



PROPOSTA DE TESTE GLOBAL N.º 2
TEMAS: EXPONENCIAIS E LOGARITMOS, LIMITES, CONTINUIDADE,
TEOREMA DE BOLZANO E ASSIMPTOTAS

MATEMÁTICA A – 12.º ANO – FEVEREIRO DE 2015

*“Conhece a Matemática e dominarás o Mundo.”
Galileu Galilei*

GRUPO I – ÍTEMS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Sejam a , b e c três números reais tais que $\log_a b \times \log_c a = 2$.

Qual é o valor de $\log_c \left(\frac{b^3}{c^7 \sqrt{b}} \right)$?

[A] -2

[B] -1

[C] 1

[D] 2

2. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \log \left(2\sqrt{25^{x^2}} \right) + \log \left(625 \times 2^{x^2+3} \right)$.

Qual das seguintes expressões também pode definir a função g ?

[A] $g(x) = 2x^2 + 3$

[B] $g(x) = x^2 + 4$

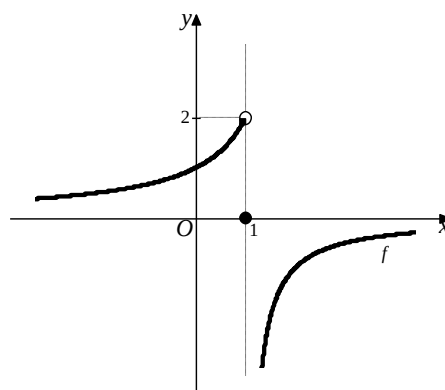
[C] $g(x) = 2x^2 + 4$

[D] $g(x) = x^2 + 3$

3. Sejam f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cujo gráfico está parcialmente representado na figura e função g a função de domínio $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ definida por $g(x) = \frac{2 \ln x}{x-1}$.

Sabe-se que:

- $f(1) = 0$
- a recta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de f
- a recta de equação $y = 0$ é assíntota do gráfico de f , quando $x \rightarrow \pm\infty$



Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{n^3 - \ln(3n)}{n^3}$.

Qual é o valor de $\lim (f \times g)(u_n)$?

A $-\infty$ **B** 0**C** 2**D** 4

4. Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left((x^3 + x) e^{-\frac{3}{x}} \right)$?

A $-\infty$ **B** 0**C** 1**D** $+\infty$

5. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} & \text{se } x < 1 \\ \frac{e^{b^2x - b^2} - 1}{\sqrt{x} - x} & \text{se } x > 1 \end{cases}, \text{ com } b \in \mathbb{R}^+$$

Sabendo que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe, qual é o valor de b ?

A -1**B** 1**C** 2**D** 4

6. Seja h uma função contínua em $\mathbb{R}^+$ tais que $h(4) = -8$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ se tem $h\left(\frac{2}{n}\right) = (-2)^n$.

Qual das seguintes afirmações não é necessariamente verdadeira?

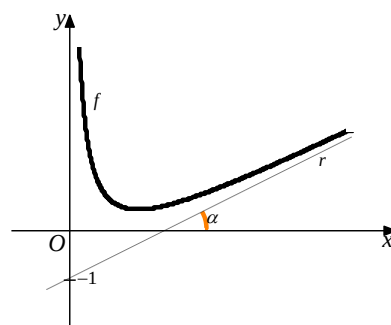
A A equação $h(x) = -h\left(\frac{x}{2}\right)$ é possível em $[1, 4]$. **B** O contradomínio da função h é $\mathbb{R}$.

C A função h não tem zeros no intervalo $[2, 4]$. **D** A função h tem infinitos zeros.

7. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}^+$ tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 4 + 2x) = 0$. Na figura está representado parte do gráfico da função f .

Sabe-se que:

- a recta r , de inclinação α , é assíntota do gráfico de f
- $2 \sin(\pi - \alpha) = \cos(-\alpha)$
- a recta r intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, -1)$



Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{2} - \frac{f(x)g(x)}{x} \right)$?

A -4**B** -2**C** 2**D** 4

GRUPO II – ÍTEMS DE RESPOSTA ABERTA

1. Para um certo valor real k a expressão $g(x) = (3^k - 3^{-k+3})^x$ define uma função exponencial cujo ponto de coordenadas $(2, 36)$ pertence ao seu gráfico.

Qual é o valor de k ?

2. Considere a função h , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \log_3(36x^3) - \log_9(4x^2)$.

2.1. Mostre que $h(x) = 2 + \log_3(2x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

2.2. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $h(x) - \log_3(2x+1) \leq \log_3(7x+4)$.

2.3. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{2x^2 - 8} & \text{se } x < 2 \\ -\frac{1}{\ln 3} & \text{se } x = 2 \\ \frac{h(x) - \log_3(72)}{2 - x} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

a) Estude a continuidade da função f em $x = 2$. No caso de não ser contínua em $x = 2$, indique se é contínua à sua direita ou à sua esquerda.

b) Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico. Caso existam, indique as suas equações.

3. O número de bactérias numa cultura, em centenas, varia, em função do tempo, em horas, de acordo com a função:

$$B(t) = \begin{cases} k \times 1,1^{bt} & \text{se } 0 \leq t \leq 10 \\ \frac{k \times 1,1^{bt}}{0,5 + 0,5 \times 1,1^{bt-20}} & \text{se } t > 10 \end{cases}, \text{ com } k \text{ e } b, \text{ constantes reais positivas.}$$

3.1. Sabendo que a função B é contínua, mostre que $b = 2$.

3.2. Nas primeiras dez horas, qual é o aumento, em percentagem, da população de bactérias a cada duas horas? Apresente o resultado arredondado às décimas.

3.3. Determine o instante depois das primeiras dez horas em que o número de bactérias na cultura é igual a dez vezes o número de bactérias inicial. Apresente o resultado em horas e minutos, minutos arredondados às unidades. Caso proceda a arredondamentos, conserve no mínimo quatro casas decimais.

3.4. Com o passar do tempo, o número de bactérias na cultura tende para 2691. Qual é o valor de k ? Apresente o resultado arredondado às unidades.

4. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x(\ln(2x+a) - \ln(2x+b)) - 4 & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{(ax)^3 + 8ax}{\ln(1-a^2x)} & \text{se } x < 0 \end{cases}, \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Sabe-se que g é contínua em $\mathbb{R}$ e que o seu gráfico admite uma assíntota de equação $y = -5$, quando $x \rightarrow +\infty$. Quais são os valores que a e b podem tomar?

5. Considere a função h , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = e^{x+2} - 3x$.

5.1. Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico. Caso existam, indique as suas equações.

5.2. Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{h(x) - 1 + 3x}{\ln(7x + 15)}$

b) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{h(x) - h(c)}{x^2 - cx}$, com $c \neq 0$. Apresente o resultado em função de c .

5.3. Seja r a recta de equação $y - 2x = 10$.

a) Sem recorrer à calculadora, nem mesmo para eventuais cálculos numéricos, mostre que o gráfico de h e a recta r intersectam-se pelo menos uma vez no intervalo $[-2, 0]$.

Sugestão: tenha em conta que $2 < e < 3$.

b) A recta r intersecta o gráfico da função h em dois pontos: P e Q .

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a área do triângulo $[OPQ]$.

Na sua resposta deve:

- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema;
- assinalar os pontos P e Q indicar as suas coordenadas, arredondadas às centésimas;
- determinar a área do triângulo $[OPQ]$, indicando o seu valor arredondado às unidades.

6. Sejam f , g e h três funções de domínio $\mathbb{R}$ e a e b dois números reais tais que:

- f e g são contínuas em $\mathbb{R}$
- $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x \Leftrightarrow x = a \vee x = b$
- 2 e 3 pertencem ao intervalo $]a, b[$
- $h(x) = (f(x) - a - 1)g(x)$

Mostre que a função h tem pelo menos um zero.

7. Considera a função g , de domínio $\mathbb{R}$, tal que a recta de equação $y = 6x - 2$ é assíntota oblíqua do seu gráfico, quando $x \rightarrow \pm\infty$.

Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \frac{xg(-x)}{g(x)}$.

Mostre que a recta de equação $y = -x - \frac{2}{3}$ é assíntota do gráfico de f .

SOLUCIONÁRIO

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. A 2. B 3. D 4. A 5. B 6. C 7. B

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. $k = 2$

2.2. $x \in]0, 4]$

2.3. a) f não é contínua em $x = 2$, pois não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, mas é contínua à direita do ponto 2, pois $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = -\frac{1}{\ln 3}$.

2.3. b) A.V.: $x = -2$; A.O.: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, quando $x \rightarrow -\infty$; A.H.: $y = 0$, quando $x \rightarrow +\infty$.

3.2. Aproximadamente 46,4% 3.3. Passadas 15 horas e 35 minutos, aproximadamente. 3.4. $k \approx 2$

4. $a = 2$ e $b = 4$

5.1. Como h é contínua em $\mathbb{R}$, o seu gráfico não tem assíntotas verticais; A.O.: $y = 3x$, quando $x \rightarrow -\infty$.

5.2. a) $\frac{1}{7}$

5.2. b) $\frac{e^{c+2} - 3}{c}$

5.3. b) $P(c, d)$, com $c \approx 0,54$ e $d \approx 11,09$; $Q(a, b)$, com $a \approx -1,74$ e $b \approx 6,52$; $A_{[OPQ]} = 5(|a| + c) \approx 11$