

METAS CURRICULARES DO ENSINO BÁSICO – MATEMÁTICA

Caderno de Apoio

1.º Ciclo

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Maria Clementina Timóteo

INTRODUÇÃO

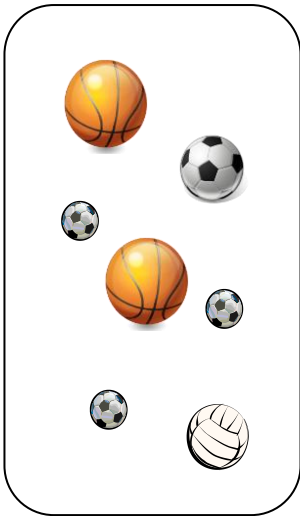
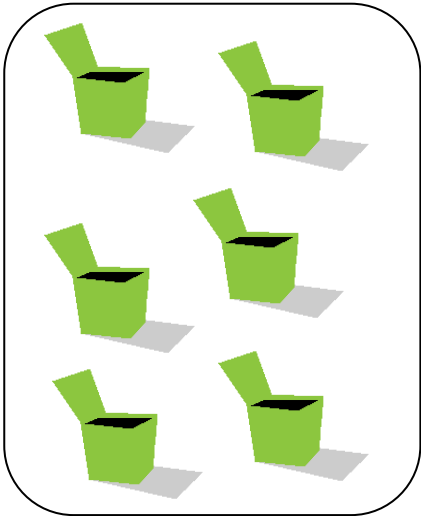
Este Caderno de Apoio, organizado por ciclos de escolaridade, constitui um complemento ao documento *Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Na elaboração das Metas Curriculares utilizou-se um formato preciso e sucinto, não tendo sido incluídos exemplos ilustrativos dos descritores. Neste documento apresentam-se várias sugestões de exercícios, problemas e atividades, alguns com propostas de resolução, esclarecimentos relativos a algumas opções tomadas no documento principal e informações complementares para os professores.

Procurou-se realçar os descritores que se relacionam com conteúdos e capacidades atualmente menos trabalhados no Ensino Básico embora se tenham incluído também outros de modo a dar uma coerência global às abordagens propostas. Estas escolhas não significam, porém, que se considerem menos relevantes os descritores não contemplados.

Longe de se tratar de uma lista de tarefas a cumprir, as atividades propostas têm um caráter indicativo, podendo os professores optar por alternativas que conduzam igualmente ao cumprimento dos objetivos específicos estabelecidos nas metas.

Aos exemplos apresentados estão associados três níveis de desempenho. Os que não se encontram assinalados com asteriscos correspondem a um nível de desempenho regular, identificando-se com um ou dois asteriscos os exemplos que correspondem a níveis de desempenho progressivamente mais avançados.

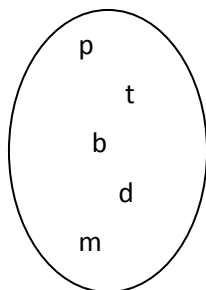
Para além das sugestões de exercícios e problemas a propor aos alunos entendeu-se incluir também textos de apoio para os professores. Destinam-se a esclarecer questões de índole científica que fundamentam os conteúdos destes níveis de escolaridade e que poderão ajudar à seleção das metodologias mais adequadas à leção. Tanto no 2.º como no 3.º ciclo, relativamente ao domínio Geometria e Medida, reuniram-se estes textos num anexo designado por Texto Complementar de Geometria.

Descritor	Texto de apoio
1.1	Para se verificar se dois conjuntos têm o mesmo número de elementos ou qual dos dois é mais numeroso não é necessário utilizar os números, podendo mesmo ignorar-se ainda os termos que os designam e o sistema decimal que preside à respetiva construção. Basta, para o efeito, utilizar correspondências um a um entre os elementos dos dois conjuntos: têm o mesmo número de elementos se for possível estabelecer as correspondências por forma a não sobraem elementos sem correspondência em nenhum dos conjuntos ao passo que se existir uma correspondência um a um de modo que sobre um ou mais elementos em apenas um deles, será esse o conjunto mais numeroso. Podem realizar-se diversas atividades com conjuntos de objetos de uso corrente comparando-os, quanto ao número de elementos, por associação um a um dos elementos de um e do outro conjunto. Pode depois usar-se um conjunto padrão constituído por objetos da mesma natureza (um saco de berlindes, os dedos de duas mãos, por exemplo) para o comparar com diversas outras coleções, concluindo-se se o número de objetos dessas coleções é maior, menor ou igual ao número de objetos do conjunto padrão. A utilização destes conjuntos de referência pode constituir uma fase intermédia entre as simples correspondências um a um entre quaisquer conjuntos e o uso da sequência dos numerais do sistema decimal. Para além de objetos da vida corrente, podem também usar-se exemplos gráficos como os abaixo indicados. Nesse caso podem assinalar-se as correspondências um a um traçando setas a ligar os elementos correspondentes. Exemplo <i>Usando setas, representa uma correspondência um a um entre os elementos do conjunto de bolas e os elementos do conjunto de caixas para depois concluir se qual destes conjuntos é mais numeroso.</i> Conjunto de bolas  Conjunto de caixas 

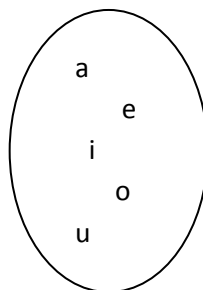
Exemplo

Usando setas, representa uma correspondência um a um entre os elementos do conjunto A e os elementos do conjunto B para verificares se têm o mesmo número de elementos.

Conjunto A

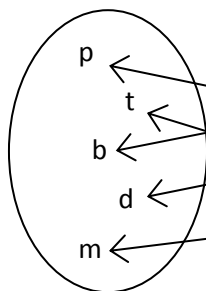


Conjunto B

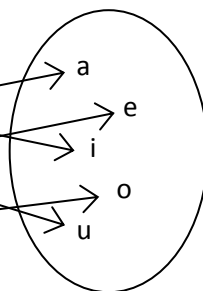


R.:

Conjunto A



Conjunto B



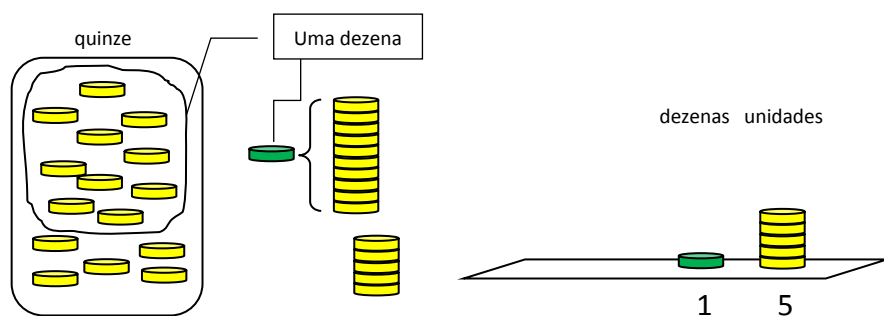
O conjunto A tem o mesmo número de elementos que o conjunto B porque, fazendo uma correspondência um a um, não ficam elementos sem correspondência em nenhum dos conjuntos.

2.2

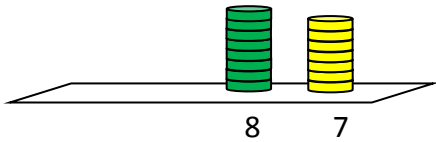
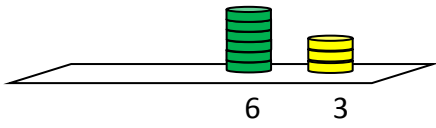
Exemplo

Quantas unidades, para além da dezena, tem o número quinze?

R.:



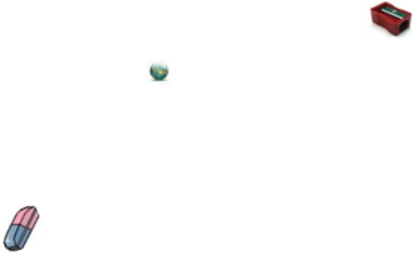
O número quinze, para além da dezena, tem 5 unidades.

3.3	Exemplo Diz quais das seguintes afirmações são verdadeiras. • $11 + 0 = 11$ • $4 + 2 = 7$ • $10 + 7 = 13$ • $5 + 3 = 8$ • $12 + 1 = 7 + 4$ • $10 + 4 = 8 + 6$
3.9	O aluno deve saber adicionar dois naturais cuja soma seja inferior a 100. É natural que as primeiras abordagens sejam feitas com números em que a soma das respectivas unidades seja inferior a uma dezena, progredindo para os casos em que seja necessário compor 10 unidades numa dezena e efetuar o transporte para a ordem das dezenas. Exemplo (adição sem transporte) Calcula a soma de 63 com 24. R.:  dezenas unidades  $3 + 4 = 7$ $6 + 2 = 8$ $63 + 24 = 87$ $\begin{array}{r} 63 \\ + 24 \\ \hline 87 \end{array}$ Este exemplo diz respeito a uma adição em que não é necessário efetuar a composição de dez unidades numa dezena. Exemplo* (adição com transporte) Calcula a soma de 28 com 35. R.:  dezenas unidades  Sempre que a soma das unidades das parcelas for um número superior a nove, é necessário compor dez unidades numa dezena e efetuar o respetivo transporte.

	unidades: $8 + 5 = 13$ Destas 13 unidades, 10 são compostas numa dezena, ficando apenas 3 unidades. dezenas: $2 + 3 = 5$ Às 5 dezenas acrescenta-se a dezena que resultou da composição das 10 unidades. dezenas: $5 + 1 = 6$ Assim, $28 + 35 = 63$ $\begin{array}{r} 1 \\ 28 \\ + 35 \\ \hline 3 \end{array}$ $\begin{array}{r} 28 \\ + 35 \\ \hline 63 \end{array}$ Poderá dizer-se: 5 mais 8 são 13. Ficam 3 unidades e sobra 1 dezena. 3 mais 2 são 5, mais a dezena que sobrou, são 6.
4.1	Exemplo (juntar) <i>Dois amigos vão jogar ao berlinde. O João trouxe 13 berlindes e o Bernardo 18. Quantos berlindes trouxeram ao todo os dois amigos?</i> Exemplo (acrescentar) <i>A Joana comprou um pacote com 15 rebuçados. Na escola, as amigas deram-lhe mais 8. Com quantos rebuçados ficou a Joana?</i>
5.3	Exemplo <i>Qual é a diferença entre 12 e 7?</i> R.: aditivo: 12 subtrativo: 7 diferença: ? $12 - 7 = \boxed{?}$ A diferença obtém-se completando a igualdade $7 + \boxed{?} = 12$ Ou seja, 12 menos 7 é igual a 5 porque 7 mais 5 é igual a 12. Se $7 + 5 = 12$ então $12 - 7 = 5$
5.4	Devem dar-se exemplos em que seja mais vantajoso efetuar contagens progressivas e outros em que seja preferível utilizar contagens regressivas. Por exemplo, pode calcular-se facilmente $52 - 6$ efetuando uma contagem regressiva. Inversamente, a diferença $45 - 38$ obtém-se mais rapidamente por contagem progressiva.
5.6	Ao efetuar a decomposição do subtrativo em dezenas e unidades pretende-se que a subtração se faça em duas etapas, tendo em conta as capacidades desenvolvidas nos descritores NO1-5.4 e NO1-5.5. Exemplo <i>Qual é a diferença entre 75 e 23?</i>

	R.: Começa-se por subtrair as 2 dezenas do 23, ou seja, subtraem-se 20 unidades a 75 unidades, obtendo-se 55 unidades (NO1-5.5). Em seguida, subtraem-se 3 unidades a 55 unidades, o que dá 52 unidades (NO1-5.4).
6.1	Exemplo (retirar) <i>Um autocarro escolar transportava 35 alunos. Na primeira paragem desceram 8 alunos. Quantos permaneceram dentro do autocarro?</i> Exemplo (comparar) <i>O António tem 34 livros de banda desenhada em casa, o Manuel tem apenas 15. Quantos livros tem o António a mais do que o Manuel?</i> Exemplo (completar) <i>A Rita quer comprar um casaco novo. O casaco custa 56 euros, mas a Rita só tem 24 euros. Quanto dinheiro terá de pedir aos pais para conseguir comprar o casaco?</i>

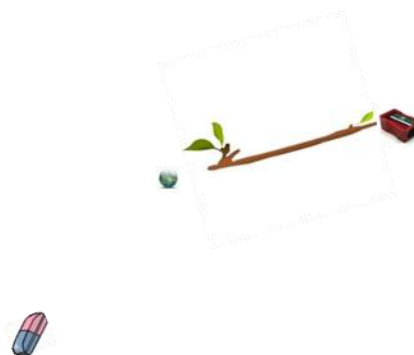
Descritor	Texto de apoio
1.1	Diversas expressões da linguagem comum permitem descrever as posições relativas de dois objetos relativamente a um observador ou relativamente a um terceiro objeto; os efeitos da gravidade, a nossa própria anatomia e postura e os nossos sentidos tornam facilmente reconhecível a um observador quando, por exemplo, de dois objetos, um se situa «à esquerda» ou «à direita», «em cima», «acima», «abaixo» ou «por debaixo», «à frente», «atrás» ou «por detrás» do outro. O uso correto de expressões como estas é indispensável para que seja possível comunicar experiências relativas à localização e orientação no espaço, prévias ao estudo da Geometria, e deve portanto ser treinado em contextos concretos diversos.
1.2	Algumas destas expressões traduzem observações particularmente importantes para uma estruturação adequada da nossa perceção do mundo que nos rodeia. É de uma tal estruturação que nasce a Geometria, que é um dos pilares da abordagem científica da realidade. Assim, dizemos que um objeto fica «à frente» de outro (e o outro «por detrás» ou «atrás» do primeiro) quando o interpomos entre o nosso olhar e o outro objeto, de forma que o primeiro oculte total ou parcialmente o segundo; são experiências como esta que permitem determinar se o nosso olhar e dois objetos estão ou não «alinhados», qual dos dois objetos está «à frente» e qual está «por detrás» do outro. Reconhecer alinhamentos utilizando o nosso olhar é um passo importante, apesar de muito simples, para estabelecer a ligação entre experiências concretas relativas à nossa inserção no espaço circundante e os conceitos básicos da Geometria.
1.3	Se vemos determinado objeto à frente de outro, então dizemos que o primeiro está « mais perto » de nós e o segundo « mais longe ». Estabelece-se assim uma ligação entre, por um lado, a noção de « maior distância » ou « menor distância » ao observador e, por outro, a posição relativa dos dois objetos, no caso particular em que estão alinhados com o nosso olhar. Embora corresponda normalmente a um dado adquirido pelo próprio uso da linguagem comum, importa chamar a atenção para esta relação em contextos concretos diversos, envolvendo objetos mais ou menos distantes de nós, ainda que nos sejam inacessíveis.
1.4	Temos capacidade para reconhecer alinhamentos mesmo quando o nosso olhar não é uma das referências. Por exemplo, olhando para uma fila de pessoas, somos por vezes capazes de imaginar se, colocando-nos na posição de uma das pessoas que está atrás de outras duas, a do meio ocultaria ou não parcialmente a seguinte do nosso olhar; por outras palavras, reconhecemos se essas três pessoas estão ou não de alguma maneira “alinhadas”. Essa experiência adquirida permite-nos assim, frequentemente, identificar alinhamentos de três ou mais objetos, mesmo sem termos necessidade de nos colocar fisicamente em posição de verificar interposições com ocultação. Quando um objeto está situado à frente de outro relativamente ao nosso olhar também dizemos que esse primeiro objeto « está situado entre » o nosso olhar e o outro objeto; da mesma maneira, quando três objetos estão alinhados, sabemos identificar qual «está situado entre» os outros dois. Atendendo ao que acima foi referido (1.3), esta capacidade permite-nos comparar visualmente as distâncias de dois objetos a um terceiro com eles alinhado, mas não situado entre eles, desde que consigamos identificar esse alinhamento.

1.5	Quando distinguimos partes em determinado objeto dizemos, naturalmente, que cada uma das partes é «mais pequena» ou «menor» do que o objeto em questão, o qual, por sua vez, consideramos ser «maior» do que essa parte. Devido às nossas limitações, não nos é possível distinguir partes em determinados objetos utilizando apenas os nossos sentidos; nesse caso consideramos que um tal objeto ocupa apenas «um ponto» do espaço ou que é um «objeto pontual». Por vezes, ainda que tal fosse possível, não nos interessa, para determinado efeito, distinguir partes em determinado objeto ou região do espaço; consideramos que, para esse efeito tem “dimensões desprezáveis” e também nesse caso identificamos tal região com «um ponto». Assim, é vulgar representarmos um ponto por um pequeno círculo, ainda que consigamos distinguir, por exemplo, a respetiva circunferência do interior. Tais como quaisquer outros, objetos pontuais podem estar ou não alinhados; a prática de reconhecer objetos alinhados de “pequenas dimensões” ou “dimensões desprezáveis” permite identificar representações de pontos alinhados, distinguindo-as de representações de pontos não alinhados, e também representar alinhamentos de pontos utilizando diversos meios gráficos ou outros. Este descritor e os anteriores podem ser trabalhados em ligação com o descritor 2.1.
1.6	Determinados objetos que consideramos “rígidos” ou “indeformáveis”, e em que se fixam dois pontos, permitem transportar distâncias entre pontos (as extremidades de um lápis, as pontas de um compasso fixado em determinada abertura, dois traços numa régua, etc.); mesmo objetos com alguma flexibilidade como as nossas mãos e pernas podem ser utilizados para esse efeito se for possível fixá-los em configurações facilmente reproduzíveis, como seja “um palmo” ou “um passo”. Em conjugação com as comparações de distâncias entre pontos alinhados acima referidas (1.3, 1.4), o transporte de distâncias utilizando objetos rígidos permite comparar distâncias entre pares de pontos em situações mais gerais. Assim, se sobrepujarmos as pontas dos dedos mínimo e polegar ou as extremidades de um lápis a dois pontos, podemos utilizar um desses meios para encontrar dois pontos à mesma distância noutro local e eventualmente comparar essa distância com outra que corresponda a uma das situações de alinhamento acima tratadas. Podemos assim saber se um par de objetos está a igual, menor ou maior distância do que outro par de objetos, o que pode ser expresso de diferentes maneiras na linguagem comum. A comparação de distâncias utilizando diferentes objetos e processos (régua, lápis, palmos, passos, etc.) e tendo o cuidado de respeitar os alinhamentos devidos, constitui uma preparação essencial para o estudo futuro da medida de comprimento e de outras grandezas. Os alunos poderão, por exemplo, trabalhar uma atividade como a abaixo descrita, utilizando três objetos de pequenas dimensões. Exemplo <i>Qual dos objetos se encontra mais próximo do berlinde: a borracha ou o apara-lápis?</i> 

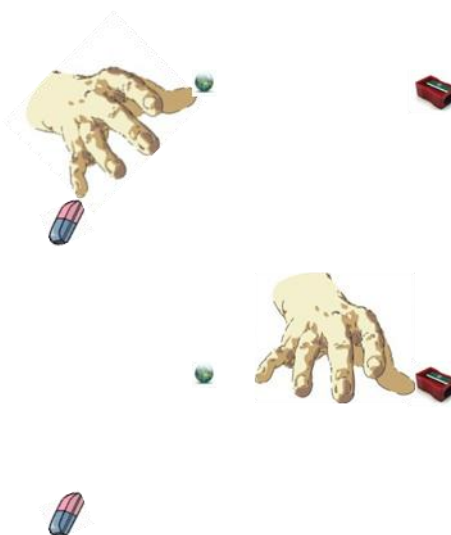
R.: Escolhendo um objeto para efetuar deslocamentos rígidos (na figura ao lado um galho), podemos encostar um ponto desse objeto ao berlinde e outro à borracha e marcar esses pontos por algum processo (na situação representada na figura podemos imaginar que o galho foi partido por forma a ajustar as extremidades à borracha e ao berlinde).



Em seguida podemos deslocar o referido objeto rígido e encostar ao apara-lápis um dos pontos nele marcados (neste caso uma das extremidades do galho); se, fixando esse ponto, tivermos o cuidado de colocar o outro ponto (neste caso a outra extremidade do galho) no alinhamento determinado pelo apara-lápis e pelo berlinde, se o segundo ponto ficar entre o berlinde e o apara-lápis podemos afirmar que o apara-lápis fica mais distante do berlinde do que a borracha, ao passo que se for o berlinde que fica entre o apara-lápis e a segunda extremidade do galho é a borracha que está mais próxima do berlinde.



Note-se que a forma do galho é irrelevante para levar a cabo este processo; o que está representado na figura tem uma configuração aproximadamente retilínea, o que pode ajudar a alinhar as extremidades do galho com o berlinde, depois de se fazer coincidir uma delas com o apara-lápis, mas é apenas o alinhamento destes três pontos que deve ser garantido, o que não depende da forma do objeto escolhido. Podemos, por exemplo, usar um palmo para comparar as distâncias (se forem compatíveis com esse processo) e nesse caso, após o transporte da distância entre o berlinde e a borracha, tendo o cuidado de manter as posições relativas dos dedos e encostando a ponta do polegar ao apara-lápis, é óbvio que apenas podemos assegurar o alinhamento das pontas dos dedos mínimo e polegar com o berlinde sem que possamos servir-nos de qualquer configuração retilínea do objeto escolhido (neste caso, uma mão).

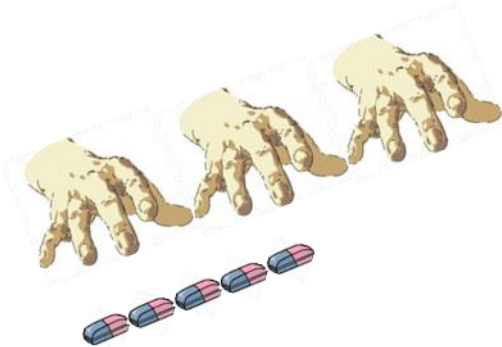


Este descritor pode ser trabalhado em conjunto com o objetivo geral 3.

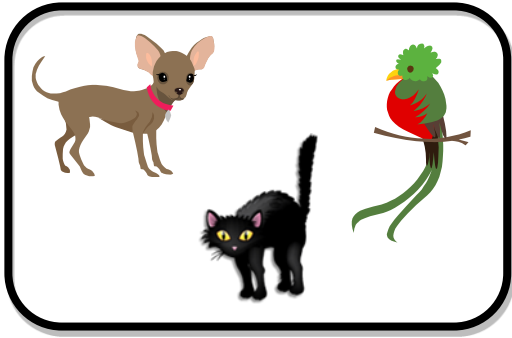
1.7	Se recortarmos um pedaço de cartolina e o sobreposermos a uma outra folha de cartolina, podemos recortar nessa folha uma porção que se sobreponha com bastante precisão ao pedaço inicial; como a espessura da cartolina pode ser considerada “desprezável”, podemos dizer que os dois pedaços de cartolina, enquanto sobrepostos ou «coincidentes», acabam por ocupar praticamente a mesma região do espaço. Se os separarmos sem os “deformar” (o que é possível devido à relativa rigidez da cartolina), podemos dizer que obtivemos dois objetos que correspondem a figuras «geometricamente iguais», ou simplesmente «iguais». A utilização, que é clássica, do termo «igual», neste contexto, obriga a que a identidade entre figuras geométricas (conjuntos de pontos do espaço), no sentido em que se trate da <i>mesma</i> figura (constituída pelos mesmos pontos) seja referida dizendo, não que tais figuras são “iguais”, mas sim que são «coincidentes». Podem utilizar-se diversos materiais para construir exemplos de objetos “planos” geometricamente iguais. Utilizando, por exemplo, plasticina ou gesso e um molde, também é possível construir objetos tridimensionais «iguais», uma vez que todos preenchem o mesmo molde e portanto, mesmo depois de retirados do molde, podem ser levados a ocupar uma mesma região do espaço (delimitada pelo molde) deslocando-os e garantido que não se deformam nesse transporte. Manipulando e observando objetos de diversos pontos de vista, temos a capacidade de, em certos casos, detetar a igualdade geométrica mesmo sem nos servirmos de um teste mais direto como no exemplo dos objetos moldados; em qualquer caso imaginamos que dois objetos «iguais» podem preencher a mesma porção de espaço e o uso de peças que se “encaixam” numa mesma cavidade, por exemplo, permite também materializar estes conceitos.
2.1	Podemos identificar objetos «retilíneos» ou «partes retilíneas» de objetos utilizando testes de alinhamentos com o nosso olhar, como foi preconizado acima (1.2, 1.3, 1.4, 1.5); por exemplo, de preferência tapando um olho, conseguimos alinhar um lápis com o nosso olhar de tal maneira que é visto como se se confundisse com a respetiva base, e podemos fazer o mesmo com um fio esticado, etc. Além disso, tal como para pontos considerados isoladamente, conseguimos identificar alinhamentos, por exemplo, em traços desenhados num papel (podemos imaginar que um traço é constituído por “muitos pontos muito próximos uns dos outros”). Temos assim a capacidade de distinguir porções retilíneas de objetos e desenhos em diversas posições e devem ser apresentados inúmeros exemplos concretos em objetos de dimensões variadas (cantos da sala de aula, tampos de mesas, lápis, modelos de sólidos geométricos, desenhos, etc.). Dois pontos e os pontos com eles alinhados que se situam entre esses dois pontos, no sentido referido a propósito de 1.4, constituem um chamado «segmento de reta». Os dois pontos inicialmente referidos dizem-se «extremos (ou extremidades) do segmento de reta» e estes e os que se situam entre eles dizem-se «pontos do segmento de reta». Estes termos devem ser utilizados na identificação de porções retilíneas de objetos e desenhos e os alunos devem saber representar segmentos de reta em desenhos e construções, servindo-se ou não de instrumentos auxiliares (régua), utilizando dobragens, fios esticados, etc.

2.2	A distância entre os extremos de um segmento de reta designa-se também por «comprimento do segmento de reta» e este termo deve também ser usado como alternativa a «distância entre pontos» nos contextos em que até agora surgiu este conceito (igual, maior ou menor comprimento de dois segmentos como alternativa válida a igual, maior ou menor distância entre os respetivos extremos). Além disso os alunos devem notar, efetuando diversas experiências, que a dois segmentos de reta com o mesmo comprimento pode sobrepor-se ponto por ponto um mesmo objeto rígido retilíneo ou uma parte retilínea de um objeto rígido (régua, lápis, fio esticado, etc.), pelo que podemos dizer também que segmentos de reta com o mesmo comprimento são «geometricamente iguais» ou simplesmente «iguais». Assim, esta linguagem também deve ser usada como alternativa válida nesse contexto.
2.3	Da mesma maneira que experiências de ocultação por interposição de objetos testam o alinhamento de objetos e pontos com o nosso olhar, e permitem identificar objetos retilíneos e partes retilíneas de objetos, podemos agora identificar pontos situados num mesmo plano utilizando objetos retilíneos para os tentar ocultar simultaneamente do nosso olhar. Assim, os pontos que um objeto retilíneo oculta do nosso olhar caracterizam-se por se situarem num mesmo «plano». Com base nesta caracterização, uma maneira de identificar «porções planas» em determinados objetos sólidos é verificar que podem ser vistas como retilíneas de certa perspetiva; podem fazer-se experiências com folhas de cartolina, tampo de mesas, modelos de sólidos geométricos, etc. Mesmo a borda circular de um copo pode assim ser identificada como uma figura plana, ainda que o “interior desse círculo” não faça parte do copo.
2.4	Tal como para pontos alinhados, a experiência acumulada leva-nos a identificar partes planas de objetos ainda que não cheguemos a observá-las de uma perspetiva em que as avistemos como retilíneas. Importa assim consolidar a capacidade de reconhecimento de superfícies planas e de utilização adequada deste conceito na descrição de objetos ou partes de objetos e da disposição de objetos no espaço.
2.5 2.6 2.7	A identificação de objetos retilíneos ou partes retilíneas de objetos em posição vertical e horizontal pode constituir um primeiro contacto com a noção de perpendicularidade, que tanta importância virá a ter no desenvolvimento da Geometria. A facilidade com que identificamos a horizontal e a vertical tem que ver, evidentemente, com o efeito da gravidade terrestre; encontramos à nossa volta inúmeros exemplos de “segmentos verticais e horizontais”, por exemplo em construções, por simples necessidade de se garantir uma desejável estabilidade, de acordo com as leis da Física, e podemos também fazer apelo à experiência que temos da nossa própria postura vertical e de caminhar em terrenos planos horizontais. Assim, é fácil identificar retângulos, por exemplo, como formas das paredes de uma sala, ficando as posições relativas de lados consecutivos dessas figuras caracterizadas, neste caso, por se tratar de um segmento de reta vertical e de um segmento de reta horizontal. Depois, tal como ocorre no reconhecimento de alinhamentos ou de porções planas, temos capacidade para reconhecer essa mesma relação em objetos e desenhos noutras posições e assim identificar e representar retângulos em posições variadas. No caso em que os lados consecutivos de um

	retângulo são geometricamente iguais, dizemos que se trata de um quadrado. Os quadrados podem, assim, ser reconhecidos como casos particulares de retângulos. Para além de retângulos e quadrados devem reconhecer-se triângulos, circunferências e círculos em objetos e desenhos e identificar os lados e vértices das figuras que os possuem. Quanto às circunferências e círculos apenas se pretende, por enquanto, reconhecer estas formas sem qualquer tipo de definição ou identificação de elementos geométricos relacionados. Os alunos deverão também saber representar triângulos traçando segmentos de reta unindo três pontos não alinhados e utilizar grelhas quadriculadas adequadas para traçar quadrados e retângulos. Neste último caso os alunos começam por reconhecer que a grelha é composta por quadrados e, em seguida, que podem aproveitar os segmentos de reta que compõem a grelha como guias para desenharem retângulos e quadrados de diversas dimensões.
2.8	Em muitas das atividades relativas aos descritores anteriores podem utilizar-se modelos de sólidos que devem começar a ser corretamente identificados, nomeadamente cubos, paralelepípedos, retângulos, cilindros e esferas. Também poderão ser identificadas algumas destas formas em objetos da vida corrente de diferentes escalas, incluindo, por exemplo, edifícios, salas, etc..
3.1	Descreveu-se acima (1.3, 1.4, 1.6) o processo geral para comparar distâncias utilizando objetos rígidos com dois pontos fixados (régua, palmas, passos, lápis, fios esticados, etc.) que podem sobrepor-se a dois pontos cuja distância se pretende “transportar”. Aliando-se este processo à comparação de distâncias de um ponto a outros dois com ele alinhados (um destes situado entre os outros dois), sabemos portanto verificar se determinada distância é maior ou menor do que outra (ou, de maneira equivalente, se o comprimento de determinado segmento de reta é maior ou menor do que o comprimento de outro). Se pretendermos comparar distâncias de maneira mais precisa, podemos tentar contar “quantas vezes uma distância cabe na outra”; podemos designar a primeira por «unidade de comprimento» e o número de vezes que esta cabe na outra por «medida do comprimento» da segunda, naquela unidade. O processo prático para determinar a medida de comprimento pode assim envolver, em princípio, diversos transportes da unidade de comprimento, garantindo-se que se mantêm sucessivamente os alinhamentos dos pontos que vão determinando distâncias de uma unidade, partindo de um ponto inicial até um ponto final cuja distância ao inicial se pretende medir. Assim se procede na prática para “medir a palmas” ou “a passos” determinada distância; para além de se tentar garantir a manutenção da abertura do palmo ou da amplitude do passo, há que garantir também o alinhamento dos diversos pontos que vão sendo atingidos no decorrer do processo. Quando medimos uma distância num objeto já de si retilíneo (comprimento de um lado de um tampo retangular de uma mesa, por exemplo), esse alinhamento é fornecido pelo próprio objeto e se utilizarmos uma régua com uma escala em que já estão marcados sucessivamente pontos, cada um distando uma unidade do anterior, também fica facilitada a medida de comprimento, nessa unidade, de distâncias inferiores ao comprimento da régua.

3.2	As considerações anteriores sugerem a realização de diversos tipos de atividades de determinação de medidas de distâncias e comprimentos, por enquanto envolvendo apenas um número inteiro de unidades de comprimento. Variando a unidade escolhida, facilmente se verificará que uma mesma distância terá medida expressa por diferentes números consoante a unidade escolhida, devendo começar-se por exemplos de unidades e distâncias a medir em que se consegue, sem distorção notável, utilizar apenas números inteiros. Pode eventualmente levantar-se a questão, que será apenas desenvolvida nos anos seguintes, de ser por vezes manifestamente impossível obter uma expressão adequada da medida de comprimento utilizando apenas um número inteiro de unidades.
3.3	Nas atividades atrás referidas, os alunos devem habituar-se a referir sempre a unidade de comprimento utilizada para exprimir o resultado da medida (tantos passos, palmos, “lápiz”, etc.).
3.4	Devem comparar-se comprimentos e distâncias medindo-as previamente com uma mesma unidade e ordenando os números (naturais) resultado dessas medições. Deve chamar-se a atenção para o facto de essa comparação só ser possível por este processo se tivermos o cuidado de utilizar a mesma unidade nas diferentes medições. Podem ser efetuadas experiências que ilustrem a necessidade de ter este cuidado (por exemplo, um comprimento que mede três palmos pode ser maior do que outro que mede cinco unidades tomando como unidade o comprimento de uma borracha): 

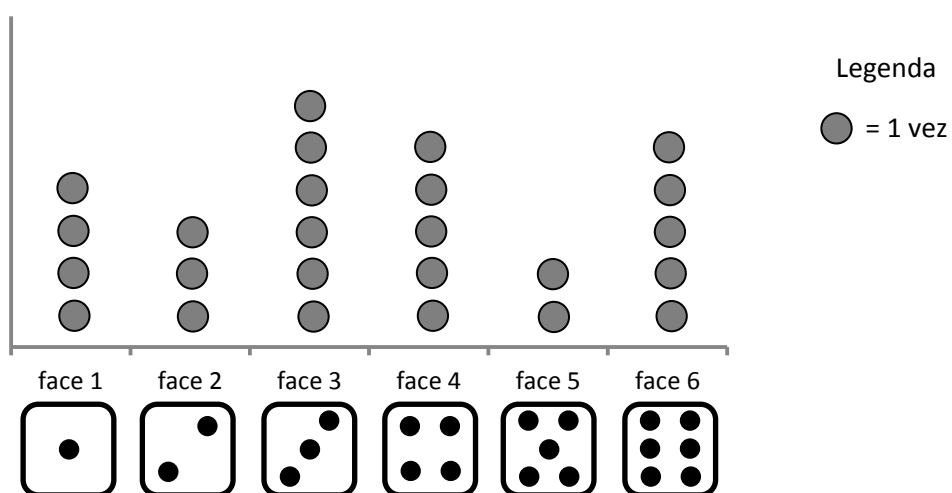
Organização e tratamento de dados OTD1

Descritor	Texto de apoio
1.1	Este descritor pode ser trabalhado em conjunto com o descritor NO1-1.1. Exemplo Completa convenientemente os espaços em branco com os símbolos $\in$ e $\notin$.  -----  t ----- a e i o u 5 ----- 3 7 2 5 Exemplo Coloca na etiqueta o cardinal do conjunto. Teresa Madalena Constança Ana Miguel João

2.1

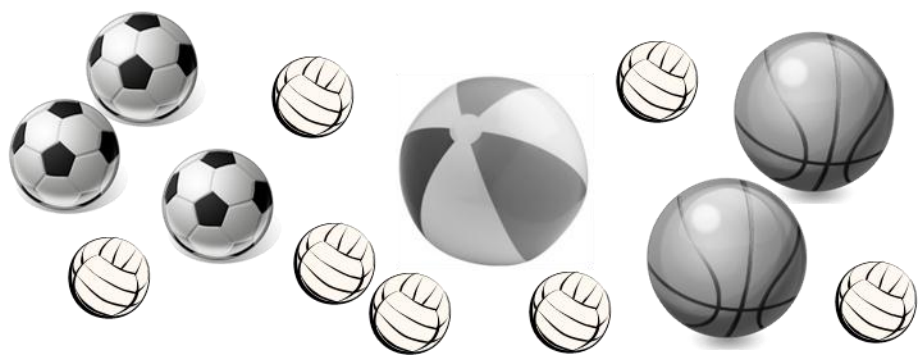
Exemplo

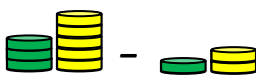
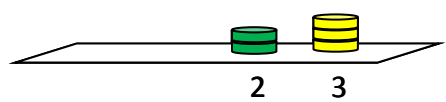
Observa o gráfico que representa o número de vezes que cada uma das faces de um dado saiu em 25 lançamentos.



- a. Quantas vezes saiu a face 4?
b. Qual foi a face que saiu menos vezes?

R.: a. A face 4 saiu 5 vezes.
b. A face 5 foi a que saiu menos vezes.

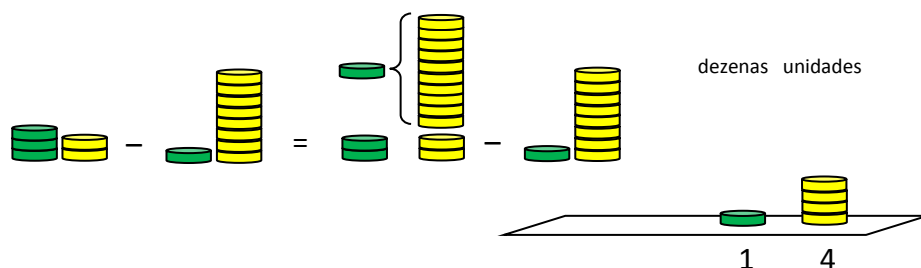
Descritor	Texto de apoio												
3.1 3.2	Exemplo <i>Agrupar as bolas, duas a duas, para verificares se o número total é par ou ímpar.</i>  Exemplo <i>Verifica que o número doze é par.</i> R.: <table><tr><td>UM 1</td><td>DOIS 2</td><td>TRÊS 3</td><td>QUATRO 4</td><td>CINCO 5</td><td>SEIS 6</td><td>SETE 7</td><td>OITO 8</td><td>NOVE 9</td><td>DEZ 10</td><td>ONZE 11</td><td>DOZE 12</td></tr></table> 2 2 2 2 2 2 $12 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$; 12 é par. Poderá chamar-se a atenção dos alunos para a alternância entre números pares e ímpares na ordem de contagem natural. Para que se mantenha esta alternância quando se inclui também o zero na sequência dos números, deve indicar-se que o número 0 é par.	UM 1	DOIS 2	TRÊS 3	QUATRO 4	CINCO 5	SEIS 6	SETE 7	OITO 8	NOVE 9	DEZ 10	ONZE 11	DOZE 12
UM 1	DOIS 2	TRÊS 3	QUATRO 4	CINCO 5	SEIS 6	SETE 7	OITO 8	NOVE 9	DEZ 10	ONZE 11	DOZE 12		
3.3	Do facto de 10 ser um número par resulta que a paridade de um número dado pela respetiva representação no sistema decimal pode ser determinada por simples inspeção do algarismo das unidades; um número tem a mesma paridade que esse algarismo. Pretende-se apenas que os alunos reconheçam este critério em exemplos concretos, podendo induzi-lo recorrendo à alternância, acima referida, entre pares e ímpares na ordem de contagem natural começando no zero e ultrapassando o número dez, e que o saibam utilizar sistematicamente. Exemplo a. O número 15 é par ou ímpar? b. O número 18 é par ou ímpar? R.: a. O número 15 é ímpar porque o algarismo das unidades (5) representa um número ímpar. b. O número 18 é par porque o algarismo das unidades (8) representa um número par.												

	Exemplo a. O número 863 é par ou ímpar? b. O número 770 é par ou ímpar? R.: a. O número 863 é ímpar porque o algarismo das unidades (3) representa um número ímpar. b. O número 770 é par porque o algarismo das unidades (0) representa um número par.
4.2	Exemplo Qual é o valor posicional do algarismo 4 no número 45 (quarenta e cinco)? R.: No número 45, o algarismo 4 representa 4 dezenas. Exemplo Lê o número 368 e indica o valor posicional do algarismo 3. R.: O número lê-se trezentos e sessenta e oito e o algarismo 3 representa três centenas. Exemplo* Lê o número 715 e indica o valor posicional de cada algarismo. R.: O número lê-se setecentos e quinze. O algarismo 7 representa 7 centenas, o algarismo 1 representa 1 dezena e o algarismo 5 representa 5 unidades. 715 são 7 centenas, 1 dezena e 5 unidades.
5.5	O aluno deve ser capaz de calcular a diferença entre dois números naturais até mil. Naturalmente, os primeiros cálculos envolverão subtrações em que não é necessário efetuar qualquer decomposição de unidades de determinada ordem em unidades de ordem inferior. Exemplo (subtração sem transporte) Calcula a diferença entre 35 e 12. R.:  35 – 12 = 23 dezenas unidades  35 – 12 23 A 5 unidades retiram-se 2 unidades, ficam 3 unidades. A 3 dezenas retira-se 1 dezena, ficam 2 dezenas. Este exemplo mostra uma subtração em que não é necessário efetuar qualquer transporte de unidades.

Exemplo* (subtração com transporte)

Calcula a diferença entre 32 e 18.

R.:



$$32 - 18 = 14$$

Quando o número de unidades do aditivo é inferior ao número de unidades do subtrativo, é necessário decompor uma dezena do aditivo em dez unidades e efetuar o respetivo transporte. Como 2 é menor que 8, decomparamos uma dezena do aditivo em 10 unidades. Ou seja, em vez de 30+2 ficamos com 20+12.

unidades: $12 - 8 = 4$

dezenas: $2 - 1 = 1$

$$\begin{array}{r} 32 \\ - 18 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \ 12 \\ \cancel{2} \ \cancel{2} \\ - 1 \ 8 \\ \hline 1 \ 4 \end{array}$$

É desejável que este procedimento venha a ser substituído pelo algoritmo simplificado, objetivo que deverá ser atingido até ao final do próximo ano. Deverá reconhecer-se então a equivalência da decomposição de uma dezena em 10 unidades com o processo simplificado de compensação. Este procedimento consiste em acrescentar 10 unidades ao valor do algarismo das unidades do aditivo ($2 + 10 = 12$) compensando o subtrativo com o acréscimo de 1 unidade ao valor do algarismo das dezenas ($1 + 1 = 2$). Este processo está associado à expressão “e vai 1”.

unidades: $12 - 8 = 4$

dezenas: $3 - 2 = 1$

$$\begin{array}{r} 32 \\ - 18 \\ \hline 14 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ - 18 \\ \hline 14 \end{array}$$

Poder-se-á dizer:

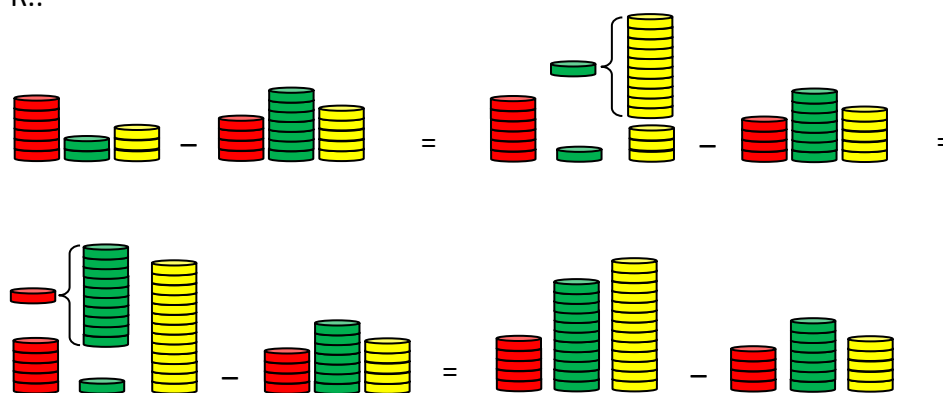
8 para 12 são 4; e vai 1.

1 mais 1 são 2; 2 para 3 é 1.

Exemplo** (subtração com dois transportes)

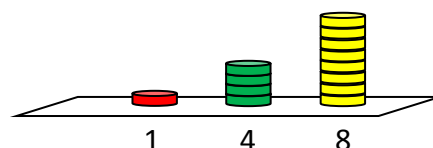
Calcula a diferença entre 623 e 475.

R.:



centenas dezenas unidades

$$623 - 475 = 148$$



Neste exemplo, dado que os algarismos das ordens das unidades e das dezenas do aditivo têm valores inferiores aos respectivos algarismos do subtrativo, é necessário começar por decompor uma dezena em dez unidades e, em seguida, decompor uma centena em dez dezenas, fazendo os correspondentes transportes.

$$\begin{array}{r} 623 \\ - 475 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 113 \\ 6\cancel{2}3 \\ - 475 \\ \hline 8 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 11 \\ 5\cancel{1}3 \\ \cancel{6}\cancel{2}\cancel{3} \\ - 475 \\ \hline 148 \end{array}$$

Como já se disse, é desejável que este processo venha a ser substituído, o mais tardar no 3.º ano, pelo algoritmo simplificado em que, no caso de determinado algarismo do aditivo ter um valor inferior ao correspondente algarismo do subtrativo, se acrescentam dez unidades dessa ordem ao valor do algarismo do aditivo e efetua-se a compensação acrescentando uma unidade ao valor do algarismo do subtrativo na ordem imediatamente superior, utilizando a expressão “e vai 1”.

$$\begin{array}{r} \\ 623 \\ \\ - 475 \\ \hline 148 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 623 \\ - 475 \\ \hline 148 \end{array}$$

5 para 13 são 8; e vai 1.

7 mais 1 são 8; 8 para 12 são 4; e vai 1.

4 mais 1 são 5; 5 para 6 é 1.

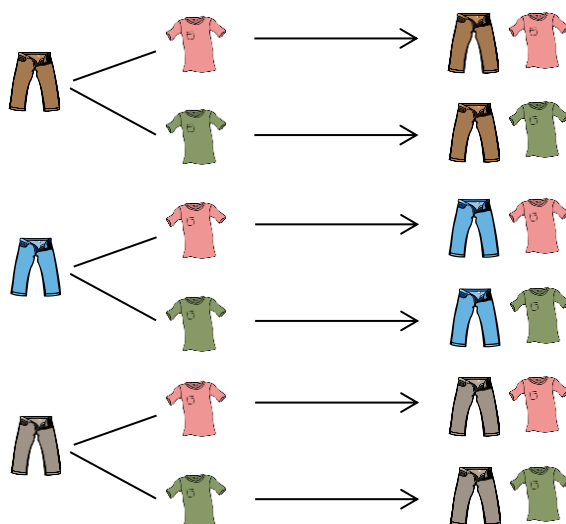
7.3

Exemplo

Quantos conjuntos diferentes de calças-camisola se conseguem formar com três pares de calças e duas camisolas?



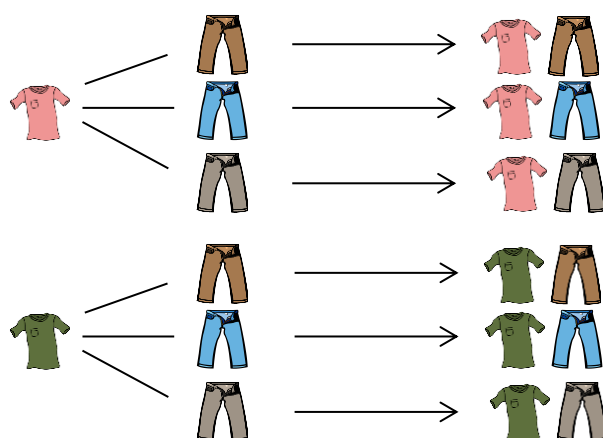
R.: Para cada par de calças temos duas camisolas; como temos três pares de calças, podemos formar $2 + 2 + 2 = 3 \times 2$ conjuntos diferentes:



6 conjuntos diferentes

$$6 = 2 + 2 + 2 = 3 \times 2$$

Ou, de outro modo, para cada camisola temos três calças.



6 conjuntos diferentes

$$6 = 3 + 3 = 2 \times 3$$

Tanto de um modo como do outro, conseguem formar-se 6 conjuntos diferentes de calças-camisola ($3 \times 2 = 6$ e $2 \times 3 = 6$).

Exemplo*

Diz, sem os contares, quantos pares de letras se podem formar tomando uma letra do conjunto $\{b, d, p\}$ e outra do conjunto das vogais?

R.:

Construindo uma tabela de dupla entrada, podemos organizar os pares de letras.

	a	e	i	o	u
b	b,a	b,e	b,i	b,o	b,u
d	d,a	d,e	d,i	d,o	d,u
p	p,a	p,e	p,i	p,o	p,u

Como há três linhas, cada uma delas com 5 pares, no total há $5 + 5 + 5 = 3 \times 5 = 15$.

Podem formar-se 15 pares.

Também poderíamos notar que há cinco colunas, cada uma delas com três pares e portanto, no total há

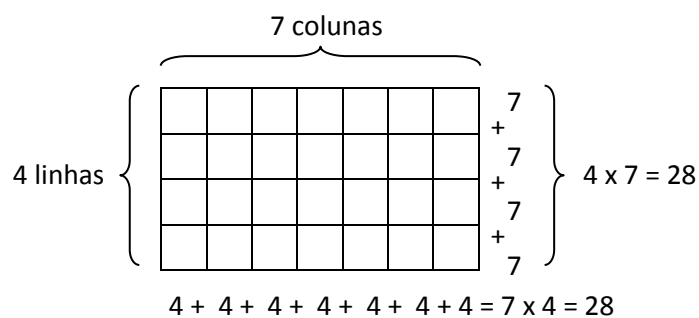
$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \times 3 = 15.$$

7.5

Exemplo

Quantas células tem uma tabela de 4 linhas por 7 colunas?

R.:

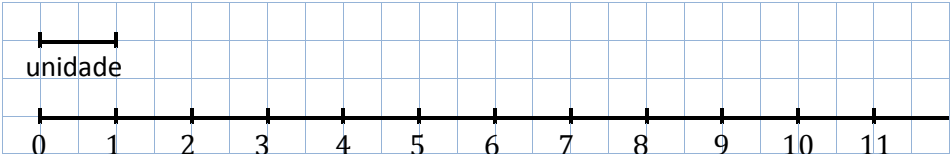
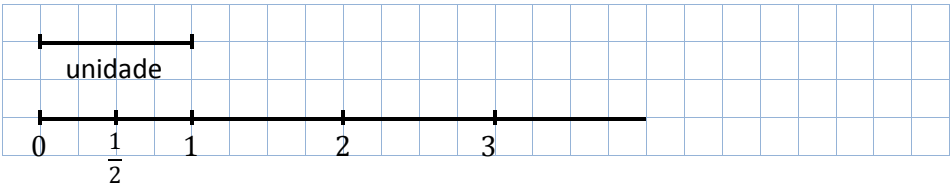


O número de células pode ser contado individualmente (28). O mesmo valor será obtido se dermos primazia ao agrupamento por linhas, pois 4 linhas com 7 células cada uma dá um total de $4 \times 7 = 28$ células. De modo semelhante, preferindo efetuar a contagem pelo agrupamento em colunas, temos 7 colunas com 4 células cada uma, ou seja, $7 \times 4 = 28$ células.

$$7 \times 4 = 4 \times 7 = 28$$

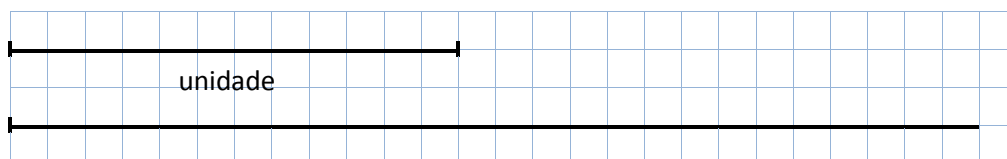
Uma tabela de 4 linhas por 7 colunas tem 28 células.

8.1	Exemplo (Multiplicar no sentido aditivo e subtrair no sentido de retirar) <i>Numa carruagem de um comboio existem 8 compartimentos com 6 passageiros cada um. Numa estação desceram 12 passageiros desta carruagem. Quantos ficaram?</i> Exemplo (Multiplicar no sentido combinatório e adicionar no sentido de juntar) <i>A Rita tem três vestidos, duas blusas e três saias. Tendo em conta que a Rita pode usar um vestido, ou, em alternativa, uma saia e uma blusa, de quantas maneiras diferentes pode ir vestida para a escola?</i>
9.3	Exemplo <i>Qual é o quociente entre 18 e 3?</i> R.: dividendo: 18 divisor: 3 quociente: ? $18 : 3 = \boxed{?}$ O quociente obtém-se completando uma das igualdades $3 \times \boxed{?} = 18 \quad \text{ou} \quad \boxed{?} \times 3 = 18$ Deve procurar-se um número cujo produto por 3 seja igual a 18. 18 a dividir por 3 é igual a 6, porque 3 vezes 6 é igual a 18. Se $3 \times 6 = 18$ então $18 : 3 = 6$. De maneira equivalente, pode procurar-se o número pelo qual 3 se deve multiplicar para se obter 18. 18 a dividir por 3 é igual a 6, porque 6 vezes 3 é igual a 18. Se $6 \times 3 = 18$ então $18 : 3 = 6$. Informação Complementar para o professor Repare-se que estes dois modos de explorar a divisão estão relacionados com a comutatividade da multiplicação. Por exemplo, na divisão de 40 por 8, há situações em que o que se pretende é fazer agrupamentos de 8 e, nesse caso, teremos que determinar quantos agrupamentos de 8 elementos se podem fazer com 40 elementos (5 agrupamentos; $5 \times 8 = 40$) ou, por outro lado, podemos encontrar situações em que o que se pretende é constituir 8 agrupamentos iguais e a tarefa será determinar quantos elementos terá cada agrupamento (5 elementos; $8 \times 5 = 40$). Estas duas interpretações estão diretamente relacionadas com as igualdades $8 \times 5 = 40$ e $5 \times 8 = 40$.
9.5	Exemplo <i>Quanto é metade de 12?</i> R.: Metade de 12 é 6 porque o dobro de 6 é 12. Exemplo* <i>Qual é a quarta parte de 28?</i> R.: A quarta parte de 28 é igual a 7 porque o quádruplo de 7 é igual a 28.

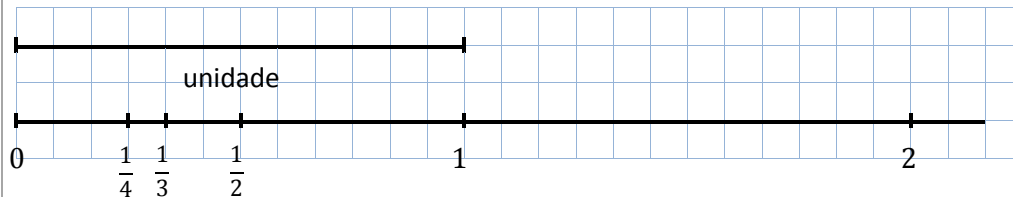
10.1	Exemplo (partilha equitativa) <i>Uma professora pretende distribuir 48 rebuçados por 6 meninos de forma que todos fiquem com o mesmo número de rebuçados. Quantos rebuçados receberá cada um?</i> Exemplo (agrupamento) <i>Quantas caixas de 7 bolos se podem fazer com 56 bolos?</i>
11.1 11.2	Tanto estes descritores como o seguinte podem ser trabalhados em conjunto com os objetivos gerais GM2-3 e GM2-4. Não se pretende, evidentemente, nesta fase, que o aluno efetue construções geométricas rigorosas que conduzam à decomposição em partes iguais de um dado segmento de reta tomado para unidade. Poderá utilizar segmentos já decompostos ou traçados em papel quadriculado de maneira a facilitar essas decomposições; para se exemplificarem as decomposições de uma unidade de comprimento em 100 e 1000 partes iguais podem utilizar-se as divisões de um metro. Os exemplos seguintes ilustram o descritor 11.2: aqui, cada número é representado pelo ponto cuja distância à origem tem medida de comprimento igual a esse número na unidade fixada. Exemplo <i>Tomando o segmento de reta dado para unidade, representa o zero e os naturais menores que 12 na semirreta indicada.</i>  R.:  Exemplo* <i>Tomando o segmento de reta dado para unidade, representa o zero, os naturais 1, 2 e 3 e a fração $\frac{1}{2}$ na semirreta indicada.</i>  R.: 

Exemplo**

Tomando o segmento de reta dado para unidade, representa o zero, os naturais 1 e 2 e as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ na semirreta indicada.



R.:

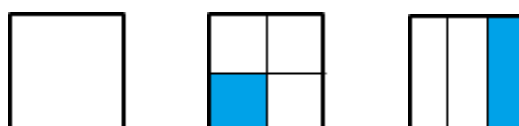


11.3

Relativamente a este descritor propõe-se que a referência às frações $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{1000}$ seja preferencialmente associada à visualização das divisões do metro. Quanto às restantes frações consideradas é conveniente observar exemplos fazendo intervir diferentes grandezas a respeito das quais seja fácil reconhecer a decomposição de um todo em partes equivalentes; poderá tratar-se de figuras planas decomponíveis em partes com áreas iguais, de conjuntos decomponíveis em partes com o mesmo número de objetos, etc. Em cada caso será necessário que fique claro (implícita ou explicitamente) qual é a unidade e o que significa decompô-la em determinado número de partes equivalentes; mais tarde (cf. NO3-11.2) será também necessário saber o que significa recompor um certo número de partes equivalentes a essas.

Exemplo

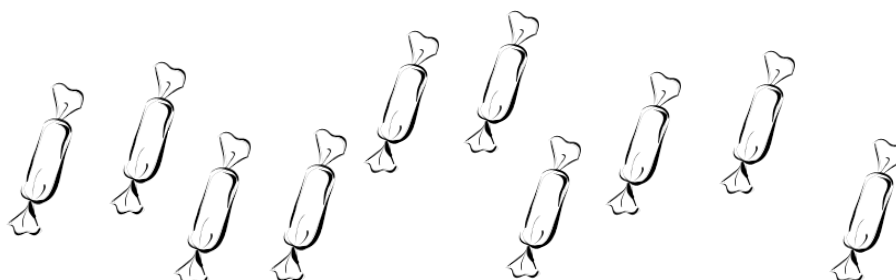
Tomando o primeiro quadrado para unidade, faz corresponder a cada parte pintada, no segundo e terceiro quadrados, a respetiva fração.

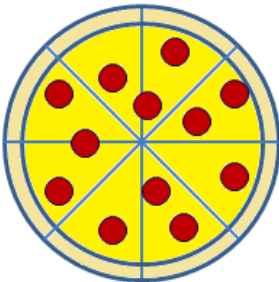


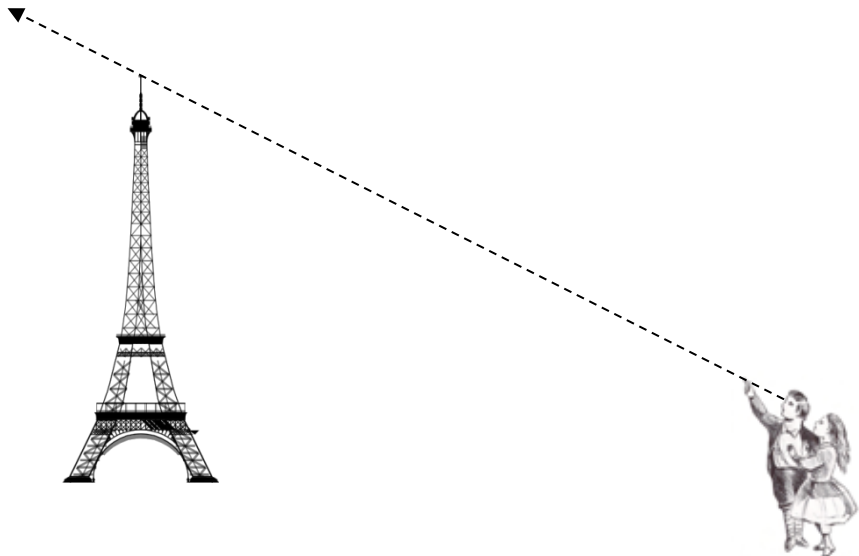
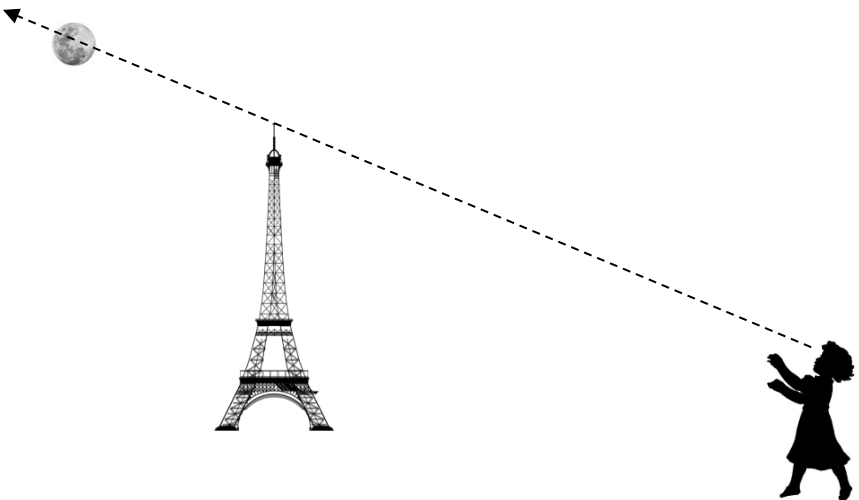
R.: No segundo quadrado a parte pintada corresponde a $\frac{1}{4}$ e no terceiro a $\frac{1}{3}$.

Exemplo

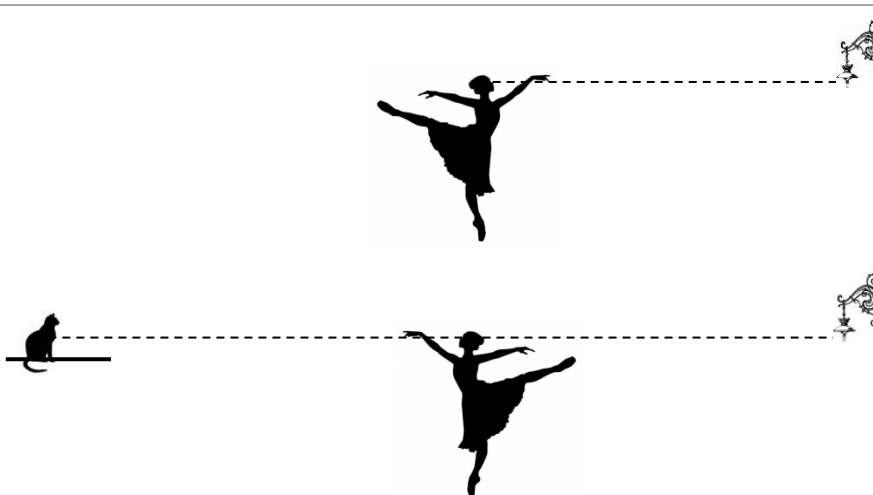
Pinta um quinto dos rebuçados a verde e um décimo a encarnado.



	Exemplo <i>Observa a pizza que está cortada em fatias de igual tamanho. Se te for destinado um quarto da pizza, quantas fatias podes comer?</i> 
12.1	Exemplo <i>Considera a sequência dos múltiplos de 3 pela ordem natural. Os primeiros quatro termos são 3, 6, 9, 12. Determina o oitavo termo da sequência.</i> R.: O oitavo termo da sequência é 24. Exemplo* <i>Considera a sequência cujo primeiro termo é 7 e em que cada termo seguinte se obtém do anterior adicionando 4 unidades. Os primeiros três termos são 7, 11, 15. Escreve os primeiros dez termos da sequência.</i> R.: Os dez primeiros termos da sequência são: 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43. Exemplo** <i>Considera a sequência cujos dois primeiros termos são iguais a 1 e em que cada termo seguinte se obtém adicionando os dois termos anteriores. Os primeiros cinco termos são 1, 1, 2, 3, 5. Acrescenta os 5 termos seguintes da sequência.</i> R.: Acrescentando os 5 termos seguintes, obtém-se: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.
12.2	Exemplo <i>Considera a sequência 2, 7, 12, 17. Indica uma regra que permita passar de um termo ao seguinte e, utilizando-a, escreve mais 4 termos.</i> R.: Uma possível regra para passar de um termo para o seguinte é adicionar-lhe 5 unidades. Com esta regra, os próximos quatro termos seriam: 22, 27, 32, 37. Exemplo* <i>Observa a sequência de figuras construídas com quadrados e círculos.</i>  Figura 1  Figura 2  Figura 3 ... a. <i>Sugere uma regra para a construção desta sequência de figuras.</i> b. <i>Seguindo a regra que sugeriste, quantos círculos terá a Figura 5? E quantos quadrados terá a Figura 8?</i>

Descritor	Texto de apoio
1.1	Na sequência do descritor 1.2 de GM1, podemos agora notar que, na linguagem comum, identifica-se a <i>direção</i> de um objeto ou de um “ponto” (objeto considerado pontual) por nós avistado como o conjunto das posições situadas à frente ou por detrás desse objeto. Podemos verificar que estamos a «apontar» para um dado objeto, com um dedo indicador, por exemplo, se a ponta desse dedo o ocultar parcial ou totalmente do nosso olhar, ou seja se ficar à frente dele; tal como foi referido a propósito de GM1-2.1, conseguiremos uma maior precisão se taparmos um dos olhos. Dizemos então que estamos a apontar «na direção» desse objeto; consideramos portanto que a ponta do dedo indicador fica nessa mesma direção.  O olho e a ponta da Torre Eiffel determinam uma direção. A ponta do dedo está nessa direção. Também se consideram como estando na mesma direção as posições situadas por detrás do objeto que a determinou; esse objeto ocultará parcialmente ou totalmente da nossa vista outro qualquer que se situe numa dessas posições.  O ponto de onde a menina está a olhar e a ponta da Torre Eiffel determinam uma direção. A Lua está nessa direção.

	A nossa experiência revela-nos que quaisquer objetos numa mesma direção e aparentando dimensões próximas (do nosso ponto de vista) podem substituir-se uns aos outros na determinação das posições do espaço que consideramos constituírem essa direção. Assim, apontando para determinado objeto da maneira acima descrita, a direção da porção do objeto que a ponta do dedo indicador oculta do nosso olhar é também constituída pelas posições que ficam à frente e por detrás da ponta desse dedo. Podem ser feitas diversas experiências visuais identificando objetos na direção de outros; considerando objetos sucessivamente com menores dimensões aparentes, aproximamo-nos da ideia de semirreta introduzida em 2.1, adiante, neste caso identificando-se a origem com a posição de onde é feita a observação. Quando olhamos para determinado objeto também dizemos que estamos a «olhar na direção» desse objeto ou que essa é a «direção do nosso olhar». Um uso correto deste termo em situações concretas, no sentido comum que acabámos de analisar, pode constituir uma boa preparação para a introdução do conceito de semirreta e depois de reta, em ligação com as nossas percepções visuais e orientação dos nossos movimentos. Observação: O termo «direção», em Matemática, é utilizado, numa fase mais avançada, em sentido diferente daquele que a linguagem comum consagrou, pois refere-se ao conjunto das retas paralelas a uma dada reta; assim cada reta determina exatamente uma direção, que partilha com as que lhe são paralelas, e a cada direção (com este significado) correspondem dois sentidos; no entanto, a este nível, o que se pretende é uma utilização correta do sentido corrente da palavra direção como acima ficou explicitado e que, como veremos e já foi referido, corresponde mais propriamente à noção de semirreta, com origem num observador.
1.2	Sabemos o que significa olhar a direito, para baixo, para cima, em frente, para o lado direito, para o lado esquerdo, para trás, utilizando as nossas características anatómicas e de acordo com a maneira como viramos a cabeça. Se estivermos de pé, em postura vertical, olhando em frente e a direito e rodarmos sobre nós próprios procurando manter essas mesmas postura e atitude do olhar, quando terminarmos o movimento, o nosso olhar estará, em geral, virado para uma direção distinta daquela para a qual se dirigia no início desse movimento. No entanto, fixando um ponto de referência que supomos imóvel e que avistamos antes de darmos essa volta, se no final estivermos novamente virados para esse ponto de referência consideramos que demos uma volta inteira sobre nós próprios; neste caso a direção do nosso olhar é a mesma antes e após termos dado essa volta. Temos também capacidade para aferir quando, após rodarmos sobre nós próprios, ficamos virados para objetos que antes de iniciarmos o movimento estavam “nas nossas costas”; nesse caso a nossa cabeça fica situada entre pontos de referência que podemos avistar respetivamente no início e no fim desse movimento. Se repetirmos um tal movimento no mesmo sentido voltaremos à posição inicial e teremos no total dado uma volta inteira, pelo que teremos dado duas meias voltas seguidas. As direções para as quais olhamos (em frente e a direito) no início e no fim de uma meia volta são opostas, e os pontos que estão nessas duas direções estão todos alinhados.



Também podemos dar uma meia volta em duas etapas seguidas; a amplitude máxima de rotação da nossa própria cabeça, quando a mantemos direita mas a viramos para a direita ou para a esquerda, dá-nos uma referência para podermos comparar as amplitudes das voltas que damos sobre nós próprios e aferir se demos duas voltas aproximadamente com a mesma amplitude para atingirmos a meia-volta. Nesse caso cada uma das viragens corresponde a **um quarto de volta** e as direções inicial e final do nosso olhar (sempre considerado em frente e a direito) dão-nos um novo exemplo de perpendicularidade (para além do que já podíamos identificar com segmentos verticais e horizontais), mas numa primeira fase apenas procuramos relacionar as viragens que designamos por volta inteira, meia volta e quarto de volta com as direções para as quais estamos virados no início e no fim destes movimentos. Executando os movimentos que acabámos de descrever, mantendo as posturas indicadas, se apontarmos na direção do nosso olhar no início e no fim desses movimentos, o braço esticado utilizado para esse efeito dá-nos uma ideia desses pares de direções.

Imaginemos que andamos a direito, num plano horizontal para simplificar, paramos em determinado ponto e damos um quarto de volta para a direita, prosseguindo depois a marcha, mais uma vez a direito. Dizemos então que **virámos à direita**; analogamente se define uma **viragem à esquerda**. Podemos utilizar estes termos para descrever um itinerário deste tipo, bastando indicar os pontos de partida e de chegada de cada troço que é percorrido a direito e, em cada um dos pontos de viragem, indicar se virámos à direita ou à esquerda, presumindo-se que efetuámos em cada caso um quarto de volta para esse mesmo lado. Adiante (1.4) veremos como representar itinerários como este numa grelha quadriculada.

1.3

Podemos utilizar grelhas quadriculadas para facilitar a representação de figuras geométricas determinadas por segmentos perpendiculares, habituando os alunos a identificar e representar este tipo de figuras ainda antes de qualquer definição formal, processo que já foi referido em GM1-2.7 para representar retângulos e quadrados. Tendo já sido introduzida no 1.º ano a noção de equidistância e de medida de comprimento, no caso de medidas expressas como números naturais, a identificação de pontos equidistantes de um dado ponto pode agora ser praticada com pontos de interseção das linhas de uma grelha quadriculada, como aplicação desses conceitos e processos.

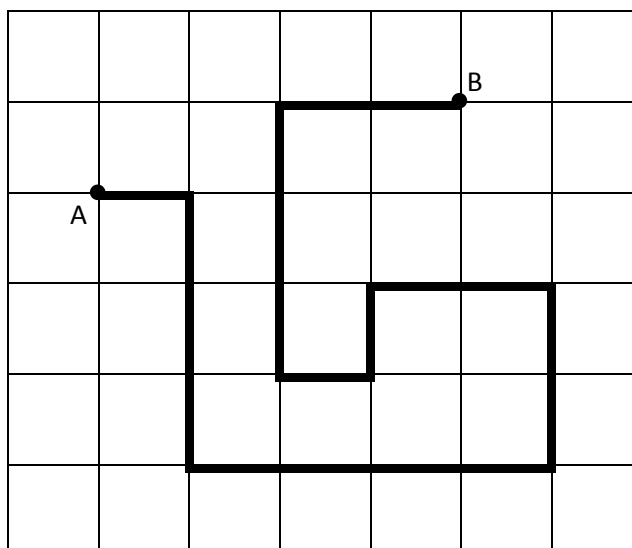
1.4

Itinerários como os atrás referidos a propósito do descritor 1.2 podem facilmente ser representados numa grelha quadriculada, desde que os alunos se habituem a representar um trajeto retilíneo por um segmento de reta desenhado nessa grelha. Uma vez que a direção do nosso olhar, quando olhamos em frente e a direito à medida que andamos num trajeto retilíneo, é aproximadamente paralela à própria trajetória que percorremos no plano em que nos deslocamos, os segmentos que desenhemos, para além de representarem o caminho percorrido, também podem indicar a direção para a qual olhamos entre dois pontos de um percurso retilíneo. Nos pontos que correspondem a uma viragem, o prolongamento do segmento que acabámos de percorrer indica a direção do nosso olhar antes de darmos um quarto de volta e a direção do segmento que passamos a percorrer depois da viragem indica a nova direção do nosso olhar.

Em cada ponto de viragem de um dado itinerário desenhado numa grelha quadriculada é conveniente identificar as viragens que são efetuadas para a direita e para a esquerda e que envolvem portanto quartos de volta para o lado correspondente. Inversamente pode pedir-se para representar um itinerário começando em determinado ponto em determinada direção e depois seguindo uma descrição em que se indicam as distâncias percorridas a direito (em unidades da quadrícula) e as sucessivas viragens à direita e à esquerda (ou os sucessivos quartos de volta para a direita ou para a esquerda que são efetuados no fim de cada troço retilíneo).

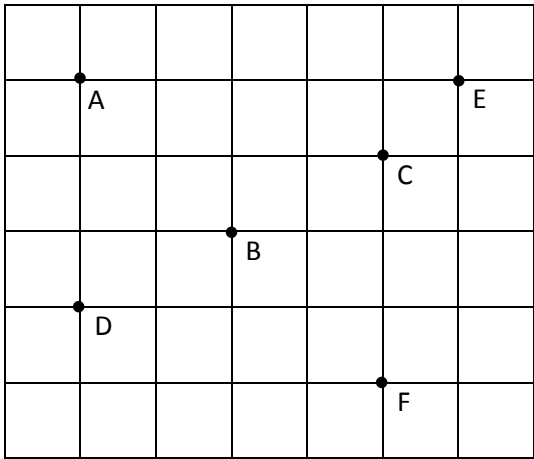
Exemplo

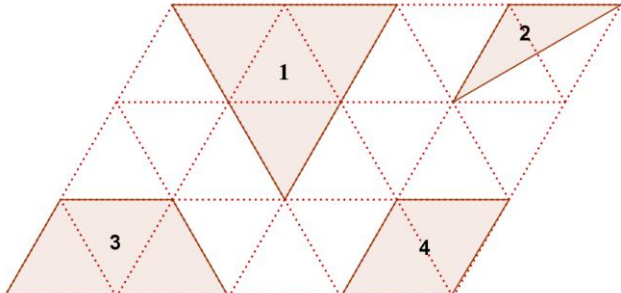
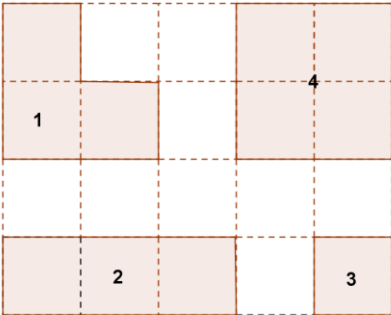
Observe o itinerário desenhado na quadrícula abaixo. Começando no ponto A e acabando no ponto B, diga para que lado é preciso dar cada um dos quartos de volta para fazer as viragens indicadas.

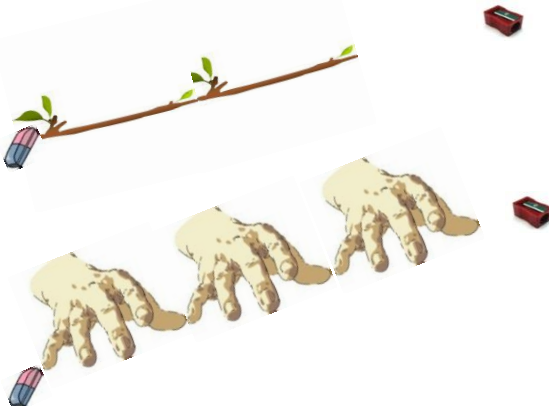
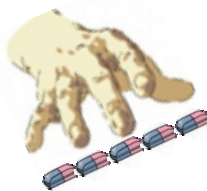


Exemplo*

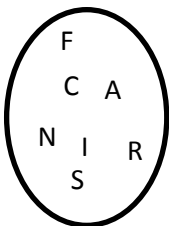
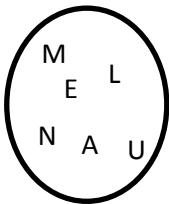
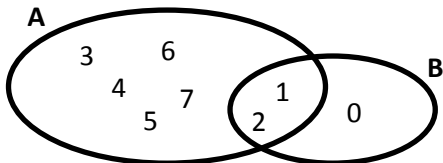
Descreva o itinerário desenhado na quadrícula acima a começar no ponto A e a acabar no ponto B e dizendo por ordem quantas unidades são percorridas a direito e para que lado é preciso dar cada quarto de volta quando se faz cada viragem, até ao fim do itinerário.

	Exemplo** <i>Desenha um itinerário numa grelha quadriculada representando o percurso de uma pessoa que começa a andar num dado ponto, anda numa dada direção duas unidades, depois vira à direita e anda uma unidade, depois vira à esquerda e anda três unidades, depois dá um quarto de volta para a esquerda, anda duas unidades e para.</i>
2.1	Se imaginarmos um observador num dado ponto O que avista outro ponto P, os pontos que estão na direção de P para esse observador constituem a chamada «semirreta» de origem O que passa no ponto P; também se considera que o ponto O pertence a essa semirreta. As considerações atrás feitas acerca do uso comum do termo «direção» (cf. 1.1) têm como consequência que essa semirreta é constituída pelos pontos Q alinhados com O e P e que estão ou situados entre O e P ou tais que P está situado entre O e Q. Os alunos devem identificar em desenhos e situações concretas pontos que pertencem e que não pertencem a determinada semirreta com dada origem e passando por um dado ponto, podendo ligar-se este conceito às direções referidas a propósito de 1.1, imaginando a semirreta que passa por objetos numa mesma direção visual.
2.2	Depois de se identificarem pontos alinhados em diversas situações, dados dois pontos A e B podem facilmente distinguir-se os pontos que estão com eles alinhados dos que não estão e dizer que os primeiros constituem a «reta» determinada por A e B. Dados três pontos O, A e B de uma reta tais que O está entre A e B ficam determinadas duas semirretas de origem O passando respetivamente por A e B, as quais se designam por «semirretas opostas», designando-se por «reta suporte» dessas semirretas a que contém os pontos O, A e B e portanto todos os pontos de ambas as semirretas, sendo essa reta, aliás, igual à união das duas semirretas opostas. Analogamente ao que se observou a propósito das direções visuais (1.1), quaisquer dois pontos de uma dada reta determinam a mesma reta. Não se pretende, evidentemente, nesta fase, justificar este facto geométrico, intuído da nossa experiência, mas uma correta utilização dos termos direção, reta, semirreta, pontos de uma reta, etc. em situações concretas tornam-no facilmente assimilável, sem ser necessário explicitá-lo de modo formal. Exemplo <i>Na seguinte grelha quadriculada estão representados os pontos A, B, C, D, E e F.</i> 

	a. Indica um ponto que esteja alinhado com os pontos A e B. b. Indica um ponto que pertença à semirreta com origem em D e que passa por C. c. Indica um ponto da semirreta oposta à que tem origem B e passa por D. d. O ponto C pertence à semirreta que tem origem em E e que passa por B?
2.3 a 2.12	Nesta fase introduzem-se diversos termos designando figuras geométricas planas e tridimensionais (sólidos) com propriedades particulares, pretendendo-se que os alunos as reconheçam visualmente, sendo capazes de representar exemplos das diversas figuras planas e utilizando corretamente esses termos, mas sem se exigirem quaisquer definições formais. Continuando o objetivo de classificação que levou a considerar os quadrados como casos particulares de retângulos (GM1-2.5), introduzem-se os triângulos isósceles e equiláteros (estes como casos particulares dos primeiros), os losangos (abrangendo os quadrados como casos particulares) e, mais geralmente, os quadriláteros. Também se prevê uma iniciação prática ao estudo das simetrias, podendo-se propor que os alunos completem figuras planas por forma a obterem figuras com um dado eixo de simetria. Podem utilizar-se dobragens, papel vegetal, espelhos, etc. Exemplo Na figura está representada uma malha de triângulos todos iguais entre si e de lados iguais. Nela estão representadas quatro figuras numeradas de 1 a 4.  a. Identifica as figuras que representam quadriláteros. b. Identifica as figuras que representam triângulos. c. Dos triângulos representados, algum é equilátero? E isósceles? d. Nos quadriláteros representados existe algum losango? Porquê? Exemplo Na figura está representada uma malha de quadrados iguais entre si onde se desenharam quatro figuras numeradas.  a. Quantas figuras representam quadriláteros? b. Quantas representam retângulos? c. Alguma das figuras representa um losango? d. Dos retângulos representados, quais são quadrados?

3.1	Utilizando objetos rígidos com dois pontos fixados para medir comprimentos e distâncias, tal como foi previamente observado (GM1-3.2), é muitas vezes impossível obter medidas satisfatórias utilizando apenas números naturais.  Assim, nas figuras acima, podemos dizer que a distância entre a borracha e o apara-lápis mede mais do que 2, tomando o comprimento do galho para unidade, e mede mais do que 3, em palmos. Se tentássemos justapor mais uma vez o galho ao último ponto atingido, mantendo o alinhamento das extremidades com a borracha e o apara-lápis, verificaríamos que a outra extremidade do galho ultrapassaria a posição da borracha; o mesmo se passaria com o dedo polegar se justapusessemos novamente o dedo mínimo à última posição do polegar, mantendo também o alinhamento das pontas do polegar com a borracha e o apara-lápis. Por esse motivo, diríamos que a distância entre a borracha e o apara-lápis mede menos do que 3, tomando o comprimento do galho para unidade, e mede menos do que 4 palmos.
3.2 3.3	Fixada uma unidade de comprimento, se, utilizando uma outra unidade de comprimento, a medida da primeira nessa segunda unidade for igual respetivamente a 2, 3, 4, 5, 10, 100 ou 1000, dizemos que a segunda unidade resulta da primeira por divisão no correspondente número de partes iguais. Designamos então que a segunda unidade (dita uma «subunidade» da primeira) respetivamente por «um meio», «um terço», «um quarto», «um quinto», «um décimo», «um centésimo» e «um milésimo» da primeira unidade. No exemplo seguinte, o palmo mede 5 unidades, tomando a borracha para unidade; podemos então dizer que o comprimento da borracha é uma subunidade do palmo, mais precisamente, um quinto do palmo.  As subdivisões de um metro fornecem exemplos de divisões de uma unidade de comprimento em 10 (um decímetro), 100 (um centímetro) e 1000 (um milímetro) partes iguais. Estes descritores podem ser trabalhados em conjunto com o objetivo geral NO2-11.

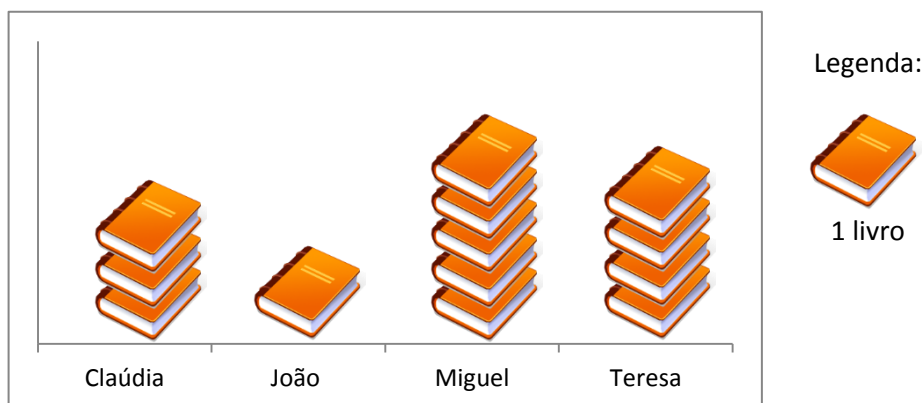
Organização e tratamento de dados OTD2

Descritor	Texto de apoio
1.1 1.2	Exemplo <i>Verifica quais são os elementos que pertencem a ambos os conjuntos.</i> Conjunto das letras do nome Francisca  Conjunto das letras do nome Manuel  R.: Os elementos que pertencem aos dois conjuntos são o A e o N. Exemplo* <i>Considera os seguintes conjuntos de números:</i> $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$ <i>Determina o conjunto interseção de A com B.</i> <i>Determina o conjunto reunião de A com B.</i> R.: a. O conjunto interseção de A com B é $\{6, 12, 18\}$; $A \cap B = \{6, 12, 18\}$ b. O conjunto reunião de A com B é $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 30\}$; $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 30\}$ Nas operações com conjuntos podem ser introduzidos os símbolos convencionais das mesmas. Exemplo** Constrói um diagrama de <i>Venn</i> onde presentes em simultâneo os dois seguintes conjuntos de algarismos: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $B = \{\text{algarismos do número } 2012\}$ R.: 

2.1

Exemplo

O pictograma representa o número de livros que quatro amigos (Cláudia, João, Miguel e Teresa) leram durante as férias de verão.

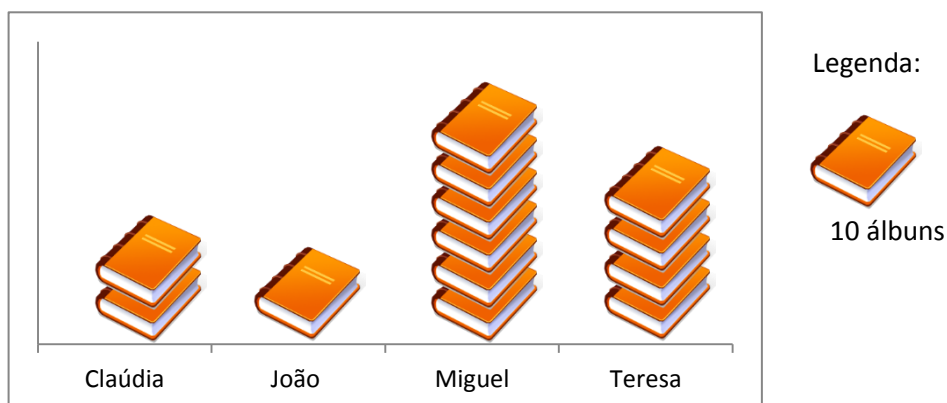


Quantos livros leu a Cláudia?

R.: A Cláudia leu três livros.

Exemplo*

O pictograma representa o número de álbuns de banda desenhada que quatro amigos (Cláudia, João, Miguel e Teresa) leram durante um ano.



Quantos álbuns leu a Teresa a mais do que a Cláudia?

R.: A Teresa leu mais 20 álbuns do que a Cláudia.

Descritor	Texto de apoio
2.2	Exemplo <i>Contar, de 100 em 100, desde 4700 até 6100.</i> R.: 4700 – quatro mil e setecentos; 4800 – quatro mil e oitocentos; 4900 – quatro mil e novecentos; 5000 – cinco mil; 5100 – cinco mil e cem; 5200 – cinco mil e duzentos; 5300 – cinco mil e trezentos; 5400 – cinco mil e quatrocentos; 5500 – cinco mil e quinhentos; 5600 – cinco mil e seiscentos; 5700 – cinco mil e setecentos; 5800 – cinco mil e oitocentos; 5900 – cinco mil e novecentos; 6000 – seis mil; 6100 – seis mil e cem. Exemplo* <i>Contar, de 100 em 100, desde 4721 até ultrapassar 6100.</i> R.: 4721 – quatro mil, setecentos e vinte e um; 4821 – quatro mil, oitocentos e vinte e um; 4921 – quatro mil, novecentos e vinte e um; 5021 – cinco mil e vinte e um; 5121 – cinco mil, cento e vinte e um; 5221 – cinco mil, duzentos e vinte e um; 5321 – cinco mil, trezentos e vinte e um; 5421 – cinco mil, quatrocentos e vinte e um; 5521 – cinco mil, quinhentos e vinte e um; 5621 – cinco mil, seiscentos e vinte e um; 5721 – cinco mil, setecentos e vinte e um; 5821 – cinco mil, oitocentos e vinte e um; 5921 – cinco mil, novecentos e vinte e um; 6021 – seis mil e vinte e um; 6121 – seis mil, cento e vinte e um.
4.4	Exemplo <i>Efetua a decomposição decimal de 4395.</i> R.: $4395 = 4 \times 1000 + 3 \times 100 + 9 \times 10 + 5 \times 1$ ou $4395 = 4000 + 300 + 90 + 5$. 4395 são quatro milhares, três centenas, nove dezenas e cinco unidades.

	Exemplo* <i>Efetua a decomposição decimal de 748.092.</i> R.: $748.092 = 7 \times 100\,000 + 4 \times 10\,000 + 8 \times 1\,000 + 0 \times 100 + 9 \times 10 + 2 \times 1$ ou $748.092 = 700\,000 + 40\,000 + 8\,000 + 90 + 2.$ 748.092 são sete centenas de milhar, quatro dezenas de milhar, oito unidades de milhar, zero centenas, nove dezenas e duas unidades.		
5.2	No ano anterior os alunos já efetuaram subtrações com números até 1000 pelo processo descrito em NO2-5.5. ou pelo processo de compensação que se descreve em seguida. Espera-se que no 3.º ano o aluno seja capaz de utilizar fluentemente a equivalência do processo descrito no ano anterior com o processo simplificado. Quando determinado algarismo do aditivo tem um valor inferior ao correspondente algarismo do subtrativo, acrescentam-se dez unidades dessa ordem ao valor do algarismo do aditivo e efetua-se a compensação acrescentando uma unidade ao valor do algarismo do subtrativo na ordem imediatamente superior, utilizando a expressão “e vai 1”, relembrando que 10 unidades de determinada ordem equivalem a 1 unidade da ordem imediatamente superior. Exemplo <i>Calcula a diferença entre 345.712 e 138.220.</i> R.: <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;"> $\begin{array}{r} 3 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 1 \quad 2 \\ - 1 \quad 3 \quad 8 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 2 \quad 0 \quad 7 \quad 4 \quad 9 \quad 2 \end{array}$ </td> <td style="text-align: center;"> $\begin{array}{r} 3 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 1 \quad 2 \\ - 1 \quad 3 \quad 8 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 2 \quad 0 \quad 7 \quad 4 \quad 9 \quad 2 \end{array}$ </td> </tr> </table> Neste exemplo, logo na ordem das dezenas verifica-se que o algarismo do aditivo (1) tem um valor inferior ao correspondente algarismo do subtrativo (2). Assim, acrescentando dez unidades ao valor do algarismo do aditivo, ficarão 11 dezenas e calcular-se-á a diferença entre 11 e 2. Em seguida, compensa-se o acréscimo efetuado no aditivo (10 dezenas) pelo acréscimo no subtrativo de uma unidade ao valor do algarismo da ordem das centenas (1 centena). Processo idêntico acontecerá envolvendo as ordens das unidades de milhar e das dezenas de milhar. Poder-se-á dizer: 0 para 2 são 2; 2 para 11 são 9, e vai um; 2 mais 1 são 3; 3 para 7 são 4; 8 para 15 são 7, e vai 1; 3 mais 1 são 4; 4 para 4 são 0; 1 para 3 são 2.	$\begin{array}{r} 3 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 1 \quad 2 \\ - 1 \quad 3 \quad 8 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 2 \quad 0 \quad 7 \quad 4 \quad 9 \quad 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 1 \quad 2 \\ - 1 \quad 3 \quad 8 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 2 \quad 0 \quad 7 \quad 4 \quad 9 \quad 2 \end{array}$
$\begin{array}{r} 3 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 1 \quad 2 \\ - 1 \quad 3 \quad 8 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 2 \quad 0 \quad 7 \quad 4 \quad 9 \quad 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 1 \quad 2 \\ - 1 \quad 3 \quad 8 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 2 \quad 0 \quad 7 \quad 4 \quad 9 \quad 2 \end{array}$		
6.1	Exemplo <i>A mãe da Marta tinha 43 euros na carteira. Comprou uma sandes e um sumo de laranja por 3 euros, depois levantou 30 euros numa caixa multibanco e comprou uma saia por 49 euros. Com quanto dinheiro ficou?</i>		

	Exemplo* <i>Num autocarro seguia um certo número de passageiros. Na primeira paragem entraram mais 4 e ninguém saiu. Na segunda saíram 13 mas ninguém entrou. Sabendo que após a segunda paragem ficaram 38 passageiros, quantos estavam dentro do autocarro no início da viagem?</i>
7.3	No sistema de numeração decimal, ao multiplicar-se por 10 um número natural, cada algarismo que representa determinada ordem passa a representar a ordem decimal imediatamente superior, pois o valor de cada ordem seguinte é sempre igual a 10 vezes o valor da ordem imediatamente anterior. Assim, podemos fixar que o produto de um número natural por 10 obtém-se deslocando todos os algarismos uma ordem para a esquerda, ou seja, acrescentando um zero à direita. Para multiplicar um número natural por 100, 1000, etc, começemos por observar que uma centena, por definição, é uma dezena de dezenas e que um milhar é uma dezena de centenas, ou seja, uma dezena de dezenas de dezenas. Assim, multiplicar um número natural n por 100, 1000, etc. equivale a multiplicar repetidamente por 10, obtendo-se portanto o resultado acrescentando à representação decimal de n dois, três, etc. zeros. Exemplo <i>Calcula mentalmente o produto de 340 por 10.</i> R.: Para obter o resultado da multiplicação de 340 por 10 basta acrescentar um 0 à direita do número 340. Então, $340 \times 10 = 3400$. Exemplo <i>Calcula mentalmente o produto de 448 por 100.</i> R.: $448 \times 100 = 44\,800$. Exemplo <i>Calcula mentalmente o produto de 701 por 1000.</i> R.: $701 \times 1000 = 701\,000$.
7.4	Exemplo <i>Calcula mentalmente o produto de 3 por 20.</i> R.: Como 3 vezes 2 são 6, então o produto de 3 por 2 dezenas são 6 dezenas, ou seja, 3 vezes 20 é igual a 60. $3 \times 20 = 60$ Exemplo* <i>Calcula mentalmente o produto de 8 por 90.</i> R.: Dado que 8 vezes 9 são 72, então o produto de 8 por 9 dezenas são 72 dezenas, ou seja, 8 vezes 90 é igual a 720. $8 \times 90 = 720$

7.5	Neste descritor pretende-se que o aluno utilize implicitamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para multiplicar um número de dois algarismos por outro de um algarismo. Nesta situação, essa propriedade traduz-se muito simplesmente no facto de se poderem efetuar as adições de parcelas iguais que dão origem ao produto adicionando separadamente as dezenas e as unidades e em seguida os resultados assim obtidos. Exemplo <i>Calcula 3×28.</i> R.: Multiplicar 3 por 28 é o mesmo do que multiplicar separadamente 3 por 2 dezenas e por 8 unidades, adicionando os resultados obtidos. $3 \times 2 \text{ dezenas} = 6 \text{ dezenas};$ $3 \times 8 \text{ unidades} = 24 \text{ unidades}.$ 3×28 são 6 dezenas mais 24 unidades, ou seja, 84 unidades. $3 \times 28 = 84.$																														
7.6	Relativamente ao descritor anterior, pretende-se aqui um cálculo mais sistemático, preparatório do algoritmo da multiplicação. Exemplo <i>Calcula 8×46.</i> R.: 8×6 são 48. Ficam 8 unidades e vão 4 dezenas. 8×4 são 32, mais 4 são 36 dezenas. O produto é igual a 36 dezenas mais 8 unidades. $8 \times 46 = 368.$																														
7.7	Nas multiplicações de números de dois algarismos por números de dois algarismos, uma vez que já se sabe multiplicar um número de um algarismo por outro de dois algarismos (7.5 e 7.6), basta que se faça a decomposição em dezenas e unidades de um dos fatores. Exemplo <i>Calcula o produto de 62 por 34.</i> R.: Podemos decompor o fator 34 em 3 dezenas e 4 unidades. Multiplicando 62 por 4 unidades obtemos 248 unidades. Multiplicando 62 por 3 dezenas obtemos 186 dezenas. Devemos então adicionar 248 unidades e 186 dezenas (1860 unidades). Recorrendo ao algoritmo da adição, tem-se: <table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>+</td><td>1</td><td>8</td><td>6</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td></td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>									2	4	8		+	1	8	6	0			2	1	0	8							
		2	4	8																											
+	1	8	6	0																											
	2	1	0	8																											

Representando o cálculo na disposição usual do algoritmo da multiplicação, tem-se:

			6	2	
		x	3	4	
			2	4	8
		1	8	6	
		2	1	0	8

Note-se que esta disposição vertical é particularmente útil para adicionar um certo número de unidades com um certo número de dezenas. Repare-se na posição do número 186 deslocado uma casa para a esquerda. Estamos na verdade a adicionar 1860 (186 dezenas) com 248 unidades, omitindo o 0 final de 1860 mas mantendo a posição dos restantes algarismos na disposição do algoritmo da adição.

7.8

Exemplo

Calcula 423×25 .

R.:

			4	2	3	
		x		2	5	
			2	1	1	5
		+	8	4	6	
			1	0	5	7
						5

$$423 \times 25 = 10575$$

Pode dizer-se:

5 vezes 3 são 15. Fica 5 e vai 1.

5 vezes 2 são 10, e 1 são 11. Fica 1 e vai 1.

5 vezes 4 são 20, e 1 são 21.

2 vezes 3 são 6.

2 vezes 2 são 4.

2 vezes 4 são 8.

Adicionando os produtos parciais:

Baixa-se o 5.

6 mais 1 são 7.

4 mais 1 são 5.

8 mais 2 são 10.

Repare-se que o algoritmo da multiplicação recorre claramente à propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição.

$$423 \times 25 = 423 \times (2 \text{ dezenas} + 5 \text{ unidades})$$

Podemos multiplicar separadamente o número 423 pelo algarismo das unidades e pelo algarismo das dezenas, tendo em atenção que ao multiplicar pelo algarismo das unidades o resultado obtido são unidades e ao multiplicar pelo algarismo das dezenas o resultado são dezenas.

$$423 \times 5 \text{ unidades} = 2115 \text{ unidades}$$

$$423 \times 2 \text{ dezenas} = 846 \text{ dezenas}$$

Na execução do algoritmo torna-se necessário ter em atenção a ordem do algarismo que vai multiplicar o fator colocado na linha superior. Essa ordem determina a posição em que se deve colocar o primeiro algarismo calculado do produto: o aumento de uma ordem corresponde a um deslocamento para a esquerda. Quando o fator colocado na linha inferior tem um dos algarismos igual a 0, não há qualquer produto a calcular para a ordem correspondente, devendo passar-se para a ordem do algarismo seguinte que seja diferente de zero. Se o fator colocado na linha inferior termina com um ou mais algarismos iguais a 0, é costume colocá-los à direita do alinhamento determinado pelo último algarismo do outro fator, acrescentando-os posteriormente ao produto final (cf. 7.3).

Exemplo*

Calcula 3821×209 .

R.:

			3	8	2	1	
		x		2	0	9	
			3	4	3	8	9
	+	7	6	4	2		
		7	9	8	5	8	9

$$3821 \times 209 = 798589$$

Exemplo*

Calcula 3821×2009 .

R.:

			3	8	2	1	
		x		2	0	0	9
			3	4	3	8	9
	+	7	6	4	2		
		7	6	7	6	3	8

$$3821 \times 2009 = 7676389$$

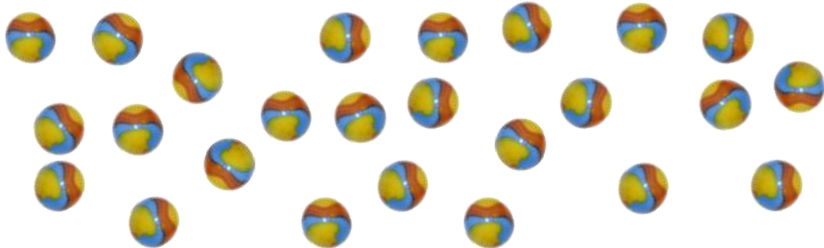
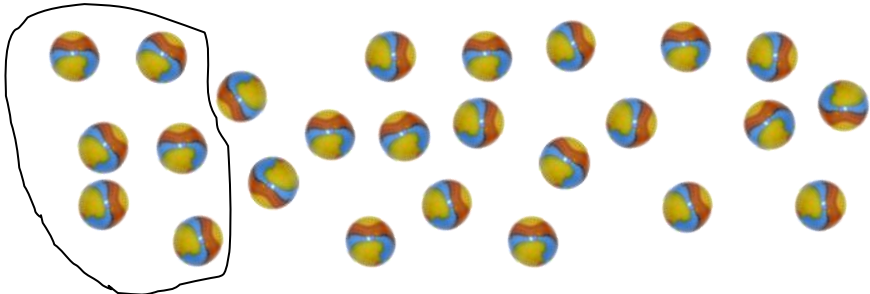
Exemplo*

Calcula 2547×286 .

R.:

			2	5	4	7	
		x		2	8	6	
			1	5	2	8	2
		2	0	3	7	6	
	+	5	0	9	4		
		7	2	8	4	4	2

$$2547 \times 286 = 728442$$

8.1	Exemplo <i>O pai do Tiago ganha 6 euros por hora como empregado de mesa numa pastelaria e 30 euros por hora a trabalhar como técnico eletricista. Na semana passada trabalhou 26 horas na pastelaria e fez 15 horas de trabalho como eletricista. No final da semana quanto dinheiro conseguiu ganhar?</i>
9.1	É conveniente que se explore a divisão quer em situações de partilha equitativa quer em situações de agrupamento (cf. NO2-9.3). Exemplo (agrupamento) <i>O Ricardo tem 25 berlines e vai dividi-los em conjuntos de 6 berlines. Quantos conjuntos de 6 berlines consegue fazer? Quantos berlines sobram?</i>  R.: Vão-se fazendo agrupamentos de 6 berlines até ser possível, isto é, até que o número de berlines que sobram seja menor que 6.  Assim, encontrar-se-ão 4 agrupamentos de 6 berlines, ficando 1 berline de sobra. $25 = 6 + 6 + 6 + 6 + 1$ $25 = 4 \times 6 + 1$ O Ricardo consegue fazer 4 conjuntos de 6 berlines e ainda lhe sobra 1 berline. Exemplo (partilha equitativa) <i>A mãe da Rita vai dividir igualmente 30 bolos por 4 caixas. Quantos bolos vai colocar em cada caixa? Há bolos que sobram?</i> R.: O procedimento natural consiste em pegar num conjunto de 4 bolos e colocar 1 em cada caixa, repetindo-o até que o número de bolos que sobra seja inferior a 4.



Verificar-se-á que é possível colocar 7 bolos em cada caixa e que sobram 2 bolos.

$$30 = 4 \times 7 + 2$$

A mãe da Rita vai colocar 7 bolos em cada caixa e ficam 2 bolos de sobra.

9.4

Exemplo

Constrói duas frases, cada uma delas para relacionar dois números, onde utilizes corretamente, numa delas, a expressão «divisor de» e na outra a expressão «divisível por».

R.: O número 4 é divisor de 24.
O número 35 é divisível por 5.

Exemplo*

Completa as seguintes frases utilizando as expressões «divisor de», «múltiplo de» ou um número apropriado.

O número 27 é _____ 3.
O número 7 é _____ 35.
O número 8 é múltiplo de _____.
O número _____ é divisível por 6.
O número 1 é divisor de _____.
O número 10 é divisível por _____.

Exemplo**

Constrói duas frases, onde relaciones as expressões «divisor de» e «divisível por» com a expressão «múltiplo de».

R.: O número 7 é divisor de 49, porque 49 é múltiplo de 7.
O número 45 é divisível por 5, porque 45 é múltiplo de 5.

10.1

Exemplo

A tia da Susana fez 20 bolos de arroz e 2 fornadas de 17 pastéis de nata cada uma. Colocou todos os bolos em caixas, cada uma com 9 bolos. Quantas caixas conseguiu encher?

$$R.: 2 \times 17 = 34$$

	1	7	
x		2	
	3	4	

$$34 + 20 = 54$$

	3	4	
+	2	0	
	5	4	

$$54 : 9 = 6$$

	5	4	9		
		0	6		

A tia da Susana conseguiu encher 6 caixas.

Exemplo*

O João tinha 12 amêndoas cobertas de chocolate e 15 cobertas de açúcar; guardou para si 10 amêndoas e começou a distribuir as restantes por 5 amigos de maneira que no fim cada um ficasse com o mesmo número de amêndoas. Com quantas amêndoas ficou cada um dos amigos do João? Quantas amêndoas sobraram depois de acabar a distribuição?

$$R.: 12 + 15 = 27$$

$$27 - 10 = 17$$

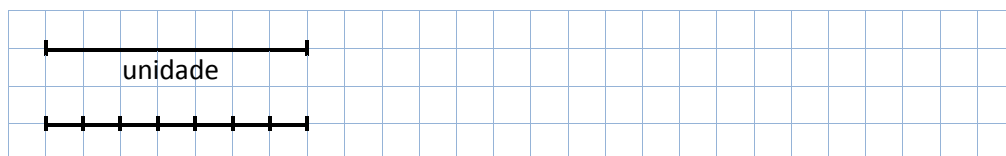
	1	7	5		
		2	3		

Cada um dos amigos do João ficou com 3 amêndoas e sobraram 2 amêndoas depois de acabar a distribuição.

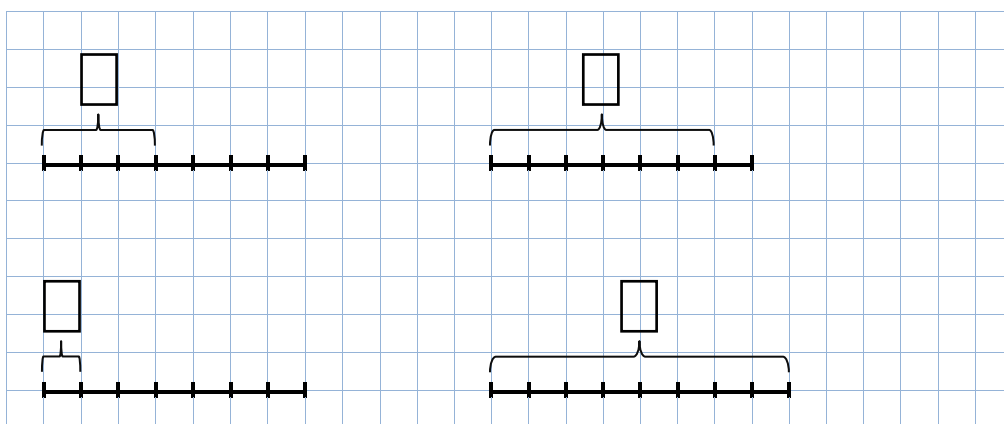
11.2

Exemplo

A unidade de comprimento foi dividida em sete partes iguais.



Escreve em cada a fração que representa a medida de comprimento do segmento de reta assinalado.

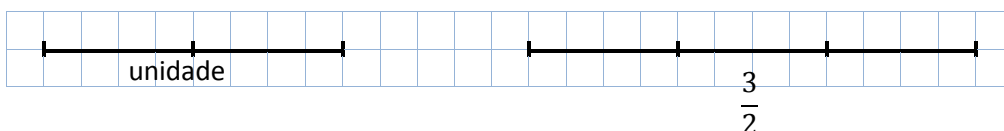
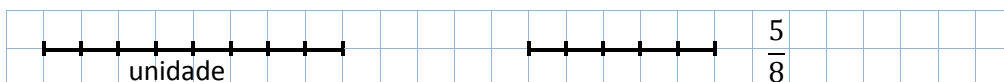
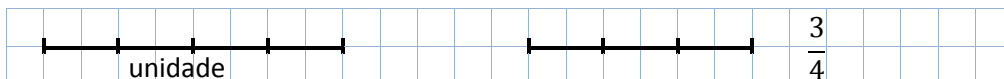


Exemplo*

Dada a unidade representada abaixo, representa segmentos de reta com medidas de comprimento iguais a $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{2}$.



R.:

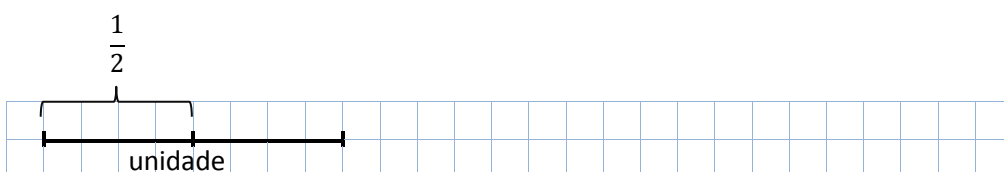


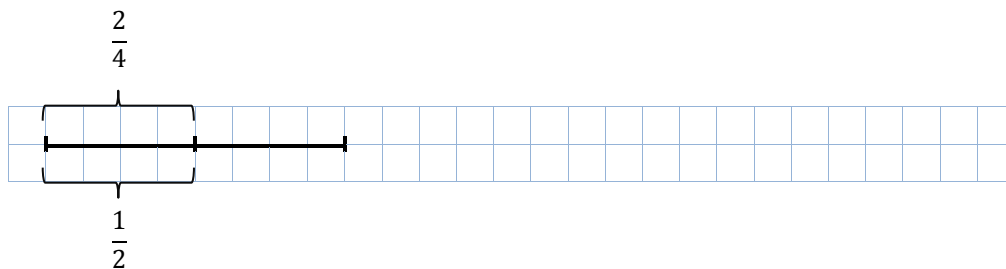
11.9

Exemplo

Verifica que as frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$ representam o mesmo número racional.

R.:

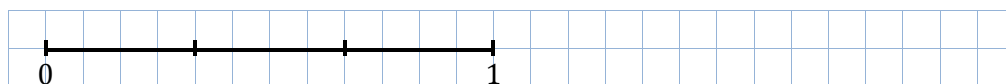




As frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$ correspondem ao mesmo ponto da reta numérica, já que representam a mesma medida de comprimento, portanto são frações equivalentes que representam o mesmo número racional.

Exemplo

a. Considera uma unidade de comprimento dividida em terços.

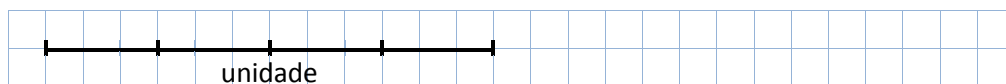


Divide um segmento de comprimento $\frac{1}{3}$ em dois segmentos iguais. Quantos dos segmentos obtidos precisas para preencher o segmento unidade? Qual a medida do comprimento de cada um?

b. Completa a igualdade: $\frac{1}{3} = \frac{2}{[]}$

Exemplo

a. Considera uma unidade de comprimento dividida em quatro partes iguais.



Divide um segmento de comprimento $\frac{1}{4}$ em 3 partes iguais. Quantos dos segmentos obtidos precisas para preencher o segmento unidade? Qual a medida do comprimento de cada um?

b. Completa a igualdade: $\frac{1}{4} = \frac{3}{[]}$

Exemplo*

Indica duas frações do seguinte conjunto que sejam equivalentes: $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}$.

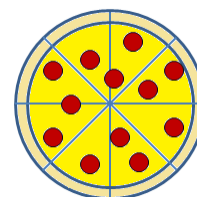
11.10

É conveniente que se utilizem exemplos de diferentes grandezas para efetuar a identificação de frações equivalentes.

Exemplo

Observa a pizza que está dividida em 8 fatias.

Verifica que $\frac{4}{8}$ da pizza é equivalente a $\frac{1}{2}$ da pizza.



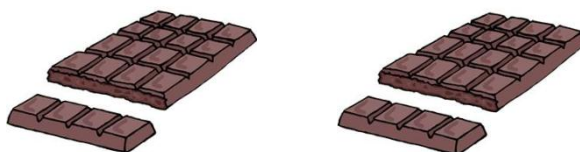
R.: Uma vez que a pizza está dividida em 8 fatias de igual tamanho, a fração $\frac{4}{8}$ corresponde exatamente a 4 dessas 8 fatias.



Verificamos com facilidade que a porção de pizza que acabámos de encontrar é exatamente a mesma que se obteria se dividíssemos a pizza em duas partes iguais e considerássemos apenas uma, isto é $\frac{1}{2}$. De facto, se cada fatia correspondente a $\frac{1}{2}$ for dividida em 4 partes, a pizza ficará dividida em 8 partes (2×4), ficando cada uma dessas partes iniciais com 4 fatias (1×4), ou seja, ficamos com $\frac{4}{8}$ da pizza. Temos então que: $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$.

Exemplo

As tabletes de chocolate estão divididas em 20 pedaços iguais.



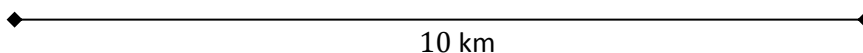
A Catarina comeu $\frac{24}{20}$ de tablete e o Tiago comeu $\frac{6}{5}$.

Algum deles comeu mais chocolate do que o outro?

Exemplo

A Elisabete e o Filipe foram juntos fazer um percurso de 10 km. A Elisabete diz que já percorram $\frac{6}{10}$ do caminho e o Filipe afirma que foram $\frac{3}{5}$.

Podem os dois amigos ter razão?



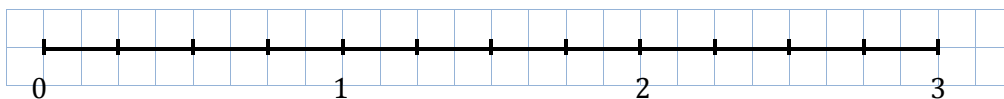
11.11

Exemplo

Verifica que o ponto da reta numérica correspondente a $\frac{12}{4}$ representa o número natural igual ao quociente de 12 por 4.

R.: Para encontrarmos o ponto correspondente a $\frac{12}{4}$ devemos dividir a unidade em 4 partes iguais e justapor 12 segmentos de reta, cada um correspondente a $\frac{1}{4}$.





Uma vez que cada 4 segmentos de reta correspondentes a $\frac{1}{4}$ perfazem uma unidade e $12 = 3 \times 4 = 4 + 4 + 4$, então os doze segmentos de reta justapostos têm o comprimento de 3 unidades, isto é, $\frac{12}{4} = 3$. Por outro lado, $12 = 3 \times 4$ significa, por definição de quociente, que $3 = 12 : 4$. Conclui-se então que $\frac{12}{4} = 12 : 4$.

11.12

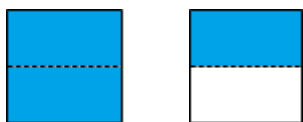
Exemplo

Verifica qual dos números racionais $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{2}$ é maior, considerando um quadrado tomado como unidade de área.

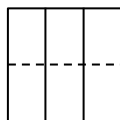
R.: Para representarmos $\frac{4}{3}$ da unidade, dividimos a unidade em 3 partes iguais e tomamos 4 dessas partes.



Representemos agora $\frac{3}{2}$ da unidade.



Para podermos comparar e ordenar os dois números racionais é conveniente dividirmos a unidade num número de partes múltiplo de 3 e de 2. Dividindo a unidade em sextos,



facilmente se verifica que $\frac{4}{3}$ corresponde a $\frac{8}{6}$ da unidade e que $\frac{3}{2}$ equivale a $\frac{9}{6}$.



$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$$



$$\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$$

Assim, a ordem entre aqueles dois números racionais é: $\frac{4}{3} < \frac{3}{2}$.

11.13	Exemplo Escreve uma fração de denominador 5 que seja superior a $\frac{7}{5}$. R.: Estando a unidade dividida em 5 partes iguais (<i>quintos</i>) e correspondendo $\frac{7}{5}$ a 7 dessas partes, para escrever uma fração de denominador 5 superior a $\frac{7}{5}$ basta que o número de <i>quintos</i> seja superior a 7. Por exemplo, $\frac{9}{5}$. Pode estabelecer-se que: Dadas duas frações com o mesmo denominador é maior aquela que tiver maior numerador.
11.14	Exemplo Das frações apresentadas identifica a menor: $\frac{5}{3}$ e $\frac{5}{4}$. R.: Facilmente se verifica que quanto maior for o número de partes em que se divide a unidade, menor será cada uma dessas partes. Portanto, $\frac{1}{4}$ é menor que $\frac{1}{3}$. Assim, se tomarmos 5 partes das menores ficaremos com uma quantidade inferior do que se tomarmos 5 partes das maiores, o que significa que $\frac{5}{4}$ é menor que $\frac{5}{3}$. À semelhança do descritor anterior, pode estabelecer-se que: Dadas duas frações com o mesmo numerador é maior aquela que tiver menor denominador.
12.1	Neste objetivo geral apresenta-se a definição da soma e da diferença de dois números racionais positivos. Optou-se por definir a operação de adição (12.2) recorrendo à justaposição retilínea de segmentos de reta na semirreta numérica (no 6.º ano esta construção é completada por forma a que se possa definir a soma de dois quaisquer números racionais, introduzindo-se para o efeito a noção de segmento orientado). Este primeiro descritor tem como objetivo fazer uma introdução ao método de justaposição retilínea de segmentos de reta no caso já conhecido da soma de dois números inteiros naturais, pretendendo-se que os alunos reconheçam que se obtém desta forma o resultado esperado. Para simplificar a linguagem dos enunciados dos exercícios poderá ser explicado aos alunos que dois segmentos de reta se dizem «justapostos» quando são colineares e se interseitam exatamente num ponto, como se apresenta na figura seguinte: Note-se que, dados três pontos A, B e C, os segmentos $[AB]$ e $[BC]$ estão justapostos quando B está situado entre A e C, ou seja, quando o ponto B está no segmento de reta $[AC]$ (cf. GM1-1.4 e GM1-2.1).

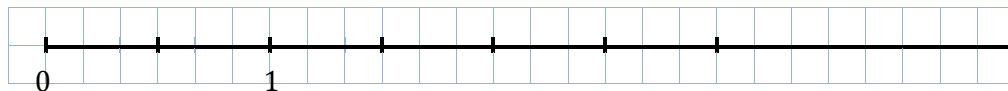
Exemplo

- a. Representa na semirreta numérica os pontos O , A e B , correspondentes respectivamente aos números 0, 3 e 5.
- b. Justapõe ao segmento de reta $[OA]$ um segmento igual ao segmento $[OB]$. Uma das suas extremidades representa o número 3. Que número representa a outra?
- c. Completa: $3 + 5 =$

12.2

Exemplo

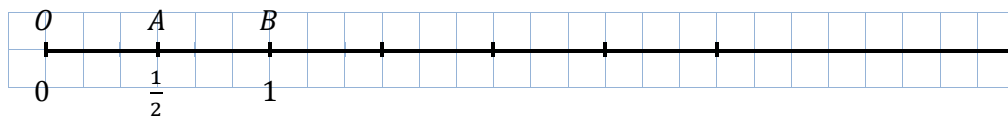
Considera a reta numérica com a unidade dividida em duas partes iguais.



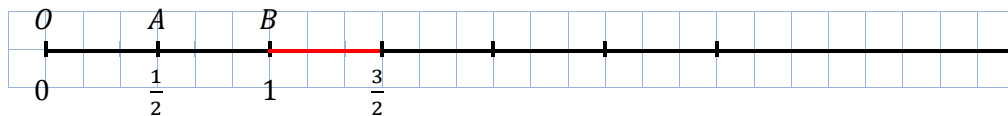
- a. Representa na reta numérica os pontos O , A e B , correspondentes respectivamente aos números 0 , $\frac{1}{2}$ e 1 .
- b. Justapõe ao segmento de reta $[OB]$ um segmento igual ao segmento $[OA]$. Uma das suas extremidades representa o número 1. Que número representa a outra?
- c. Completa: $1 + \frac{1}{2} =$
- d.* Justapõe ao segmento de reta $[OA]$ um segmento igual ao segmento $[OB]$. Uma das suas extremidades representa o número $\frac{1}{2}$. Que número representa a outra?
- e.* Completa com um símbolo: $1 + \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2} + 1$.

R.:

a.



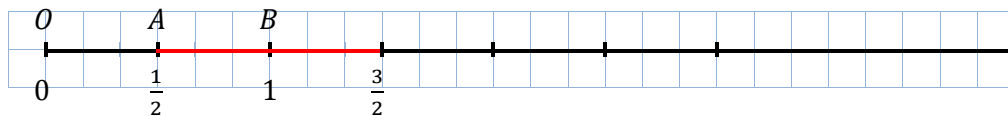
b.



O número que representa a outra extremidade é $\frac{3}{2}$.

c. $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

d.

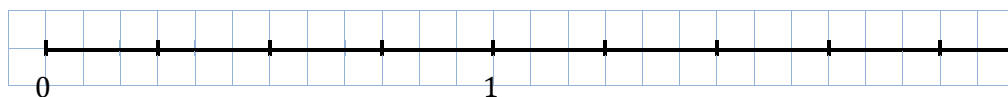


O número que representa a outra extremidade é $\frac{3}{2}$.

e. $1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1$

Exemplo*

Considera a reta numérica em que a unidade está dividida em quatro partes iguais.



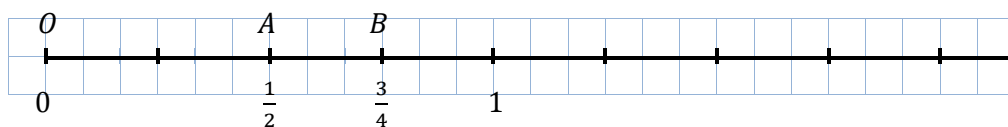
a. Representa na reta numérica os pontos O , A e B , correspondentes respetivamente aos números 0 , $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$.

b. Justapõe ao segmento de reta $[OA]$ um segmento igual ao segmento $[OB]$. Uma das suas extremidades representa o número $\frac{1}{2}$. Que número representa a outra?

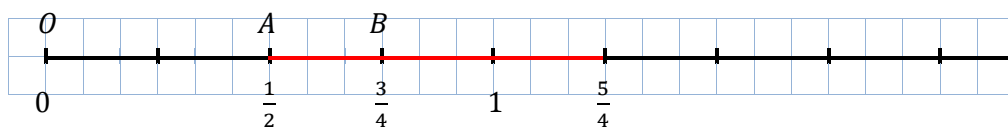
c. Completa: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$

R.:

a.



b.

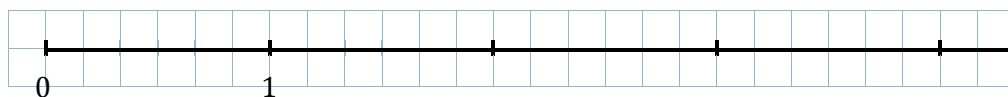


O número que representa a outra extremidade é $\frac{5}{4}$.

c. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

Exemplo**

Considera a reta numérica desenhada abaixo.



Constrói geometricamente a soma $\frac{1}{6} + \frac{5}{3}$ e indica o resultado na forma de uma fração.

12.3

A definição de diferença apresentada é a definição geral que já foi sugerida no descritor NO1-5.3 e será posteriormente utilizada em outros contextos. Os alunos poderão utilizá-la para efetuar subtrações conhecida uma dada soma, podendo igualmente realizar diferenças por justaposição retilínea de segmentos de reta. Como se explica mais abaixo, podem ser exploradas duas perspetivas, correspondentes ao entendimento da diferença como retirar ou completar, que resultam da definição de diferença e da comutatividade da adição.

Exemplo

Já sabes que $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ e que $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$. Completa as seguintes igualdades:

a. $\frac{3}{2} - 1 =$

b. $\frac{5}{4} - \frac{1}{2} =$

c. $\frac{5}{4} - \frac{3}{4} =$

R.:

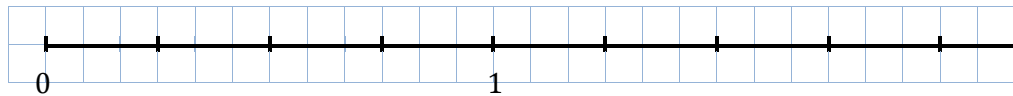
a. $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

b. $\frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

c. $\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

Exemplo (diferença no sentido de completar)

Considera a reta numérica desenhada.



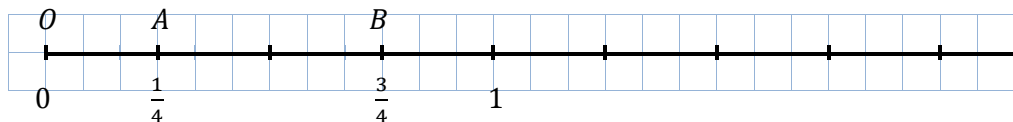
a. Representa na reta numérica os pontos O , A e B , correspondentes respetivamente aos números 0 , $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$.

b. Identifica o segmento de reta que se deve justapor ao segmento $[OA]$ para se obter o segmento $[OB]$. Qual o comprimento desse segmento de reta?

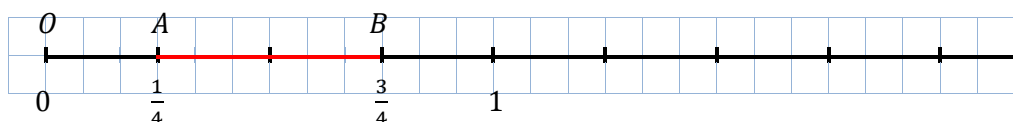
c. Completa a igualdade: $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} =$

R.:

a.



b.

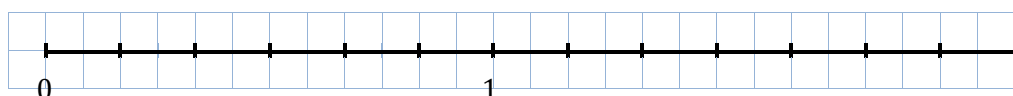


O comprimento do segmento de reta que se deve justapor a $[OA]$ para obter $[OB]$ é $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (Repare-se que o aluno pode não simplificar a fração, embora com o auxílio da reta numérica seja simples verificar que $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, cf. 11.9).

c. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Exemplo*

Considera a reta numérica em que a unidade está dividida em seis partes iguais.



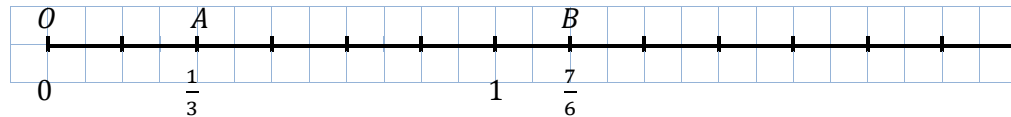
a. Representa na reta numérica os pontos O , A e B , correspondentes respetivamente aos números 0 , $\frac{1}{3}$ e $\frac{7}{6}$.

b. Identifica o segmento de reta que se deve justapor ao segmento $[OA]$ para se obter o segmento $[OB]$. Qual o comprimento desse segmento de reta?

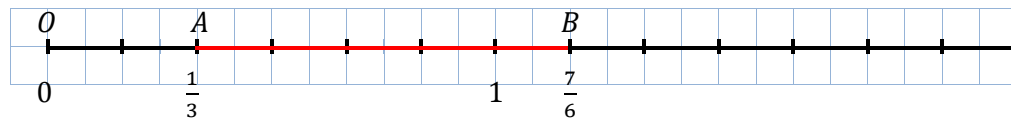
c. Completa a igualdade: $\frac{7}{6} - \frac{1}{3} =$

R.:

a.



b.

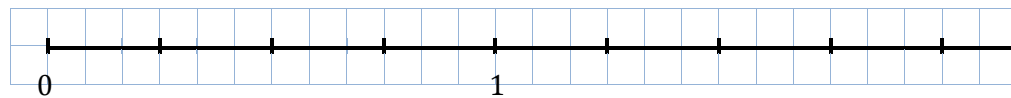


O comprimento do segmento de reta que se deve justapor a $[OA]$ para obter $[OB]$ é $\frac{5}{6}$.

c. $\frac{7}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

Exemplo* (diferença no sentido de retirar)

Considera a reta numérica em que a unidade está dividida em quatro partes iguais.



a. Representa na reta numérica os pontos O e A , correspondentes respetivamente aos números 0 e $\frac{3}{4}$.

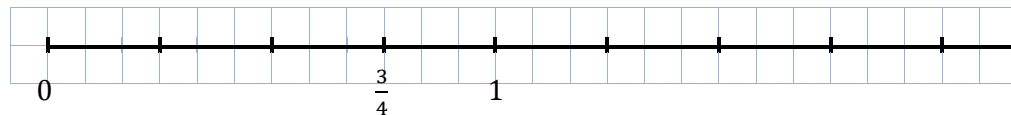
b. Coloca um ponto B entre O e A à distância $\frac{1}{4}$ de A .

c. Qual a distância de B à origem?

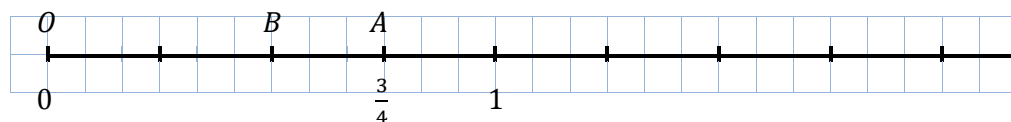
d. Completa a igualdade: $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} =$

R.:

a.



b.



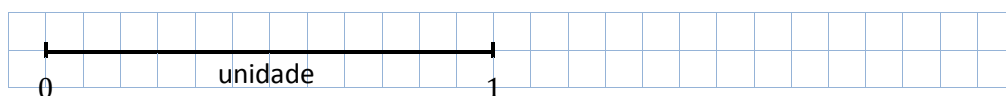
c. A distância do ponto B à origem é $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

d. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

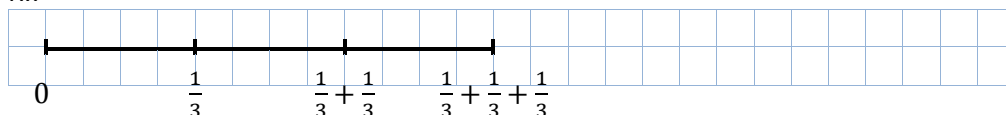
12.4

Exemplo

Calcula $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$.



R.:



$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Exemplo*

Conta o número de parcelas e deduz o valor da soma $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$.

R.: $\frac{1}{7}$ representa a medida do comprimento de um segmento de reta obtido dividindo a unidade em 7 partes iguais, ou seja, tal que, justapondo retilinearmente 7 segmentos iguais a esse, se obtém o segmento unidade. A soma proposta, tendo 7 parcelas iguais a $\frac{1}{7}$, é também a medida da justaposição desses 7 segmentos. Logo,

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = 1.$$

Exemplo**

Quantas parcelas iguais a $\frac{1}{27}$ deves acrescentar à soma $\frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27}$ para obteres uma unidade?

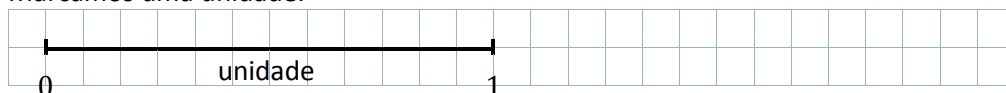
12.5

Exemplo

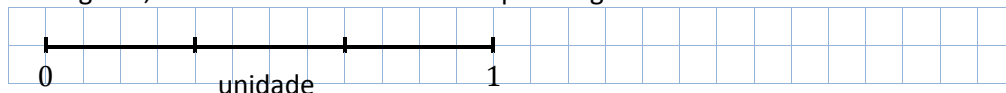
Escreve $\frac{5}{3}$ como soma de parcelas todas iguais a $\frac{1}{3}$.

R.:

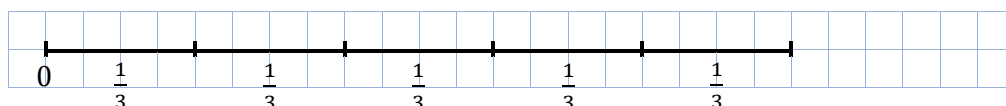
Marcamos uma unidade.

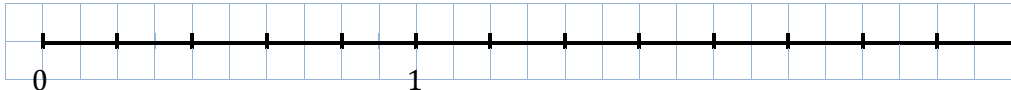


Em seguida, dividimos a unidade em três partes iguais.



Justapomos, a partir da origem, 5 segmentos de reta de comprimento $\frac{1}{3}$.



	Obtém-se assim, por definição, um segmento de comprimento $\frac{5}{3}$ (cf. 11.2). Por outro lado, a extremidade deste segmento distinta da origem é o ponto da reta numérica que representa a soma $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$. De onde se conclui que $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ uma vez que, na reta numérica, a um ponto corresponde o número igual à medida da distância desse ponto à origem (cf. 11.7). Exemplo* <i>Coloca números naturais dentro dos espaços em branco de modo a obteres uma igualdade verdadeira.</i> $15 \times \frac{1}{[\quad]} = \frac{[\quad]}{[\quad]}$ Exemplo** <i>Preenche os espaços em branco com números naturais de modo a obteres igualdades verdadeiras.</i> $8 \times \frac{1}{[\quad]} = \frac{1}{5} \times [\quad] = \frac{[\quad]}{[\quad]}$																												
12.6	Estes resultados são uma consequência direta dos descritores 12.2 e 12.3, podendo ser reconhecidos a propósito dos exemplos então trabalhados. Exemplo <i>Considera a reta numérica com a unidade dividida em cinco partes iguais.</i>  <i>Constrói geometricamente os resultados das seguintes operações e representa cada um deles na forma de fração:</i> a. $\frac{6}{5} + \frac{2}{5}$. b. $\frac{6}{5} - \frac{2}{5}$.																												
12.7	Exemplo <i>Considera os números 19 e 5.</i> a. Faz a divisão inteira de 19 por 5. b. Escreve $\frac{19}{5}$ como soma de um número natural e de uma fração própria. R.: a. Sabemos que $3 \times 5 = 15$ e $4 \times 5 = 20$. Por isso, o quociente da divisão inteira de 19 por 5 é 3 e o resto é $19 - 3 \times 5 = 4$. <table border="1" data-bbox="633 1852 901 2009"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>9</td><td></td><td>5</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>									1	9		5					4		3									
	1	9		5																									
		4		3																									

	b. Utilizando o cálculo anterior, temos: $19 = 3 \times 5 + 4$ (9.2) Então $\frac{19}{5} = \frac{3 \times 5 + 4}{5} = \frac{3 \times 5}{5} + \frac{4}{5} = 3 + \frac{4}{5}$. (utilizou-se 11.11 e 12.6)
13.2	Exemplo <i>Transforma 3 decímetros em centímetros.</i> R.: Para transformar aquela medida em centímetros, devemos ter em conta que cada centímetro é uma centésima parte do metro e que cada decímetro é uma décima parte do metro. Assim, 3 decímetros são $\frac{3}{10}$ do metro. Para obter centésimas do metro (centímetros), temos de dividir cada decímetro em 10 partes. Para obter o mesmo comprimento devemos pois tomar $3 \times 10 = 30$ partes: $\frac{3}{10} = \frac{3 \times 10}{10 \times 10} = \frac{30}{100}$. Então, $\frac{3}{10} m = \frac{30}{100} m$, ou seja, $3 dm = 30 cm$.
13.3	Após efetuar exemplos como o apresentado no descritor anterior, os alunos poderão passar a reduzir frações decimais ao mesmo denominador de modo mais sistemático, multiplicando numerador e denominador por 10 o número de vezes que for necessário, ou seja, acrescentando o mesmo número de zeros a ambos os termos da fração (ver 7.3). Exemplo <i>Calcula $\frac{7}{10} + \frac{4}{100}$ e apresenta o resultado na forma de uma fração decimal.</i> R.: $\frac{7}{10} + \frac{4}{100} = \frac{70}{100} + \frac{4}{100} = \frac{74}{100}$ Exemplo* <i>Calcula $\frac{3}{10} + \frac{4}{1000}$ e apresenta o resultado na forma de uma fração decimal.</i> R.: $\frac{3}{10} + \frac{4}{1000} = \frac{300}{1000} + \frac{4}{1000} = \frac{304}{1000}$ Exemplo** <i>Calcula $\frac{36}{10} + \frac{72}{100} + \frac{105}{1000}$ e apresenta o resultado na forma de uma fração decimal.</i> R.: $\frac{36}{10} + \frac{72}{100} + \frac{105}{1000} = \frac{3600}{1000} + \frac{720}{1000} + \frac{105}{1000} = \frac{3600+720+105}{1000} = \frac{4425}{1000}$
13.6	Relativamente a este descritor, o aluno deve ter presente que, para garantir que se adicionam ou subtraem os valores dos algarismos das mesmas ordens decimais, basta que se tenha em atenção o alinhamento da vírgula e, claro está, escrever sempre um só algarismo dentro de cada quadrícula para que fiquem alinhados. Com efeito, retomando por exemplo a última adição proposta no texto de apoio ao descritor 13.3 e representando agora as frações decimais na forma de dízima, temos

$$3,6 + 0,72 + 0,105 = \frac{3600+720+105}{1000} = \frac{4425}{1000} = 4,425$$

pelo que o resultado pode ser obtido dispondo verticalmente as parcelas e respeitando o alinhamento das vírgulas.

Exemplo

Determina a soma de 234,8 com 52,6.

R.:

		2	3	4,	8		
	+		5	2,	6		
		2	8	7,	4		

$$234,8 + 52,6 = 287,4$$

Exemplo*

Determina a soma de 684,73 com 19,5.

R.:

		6	8	4,	7	3	
	+		1	9,	5		
		7	0	4,	2	3	

$$684,73 + 19,5 = 704,23$$

Exemplo**

Calcula $3038,1 - 455,35$.

No caso da diferença é conveniente, numa primeira fase, preencher com zeros à direita o número que figura na linha superior, de modo que se obtenha assim o mesmo número de casas decimais do subtrativo.

R.:

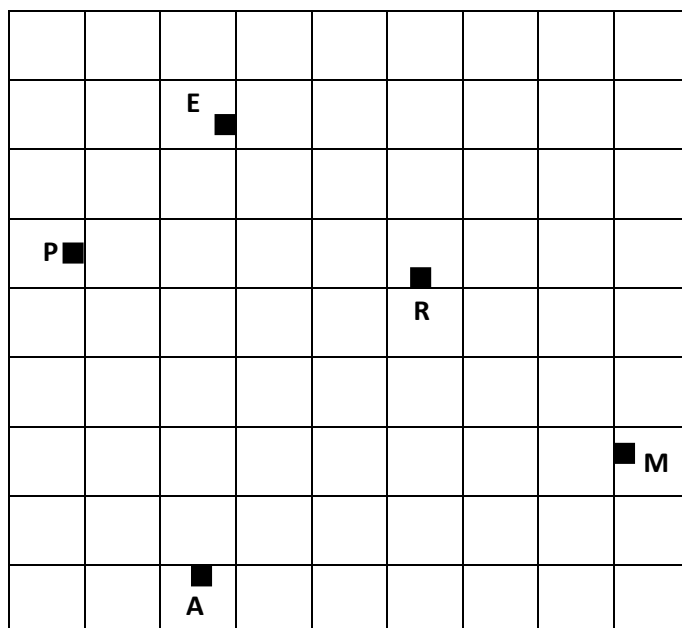
		3	0	3	8,	1	0
	-		4	5	5,	3	5
		2	5	8	2,	7	5

$$3038,1 - 455,35 = 2582,75.$$

Descritor	Texto de apoio
1.1	Nos dois anos anteriores utilizaram-se grelhas quadriculadas, em primeiro lugar para representar retângulos e quadrados (GM1-2.7) e, em seguida, para representar itinerários (GM2-1.4). Nestes procedimentos, os alunos foram confrontados com segmentos de retas perpendiculares previamente desenhados ainda antes de utilizarem este termo, mas já sabendo reconhecer a perpendicularidade entre segmentos verticais e horizontais e também em outras situações correntes, por exemplo ao identificarem retângulos. Reforçando alguns traços de uma grelha quadriculada podem assim, sem dificuldade, traçar sucessivos segmentos de reta de diferentes comprimentos, dois a dois perpendiculares, de modo a formar quadrados, retângulos, ou mais geralmente itinerários tais que, em cada viragem, é necessário dar um quarto de volta (<i>cf.</i> GM2-1). Neste descritor pretende-se, em primeiro lugar, levar os alunos a relacionar dois trajetos retilíneos percorridos em determinado itinerário (representado numa grelha quadriculada) quando, para passar do primeiro para o segundo, se deram ao todo dois quartos de volta. Uma vez que após o primeiro quarto de volta se supõe que o itinerário prossegue percorrendo um ou mais segmentos da grelha, ao executarmos o segundo quarto de volta já não voltaremos a percorrer pontos da mesma reta, mas o segmento que passamos a percorrer depois dessa segunda viragem relaciona-se com o que estávamos a percorrer antes da primeira viragem dizendo-se que são paralelos. Deste modo o paralelismo é identificado, entre dois trajetos retilíneos de determinado itinerário composto por troços retilíneos sucessivos (entre os quais apenas se podem dar quartos de volta), como resultado da execução de dois quartos de volta; repetindo o processo, se, num itinerário, for dado um número par de quartos de volta para efetuar as mudanças de direção então o segmento representando o primeiro trajeto retilíneo considera-se paralelo ao segmento representando o último trajeto retilíneo do itinerário. Estas observações em itinerários concretos preparam o futuro critério de paralelismo de duas direções, ligado ao igual “afastamento angular” relativamente a uma mesma reta em determinado plano (<i>cf.</i> GM5-1.11); no caso dos itinerários em grelhas quadriculadas, estamos a considerar paralelos segmentos que são perpendiculares a uma mesma reta no plano do itinerário, já que, de cada vez que damos um quarto de volta para efetuar uma mudança de direção passamos, nesse percurso, de uma direção para outra perpendicular à primeira.

Exemplo

Na grelha seguinte representa-se o bairro onde vive a Micaela, correspondendo os segmentos de reta do quadriculado às ruas.



O quadrado **M** representa a casa da Micaela, o quadrado **E** a escola que ela frequenta, o **A** a casa da avó, o **R** a casa da prima Rita e o quadrado **P** o parque de diversões.

- A Micaela, no percurso de casa para a escola, passa pela casa da prima Rita que a acompanha a partir daí. Desenha um possível percurso efetuado pela Micaela desde casa até à escola. Quantos quartos de volta tem esse itinerário? É um número par ou ímpar? O que se pode dizer acerca da posição relativa das ruas da escola e da casa da Micaela?
- A Micaela costuma ir almoçar a casa da avó e depois do almoço, no caminho de regresso à escola, passa pelo parque. Desenha vários itinerários que possam corresponder ao percurso efetuado pela Micaela da casa da avó para a escola. Conta quantos quartos de volta tem cada um dos itinerários que desenhaste. São números pares ou ímpares? Parece-te possível construir um itinerário com um número par de quartos de volta? Porquê?

R.: a. O número de quartos de volta que a Micaela dá é um número par: as ruas são paralelas.

b. O número de quartos de volta é ímpar nos itinerários desenhados. Não é possível construir um itinerário com um número par de quartos de volta: as ruas da casa da avó da Micaela e da escola não são paralelas.

1.2

1.3

1.4

Depois de já se ter identificado a perpendicularidade em diversas situações é altura para se introduzir a terminologia associada a este conceito; assim, dizem-se **perpendiculares** as direções do olhar de um observador que olha a direito e em frente, antes e depois de ter dado um quarto de volta sobre si próprio, e também se dizem perpendiculares os segmentos representando percursos retilíneos sucessivos de um itinerário numa grelha quadriculada, entre os quais houve uma viragem à direita ou à esquerda, resultante de um quarto de volta. A perpendicularidade

	também deve ser identificada agora entre os lados consecutivos de um retângulo, entre duas direções que se interseitam, uma horizontal e outra vertical e, mais geralmente, nos casos em que for possível, entre segmentos de reta em modelos de sólidos geométricos ou em outros objetos.																																																																																																														
	Quando se trabalhar o conceito de ângulo no 4.º ano, a perpendicularidade será retomada nesse novo contexto, estabelecendo-se a ligação entre as observações feitas a este respeito nos três primeiros anos do 1.º ciclo e propriedades envolvendo o conceito de ângulos adjacentes, de ângulos de igual amplitude e de ângulo raso (cf. GM4-2.14).																																																																																																														
1.5	Exemplo <i>O Rasul e o Baltazar decidiram jogar um jogo em que após se lançar um dado com as faces numeradas de 1 a 6, caso saia um número par, desloca-se a peça esse número de casas para a direita e, caso saia um número ímpar, desloca esse número de casas para baixo. O jogo inicia-se na casa A1 e ganha o jogador que primeiro consiga alcançar a fila 9. Quando um jogador chega a uma casa na coluna I passa para a casa da fila inferior mas da coluna A (por exemplo, a seguir à casa I4 passa para a casa A5).</i>																																																																																																														
1.6																																																																																																															
	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td><td>G</td><td>H</td><td>I</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>5</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>6</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>7</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>8</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>9</td></tr></table> a. O Rasul fez 5 jogadas em que saíram os seguintes números: 2, 3, 6, 4, 3. Identifica pelas coordenadas cada uma das posições que a peça ocupou no final de cada jogada e diz se alcançou a fila 9. b. O Baltazar também efetuou 5 jogadas e a peça ocupou sucessivamente as seguintes casas: A6, E6, E7, I7 e D8. Identifica o número que saiu em cada jogada. c. O Rasul e o Baltazar vão efetuar mais uma jogada nesta ordem. Indica possíveis números para essas jogadas de tal modo que o Baltazar vença o jogo.		A	B	C	D	E	F	G	H	I			 									1											2											3											4											5											6											7											8											9
	A	B	C	D	E	F	G	H	I																																																																																																						
	 									1																																																																																																					
										2																																																																																																					
										3																																																																																																					
										4																																																																																																					
										5																																																																																																					
										6																																																																																																					
										7																																																																																																					
										8																																																																																																					
										9																																																																																																					

2.1 a 2.7	Neste objetivo geral relacionam-se algumas figuras geométricas já conhecidas do 1.º ano (nessa altura apenas em termos de reconhecimento visual) com propriedades geométricas que as caracterizam, por enquanto em casos muito simples em que essas propriedades envolvem apenas uma dada distância a um ponto fixo. Nos anos anteriores já se trabalhou o transporte de distâncias, pelo que se pode agora identificar uma circunferência como o resultado de transportar sucessivamente uma distância dada, mantendo fixo um dado ponto e procurando assim atingir todos os pontos do plano a essa distância do ponto que se fixou. Pode começar-se por identificar e representar pontos de uma circunferência com um dado centro e raio. Tanto se designa por raio um segmento que une um ponto da circunferência ao respetivo centro como o comprimento desse segmento (igual para todos os pontos da circunferência), não havendo em geral perigo de confusão, dado o contexto em que o termo é utilizado. O raio pode ser dado por um segmento de reta ou por um ponto distinto do centro com ele determinando a distância igual ao raio e podemos começar por utilizar um método qualquer para transportar o comprimento do raio, sem a preocupação de representar a totalidade da circunferência; nas figuras representam-se processos para obter respetivamente três pontos de uma circunferência com raio igual a um palmo e sete pontos de uma circunferência de raio igual ao comprimento de um galho. O compasso é um instrumento adequado ao traçado de uma circunferência quando pretendemos representar continuamente a totalidade dessa curva ou um “arco”; essencialmente pode servir de compasso qualquer objeto rígido no qual se fixam dois pontos suscetíveis de se justaporem simultaneamente ao plano em que se pretende traçar a circunferência e tal que na posição de um dos pontos existe um instrumento qualquer de escrita que permite deixar uma marca nesse plano. Fixada uma circunferência, os pontos do plano que estão a uma distância do centro inferior ao raio constituem a chamada «parte interna da circunferência», que juntamente com a circunferência constituem um círculo. Os alunos devem utilizar corretamente estes termos em exemplos concretos, desenhos e objetos, e distinguir os pontos que estão em determinado círculo e fora dele, conhecido o centro e o raio.
--------------------------	---

	Se não estivermos restritos a um plano mas continuarmos a considerar pontos a uma mesma distância (ainda chamada «raio») de um ponto de referência (ainda chamado «centro»), dizemos que esses pontos estão numa mesma «superfície esférica»; dizemos que estão na parte interna da superfície esférica os que estiverem a uma distância do centro inferior ao raio, e estes pontos juntamente com os da superfície esférica constituem uma esfera com esse centro e raio. Os alunos deverão reconhecer estas propriedades em exemplos concretos de objetos esféricos. Também se introduz o termo «diâmetro», quer para designar um segmento unindo dois pontos de uma circunferência ou superfície esférica e passando pelo respetivo centro, quer para designar o comprimento desse segmento (que é independente dos pontos escolhidos nas referidas condições em cada circunferência ou superfície esférica e é igual ao dobro do comprimento do raio, já que o centro divide o diâmetro em dois raios).
3.1 3.2	O sistema métrico é <i>decimal</i>, ou seja, fixado o metro como unidade-padrão, as restantes unidades têm medidas em metros que se obtêm multiplicando ou dividindo sucessivamente a unidade-padrão por 10 um certo número de vezes. Estes descritores deverão ser trabalhados em conjunto com o objetivo geral NO3-13, pois a expressão de umas unidades nas outras e as conversões de medidas de comprimento entre diferentes unidades envolvem exemplos privilegiados de operações com frações decimais e dízimas, podendo servir de preâmbulo à generalização de algumas dessas operações a outras frações e em outros contextos, nos anos seguintes. Exemplo Sabemos que um metro é igual a 100 centímetros e a 10 decímetros. a. Cada decímetro, quantos centímetros são? b. Completa as frações: $1\text{ cm} = \frac{1}{[\quad]} m, \quad 1\text{ dm} = \frac{1}{[\quad]} m, \quad 1\text{ cm} = \frac{1}{[\quad]} dm.$ c. Como se representam na forma de dízimas as frações da alínea anterior? Exemplo Quantos metros são 56 km? E quantos decímetros são?
3.5 3.6 3.7 3.9	Depois de nos anos anteriores se terem calculado áreas de figuras decomponíveis em certo número de partes iguais, tomadas para unidade de área, contando o número de partes em que a figura ficou decomposta, prossegue-se agora o estudo da medida de área, tomando para unidade a área de um quadrado de lados com medida igual a 1, fixada uma unidade de comprimento. Essa unidade de área diz-se «unidade quadrada», podendo substituir-se a palavra «unidade» nesta expressão pela designação usual da unidade de comprimento considerada; assim poderemos falar em «metro quadrado», «centímetro quadrado», «palmo quadrado», etc. Uma figura decomponível em quadrados de lado unitário terá medida de área em unidades quadradas facilmente determinável (basta contar o número de quadrados em que se decompõe). Os alunos poderão determinar áreas de diversas figuras nestas condições e utilizar figuras deste tipo para enquadrar a área de uma outra figura, obtendo assim aproximações por defeito e por excesso da sua área; poderão, por exemplo, utilizar grelhas quadriculadas em papel vegetal para efetuar estes enquadramentos em casos concretos.

3.8	Utilizando o sentido combinatório da multiplicação (NO2-7.3; NO2-7.5), torna-se fácil utilizar esta operação para obter a medida da área, em unidades quadradas, de um retângulo decomponível em quadrados unitários, a partir das medidas de comprimento de dois lados consecutivos. Com efeito verifica-se que a decomposição do retângulo em quadrados unitários pode ser obtida decompondo cada lado num certo número de segmentos de reta unitários (de comprimentos iguais à unidade) e traçando os segmentos que unem pontos correspondentes da decomposição em lados opostos, por forma a obter uma grelha quadriculada. O número total de quadrados da decomposição será dado pelo produto do número de segmentos em que ficou decomposto cada um de dois lados consecutivos. Ora esses números correspondem exatamente à medida do comprimento dos lados. O diagrama mostra um retângulo dividido por linhas tracejadas em uma grelha de 7 colunas e 3 linhas, resultando em 21 quadrados unitários. À esquerda do retângulo, há uma régua horizontal amarela com uma escala de 1 a 7 cm. À direita, há uma régua vertical amarela com uma escala de 1 a 3 cm. Um retângulo equidecomponível em $7 \times 3 = 21$ quadrados de lado 1 cm tem uma área de 21 cm^2.
6.1 6.3 6.4	As unidades de medida do tempo constituem um sistema não decimal, pelo que as conversões a efetuar entre diferentes unidades deste sistema e as operações envolvendo intervalos de tempo obrigam a processos que vão para além das regras habituais utilizadas no sistema métrico; por esse motivo, constituem uma ocasião privilegiada para que os alunos apreendam adequadamente o significado das operações de medida, das conversões entre diferentes unidades e de operações com medidas expressas em diferentes unidades. Exemplo <i>Uma aula de uma hora e meia demora mais ou menos tempo que uma aula de 80 minutos?</i> Exemplo <i>Numa corrida entre dois atletas, um deles levou 7m 23s a atingir a meta e o outro 441s. Qual dos dois ganhou a corrida?</i> Exemplo* <i>Numa viagem entre Lisboa e o Porto, demorou-se 2h 20m a chegar de carro a Coimbra, onde se parou para almoçar; depois do almoço, partiu-se para o Porto às 14h 35m e chegou-se às 15h 30m. Quanto tempo no total se gastou em deslocações? Apresenta o resultado em minutos e em horas e minutos.</i>

Organização e tratamento de dados OTD3

Descritor	Texto de apoio
1.1	Exemplo Considere a seguinte lista de números: 15, 17, 20, 12, 33, 18, 18, 21, 25, 30, 22, 17, 13, 18, 29, 31, 29, 20. Organiza a lista num diagrama de caule e folhas, deixando para as folhas o algarismo das unidades. Seguidamente, ordena o diagrama. Diagrama de caule e folhas <pre> 1 5 7 2 8 8 7 3 8 2 0 1 5 2 9 9 0 3 3 0 1 </pre> Diagrama ordenado <pre> 1 2 3 5 7 7 8 8 8 2 0 0 1 2 5 9 9 3 0 1 3 </pre> Exemplo* Considere a seguinte lista de números: 93, 61, 78, 79, 115, 121, 75, 80, 88, 96, 61, 112, 84, 78, 105, 91, 66, 67, 117, 72, 82. Organiza a lista num diagrama de caule e folhas, deixando para as folhas o algarismo das unidades. Seguidamente, ordena o diagrama. <pre> 6 1 1 6 7 7 8 9 5 8 2 8 0 8 4 2 9 3 6 1 10 5 11 5 2 7 12 1 </pre> Diagrama ordenado <pre> 6 1 1 6 7 7 2 5 8 8 9 8 0 2 4 8 9 1 3 6 10 5 11 2 5 7 12 1 </pre>

Exemplo

Considera o seguinte conjunto de dados relativos à cor da camisola de 25 alunos: branca, verde, branca, azul, azul, amarela, castanha, branca, preta, azul, encarnada, preta, azul, azul, branca, encarnada, verde, amarela, rosa, branca, preta, azul, verde, azul, preta.

- a. Constrói uma tabela onde indiques a frequência absoluta de cada cor.
- b. Indica a moda.

R.:

a. Tabela de frequências

branca	verde	Azul	amarela	castanha	preta	encarnada	rosa
5	3	7	2	1	4	2	1

b. A moda é a cor azul.

Relativamente a este descritor deve ter-se presente que, neste nível de escolaridade, é conveniente tratar conjuntos de dados com apenas uma moda.

Caso surja algum exemplo em que existam duas categorias/classes com o valor máximo da frequência absoluta, o conjunto de dados diz-se «bimodal».

Descritor	Texto de apoio
2.1	Este descritor é o primeiro de um conjunto de quatro em que se aborda de forma sistemática e progressiva o algoritmo tradicional da divisão inteira. A prática do algoritmo da divisão constitui uma boa oportunidade para o desenvolvimento da concentração, da memorização, do cálculo mental e da capacidade de efetuar estimativas. Neste descritor e no seguinte, considera-se apenas a situação em que o dividendo é menor do que 10 vezes o divisor, já que esta condição leva a que o quociente seja representado por um único algarismo. Partindo da definição de divisão inteira, constrói-se aqui a tabuada do divisor para determinar o quociente e o resto pretendidos, à imagem do trabalhado no descritor N03-9.3 em que se tirava partido das tabuadas já memorizadas. Exemplo <i>Determina o quociente e o resto da divisão inteira de 675 por 84.</i> R.: $\begin{array}{l} 1 \times 84 = 84 \\ 2 \times 84 = 168 \\ 3 \times 84 = 252 \\ 4 \times 84 = 336 \\ 5 \times 84 = 420 \\ 6 \times 84 = 504 \\ 7 \times 84 = 588 \\ 8 \times 84 = 672 \\ 9 \times 84 = 756 \end{array}$ O produto mais próximo que não ultrapassa 675 é $8 \times 84 = 672$; $675 - 672 = 3$. O quociente é 8 e o resto é 3. $\begin{array}{r} 675 \\ - 672 \\ \hline 003 \end{array} \quad \begin{array}{r} 84 \\ \hline 8 \end{array}$
2.2	Ainda no caso em que o quociente é formado por apenas um algarismo (dividendo menor que dez vezes o divisor), pretende-se agora operacionalizar métodos mais expeditos do que o abordado no descritor anterior, até se chegar ao algoritmo tradicional na sua forma final para esta situação particular. a) Dado treinarmos apenas a tabuada da multiplicação até à dezena, faz-se uma primeira estimativa do quociente considerando o quociente da divisão inteira entre o número formado pelos dois primeiros algarismos do dividendo e o número formado pelo primeiro algarismo do divisor. É claro que a omissão do último algarismo, quer do dividendo quer do divisor, faz com que a primeira divisão que se efetua seja apenas uma aproximação da divisão pretendida e, por vezes, dá origem a

quocientes incorretos. Contudo, a eventual incorreção do quociente é rapidamente detetada quando o cálculo do produto do quociente pelo divisor ultrapassa o dividendo. Nesse caso, apaga-se o número que se tinha colocado no quociente e coloca-se o número natural imediatamente inferior. Este procedimento pode ter de ser repetido.

Na transição do descritor anterior para o presente, dispensa-se o cálculo dos produtos sucessivos do divisor pelos primeiros números naturais e experimenta-se apenas o produto do divisor pelo quociente sugerido pela estimativa acima descrita. Este procedimento dará lugar à execução de uma primeira forma do algoritmo da divisão em que ainda se determina explicitamente o produto do divisor pelo quociente, colocando-o debaixo do dividendo para efetuar a subtração.

Exemplo

Determina o quociente e o resto da divisão inteira de 528 por 62.

Omitindo os algarismos das unidades tanto no dividendo como no divisor diremos: Em 52 quantas vezes há 6? Há 8.

Calculamos o produto de 8 por 62, verificamos se não é superior ao dividendo e efetuamos a diferença desse produto para o dividendo para obter o resto.

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times 8 \\ \hline 496 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 528 \\ - 496 \\ \hline 032 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 62 \\ 8 \end{array}$$

b) Contudo, o que se pretende é que o aluno seja capaz de avançar para o algoritmo simplificado que permite calcular o resto sem escrever explicitamente o produto do quociente pelo divisor, efetuando em simultâneo as duas operações (produto pelo quociente e diferença para o dividendo).

Considerando o exemplo anterior, multiplica-se 8 por 2, que dá 16, e calcula-se de imediato a diferença para 18 (número não inferior a 16 que termina em 8) que é 2. Diz-se «e vai 1» (para a ordem seguinte) para compensar o acréscimo de 10 unidades atribuído às 8 unidades.

$$\begin{array}{r} 528 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 62 \\ 8 \end{array}$$

Em seguida, multiplica-se 8 por 6, que dá 48 e acrescenta-se a dezena de compensação, dizendo-se: 48 mais 1 são 49. A diferença para 52 são 3.

$$\begin{array}{r} 528 \\ 32 \end{array} \quad \begin{array}{r} 62 \\ 8 \end{array}$$

Este algoritmo simplificado permite calcular o resto (32) sem determinar o valor do produto do quociente pelo divisor (496), que nem sequer chega a ser conhecido.

Repare-se que no algoritmo da subtração nunca é necessário transportar mais do que uma unidade da ordem seguinte para a ordem anterior, pois nos casos em que o valor do algarismo do aditivo é inferior ao do algarismo do subtrativo basta adicionar 10 unidades ao valor do algarismo do aditivo para se obter um número

superior ao valor do algarismo do subtrativo. No entanto, no cálculo da diferença incluído no algoritmo simplificado da divisão esse transporte é com frequência superior a uma unidade da ordem seguinte. Com efeito, o produto do quociente por um dos algarismos do divisor pode evidentemente ser um número de dois algarismos, sendo portanto por vezes necessário o empréstimo de mais do que uma unidade da ordem seguinte para se efetuar a subtração entre o dividendo e esse produto parcial.

Vejamos um exemplo:

Determina o quociente e o resto da divisão inteira de 205 por 34.

$$\begin{array}{r} 205 \\ 01 \end{array} \quad \begin{array}{r} 34 \\ \hline 6 \end{array}$$

Estimou-se o quociente 6 pela divisão de 20 por 3.

Ao multiplicar 6 por 4 unidades obtêm-se 24 unidades. É assim necessário transportar 2 dezenas para a ordem das unidades do dividendo por forma a obter um valor não inferior a 24 e poder efetuar a subtração. Significa que o número 205 (20 dezenas + 5 unidades) foi transformado em 18 dezenas mais 25 unidades ($205 = 180 + 25$). Em seguida, deveríamos multiplicar 6 por 3 dezenas, que dá 18 dezenas, e calcular a diferença para 18 dezenas, que é 0. Mas para que o algoritmo fique mais “limpo”, preferimos não substituir as 20 dezenas por 18 dezenas. Consequentemente, dizemos «e vão 2» para compensar o subtrativo, garantindo-se que a diferença não é alterada. Em vez da diferença $18 - 18 = 0$, faz-se $20 - 20 = 0$.

Exemplo

Determina o quociente e o resto da divisão inteira de 307 por 71.

R.:

$$\begin{array}{r} 307 \\ 23 \end{array} \quad \begin{array}{r} 71 \\ \hline 4 \end{array}$$

Poder-se-á dizer:

Em 30, quantas vezes há 7? Há 4.

4 vezes 1 são 4, para 7 são 3.

4 vezes 7 são 28, para 30 são 2.

$$307 = 4 \times 71 + 23$$

Na divisão inteira de 307 por 71, o quociente é 4 e o resto é 23.

Exemplo*

Determina o quociente e o resto da divisão inteira de 263 por 37.

R.:

$$\begin{array}{r} 263 \\ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 37 \\ \hline 8 \end{array}$$

Poder-se-á dizer:

Em 26, quantas vezes há 3? Há 8.

8 vezes 7 são 56, para 63 são 7. E vão 6.

8 vezes 3 são 24, mais 6 são 30.

Como 30 é superior a 26, significa que o quociente 8 está em excesso.

O quociente proposto verificou-se incorreto pois a estratégia consistiu em aproximar a divisão de 263 por 37 pela divisão de 26 dezenas por 3 dezenas, isto é, 260 por 30. Isto deve-se ao facto de não treinarmos a memorização da tabuada do 37 mas sabermos bem a tabuada do 3.

Apagam-se os valores introduzidos e diminui-se o quociente para 7.

7 vezes 7 são 49, para 53, são 4. E vão 5.

7 vezes 3 são 21, mais 5 são 26.

26 para 26, é 0.

$$\begin{array}{r} 263 \quad | \quad 37 \\ 04 \quad 7 \end{array}$$

$$263 = 7 \times 37 + 4$$

O quociente é 7 e o resto é 4.

Exemplo**

Determina o quociente e o resto da divisão inteira de 292 por 49.

R.: Em 29, quantas vezes há 4? Há 7.

7 vezes 9 são 63, para 72 são 9. E vão 7.

7 vezes 4 são 28, mais 7 são 35.

$$\begin{array}{r} 292 \quad | \quad 49 \\ 9 \quad 7 \end{array}$$

Como 35 é superior a 29, apagam-se os valores introduzidos e diminui-se o quociente para 6.

6 vezes 9 são 54, para 62 são 8. E vão 6.

6 vezes 4 são 24, mais 6 são 30.

$$\begin{array}{r} 292 \quad | \quad 49 \\ 8 \quad 6 \end{array}$$

Mais uma vez se verifica que o quociente proposto excede o pretendido. Voltam-se a apagar os valores introduzidos e propõe-se o valor 5 para quociente.

5 vezes 9 são 45, para 52 são 7. E vão 5.

5 vezes 4 são 20, mais 5 são 25.

25 para 29 são 4.

$$\begin{array}{r} 292 \quad | \quad 49 \\ 47 \quad 5 \end{array}$$

R.: Na divisão inteira de 292 por 49, o quociente é 5 e o resto é 47.

Nesta divisão poderia começar-se por notar que $7 \times 50 = 350$, o que permitiria suspeitar que 7 seria uma escolha excessivamente elevada para o primeiro quociente ensaiado ($7 \times 49 = 7 \times 50 - 7 = 350 - 7 = 343$, que é maior do que 292).

De modo semelhante, teria sido possível estimar que 6 é ainda excessivo ($6 \times 50 = 300$ e $6 \times 49 = 300 - 6 = 294$, que ainda é maior do que 292).

2.3

As condições expressas neste descritor conduzem à situação mais simples em que o quociente é formado por mais do que um algarismo. Um dos objetivos do algoritmo é o de permitir a determinação destes algarismos um a um, tirando partido da representação decimal dos números e fornecer um processo sistemático e geral para efetuar divisões inteiras.

Dado que o quociente é formado por mais do que um algarismo e que não se estudam as tabuadas para esses números, é necessário separar, numa primeira fase, as dezenas do dividendo das unidades, o que se faz notar colocando um apóstrofo (uma “plica”) a seguir ao algarismo das dezenas. Esta estratégia, baseada numa aplicação proveitosa da propriedade distributiva, permite efetuar a divisão por etapas. Começa-se por dividir as dezenas do dividendo pelo divisor, determinando o algarismo das dezenas do quociente e as dezenas sobrantas no dividendo. Às dezenas que sobrarem juntam-se as unidades do dividendo (na prática basta baixar o algarismo seguinte do dividendo) formando o novo dividendo da etapa seguinte. Este número assim obtido é dividido pelo divisor permitindo encontrar o algarismo das unidades do quociente e concluir a divisão inteira.

Exemplo

Determina o quociente e o resto da divisão inteira de 75 por 4.

R.:

$$\begin{array}{r} 7'5 \quad | \quad 4 \\ 35 \quad 18 \\ 3 \end{array}$$

Pode dizer-se:

Em 7 quantas vezes há 4? Há 1.

1 vezes 4 é 4, para 7 são 3. Baixa-se o 5.

Em 35 quantas vezes há 4? Há 8.

8 vezes 4 são 32, para 35 são 3.

$75 = 4 \times 18 + 3$; o quociente é 18 e o resto é 3.

Em seguida explica-se o mecanismo do algoritmo da divisão neste caso particular.

Para dividir 75 por 4, começa-se por separar as 7 dezenas das 5 unidades, colocando uma plica. Dividem-se as 7 dezenas por 4. Obtemos como quociente 1 dezena e sobram 3 dezenas de resto.

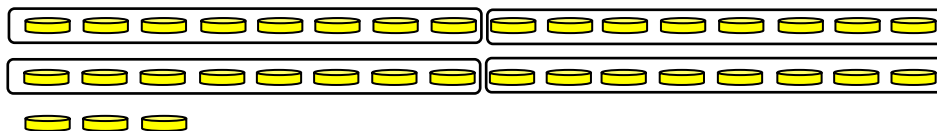
$$7 = 4 \times 1 + 3$$



$$7 \text{ dezenas} = 4 \times 1 \text{ dezena} + 3 \text{ dezenas}$$

O algarismo das dezenas do quociente está encontrado (1) visto que as 3 dezenas de resto adicionadas às unidades formam sempre um número inferior a 4 dezenas, e portanto inferior a dez vezes o divisor: o quociente que falta determinar será certamente inferior a dez.

Às 3 dezenas que sobraram juntam-se as 5 unidades que se tinham separado, formando 35 unidades, que é o que resta das 75 unidades relativamente às 4 dezenas ($75 - 40 = 35$). Dividem-se agora as 35 unidades por 4, para obter o algarismo das unidades do quociente.



$$35 \text{ unidades} = 4 \times 8 \text{ unidades} + 3 \text{ unidades}$$

Como $35 : 4$ dá 8, com resto 3, o algarismo das unidades do quociente é 8 e o resto é 3.

Em resumo:

$$\begin{aligned} 75 \text{ unidades} &= 7 \text{ dezenas} + 5 \text{ unidades} = \\ &= 4 \times 1 \text{ dezena} + 3 \text{ dezenas} + 5 \text{ unidades} = \\ &= 4 \times 1 \text{ dezenas} + 35 \text{ unidades} = \\ &= 4 \times 1 \text{ dezena} + 4 \times 8 \text{ unidades} + 3 \text{ unidades} = \\ &= 4 \times (1 \text{ dezena} + 8 \text{ unidades}) + 5 \text{ unidades} \\ &= 4 \times 18 \text{ unidades} + 5 \text{ unidades}. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \underbrace{\hspace{1cm}} & \underbrace{\hspace{1cm}} \\ \text{divisor} & \text{quociente} & \text{resto} \end{array}$$

Portanto, na divisão inteira de 75 por 4, o quociente é 18 e o resto é 3.

2.4

Nos dois descritores anteriores, pediu-se para efetuar divisões em casos particulares. No descritor 2.2 considera-se um dividendo de três algarismos e um divisor de dois algarismos, no caso em que o dividendo é menor do que 10 vezes o divisor, ou seja, quando o quociente se representa por um único algarismo, utilizando o algoritmo simplificado. No descritor 2.3 trata-se a situação de um dividendo com dois algarismos e um divisor de um algarismo, na situação em que o quociente é representado por dois algarismos.

Pretende-se agora fazer uso das duas técnicas apresentadas em situações mais gerais e que, em certos casos, as combinem.

Exemplo (extensão de 2.2)

Efetua a divisão inteira de 4578 por 523.

R.:

$$\begin{array}{r} 4578 \quad | \quad 523 \\ 394 \quad 8 \end{array}$$

Exemplo (extensão de 2.3)

Calcula o quociente e o resto da divisão inteira de 582 por 7.

R.:

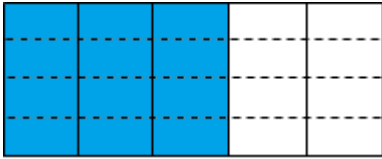
$$\begin{array}{r} 582 \quad | \quad 7 \\ 22 \quad 83 \\ 1 \end{array}$$

O quociente é 83 e o resto é 1.

Exemplo (combinação de 2.2 e 2.3)

Efetua a divisão inteira de 34567 por 89.

	R.: $\begin{array}{r} 34567 \overline{) 89} \\ 786 \\ \hline 747 \\ 35 \end{array}$ Exemplo* (combinação de 2.2 e 2.3) Qual é o resto da divisão inteira de 671.038 por 735? R.: $\begin{array}{r} 671038 \overline{) 735} \\ 0953 \\ \hline 2188 \\ 718 \end{array}$ O resto da divisão inteira de 671.038 por 735 é 718.
2.5	Diz-se que b é divisor de a quando se pode escrever $a = b \times c$ (a, b e c números naturais). Neste caso, c é também divisor de a e podemos escrever $a : b = c$ e $a : c = b$. Assim, numa divisão exata, tanto o divisor como o quociente são divisores do dividendo. Para determinar os divisores de um dado número natural n, podemos identificar sempre 1 e n como divisores de n ($n = 1 \times n$) e, em seguida, ir dividindo n por 2, 3, ..., etc., enquanto o quociente não for inferior ao divisor; quando o resto de uma destas divisões for nulo, tanto o divisor como o quociente serão divisores de n. Quando o quociente for inferior ou igual ao divisor podemos parar o processo, pois os divisores que viriam a ser identificados posteriormente já terão sido determinados através da propriedade acima referida. Exemplo Determina os divisores de 30. R.: 1 e 30 são divisores de 30. $30 : 2 = 15$, logo 2 e 15 são divisores de 30. $30 : 3 = 10$, logo 3 e 10 são divisores de 30. Dividindo 30 por 4, o quociente é 7 e o resto é 2. $30 : 5 = 6$, logo 5 e 6 são divisores de 30. $30 : 6 = 5$. Como $5 < 6$ podemos parar o processo. Os divisores de 30 são 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30. Exemplo* Determina os divisores de 84. R.: 1 e 84 são divisores de 84. $84 : 2 = 42$, logo 2 e 42 são divisores de 84. $84 : 3 = 28$, logo 3 e 28 são divisores de 84. $84 : 4 = 21$, logo 4 e 21 são divisores de 84. Dividindo 84 por 5, o quociente é 16 e o resto é 4.

	$84 : 6 = 14$, logo 6 e 14 são divisores de 84. $84 : 7 = 12$, logo 7 e 12 são divisores de 84. Dividindo 84 por 8, o quociente é 10 e o resto é 4. Dividindo 84 por 9, o quociente é 9 e o resto é 3. Podemos terminar o processo uma vez que nesta última divisão o divisor é igual ao quociente. Os divisores de 84 são pois 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 e 84.
3.1	Exemplo <i>Um avô dividiu a quantia de 648 euros pelos seus 12 netos. A neta Sónia juntou 20 euros à sua parte e utilizou o dinheiro para comprar o maior número possível de livros. Sabendo que cada livro que a Sónia comprou custou 9 euros, quanto dinheiro lhe sobrou?</i>
4.1	Neste descritor, tal como no seguinte, deve ter-se em consideração o que já foi desenvolvido a propósito dos descritores NO3-11.9 e NO3-11.10. Exemplo <i>Considera a fração $\frac{3}{5}$. Se multiplicares ambos os termos por 4 obténs uma nova fração. Compara-as.</i> R.: Multiplicando ambos os termos por 4, a fração que se obtém é $\frac{3 \times 4}{5 \times 4}$, ou seja, $\frac{12}{20}$. A unidade, inicialmente dividida em 5 partes iguais, passou a estar dividida em 20 partes iguais, ou seja, cada uma das cinco partes foi dividida em 4 partes iguais ($5 \times 4 = 20$). Assim, as 3 partes que inicialmente estavam a ser contabilizadas na construção da fração $\frac{3}{5}$, correspondem agora a 3×4 (12) das novas partes em que a unidade foi dividida. Portanto, o número racional representado por qualquer daquelas frações é o mesmo. $\frac{3}{5}$  $\frac{12}{20}$  $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$
4.2	A simplificação de frações, no caso mais geral, é estudada no 5.º ano NO5-1.1, devendo os alunos determinar sistematicamente os divisores comuns aos termos da fração. Aqui apenas se pretende tirar partido das tabuadas do 2, 5 e 10 para se efetuarem algumas simplificações. Em particular, atendendo a que o produto por 10, 100, 1000, etc. se obtém acrescentando zeros à direita na representação decimal de um número (cf. NO3-7.3), os alunos podem reconhecer que, para simplificar frações em que a representação decimal tanto do numerador como do denominador termina com um zero ou um certo número de zeros seguidos, podemos cortar o mesmo número desses zeros no numerador e no denominador.

Exemplo

Determina uma fração equivalente a $\frac{15}{40}$ e de termos respetivamente menores.

R.: Uma vez que tanto o 15 como o 40 fazem parte da tabuada do 5, temos:

$$\frac{15}{40} = \frac{3 \times 5}{8 \times 5}.$$

Sabemos que $\frac{3 \times 5}{8 \times 5} = \frac{3}{8}$ (4.1). Então, a fração $\frac{15}{40}$ é equivalente à fração $\frac{3}{8}$.

Exemplo*

a. Determina duas frações equivalentes a $\frac{2300}{4000}$ e de termos respetivamente menores.

b. Como poderias simplificar a fração se o numerador acabasse com cinco zeros seguidos em vez de dois e o denominador com sete zeros seguidos em vez de três?

R.:

a. Uma vez que para multiplicar um número natural por 10 se acrescenta um zero à direita na respetiva representação decimal, temos:

$$\frac{2300}{4000} = \frac{230 \times 10}{400 \times 10} = \frac{230}{400} = \frac{23 \times 10}{40 \times 10} = \frac{23}{40}.$$

Então, a fração $\frac{2300}{4000}$ é equivalente à fração $\frac{230}{400}$ e à fração $\frac{23}{40}$.

Para concluir que $\frac{2300}{4000}$ é uma fração equivalente à fração $\frac{23}{40}$ poderíamos também utilizar logo:

$$\frac{2300}{4000} = \frac{23 \times 100}{40 \times 100} = \frac{23}{40}$$

de acordo com NO3-7.3 e, acima, 4.1.

b. Poderíamos simplificar a fração cortando os cinco zeros finais no numerador e no denominador porque cada zero à direita no numerador e no denominador pode ser substituído pelo produto por 10, dois zeros pelo produto por 100, etc.:

$$\frac{2300000}{4000000} = \frac{23}{400}.$$

5.1

Neste objetivo geral introduz-se o produto e o quociente de um número racional por um inteiro natural e por uma fração unitária. Para que todas as propriedades destas operações possam ser corretamente compreendidas, é conveniente fazer previamente uma revisão dos descritores NO3-11.11 e NO3-12.6.

Neste descritor estende-se a definição da multiplicação apresentada no 2.º ano ao caso do produto de um número racional positivo q por um inteiro natural n .

$$n \times q = q + q + q + \dots + q \text{ (} n \text{ vezes)}.$$

O produto de um inteiro natural por um número racional é definido por forma a obter-se uma operação de multiplicação comutativa:

$$q \times n = n \times q = q + q + q + \dots + q \text{ (} n \text{ vezes)}.$$

	Exemplo <i>Calcula $\frac{2}{9} \times 4$.</i> R.: $\frac{2}{9} \times 4 = 4 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2+2+2+2}{9} = \frac{8}{9}$
5.2	Tendo em conta o descritor anterior, pretende-se agora que o aluno reconheça a validade da igualdade $n \times \frac{a}{b} = \frac{n \times a}{b}$, que lhe permitirá efetuar este cálculo de forma mais expedita sem recurso à operação de adição. Exemplo <i>Calcula $3 \times \frac{5}{2}$.</i> R.: $3 \times \frac{5}{2} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = \frac{5+5+5}{2} = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2}$ (NO3-12.6) Exemplo <i>Calcula $\frac{7}{3} \times 3$.</i> R.: $\frac{7}{3} \times 3 = \frac{7 \times 3}{3} = 7$ (NO3-11.11)
5.3	Fornece-se aqui a definição geral do quociente entre dois números racionais, em continuidade com o descritor NO2-9.3, que trata de números naturais. Esta definição acompanhará os alunos nos próximos anos. É por isso fundamental que seja bem trabalhada no 1.º ciclo. Será de imediato aplicada aos descritores 5.4 e 5.5.
5.4	A possibilidade de substituir o traço de fração entre dois números naturais pelo sinal de divisão «:» surge como consequência direta dos descritores 5.2 e 5.3 anteriores. Exemplo <i>a. Calcula $3 \times \frac{4}{3}$.</i> <i>b.* Tendo em conta a alínea anterior, escreve $4 : 3$ na forma de fração.</i> R.: a. $3 \times \frac{4}{3} = 4$ (5.2) b. $4 : 3$ é o número pelo qual se deve multiplicar pelo 3 (divisor) para obter 4 (dividendo). Desta forma, tendo em conta a igualdade obtida na alínea anterior, $3 \times \frac{4}{3} = 4$, tem-se que $4 : 3 = \frac{4}{3}$.
5.5	Repare-se que esta propriedade é uma consequência dos descritores anteriores. Como $\frac{a}{b} : n$ é o número que multiplicado por n é igual a $\frac{a}{b}$ e $n \times \frac{a}{n \times b} = \frac{n \times a}{n \times b} = \frac{a}{b}$, conclui-se que $\frac{a}{b} : n = \frac{a}{n \times b}$. Nota: No 1.º ciclo ainda não se exige que os alunos simplifiquem frações para além de casos muito simples (cf. 4.2). Pretende-se apenas que reconheçam, em exemplos concretos, a identidade $\frac{n \times a}{n \times b} = \frac{a}{b}$ (cf. 4.1), utilizada no reconhecimento da propriedade referida neste descritor. Poderão também tirar partido de algumas equivalências entre frações estudadas no 3.º ano (NO3-11.9; NO3-11.10).

Exemplo

a. Calcula $2 \times \frac{1}{2 \times 3}$.

b.* Completa a igualdade $\frac{1}{3} : 2 = ?$

R.:

a. $2 \times \frac{1}{2 \times 3} = \frac{2}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$

b. $\frac{1}{3} : 2$ é o número que se deve multiplicar por 2 para obter $\frac{1}{3}$. Portanto, $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{2 \times 3}$.

Exemplo

a. Calcula $5 \times \frac{7}{5 \times 3}$.

b.* Tendo em conta a alínea anterior, calcula $\frac{7}{3} : 5$ simplificando o resultado.

R.:

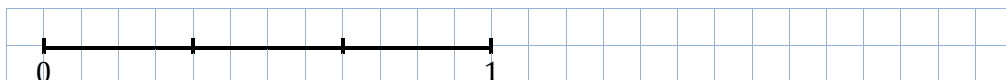
a. $5 \times \frac{7}{5 \times 3} = \frac{5 \times 7}{5 \times 3} = \frac{7}{3}$ (NO4-4.1)

b. $\frac{7}{3} : 5$ é o número pelo qual se deve multiplicar 5 para obter $\frac{7}{3}$. Pela igualdade anterior, $\frac{7}{3} : 5 = \frac{7}{5 \times 3} = \frac{7}{15}$.

Atendendo a esta propriedade, o resultado da divisão de um número racional por um inteiro natural pode ser interpretado geometricamente da forma que a seguir se apresenta.

Exemplo

Considera uma unidade de comprimento dividida em terços.

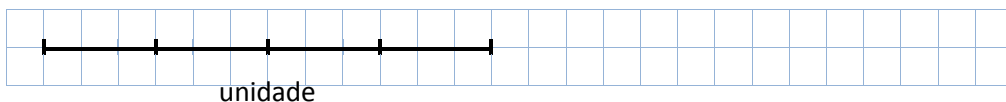


a. Divide um segmento de comprimento $\frac{1}{3}$ em dois segmentos iguais. Quantos dos segmentos obtidos precisas para preencher o segmento unidade? Qual a medida do comprimento de cada um?

b. Completa a igualdade: $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{[\] \times [\]} = \frac{1}{[\]}$

Exemplo

Considera uma unidade de comprimento dividida em quatro partes iguais.



a. Divide um segmento de comprimento $\frac{1}{4}$ em 3 partes iguais. Quantos dos segmentos obtidos precisas para preencher o segmento unidade? Qual a medida do comprimento de cada um?

b. Completa a igualdade: $\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{[\] \times [\]} = \frac{1}{[\]}$

5.6	O produto de um número racional por uma fração unitária é a última operação que se define no 1.º ciclo. Em continuidade com a igualdade já conhecida $a \times \frac{1}{b} = a : b$, quando a e b são números naturais, define-se o produto $q \times \frac{1}{n}$ como o quociente $q : n$, representando-se também por $\frac{1}{n} \times q$. A definição geral de quociente permite reconhecer facilmente que dividir por $\frac{1}{n}$ é o mesmo do que multiplicar por n. Exemplo a. Calcula $\frac{1}{3} \times \left(3 \times \frac{5}{2}\right)$. b. Tendo em conta o cálculo que efetuaste na alínea anterior, quanto vale $\frac{5}{2} : \frac{1}{3}$? R.: a. $\frac{1}{3} \times \left(3 \times \frac{5}{2}\right) = \left(3 \times \frac{5}{2}\right) : 3 = \frac{3 \times 5}{2} : 3 = \frac{3 \times 5}{3 \times 2} = \frac{5}{2}$ b. $\frac{5}{2} : \frac{1}{3}$ é o número pelo qual se deve multiplicar $\frac{1}{3}$ para obter $\frac{5}{2}$. Assim, $\frac{5}{2} : \frac{1}{3} = 3 \times \frac{5}{2}$. Esta propriedade pode ser aplicada ao descritor 6.2 tendo em conta o 6.1, já que estabelece que dividir por $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ... é o mesmo do que multiplicar por 10, 100, ...
5.7	Exemplo Indica o quociente de 25 por 3 e o quociente da divisão inteira de 25 por 3. R.: O quociente de 25 por 3 é simplesmente o número racional $\frac{25}{3}$. O quociente da divisão inteira de 25 por 3 é 8 (com resto 1). Exemplo* Indica o quociente de 12 por 3 e o quociente da divisão inteira de 12 por 3. R.: $\frac{12}{3}$ é o número racional que representa o quociente entre 12 e 3. O quociente da divisão inteira de 12 por 3 é 4 (com resto 0). Neste caso, o quociente $\frac{12}{3}$ é igual ao quociente da divisão inteira, 4.
6.1 6.2	Estes descritores generalizam a propriedade do sistema decimal referida em NO3-7.3, relativa ao produto de um número natural por 10, 100, 1000, Esta propriedade pode agora ser recordada, assim como as consequências óbvias que dela resultam para a divisão por 10, 100, 1000, ... de um número natural cuja representação decimal termine respetivamente em, no mínimo, um, dois, três, ... zeros. Exemplo Qual é o produto de 1,3 por 10? R.: $1,3 \times 10 = \frac{13}{10} \times 10 = 13$

	Exemplo Qual é o produto de 27,8 por 100? R.: $27,8 \times 100 = \frac{278}{10} \times 100 = \frac{27800}{10} = 2780$ Exemplo Determina o produto de 7,4 por 0,01. R.: $7,4 \times 0,01 = \frac{74}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{74}{10} : 100 = \frac{74}{10 \times 100} = \frac{74}{1000} = 0,074$ Observação: Neste cálculo foram utilizadas sequencialmente as definições e propriedades estudadas anteriormente: o primeiro passo corresponde à definição de 7,4 e 0,01; o segundo à definição de produto por uma fração unitária (5.6); o terceiro à propriedade expressa em 5.5; finalmente, o último passo corresponde novamente à definição de dízima. Exemplo Qual é o quociente de 15,83 por 10? R.: $15,83 : 10 = \frac{1583}{100} : 10 = \frac{1583}{1000} = 1,583$ Exemplo Calcula o quociente de 62,2 por 0,1. R.: $62,2 : 0,1 = \frac{622}{10} : \frac{1}{10} = \frac{622}{10} \times 10 = 622$
6.3	Exemplo Representa na forma de fração decimal e na forma de dízima a fração $\frac{7}{4}$ sem utilizares o algoritmo da divisão. R.: $\frac{7}{4} = \frac{7 \times 25}{4 \times 25} = \frac{175}{100} = 1,75$
6.4	Exemplo Representa em forma de dízima o número racional $\frac{355}{125}$ utilizando o algoritmo da divisão inteira. Informação Complementar para o professor Justificação da utilização da divisão inteira Tem-se que $125 \times 8 = 1000$. Por esta razão, sabemos à partida que a fração $\frac{355}{125}$ é equivalente a uma fração decimal. Poderíamos utilizar esta observação para a representar como dízima, como no descritor anterior. Pretende-se, no entanto, que o aluno faça a ligação entre este problema e o algoritmo da divisão. Essa ligação existe pela seguinte razão: como já sabemos que $\frac{355}{125}$ é equivalente a uma fração decimal, multiplicando esta fração por 10 um número adequado de vezes (isto é, juntando um certo número de zeros ao numerador: $\frac{3550...0}{125}$, no presente caso três no máximo, dado que $125 \times 8 = 1000$) obtém-se um número inteiro. E sabemos também, do descritor NO3-11.11, que $\frac{355000}{125}$ representa o número inteiro resultado da divisão exata de 355000 por 125.

O aluno poderia portanto dividir 355000 por 125 usando o algoritmo e deslocando posteriormente a vírgula para a esquerda tantas vezes quanto o número de zeros acrescentados. Porém, o número de zeros que é necessário acrescentar para obter resto zero é-lhe-desconhecido *a priori*. Deverá pois proceder da seguinte forma: começa por dividir 355 por 125, obtendo o quociente e o resto. Em seguida junta um zero ao dividendo e continua o algoritmo, como se a divisão inicial fosse 3550 por 125. Se, ainda assim, o resto não for nulo, junta-se novo zero como se a divisão inicial fosse 35500 por 125. Como vimos, prosseguindo este processo, acabaremos por obter um resto nulo. Basta agora compensar os zeros acrescentados ao dividendo (multiplicações sucessivas por 10) colocando uma vírgula no quociente (divisões sucessivas por 10) de modo que à sua direita fiquem tantas casas quanto o número de zeros acrescentados.

R.:

$$\begin{array}{r} 355 \quad | \quad 125 \\ 105 \quad 2 \end{array}$$

Acrescentamos um zero ao dividendo e continua-se o algoritmo:

$$\begin{array}{r} 3550 \quad | \quad 125 \\ 1050 \quad 28 \\ 050 \end{array}$$

Como ainda não se obteve resto zero, acrescentamos outro zero:

$$\begin{array}{r} 35500 \quad | \quad 125 \\ 1050 \quad 284 \\ 0500 \\ 000 \end{array}$$

Chegámos assim a um cálculo com resto zero.

Significa que $\frac{35500}{125} = 284$, ou, dividindo por 100 ambos os membros, que $\frac{355}{125} = 2,84$.

Na prática poderá colocar-se uma vírgula no dividendo e no quociente assim que se começam a juntar zeros ao dividendo.

$$\begin{array}{r} 355,00 \quad | \quad 125 \\ 1050 \quad 2,84 \\ 0500 \\ 000 \end{array}$$

6.5

Contrariamente ao descritor anterior, já sabemos *a priori* quantos zeros devemos acrescentar ao dividendo para obter uma aproximação do quociente à ordem desejada.

Exemplo*

Determina na forma de dízima o quociente de 25 por 7 com aproximação às centésimas.

R.:

$$\frac{25}{7} = \frac{25 \times 100}{7 \times 100} = \frac{2500}{7} \times \frac{1}{100}$$

$$\begin{array}{r} 2500 \quad | \quad 7 \\ 40 \quad 357 \\ 50 \\ 1 \end{array}$$

Como já foi referido no descritor anterior, o aluno deve passar desta representação para a apresentação das vírgulas diretamente no dividendo, no quociente e no resto.

$$\begin{array}{r} 25,00 \quad | \quad 7 \\ 40 \quad 3,57 \\ 50 \\ 0,01 \end{array}$$

3,57 é uma aproximação às centésimas de $\frac{25}{7}$.

Informação Complementar para o professor

Justificação deste procedimento

Registe-se que este procedimento, suportado pelo algoritmo da divisão, garante que a aproximação obtida tem um erro inferior a uma centésima. Observe-se a igualdade:

$$\frac{25}{7} = \frac{2500}{7} \times \frac{1}{100} = \frac{7 \times 357 + 1}{7} \times \frac{1}{100} = \left(357 + \frac{1}{7}\right) \times \frac{1}{100} = 3,57 + \frac{1}{7} \times \frac{1}{100}.$$

Significa que a diferença entre $\frac{25}{7}$ e 3,57 é $\frac{1}{7} \times \frac{1}{100}$ (número positivo inferior a $\frac{1}{100}$). Isto quer dizer que o valor obtido é sempre uma aproximação por defeito e que o algarismo das centésimas fica encontrado.

De maneira mais geral, para obter uma aproximação às centésimas de uma fração $\frac{D}{d}$, representando por q e r respetivamente o quociente e o resto da divisão inteira de $100 \times D$ por d , vem

$$\frac{D}{d} = \frac{d \times q + r}{d} \times \frac{1}{100} = \left(q + \frac{r}{d}\right) \times \frac{1}{100} = \left(q \times \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{r}{d} \times \frac{1}{100}\right)$$

Como a fração $\frac{r}{d}$ é sempre uma fração própria (o resto é inferior ao divisor), a diferença entre o quociente exato $\frac{D}{d}$ e a aproximação obtida $q \times \frac{1}{100}$ é dada por $\frac{r}{d} \times \frac{1}{100}$, que é um número positivo inferior a $\frac{1}{100}$.

6.6

Na verdade, ainda não foi definido o produto entre dois quaisquer números racionais. Por exemplo, o produto $2,71 \times 8,2$ não tem, para já, qualquer significado: nenhum dos números é natural nem representável por uma fração unitária (cf. descritores 5.2 e 5.6), que são os únicos números que sabemos multiplicar por um qualquer número racional.

Para deixar completo no 1.º ciclo o estudo dos algoritmos associados às operações elementares, optou-se por antecipar o produto entre dois números representáveis

por dízimas finitas. Admitindo que se pretende dar uma definição de modo que a multiplicação permaneça associativa e comutativa, podemos escrever

$$2,72 \times 8,2 = \left(272 \times \frac{1}{100}\right) \times \left(82 \times \frac{1}{10}\right) = (272 \times 82) \times \left(\frac{1}{100} \times \frac{1}{10}\right).$$

Somos assim conduzidos a uma operação cujo significado conhecemos e cujo resultado pode ser calculado utilizando o algoritmo da multiplicação para efetuar o produto 272×82 (22304), dividindo-se este resultado por 1000, o que pode ser conseguido deslocando a vírgula três casas decimais para a esquerda.

Os alunos devem chegar à seguinte regra: O número de casas decimais do produto é igual à soma dos números de casas decimais de cada um dos fatores.

No texto de apoio ao descritor GM4-4.4 ilustra-se uma utilização prática desta noção de produto no cálculo da área de um retângulo.

Exemplo

Calcula o produto de 37,6 por 0,38.

R.:

				3	7,	6	
		x		0,	3	8	
			3	0	0	8	
	+	1	1	2	8		
		1	4,	2	8	8	

O produto de 37,6 por 0,38 é 14,288.

6.7

Tal como no descritor anterior, também aqui não foi definido, até ao momento, o quociente entre dois quaisquer números racionais. Em rigor, a divisão geral de dois racionais positivos só será desenvolvida no 5.º ano. No entanto, dada a opção referida no descritor anterior de deixar completo o estudo dos algoritmos, os cálculos efetuados podem ser justificados recorrendo à definição geral de quociente (número que se tem de multiplicar pelo divisor para se obter o dividendo).

Exemplo*

Calcula o quociente, aproximado às milésimas, de 674,5 por 1,2.

R.:

Ao executar o algoritmo, acrescentam-se tantos zeros no dividendo quantos os necessários para que a diferença entre o número de casas decimais do dividendo e do divisor seja três (aproximação às milésimas).

Ao terminar o algoritmo, colocam-se as vírgulas de tal modo que o número de casas decimais do quociente seja igual à diferença entre o número de casas decimais do dividendo e do divisor. O número de casas decimais do resto será igual ao número de casas decimais do dividendo.

$$\begin{array}{r}
 67'4,5000 \quad | \quad 1,2 \\
 074 \quad 562,083 \\
 025 \\
 0100 \\
 040 \\
 0,0004
 \end{array}$$

562,083 é uma aproximação às milésimas do quociente de 674,5 por 1,2.
O resto é 0,0004.

Informação Complementar para o professor

Justificação deste procedimento

Usando a definição geral de quociente pelo processo habitual de inverso do produto, baseada na extensão da noção de produto que ficou esboçada no caso do produto de dízimas finitas, pode interpretar-se o resultado da aplicação do algoritmo da divisão “até às milésimas” como uma aproximação do resultado exato do quociente $674,53 : 1,2$ com estimativa precisa do erro.

Sabemos que, em resultado da execução do algoritmo, se tem

$$674,53 = 1,2 \times 562,108 + 0,0004,$$

enquanto o quociente verdadeiro “ q ” é o número que satisfaz a igualdade

$$674,53 = 1,2 \times q.$$

Então,

$$1,2 \times 562,108 + 0,0004 = 1,2 \times q,$$

pelo que

$$1,2 \times (q - 562,108) = 0,0004$$

e portanto o erro do quociente, $q - 562,108$, é dado por $0,0004 : 1,2$ (erro inferior a uma milésima), o que prova que os algarismos de q até às milésimas são os da aproximação obtida pelo algoritmo.

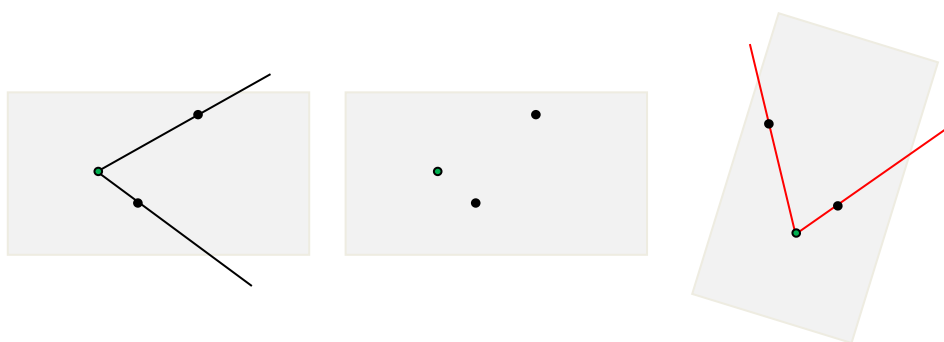
Descritor	Texto de apoio
1.1	Nos anos anteriores identificaram-se <i>direções</i> em diversos contextos, clarificando-se o uso que na linguagem comum é feito deste termo e de outros relacionados (cf. GM2-1.1, GM2-1.2, GM2-1.4, GM3-1.2, GM3-1.4), na sequência da identificação de alinhamentos de objetos e pontos iniciada no 1.º ano (GM1-1.2 a 1.6). Em particular, determinado observador pode olhar na direção de diferentes objetos sem alterar sensivelmente o ponto de onde faz a observação, e verificar se dois desses objetos estão ou não na mesma direção. Dizemos que duas dessas direções «formam um ângulo» de «vértice» no ponto de onde é feita a observação, ou que esse ângulo é determinado por dois objetos que definem essas direções com o ponto de onde é feita a observação.
1.2	Uma vez que também já representaram e identificaram direções com origens em pontos arbitrários, os alunos podem agora identificar pares de direções que <i>formam ângulos</i> em diferentes desenhos e objetos de dimensões variadas, indicando onde se situa o <i>vértice</i> de cada um deles, origem comum das duas direções, e distinguindo estas situações daquelas em que pares de direções não formam ângulos, porque as direções de cada par não têm a mesma origem. Atendendo à noção de semirreta introduzida no 2.º ano (GM2-2.1), podemos também referir-nos a semirretas com a mesma origem como «formando um ângulo». Como materialização aproximada de ângulos formados por dois objetos distantes com o ponto de onde são observados podem utilizar-se os dois braços esticados do observador apontando respetivamente para os dois objetos; podem também utilizar-se instrumentos que sirvam para apontar nas duas direções (um compasso grande de madeira, por exemplo).

1.3

Estas observações são prévias à introdução de uma terminologia mais precisa relativa ao estudo dos ângulos e respectivas amplitudes (objetivo geral 2). Quanto ao conceito de amplitude, trata-se de introduzir um método para comparar ângulos análogo ao utilizado para comparar distâncias e comprimentos; em primeiro lugar há que esclarecer o que se entende por ângulos «**com a mesma amplitude**», procurando traduzir-se a ideia intuitiva de “afastamento angular” de duas semirretas que formam um ângulo.

Utilizam-se objetos rígidos com dois pontos neles fixados para transportar distâncias entre dois pontos e assim verificar se pares de pontos se encontram a igual distância; no caso do comprimento de segmentos de reta observou-se que segmentos com extremos a igual distância “podem ser sobrepostos por deslocamento rígido”, ou seja, são geometricamente iguais (cf. GM1-1.7, GM1-2.2), mas sabemos que não é necessário levar dois segmentos de reta à coincidência ponto por ponto para verificar que têm o mesmo comprimento, bastando utilizar qualquer dos meios à nossa disposição para verificar que os extremos estão à mesma distância nos dois segmentos. Ora não podemos considerar objetos rígidos que materializem a totalidade dos pontos de duas semirretas, já que são ilimitadas; assim, ao contrário do que se passa com o comprimento dos segmentos de reta, para comparar os ângulos formados por dois pares de semirretas não podemos utilizar um objeto rígido que se possa sobrepor alternadamente, ponto por ponto, aos dois pares de semirretas, na sua totalidade.

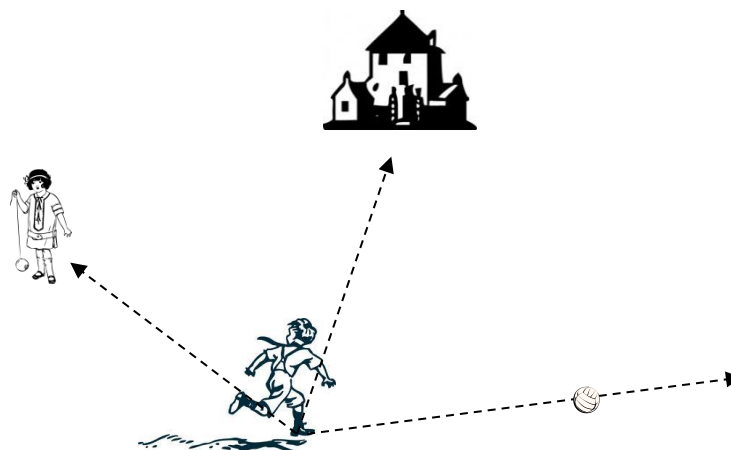
No entanto, apenas dois pontos (um deles tomado para origem) determinam uma direção, ou seja, uma semirreta, pelo que duas direções com origem comum ficam determinadas apenas por três pontos, sendo um deles a origem. Assim, marcando três pontos num objeto rígido, um deles destinado a coincidir com a origem comum das duas semirretas, e cada um dos outros dois destinados a posicionarem-se em cada uma das duas semirretas que formam o ângulo, podemos transportar informação suficiente para reproduzir a configuração formada pelas duas semirretas e traduzir por este procedimento prático a ideia de “transportar as duas semirretas, mantendo o respetivo afastamento angular”.



Com papel vegetal, marcam-se o vértice e um ponto em cada um dos lados do ângulo para o poder transportar.

Cada um dos dois pontos distintos daquele que se destina a ser sobreposto aos vértices dos ângulos a comparar determina com este uma semirreta, a qual pode ser representada por um segmento de reta com um dos extremos no vértice. Estes segmentos podem ser materializados num objeto rígido; assim, embora não seja estritamente necessário, os objetos utilizados para “transportar ângulos”, para além

	de três pontos neles fixados, podem ter marcados dois segmentos de reta com um extremo comum (coincidente com o vértice do ângulo “transportado”) e os outros nas duas semirretas que formam o ângulo. Podemos para tal usar papéis dobrados ou papel vegetal, por exemplo, mas também podemos utilizar apenas três pontos marcados em papel vegetal, um tripé, etc.; os chamados <i>transferidores</i> são constituídos por um semicírculo em material com rigidez adequada, com o centro assinalado (destinado a ser o vértice do ângulo transportado ou transferido) e com diversos pontos igualmente espaçados e assinalados na circunferência, associados a uma escala numérica. Dois desses pontos determinam com o centro duas semirretas que formam um ângulo. Ainda que não se explore no 1.º ciclo a noção de medida de ângulo, os transferidores podem ser usados, como outros objetos, para o efeito de “transportar amplitudes”, ou seja, de identificar em diferentes localizações ângulos de igual amplitude; podem construir-se “transferidores”, em cartão ou cartolina, por exemplo, sem escala marcada, mas em que se podem assinalar em cada caso os pontos suficientes para se compararem dois ângulos e concluir se têm ou não a mesma amplitude, ou para representar ângulos com essa amplitude em diversas localizações.
1.4	Como casos particulares de pares de direções que formam ângulos temos as que estão associadas a uma meia volta e a um quarto de volta. Neste último caso as direções dizem-se perpendiculares (cf. GM3-1.2); a noção de perpendicularidade fica assim associada desde já a ângulos formados por pares de direções que resultam de um quarto de volta dado por determinado observador que mantém o olhar dirigido em frente e a direito, antes e depois de executar esse movimento (cf. o que se disse a propósito de GM2-1.2). Como o quarto de volta é metade de uma meia volta (já que para dar meia volta dão-se sucessivamente dois quartos de volta), e no caso da meia volta as direções inicial e final do olhar do observador são opostas (estão alinhadas mas não são coincidentes), o ângulo formado por direções perpendiculares é, em certo sentido, metade do ângulo formado por direções opostas. Esta ideia servirá de base à noção de ângulo reto adiante introduzida (2.14).
2.1	Consolidada a ideia de que duas direções ou semirretas com origem comum formam um ângulo, pretende-se agora clarificar a terminologia própria do estudo deste novo conceito, começando-se por esclarecer o que deve entender-se exatamente pela figura geométrica que se designa por ângulo, ou seja, por que pontos, em cada caso, se considera que essa figura é constituída. Sabemos o que significa, em linguagem comum, dizer que determinada direção se situa entre outras duas. Por exemplo, olhando para o céu noturno sabemos o que significa dizer que a direção da Lua está entre as direções de duas determinadas estrelas, mesmo que saibamos que as distâncias da Lua e das estrelas a nós próprios são muito diferentes; o mesmo se pode passar em relação a três objetos que observamos de um determinado ponto em que nos situamos.

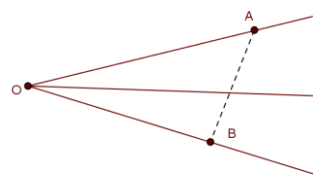


Relativamente ao pé do menino, a direção da casa está entre as direções da bola e da menina (considerando que o menino, a menina, a bola e a casa estão assentes num mesmo plano).



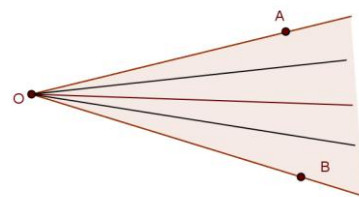
Relativamente ao ponto de onde foi tirada a fotografia, a direção da ponta da chaminé está situada entre a direção do canto do terraço e a direção do canto da torre da igreja.

Para sabermos como devemos reconhecer uma semirreta situada entre outras duas, traduzindo o uso que é feito deste conceito na linguagem corrente, começamos por considerar duas semirretas que formam um ângulo (ou seja, que têm origem O comum), sejam elas $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$, e que não são colineares (as retas suporte são distintas); então cada ponto do segmento AB determina com O uma direção, ou seja, uma semirreta, e são estas semirretas que dizemos que estão **situadas entre $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$** . Ou seja, uma semirreta está entre outras duas com a mesma origem, sejam elas $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$, quando tem também a mesma origem O e passa num ponto situado entre um ponto da semirreta $\vec{OA}$ e outro da semirreta $\vec{OB}$, ambos distintos de O ; de acordo com a nossa experiência, esta propriedade não depende da escolha que se faz de um ponto em cada semirreta e este facto pode ser provado numa construção adequada da Geometria. Uma vez que os extremos de um segmento de reta se consideram como pontos do segmento, duas semirretas que formam um ângulo e não são colineares consideram-se também como situando-se entre elas próprias.

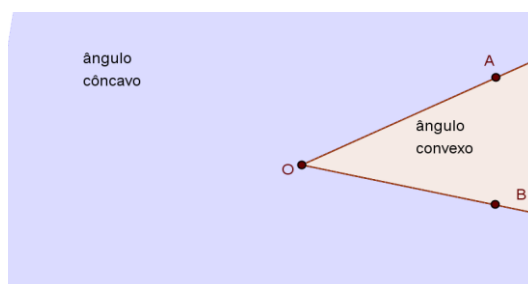


2.2
2.5
2.6
2.10

Os alunos devem saber identificar em desenhos e objetos direções representadas por semirretas situadas entre outras duas que formam um ângulo e não são colineares; os pontos dessas semirretas constituem o que se designa por um «**ângulo convexo**». Mais precisamente, dados três pontos não colineares A , O e B designa-se por «**ângulo convexo AOB** » a figura geométrica que é constituída pelos pontos das semirretas $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ e pelos pontos das restantes semirretas que se situam entre essas duas. As semirretas $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ designam-se por «**lados**» do ângulo convexo AOB .

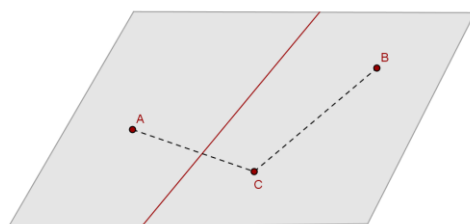


Dado um ângulo convexo, os restantes pontos do plano em que ele está contido formam com os pontos pertencentes aos lados desse ângulo convexo o chamado «**ângulo côncavo**» com os mesmos lados e vértice. Uma vez que um ângulo convexo e o côncavo com os mesmos lados podem ficar determinados pelos mesmos três pontos não colineares A , O e B , seria necessário em cada caso indicar de qual se trata, mas convencionou-se que a menção «convexo» pode ser omitida; ou seja, por convenção, «**ângulo AOB** » designará o ângulo convexo AOB , salvo indicação em contrário. Desta forma, duas semirretas com a mesma origem e não colineares dividem o plano em que se situam em duas regiões, uma delas constituindo com as semirretas um ângulo convexo e a outra constituindo com as semirretas um ângulo côncavo.



2.4

Quando fixamos uma reta num plano, este fica dividido em duas partes que se designam por «**semiplanos**», que podemos considerar «**opostos**». Se considerarmos dois pontos do plano, uma maneira de verificarmos se estão ou não no mesmo semiplano determinado por uma dada reta é unirmos os dois pontos por um segmento de reta e verificarmos se esse segmento intersecta a reta; se assim for, concluímos que os pontos estão em semiplanos opostos, caso contrário estarão no mesmo semiplano.



Os pontos B e C pertencem ao mesmo semiplano.

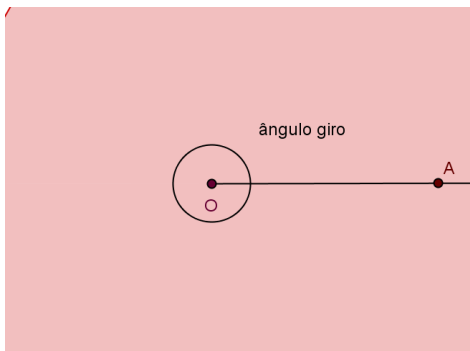
Os pontos A e C pertencem a semiplanos opostos.

Os alunos poderão identificar em desenhos e em objetos com porções planas pontos pertencentes a um mesmo semiplano ou a semiplanos distintos determinados pela reta suporte de um segmento de reta marcado num desses

	desenhos ou objetos. Também poderão concluir que numa experiência em que se utiliza um objeto retilíneo para ocultar do nosso olhar alguns objetos, os pontos do espaço em que esses objetos se situam estão num semiplano oposto àquele em que se situa o ponto de onde é feita a observação.
2.7	Quando dois pontos A e B determinam com um ponto O a mesma semirreta de origem O também se diz que «as semirretas $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ são coincidentes» ou «coincidem», embora se trate de uma só semirreta, linguagem que é usual em Geometria. Nesse caso também se designa essa semirreta por «ângulo AOB de vértice O e lados $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$» e diz-se que é um «ângulo nulo». Note-se que neste caso os pontos A, O e B são colineares e portanto não determinam um par de ângulos convexo/côncavo.
2.8	Outra situação ocorre quando A, O e B são colineares e as semirretas $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ são opostas (têm a mesma reta suporte nas não coincidem); neste caso formam um ângulo, mas não identificámos ainda que figura geométrica devemos designar por «ângulo AOB». Com efeito, as duas semirretas pertencem a uma infinidade de planos; selecionando um dos semiplanos que a reta AB, união de $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$, determina num dos planos que a contém, podemos associar esse semiplano e as duas semirretas ao que se designa por «ângulo raso». Assim, para determinar um ângulo raso, é necessário fixar um semiplano e um ponto O na reta r que o delimita; esse ponto diz-se «vértice do ângulo raso» e as duas semirretas opostas que esse ponto determina na reta r designam-se por «lados do ângulo raso» (já sabíamos que O se designava por vértice do ângulo formado pelas duas semirretas opostas). Observação: Note-se que, no caso particular do ângulo raso, podemos ter ângulos associados a semiplanos coincidentes mas com vértices distintos, bastando para tal considerar como vértice um outro ponto na reta que delimita o semiplano fixado. Uma situação análoga também ocorre com o ângulo giro, que se aborda no descritor seguinte. Como acima vimos (1.4), as direções associadas a uma meia volta são semirretas opostas, pelo que podemos associar a esse movimento o ângulo raso com lados coincidentes com essas direções e semiplano associado formado pelos pontos das direções do nosso olhar (sempre a direito e em frente) ao longo do movimento. Esse semiplano pode ser identificado numa grelha quadriculada em que se represente um itinerário imaginando que, em determinado ponto, se dá uma meia volta para a direita ou para a esquerda, para voltarmos a percorrer um trajeto retilíneo em sentido contrário.

2.9

Já utilizámos a expressão «ângulo nulo» para designar uma semirreta $\vec{OA}$; podemos traduzir a ideia de um ângulo formado por todas as direções de origem O em determinado plano contendo $\vec{OA}$ (mantendo $\vec{OA}$ como lado desse ângulo), associando esse plano e a semirreta $\vec{OA}$ à designação «**ângulo giro**», de **lado** $\vec{OA}$ e **vértice** O .



Assim, em determinado plano, uma semirreta determina um ângulo nulo e um ângulo giro e, em conjunto com a semirreta oposta, determina dois ângulos rasos; para os distinguir será necessário fixar pelo menos um ponto do plano não pertencente aos lados do ângulo raso (ou seja, não pertencente à reta suporte da semirreta inicialmente dada) e que pertença ao semiplano associado ao ângulo raso escolhido.

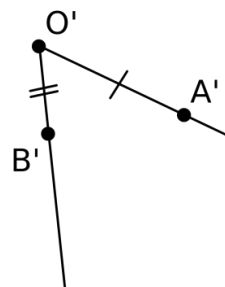
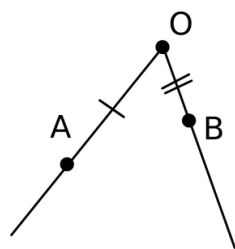
Um ângulo giro pode representar uma volta inteira executada por determinado observador; partindo de uma direção inicial do olhar desse observador (sempre a direito e em frente), as direções sucessivas desse olhar ao dar uma volta inteira percorrem os pontos de um plano que fica associado a um ângulo giro tendo por lado a direção inicial. Também pode ser representado numa grelha quadriculada em que, num ponto de determinado itinerário, se supõe que um observador executa uma volta inteira (“gira sobre si próprio”) para voltar à posição inicial, virado para determinada direção representada por um semirreta, identificada por um traço nessa grelha, que representa o lado do ângulo giro.

2.11

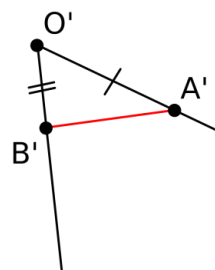
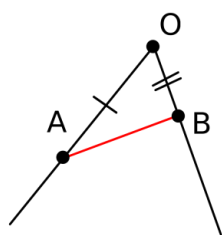
Neste descritor fornece-se um critério de igualdade de ângulos que apenas envolve igualdades entre distâncias. Este critério assumirá uma importância fundamental nos ciclos de estudo posteriores, pelo que será aqui pormenorizadamente explicado. Consideremos dois ângulos de vértices O e O' :



Começamos por fazer corresponder arbitrariamente a cada lado de um dos ângulos um lado do outro, assinalando pontos em cada par de lados correspondentes a igual distância do respetivo vértice (pontos A, A', B e B'):



Os ângulos têm a mesma amplitude quando (e apenas quando) os segmentos $[AB]$ e $[A'B']$ têm o mesmo comprimento.



De facto:

- Se os ângulos tiverem a mesma amplitude, podemos assinalar num objeto rígido pontos coincidentes com os pontos O, A e B e deslocar o objeto rígido para que os pontos correspondentes a O e a A coincidam respetivamente com os pontos O' e A' (já que $\overline{OA} = \overline{O'A'}$). Pelo critério prático referido a propósito de 1.3, conseguiremos sobrepor também o terceiro ponto marcado no objeto rígido (correspondente ao ponto B) a um ponto do lado $[O'B']$; esse ponto é necessariamente o ponto B' , já que $\overline{OB} = \overline{O'B'}$. Desta forma, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.
- Inversamente, se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, a experiência revela que podemos utilizar um objeto rígido em que se marcam três pontos coincidentes respetivamente com O, A e B , para em seguida fazer coincidir esses pontos no objeto rígido respetivamente com os pontos O', A' e B' , o que revela que os dois ângulos têm a mesma amplitude; este dado da experiência pode ser adequadamente formalizado e justificado no quadro de uma construção rigorosa da Geometria, que ultrapassa o âmbito do 1.º ciclo.

Outro facto intuitivo que também admitiremos é a igualdade geométrica de ângulos com a mesma amplitude; a recíproca, admitindo que ângulos geometricamente iguais podem ser levados a coincidir por um deslocamento rígido (no quadro de uma definição rigorosa destes deslocamentos) resultará que os vértices serão levados a coincidir um com o outro neste movimento assim como cada lado de um com um lado do outro. Com efeito, sendo admitidos estes factos, facilmente se vê que ficará cumprido o critério de igualdade de amplitudes em ângulos geometricamente iguais.

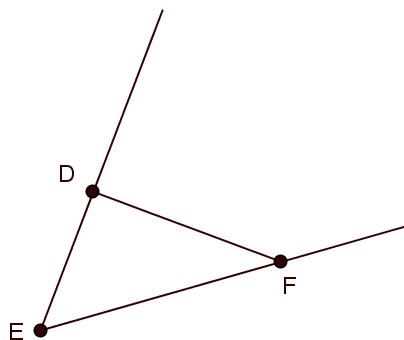
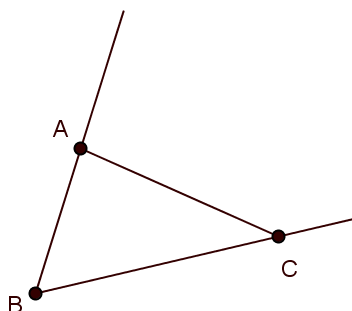
Observação: Em termos práticos podem considerar-se pontos A e B equidistantes de O , o que facilita e simplifica estes procedimentos.

Exemplo

Mede com uma régua graduada as distâncias entre os três pontos marcados em cada um dos ângulos e diz se estes têm a mesma amplitude.

R.: Verifica-se que $\overline{BA} = \overline{ED} = 1,5 \text{ cm}$ e que $\overline{BC} = \overline{EF} = 2,5 \text{ cm}$.

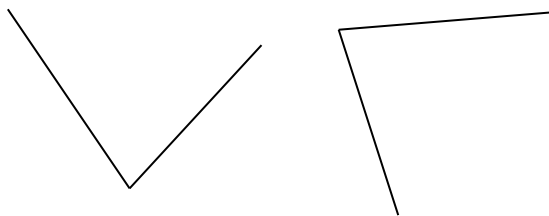
Assim, os ângulos são iguais quando (e apenas quando) $\overline{AC} = \overline{DF}$.



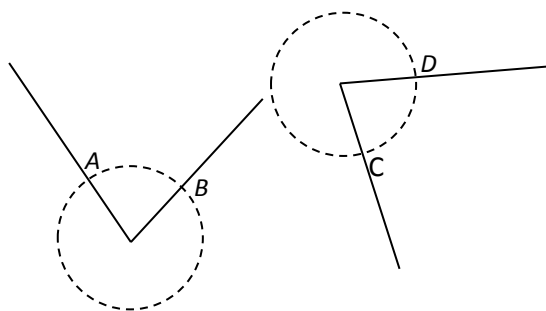
Como $\overline{AC} = 2,2 \text{ cm}$ e $\overline{DF} = 2 \text{ cm}$, os ângulos não têm a mesma amplitude, ou seja, não são iguais.

Exemplo

Verifica se os seguintes ângulos são iguais.

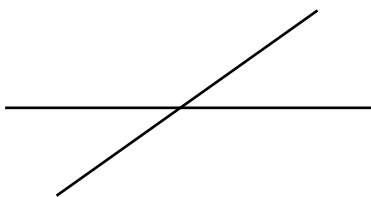
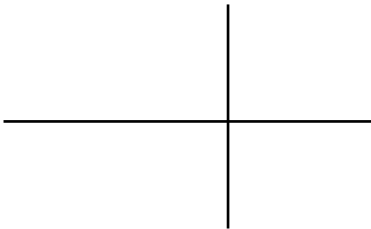


R.: Traçando duas circunferências de mesmo raio centradas em cada um dos vértices, obtêm-se os pontos A, B, C e D (cf. Observação da página anterior).



Verifica-se, com o auxílio de uma régua graduada ou de um compasso, que $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Desta forma, admitindo que as medidas foram obtidas com rigor, podemos concluir que os ângulos são iguais.

2.12 2.13	O conceito de «ângulos adjacentes» será mais explorado no 2.º ciclo, em particular para introduzir a noção de soma de dois ângulos. Note-se que, com a definição apresentada, um ângulo não pode ser considerado adjacente ao ângulo nulo definido por um dos seus lados uma vez que o segundo está contido no primeiro. No 1.º ciclo, a noção de adjacência de ângulos será útil para compararmos dois ângulos. Diremos que um ângulo «tem maior amplitude» do que outro se for igual à união do segundo com um ângulo adjacente a este.
2.14	Depois das abordagens intuitivas da noção de perpendicularidade (utilizando a horizontalidade e a verticalidade e os quartos de volta em itinerários), este descritor introduz de forma mais consolidada a noção de ângulo reto: um ângulo é dito reto quando, unido com um ângulo adjacente com a mesma amplitude (isto é, geometricamente igual), formar um semiplano, ou seja, “formar um ângulo raso”.
3.1	A perpendicularidade entre direções e retas foi abordada de forma intuitiva nos anos anteriores, tendo-se recorrido a quartos de volta, a pares de direções em que uma é vertical e outra horizontal e, mais geralmente, ao reconhecimento visual da perpendicularidade em situações variadas (ver GM3-1.2, GM3-1.3 e GM3-1.4). Neste descritor estabelece-se uma relação entre perpendicularidade e a noção de ângulos reto, abordada no objetivo geral anterior. Duas retas do plano que se interseitam num dado ponto O definem quatro semirretas de origem em O. Formam-se assim 4 ângulos convexos de vértice em O com um dos lados pertencentes a uma das retas e o outro lado pertencente à outra.  Quando um destes ângulos é reto, as retas são ditas perpendiculares. Nesse caso os restantes três ângulos também são retos. Com efeito, por definição, o ângulo que se supõe reto é igual aos dois suplementares adjacentes, os quais portanto também são retos. O quarto ângulo também o é pois, mais uma vez, será igual a qualquer um dos suplementares adjacentes, que sabemos agora serem retos.  Observação 1: Com duas dobragens sucessivas de uma folha de papel facilmente se obtêm vincos que representam duas retas perpendiculares. Com efeito, se, ao obtermos o segundo vinco, obrigarmos a que coincidam as duas partes em que fica dividido o primeiro vinco (basta levar à coincidência dois pontos do primeiro vinco, para além do ponto comum que resulta da segunda dobragem) estaremos a forçar a igualdade dos quatro ângulos determinados pelos dois vincos, que assim ficam

parcialmente sobrepostos. Ao desdobrarmos a folha e voltarmos a planificá-la ficarão suplementares dois desses ângulos, cada um deles com um dos lados contido no primeiro vinco, e partilhando o lado contido no segundo vinco. Concluímos assim que esses dois ângulos são retos, assim como os que partilham o outro lado do segundo vinco; ou seja, os quatro ângulos são retos, o segundo vinco determina semiretas perpendiculares ao primeiro e, em particular, essas semirretas são opostas uma à outra, ficando portanto o segundo vinco contido numa reta, após a desdobração e planificação da folha de papel.

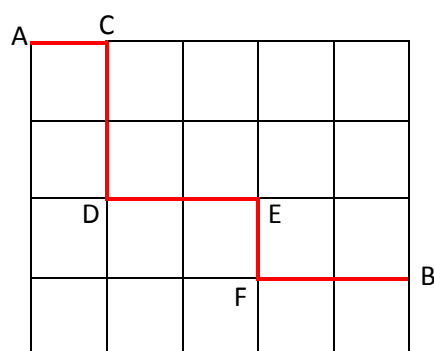
Este é um procedimento simples que permite ao aluno a obtenção de um esquadro pelos seus próprios meios, bastando para tal não voltar a desdobrar o papel após as duas dobragens.



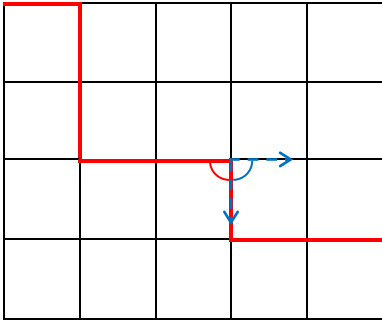
Observação 2: Em itinerários representados numa grelha quadriculada, poderá ser interessante explorar a relação entre troços contidos em retas perpendiculares e a paridade do número de quartos de volta efetuados no trajeto que os liga.

Exemplo

Na figura representa-se um itinerário numa grelha quadriculada. Risca uma das palavras ou letras separadas por uma barra vertical por forma a obteres afirmações verdadeiras.



- As direções dos itinerários entre A e C e entre C e D são paralelas|perpendiculares.
- As retas que contêm os itinerários entre os pontos C e A|D e entre os pontos F e B são perpendiculares.
- O itinerário entre os pontos C e B contém dois|três quartos de volta.

	Informação Complementar para o professor Ao efetuar-se um quarto de volta para se virar à direita ou à esquerda num itinerário em grelha quadriculada, o ângulo definido pelo olhar (em frente e a direito) inicial e final é suplementar e adjacente ao ângulo determinado pelos dois troços percorridos, com vértice no ponto de viragem. Neste caso, como os ângulos são iguais, são ambos retos.  As setas azuis representam a direção do olhar Mais geralmente, são também adjacentes e suplementares os ângulos definidos de forma análoga em itinerários formados por segmentos de reta não necessariamente perpendiculares (linhas poligonais). Esta propriedade será explorada no 2.º ciclo a propósito de ângulos externos de triângulos e outros polígonos.
3.2	Também o paralelismo entre segmentos de reta foi trabalhado no 3.º ano, utilizando-se itinerários com um número par de quartos de volta. Pretende-se agora fornecer uma definição mais precisa de paralelismo, dizendo-se paralelas duas retas coplanares que não se intersectam. No entanto, é importante salientar que esta definição não é facilmente operacionalizável. De facto, as retas, por serem ilimitadas, têm de ser obrigatoriamente representadas no papel como segmentos de reta, o que pode tornar difícil ou mesmo impossível determinar se se intersectam ou não, se apenas procurarmos graficamente o eventual ponto de interseção. Do mesmo modo, para se construir uma reta paralela a uma reta dada, procurando traçar-se um segmento de reta paralelo ao que representa essa reta, é necessário um critério de paralelismo que não se resuma à definição. Assim, e ainda que venha a ser estudado mais em pormenor no 2.º ciclo, o critério de paralelismo, que consiste em verificar que duas retas num plano são perpendiculares a uma terceira reta, pode ser aqui explorado. Note-se que se trata da continuação natural do critério de paralelismo entre segmentos de reta fornecido no descritor GM3-1.1.
4.1	Esta propriedade pode ser reconhecida imaginando cada lado de um quadrado com 1 metro de lado dividido em 10 segmentos de um decímetro e concluindo que se obtêm assim 100 quadrados com um decímetro de lado, de acordo com o resultado expresso no descritor GM3-3.8. Dada a dimensão usual dos cadernos diários, a relação entre estas unidades de medida que mais facilmente se explora com dimensões reais é entre o decímetro quadrado e o centímetro quadrado.
4.2	No que diz respeito às medidas agrárias, deve ser introduzida em primeiro lugar a unidade principal deste sistema: o are (a). O are, palavra derivada de área, é estabelecido por equivalência ao decâmetro quadrado, uma vez que o metro quadrado é uma unidade de medida que se considerou demasiado pequena para a medição de terrenos agrícolas.

Embora se reconheça que o **hectare** (hecto+are) é a unidade agrária mais vulgarmente utilizada, ela só deve ser introduzida depois do are, pois trata-se de uma palavra derivada que significa 100 vezes maior do que o are (o prefixo «hecto» tem o sentido multiplicativo de 100 vezes).

É costume fixar-se a correspondência entre o hectómetro quadrado (hm^2) e o hectare (ha) dado o acaso de partilharem o prefixo *hecto*. Mas a explicação deve ser apresentada pela via correta:

«hectómetro» significa «100 vezes maior do que o metro»; «hectómetro quadrado» é a área de um quadrado com um hectómetro de lado, ou seja, é uma área equivalente a $10.000 m^2$. Acontece que o hectómetro quadrado é 100 vezes maior que o decâmetro quadrado, ou seja, 100 vezes maior do que o are e, consequentemente, dá-se-lhe o nome de hectare.

As duas correspondências com maior utilidade são:

$$1 \text{ are } (1 a) = 1 \text{ dam}^2; 1 \text{ hectare } (1 ha) = 1 \text{ hm}^2.$$

As outras duas medidas agrárias são:

O **centiare** (centi+are), que significa 100 vezes menor que o are e que corresponde ao metro quadrado; $1 ca = 1 m^2$.

O **miriare** (miria+are), que significa 10.000 vezes maior que o are e que corresponde ao quilómetro quadrado; $1 ma = 1 km^2$.

4.3

No seguimento do descritor 4.1, os alunos poderão reconhecer que existe um fator 100 (e não um fator 10) respetivamente entre as unidades de área mm^2 e cm^2 , cm^2 e dm^2 , dm^2 e m^2 , etc. Este facto poderá servir de base à construção de uma grelha de conversão da seguinte forma:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

Dada uma medida de área numa determinada unidade, para a converter noutra unidade colocam-se os algarismos do número dado de modo que fique com o algarismo correspondente às unidades na última casa da unidade de medida dada. Em seguida, desloca-se a vírgula para a última casa da unidade de medida pretendida, eventualmente acrescentando os zeros que forem necessários.

Exemplo

Converte $320 m^2$ em cm^2 .

R.: O algarismo das unidades do número 320 é o 0, que deverá ser colocado na última casa referente ao m^2 . Para deslocar a vírgula para a última casa do cm^2 , temos de acrescentar quatro zeros.

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
			3	2	0	0
				0	0	0

$$320 m^2 = 3\,200\,000 cm^2$$

Exemplo

Converte $24,5 \text{ dm}^2$ em dam^2 .

R.: O algarismo das unidades do número 24,5 é o 4, que deverá ser colocado na última casa referente ao dm^2 . Para deslocar a vírgula para a última casa do dam^2 , é necessário acrescentar três zeros.

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
					0,	0	0	2	4	5			

$$24,5 \text{ dm}^2 = 0,00245 \text{ dam}^2$$

4.4

Para calcular, numa dada unidade do sistema métrico, a área de um retângulo cujas medidas dos lados podem ser expressas, numa subunidade, por números naturais, os alunos poderão converter ambas as medidas numa tal subunidade e fazer em seguida a multiplicação dos números naturais obtidos, reconvertendo finalmente o produto na unidade inicial.

Em alternativa, poderão utilizar o algoritmo referido no descritor NO4-6.6 para multiplicar dois números racionais expressos em dízima finita, o que corresponde a efetuar simultaneamente as conversões e a reconversão atrás indicadas, atendendo ao modo como esses produtos foram definidos; com efeito, a comutatividade e associatividade que resultam dessa definição permitem interpretar esse produto como o resultado de se multiplicarem dois números naturais e em seguida multiplicar o resultado pelo inverso de um número expresso no sistema decimal pelo algarismo 1 seguido de um certo número de zeros.

Exemplo

Calcula, em metros quadrados, a área de um retângulo de dimensões 34,6 cm e 1,2 m.

Podemos calcular a área pedida por diversos processos, como por exemplo os três seguintes:

R: Começamos por escrever as medidas dos lados do triângulo em milímetros, obtendo-se assim medidas inteiras:

$$34,6 \text{ cm} = 346 \text{ mm},$$

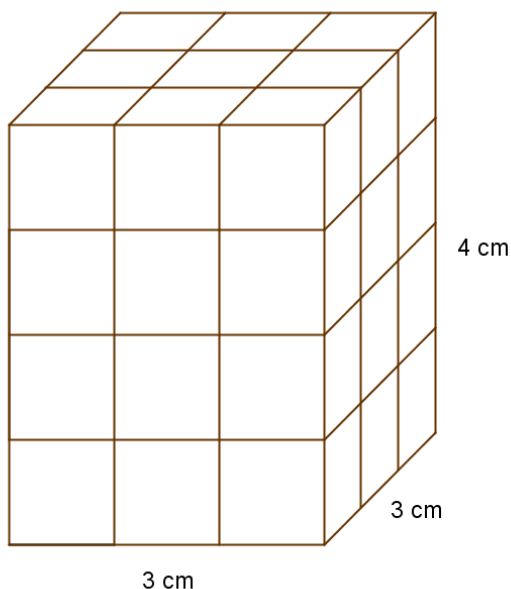
$$1,2 \text{ m} = 1200 \text{ mm}.$$

$$\text{A área do retângulo é pois de } (346 \times 1200) \text{ mm}^2 = 415\,200 \text{ mm}^2 = 0,4152 \text{ m}^2.$$

$$\text{R: Tem-se } 1,2 \text{ m} = 120 \text{ cm}, \text{ pelo que a área pedida é igual a } (34,6 \times 120) \text{ cm}^2 = 4152 \text{ cm}^2 = 0,4152 \text{ m}^2.$$

$$\text{R: Tem-se } 34,6 \text{ cm} = 0,346 \text{ m}, \text{ pelo que a área pedida é igual a } (0,346 \times 1,2) \text{ m}^2 = 0,4152 \text{ m}^2.$$

- 5.3 Por analogia ao caso dos retângulos, dividindo em segmentos de comprimento unitário cada uma das arestas do paralelepípedo retângulo, facilmente se observa que ficam construídos um número de cubos unidade igual ao produto das medidas das dimensões. Poderá ser referido, a este propósito, o sentido combinatório generalizado do produto de três números naturais.



Este paralelepípedo é decomponível em $3 \times 3 \times 4 = 36$ cubos de 1 centímetro de aresta.

- 5.5 Esta propriedade pode ser verificada observando, com o auxílio do descritor anterior, que um cubo com um metro de lado pode ser decomposto em $10 \times 10 \times 10 = 1000$ cubos de um decímetro de aresta. Tal como foi feito para as áreas, os alunos poderão utilizar este facto para reconhecer a existência de um fator 1000 entre mm^3 e cm^3 , cm^3 e dm^3 , dm^3 e m^3 , etc. Poderá ser elaborada uma grelha, desta feita com três colunas por unidade, para efetuar conversões.

Exemplo

Converte $5230 \, dm^3$ em dam^3 .

R.:

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
								0,	0	0	5	2	3	0						

$$5230 \, dm^3 = 0,00523 \, dam^3.$$

Organização e tratamento de dados OTD4

Descritor	Texto de apoio																
	O aluno deve identificar a «frequência relativa» de uma categoria/classe de determinado conjunto de dados com a fração cujo numerador é a frequência absoluta dessa categoria/classe e o denominador é o número total de dados. Exemplo <i>O número de golos marcados por uma equipa de futebol em cada um dos 16 jogos de um campeonato foi organizado na tabela seguinte.</i> <table border="1"> <thead> <tr> <th>N.º de golos</th><th>N.º de jogos</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td><td>3</td></tr> <tr> <td>1</td><td>3</td></tr> <tr> <td>2</td><td>7</td></tr> <tr> <td>3</td><td>2</td></tr> <tr> <td>5</td><td>1</td></tr> </tbody> </table> <i>Indica a frequência relativa dos jogos em que não foram marcados golos.</i> R.: Houve 3 jogos em que não foram marcados golos, ou seja, a frequência absoluta dos jogos em que não foram marcados golos é 3. A frequência relativa é $\frac{3}{16}$.	N.º de golos	N.º de jogos	0	3	1	3	2	7	3	2	5	1				
N.º de golos	N.º de jogos																
0	3																
1	3																
2	7																
3	2																
5	1																
1.2	O aluno deve ser capaz de exprimir qualquer fração própria em percentagem arredondada às décimas. Exemplo** <i>Calcula a frequência relativa, em percentagem arredondada às décimas, dos jogos em que não foram marcados golos e dos jogos em que apenas foi marcado um golo.</i> <table border="1"> <thead> <tr> <th>N.º de golos</th><th>N.º de jogos</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td><td>7</td></tr> <tr> <td>1</td><td>8</td></tr> <tr> <td>2</td><td>13</td></tr> <tr> <td>3</td><td>6</td></tr> <tr> <td>4</td><td>3</td></tr> <tr> <td>5</td><td>2</td></tr> <tr> <td>Total</td><td>39</td></tr> </tbody> </table> R.: Frequência de jogos em que não se marcaram golos: $\frac{7}{39}$. 7,0000 3 10 370 190 34 39 0,1794 Em percentagem, arredondada às décimas, obtém-se 17,9% .	N.º de golos	N.º de jogos	0	7	1	8	2	13	3	6	4	3	5	2	Total	39
N.º de golos	N.º de jogos																
0	7																
1	8																
2	13																
3	6																
4	3																
5	2																
Total	39																

Percentagem de jogos em que apenas foi marcado um golo: $\frac{8}{39}$.

$$\begin{array}{r} 8,0000 \\ 39 \overline{) 200} \\ \underline{200} \\ 050 \\ \underline{51} \\ 11 \end{array}$$

Em percentagem, arredondada às décimas, obtém-se 20,5% .