



PROPOSTA DE TESTE GLOBAL N.º 1
TEMA: COMBINATÓRIA E PROBABILIDADES
MATEMÁTICA A – 12.º ANO – NOVEMBRO DE 2014

*“Conhece a Matemática e dominarás o Mundo.”
Galileu Galilei*

GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Considere todos os números de seis algarismos. Alguns desses números satisfazem as seguintes condições:

- os três primeiros algarismos são iguais e não há mais algarismos repetidos;
- a soma dos seis algarismos é par.

Quantos são os números que satisfazem estas condições?

- [A] 1024 [B] 1728 [C] 2376 [D] 3328

2. Numa linha do triângulo de Pascal o décimo sexto elemento é igual a ${}^{n-2}C_{n-12} + 2 \times {}^{n-2}C_{n-11} + {}^{n-2}C_8$, com $n \in \mathbb{N}$. Qual é a soma de todos os elementos da linha seguinte?

- [A] 2^{16} [B] 2^{17} [C] 2^{25} [D] 2^{26}

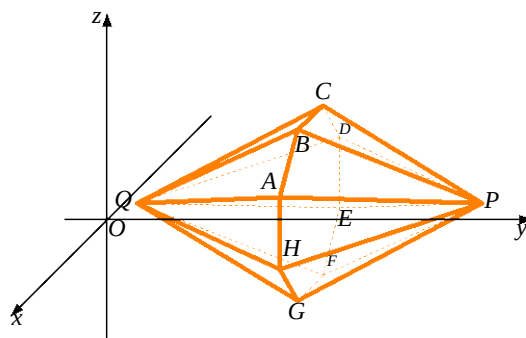
3. Considere o desenvolvimento de $\left(\frac{x^3}{n} + \frac{n}{x}\right)^n$, com $x \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Um dos termos deste desenvolvimento é da forma ${}^nC_p x^2 n^4$, com $p \in \mathbb{N}_0$ e $n \geq p$. Qual é o valor de n ?

- [A] 6 [B] 8 [C] 10 [D] 12

4. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ o sólido $[ABCDEFGHPQ]$ constituído por duas pirâmides octogonais regulares tais que o polígono $[ABCDEFGH]$ é paralelo ao plano xOz .

Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso, três vértices do sólido. Qual é a probabilidade de definirem um plano perpendicular ao plano xOz ?

- [A] $\frac{1}{15}$ [B] $\frac{2}{15}$
 [C] $\frac{4}{15}$ [D] $\frac{14}{15}$



5. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis e incompatíveis tais que $P(A \cup B) = P(\bar{A})$ e $P(A|(A \cup B)) = 0,25$. Qual é o valor de $P(A)$?

☐ A 0,2

☐ B 0,25

☐ C 0,3

☐ D 0,35

6. Uma caixa I contém uma bola preta e duas brancas e uma caixa II contém duas bolas pretas. Considere a experiência aleatória que consiste em escolher ao acaso uma caixa e em seguida retirar, também ao acaso, uma bola dessa caixa.

Depois de escolhida a caixa e retirada a bola, verifica-se que a mesma é preta. Qual é a probabilidade de a bola ter sido retirada da caixa I?

☐ A $\frac{1}{4}$

☐ B $\frac{1}{2}$

☐ C $\frac{3}{4}$

☐ D 1

7. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	b	a	a^2	b

(a e b números reais positivos)

Sabe-se que $P(X = 2 | 2 \leq X \leq 3) = \frac{3}{4}$. Quais são os valores de a e de b ?

☐ A $a = \frac{1}{9}$ e $b = \frac{5}{9}$

☐ B $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{5}{18}$

☐ C $a = \frac{1}{9}$ e $b = \frac{5}{18}$

☐ D $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{5}{9}$

8. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio c tais que $P(X > a) > P(X < b)$, com a , b e c números reais positivos. Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

☐ A $c = \frac{a+b}{2}$

☐ B $c < \frac{a+b}{2}$

☐ C $c = \frac{a-b}{2}$

☐ D $c > \frac{a+b}{2}$

GRUPO II – ÍTEMS DE RESPOSTA ABERTA

1. Um saco contém cubos de sete cores distintas, pelo menos três cubos de cada cor, à excepção dos cubos encarnados que são apenas dois (os cubos da mesma cor são indistinguíveis).

1.1. Pretende-se fazer uma pilha de cubos com três cubos, isto é, pretende-se empilhar três cubos. Quantas pilhas diferentes se podem fazer?

1.2. Admita agora que alguns dos cubos do saco estão numerados. Sabe-se que:

- um em cada cinco cubos são pretos;
- metade estão numerados;
- 25% dos cubos pretos não estão numerados.

Escolhe-se ao acaso um cubo. Qual é a probabilidade de não ser preto ou de estar numerado? [Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.](#)

1.3. Suponha agora que 5% dos cubos são encarnados e que vinte são azuis.

- a) Extraem-se do saco, simultaneamente e ao acaso, quatro cubos. Qual é a probabilidade de só serem retirados cubos encarnados e azuis, mas não haja mais encarnados que azuis? [Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.](#)
- b) Extraem-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição cubos do saco até os cubos encarnados estarem fora do saco. Qual é a probabilidade de serem necessárias pelo menos quatro extracções? [Apresente na forma de dízima com quatro casas decimais.](#)

2. Um grupo de amigos é constituído por rapazes e raparigas, sendo que o número de rapazes excede o número de raparigas em uma unidade. Seja n o número de rapazes, com $n \in \mathbb{N}$.

2.1. O grupo de amigos vai colocar-se numa só fila para uma foto, com os rapazes sentados em lugares consecutivos. Sabendo que o número de maneiras de o fazerem é 14400, determine o valor de n .

2.2. Considere $n = 6$. O grupo de amigos vai ao cinema, compram bilhetes para uma só fila da sala e distribuem-nos ao acaso por todos. Sabe-se que a Carolina, a Mariana, a Diana e Diogo, são primos e que no grupo não há mais primos.

- a) Qual é a probabilidade de ficarem sentados alternados por sexos? [Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.](#)
- b) Qual é a probabilidade de pelo menos dois dos primos ficarem sentados em lugares consecutivos? [Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.](#)

2.3. Considere as mesmas condições que em 2.2. Vão ser escolhidos ao acaso sete amigos do grupo para formar uma lista para concorrer às eleições para a associação de estudantes da escola que frequentam. Nessa lista há um presidente, um vice-presidente, um tesoureiro e um relações públicas. Os restantes membros desempenharão tarefas indiferenciadas.

Qual é a probabilidade de os quatro primos serem escolhidos para os lugares de presidente, vice-presidente, tesoureiro e relações públicas?

Uma resposta a este problema é $\frac{4!}{{}^{11}A_4}$. Numa pequena composição explique porquê. A composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace;
- uma explicação para o número de casos possíveis;
- uma explicação para o número de casos favoráveis.

3. Numa caixa estão oito bolas, uma numerada com o número 1, duas com o número 2 e cinco com o número 3.

3.1. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, sucessivamente e com reposição, seis bolas da caixa. Qual é a probabilidade de em exactamente duas dessas extracções saírem bolas numeradas com o número 3? Apresente o resultado na forma de percentagem arredondado às unidades.

3.2. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, simultaneamente e ao acaso, seis bolas da caixa e em seguida formar, também ao acaso, um número de seis algarismos. Sejam A e B os acontecimentos:

A : «são retiradas da caixa quatro bolas com o número 3 e as duas com o número 2»

B : «o número formado é uma capicua»

Sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada, indique, justificando, o valor de $P(B|A)$. Apresente o resultado na forma de dízima.

3.3. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, bolas da caixa. Seja X a variável aleatória:

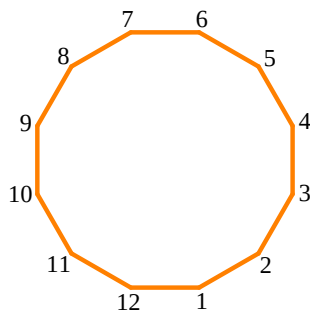
X : «número de extracções até sair a primeira bola numerada com o número 3»

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X .

4. Considere um polígono regular com n vértices, com $n \in \mathbb{N}$.

4.1. Suponha que o polígono tem 170 diagonais. Quantos são os seus vértices?

4.2. Considere agora um dodecágono regular com os vértices numerados de 1 a 12, representado na figura.



a) Considere a experiência aleatória que consiste em escolher, simultaneamente e ao acaso, quatro vértices do dodecágono. Qual é a probabilidade de serem os quatro vértices de um quadrado? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

b) Um dado dodecaédrico, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 12 é lançado quatro vezes. Em cada lançamento regista-se o número da face voltada para cima e cada um desses números corresponde a um vértice do dodecágono. Qual é a probabilidade de no final dos quatro lançamentos obter-se um registo que corresponda aos quatro vértices de um quadrado? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

c) Considere a experiência aleatória que consiste em escolher, simultaneamente e ao acaso, três vértices do dodecágono e designemos por a , b e c os números dos três vértices escolhidos, com $a < b < c$. Sejam X e Y os acontecimentos:

X : «os três vértices escolhidos estão numerados consecutivamente»

Y : « $b = 2a$ ou $c = 2a$ ou $c = 2b$ »

Sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada, indique, justificando, o valor de $P(Y|X)$. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$)

5.1. Mostre que $(P(A|\bar{B}) - 1) \times P(\bar{B}) - P(A) = P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A}) - 1$.

5.2. Numa escola fez-se um estudo sobre os recursos que os alunos do 12.º ano usam para se prepararem para o Exame Nacional de Matemática A. Concluiu-se que:

- 40% dos alunos usam recursos disponibilizados na internet;
- dos alunos que não utilizam recursos disponibilizados na internet, três quartos usam livros de preparação para o Exame Nacional de Matemática A;
- entre os alunos que não utilizam livros de preparação para o Exame Nacional de Matemática A, um em cada quatro usa recursos disponibilizados na internet.

Escolhe-se ao acaso um desses alunos.

a) Qual é a probabilidade de utilizar um livro de preparação para o Exame Nacional de Matemática A? Apresente o resultado na forma de percentagem.

Sugestão: Pode utilizar a igualdade enunciada em 5.1. Nesse caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B , no contexto da situação apresentada.

b) Qual é a probabilidade de usar recursos disponibilizados na internet, sabendo que também usa um livro de preparação para o Exame Nacional de Matemática A? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

6. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis e não certos ($A \subset S$ e $B \subset S$) tais que:

- $P(\bar{A}) = 0,4$
- $P(\bar{B}|A) = 3P(B|A)$
- $P(A \cup B) = 7 \times P(B \cap \bar{A})$

Determine $P(B)$ e verifique que os acontecimentos A e B são independentes.

7. Numa empresa que produz um determinado tipo de parafusos. Sabe-se que a variável aleatória X : «comprimento dos parafusos em milímetros» segue uma distribuição normal de valor médio 50 milímetros e desvio padrão 1 milímetro. Todos os parafusos com comprimento inferior a 48 milímetros ou superior a 52 milímetros são defeituosos.

Todos os dias é recolhida uma amostra de n parafusos, $n \in \mathbb{N}$, para se efectuar um controlo de qualidade. Qual é o menor valor de n , de modo que a probabilidade de a amostra conter no máximo um parafuso defeituoso, seja inferior a 10%?

Utilize a calculadora para responder a esta questão.

SOLUCIONÁRIO

GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. C 2. D 3. C 4. B 5. A 6. A 7. B 8. D

GRUPO II – ÍTEMS DE RESPOSTA ABERTA

- 1.1. 342 1.2. $\frac{19}{20}$ 1.3. a) $\frac{1}{37}$ 1.3. b) $\approx 0,9962$

- 2.1. $n = 5$ 2.2. a) $\frac{1}{462}$ 2.2. b) $\frac{26}{33}$

- 3.1. $\approx 12\%$ 3.2. 0,2 3.3.

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

- 4.1. Vinte vértices. 4.2. a) $\frac{1}{165}$ 4.2. b) $\frac{1}{288}$ 4.2. c) $\frac{1}{5}$

- 5.2. a) 80% 5.2. a) $\frac{7}{16}$

6. $P(B) = 0,25$; A e B são independentes porque $P(B|A) = P(B) = 0,25$.

7. $n = 85$