



GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Considere todos os números pares de cinco algarismos. Alguns desses números satisfazem as seguintes condições:

- têm exactamente dois zeros, dispostos consecutivamente;
- não têm mais algarismos repetidos.

Quantos números existem nestas condições?

- [A] 952 [B] 1176 [C] 1377 [D] 1701

2. Numa escola secundária de Lisboa, a variável aleatória X : «peso, em centímetros, dos rapazes da escola» tem distribuição normal. Sabe-se que $P(X > 155) = 70\%$. Sete rapazes dessa escola vão participar no “Parlamento dos Jovens” organizado pela Assembleia da República.

Seja a o valor médio da variável aleatória X . Qual é a probabilidade, arredondada às milésimas, de exactamente dois desses sete rapazes terem altura compreendida entre a e $2a - 155$ centímetros?

- [A] 0,004 [B] 0,025 [C] 0,275 [D] 0,318

3. Sejam a , b e c as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo rectângulo, com $a < b < c$.

Sabendo que $\log_4(c - a) + \log_4(c + a) = 3$, qual é o valor de b ?

- [A] 4 [B] 6 [C] 8 [D] 12

4. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que a recta de equação $2y - 6x = 1$ é assíntota do gráfico de g .

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3g\left(\frac{1}{x}\right) - x \left(g\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 \right)$?

- [A] -3 [B] $-\frac{3}{2}$ [C] $\frac{3}{2}$ [D] 3

5. Seja h a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x) = \cos(ax) - 1 + (a+b)\sin(ax)$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x} = 2a$

Quais podem ser os valores de a e de b ?

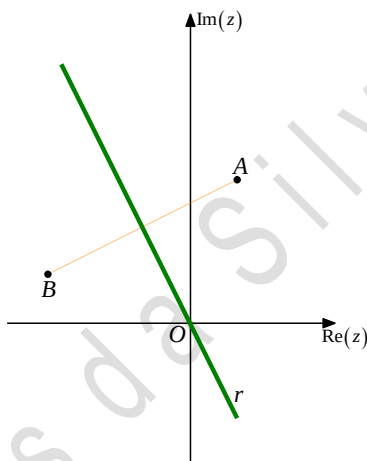
A $a = 0$ e $b = 2$

B $a = 1$ e $b = 3$

C $a = 3$ e $b = 1$

D $a = 2$ e $b = 0$

6. Na figura está representada, no plano complexo, a recta r , mediatriz do segmento de recta $[AB]$. Os pontos A e B são as imagens geométricas de duas raízes quartas, consecutivas, de um número complexo z .



Qual das seguintes condições pode definir a recta r ?

A $|z - 1 - 3i| = |z + 6 - 2i|$

B $|z + 3 - i| = |z - 1 + 3i|$

C $|z + 2 - 6i| = |z + 2 + 6i|$

D $|z - 1 - 3i| = |z + 3 - i|$

7. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a recta r definida pela condição $\frac{x-2}{a^2} = -\frac{z}{4} \wedge y = 2$ e o plano α definido por $ax = -2z$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

A recta r é perpendicular ao plano α .

Qual é o valor de a ?

A -2

B -1

C 2

D 3

8. Seja (u_n) uma progressão aritmética tal que $u_4 = 15$ e $u_{10} = 33$.

Qual é o valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_n}{3n-6} \right)^{2n}$?

A e^{-2}

B e^3

C e^6

D $+\infty$

GRUPO II – ÍTEMS DE RESPOSTA ABERTA

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = \frac{1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{9}\right)}{\sqrt{6} + \sqrt{2}i}$.

Sem recorrer à calculadora, determine o conjunto solução da condição $z^2 = w\bar{z} \wedge z \neq 0$. Apresente as soluções na forma trigonométrica.

2. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela:

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$P(A)$	$P(A)$	$P(B A)$

Sabendo que A e B dois acontecimentos contidos num espaço de resultados S , associado a uma experiência aleatória tal que $P(A \cap B) = 0,08$ e $P(A) > 0,1$.

Qual é o valor de $P(A | (\bar{A} \cup \bar{B}))$? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Uma empresa tem 120 funcionários.

Sabe-se que:

- um terço dos funcionários são licenciados;
- 20% dos funcionários não licenciados são do sexo masculino.

Escolhem-se simultaneamente e ao acaso seis funcionários para desempenharem tarefa diferenciadas num evento organizado pela empresa.

Considere os acontecimentos:

A : «pelo menos cinco dos funcionários escolhidos são do sexo feminino»

B : «os seis funcionários escolhidos não são licenciados»

Uma expressão que permite determinar o valor de $P(A|B)$ é $\frac{(16 \times {}^{64}C_5 + {}^{64}C_6) \times 6!}{80 A_6}$. Elabore uma composição na qual explique a expressão apresentada.

A sua composição deve incluir:

- uma interpretação do significado de $P(A|B)$ no contexto da situação descrita;
- uma referência à regra de Laplace;
- uma explicação do número de casos possíveis;
- uma explicação do número de casos favoráveis.

4. Um filme estreou numa das salas do cinema CINEMAX. A percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme, t dias após a estreia do mesmo, é dada por:

$$M(t) = (4t^2 + 48t + 144)e^{-0,2t-1,2}, \quad t \in [0, 20]$$

Admita que $M(0)$ é a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme no dia da estreia, 4 de Junho de 2015, $M(1)$ é a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme no dia 5 de Junho de 2015 e assim sucessivamente.

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, resolva os dois itens seguintes.

4.1. Em que dia a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme é máxima. Indique o valor dessa percentagem arredondado às décimas.

4.2. Num outro cinema, o CINEPLUS, o mesmo filme estreou no mesmo dia numa das suas salas. No entanto a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEPLUS e que foram ver o filme, t dias após a estreia do mesmo, é dada por:

$$P(t) = 5(t+6)^2 e^{-0,347t-0,68814}, \quad t \in [0, 20]$$

Da mesma forma, admita que $P(0)$ é a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEPLUS e que foram ver o filme no dia da estreia, 4 de Junho de 2015, $P(1)$ é a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEPLUS e que foram ver o filme no dia 5 de Junho de 2015 e assim sucessivamente.

Durante quantos dias a percentagem de espectadores que frequentaram o CINEMAX e que foram ver o filme não foi inferior à percentagem de espectadores que frequentaram o CINEPLUS e que foram ver o filme?

Apresente os resultados finais arredondados às unidades e caso proceda a arredondamentos intermédios, utilize, no mínimo, cinco casas decimais.

Sugestão: decompõe o polinómio $4t^2 + 48t + 144$.

5. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(6x) - \ln 4}{e^{3x-1} - e} & \text{se } x < \frac{2}{3} \\ \frac{\ln(x^3) - 1}{x^2} & \text{se } x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

Resolva os dois primeiros itens recorrendo exclusivamente a processos analíticos.

5.1. Estude a função g quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados. Caso existam, indique as suas equações.

5.2. Seja f a função de domínio $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$ tal que $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$.

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

5.3. Considere, num referencial xOy , o triângulo $[OPQ]$ tais que:

- o ponto P pertence ao gráfico de g ;
- o ponto Q pertence ao eixo Ox e tem a mesma abcissa que o ponto P ;
- a área do triângulo $[OPQ]$ é $\frac{1}{4}$.

Seja x a abcissa do ponto P , com $x \in \left[\frac{2}{3}, 5\right]$.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a(s) abcissa(s) do ponto P e a(s) respectiva(s) ordenada(s).

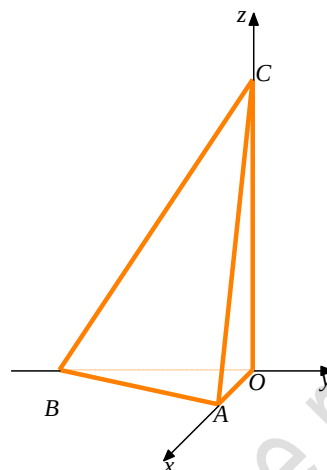
Na sua resposta deve:

- escrever a condição que permite resolver o problema.
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema.
- indicar a(s) abcissa(s) do ponto P e a(s) respectiva(s) ordenada(s), arredondadas às milésimas.

6. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[AOBC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semi-eixo positivo Ox ;
- o ponto B pertence ao semi-eixo negativo Oy ;
- o ponto C pertence ao semi-eixo positivo Oz ;
- $\overline{OB} = 2\overline{OA}$ e $\overline{OC} = 3\overline{OA}$.



Resolva os dois itens seguintes recorrendo exclusivamente a processos analíticos.

6.1. Escreva uma equação do plano paralelo ao plano ABC que contém o ponto D de coordenadas $(0,1,-2)$.

Sugestão: designe por k a abcissa do ponto A .

6.2. Seja α a amplitude do ângulo BAC .

Qual é o valor de $\operatorname{tg}^2(\pi - \alpha) + 10\operatorname{sen}(-2\alpha)$?

7. Considere a função h , de domínio $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por $h(x) = \frac{\operatorname{sen}(3x)}{2\cos^2 x}$.

Resolva os dois itens seguintes recorrendo exclusivamente a processos analíticos.

7.1. Seja $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Sem determinar os zeros da função h , mostre que h tem pelo menos um zero em $[\pi - a, \pi + a]$.

Determinando os zeros de h , indique o valor máximo de a de modo que h tenha um único zero em $[\pi - a, \pi + a]$.

7.2. Mostre, por definição, que $h'(\pi) = -\frac{3}{2}$ e escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa π .

F I M

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. A 2. C 3. C 4. B 5. D 6. D 7. A 8. C

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{cis} \frac{\pi}{54}, \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{cis} \frac{37\pi}{54}, \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{cis} \frac{73\pi}{54} \right\}$
2. $\frac{8}{23}$
- 4.1. A percentagem de espectadores que frequentaram o cinema e que foram ver o filme foi máxima no dia 8 de Junho de 2015. O valor dessa percentagem foi, aproximadamente, 54,1%.
- 4.2. Durante dezasseis dias.
- 5.1. A.V.: $x = 0$; A.H.: $y = 0$
- 5.2. o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\sqrt[6]{e^5}, +\infty \right[$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left[\frac{2}{3}, \sqrt[6]{e^5} \right]$ e tem ponto de inflexão em $x = \sqrt[6]{e^5}$.
- 5.3. $P(a, g(a))$, com $a \approx 1,152$ e $g(a) = \frac{\ln(a^3) - 1}{a^2} \approx -0,434$ ou $P(b, g(b))$, com $b \approx 1,923$ e $g(b) = \frac{\ln(b^3) - 1}{b^2} \approx 0,26$.
- 6.1. $6x - 3y + 2z = -7$ 6.2. $\frac{231}{5}$
- 7.1. $\left\{ \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3} \right\}; a = \frac{\pi}{3}$ 7.2. $y = -\frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{2}$