo e isósceles e a sua área é 1.

6. ☒ A Falsa
☒ B Verdadeira
☒ C Verdadeira