



EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

PROVA MODELO N.º 6 – PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

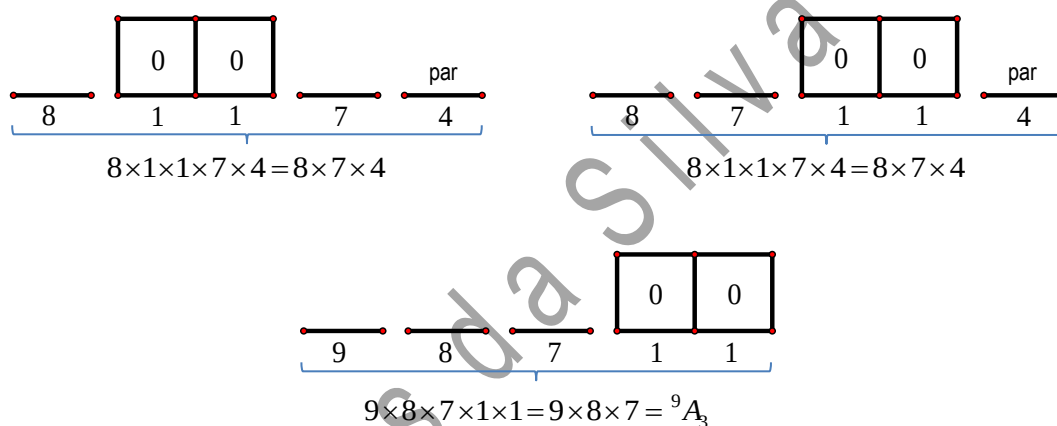
12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Site: <http://recursos-para-matematica.webnode.pt/>

Facebook: <https://www.facebook.com/recursos-para-matematica>

GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Os dois zeros podem ficar: um na casa dos milhares e outro no das centenas; um na casa das centenas e outro no das dezenas; um na casa das dezenas e outro no das unidades (a casa das dezenas de milhar não pode ser ocupada por um zero). Para o número ser par, o último algarismo tem de ser par. Além disso, não pode haver mais algarismos repetidos, isto é, apenas os dois zeros se repetem. Consideremos o seguinte esquema:

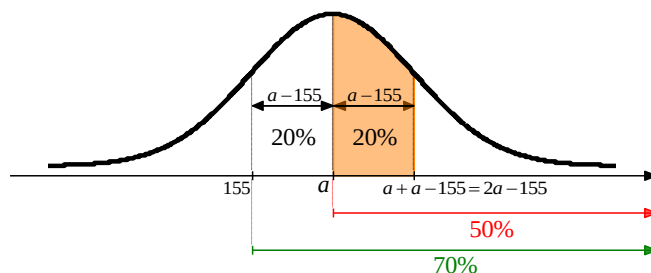


Logo, o número pedido é $8 \times 7 \times 4 \times 2 + {}^9A_3 = 952$.

Resposta: A

2. Como $P(X > 155) = 70\%$, tem-se que o valor médio da variável aleatória X é superior a 155, isto é, $a > 155$.

Consideremos a seguinte figura:



Seja Y a variável aleatória Y : «número de rapazes em sete com altura compreendida entre a e $2a - 155$ centímetros».

Pretende-se determinar $P(Y = 2)$. Tem-se que Y é uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros $n = 7$ e $p = P(a < X < 2a - 155) = 20\% = 0,2$, isto é $Y \sim \text{Bin}(7; 0,2)$. Assim:

$$P(Y = 2) = {}^7C_2 \times (0,2)^2 \times (0,8)^5 \approx 0,275$$

Resposta: **C**

3. Como a , b e c são as medidas dos lados de um triângulo rectângulo e $a < b < c$, então:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow c^2 - a^2 = b^2$$

Assim:

$$\log_4(c - a) + \log_4(c + a) = 3 \Leftrightarrow \log_4((c - a)(c + a)) = 3 \Leftrightarrow \log_4(c^2 - a^2) = 3 \Leftrightarrow \log_4(b^2) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_4 b = 3 \Leftrightarrow \log_4 b = \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = 4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow b = \sqrt{4^3} \Leftrightarrow b = \sqrt{64} \Leftrightarrow b = 8$$

Resposta: **C**

4. Tem-se que a recta de equação $2y - 6x = 1 \Leftrightarrow 2y = 6x + 1 \Leftrightarrow y = 3x + \frac{1}{2}$ é assíntota oblíqua do gráfico de g , quando $x \rightarrow +\infty$. Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 3x) = \frac{1}{2}$$

Assim:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3g\left(\frac{1}{x}\right) - x \left(g\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 \right) \stackrel{i)}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(3g(y) - \frac{1}{y} (g(y))^2 \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(3g(y) - \frac{(g(y))^2}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{3yg(y) - (g(y))^2}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-g(y)(g(y) - 3y)}{y} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(y)}{y} (g(y) - 3y) \right) =$$

$$= - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(y)}{y} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} (g(y) - 3y) = -3 \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

i) Mudança de variável: se $x \rightarrow 0^+$ então $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$. Seja $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$, $y \rightarrow +\infty$.

Resposta: **B**

5. Tem-se que $h(0) = \cos(0) - 1 + (a+b)\sin(0) = 1 - 1 + (a+b) \times 0 = 0$. Logo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 0}{x - 0} \stackrel{h(0)=0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(0) \Rightarrow h'(0) = 2a$$

Tem-se, $h'(x) = -a \sin(ax) - 0 + (a+b) \times a \cos(ax) = -a \sin(ax) + a(a+b) \cos(ax)$. Assim:

$$h'(0) = 2a \Leftrightarrow -a \sin(0) + a(a+b) \cos(0) = 2a \Leftrightarrow -a \times 0 + a(a+b) \times 1 = 2a \Leftrightarrow a(a+b) = 2a \Leftrightarrow a \neq 0 \Rightarrow a+b = 2$$

Das opções apresentadas, a única em que $a+b=2 \wedge a \neq 0$ é a **D**, sendo essa a resposta correcta.

De uma outra forma:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - 1 + (a+b)\sin(ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+b)\sin(ax)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(ax) - 1)(\cos(ax) + 1)}{x(\cos(ax) + 1)} + (a+b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} \times a = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(ax)}{x(\cos(ax) + 1)} + a(a+b) \times 1 \stackrel{i)}{=} a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(ax)}{\cos(ax) + 1} + a(a+b) = \\ &\stackrel{i)}{=} a \times 1 \times \frac{-\sin(0)}{\cos(0) + 1} + a(a+b) = a \times \frac{0}{0+1} + a(a+b) = a \times 0 + a(a+b) = a(a+b) \end{aligned}$$

i) Se $x \rightarrow 0^-$ então $ax \rightarrow 0$ (limite notável)

Resposta: **D**

6. A recta r pode ser definida em $\mathbb{C}$ por uma condição do tipo $|z - z_1| = |z - z_2|$, onde z_1 e z_2 são raízes quartas consecutivas de um certo número complexo z . Portanto, $z_2 = i z_1$ (ou $z_1 = i z_2$). Das opções apresentadas, a única que verifica a condição $z_2 = i z_1$ é a da opção **D**:

$$|z - 1 - 3i| = |z + 3 - i| \Leftrightarrow |z - (1 + 3i)| = |z - (-3 + i)|$$

Tomando $z_1 = 1 + 3i$, tem-se $z_2 = i(1 + 3i) = i + 3i^2 = -3 + i$

Nota: se $z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$ e z_2 forem raízes quartas consecutivas de um certo número complexo z , então:

$$z_2 = \rho \operatorname{cis} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \rho \operatorname{cis} \theta \times \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = \rho \operatorname{cis} \theta \times i = i z_1$$

Resposta: **D**

7. Um vector director da recta r é $\vec{r}(a^2, 0, -4)$ e um vector normal do plano α é $\vec{n}_\alpha(a, 0, 2)$.

Como a recta r é perpendicular ao plano α , os vectores $\vec{r}$ e $\vec{n}_\alpha$ são colineares, isto é, $\exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \vec{r} = k \vec{n}_\alpha$.

Assim,

$$\begin{aligned} \vec{r} = k \vec{n}_\alpha &\Leftrightarrow (a^2, 0, -4) = k(a, 0, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = ka \\ 0 = 0 \\ -4 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = -2a \\ 0 = 0 \\ k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a = 0 \\ 0 = 0 \\ k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+2) = 0 \\ 0 = 0 \\ k = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \vee a + 2 = 0 \\ 0 = 0 \\ k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \vee a = -2 \\ 0 = 0 \\ k = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Como $a \neq 0$, tem-se $a = -2$.

Resposta: **A**

8. Seja r a razão da progressão aritmética (u_n) . Tem-se:

$$u_{10} = u_4 + 6r \Leftrightarrow 33 = 15 + 6r \Leftrightarrow 18 = 6r \Leftrightarrow r = \frac{18}{6} \Leftrightarrow r = 3$$

Logo, $u_n = u_4 + (n-4) \times r = 15 + 3(n-4) = 15 + 3n - 12 = 3n + 3$.

$$\begin{aligned} \text{Portanto, } \lim \left(\frac{u_n}{3n-6} \right)^{2n} &= \lim \left[\left(\frac{3n+3}{3n-6} \right)^n \right]^2 = \lim \left[\frac{\cancel{3n} \left(1 + \frac{3}{\cancel{3n}} \right)}{\cancel{3n} \left(1 - \frac{6}{\cancel{3n}} \right)} \right]^2 = \lim \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{\left(1 - \frac{2}{n} \right)^n} \right]^2 = \frac{\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{\lim \left(1 - \frac{2}{n} \right)^n} = \\ &= \left(\frac{e^1}{e^{-2}} \right)^2 = \left(e^{1-(-2)} \right)^2 = \left(e^3 \right)^2 = e^6 \end{aligned}$$

Resposta: **C**

1.

- Tem-se que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, para todo o x real. Assim:

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{9}\right)}{\sqrt{6} + \sqrt{2}i} \stackrel{\text{sen } x = \text{sen}(\pi - x)}{=} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{7\pi}{9}\right)}{2\sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{6}} = \\
 &= \frac{\overbrace{\cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right)}^{\cos\left(2 \times \frac{\pi}{9}\right)} + i\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{2\sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{2\sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{6}} = \frac{\text{cis}\frac{2\pi}{9}}{2\sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{cis}\left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{6}\right) = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4}\text{cis}\frac{\pi}{18}
 \end{aligned}$$

i) Escrevendo $\sqrt{6} + \sqrt{2}i$ na forma trigonométrica, vem: $|\sqrt{6} + \sqrt{2}i| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Sendo θ um argumento de $\sqrt{6} + \sqrt{2}i$, tem-se $\text{tg}\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\theta \in 1.^\circ$ quadrante, pelo que $\theta = \frac{\pi}{6}$. Assim $\sqrt{6} + \sqrt{2}i = 2\sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{6}$.

- Seja $z = \rho\text{cis}\theta$ e $z \neq 0$. Portanto, $z^2 = (\rho\text{cis}\theta)^2 = \rho^2\text{cis}(2\theta)$ e $\bar{z} = \rho\text{cis}(-\theta)$. Assim, para $z \neq 0$, vem-se:

$$z^2 = w\bar{z} \Leftrightarrow \frac{z^2}{\bar{z}} = w \Leftrightarrow \frac{\rho^2\text{cis}(2\theta)}{\rho\text{cis}(-\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\text{cis}\frac{\pi}{18} \Leftrightarrow \frac{\rho^2}{\rho}\text{cis}(2\theta - (-\theta)) = \frac{\sqrt{2}}{4}\text{cis}\frac{\pi}{18} \Leftrightarrow \rho\text{cis}(3\theta) = \frac{\sqrt{2}}{4}\text{cis}\frac{\pi}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 3\theta = \frac{\pi}{18} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \theta = \frac{\pi}{54} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Logo:

$$\text{se } k = 0 \rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{4}\text{cis}\frac{\pi}{54};$$

$$\text{se } k = 1 \rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{4}\text{cis}\left(\frac{\pi}{54} + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\text{cis}\frac{37\pi}{54};$$

$$\text{se } k = 2 \rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{4}\text{cis}\left(\frac{\pi}{54} + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\text{cis}\frac{73\pi}{54}$$

$\therefore$ O conjunto solução da condição $z^2 = w\bar{z}$ $\wedge$ $z \neq 0$ é $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{4}\text{cis}\frac{\pi}{54}, \frac{\sqrt{2}}{4}\text{cis}\frac{37\pi}{54}, \frac{\sqrt{2}}{4}\text{cis}\frac{73\pi}{54} \right\}$.

2. Tem-se que:

$$P(A) + P(A) + P(B|A) = 1 \Leftrightarrow 2P(A) + \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1 \Leftrightarrow 2(P(A))^2 + 0,08 = P(A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(P(A))^2 - P(A) + 0,08 = 0 \Leftrightarrow P(A) = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times 0,08}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 0,1 \quad \vee \quad P(A) = 0,4$$

Como $P(A) > 0$, vem $P(A) = 0,4$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } P(A|\bar{A} \cup \bar{B}) &= \frac{P(A \cap (\bar{A} \cup \bar{B}))}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \frac{P(\overline{(A \cap A)} \cup (A \cap \bar{B}))}{P(\bar{A} \cap \bar{B})} = \frac{P(\emptyset \cup (A \cap \bar{B}))}{1 - P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{1 - 0,08} = \\ &= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - 0,08} = \frac{0,4 - 0,08}{0,92} = \frac{0,32}{0,92} = \frac{8}{23} \end{aligned}$$

3. $P(A|B)$ é a probabilidade de pelos menos cinco dos funcionários escolhidos sexo do sexo feminino sabendo que os seis funcionários escolhidos não são licenciados.

Sabe-se que um terço dos funcionários são licenciados e portanto dois terços não são licenciados. Assim, o número de funcionários que não são licenciados é $\frac{2}{3} \times 120 = 80$. Destes, 20% são do sexo masculino, ou seja, $0,2 \times 80 = 16$ são do sexo masculino e os restantes, 64, são do sexo feminino.

O número de casos possíveis é ${}^{80}A_6$, é o número de maneiras distintas de escolher, ordenadamente, seis funcionários entre os oitenta que não são licenciados. Para o número de casos favoráveis temos de contar todas maneiras distintas de escolher seis funcionários que não sejam licenciados e em que pelo menos cinco sejam do sexo masculino. Para tal consideram-se dois casos: escolher cinco funcionários não licenciados do sexo feminino e um do sexo masculino. O número de maneiras distintas de o fazer é ${}^{64}C_5 \times {}^{16}C_1 = 16 \times {}^{64}C_5$; escolher seis funcionários não licenciados do sexo feminino. O número de maneiras distintas de o fazer é ${}^{64}C_6$. Resta-nos permutar os seis funcionários escolhidos pelas seis tarefas diferenciadas que têm de desempenhar. O número de maneiras de o fazer é $6!$. Logo, o número de casos favoráveis é $(16 \times {}^{64}C_5 + {}^{64}C_6) \times 6!$.

Pela regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis. Então, a probabilidade pedida é $\frac{(16 \times {}^{64}C_5 + {}^{64}C_6) \times 6!}{{}^{80}A_6}$.

4.

4.1. Para determinar em que dia a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme é máxima recorre-se ao estudo do sinal da derivada da função M :

$$\begin{aligned}
 \bullet M'(t) &= (4t^2 + 48t + 144)' e^{-0,2t-1,2} + (4t^2 + 48t + 144)(e^{-0,2t-1,2})' = \\
 &= (8t + 48)e^{-0,2t-1,2} + (4t^2 + 48t + 144) \times (-0,2)e^{-0,2t-1,2} = \\
 &= (8t + 48)e^{-0,2t-1,2} + (-0,8t^2 - 9,6t - 28,8)e^{-0,2t-1,2} = \\
 &= (-0,8t^2 - 9,6t + 8t - 28,8 + 48)e^{-0,2t-1,2} = (-0,8t^2 - 1,6t + 19,2)e^{-0,2t-1,2} \\
 \bullet M'(t) = 0 &\Leftrightarrow (-0,8t^2 - 1,6t + 19,2)e^{-0,2t-1,2} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,2t-1,2} = 0}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}} \vee -0,8t^2 - 1,6t + 19,2 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow t = \frac{1,6 \pm \sqrt{(-1,6)^2 - 4 \times (-0,8) \times 19,2}}{2 \times (-0,8)} \Leftrightarrow t = -6 \vee t = 4
 \end{aligned}$$

Como $t \in [0, 20]$, vem $t = 4$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função M' , vem:

t	0		4		20
i) $M'(t)$	+	+	0	-	-
$M(t)$	mín.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$	mín.

i) Observe que o sinal de M' depende apenas do sinal de $-0,8t^2 - 9,6t + 19,2$ pois $e^{-0,2t-1,2} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

A percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme é máxima no dia 8 de Junho de 2015 ($t = 4$ corresponde ao dia 8 de Junho de 2015). O valor dessa percentagem é:

$$M(4) = (4 \times 4^2 + 48 \times 4 + 144)e^{-0,2 \times 4 - 1,2} = 400e^{-2} \approx 54,1\%$$

4.2. Tem-se que $4t^2 + 48t + 144 = 0 \Leftrightarrow t = -6$ (raiz dupla). Logo, $4t^2 + 48t + 144 = 4(t+6)^2$.
F.R.

Assim, para $t \in [0, 20]$ tem-se:

$$M(t) \geq P(t) \Leftrightarrow (4t^2 + 48t + 144)e^{-0,2t-1,2} \geq 5(t+6)^2 e^{-0,347t-0,68814} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(t+6)^2 e^{-0,2t-1,2} \geq 5(t+6)^2 e^{-0,347t-0,68814} \Leftrightarrow 4e^{-0,2t-1,2} \geq 5e^{-0,347t-0,68814} \Leftrightarrow$$

$\forall t \in [0, 20], (t+6)^2 > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-0,2t-1,2}}{e^{-0,347t-0,68814}} \geq \frac{5}{4} \Leftrightarrow e^{-0,2t-1,2+0,347t+0,68814} \geq \frac{5}{4} \Leftrightarrow e^{0,147t-0,51186} \geq \frac{5}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,147t - 0,51186 \geq \ln\left(\frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right) + 0,51186}{0,147}$$

$\approx 5,0000241586 \approx 5$

Logo, a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme não foi inferior à percentagem de espectadores que frequentaram o CINEPLUS entre os dias 9 de Junho de 2015 ($t = 5$) e 24 de Junho de 2015 ($t = 20$), inclusive, ou seja, durante dezasseis dias.

5.

5.1.

▪ Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(6x) - \ln 4}{e^{3x-1} - e} = \frac{\ln(0^+) - \ln 4}{e^{3 \times 0 - 1} - e} = \frac{-\infty - \ln 4}{e^{-1} - e} = \frac{-\infty}{\underbrace{e^{-1} - e}_{<0}} = +\infty$$

Logo, a recta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de g .

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^-} \frac{\ln(6x) - \ln 4}{e^{3x-1} - e} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^-} \frac{\ln\left(\frac{6x}{4}\right)}{e^{3x-1} - e} = \frac{1}{e} \times \lim_{x \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^-} \frac{\ln\left(\frac{3}{2}x\right)}{e^{3\left(x-\frac{2}{3}\right)} - 1} = \frac{1}{e} \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\left(y + \frac{2}{3}\right)\right)}{e^{3y} - 1} =$$

$$= \frac{1}{e} \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\ln\left(\frac{3}{2}y + 1\right)}{e^{3y} - 1} = \frac{1}{e} \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\ln\left(\frac{3}{2}y + 1\right)}{\frac{3}{2}y} \times \frac{3}{2}}{\frac{e^{3y} - 1}{3y} \times 3} = \frac{1}{e} \times \frac{\frac{3}{2} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\ln\left(\frac{3}{2}y + 1\right)}{\frac{3}{2}y}}{3 \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{3y} - 1}{3y}} = \frac{1}{e} \times \frac{\frac{3}{2} \times 1}{3 \times 1} = \frac{1}{e} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{2e}$$

i) **Mudança de variável:** se $x \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^-$ então $x - \frac{2}{3} \rightarrow 0^-$. Seja $y = x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = y + \frac{2}{3}$, $y \rightarrow 0^-$.

ii) Se $y \rightarrow 0^-$ então $\frac{3}{2}y \rightarrow 0^-$ e $3y \rightarrow 0^-$ (limites notáveis)

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^+} \frac{\ln(x^3) - 1}{x^2} = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{3\ln\left(\frac{2}{3}\right) - 1}{\frac{4}{9}} = \frac{27\ln\left(\frac{2}{3}\right) - 9}{4}$$

Como $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^+} f(x)$ são finitos, a recta de equação $x = \frac{2}{3}$ não é assíntota vertical do gráfico de g .

Como g é contínua em $\mathbb{R}^+ \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$, o gráfico de g não tem outras assíntotas verticais.

▪ Assíntotas horizontais:

Tem-se que $D_g = \mathbb{R}^+$, portanto, se o gráfico de g tiver uma assíntota vertical será quando $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\ln x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \\ &= 0 \times \frac{3}{+\infty} - \frac{1}{+\infty} = 0 \times 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

Logo, a recta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de g , quando $x \rightarrow +\infty$.

5.2. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico de f em $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$, recorre-se ao estudo da sua segunda

derivada. Para $x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$, tem-se $f'(x) = g(x) = \frac{\ln(x^3) - 1}{x^2} \underset{x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow x > 0}{=} \frac{3\ln x - 1}{x^2}$.

$$\bullet f''(x) = \frac{3 \times \frac{1}{x} \times x^2 - 2x(3\ln x - 1)}{(x^2)^2} = \frac{3x - 6x\ln x + 2x}{x^4} = \frac{5x - 6x\ln x}{x^4} = \frac{x(5 - 6\ln x)}{x^4} = \frac{5 - 6\ln x}{x^3}$$

$$\bullet f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5 - 6\ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 5 - 6\ln x = 0 \quad \wedge \quad x^3 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \ln x = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = e^{\frac{5}{6}} \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{e^5}$$

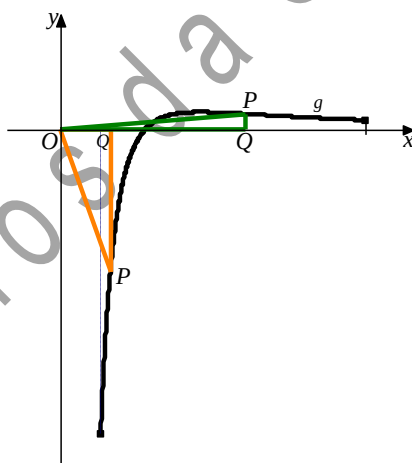
Condição universal em $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$

Fazendo um quadro de variação do sinal da função f'' , vem:

x	$\frac{2}{3}$		$\sqrt[6]{e^5}$	$+\infty$
$5-6\ln x$	+	+	0	-
x^3	+	+	+	+
$f''(x)$	+	+	0	-
$f(x)$		$\cup$	p.i.	$\cap$

O gráfico da função f tem a concavidade votada para baixo em $[\sqrt[6]{e^5}, +\infty[$, tem a concavidade votada para cima em $[\frac{2}{3}, \sqrt[6]{e^5}]$ e tem ponto de inflexão em $x = \sqrt[6]{e^5}$.

5.3. Começemos por considerar a seguinte figura, onde se faz a representação gráfica da função g no intervalo $[\frac{2}{3}, 5]$ e se representam dois triângulos nas condições do enunciado:

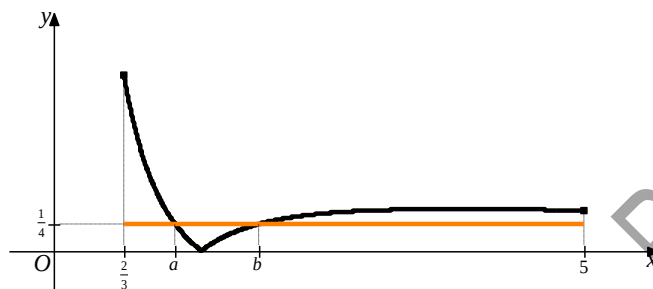


As coordenadas do ponto P são do tipo $(x, g(x))$ e as do ponto Q são do tipo $(x, 0)$. A medida do comprimento da base do triângulo $[OPQ]$ é dada por $\overline{OQ} = |x| = x$ e a medida do comprimento da sua altura é dada por $\overline{PQ} = |g(x)|$. Assim:

$$A_{[OPQ]} = \frac{\overline{OQ} \times \overline{PQ}}{2} = \frac{x \times |g(x)|}{2} = \frac{x \times \left| \frac{\ln(x^3) - 1}{x^2} \right|}{2} = \frac{x}{2} \times \left| \frac{3\ln x - 1}{x^2} \right|$$

Logo, as soluções da equação $A_{[OPQ]} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \times \left| \frac{3 \ln x - 1}{x^2} \right| = \frac{1}{4}$ no intervalo $\left[\frac{2}{3}, 5 \right]$ são as abscissas dos pontos P .

Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = \frac{x}{2} \times \left| \frac{3 \ln x - 1}{x^2} \right|$ e $y_2 = \frac{1}{4}$ na janela de visualização $\left[\frac{2}{3}, 5 \right] \times [0, 2]$.



Então, $A_{[OPQ]} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = a \vee x = b$, com $a \approx 1,152$ e $b \approx 1,923$.

Portanto, as coordenadas dos pontos P são $(a, g(a))$, com $g(a) = \frac{\ln(a^3) - 1}{a^2} \approx -0,434$ ou $(b, g(b))$, com $g(b) = \frac{\ln(b^3) - 1}{b^2} \approx 0,26$.

6.

6.1. Seja k a abscissa do ponto A . Como A pertence ao eixo Ox , vem $A(k, 0, 0)$. Como $\overline{OB} = 2\overline{OA}$ e $\overline{OC} = 3\overline{OA}$ e como B pertence ao eixo Oy e C pertence ao eixo Oz , vem $B(0, -2k, 0)$ e $C(0, 0, 3k)$

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vector normal do plano ABC . Este vector é perpendicular aos vectores $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, dois vectores não colineares do plano ABC .

Tem-se, $\overline{AB} = B - A = (0, -2k, 0) - (k, 0, 0) = (-k, -2k, 0)$ e $\overline{AC} = C - A = (0, 0, 3k) - (k, 0, 0) = (-k, 0, 3k)$.

Logo,

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-k, -2k, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-k, 0, 3k) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ka - 2kb = 0 \\ -ka + 3kc = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2kb = ka \\ 3kc = ka \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{a}{2} \\ c = \frac{a}{3} \end{cases}$$

Concluimos então que as coordenadas do vector $\vec{n}$ são da forma $\left(a, -\frac{a}{2}, \frac{a}{3}\right)$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tomando, por exemplo, $a = 6$, um vector normal de ABC é $\vec{n}(6, -3, 2)$. Logo, como $D \in ABC$, uma equação do plano ABC pode ser, $6(x-0) - 3(y-1) + 2(z+2) = 0 \Leftrightarrow 6x - 3y + 3 + 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow 6x - 3y + 2z = -7$.

6.2. Tem-se que $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \operatorname{tg}^2(\pi - \alpha) = (-\operatorname{tg} \alpha)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha$ e $\operatorname{sen}(-2\alpha) = -\operatorname{sen}(2\alpha)$. Assim:

$$\operatorname{tg}^2(\pi - \alpha) + 10\operatorname{sen}(-2\alpha) = \operatorname{tg}^2 \alpha - 10\operatorname{sen}(2\alpha) = \operatorname{tg}^2 \alpha - 10 \times 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

Tem-se:

$$\cos \alpha = \cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\|\overline{AB}\| \times \|\overline{AC}\|} = \frac{(-k, -2k, 0) \cdot (-k, 0, 3k)}{\sqrt{(-k)^2 + (-2k)^2 + 0^2} \times \sqrt{(-k)^2 + 0^2 + (3k)^2}} =$$

$$= \frac{k^2 + 0 + 0}{\sqrt{k^2 + 4k^2} \times \sqrt{k^2 + 9k^2}} = \frac{k^2}{\sqrt{5k^2} \times \sqrt{10k^2}} \stackrel{k>0}{=} \frac{k^2}{\sqrt{5k} \times \sqrt{10k}} = \frac{k^2}{\sqrt{50k^2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} - 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\frac{2}{100}} - 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{100}{2} - 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 49$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{2}{100} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{2}{100} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{98}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{\frac{98}{100}}$$

Como $\alpha \in 1.^\circ$ quadrante (α é agudo), vem $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{98}{100}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$.

Portanto, $\operatorname{tg}^2(\pi - \alpha) + 10\operatorname{sen}(-2\alpha) = \operatorname{tg}^2 \alpha - 10 \times 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 49 - 20 \times \frac{7\sqrt{2}}{10} \times \frac{\sqrt{2}}{10} = 49 - 20 \times \frac{7 \times 2}{100} =$

$$= 49 - 20 \times \frac{7 \times 2}{100} = 49 - \frac{14}{5} = \frac{231}{5}$$

7.

7.1.

- Tem-se que, $0 < a < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < a < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \pi - a < \pi$ e $0 < a < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} < \pi + a < \pi$.

Logo, $[\pi - a, \pi + a] \subset \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

- A função h é contínua em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ pois é o quociente entre duas funções contínuas no seu domínio: uma é a composição entre uma função polinomial e uma função trigonométrica, ambas contínuas no seu domínio; a outra é o produto entre uma função constante e o quadrado de uma função trigonométrica, ambas contínuas no seu domínio.

Portanto, a função h é contínua em $[\pi - a, \pi + a] \subset \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

$$h(\pi - a) = \frac{\sin(3(\pi - a))}{2\cos^2(\pi - a)} \stackrel{\cos(\pi - a) = -\cos a}{=} \frac{\sin(3\pi - 3a)}{2(-\cos a)^2} = \frac{\sin(\pi - 3a)}{2\cos^2 a} \stackrel{\sin(\pi - 3a) = \sin(3a)}{=} \frac{\sin(3a)}{2\cos^2 a}$$

$$h(\pi + a) = \frac{\sin(3(\pi + a))}{2\cos^2(\pi + a)} \stackrel{\cos(\pi + a) = -\cos a}{=} \frac{\sin(3\pi + 3a)}{2(-\cos a)^2} = \frac{\sin(\pi + 3a)}{2\cos^2 a} \stackrel{\sin(\pi + 3a) = -\sin(3a)}{=} \frac{-\sin(3a)}{2\cos^2 a}$$

Logo, $h(\pi - a) = -h(\pi + a)$ e portanto $h(\pi - a)$ e $h(\pi + a)$ têm sinais contrários ou $h(\pi - a) = h(\pi + a) = 0$.

Se $h(\pi - a) = h(\pi + a) = 0$ então a função h tem pelo menos dois zeros em $[\pi - a, \pi + a]$: $\pi - a$ e $\pi + a$. Se $h(\pi - a)$ e $h(\pi + a)$ têm sinais contrários então, pelo corolário do teorema de Bolzano, a função h tem pelo um zero no intervalo $]\pi - a, \pi + a[\subset [\pi - a, \pi + a]$.

$\therefore$ A função h tem pelo menos um zero em $[\pi - a, \pi + a]$.

- Tem-se $h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(3x)}{2\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow \sin(3x) = 0 \quad \wedge \quad \underbrace{2\cos^2 x \neq 0}_{\text{Condição universal em } \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]} \Leftrightarrow 3x = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, os zeros da função h são $\frac{2\pi}{3}$ ($k=2$), π ($k=3$) e $\frac{4\pi}{3}$ ($k=4$) e portanto, para que a função h tenha exactamente um zero no intervalo $]\pi - a, \pi + a[$ o valor máximo que a pode tomar é $a = \frac{\pi}{3}$ ($\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$).

7.2.

$$\blacksquare h(\pi) = \frac{\sin(3\pi)}{2\cos^2(\pi)} = \frac{0}{2 \times (-1)^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \blacksquare h'(\pi) &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{h(x) - h(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{\sin(3x)}{2\cos^2 x} - 0}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{2\cos^2 x} \times \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(3x)}{x - \pi} \stackrel{i)}{=} \frac{1}{2 \times (-1)^2} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(3(y + \pi))}{y} = \\ &= \frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(3y + 3\pi)}{y} = \frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin(3y + \pi)}^{-\sin(3y)}}{y} = -\frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(3y)}{3y} \times \stackrel{ii)}{3} = -\frac{1}{2} \times 1 \times 3 = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

i) **Mudança de variável:** se $x \rightarrow \pi$ então $x - \pi \rightarrow 0$. Seja $y = x - \pi \Leftrightarrow x = y + \pi$, $y \rightarrow 0$.

ii) Se $y \rightarrow 0$ então $3y \rightarrow 0$ (limite notável)

▪ Seja r a recta tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa π . Então, $m_r = h'(\pi) = -\frac{3}{2}$ e portanto a equação reduzida da recta r é do tipo $y = -\frac{3}{2}x + b$. Como o ponto de coordenadas $(\pi, 0)$ pertence à recta r (é o ponto de tangência), substituindo-o na equação reduzida de r vem: $0 = -\frac{3}{2} \times \pi + b \Leftrightarrow b = \frac{3\pi}{2}$.

$$\text{Logo, } r: y = -\frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{2}$$