

5º ano



MATEMÁTICA

www.japassei.pt



✓ Resumos da matéria
✓ Exercícios resolvidos



Este e-book é parte integrante da plataforma de educação *Já Passei* e propriedade da DEVIT - Desenvolvimento de Tecnologias de Informação, Unipessoal Lda.

Disciplina:
Matemática

Ano de escolaridade:
5º ano

Coordenação:
Maria João Tarouca

Design e composição gráfica:
Vanessa Augusto

Já Passei

Rua das Azenhas, 22 A
Cabanas Golf
Fábrica da Pólvora
2730 - 270 Barcarena

site: www.japassei.pt
e-mail: marketing@japassei.pt

www.japassei.pt



ÍNDICE

1 NÚMEROS NATURAIS

- 1.1) Divisores e múltiplos. Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum
- 1.2) Números primos e compostos
- 1.3) Decomposição em fatores primos: m.m.c. e m.d.c.
- 1.4) Critérios de divisibilidade
- 1.5) Potências de base e expoente natural
- 1.6) Adição e suas propriedades. Subtração
- 1.7) Multiplicação e suas propriedades

2 SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

- 2.1) Poliedros e não poliedros. Polígonos
- 2.2) Planificação de um sólido e suas representações no plano

3 FIGURAS NO PLANO

- 3.1) Retas, semirretas e segmentos de reta
- 3.2) Ângulo e amplitude de ângulo
- 3.3) Estudo de polígonos
- 3.4) Triângulos
- 3.5) Círculo e circunferência

4 NÚMEROS RACIONAIS NÃO NEGATIVOS

- 4.1) Representação da fração
- 4.2) Número racional. Fração decimal
- 4.3) Estudo de frações. Frações equivalentes. Fração irredutível
- 4.4) Comparação de frações. Numeral misto
- 4.5) Localizar e posicionar um número racional na reta numérica
- 4.6) Adição e subtração de frações. Propriedades
- 4.7) Fração de um número
- 4.8) Porcentagem

5 REPRESENTAÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE DADOS

- 5.1) Interpretação de gráficos de barras e de linhas
- 5.2) Recolha e organização de dados estatísticos: frequência absoluta
- 5.3) Tabelas de frequências absolutas e relativas. Gráfico de barras e de pontos
- 5.4) Pictogramas
- 5.5) Diagrama de caule e folhas
- 5.6) Moda e média aritmética
- 5.7) Previsão de acontecimentos

6 PERÍMETROS

- 6.1) Perímetro de polígonos. Unidades
- 6.2) Perímetro do círculo

ÍNDICE

7 ÁREAS

- 7.1) Figuras congruentes. Figuras equivalentes. Unidade de área
- 7.2) Área do retângulo e do quadrado
- 7.3) Área do triângulo. Decomposição de figuras
- 7.4) Área do círculo

8 SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS

- 8.1) Números Naturais
- 8.2) Figuras no Plano
- 8.3) Números Racionais não negativos
- 8.4) Perímetros
- 8.5) Áreas

TEMA

1

Números Naturais



DIVISORES E MÚLTIPLOS MÁXIMO DIVISOR COMUM E MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Recordemos alguns conceitos:

* Os números 1, 2, 3, 4, 5 ... são números naturais que surgiram da necessidade de se contar objectos ou seres e por isso fazem parte do conjunto dos números naturais.

Esse conjunto representa-se por $\mathbb{N}$ e lê-se **conjunto dos números naturais**.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

E o zero?

O zero não é um número natural mas é um número inteiro. Se juntarmos o zero ao conjunto dos números naturais obtemos o conjunto

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$



Os dois conjuntos anteriores são **infinitos** pois não existe um limite para os números que lhes pertencem.

Um conjunto é **finito** se tem um número limitado de elementos.

exemplo

Averigua se cada um dos seguintes conjuntos é finito ou infinito:

$$G = \{\text{números ímpares}\}$$

$$H = \{\text{números naturais maiores que 1 milhão}\}$$

$$I = \{\text{números naturais menores que 2}\}$$

G é um conjunto infinito, H é um conjunto finito e I é um conjunto finito.

* Divisão e a multiplicação

A divisão e a multiplicação são operações inversas. Podemos verificar com o exemplo seguinte:

Penso no número 6 e multiplico-o por 5, obtenho 30 .

Como obtenho novamente o número 6 ? Divido 30 por 5 !

$$6 \times 5 = 30 \quad \text{e} \quad 30 : 5 = 6$$

Na divisão $30 : 5 = 6$ temos o **dividendo** (D), o **divisor** (d) , o **quociente** (q) e o **resto** (r):

$$\begin{array}{rcl} \text{D} \leftarrow 30 & \begin{array}{l} \text{---} 5 \text{---} \rightarrow d \\ \text{---} 6 \text{---} \rightarrow q \end{array} \\ \text{0} & & \\ \downarrow & & \\ \text{Resto} & & \end{array}$$

A divisão anterior é uma **divisão exata**. Isto quer dizer que a divisão tem resto zero.

Será a divisão $12 : 7$ exata?

Fazendo a divisão:

$$\begin{array}{r} 12 \quad \begin{array}{l} \text{---} 7 \text{---} \\ 5 \quad 1 \end{array} \end{array} \quad 12 \text{ é o dividendo, } 7 \text{ o divisor, } 1 \text{ o quociente e } 5 \text{ o resto.}$$

Ou seja, o resto não é zero logo a divisão de 12 por 7 não é uma divisão exata.

Repara que o resto é sempre menor que o divisor.

* Chamamos **divisão inteira** à divisão onde o dividendo, divisor, quociente e resto são números inteiros.

Verificámos que $12 = 7 \times 1 + 5$, o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente mais o resto.

Ou seja **$D = d \times q + r$** . Esta é a **propriedade fundamental da divisão inteira**.

A divisão exata é um caso particular da divisão inteira.

Pois se o resto é zero então vem $D = d \times q$.

* Um **divisor de um número natural** é um número natural que divide esse número num número exato de vezes, isto é, a sua divisão tem resto zero.

exemplos

1) 2 é divisor de 24, pois 2 divide 24 com resto zero (e quociente 12) ou seja $24 : 2 = 12$.

Também se pode dizer: 24 é **divisível** por 2

2) 2 não é divisor de 21, pois na divisão de 21 por 2 obtemos resto 1 (e quociente 10) ou seja $21 = 2 \times 10 + 1$.

Também se pode dizer: 21 **não é divisível** por 2

3) Será que 18 e 7 são divisores de 450 ?

Usando uma calculadora obtemos $450 : 18 = 25$.

Logo 18 é divisor de 450.

Para o número 7 temos que $450 : 7 = 64,285...$. Logo 7 não é divisor de 450.

Repara: A calculadora é muito útil quando precisamos de confirmar se um número é divisor de outro. Basta fazer a divisão e verificar se o resultado possui casas decimais.

* O conjunto dos divisores de um número é um conjunto finito. O divisor mais pequeno é o 1 (pois 1 divide todos os números) e o maior é o próprio número (qualquer número é divisor de si próprio).

exemplo

Vamos encontrar todos os divisores de 18.

Já sabemos que 1 e 18 são divisores de 18, pois $18 : 1 = 18$ e $18 : 18 = 1$.

Efectuando as divisões de 18 pelos números naturais encontramos:

:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	18	9	6	4,5	3,6	3	2,5...	2,25	2

:	10	11	12	13	14	15	16	17	18
18	1,8	1,6...	1,5	1,3...	1,2...	1,2	1,125	1,0...	1

Nas tabelas estão assinalados a azul os números cujas divisões deram um resultado inteiro.

Assim o conjunto dos divisores de 18 é $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

* O **máximo divisor comum (m.d.c.)** entre dois números é o maior dos divisores que é comum a esses números.

exemplos

1) O $m.d.c.(12, 20) = 4$

Pois $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ e $D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

2 e 4 são os divisores comuns a 12 e 20. O maior divisor comum é então o 4.

2) O m.d.c.(6, 24) = 6 pois 6 é divisor de 24 (verifica-se que $24 : 6 = 4$).

No caso em que um dos números é divisor do outro está encontrado o máximo divisor comum!

* Obtemos um **múltiplo de um número natural** quando se multiplica esse número pelos números 0, 1, 2, 3,

exemplos

1) Os múltiplos de 6 são 0, 6, 12, 18 ... pois são os resultados das multiplicações:

$$6 \times 0, 6 \times 1, 6 \times 2, 6 \times 3, \dots$$

2) Os múltiplos de 11 são: $11 \times 0, 11 \times 1, 11 \times 2, 11 \times 3, 11 \times 4 \dots$, ou seja

$$0, 11, 22, 33, 44 \dots$$

* Os múltiplos de um número são infinitos e por isso o conjunto dos múltiplos de um número é um conjunto infinito. Este conjunto contém sempre o próprio número, pois um número é sempre múltiplo de si próprio e o múltiplo mais pequeno é o zero, pois o zero é múltiplo de qualquer número.

exemplos

1) O conjunto dos múltiplos de 5 é $M_5 = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$.

Repara que contém o 0 e o próprio 5.

Existe o maior múltiplo de 5? Não, podemos sempre continuar a multiplicar pelo número natural seguinte.

2) A sequência 0, 10, 20, 30, 40, 50, ... é a dos múltiplos de 10.

* Não esquecer que os divisores e os múltiplos estão relacionados.

exemplos

1) Se **4 é divisor de 28** então **28 é múltiplo de 4** e vice-versa.

Ou seja $28 : 4 = 7 \rightarrow 4$ é divisor de 28

Então $28 = 4 \times 7 \rightarrow 28$ é múltiplo de 4



2) Se **120 é múltiplo de 10** então podemos dizer que:

10 é **divisor de** 120 ou então 120 é **divisível por** 10

Repara: Um divisor de um número é também divisor dos múltiplos desse número!

Um múltiplo de um número é também múltiplo dos seus divisores!



* Na nossa linguagem corrente fazemos referencia a múltiplos e a divisores. Observa:

O **dobro de** 125 $\rightarrow$ representa o número 2×125 (250) $\rightarrow$ é um múltiplo de 125

O **triplo de** 5 $\rightarrow$ representa o número 3×5 (15) $\rightarrow$ é um múltiplo de 5

O **quádruplo de** 22 $\rightarrow$ representa o número 4×22 (88) $\rightarrow$ é um múltiplo de 22

O **quíntuplo de** 17 $\rightarrow$ representa o número 5×17 (85) $\rightarrow$ é um múltiplo de 17

Metade de 250 --> representa o número $250 : 2$ (125) --> é um divisor de 250

A terça parte de 15 --> representa o número $15 : 3$ (5) --> é um divisor de 15

A quarta parte de 88 --> representa o número $88 : 4$ (22) --> é um divisor de 88

A quinta parte de 85 --> representa o número $85 : 5$ (17) --> é um divisor de 85

Claro que como múltiplos e divisores se relacionam então podemos escrever:

125 é a metade de 250 então 250 é o dobro de 125 ;

15 é o triplo de 5 então 5 é a terça parte de 15 ;

22 é a quarta parte de 88 então 88 é o quádruplo de 22 ;

85 é o quádruplo de 17 então 17 é a quinta parte de 85 .

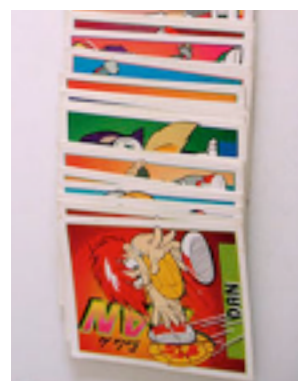
exemplo

Os cromos do Guilherme foram distribuídos três a três por um certo número de amigos. Sabemos que eram menos de 21 e mais de o dobro de 8 . Quantos amigos eram?

Como o dobro de 8 é 16 (2×8) então o número de amigos é maior que 16 e menor que 21 .

Os cromos foram distribuídos 3 a 3 ou seja um múltiplo de 3: então o número que procuramos é um múltiplo de 3 entre 16 e 21 .

Logo o número de amigos é 18 pois $18 = 3 \times 6$.



Fotografia de Boja no Flickr

* O **mínimo múltiplo comum (m.m.c.)** entre dois números é o menor dos múltiplos (diferente de zero) que é comum a esses números.

exemplo

O m.m.c.(12, 20) = 60

Pois $M_{12} = \{0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, \dots\}$ e $M_{20} = \{0, 20, 40, 60, 80, \dots\}$.

EXERCÍCIO 1

1) Escreve um número que seja múltiplo de 7. Escreve outro que seja ao mesmo tempo múltiplo de 3 e de 7.

2) Completa as sequências seguintes e diz qual a regra para cada sequência:

..., ..., 36, 42, 48, ..., 60, 66

40, ..., ..., 100, ..., ..., 160, 180

3) Descobre se 458 é múltiplo de 8. E de 2?

EXERCÍCIO 2

1) Indica um divisor de 8 que não seja múltiplo de 2.

2) Escreve o maior e o menor divisor de 1202.

3) O número 23 é divisor de 21. Verdadeiro ou falso?

4) Alguns múltiplos de 3 são divisores de 3. Verdadeiro ou falso?

5) Completa as frases:

- a) 26 é _____ de 156.
- b) 45 é _____ por 9.
- c) 45 é _____ de 5.
- d) 1 é sempre _____ de um qualquer número.



6) Se 4 é divisor de 32 então 4 é divisor de 64?

NÚMEROS PRIMOS E COMPOSTOS

* Sabemos que dado um número natural este é sempre divisível por si próprio e pela unidade. Podem no entanto existir mais divisores.

Chamamos **número primo** a um **número natural maior que um** cujos únicos divisores são ele próprio e a unidade.

Representemos o conjunto dos números primos por ordem crescente:

$$\{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots \}$$

Este é um conjunto infinito onde o número 2 é o único número par presente.

exemplos

1) O número 5 é um número primo pois os seus únicos divisores são exactamente o 1 e o 5.

2) O número 15 não é primo, pois é divisível por 1, 3, 5 e 15. Ou seja existem mais divisores para além do 15 e do 1.

* Se um número natural maior que 1 não é primo então diz-se que é um **número composto**. Isto quer dizer que tem mais de dois divisores.

exemplo

O número 30 é composto pois $30 = 3 \times 10$ logo podemos dizer que 1, 3, 10 e 30 são alguns dos divisores de 30 (mais de dois divisores).

Resumindo: Todo o número natural maior que um ou é primo ou é composto.

Sendo um número composto então este pode ser escrito como um produto de vários números ou fatores (que são seus divisores).

exemplos

1) Vamos escrever 30 como um produto de fatores:

Temos várias hipóteses:

$$30 = 1 \times 30 = 3 \times 10 = 3 \times 2 \times 5 = 6 \times 5 = 15 \times 2$$

Ao escrever todas as hipóteses descobrimos todos os divisores de 30 :

1 , 2 , 3 , 5 , 6 , 10 , 15 e 30

2) Descobre todos os números compostos inferiores a 12 que têm 2 como divisor.

Procuramos então todos os pares entre 2 e 12 .

R: 4 , 6 , 8 e 10 .

3) Para arrumar 12 latas de ervilhas como o poderia fazer?

Como $12 = 3 \times 4 = 4 \times 3$ --> poderíamos arrumar 3 latas em 4 filas ou 4 latas em 3 filas



$12 = 2 \times 6 = 6 \times 2$ --> poderíamos arrumar 2 latas em 6 filas ou 6 latas em 2 filas



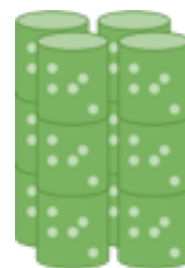
$12 = 1 \times 12$ --> seria alinhar as 12 latas numa fila única



Escrevemos até aqui o número 12 sempre como um produto de dois factores.

E com três factores?

$12 = 2 \times 2 \times 3$ --> seria por exemplo uma pilha de 3 latas de altura e com 4 latas em quadrado (2×2) como base



Mas existe outra hipótese, não é? Faz tu o desenho da outra pilha! 😊

DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS: M.M.C. E M.D.C.

* Já sabemos que um número pode ser decomposto em vários fatores (os seus divisores) mas mais importante, um número pode ser sempre decomposto num produto de fatores primos.

Este produto chama-se **decomposição em fatores primos** e é único!

Para decompor um número num produto de fatores primos podemos usar os processos seguintes:

Decomposição em árvore

Consideremos o número 120 . Escrevemos 120 como um produto possível, neste caso 12×10 (mas podia ser 4×30 ou outro qualquer). Como 12 e 10 são números compostos escrevemos estes números também como produto de dois números e continuamos este processo de fatorização até só restarem números primos.	<pre> graph TD A["120 = 12 x 10"] --> B["6 x 2"] A --> C["5 x 2"] B --> D["3 x 2"] </pre>	A decomposição em factores primos fica: $120 = 3 \times 2 \times 2 \times 5 \times 2$ Organizando os factores por ordem crescente: $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$
---	--	--

Também podíamos iniciar a árvore logo com um produto onde um dos fatores fosse um número primo:

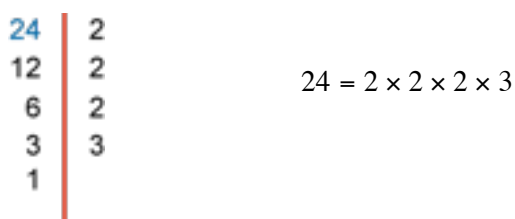


Decomposição sequencial

Consideremos o número 36 . Iniciamos a divisão pelo menor número primo que é divisor de 36 e continua-se a divisão usando sempre o menor número primo possível até o quociente ser 1.	$\begin{array}{r l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$	A decomposição em fatores primos resulta em: $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
---	--	---

exemplos

1) Decompor o número 24 em fatores primos:

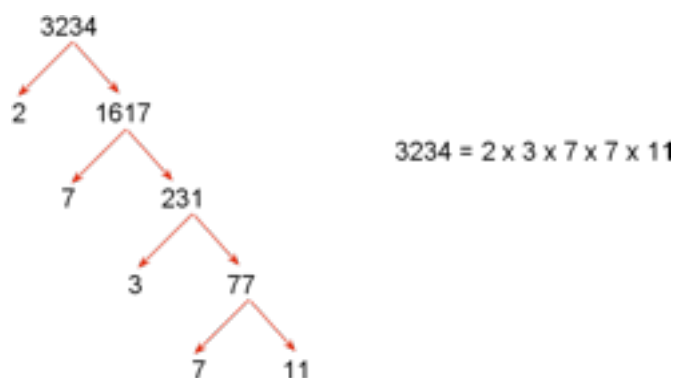


2) Das seguintes decomposições só a última é uma decomposição em fatores primos:

$$2 \times 2 \times 5 \times 12 \quad 3 \times 9 \times 11 \quad 7 \times 11 \times 13$$

A 1.ª tem o número 12 que não é primo e na 2.ª temos o número 9 que é divisível por 3 logo também não é primo;

3) Decompor em árvore o número 3234 e escrever os fatores por ordem crescente:



* Para se determinar o **mínimo múltiplo comum** e o **máximo divisor comum** de dois números a decomposição em fatores primos é muito útil.

Considera os números 18 e 30. A sua decomposição em fatores primos é:

$$18 = 2 \times 3 \times 3 \quad \text{e} \quad 30 = 2 \times 3 \times 5$$

- Para encontrar o **m.m.c.(18, 30)** basta observar os fatores primos que são comuns a ambos e os que não são.

Repara que:

para se obter um múltiplo de 18 precisamos de ter pelo menos os fatores **2**, **3**, **3**

para se obter um múltiplo de 30 precisamos de ter pelo menos os fatores **2**, **3**, **5**

Existem dois factores em comum, o **2** e o **3** e dois factores não comuns, o **3** e o **5**.

Assim para se ter o **m.m.c.(18, 30)** basta construir o número com os fatores que são comuns e com os que não são comuns, ou seja: **2** x **3** x **3** x **5**



$$\text{m.m.c.}(18, 30) = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$$

- Para encontrar o **m.d.c.(18, 30)** basta observar os fatores primos que têm em comum.

O produto desses fatores, neste caso **2 x 3**, é o **m.d.c.(18, 30)**.

$$\text{Então } \text{m.d.c.}(18, 30) = 6$$

EXERCÍCIO 3

- 1) Calcular o **m.m.c.(20, 24)** e o **m.d.c.(20, 24)**.
- 2) Completa **m.d.c.(15, ...) = 1** e **m.d.c.(9, 10) =**
- 3) Qual o **m.m.c.(5, 20)** ? E o **m.d.c.(5, 20)** ?

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

* Saber rapidamente se um número é divisível por outro sem utilizar uma calculadora é possível utilizando os seguintes critérios:

Um número é divisível por 2 se for par, ou seja se o seu algarismo das unidades for 0, 2, 4, 6 ou 8.

Um número é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos for divisível por 3 (múltiplo de 3).

Um número é divisível por 4 se for duas vezes divisível por 2 ou se os seus dois últimos algarismos forem divisíveis por 4.

Um número é divisível por 5 se for seu múltiplo, ou seja se o seu algarismo das unidades for 0 ou 5.

Um número é divisível por 6 se for divisível por 2 e por 3.

Um número é divisível por 9 se for duas vezes divisível por 3 ou se a soma dos seus algarismos for divisível por 9.

Um número é divisível por 10 se o seu algarismo das unidades for 0 (ou seja é divisível por 2 e por 5).

Um número é divisível por 100 se o seu algarismo das unidades e o das dezenas for 0, ou seja se o número finalizar com 00.

EXERCÍCIO 4

1) Quais dos seguintes números: 123, 26, 1059, 2560 e 4748 têm 2 como seu divisor?

E quais os múltiplos de 4?

2) Indica os números que são:

a) múltiplos de 10 e também de 100.

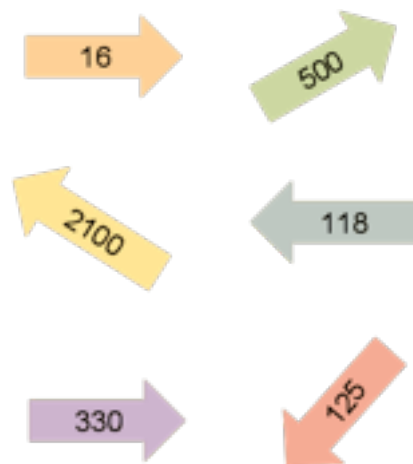
b) divisíveis por 5 e também por 2.

c) divisíveis por 10 mas não por 5.

d) múltiplos de 2 mas não de 100.

e) divisíveis por 3.

f) múltiplos de 4.



POTÊNCIAS DE BASE E EXPOENTE NATURAL

* Durante a decomposição de um número num produto de fatores primos, surgem por vezes vários fatores iguais como $2 \times 2 \times 2$ ou 3×3 . Estes números podem-se escrever de outra forma:

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 \text{ e } 3 \times 3 = 3^2$$

Aos números 2^3 e 3^2 chamamos **potências**.

Uma potência é uma maneira mais simples de representar uma multiplicação de vários fatores iguais.

Por exemplo $5^6 = \underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}_{6 \text{ vezes}}$.

Repara que 5 e 6 são números naturais por isso 5^6 é uma **potência de base e expoente natural**.

Ao número 5 chamamos **base** e ao número 6 **expoente**.

5^6 lê-se **cinco à sexta** e é uma **potência de base 5 e de expoente 6**.

* **Como ler uma potência?**

exemplos

5^1 --> cinco elevado a um;

5^2 --> cinco elevado a dois ou cinco ao quadrado;

5^3 --> cinco elevado a três ou cinco ao cubo;

5^4 --> cinco elevado a quatro ou cinco à quarta

....

5^{10} --> cinco elevado a dez ou cinco à décima

Como podes reparar temos duas leituras especiais, cinco ao quadrado e cinco ao cubo.

Porque será?

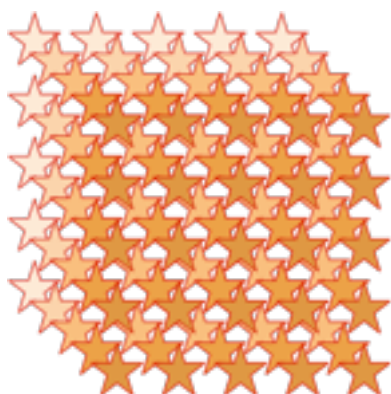
Observa as seguintes figuras:



Aqui temos 5×5 estrelas. São 25 estrelas.

Estão organizadas sob a forma de um quadrado.

Assim $25 = 5^2$ é **cinco ao quadrado** pois podemos dispor 25 elementos organizados num quadrado.



Aqui temos $5 \times 5 \times 5$ estrelas. São 125 estrelas.

Estão dispostos na forma de um cubo.

Assim $125 = 5^3$ é **cinco ao cubo** pois é possível dispor 125 elementos nessa forma cúbica.

O mesmo acontece com outros números ao quadrado ou ao cubo.

* **As potências de base 10** são muito simples, repara:

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$

Então 10^{25} será 1 seguido de quantos zeros? 25 zeros!

Esta notação vem simplificar a escrita de certos números, em especial os muito grandes pois podemos rescrevê-los como um produto com potências de base 10:

exemplos

1) $560\,000\,000 = 56 \times 10\,000\,000 = 56 \times 10^7$

ou $5,6 \times 10^8$

2) $2\,000\,000 = 2 \times 10^6$

3) $400 \times 20 \times 1000 = 8\,000\,000 = 8 \times 10^6$



* Observemos as **regularidades de certas potências**, em especial o seu último algarismo:

Potências de base 2 :

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

O último algarismo ou dígito é sempre 2 , 4 , 8 e 6 por esta ordem, que são os números pares de um só dígito.

Potências de base 3 :

3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	3^{11}
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049	177 147

O último algarismo é sempre 3 , 9 , 7 , 1 por esta ordem. São números ímpares.

Nas **potências de base 4** o último algarismo alterna entre 4 e 6 .

Usa a calculadora fazendo:



Pode bastar uma só vez a tecla 



$$4 \times 4 = 4^2$$



$$4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

Potências de base 5:

5^1	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6	5^7	5^8
5	25	125	625	3125	15 625	78 125	390 625

O último algarismo é sempre 5 e os dois últimos algarismos é sempre 25 .

Experimenta para as potências de base 6 , 7 , 8 e 9 e vê o que acontece!

EXERCÍCIO 5

1) Completa:

- a) $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = \dots\dots\dots$ e $4 = 4^{\dots\dots\dots}$
- b) $9 \times \dots \times 9 = 3^6$
- c) $11^{\dots\dots\dots} = 14\,641$

2) Num gatil quatro gatas tiveram quatro filhotes cada. Todos os filhotes estavam juntos num cestinho. Quantas orelhas se podem contar no cestinho?

Escreve depois esse número como uma potência e indica qual é a base e o expoente.



3) Escreve uma potência com base múltipla de 3 e com expoente o dobro de 2 .

EXERCÍCIO 6

1) Escreve sob a forma de potência:

- a) trinta e quatro milhares
- b) 11 200 000

2) Faz a leitura das seguintes potências. Indica a base, o expoente e o seu valor:

- a) 15^3
- b) 6^4

ADIÇÃO E SUAS PROPRIEDADES

SUBTRAÇÃO

* Já sabes adicionar várias parcelas e calcular o seu resultado: a soma.

exemplo

A Maria foi arrumar todos os seus livros de banda desenhada na estante. Encontrou 26 numa caixa e 102 no roupeiro. Quantos livros arrumou a Maria?

Temos de adicionar as parcelas 26 e 102 .

$$\begin{array}{r} 26 + 102 = 128 \\ + 102 \\ \hline 128 \end{array}$$

O resultado 128 é a soma das duas parcelas.

R: A Maria arrumou na estante 128 livros.



*** Propriedades da adição.**

No exemplo anterior verificámos que a Maria arrumou 128 livros pela adição das parcelas 26 e 102 .

Repara que $26 + 102 = 128$ mas também $102 + 26 = 128$

Ou seja, $26 + 102 = 102 + 26$.

Então trocar a ordem das parcelas não altera o valor final da soma. Dizemos então que a adição é comutativa.

Chama-se **propriedade comutativa da adição**:

$a + b = b + a$ sendo a e b quaisquer números.

* E se a Maria tivesse encontrado mais 9 livros na sala e ainda 1 no quarto do irmão?

Agora é necessário adicionar as parcelas $128 + 9 + 1$ para saber afinal quantos livros de banda desenhada tem a Maria:

O cálculo em geral é feito pela ordem que surge, da esquerda para a direita:

$$128 + 9 + 1 = (128 + 9) + 1 = 137 + 1 = 138$$

A Maria tem afinal 138 livros de banda desenhada.

Repara que teria sido mais prático fazer em primeiro lugar o cálculo $9 + 1$:

$$128 + 9 + 1 = 128 + (9 + 1) = 128 + 10 = 138$$

O resultado final é o mesmo! Ou seja:

$$(128 + 9) + 1 = 128 + (9 + 1)$$

Associar as parcelas de forma diferente não altera o valor da soma. Dizemos então que a adição é associativa.

Chama-se **propriedade associativa da adição**:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ sendo } a, b \text{ e } c \text{ quaisquer números.}$$

* Existe ainda outra propriedade da adição que facilmente já comprovaste.

Repara no resultado das seguintes adições: $12 + 0 = 12$; $0 + 899 = 899$; $500 + 0 + 1 = 500 + 1$

Na adição o número 0 não altera o resultado da soma, ou seja na adição o zero é neutro.

Chama-se **existência de elemento neutro na adição**:

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ sendo } a \text{ qualquer número.}$$

* **Subtração e adição.**

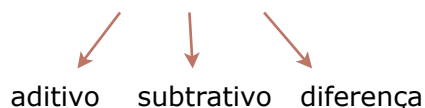
A subtração e a adição são operações inversas. Observa o exemplo seguinte:

Penso no número 26 e adiciono-lhe 4 , a soma dá 30 .

Como obtenho novamente o número 26 ? Subtraio 4 ao 30 !

$$30 - 4 = 26$$

Na subtração $30 - 4 = 26$ temos o aditivo, o subtrativo e a diferença:



$$30 - 4 = 26 \text{ mas } 30 = 26 + 4$$

Observamos que o aditivo é igual à adição do subtrativo com a diferença.

Esta propriedade chama-se **propriedade fundamental da subtração** ou identidade fundamental da subtração.

exemplos

1) O Renato daqui a cinco anos terá 26 anos. Qual a sua idade agora?

$$26 - 5 = 21$$

R: Tem 21 anos.

2) Completa: $300 - \dots = 245$

$$\text{Como } 300 - 245 = 55$$

$$\text{Então } 300 = 245 + 55 \text{ logo } 300 - 55 = 245$$

R: 55

3) Um jardim ficou com 1420 m^2 de relva após ter sido retirado 125 m^2 para renovação. Quantos metros quadrados tem o jardim?

$$1420 + 125 = 1545$$

R: O jardim tem 1545 m^2 de relva.

**EXERCÍCIO 7**

Utiliza as propriedades da adição para resolveres rapidamente os cálculos seguintes:

1) $999 + 12 + 1$

2) $50 + 0 + 127 + 13$

3) $890 + 45 + 5 + 10$

MULTIPLICAÇÃO E SUAS PROPRIEDADES

* Propriedades da multiplicação.

Propriedade comutativa: na multiplicação podemos trocar a ordem dos fatores que o resultado não é alterado.

$$a \times b = b \times a \text{ sendo } a \text{ e } b \text{ quaisquer números.}$$

exemplos

1) Quantos ovos tem a caixa da imagem ao lado?

Podemos contar 3 filas com 4 ovos ou 4 filas com 3 ovos.

Ou seja $3 \times 4 = 4 \times 3 = 12$.

R: 12 ovos.



$$2) 4 \times 172 \times 25 = 4 \times 25 \times 172 = 100 \times 172 = 17\,200$$

A propriedade comutativa foi usada para simplificar o cálculo.

Propriedade associativa: na multiplicação de três ou mais fatores podemos associar quaisquer fatores que o produto não se altera.

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \text{ sendo } a, b \text{ e } c \text{ quaisquer números.}$$

exemplos

$$1) 2 \times 10 \times 4 = (2 \times 10) \times 4 = 20 \times 4 = 80 \quad \text{<--- multiplicando os primeiros dois fatores}$$

ou

$$2 \times 10 \times 4 = 2 \times (10 \times 4) = 2 \times 40 = 80 \quad \text{<--- multiplicando os dois últimos fatores}$$

2) $3 \times 5 \times 10 \times 3 = 15 \times 30 = 450$ <--- multiplicando os dois primeiros e os dois últimos fatores

ou

$3 \times 5 \times 10 \times 3 = 3 \times 50 \times 3 = 150 \times 3 = 450$ <--- multiplicando 1.º os dois fatores do meio

3) $220 \times 35 = (22 \times 10) \times (5 \times 7) = 22 \times 5 \times 10 \times 7 = 110 \times 70 = 7700$

Usando a fatorização, a propriedade comutativa e a propriedade associativa.

Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

Multiplicar um número por uma soma de fatores é o mesmo que multiplicar esse número por cada um dos fatores e fazendo depois a sua soma.

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \text{ sendo } a, b \text{ e } c \text{ quaisquer números.}$$


exemplos

1) Como fazer o cálculo 12×56 decompondo um dos fatores numa soma?

Vamos decompor numa soma o número 56 . Por exemplo $56 = 50 + 6$

Então $12 \times 56 = 12 \times (50 + 6) = 12 \times 50 + 12 \times 6 = 600 + 72 = 672$.

2) Numa caixa com três gavetas a Paula tem em cada uma 10 lápis de cor e 8 canetas. Quantos objetos tem a caixa?

$$3 \times (10 + 8) = 3 \times 10 + 3 \times 8 = 30 + 24 = 54$$

R: A caixa tem 54 objetos.

Propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração:

Multiplicar um número por uma diferença de fatores é o mesmo que multiplicar esse número por cada um dos fatores e fazendo depois a sua diferença.

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c \text{ sendo } a, b \text{ e } c \text{ quaisquer números.}$$

exemplos

1) Como fazer o cálculo 20×63 decompondo um dos fatores numa diferença?

Vamos decompor numa diferença o número 62. Por exemplo $62 = 70 - 8$

$$\text{Então } 20 \times 62 = 20 \times (70 - 8) = 20 \times 70 - 20 \times 8 = 1400 - 160 = 1240 .$$

2) Num forno de pasteleiro existem duas prateleiras. Cada uma pode levar até 12 pizzas. Encontram-se 3 pizzas em cada prateleira. Quantas pizzas ainda se podem colocar no forno?

$$2 \times (12 - 3) = 2 \times 12 - 2 \times 3 = 24 - 6 = 18$$

$$\text{ou } 2 \times (12 - 3) = 2 \times 9 = 18$$

R: Podem-se colocar 18 pizzas.



Fotografia de Bala no Flickr

TEMA

2

Sólidos Geométricos

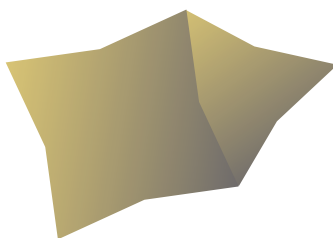


POLIEDROS E NÃO POLIEDROS POLÍGONOS

* O que é um sólido geométrico? Na verdade encontra-mo-los todos os dias. Por exemplo nos edifícios, nas latas de salsichas, nas caixas de sapatos e nas bolas de futebol.

Um sólido geométrico é um corpo sólido limitado por superfícies planas ou por superfícies curvas ou ainda por superfícies planas e curvas.

exemplos

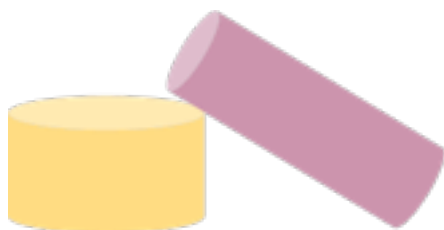


* Chamamos **poliedros** aos sólidos limitados só por superfícies planas.

exemplos



Dos sólidos que **não são poliedros** temos em particular:



Cilindros

Têm duas bases e uma superfície lateral curva



Esferas

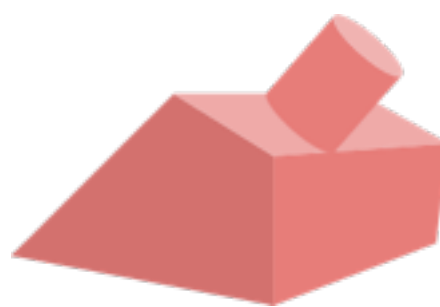
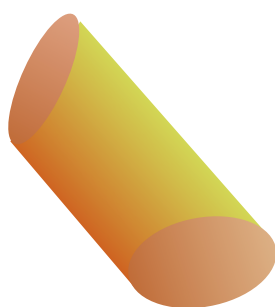
Têm uma única superfície curva



Cones

Têm uma base, um vértice e uma superfície lateral curva

Entre outros sem denominação especial:



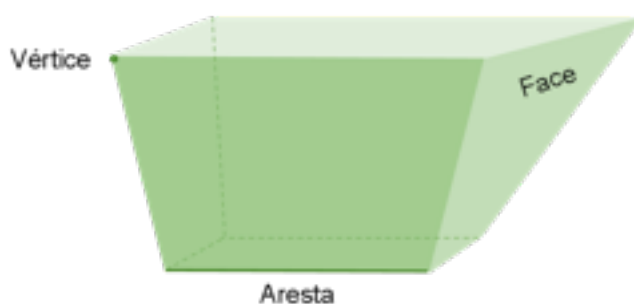
* Dado um poliedro, ele é constituído pelas suas faces, pelas suas arestas e pelos seus vértices.

Chamamos **elementos de um poliedro** às suas faces, arestas e vértices.

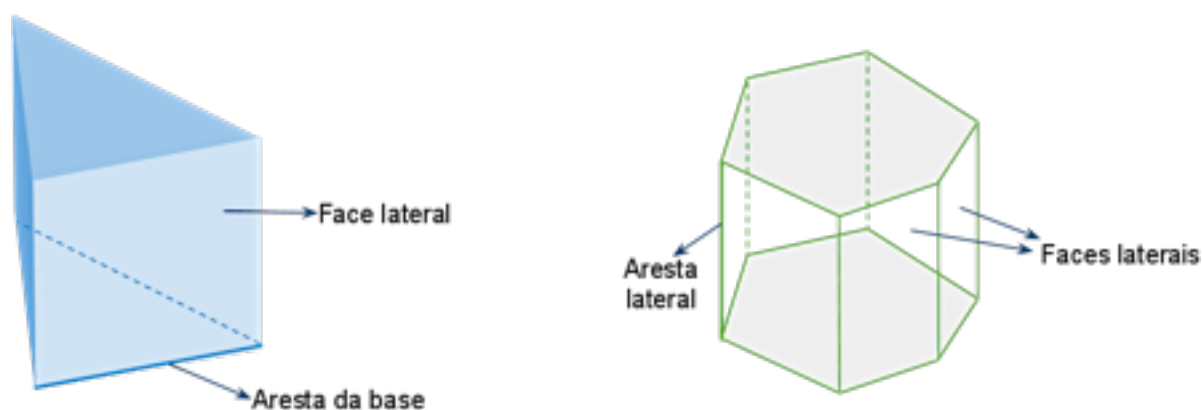
exemplo

Este poliedro é constituído por:

6 faces
12 arestas
8 vértices



Podemos ser mais específicos e falar em **arestas da base** ou **aresta lateral** bem como em **face lateral**:



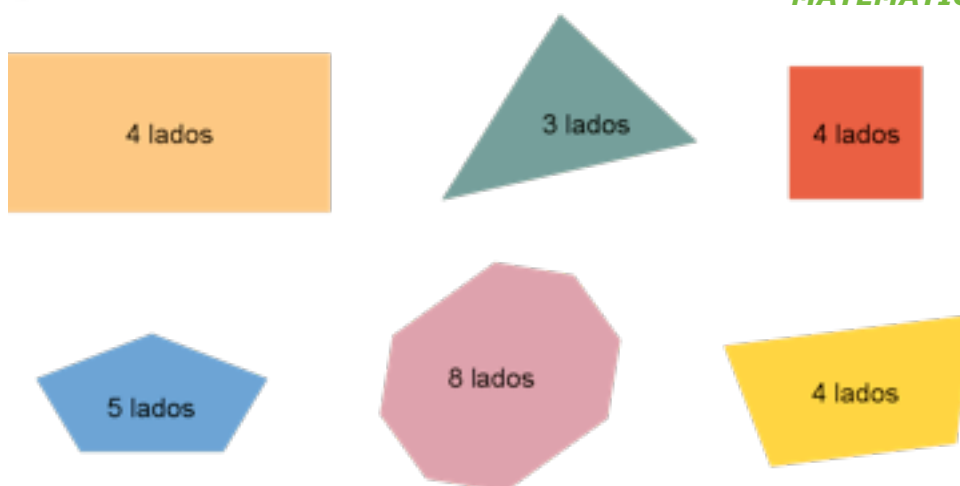
* Ao observarmos os poliedros verificamos que são constituídos por faces planas, arestas e vértices.

As faces de um poliedro são sempre **polígonos**.



Um polígono é uma figura plana limitada por três ou mais lados.

Que tipo de polígonos surgem como faces nos poliedros? Temos triângulos, retângulos e quadrados entre outros.



Vamos ver como se classificam os polígonos em relação aos lados (até aos 12 lados):

N.º de lados	Nome do polígono	Polígono
3	Triângulo	
4	Quadrilátero	
5	Pentágono	
6	Hexágono	
7	Heptágono	
8	Octógono	
9	Eneágono	
10	Decágono	
11	Hendecágono	
12	Dodecágono	

Um quadrado e um retângulo são então quadriláteros pois têm quatro lados.

Um paralelogramo



e um losango



também são

quadriláteros.

Uma curiosidade: um polígono com 1000 lados chama-se Quilógono!

* Dentro dos **sólidos poliedros** temos dois grupos bem conhecidos: **Os prismas e as pirâmides**.

exemplos de prismas:



Os prismas têm sempre duas bases iguais e paralelas e as suas faces laterais são polígonos de quatro lados, ou seja, quadriláteros.

exemplos de pirâmides:



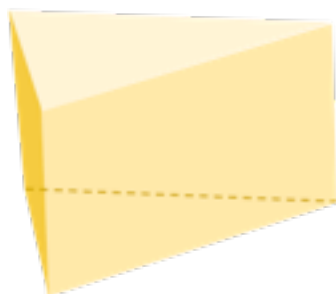
As pirâmides tem sempre uma base, um vértice em particular chamado vértice da pirâmide e as suas faces laterais são triângulos.

Claro que as bases dos prismas e das pirâmides também são polígonos.

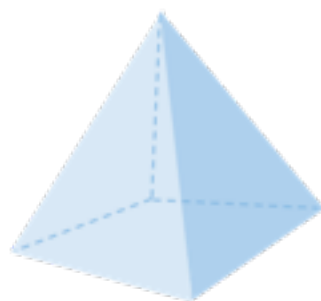
* Classificamos os prismas e as pirâmides consoante o polígono da sua base.

Se o polígono da base for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono ou um heptágono então temos respectivamente um prisma ou pirâmide triangular, quadrangular, pentagonal ou heptagonal.

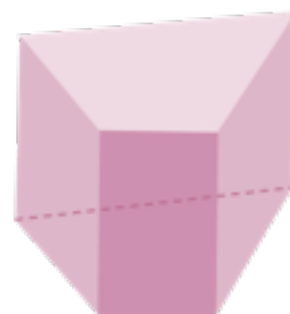
exemplos



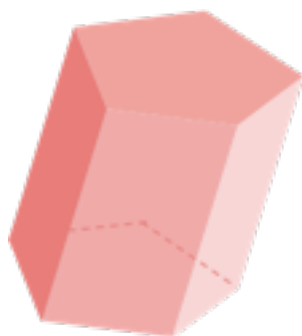
Prisma triangular



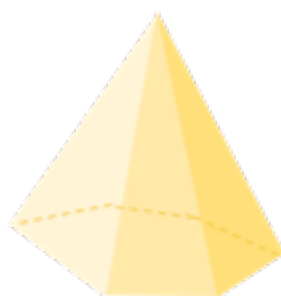
Pirâmide quadrangular



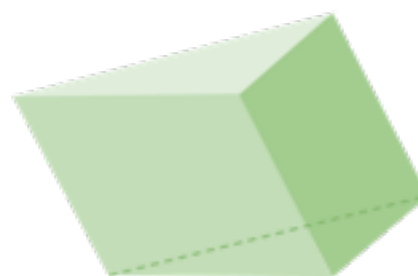
Prisma quadrangular



Prisma pentagonal



Pirâmide hexagonal



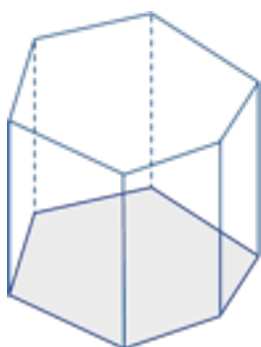
Prisma triangular

Claro que o cubo e o paralelepípedo são também prismas quadrangulares!!

* Nos prismas e nas pirâmides podemos determinar rapidamente o seu número de vértices, de arestas e de faces conhecendo apenas o seu polígono da base.

Basta fazer um desenho rápido de um qualquer prisma e descobres facilmente estas relações!!

exemplo para um prisma:



Neste prisma o polígono da base tem seis arestas, é um hexágono.

Observa então que:

nº de vértices do prisma = 2 x nº de vértices do polígono da base

$$12 = 2 \times 6$$

nº de arestas do prisma = 3 x nº de arestas do polígono da base

$$18 = 3 \times 6$$

nº de faces do prisma = nº de arestas do polígono da base + 2

$$8 = 6 + 2$$

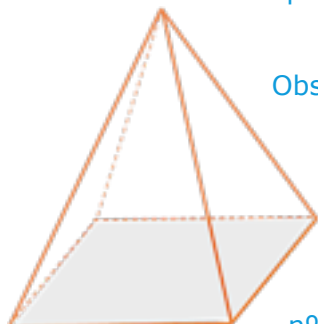
Experimenta com o cubo que também é um prisma e confirma as relações anteriores!



exemplo para uma pirâmide:

Nesta pirâmide o polígono da base tem quatro arestas, é um quadrilátero.

Observa então que:



n° de vértices da pirâmide = n° de vértices do polígono da base + 1

$$5 = 4 + 1$$

n° de arestas da pirâmide = $2 \times n^{\circ}$ de arestas do polígono da base

$$8 = 2 \times 4$$

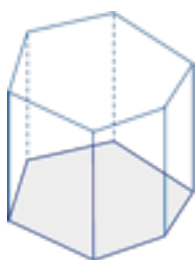
n° de faces da pirâmide = n° de arestas do polígono da base + 1

$$5 = 4 + 1$$

* Verifica-se uma relação interessante entre os elementos de um poliedro.

Contabilizando o número de faces, de arestas e de vértices podemos verificar que **a soma do número de faces com o número de vértices é igual ao número de arestas mais dois!**

Vamos confirmar nos sólidos anteriores:



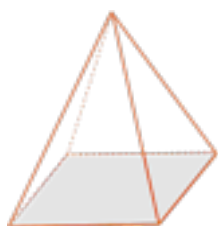
$$V = n^{\circ} \text{ de vértices} = 12$$

$$A = n^{\circ} \text{ de arestas} = 18$$

$$F = n^{\circ} \text{ de faces} = 8$$

$$\text{Será que } 8 + 12 = 18 + 2 ?$$

$$20 = 20 \text{ Verdadeiro!!}$$



$$V = n^{\circ} \text{ de vértices} = 5$$

$$A = n^{\circ} \text{ de arestas} = 8$$

$$F = n^{\circ} \text{ de faces} = 5$$

$$\text{Então } 5 + 5 = 10 \text{ e } 8 + 2 = 10$$

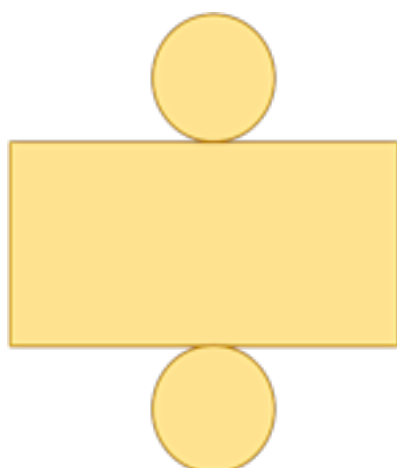
É verdade!

A esta relação entre V , A e F de um poliedro chama-se **Relação de Euler**: $F + V = A + 2$

PLANIFICAÇÃO DE UM SÓLIDO E SUAS REPRESENTAÇÕES NO PLANO

* A planificação de um sólido na verdade é a planificação da superfície desse sólido. É um objecto plano que se pode dobrar e montar de modo a obter esse sólido.

exemplo₁



Uma planificação do cilindro

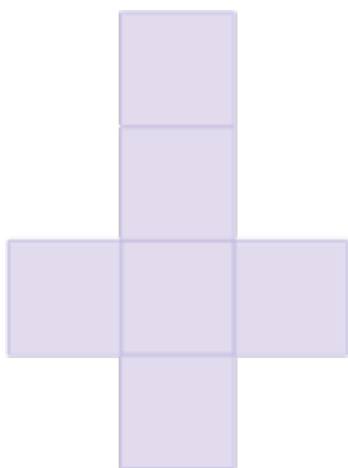


Dobragem e colagem



Modelo do cilindro

exemplo₂



Uma planificação do cubo

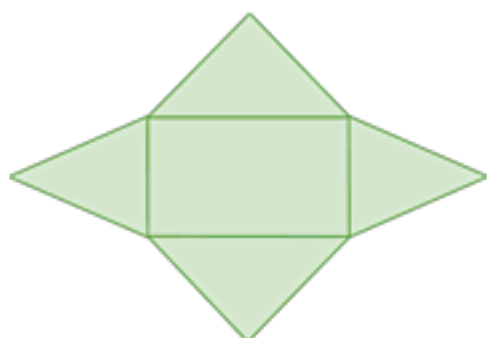


Dobragem



Modelo do cubo

exemplo₃



Planificação de uma
pirâmide quadrangular



Dobragem

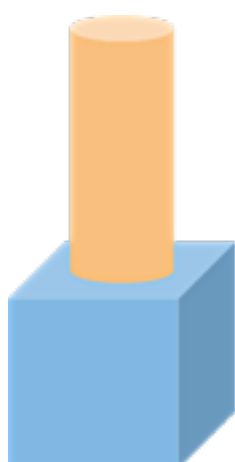


Modelo da pirâmide

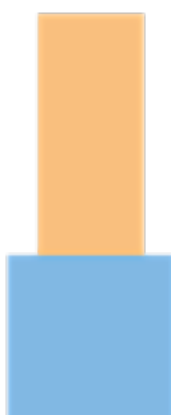
* A representação de um sólido no plano pode ser feita de diversas maneiras. Em perspetiva ou através de várias vistas: vista de frente, vista lateral esquerda e direita e vista de topo.

exemplos

Imagina um sólido constituído por um cubo e em cima ao centro um cilindro:



Perspetiva



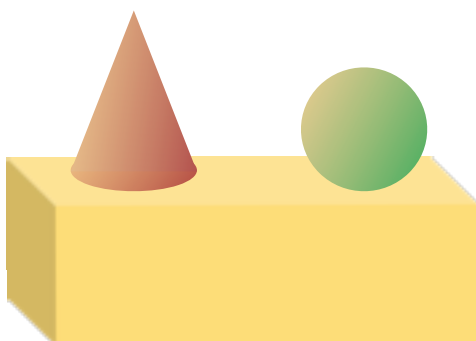
Vista lateral esquerda
e direita

Vista de frente ou
vista frontal

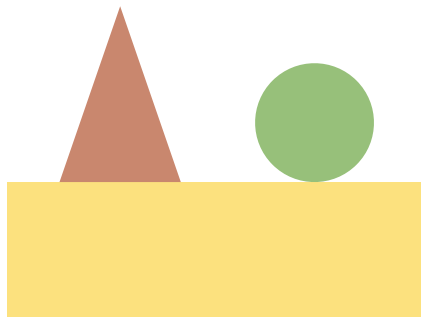


Vista de topo (de cima)
ou planta

Imagina um sólido constituído por um paralelepípedo e em cima centrados um cone e uma esfera com o mesmo diâmetro:



Perspectiva



Vista frontal



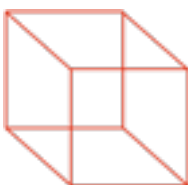
Planta

Desafio: desenha aproximadamente o que será a vista lateral esquerda e direita!!

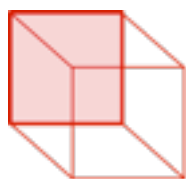


* A representação em perspectiva de um sólido pode ter várias vistas possíveis.

Observa este desenho de um cubo em perspectiva no plano:



Podemos imaginar duas situações: Pintando a face que se encontra mais perto de nós, o cubo no desenho A surge como se observássemos por baixo e no desenho B surge como se o observássemos por cima.



A



B

TEMA

3

Figuras no Plano



RETAS, SEMIRRETAS E SEGMENTOS DE RETA

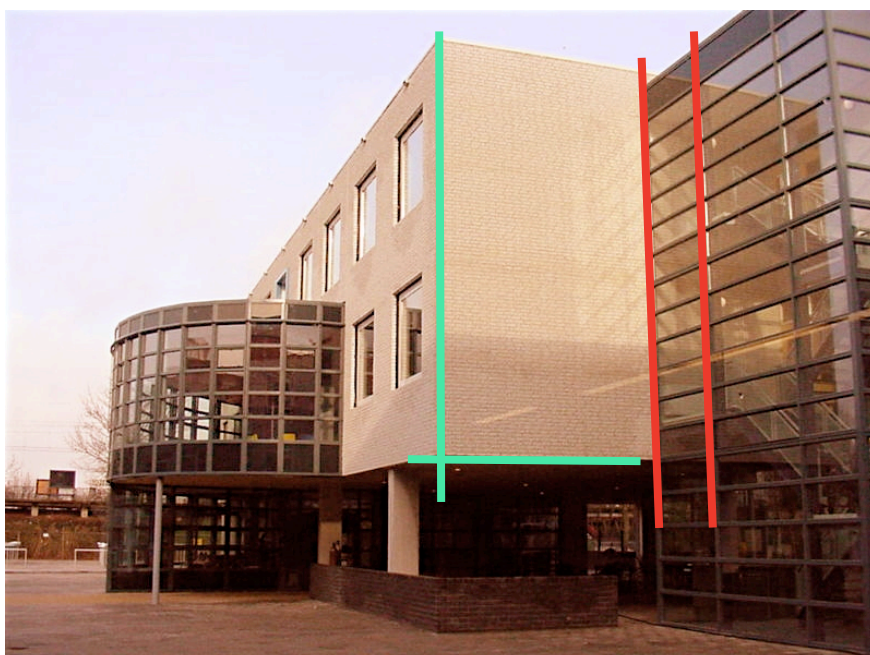
* No dia-a-dia encontramos muitos exemplos de **retas**, na verdade encontramos apenas **segmentos de reta** já que por definição estas são infinitas.

Observa o seguinte edifício:



De certeza que podes assinalar algumas retas paralelas. E retas concorrentes?

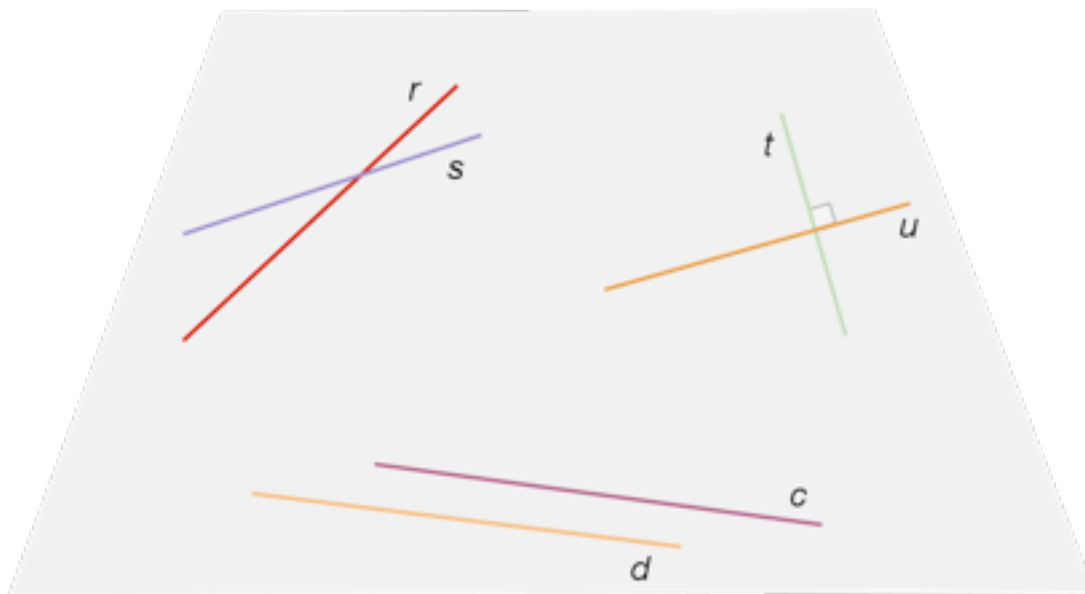
Vamos indicar na imagem algumas dessas retas:



As retas a vermelho não possuem qualquer ponto em comum por isso dizem-se retas paralelas.

As retas a verde possuem um único ponto em comum por isso dizem-se retas concorrentes

Num plano duas retas podem tomar uma das seguintes posições:



Serem **retas concorrentes e perpendiculares** como as retas t e u .

Estas têm um único ponto comum e fazem um ângulo reto entre elas. Escreve-se $t \perp u$ ou $u \perp t$.

Serem **retas concorrentes e oblíquas** como as retas r e s .

Estas têm um único ponto em comum mas não fazem um ângulo reto entre elas.

Podes encontrar a simbologia $r \perp s$.

Serem **retas paralelas** como as retas c e d .

Estas retas não têm um único ponto em comum, nunca se cruzam. Escreve-se $c \parallel d$.

Consegues encontrar na imagem seguinte duas retas paralelas? 😊



Museu Guggenheim em Bilbao

* Matematicamente o modo como representamos uma reta, uma semirrecta ou um segmento de reta é muito importante pois permite distinguir cada uma delas.

Uma **reta** pode ser designada por dois pontos que lhe pertençam ou podemos usar uma letra minúscula.

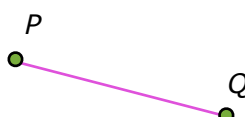
(as letras maiúsculas são usadas para representar pontos)

Reta EF ou reta t :



Um **segmento de reta** é parte de uma reta situada entre dois pontos. Pode ser designado por esses pontos extremos entre parênteses retos.

$[PQ]$ ou segmento PQ :

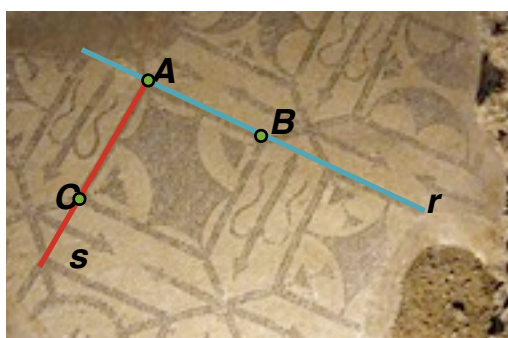


Uma **semirreta** é parte de uma reta. É definida por um ponto inicial e por todos os que se seguem numa certa direção. Para a representar precisamos sempre do ponto inicial e de outro qualquer que lhe pertença.

$\overrightarrow{BC}$ ou semirreta BC :



exemplo



No mosaico acima está representada uma reta azul. Podemos dizer reta r , reta AB ou reta BA .

Na reta r também temos representado um segmento de reta definido pelos seus pontos A e B : $[AB]$, $[BA]$, segmento AB ou segmento BA .

Na reta vermelha s também temos representados dois pontos logo podemos dizer reta AC .

Com os pontos A e C temos o segmento de reta AC ou o segmento CA (é igual), isto é $[CA]$ ou $[AC]$.

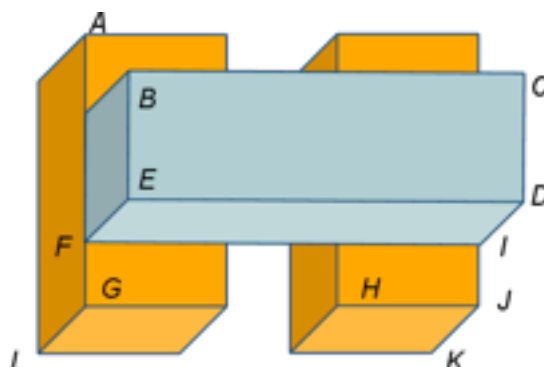
Temos várias semirretas representadas. Por exemplo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{BA}$ ou ainda (embora não representadas) a semirreta BC ou a semirreta CB .

* Outra designação importante é o **comprimento de um segmento**. Dado um segmento de reta AC , escrevemos $\overline{AC}$ para representar o seu comprimento. O traço por cima serve para lembrar que é uma medida. Por exemplo $\overline{AC} = 2,8 \text{ cm}$.

EXERCÍCIO 1

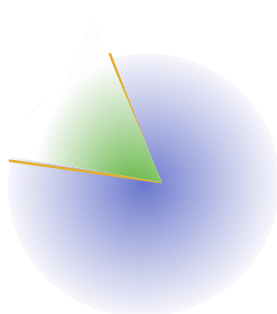
No desenho estão representados três paralelepípedos onde dois deles são iguais. Indica se é verdadeiro ou falso.

- a) BC e DE são retas paralelas.
- b) $\overline{GL} = \overline{JK}$.
- c) $\overline{FA}$ pertence à reta AG .
- d) BD e EB são retas perpendiculares.
- e) As retas GH e KJ não se intersectam.
- f) O segmento GL intersecta a reta HJ .

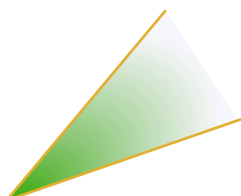


ÂNGULO E AMPLITUDE DE ÂNGULO

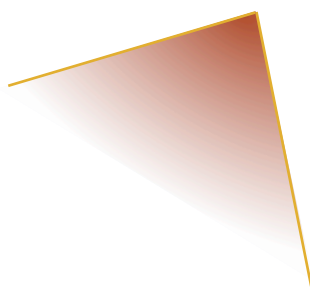
* Um **ângulo** é uma região do plano compreendida entre duas semirretas com a mesma origem. Existem sempre duas regiões possíveis: a uma chama-se **ângulo côncavo** e à outra **ângulo convexo**.



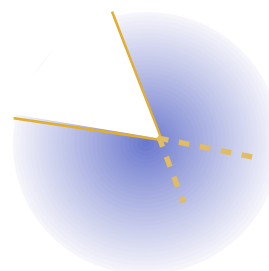
O ângulo côncavo é aquele que é intersectado pelo prolongamento dos seus lados.



Ângulo convexo



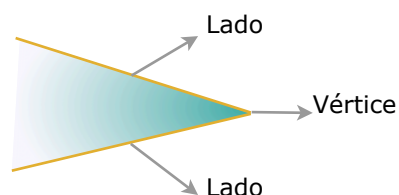
Ângulo convexo



Ângulo côncavo

* Quais os **elementos de um ângulo**?

- O seu vértice, ou seja a origem das semirretas;
- Os seus dois lados definidos pelas semirretas.

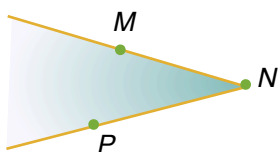


Um ângulo é então o conjunto de pontos constituído pelo seu vértice, pelo seus lados e por todos os pontos entre os seus lados.

* Como se **representa matematicamente um ângulo**?

Precisamos de três pontos para definir um ângulo: o seu vértice e um ponto pertencente a cada semirreta, diferente do vértice.

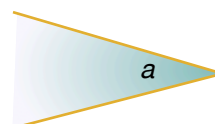
exemplo



Ao ângulo representado chamamos ângulo MNP ou ângulo PNM ou ainda $\angle MNP$ ou $\angle PNM$.

Esse ângulo tem vértice N e os seus lados são as semirretas NP e NM .

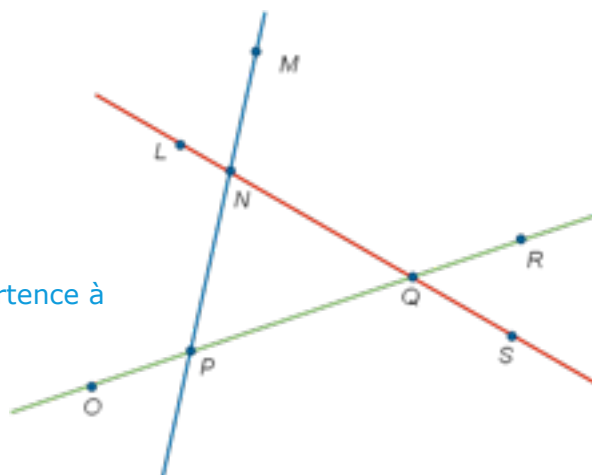
Também podemos usar simplesmente uma letra minúscula. Temos representado de seguida o ângulo a .



exemplo

Observando a figura indica:

- Dois ângulos com o mesmo vértice;
- Um ângulo com lado NP .
- Um ângulo com vértice P .
- Dois ângulos onde um dos seus lados pertence à reta OR .



- a) $\angle LNM$ e $\angle MNS$
- b) Ângulo PNQ
- c) $\angle OPM$
- d) Ângulo MPQ e ângulo RQS

Procura outras respostas diferentes 😊

* Cada ângulo tem uma abertura. A essa abertura chamamos **amplitude do ângulo**. A amplitude de um ângulo pode ser medida em várias unidades. A mais conhecida é o **grau** ($^\circ$). Com a ajuda de um transferidor pode-se medir a amplitude de um ângulo situado entre os 0° e os 180° . A **medida da amplitude de um ângulo** é por isso um valor numérico.

A **medida da amplitude de um ângulo** também tem uma representação. Por exemplo medida da amplitude do ângulo PRQ escreve-se $\widehat{PQR}$ (embora também possas encontrar $\angle PQR$). A medida da amplitude de um ângulo a representa-se por $\hat{a}$ ou $\angle a$.

Facilitamos a linguagem ao dizer amplitude do ângulo em vez de medida de amplitude do ângulo, uma vez que ângulos com a mesma amplitude têm a mesma medida de amplitude.

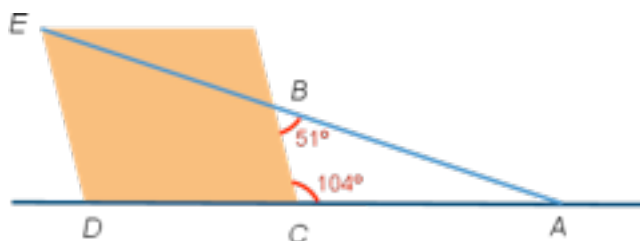
exemplo

No desenho seguinte temos dois ângulos com a sua amplitude indicada.

Podemos escrever:

$$\widehat{BCA} = 104^\circ \text{ ou } \widehat{ACB} = 104^\circ$$

$$\widehat{ABC} = 51^\circ \text{ ou } \widehat{CBA} = 51^\circ$$



* Consoante a amplitude de um ângulo este pode ser classificado do seguinte modo:

Ângulo com amplitude inferior a 90° mas maior que 0°. Chama-se ângulo agudo.	Ângulo de amplitude igual a 90°. Chama-se ângulo reto.	Ângulo com amplitude entre 90° e 180°. Chama-se ângulo obtuso.	Ângulo de amplitude igual a 180°. Chama-se ângulo raso.

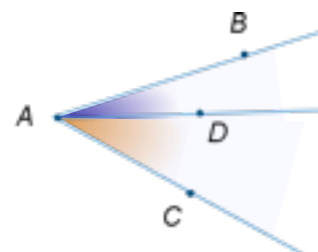
* Dois ângulos a e b dizem-se **geometricamente iguais** ou **congruentes** quando se podem sobrepor ponto por ponto. Escreve-se $a \equiv b$. Claro que se são congruentes as suas amplitudes são iguais, logo também temos $\hat{a} = \hat{b}$.

* Dois ângulos dizem-se **adjacentes** se tiverem o mesmo vértice, um lado comum e que nenhum deles esteja contido no outro.

exemplo

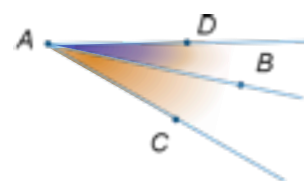
Os ângulos BAD e DAC são ângulos adjacentes.

Têm o mesmo vértice A e o lado comum é a semirreta AD .



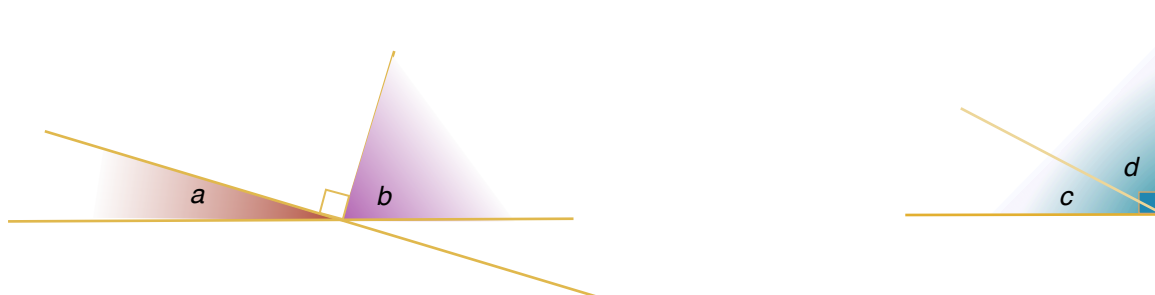
Este é um exemplo de dois ângulos DAB e DAC não adjacentes.

Apesar de terem o mesmo vértice A e um lado em comum, a semirreta DA , o ângulo DAB está contido no ângulo DAC .



- * Dois ângulos dizem-se **complementares** se a soma das suas amplitudes for **90°**, ou seja dois ângulos complementares se adjacentes formam um ângulo reto.

exemplo

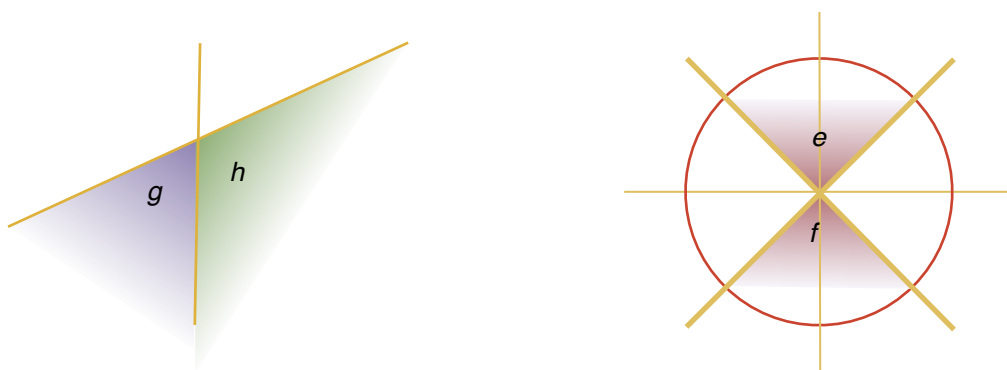


Os pares de ângulos a, b e c, d são ângulos complementares.

$$\hat{a} + \hat{b} = 90^\circ \text{ e } \hat{c} + \hat{d} = 90^\circ.$$

- * Dois ângulos dizem-se **suplementares** se a soma das suas amplitudes for **180°**, ou seja dois ângulos suplementares se adjacentes formam um ângulo raso.

exemplo

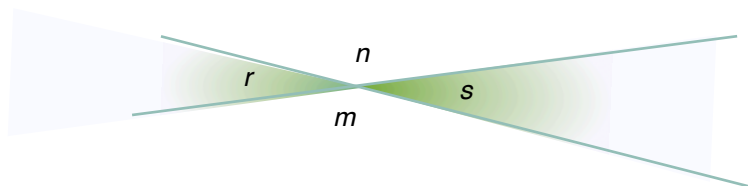


Os pares de ângulos g, h e e, f são ângulos suplementares.

$$\hat{g} + \hat{h} = 180^\circ \text{ e } \hat{e} + \hat{f} = 180^\circ.$$

* Dois ângulos são **verticalmente opostos** se têm o vértice em comum e um deles é definido pelo prolongamento dos lados do outro. Dizem-se **ângulos opostos pelo vértice** e têm obviamente a mesma amplitude.

exemplo



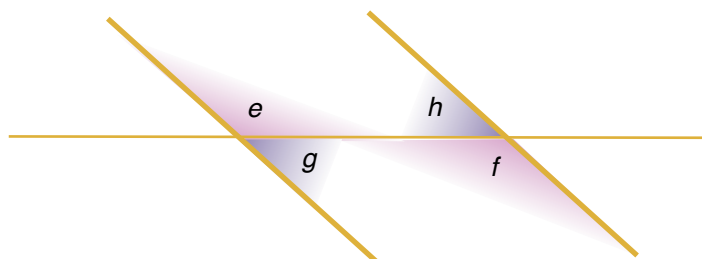
Os ângulos r e s são ângulos verticalmente opostos, $\hat{r} = \hat{s}$.

Claro que n e m são também verticalmente opostos, $\hat{n} = \hat{m}$.

* Quando uma reta é concorrente a duas retas paralelas surgem:

Ângulos alternos internos. São ângulos de lados paralelos.

exemplo



Nesta situação surgem sempre dois pares de ângulos alternos internos e, f e h, g .

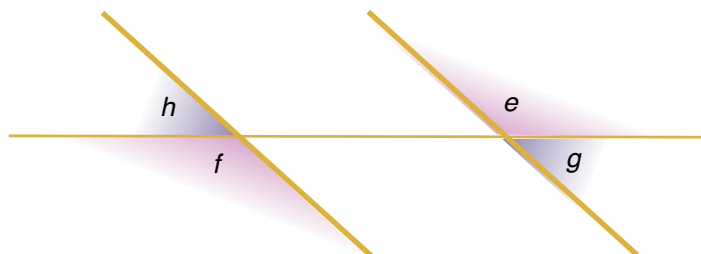
e, f são dois ângulos obtusos e h, g dois ângulos agudos.

Os ângulos alternos internos têm a mesma amplitude. Isto é $\hat{e} = \hat{f}$ e $\hat{g} = \hat{h}$.

Repara ainda que os pares de ângulos e, g e h, f são adjacentes suplementares.

Ângulos alternos externos. São ângulos de lados paralelos.

exemplo



Nesta situação surgem sempre dois pares de ângulos alternos externos h, g e f, e .

h, g são dois ângulos agudos e e, f são dois ângulos obtusos.

Os ângulos alternos externos têm a mesma amplitude. Isto é $\hat{h} = \hat{g}$ e $\hat{f} = \hat{e}$.

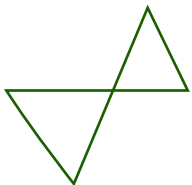
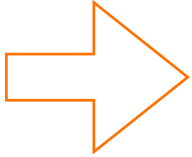
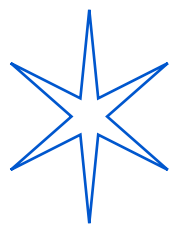
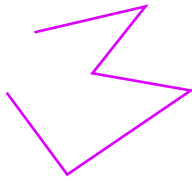
Repara ainda que os pares de ângulos h, f e e, g são adjacentes suplementares.

Concluimos ainda que:

- ângulos de lados paralelos se forem ambos agudos ou ambos obtusos então são geometricamente iguais;
- ângulos de lados paralelos se um for agudo e o outro obtuso então são suplementares.

ESTUDO DE POLÍGONOS

* Quais das seguintes figuras representa um polígono?

				
<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>

Apenas as figura *E* e *F* são polígonos.

A figura *E* é um polígono com sete lados e sete vértices, chama-se um heptágono. A figura *F* é um polígono com doze lados e doze vértices, chama-se um dodecágono.

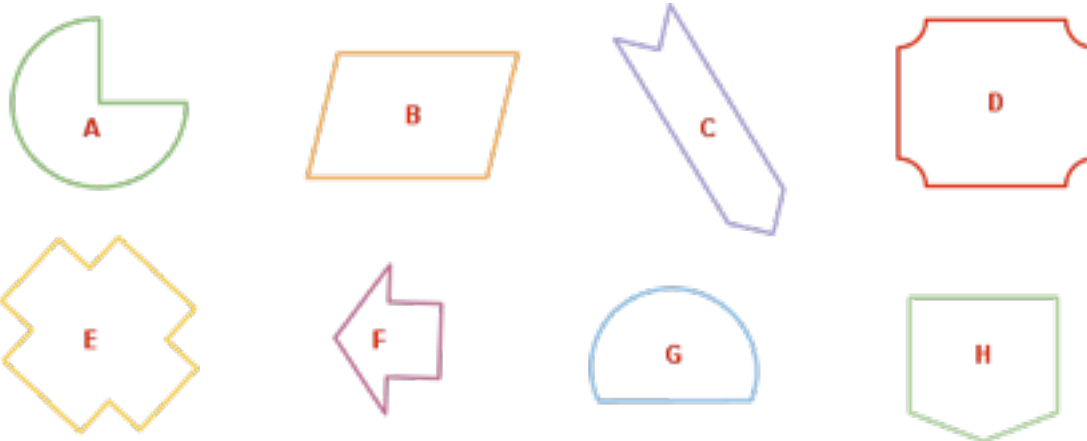
As figuras *D*, *G* e *H* não são polígonos.

Um **polígono é uma figura plana limitada por uma linha fechada formada por segmentos de reta**. Cada vértice reúne apenas duas arestas.

Assim *G* não é uma linha fechada, *D* não é uma figura limitada por uma linha (ou de outra maneira: existe um vértice onde se encontram mais de duas arestas) e *H* não é limitada só por segmentos de reta pois existem dois segmentos curvos.

exemplo

a) Quais das seguintes figuras geométricas são polígonos?



São polígonos as figuras B , C , E , F e H.

b) Existe algum hexágono?

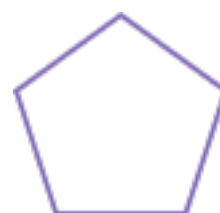
Sim, a figura C.

* Um polígono é um **polígono regular** quando todos os seus lados são iguais (têm o mesmo comprimento) e todos os seus ângulos são iguais (têm a mesma amplitude).

Já conheces alguns polígonos regulares como por exemplo o triângulo equilátero e o quadrado.



Um pentágono regular é uma figura geométrica com cinco vértices, cinco lados de igual comprimento e cinco ângulos com a mesma amplitude.



Um polígono pode ter lados iguais e não ser regular. Um exemplo?

O losango!

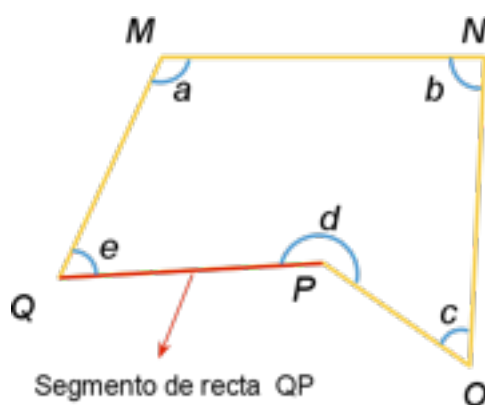


* Os **elementos de um polígono** são os seus lados, os seus vértices e os seus ângulos (ângulos internos).

Uma maneira de identificar um polígono é escrever as letras associadas a cada vértice entre parênteses retos.

exemplo

O pentágono representado designa-se por $[MNOPQ]$ ou então dizemos, pentágono $MNOPQ$.

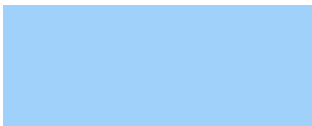
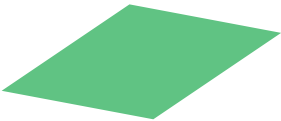


Tem cinco lados: $[MN]$; $[NO]$; $[OP]$; $[PQ]$ e $[QM]$

Tem cinco vértices: M ; N ; O ; P e Q

Tem cinco ângulos internos: a , b , c , d e e .

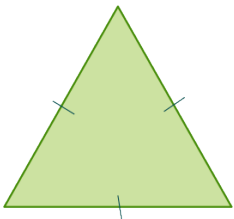
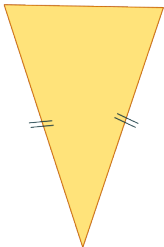
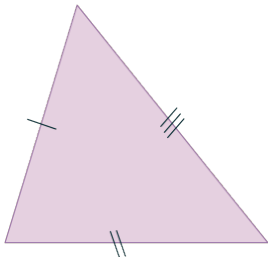
* Propriedades de alguns polígonos:

Polígono	Propriedades
 Triângulo equilátero	Três vértices Três lados iguais Três ângulos iguais de 60° É um polígono regular
 Quadrado	Quatro vértices Quatro lados iguais Quatro ângulos iguais retos É um polígono regular É também um quadrilátero
 Rectângulo	Quatro vértices Quatro lados iguais dois a dois Quatro ângulos iguais retos É também um quadrilátero
 Losango	Quatro vértices Quatro lados iguais Quatro ângulos iguais dois a dois, dois agudos e dois obtusos É também um quadrilátero
 Paralelogramo	Quatro vértices Quatro lados iguais dois a dois Quatro ângulos iguais dois a dois É também um quadrilátero

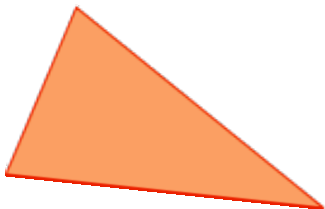
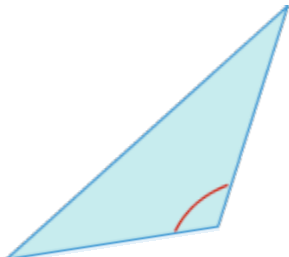
TRIÂNGULOS

* Um triângulo como sabemos é um polígono de três lados. Podemos classificar um triângulo quantos aos seus lados e quanto aos seus ângulos.

Classificação quantos aos lados:

Triângulo equilátero	Triângulo isósceles	Triângulo escaleno
É um triângulo onde os três lados têm o mesmo comprimento.	É um triângulo onde dois dos seus lados têm o mesmo comprimento.	É um triângulo onde os três lados têm comprimentos diferentes.
		

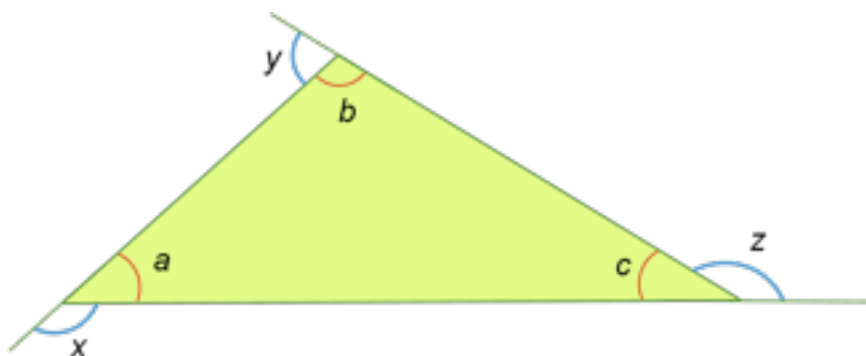
Classificação quantos aos ângulos:

Triângulo acutângulo	Triângulo retângulo	Triângulo obtusângulo
É um triângulo com os três ângulos agudos.	É um triângulo com um ângulo reto.	É um triângulo com um ângulo obtuso.
		

Observando os triângulos anteriores podemos dizer que:

- Um triângulo equilátero é sempre um triângulo isósceles.
- Um triângulo isósceles tem sempre dois ângulos iguais agudos.
- Um triângulo retângulo tem um ângulo reto e os outros dois ângulos são agudos.
- Um triângulo obtusângulo tem um ângulo obtuso e os outros dois ângulos são agudos.

* Num triângulo temos **ângulos internos** e **ângulos externos**.



Os ângulos a , b e c são os ângulos internos do triângulo

Os ângulos x , y e z são os ângulos externos ao triângulo.

Um ângulo externo é formado por um lado do triângulo e pelo prolongamento do outro adjacente. Prolongando um lado ou o outro obtemos o mesmo ângulo externo.

Relações entre os ângulos internos e externos de um triângulo:

- Um ângulo interno e o seu ângulo externo adjacente são sempre suplementares:

$$\hat{a} + \hat{x} = 180^\circ \qquad \hat{b} + \hat{y} = 180^\circ \qquad \hat{c} + \hat{z} = 180^\circ$$

- A amplitude de um ângulo externo é sempre igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes:

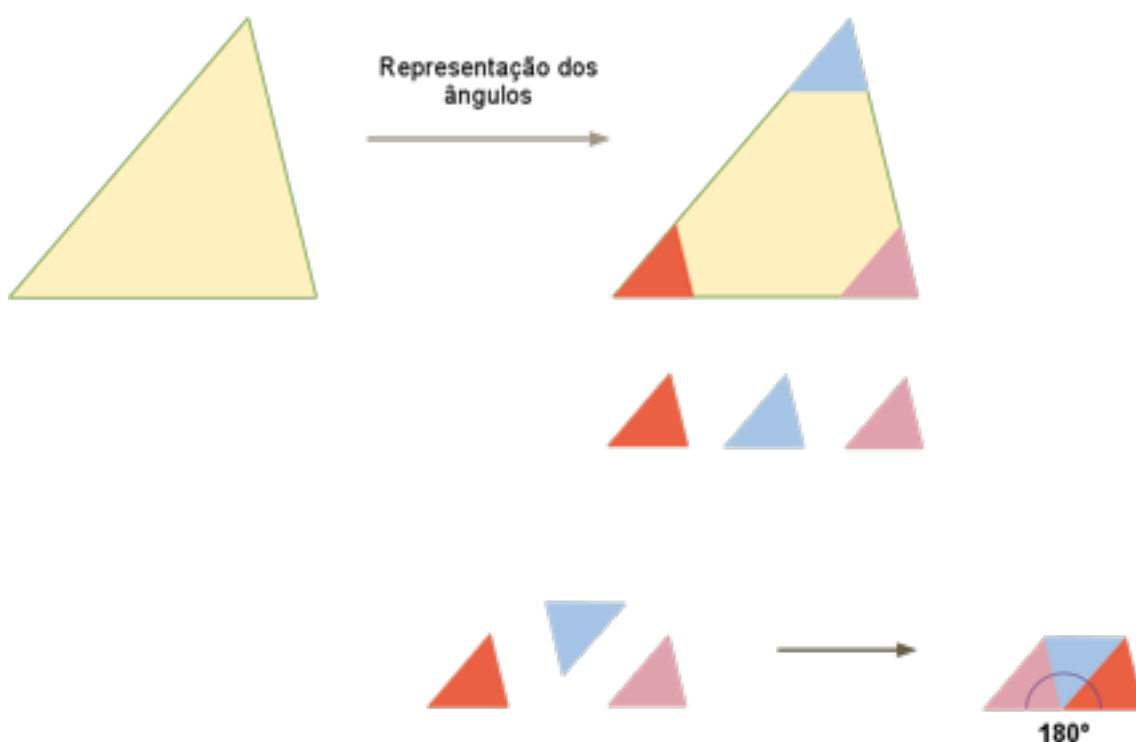
$$\hat{x} = \hat{b} + \hat{c}$$

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{c}$$

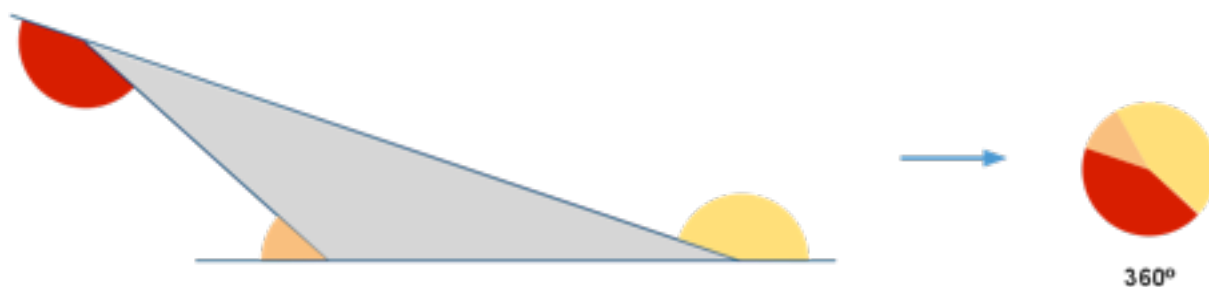
$$\hat{z} = \hat{a} + \hat{b}$$

- A soma dos ângulos internos é sempre 180° : $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$

Observa esta pequena demonstração:

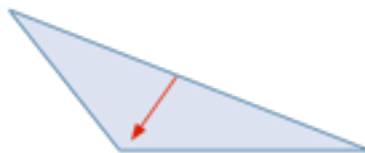


- A soma dos ângulos externos é sempre 360° : $\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = 360^\circ$

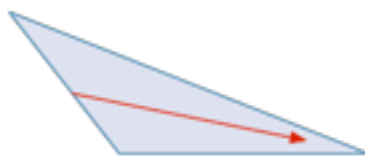
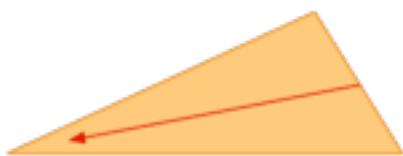


Relações entre lados e ângulos de um triângulo:

- Ao lado maior do triângulo opõem-se o seu ângulo de maior amplitude e vice-versa.

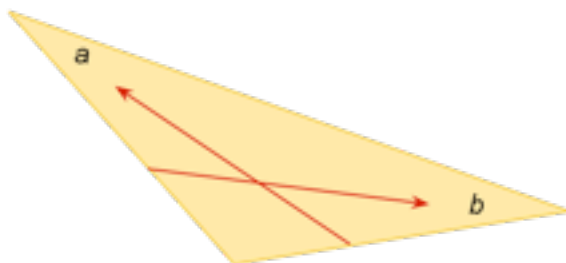


- Ao lado menor do triângulo opõem-se o seu ângulo de menor amplitude e vice-versa.



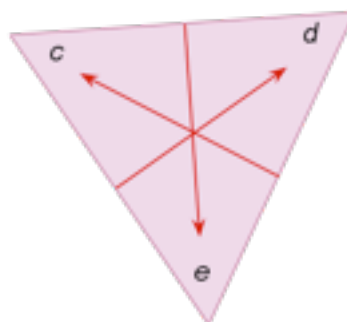
- A lados geometricamente iguais opõem-se ângulos geometricamente iguais e vice-versa.

Triângulo isósceles



$$\hat{a} = \hat{b}$$

Triângulo equilátero

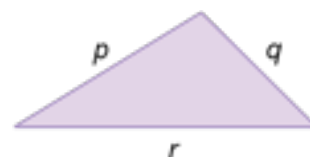


$$\hat{c} = \hat{d} = \hat{e}$$

- A medida de cada lado do triângulo é menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

Num triângulo cujos lados têm as medidas p , q e r :

$$p < q + r \quad q < p + r \quad r < p + q$$

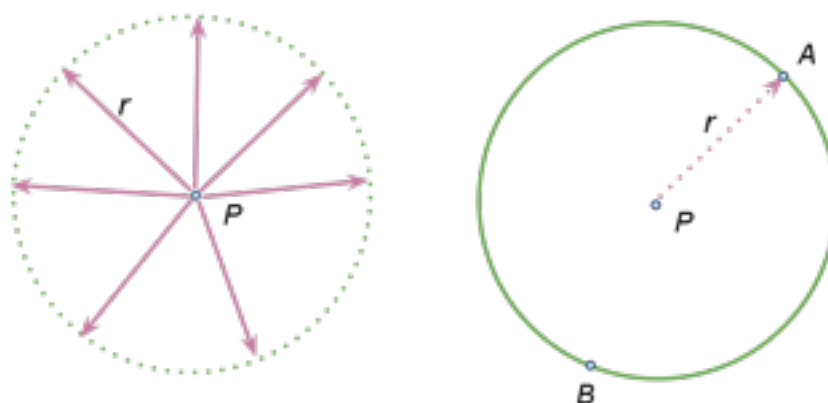


CÍRCULO E CIRCUNFERÊNCIA

* Uma circunferência é uma figura geométrica. É constituída por todos os pontos do plano que estão a uma mesma distância de um ponto fixo chamado **centro** da circunferência.

exemplo

Vamos representar todos os pontos do plano que estão a uma distância r do ponto fixo P :



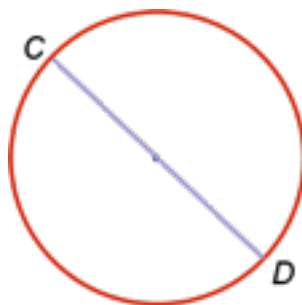
Obtemos a figura representada a verde. Uma circunferência de centro P e raio r .
Os pontos A e B pertencem a essa circunferência.

Qualquer segmento de reta que una o centro a um qualquer ponto da circunferência é chamado de **raio** e usamos em geral a letra r para o representar. No exemplo acima, o segmento PA é um raio daquela circunferência, assim como $[PB]$.

O **diâmetro** de uma circunferência é o segmento que une dois pontos da circunferência e que passa pelo seu centro. Claro que o diâmetro tem um comprimento que é duas vezes maior que o comprimento do raio.

exemplo

$[CD]$ é um diâmetro da circunferência vermelha.



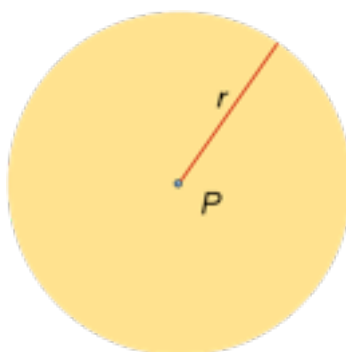
* Um **círculo** é uma figura geométrica, constituída por todos os pontos do plano que estão a uma distância igual ou inferior a r de um certo ponto fixo, o seu centro.

exemplo

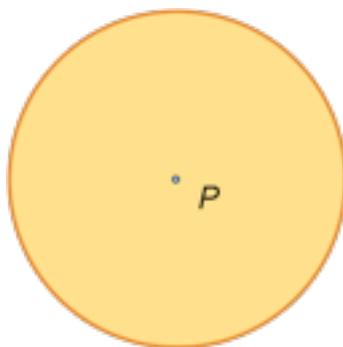
Círculo de centro P e raio r .

São todos os pontos do plano que se encontram a uma distância menor ou igual a r de P .

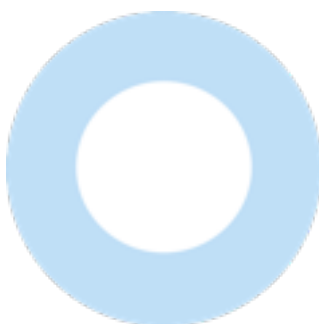
É portanto toda a zona amarela.



Um círculo contém sempre uma circunferência que é o seu bordo:



Uma **coroa circular** é a zona do plano compreendida entre duas circunferências concêntricas, ou seja que têm o mesmo centro mas raios diferentes:



TEMA

4

Números Racionais não negativos



REPRESENTAÇÃO DA FRAÇÃO

* As expressões: metade, um terço ou um quarto são já familiares. Indicam respetivamente a necessidade de se fazer uma divisão em duas, três ou quatro partes iguais.

Em linguagem matemática existem várias expressões para representar um terço ou um quarto. Uma delas é a fração: $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$.

exemplos

1) Representação de $\frac{1}{2}$:



Divisão em duas partes iguais:

Metade dos *smiles* são azuis mas também metade dos *smiles* são amarelos;

$\frac{1}{2}$ dos quadrados é verde mas também $\frac{1}{2}$ dos quadrados é amarelo.

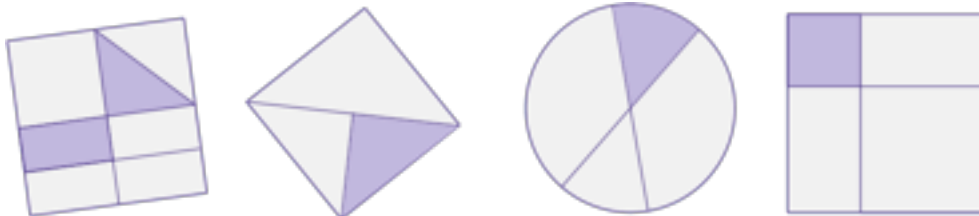
2) Representação de $\frac{1}{6}$:



Divisão em seis partes iguais:

$\frac{1}{6}$ dos *smiles* são verdes e também $\frac{1}{6}$ da figura seguinte é azul.

3) Em qual das figuras (quadrados e círculo) está representado a roxo $\frac{1}{4}$ da figura?



Na 1.ª figura o triângulo roxo e o retângulo roxo são equivalente, ou seja têm a mesma área. Logo essas duas partes equivalem a um quarto da figura.

Na 2.ª figura podemos dividir o quadrado em quatro triângulos geometricamente iguais, ou seja quatro triângulos equivalentes.

As duas últimas figuras não se encontram divididas em quatro partes iguais (com a mesma área) logo a parte roxa não representa $\frac{1}{4}$ da figura.

4) A Rita convidou para a sua festa de anos sete colegas. Na altura de partir o bolo ela quis dividir em partes iguais para todos. Que parte do bolo irá receber cada pessoa?

Se a Rita contar consigo então terá de cortar o bolo em oito partes iguais.

Cada pessoa irá receber $\frac{1}{8}$ do bolo, ou seja um dos oito bocados de bolo.



NÚMERO RACIONAL

FRAÇÃO DECIMAL

* Sendo uma fração a representação de uma divisão então podemos representar uma fração por um número. Chamamos **representação decimal** da fração ou **dízima**:

$$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0,5$$

(5 décimas ou 50 centésimas)

$$\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0,25$$

(25 centésimas)

$$\frac{1}{6} = 1 : 6 = 0,166...$$

$$\frac{1}{8} = 1 : 8 = 0,125$$

(125 milésimas)

Aqui o uso da calculadora é muito útil.

Repara que na divisão $1 : 6$ a sua parte decimal tem infinitos algarismos. Neste caso a fração

$\frac{1}{6}$ torna mais exacta a representação deste número.

* Um **número racional** é aquele que se pode representar por uma fração.

exemplos

1) Qualquer número natural $1, 2, 3, \dots$ é um racional.

Observa: $5 = \frac{5}{1}$ e $47 = \frac{47}{1}$

Verifica-se que qualquer número natural pode ser escrito como uma fração onde o numerador é ele próprio e o denominador é 1 .

2) Qualquer número decimal (número com um número finito de casas decimais) é um racional.

Observa: $9,2 = \frac{92}{10}$ e $0,31 = \frac{31}{100}$

Verifica-se que qualquer número decimal pode ser escrito como uma fração onde o denominador é uma potência de 10 ($10, 100, 1000, \dots$).

A estas frações chamamos **frações decimais**.

3) Existem ainda outras frações como $\frac{1}{6}$ ou $\frac{12}{7}$ onde a sua dízima tem infinitos

algarismos.

Observa: $\frac{1}{6} = 0,166... = 0,1(6)$ chama-se uma **dízima infinita periódica** (o 6 repete-se infinitamente).

e $\frac{12}{7} = 1,7142857...$ a calculadora não tem casas suficientes para mostrar o ciclo de dígitos que se repetem. Mas é também uma **dízima infinita periódica**.

Chamamos **números fracionários** aos números racionais que não são números naturais.

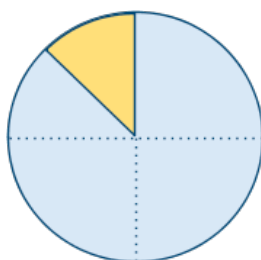
exemplo

$$\frac{1}{3} ; \frac{12}{5} ; 1,35 ; 0,2 \text{ e } 56,(65)$$

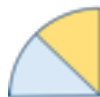
* A **unidade** é uma parte muito importante para a representação de uma fração porque para diferentes unidades obtemos diferentes frações.

exemplo

1) Considerando a unidade **cada quarto de círculo** então o sector amarelo da figura seguinte representa que parte da unidade?



Sendo a unidade um quarto de círculo então o sector amarelo representa metade, $\frac{1}{2}$.



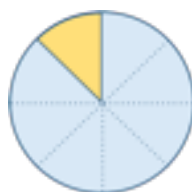
2) E se a unidade for agora meio círculo?

Sendo meio círculo a unidade então o sector amarelo representa $\frac{1}{4}$.



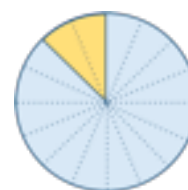
3) E em relação ao círculo todo?

A zona amarela representará $\frac{1}{8}$ se o círculo for dividido em oito partes equivalentes.



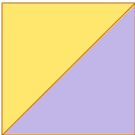
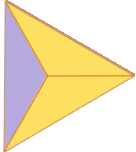
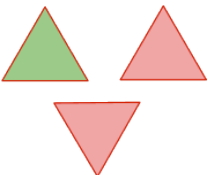
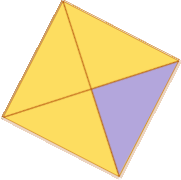
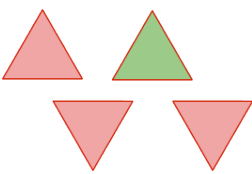
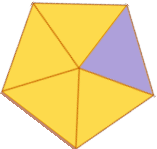
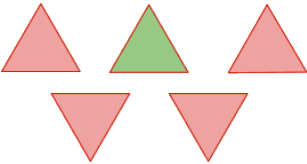
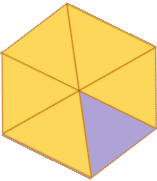
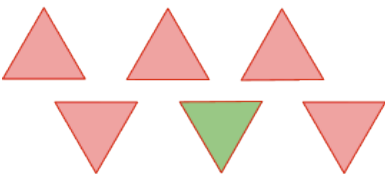
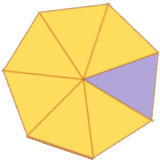
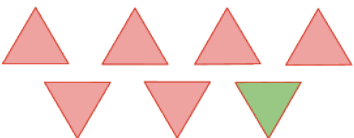
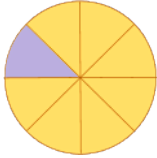
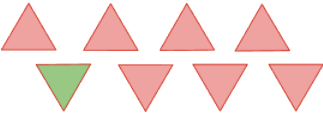
4) E se a unidade for $\frac{1}{16}$ do círculo?

A zona amarela representará 2, ou seja o dobro da unidade.



Até agora tratámos apenas de frações onde o numerador é 1. A estas frações chamamos **frações unitárias**.

exemplos

Fração	Representação decimal	Representação a roxo da fração. Unidade: a figura desenhada	Representação a verde da fração. Unidade: conjunto de triângulos
$\frac{1}{2} \rightarrow$ um meio (metade)	0,5		
$\frac{1}{3} \rightarrow$ um terço (a terça parte)	0,(3)		
$\frac{1}{4} \rightarrow$ um quarto (a quarta parte)	0,25		
$\frac{1}{5} \rightarrow$ um quinto	0,2		
$\frac{1}{6} \rightarrow$ um sexto	0,1(6)		
$\frac{1}{7} \rightarrow$ um sétimo	0,1428...		
$\frac{1}{8} \rightarrow$ um oitavo	0,125		

* Já vimos que uma fração representa a divisão entre dois números naturais. Aos dois números que surgem numa fração chamamos **numerador** e **denominador**:

$$2 : 7 = \frac{2}{7}$$

$\xrightarrow{\text{Numerador}}$
 $\xrightarrow{\text{Denominador}}$

Vejamos outros exemplos de frações:

exemplos

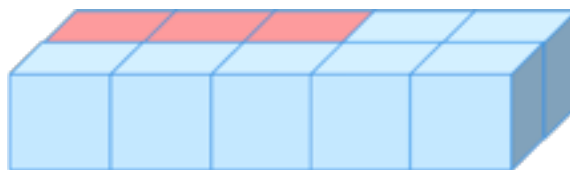
1) Existem 3 cubos vermelhos num total de 7 cubos na figura seguinte:



Então podemos dizer que $\frac{3}{7}$ dos cubos são vermelhos.

O denominador representa a totalidade de cubos e o numerador o n.º de cubos vermelhos.

2) No conjunto seguinte temos 10 cubos:



Representa a parte rosa do conjunto por uma fração. E o conjunto todo, como se pode representar?

A parte rosa representa $\frac{3}{10}$ do conjunto. Três cubos rosa num total de dez cubos.

O conjunto todo será $\frac{10}{10}$. Temos 10 cubos num total de 10 cubos.

Observa que $\frac{10}{10} = 10 : 10 = 1$. Porque o conjunto representa aqui a unidade!

3) Se os cubos ao lado representarem $\frac{2}{9}$ de um conjunto de cubos



quantos cubos existem afinal?

Os dois cubos são $\frac{2}{9}$ de 9 logo existem nove cubos.

4) Se os cubos ao lado representarem agora $\frac{1}{3}$ de um conjunto de cubos quantos

cubos tem o conjunto?



Se 2 cubos são um terço ($\frac{1}{3}$ de 3) então podemos construir o conjunto todo: 6 cubos.



5) No cilindro ao lado pintámos $\frac{1}{6}$ de verde e $\frac{4}{6}$ de

amarelo.

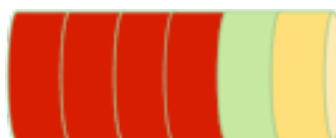


a) Que fração do cilindro podia ainda ser pintada?

Pode ser pintado $\frac{1}{6}$.

b) Que fração do cilindro foi pintada? $\frac{5}{6}$

c) Agora por cima vamos pintar no cilindro uma zona vermelha que representa $\frac{2}{3}$ do cilindro. Faz um desenho que represente essa situação.



Por exemplo:

ESTUDO DE FRAÇÕES

FRAÇÕES EQUIVALENTES

FRAÇÃO IRREDUTÍVEL

* Dada uma fração podemos ter três situações quando comparamos o seu numerador e denominador:

- Se **o numerador é menor que o denominador** a fração representa um número menor que um.

exemplo

Consideremos a fração $\frac{3}{8}$ ou seja três partes de oito.



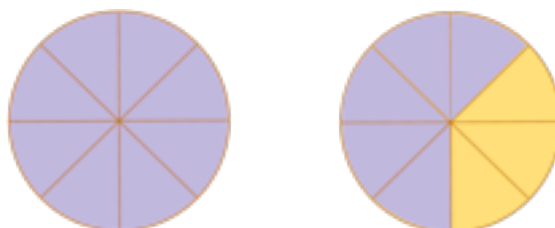
O denominador representa quantas partes se divide a unidade, 8 partes, e o numerador indica quantas partes estamos a considerar, 3 partes.

Podemos confirmar que a fração é menor que a unidade: $\frac{3}{8} = 0,375 < 1$.

- Se **o numerador é maior que o denominador** a fração representa um número maior que um.

exemplo

Consideremos a fração $\frac{13}{8}$.



O círculo representando a unidade encontra-se dividido em 8 partes devido ao denominador.

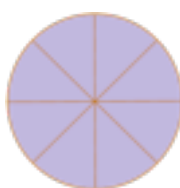
O numerador sendo 13 obriga-nos a desenhar outro círculo para podermos representar as 13 partes.

Podemos confirmar que a fração é maior que a unidade: $\frac{13}{8} = 1,625 > 1$.

- **Se o numerador é igual ao denominador** a fração representa a unidade.

exemplo

Consideremos a fração $\frac{8}{8}$.

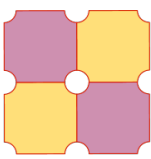
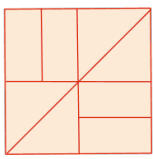


Verifica-se que $\frac{8}{8} = 1$.

* Sempre o numerador é igual ao denominador temos uma fração igual a 1.

exemplos

As figuras seguintes representam a unidade. Existem várias frações possíveis para as representar. Observa que as divisões são em partes iguais.

		
Está dividida em 4 partes Representa-se por $\frac{4}{4}$	Está dividida em 8 partes Representa-se por $\frac{8}{8}$	Constituída por 6 blocos iguais Representa-se por $\frac{6}{6}$
Está dividida por duas cores Representa-se por $\frac{2}{2}$	Está dividida em 4 quadrados Representa-se por $\frac{4}{4}$	Dividida por 3 cores ou por 2 colunas Representa-se por $\frac{2}{2}$ ou $\frac{3}{3}$

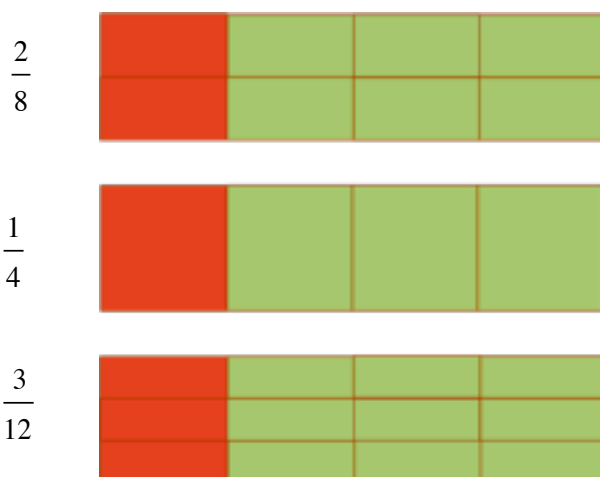
É fácil de verificar que $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{6}{6} = \frac{8}{8} = 1$.

* Quando as frações representam o mesmo número, como no caso acima, dizemos que são **frações equivalentes**.

exemplos

As frações $\frac{2}{8}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{12}$ são equivalentes.

Podemos confirmar geometricamente observando os retângulos vermelhos das figuras seguintes:



Então podemos escrever: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$.

* Tendo uma fração como obter outra equivalente?

Observando as frações anteriores $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ podemos reparar que:

$$\frac{2}{8} \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 3} \frac{3}{12}$$

Obtemos uma fração equivalente se multiplicarmos (ou dividirmos) o numerador e o denominador de uma fração por um número natural.

No processo de determinar frações equivalentes pela divisão, podemos chegar a uma fração com os menores termos possíveis onde já não existem fatores comuns. Essa fração chama-se **fração irredutível**.

A palavra irredutível significa que não é reduzível, que não se pode decompor, ou seja a fração não pode ser mais simplificada.

Por exemplo, considerando a fração $\frac{124}{100}$. Sabemos que $\frac{124}{100} = \frac{31}{25}$.

Repara que $\frac{31}{25}$ não se pode simplificar mais logo $\frac{31}{25}$ é uma fração irredutível.

Simplificar $\frac{72}{30}$ até obtermos uma fração irredutível: $\frac{72}{30} = \frac{36}{15} = \frac{12}{5}$

EXERCÍCIO 1

1) Completa:

a) $\frac{\quad}{3} = \frac{121}{33}$

b) $\frac{102}{2} = \frac{\quad}{6} = \frac{51}{\quad}$

c) $\frac{\quad}{4} = \frac{75}{12} = \frac{150}{\quad}$

2) Escreve duas frações que representem o número 1,24 .

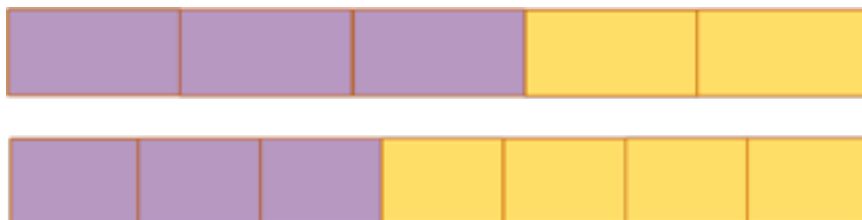
COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES NUMERAL MISTO

* Se duas frações tiverem o mesmo numerador ou o mesmo denominador a sua comparação é fácil.

Se duas frações têm o mesmo numerador a fração que representa um número maior é a que tem o menor denominador.

exemplo

Para comparar $\frac{3}{5}$ com $\frac{3}{7}$ consideremos a seguinte figura:



Observando a parte roxa em cada um dos desenhos reconhecemos que $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$.

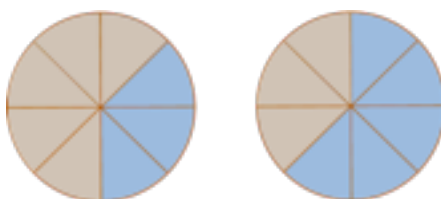
Verificamos que 3 partes em 5 é mais que 3 partes em 7.

Quanto maior o denominador maior a divisão em partes iguais. Logo se o numerador é o mesmo, à medida que o denominador aumenta, diminui o valor da fração.

Se duas frações têm o mesmo denominador a fração que representa um número maior é a que tem maior numerador.

exemplo

Para comparar $\frac{3}{8}$ com $\frac{5}{8}$ consideremos a seguinte figura:



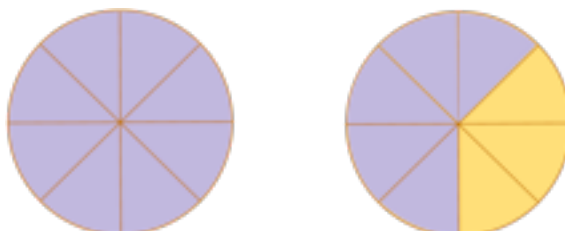
Observando a parte azul em cada um dos círculos reconhecemos que $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$.

Verificamos que 5 partes em 8 é mais que 3 partes em 8.

Aqui o denominador das duas frações é o mesmo, ou seja temos a mesma divisão em partes iguais. Logo à medida que o numerador aumenta, mais partes da divisão temos e por isso maior o valor da fração.

* Existe uma outra representação para uma fração quando ela é um número maior que um.
Chama-se **numeral misto**.

Observa a figura:



Podemos dizer que estão pintados de lilás $\frac{13}{8}$.

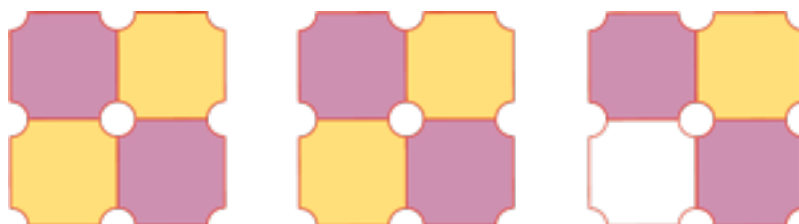
$$\text{Mas } \frac{13}{8} = 1 + \frac{5}{8} = 1\frac{5}{8} \text{ (1,625) .}$$

A esta representação $1\frac{5}{8}$ chamamos numeral misto ou seja é misto porque a sua representação inclui um número natural e uma fração menor que a unidade.

exemplos

1) Representa a zona pintada da figura por uma fração e pelo respetivo numeral misto

sabendo que  é a unidade.



Na figura temos pintado $\frac{11}{4}$ ou seja $2\frac{3}{4}$.

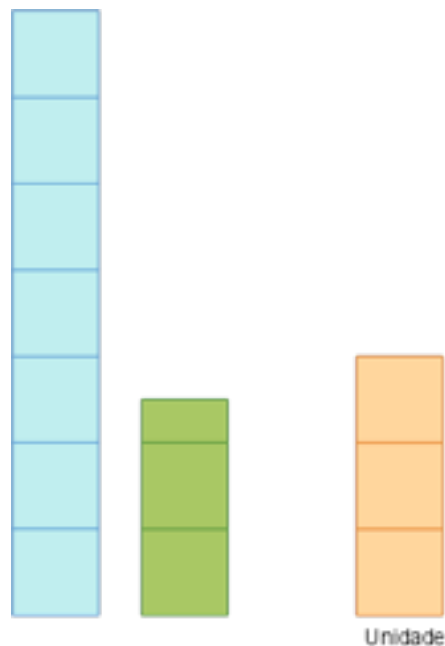
2) Observa a figura e indica uma fração que represente a coluna azul e a coluna verde em relação à unidade indicada.

Coluna azul:

$$1 + 1 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{7}{3}$$

Coluna verde:

$$\frac{5}{6} \quad (\text{dividindo a unidade em 6 partes})$$



EXERCÍCIO 2

1) Ordena por ordem crescente as frações $\frac{12}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{14}{5}$ sem utilizar a calculadora.

2) Completa com os símbolos $<$, $>$ ou $=$.

a) $\frac{12}{4}$ $\frac{15}{5}$

b) $\frac{7}{20}$ $\frac{7}{12}$

c) $\frac{145}{90}$ $\frac{45}{55}$

d) $\frac{2}{4}$ $\frac{5}{10}$

e) $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{11}$

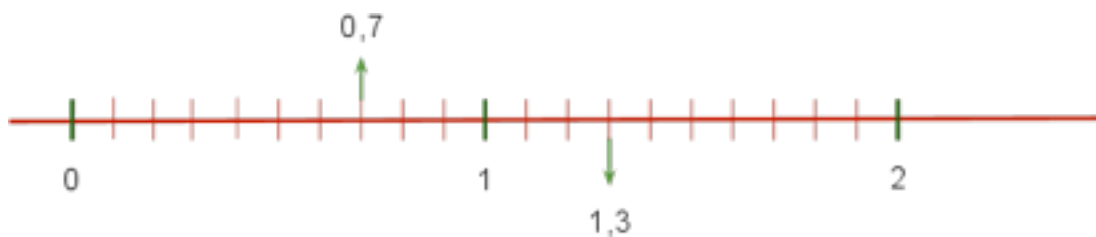
LOCALIZAR E POSICIONAR UM NÚMERO RACIONAL NA RETA NUMÉRICA

* Para desenharmos uma reta numérica precisamos de desenhar uma reta, uma origem (o zero) e uma unidade de comprimento que se repete as vezes necessárias para se representar 2, 3 ou 4 unidades.

exemplo



Vamos marcar na reta numérica os números 0,7 e 1,3. Dividindo o espaço entre 0 e 1 em dez partes iguais e o mesmo entre 1 e 2 então fica fácil de assinalar estes números:



Pensando em termos de frações, como $0,7 = \frac{7}{10}$ e $1,3 = \frac{13}{10}$, frações decimais como já

sabemos, então observamos que a unidade teria de ser dividida em 10 partes tal como foi feito no desenho acima.

Observando os números representados podemos concluir que $0 < \frac{7}{10} < 1 < \frac{13}{10} < 2$.

Ordenámos os números por **ordem crescente**, ou seja do menor para o maior.

Quantos **números naturais** temos entre 0 e 3? Temos dois, o 1 e o 2.

Quantos **números racionais** temos entre 0 e 1? Temos infinitos números!

Exemplos? 0,3 0,33 0,333 0,3333 0,33333 ... e podíamos continuar indefinidamente

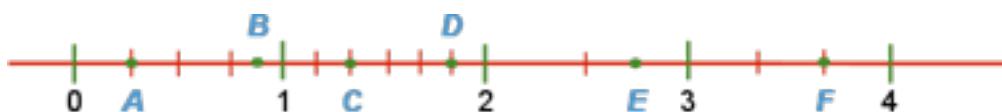
EXERCÍCIO 3

1) Considera os pontos:

$$A \rightarrow 2,5 ; \quad B \rightarrow \frac{2}{5} ; \quad C \rightarrow \frac{4}{5} ; \quad D \rightarrow 3\frac{1}{5} ; \quad E \rightarrow 0,5 ; \quad F \rightarrow \frac{12}{5}$$

- Representa numa reta numérica os pontos anteriores.
- Indica dois números entre os pontos E e C .
- Escreve duas frações decimais entre 1 e 2.

2) Indica o número racional correspondente a cada letra na reta numérica seguinte:



ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES PROPRIEDADES

* Observa o círculo ao lado. Encontra-se dividido em oito partes iguais.

Sabemos que $\frac{2}{8}$ corresponde à fração do círculo que é vermelho e $\frac{5}{8}$ à

fração do círculo que é azul.



Qual a fração que representa a parte colorida do círculo?

$\frac{7}{8}$ porque existem 7 partes coloridas em 8.

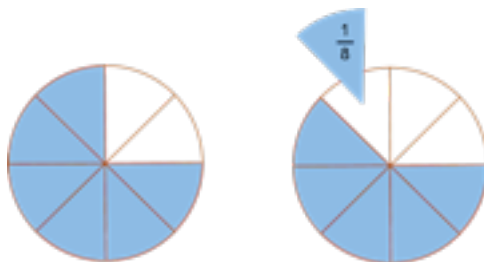
Repara que os $\frac{2}{8}$ da zona vermelha mais os $\frac{5}{8}$ da zona azul somam $\frac{7}{8}$ que representa a

parte colorida do círculo: $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$.

Ou seja, **a adição de frações com o mesmo denominador** é uma fração com o mesmo denominador e onde o numerador é a soma dos numeradores das frações a

adicionar, $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{2+5}{8} = \frac{7}{8}$.

* Observando a figura seguinte:



Verifica-se que se aos $\frac{6}{8}$ da zona azul retirarmos $\frac{1}{8}$ restam apenas $\frac{5}{8}$ da zona azul.

Então: $\frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

Ou seja, **a subtração de frações com o mesmo denominador** é uma fração com o mesmo denominador e onde o numerador é a diferença dos numeradores das frações a

subtrair, $\frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6-1}{8} = \frac{5}{8}$

exemplo

A compra de um vestido para oferecer foi repartida por três amigas. Uma pagou um terço do preço do vestido e outra pagou sete quinze avos do preço.

As duas amigas pagaram que parte do preço do vestido?

Como $\frac{1}{3} + \frac{7}{15}$ são frações com denominadores diferentes

precisamos de substituir $\frac{1}{3}$ por uma fração equivalente

com o mesmo denominador da outra fração.

Assim $\frac{1}{3} + \frac{7}{15} = \frac{5}{15} + \frac{7}{15} = \frac{5+7}{15} = \frac{12}{15}$.

Simplificando a fração até ser irredutível: $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

R: As duas amigas pagaram $\frac{4}{5}$ do preço do vestido.



A terceira amiga pagou que parte do valor do vestido?

$$1 - \frac{4}{5} = \frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}$$

R: A terceira amiga pagou $\frac{1}{5}$ do preço do vestido.

Ou seja, **na adição ou subtração de frações com denominadores diferentes** é necessário recorrer às frações equivalentes de modo a se obter uma adição (ou subtração) de frações com o mesmo denominador.

*** As propriedades comutativa e associativa mantêm-se na adição de números racionais.**

Tal como na adição de números naturais a ordem das parcelas não altera o valor da soma nem a maneira como as parcelas são associadas altera o resultado.

exemplo

Usando as propriedades da adição para simplificação:

$$\frac{2}{3} + 5 + \frac{1}{3} + 0,39 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 5 + 0,39 = 1 + 5,39 = 6,39$$

↓
↓

Prop. comutativa
Prop. associativa

Sem usar as propriedades da adição e fazendo o cálculo pela ordem que surge:

$$\frac{2}{3} + 5 + \frac{1}{3} + 0,39 = \frac{2}{3} + \frac{15}{3} + \frac{1}{3} + 0,39 = \frac{18}{3} + 0,39 = 6 + 0,39 = 6,39$$

EXERCÍCIO 4

1) Um círculo foi pintado da seguinte maneira: $\frac{3}{8}$ de azul, 0,25 de amarelo e $\frac{1}{8}$ de verde.

a) Traduz por uma fração a parte do círculo que se encontra pintada.

b) O círculo foi pintado na totalidade?

c) Que parte do círculo se encontra por pintar ?

2) Calcula $0,5 + 2 + \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4} - 0,75 \right)$.

3) Calcula $0,3 + 1,31 + \frac{5}{4}$.

FRAÇÃO DE UM NÚMERO

* Num conjunto de quinze biscoitos em forma de estrela um terço eram de limão. Podemos escrever que $\frac{1}{3}$ dos biscoitos são de limão.

Mas quantos são?

Observando o desenho sabemos que são cinco.

Ou seja $\frac{1}{3}$ dos 15 biscoitos é 5.

O cálculo é simples: $\frac{1}{3} \times 15 = \frac{15}{3} = 5$
Lê-se um terço de 15



exemplos

1) O Joaquim tem € 15 e a Maria tem metade. Quantos euros tem a Maria?

A Maria tem metade de € 15 , ou seja $\frac{1}{2} \times 15 = 15 : 2 = 7,5$.

A Maria tem € 7,50 .

2) Uma florista tem numa jarra cinco cravos vermelhos, rosas amarelas e três tulipas vermelhas. Sabemos que $\frac{5}{12}$ são cravos e $\frac{1}{3}$ são rosas amarelas .



a) Quantas flores tem a jarra?

Como $\frac{5}{12}$ são cravos e temos 5 cravos então a jarra tem 12 flores.

b) Que fração das flores são vermelhas?

As vermelhas são $5 + 3 = 8$.

$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ logo $\frac{2}{3}$ são flores vermelhas.

c) Relaciona a quantidade de rosas amarelas e de flores vermelhas.

Temos $\frac{1}{3}$ de rosas e $\frac{2}{3}$ de flores vermelhas, logo as flores vermelhas são o dobro do

número de rosas: $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$

d) Quantas rosas tem a jarra?

$\frac{1}{3} \times 12 = 12 : 3 = 4$, tem 4 rosas.

PERCENTAGEM

* Quando se diz que cerca de 70% das pessoas em Portugal não praticam qualquer exercício estamos a dizer que isso acontece a 70 pessoas em cada grupo de 100 .



Ou seja, $\frac{70}{100} = 70\%$

Também podemos escrever a percentagem numa representação decimal:

$$0,7 = 0,70 = 70\%$$

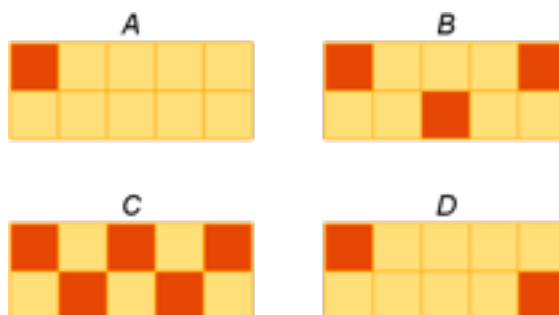
Fotografia de Emily Brainard cedida por U.S. Army

Observa as figuras seguintes:

Figura	Fração da parte a roxo	Representação decimal	Fração decimal	Percentagem
	$\frac{1}{2}$	0,5	$\frac{5}{10} = \frac{50}{100}$	50%
	$\frac{1}{4}$	0,25	$\frac{25}{100}$	25%
	$\frac{3}{4}$	0,75	$\frac{75}{100}$	75%
	$\frac{4}{4}$ ou $\frac{8}{8}$	1	$\frac{100}{100}$	100%

exemplos

1) Observa as figuras seguintes.



a) Qual delas tem 10% pintado de vermelho?

A figura A pois $\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = 10\%$

b) Indica a zona vermelha das restantes figuras em percentagem, fração decimal e representação decimal.

Figura B : $\frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$

Figura C : $\frac{5}{10} = 0,5 = 50\%$ (é metade)

Figura D : $\frac{2}{10} = 0,2 = 20\%$

2) Quanto é 150% de 220 bolas de Berlim?

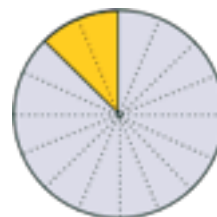
100% são 220 e 50% são 110 .

Logo 150% são 330 bolas de Berlim.



Fotografia de Carlos Paes
em Wikimedia Commons

3) A zona amarela representa que fração do círculo? Qual a percentagem do círculo que não é amarelo?



$$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

R: A zona amarela representa $\frac{1}{8}$ do círculo.

$\frac{7}{8}$ do círculo não é amarelo e $\frac{7}{8} = 0,875 = 87,5 : 100 = 87,5\%$

R: 87,5% do círculo

TEMA

5

Representação e interpretação de dados



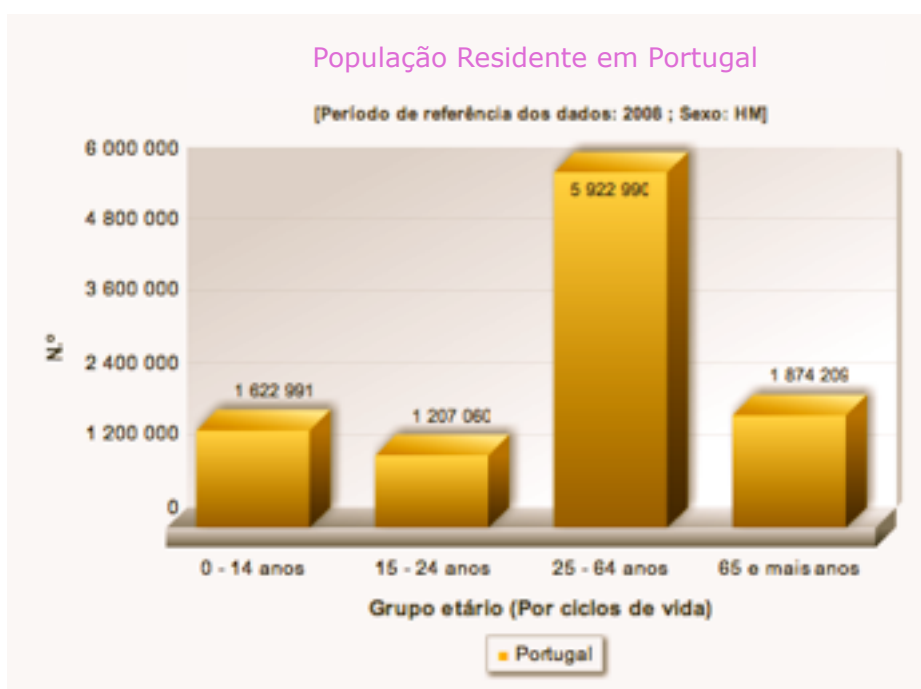
INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS DE BARRAS E DE LINHAS

* No sítio da internet do Instituto Nacional de Estatística (www.ine.pt) podemos consultar informação estatística sobre os mais diversos assuntos: população, ambiente e a economia entre outros.

Vejamos alguns exemplos.

exemplo 1

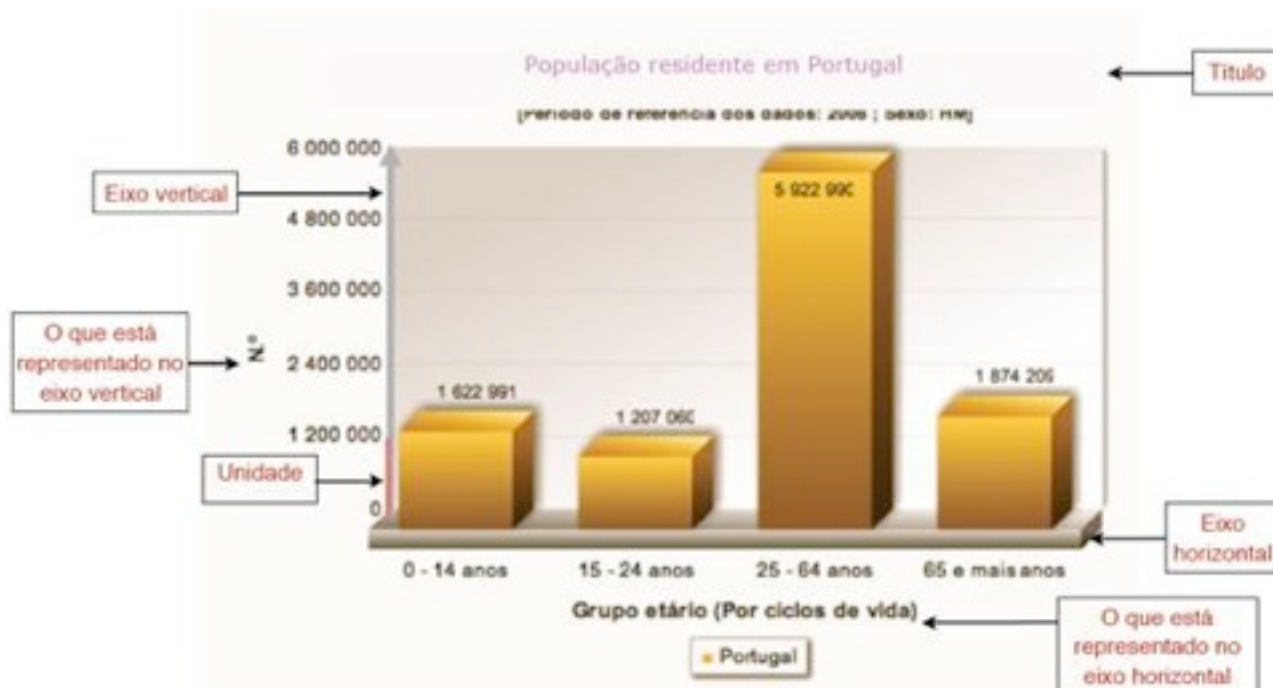
Estudo do número da população residente no ano de 2008 em Portugal por grupo etário:



Que elementos precisamos de colocar num gráfico de barras?

- Um título para sabermos do que se trata;
- Indicação do que está representado no eixo horizontal e no eixo vertical;
- Desenhar as unidades corretamente;
- Representar todas as barras com a mesma largura e igualmente espaçadas.

Vejamos:



Neste exemplo temos um **gráfico de barras em 3D**, isto é em três dimensões;

No eixo horizontal temos quatro grupos de idades designado por grupo etário;

No eixo vertical temos representado o número de pessoas (homens e mulheres, ver no título sexo: HM) residentes em Portugal no ano de 2008;

A unidade da escala indicada do eixo vertical é de 1 200 000 . Como os números necessários para representar as barras são da ordem dos milhões, a unidade tem de ser a apropriada.

Observando este gráfico podemos responder a algumas questões:

1) A maioria da população pertence a que grupo etário?

A maioria pertence ao grupo situado entre os 25 anos e os 64 anos.



Fotografia de Sreejith K no Flickr

2) Quantas pessoas temos em Portugal (2008) com idade inferior a 25 anos?

Como $1\,622\,991 + 1\,207\,060 = 2\,830\,051$, temos 2 830 051 pessoas.

3) Quantos Portugueses existiam no ano de 2008 ?

Somando os valores das quatro barras vem: 10 627 250 portugueses, isto é, quase 11 milhões de pessoas.

4) Diz-se que Portugal tem um população envelhecida. Faz um comentário.

Observando o gráfico vemos que as barras dos jovens com idade inferior a 15 anos e das pessoas com mais de 64 anos estão praticamente niveladas, embora existam mais pessoas com 64 anos (a diferença é de 251 218 pessoas). A População não tem sido rejuvenescida.

Calculando a fração (e percentagem) de jovens com menos de 15 anos da população:

$$\frac{1\,622\,991}{10\,627\,250} \approx 0,153 = 15,3\%$$

Calculando a fração (e percentagem) de pessoas mais de 64 anos da população:

$$\frac{1\,874\,209}{10\,627\,250} \approx 0,176 = 17,6\%$$

As percentagens apresentam uma pequena diferença de 2,3% . Não temos por isso uma população jovem.

exemplo2

Estudo em Portugal entre 2001 e 2008 , da idade média da mãe aquando do nascimento do seu primeiro filho.

Este é um exemplo de um **gráfico de barras na horizontal**;

No eixo horizontal temos uma escala, de 1 , para representar a idade média da mãe;



No eixo vertical temos os anos durante o qual este estudo decorreu.

Qual a conclusão imediata ao observarmos este estudo?

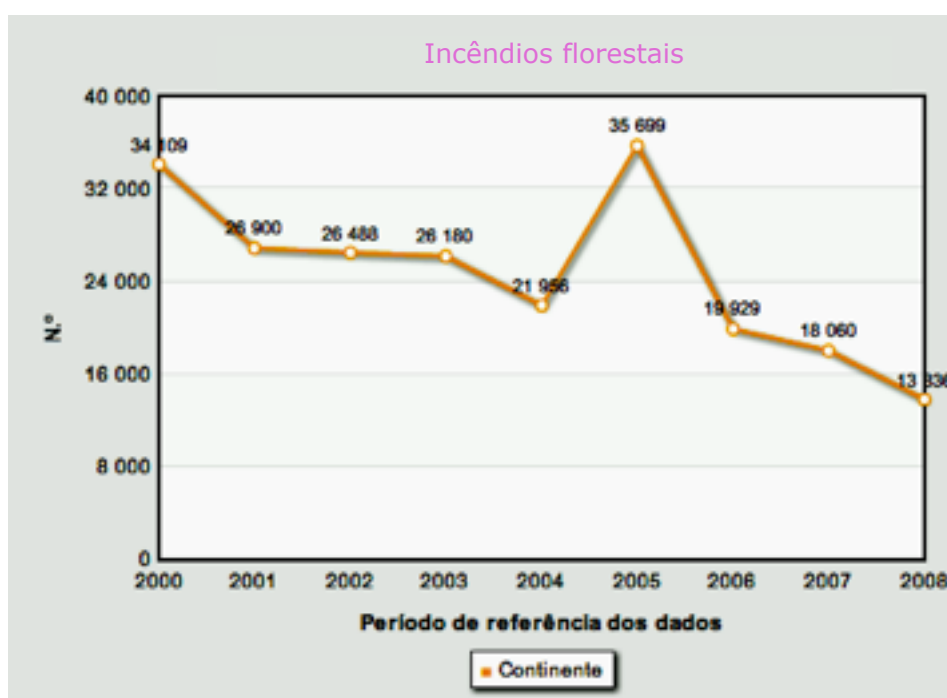
Observa-se ao longo do estudo de 2001 a 2008 que a idade média das mães ao nascimento do seu primeiro filho foi aumentando, isto é, as mulheres têm vindo a ter os seus primeiros filhos cada vez mais tarde.



Fotografia de Devin Fisher cedida por U.S. Army

exemplo3

Estudo em Portugal continental, entre os anos 2000 a 2008, do número de incêndios florestais por ano.



Este é um exemplo de um **gráfico de linhas**;

Os valores são assinalados por um ponto e depois são unidos por uma linha. Assim podemos visualizar melhor como os valores variam;

No eixo horizontal temos os anos durante o qual este estudo decorreu;

No eixo vertical temos o número anual de incêndios florestais. Como os valores são da ordem das dezenas de milhar, a unidade da escala aqui apresentada é de 8000 .

O que podemos observar?



Considerando o ano de 2005 como uma excepção podemos dizer que o número anual de incêndios florestais tem vindo a diminuir.

O ano de 2005 foi um ano de grande catástrofe, passando os 35 mil incêndios.

De 2006 para 2008 verificou-se uma redução de 6093 incêndios ($19\,929 - 13\,836 = 6093$).

RECOLHA E ORGANIZAÇÃO DE DADOS ESTATÍSTICOS: FREQUÊNCIA ABSOLUTA

* Quando se pretende fazer um estudo estatístico é necessário passar por vários passos:

- definir qual o tema do estudo;
- realizar um questionário;
- recolher as respostas;
- organizar as respostas;
- apresentar o resultado;
- retirar conclusões.

Vamos construir um exemplo.

Suponhamos que a Marta pretende questionar todos os seus colegas de turma à cerca do modo como se deslocam para a escola.

Ela faz então o seguinte questionário que entrega a cada colega para preencher, ela incluída.

Questionário

Idade: Sexo:

Como te deslocas para a escola?

Resposta:

Turma da Marta

Alguns colegas usam mais de um meio para chegar à escola, então a Marta pede para escreverem um só. Caso contrário não obterá uma só resposta por cada colega como pretendia.

Após a recolha de todas os questionários a Marta obteve os seguintes **dados estatísticos** e fez as seguintes **contagens**:

Automóvel: 10

Autocarro: 6

A pé: 6

Comboio: 4

Os dados estatísticos (ou **acontecimentos**) são todas as diferentes respostas que a Marta obteve: automóvel, a pé, autocarro e comboio.

Às contagens chamam-se **frequências absolutas**. A cada acontecimento corresponde uma frequência absoluta. Esse valor representa o número de vezes que esse acontecimento surge.

A Marta pode então construir uma **tabela de frequências absolutas**:

Meio de chegar à escola	Frequência absoluta
Automóvel	10
A pé	6
Autocarro	6
Comboio	4

Mas depois pensou que era interessante dividir estas contagens por sexo. Fez então a seguinte tabela:

Feminino	Masculino	
7	3	Automóvel
2	4	A pé
3	3	Autocarro
2	2	Comboio

Como resultado a Marta pode concluir que:

- O automóvel é o meio mais frequente que os alunos da sua turma utilizam para chegar à escola;
- Existem tantos alunos a ir de autocarro como a pé;
- Dos alunos que veem a pé, a maioria são rapazes;
- O comboio é o meio de transporte menos utilizado;
- Na sua turma existem 12 rapazes e 14 raparigas.



Fotografia de D Sharon Pruitt no Flickr

TABELAS DE FREQUÊNCIAS ABSOLUTAS E RELATIVAS GRÁFICO DE BARRAS E DE PONTOS

* Num estudo estatístico, após a recolha dos dados e da sua organização, torna-se necessário apresentar os resultados de modo a ser possível retirar algumas conclusões.

Construir uma tabela de frequências é o primeiro passo na apresentação dos resultados obtidos.

exemplo

A Marta pretende questionar todos os seus colegas de turma à cerca do modo como se deslocam para a escola.

Após a recolha de todas os questionários obtive os seguintes dados estatísticos e as respetivas frequências absolutas:

Meio de chegar à escola	Frequência absoluta
Automóvel	10
A pé	6
Autocarro	6
Comboio	4

Decidiu então apresentar estes resultados num gráfico de barras verticais chamado **gráfico de barras de frequências absolutas**:



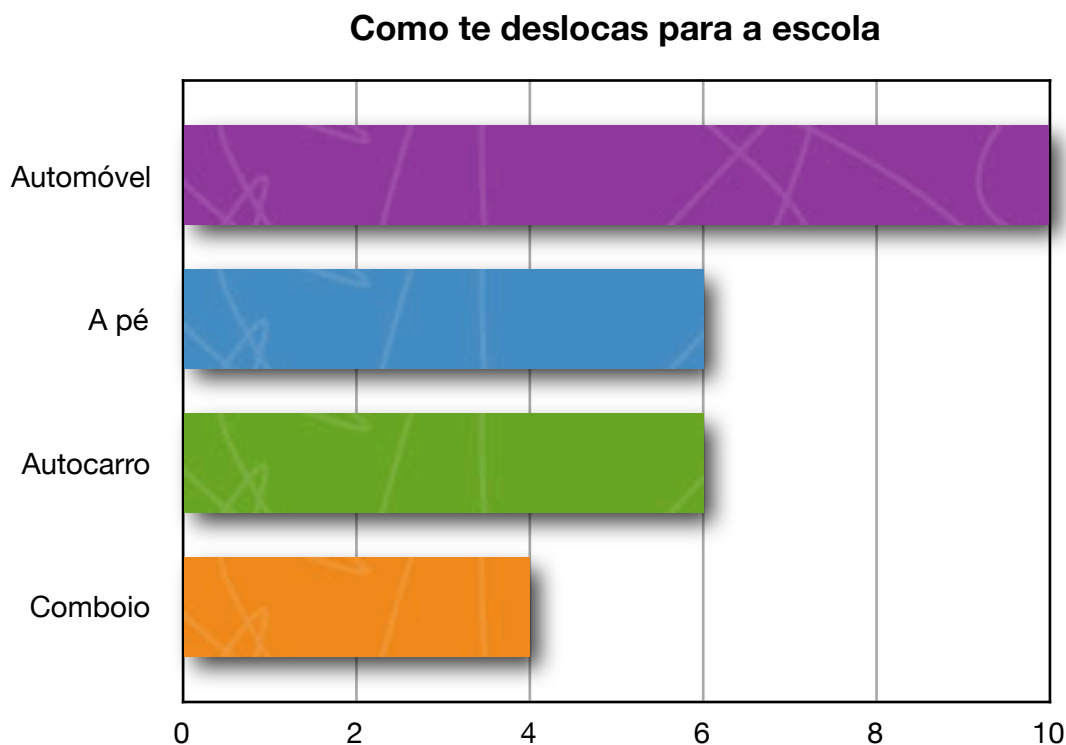
Fot. de Stefan Eggert

- Sendo um gráfico de barras verticais então no eixo horizontal ficam os dados estatísticos obtidos: automóvel, a pé, autocarro e comboio. Em vez de colocar os nomes decidi colocar umas imagens.
- No eixo vertical ficam as frequências absolutas, ou seja as contagens. Precisa então de escolher uma escala. Como os valores obtidos vão de 4 a 10 não é muito difícil. A Marta optou por uma escala de 2 em 2.
- Depois foi fazer as barras, todas da mesma largura e com o mesmo espaço entre elas. Pintou cada uma de sua cor.

Com o seu trabalho assim pronto, pode então apresentá-lo à turma para discussão.

Mais tarde decidiu fazer outro gráfico, um **gráfico de barras horizontais de frequências absolutas**.

Com a ajuda do computador obteve o seu novo gráfico:



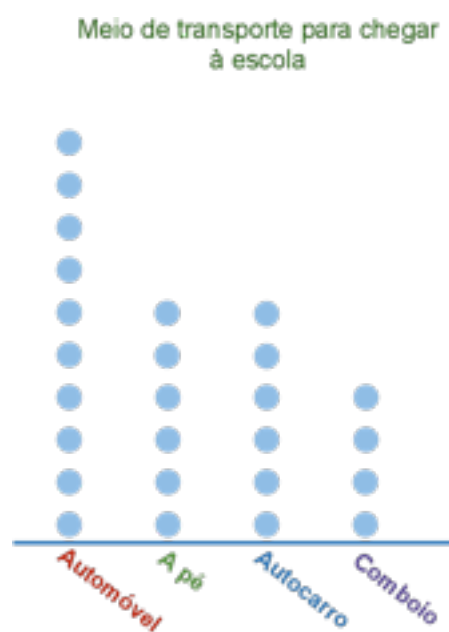
Um colega da Marta propôs fazerem também um **gráfico de pontos**. Vamos ver como ficou:

Cada ponto corresponde a uma contagem. Por isso os 6 pontos para o acontecimento **Autocarro** são a frequência absoluta desse acontecimento.

* Após estes resultados a Marta decidiu usar o que aprendeu sobre frações e percentagens para construir uma nova tabela no seu estudo.

Com a tabela das frequências absolutas a Marta vai calcular que parte dos colegas (em relação à turma toda) chega de automóvel, a pé, de autocarro ou de comboio.

Para isso precisa de saber quantos alunos tem a turma.



Como a soma das frequências absolutas é 26 então esse é o total de alunos da turma da Marta.

Meio de chegar à	Frequência absoluta		Meio de chegar à escola	Frequência absoluta	Fracção
Automóvel	10	→	Automóvel	10	$\frac{10}{26} \approx 0,39$
A pé	6		A pé	6	$\frac{6}{26} \approx 0,23$
Autocarro	6		Autocarro	6	$\frac{6}{26} \approx 0,23$
Comboio	4		Comboio	4	$\frac{4}{26} \approx 0,15$
	26				

Aos valores obtidos pelas frações chamamos **frequências relativas**.

Repara que a **frequência relativa de um acontecimento** é o quociente entre a frequência absoluta desse acontecimento e o total das frequências absolutas.

A frequência relativa surge muitas vezes na forma de percentagem.

A Marta obteve então uma **tabela de frequências absolutas e relativas**:

Meio de chegar à escola	Frequência absoluta	Frequência relativa
Automóvel	10	39%
A pé	6	23%
Autocarro	6	23%
Comboio	4	15%

Observa que a soma das frequências relativas da tabela têm de somar 100% .

Qual a percentagem de colegas da Marta que não vai a pé?

$$39\% + 23\% + 15\% = 77\% \quad \text{ou então} \quad 100\% - 23\% = 77\%$$

PICTOGRAMAS

* Os pictogramas são representações gráficas que ilustram os resultados de um estudo estatístico.

São gráficos onde um símbolo surge repetido por colunas ou linhas. Esse símbolo, um desenho ou imagem, é escolhido de modo a estar relacionado com o estudo feito.

exemplo

Após um inquérito realizado, a todos os alunos de uma escola secundária, sobre que melhoramentos ou sugestões a serem feitas na comida da cantina, estes foram os resultados obtidos:

Sugestões à comida da cantina	Frequência absoluta
Piza uma vez por semana	55
Saladas sempre incluídas no prato	28
Mais comida vegetariana	10
Refeições mais pequenas	45
Menos fritos	60



Fotografia de FoXMuLD3R no Flickr

Uma representação gráfica deste estudo pode ser feita com um gráfico chamado pictograma.

Sendo o tema a comida da cantina vamos escolher um desenho apropriado:



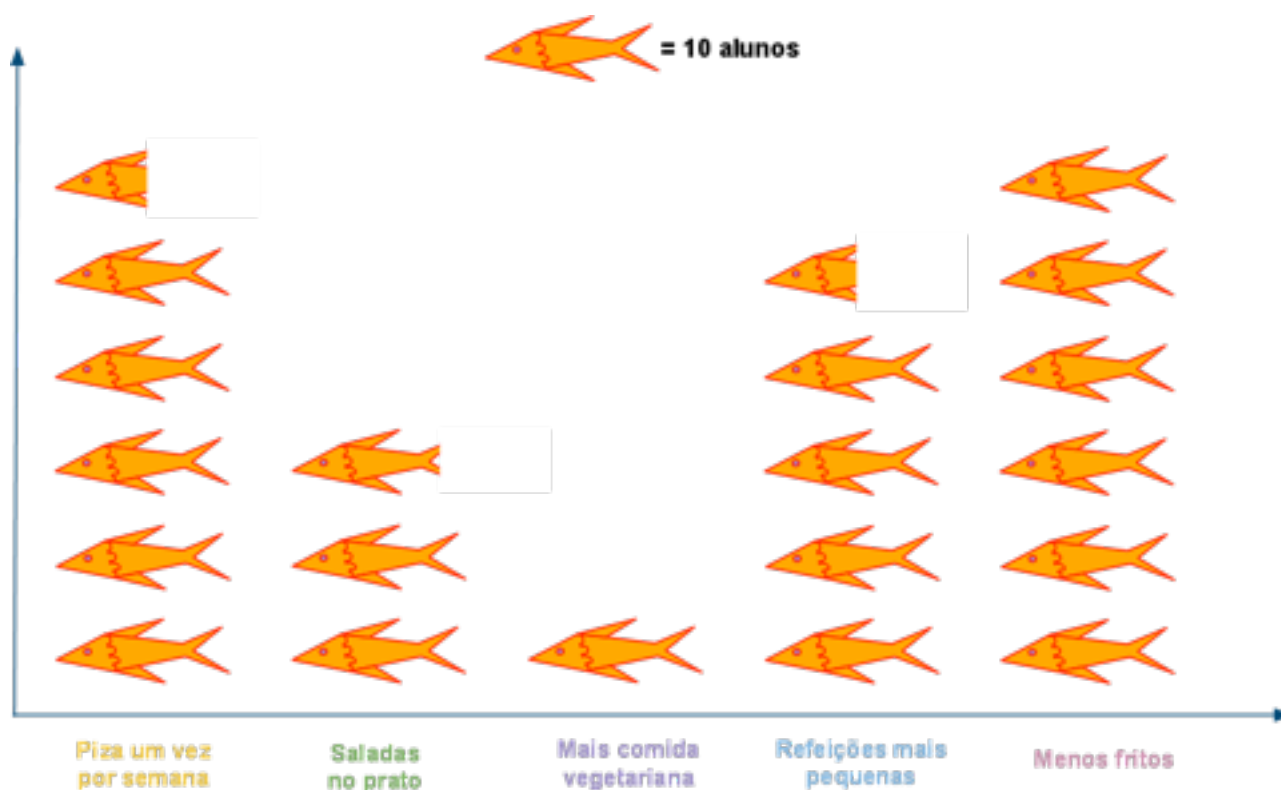
Tendo o símbolo escolhido para o pictograma, precisamos ainda de definir quantos alunos este representa.

Observando na tabela acima as frequências absolutas, temos de ter algum cuidado com o valor a atribuir ao símbolo. Se for um valor muito pequeno vai ser necessário desenhar muitos

símbolos tornando longa a contagem. Se for muito grande, então os símbolos são poucos e depois o gráfico terá pouca precisão.

Vamos definir  = 10 alunos

Então um pictograma possível será:



- Os símbolos podem aparecer tanto na vertical como na horizontal, sempre igualmente espaçados e mantendo o seu tamanho, sem deformações.

- Se o símbolo  representa 10 alunos então metade do desenho

 irá representar 5 alunos.

- No pictograma deve de estar sempre indicado o significado do símbolo.

Que conclusões se podem retirar deste estudo?

- As sugestões mais votadas foram *Menos fritos* e *Piza uma vez por semana*. Mostra que os alunos se preocupam com o que comem mas também que não dispensam uma refeição *fast-food* de vez em quando.
- A sugestão com menos adeptos foi passar a existir mais comida vegetariana;
- Alguns alunos parecem preocupados com o excesso de peso, pois a terceira sugestão mais votada sugere pratos com menos comida.

DIAGRAMA DE CAULE-E-FOLHAS

* Quando estamos perante um grande número de dados estatísticos numéricos, uma outra apresentação destes dados é o **diagrama de caule-e-folhas**.

exemplo



O registo seguinte mostra os pesos, em quilogramas, dos 36 alunos de uma aula de basquetebol.

61	62	60	66	59	53	55	54	58	50	61	59
62	60	57	57	64	49	58	55	48	60	58	61
65	48	56	48	55	54	51	56	51	61	64	49

Fotografia de Gil Searcy no Flickr

Para criarmos um diagrama de caule e folhas interessa observar que algarismos das dezenas surgem nos números acima para os representar no **caule**. Os algarismos das unidades farão parte das **folhas**.

Observa:

Nos números acima temos três algarismos das dezenas diferentes: 6 , 5 e 4
O caule é então construído com os três algarismos colocados neste caso por ordem crescente:

4	
5	
6	

Em frente de cada algarismo das dezenas vamos colocar os respetivos algarismos das unidades à medida que percorremos todos os números acima.

4		9	8	8	8	9													
5		9	3	5	4	8	0	9	7	7	8	5	8	6	5	4	1	6	1
6		1	2	0	6	1	2	0	4	0	1	5	1	4					

Organizando as folhas também por ordem crescente temos finalmente o diagrama de caule-e-folhas pronto:

4		8	8	8	9	9													
5		0	1	1	3	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8	8	9	9
6		0	0	0	1	1	1	1	2	2	4	4	5	6					

Esta organização dos dados estatísticos em relação aos dados iniciais em bruto dá-nos uma visão mais clara.

Que conclusões podemos retirar?

- apenas cinco pessoas tem um peso inferior a 50 kg , ou seja

$$\frac{5}{36} \approx 0,14 = 14\% \text{ das pessoas;}$$

- a pessoa mais leve tem 48 Kg e a mais pesada tem 66 kg ;

- existem quatro pessoas com 61 kg .



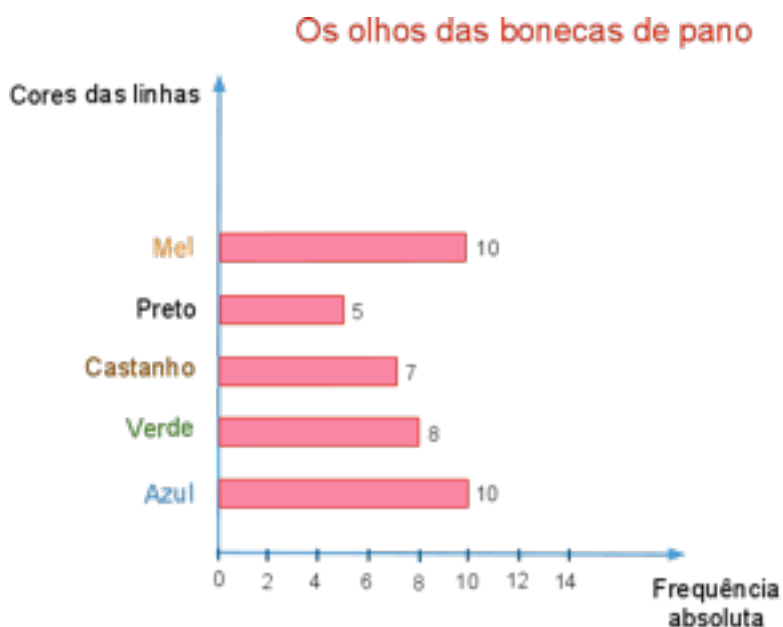
Fotografia de Gil Searcy no Flickr

MODA E MÉDIA ARITMÉTICA

*Num estudo estatístico podemos sempre determinar a **moda**. A **moda** é o dado estatístico que aparece mais vezes, ou seja o que tem maior frequência absoluta ou maior frequência relativa (percentagem ou decimal).

exemplos

1) Numa loja que vende bonecas de pano, os olhos são feitos com linhas de diversas cores. Observa o respetivo gráfico de barras e identifica a moda.



Neste caso o dado estatístico que tem maior frequência absoluta, não é apenas um, mas sim dois: Azul e Mel.

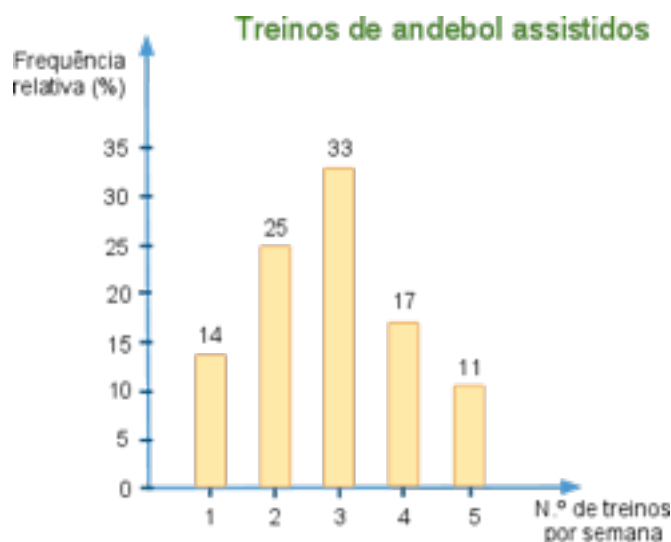
Ambos têm 10 contagens logo as modas são Azul e Mel.

Dizemos que este estudo é **bimodal** (tem duas modas).



Fotografia de Normanack no Flickr

2) Considerando o gráfico seguinte referente a um inquérito realizado às pessoas que assistiam a um treino de andebol.



a) Qual foi a resposta mais frequente?

A resposta mais frequente é três treinos de andebol por semana.

A moda é 3.

b) Qual a percentagem de pessoas que assiste no máximo a dois ensaios por semana?

$$14 + 25 = 39$$

R: 39%



Fotografia de Thomas Faivre-Duboz no Flickr

* A média é uma medida estatística que se ouve falar com muita frequência. A média dos ordenados, a temperatura anual média, o peso médio dos bebés, entre muitos outros exemplos.

Como se pode calcular a média?

Primeiro ter atenção que não podemos calcular a média de dados estatísticos que não são números!

Por exemplo, no caso anterior dos olhos das bonecas de pano, não faz sentido saber a média das cores dos botões!!

A média é calculada através da soma de todos os dados obtidos e dividindo depois pelo total de dados.

exemplos

1) A Joana teve as seguintes notas nos testes da disciplina de Português:
15, 14, 14, 16 e 12

Qual foi a nota média da Joana a Português?

A nota média irá representar todos os valores dos seus testes, assim se os somarmos todos:

$$15 + 14 + 14 + 16 + 12 = 71$$

E dividirmos esse número pelo total de notas (5 notas):

$$\frac{71}{5} = 14,2$$

Então 14,2 é a nota média da Joana a Português.
Tinha de ser um valor entre 12 e 16, claro!

Ou seja, é como se as suas cinco notas fossem para efeitos de média todas iguais a 14,2.



2) Foi realizada uma venda de garagem durante três dias. Este é o gráfico de pontos com o número de vendas por cada dia:



a) Quantos objectos foram vendidos nos três dias?

$$5 + 7 + 3 = 15$$

R: 15 objectos nos três dias.

b) Qual o número médio de objectos vendidos por dia?

$$15 : 3 = 5$$

R: Foram vendidos em média 5 objectos por dia, ou seja $5 + 5 + 5 = 5 + 7 + 3$.



3) No diagrama de caule-e-folhas seguinte estão representados os ordenados, em euros, do pessoal de uma empresa:

47	5	5	5
62	3	5	
65	0	6	
78	1		
95	7		
98	0		

Qual o ordenado médio?

Somando os dados obtidos:

$$475 \times 3 + 623 + 625 + \dots + 980 = 6697$$

Contando quantos dados estatísticos são: 10

$$\text{Então } 6697 : 10 = 669,7$$

R: O ordenado médio é € 669,70 .



Fotografia de Mundo Resink no Flickr

4) Três amigos levaram umas gomas para a escola para dividirem entre eles. Um deles levou 10 gomas e sabemos ainda que a média de gomas foi 11. Indica duas hipóteses para a quantidade de gomas que os outros dois levaram.



Sendo a média 11 então é como se cada um deles tivesse levado 11 gomas:

11 11 11

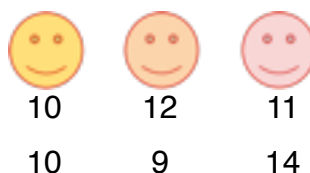
Ou seja descobrimos que no total levaram 33 gomas.

Então $10 + ? + ?? = 33$.



Fotografia de Mauren Veras no Flickr

Assim podemos ter por exemplo:



PREVISÃO DE ACONTECIMENTOS

* As previsões fazem parte da natureza do ser humano, baseado em experiências ou em costumes, falamos muitas vezes em *é provável que chova hoje* ou *é muito pouco provável que ganhe o euromilhões*. Ou seja fazemos previsões para certos acontecimentos baseados na probabilidade de estes ocorrerem.

Os acontecimentos podem ser avaliados como **certos**, **impossíveis** e **prováveis** (muito ou pouco).

* Um **acontecimento certo** é aquele que acontece sempre.

exemplo

É certo que

- a) ao lançar uma moeda ao ar, o resultado é cara ou coroa.
- b) ao soletrar a palavra azul, a vogal i não é ouvida.
- c) ao olhar-me ao espelho, a minha mão esquerda passa a direita.

* Um **acontecimento impossível** é aquele que nunca pode acontecer.

exemplo

É impossível que

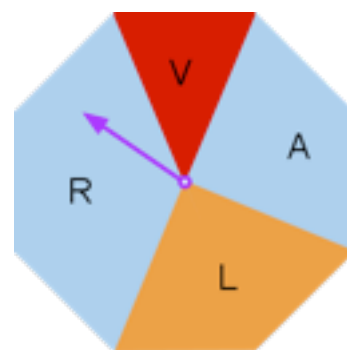
- a) ao escrever num papel branco com um lápis azul o traço no papel seja amarelo.
- b) ao tirar uma carta do baralho novo, saia uma carta com 11 pintas.
- c) ao lançar um dado de pintas de 1 a 6, o resultado seja zero pintas.

* Um **acontecimento muito provável** ou **pouco provável** é aquele que, respetivamente, tem muita ou pouca probabilidade de acontecer.

exemplo

Observando a roleta e rodando o ponteiro:

- a) é mais provável que o ponteiro fique na zona azul.
- b) a cor menos provável de sair é o vermelho.
- c) a zona L é mais provável de sair que a zona V.
- d) existem duas zonas com igual probabilidade de o ponteiro vir a parar.



TEMA

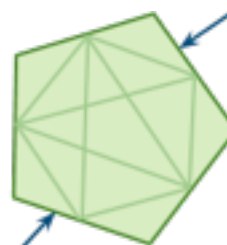
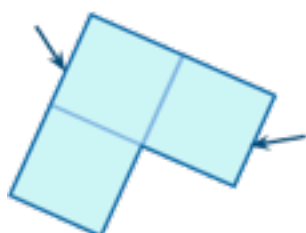
6

Perímetros



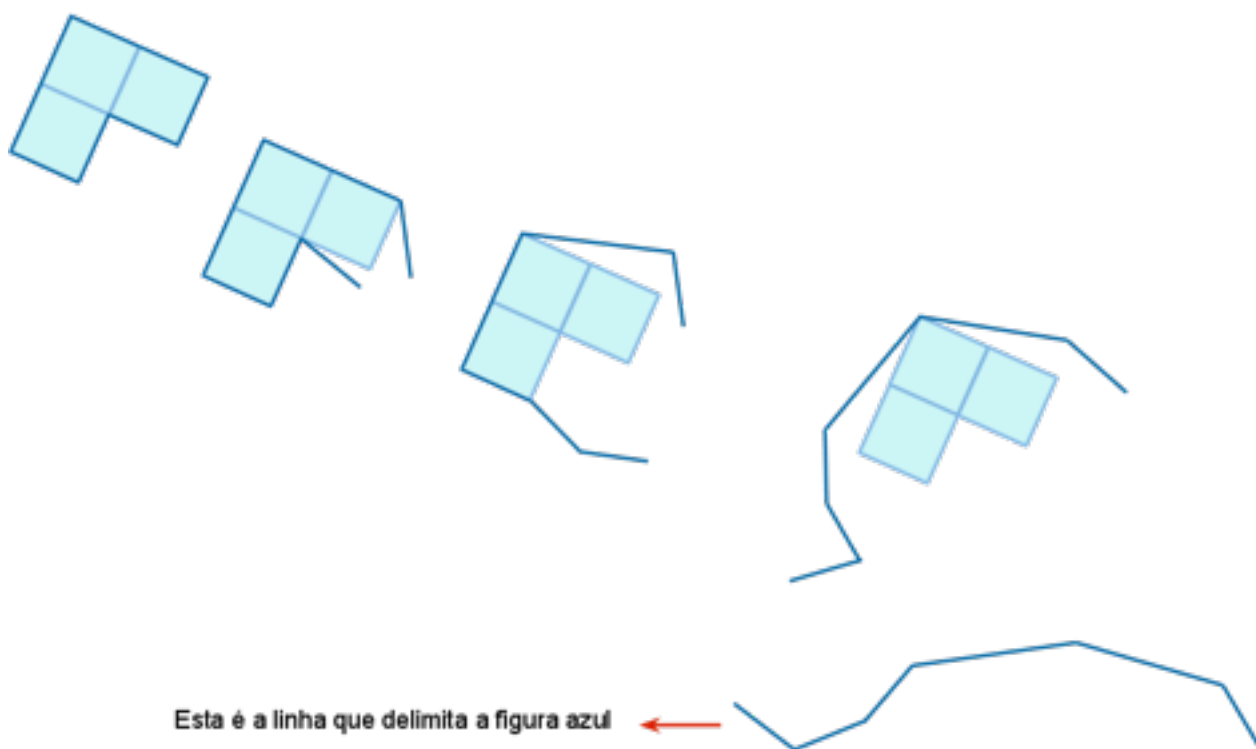
PERÍMETRO DE POLÍGONOS UNIDADES

* O que é o perímetro de uma figura plana? É o comprimento da linha que a delimita.



Num polígono chama-se **perímetro** à soma dos comprimentos de todos os seus lados.

exemplo



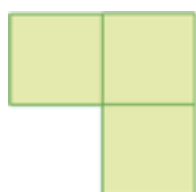
O seu comprimento é o perímetro da figura azul



* O comprimento do perímetro de uma figura é único, a sua medição é que toma valores diferentes dependendo da **unidade** escolhida para o medir.

exemplo

Observa a figura e determina a medida do seu perímetro tendo em contas as três unidades sugeridas:



Unidade: lado do quadrado

Unidade: metade do lado do quadrado

Unidade: metro

Medida do perímetro onde a unidade é o lado do quadrado: 8

Medida do perímetro onde a unidade é o metade do lado do quadrado: 16

Compara os dois resultados anteriores. Repara que ao reduzir a unidade para metade a medida do perímetro passou para o dobro!

Medida do perímetro onde a unidade é o metro:

Se o lado do quadrado medir, por exemplo, 1,6 cm então o perímetro medirá $8 \times 1,6 \text{ cm} = 12,8 \text{ cm} = 0,128 \text{ m}$

* Relembramos que a **unidade de medida de comprimento** é o metro mas que existem mais medidas de comprimento:

Quilómetro	Hectómetro	Decâmetro	Metro	Decímetro	Centímetro	Milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Passamos de uma unidade para a seguinte multiplicando por 10 .

Ao contrário será dividir por 10 !

exemplos

1) Uma distância de 35 200 m são 35,2 Km .

2) Uma formiga das Amazónicas é chamada de formiga gigante pois mede cerca de 0,025 m ou seja 2,5 cm.



Fotografia de Betim's no Flickr

3) O monumento do Cristo Rei em Almada tem cerca de 110 m de altura, ou seja, 110 000 mm ou então 0,110 Km .

$$110 \text{ m} = 110\,000 \text{ mm}$$

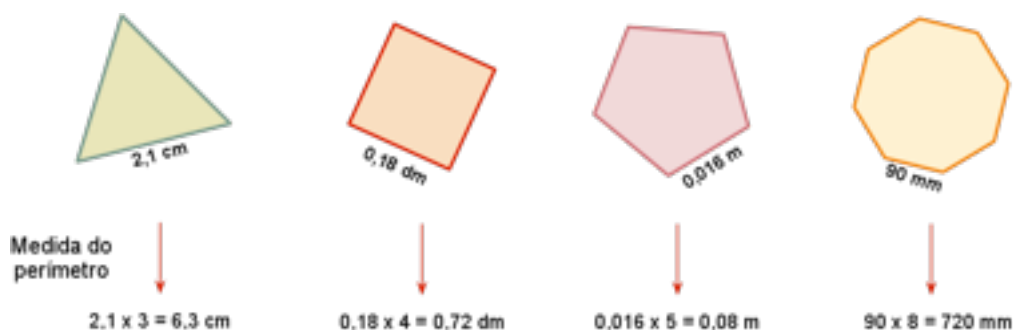
$$110 \text{ m} = 0,110 \text{ Km} = 0,11 \text{ Km}$$



Fotografia de Adriaio no Wikipedia Commons

* Vamos calcular o perímetro de alguns **polígonos regulares**.

As figuras seguintes representam um triângulo equilátero, um quadrado, um pentágono regular e um octógono regular:



Observamos que **a medida do perímetro de um polígono regular** é exactamente:
a medida do comprimento de um dos lados $\times$ número de lados do polígono

Outros polígonos também permitem um cálculo rápido do seu perímetro.

exemplos



Perímetro do losango: $2,7 \times 4 = 10,8 \text{ cm}$ (pois o losango tem 4 lados geometricamente iguais)

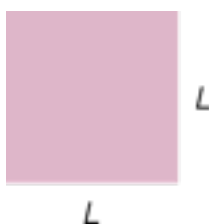
Perímetro da seta: $110 \times 4 + 260 \times 2 = 960 \text{ mm}$

Perímetro do trapézio isósceles: $300 + 190 + 240 \times 2 = 970 \text{ mm}$

* Perímetro do quadrado e do retângulo.

Já calculamos anteriormente o perímetro de um quadrado. É uma figura de quatro lados todos do mesmo comprimento logo:

$$P_{\text{quadrado}} = 4 \times L$$



Para o perímetro do retângulo, como os lados são iguais dois a dois, então conhecendo o valor do seu comprimento C e da sua largura L :

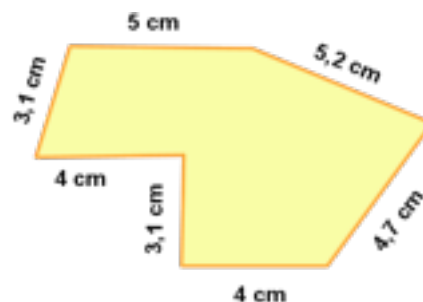
$$P_{\text{rectângulo}} = 2 \times C + 2 \times L$$

$$P_{\text{rectângulo}} = 2 \times (C + L)$$



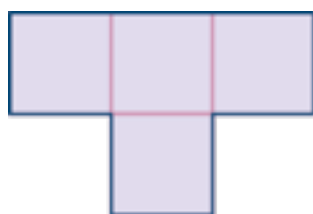
EXERCÍCIO 1

1) Calcula a medida do perímetro da figura ao lado.

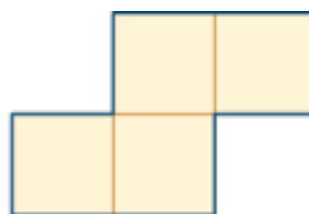


2) Num quadrado de lado com 6,26 dm qual o valor do seu perímetro?

3) Determina o perímetro das duas figuras seguintes sabendo que cada quadrado tem de medidas 2 cm x 2 cm.



R



S

EXERCÍCIO 2

1) A Ana fez a correr um percurso retangular. Um dos lados do percurso mede 850 metros. Sabendo que ela deu uma volta completa e que percorreu 2,16 km , qual a medida em falta deste percurso retangular?

2) Observa os três primeiros termos de uma sequência:



a) Indica o perímetro destas três primeiras figuras considerando a unidade o lado do quadrado.

b) Diz qual será o valor do perímetro das duas figuras seguintes nesta sequência.

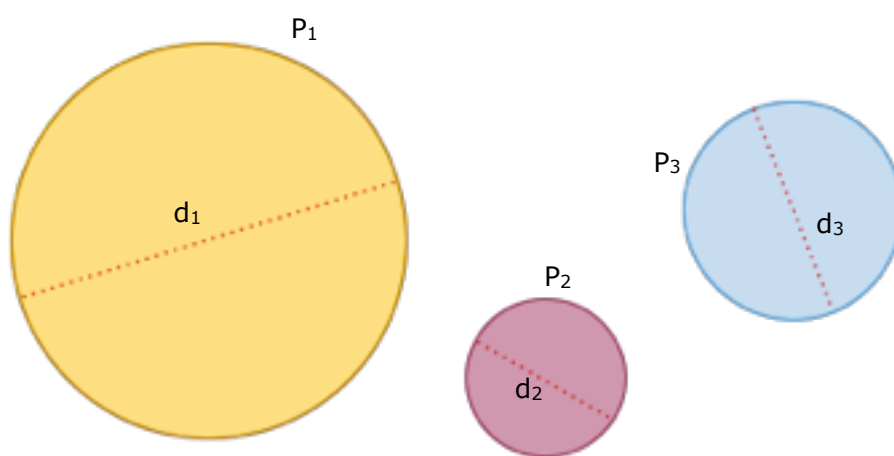
c) E da 50.ª figura ?

PERÍMETRO DO CÍRCULO

* O **perímetro de um círculo** é o comprimento da linha que o delimita, ou seja, é o comprimento da circunferência associada a esse círculo.

Verifica-se que para **qualquer círculo**, por maior ou mais pequeno que seja:

a divisão entre o seu perímetro e o seu diâmetro é uma constante, ou seja o resultado é constante: 3,14159 ... !



$$P_1 : d_1 = P_2 : d_2 = P_3 : d_3 \approx 3,14$$

Esse número designa-se pela letra grega π e lê-se *pi*.

É um número racional, ou seja uma dízima infinita não periódica. Usamos quase sempre uma aproximação ao utilizarmos o π , por exemplo 3,14, mas podemos usar mais casas decimais.

Sendo P o perímetro de uma circunferência e d o seu diâmetro, podemos então escrever:

$$P = \pi \times d$$

Esta é a expressão que nos permite determinar o valor do perímetro de uma circunferência ou de um círculo.

Relembra: a medida do raio de uma circunferência é metade do valor do diâmetro, ou seja o diâmetro é o dobro do raio.

exemplos

1) Calcula o valor do perímetro, em metros, de uma circunferência com 25 mm de raio.

$$r = 25 \text{ mm} = 0,025 \text{ m}$$

$$d = 2 \times r = 2 \times 0,025 = 0,05 \text{ m}$$

$$\text{Então } P = \pi \times d = \pi \times 0,05 \approx 3,14 \times 0,05 = 0,157$$

R: O perímetro da circunferência mede aproximadamente 0,157 metros.

2) Um autocolante foi colocado em redor de uma lata cilíndrica cobrindo a lata sem se sobrepor.

O autocolante tinha 354,82 mm de comprimento. Qual o diâmetro, em cm, da lata?

$$354,82 \text{ mm} = 35,482 \text{ cm}$$

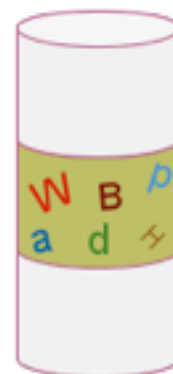
Como o comprimento do autocolante representa o perímetro da circunferência da lata:

$$P = \pi \times d$$

$$35,482 \approx 3,14 \times d$$

$$d \approx \frac{35,482}{3,14}$$

$$d \approx 11,3$$



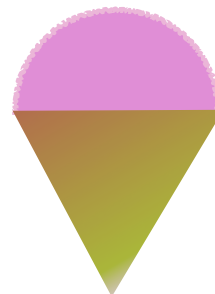
R: O diâmetro da lata é aproximadamente 11,3 cm.

EXERCÍCIO 3

1) O logotipo para um gelado foi feito com um semicírculo e um triângulo equilátero com 7 cm de lado.

a) Qual o perímetro da meia bola de gelado rosa representado no logotipo?

b) E o perímetro do bordo do logotipo?



2) Observa a sequência seguinte construída a partir de uma circunferência com 4 unidades de diâmetro:



a) Calcula o valor dos perímetros destas figuras.

b) Indica qual será o valor do perímetro da figura seguinte na sequência.

TEMA

7

Áreas



FIGURAS CONGRUENTES
FIGURAS EQUIVALENTES
UNIDADE DE ÁREA

* Duas figuras dizem-se **congruentes** ou **geometricamente iguais** quando têm a mesma forma e o mesmo tamanho, ou seja, as figuras coincidem ponto por ponto quando sobrepostas.

Para simplificar dizemos muitas vezes que as figuras são iguais.

exemplos

1) Estas três figuras são congruentes. Se recortasse-mos a primeira figura conseguiríamos sobrepor-la nas duas figuras seguintes.



2) Estas figuras têm a mesma forma mas tamanhos (ou dimensões) diferentes. Logo não são congruentes.

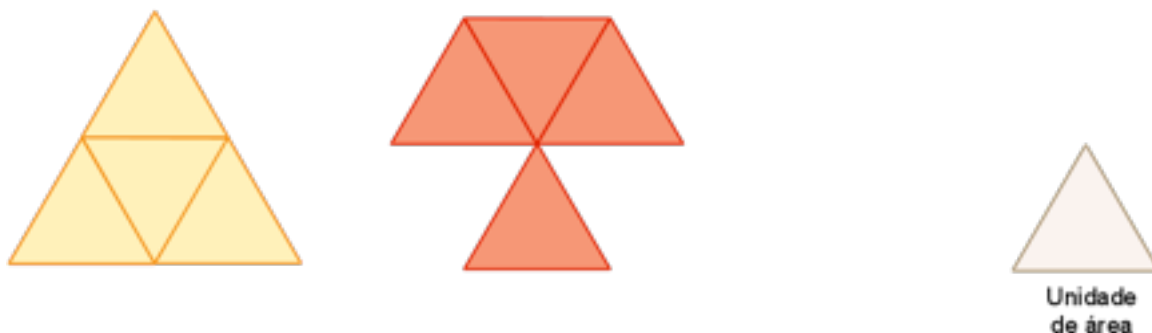


* Duas figuras dizem-se **equivalentes** quando têm a mesma área.

Para se medir a área de uma figura precisamos de uma unidade de área. O número de vezes que essa unidade de área "cabe" na figura é o valor da área da figura.

exemplos

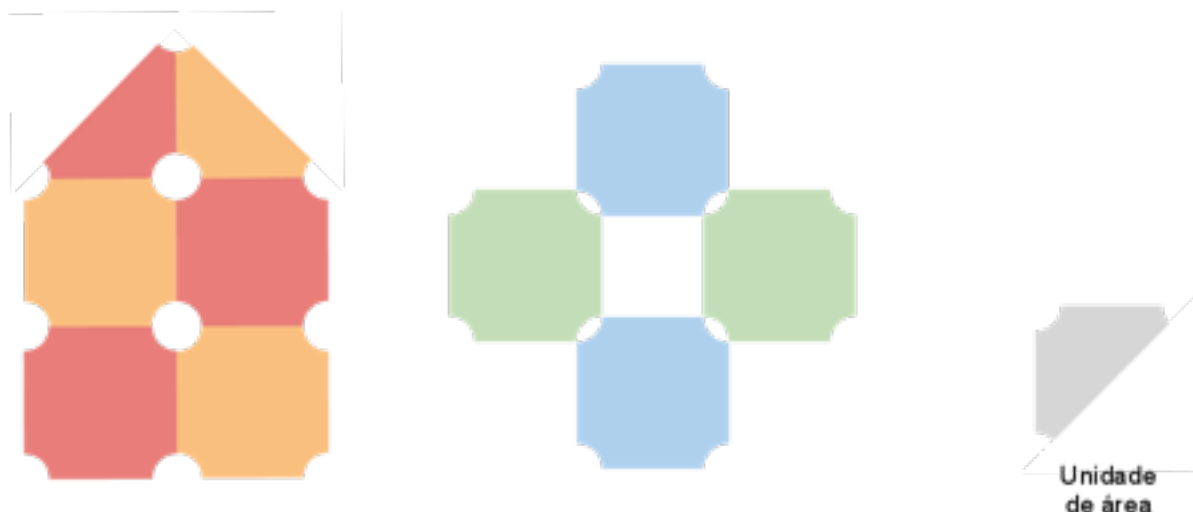
1) As duas figuras foram construídas com triângulos geometricamente iguais embora de cores diferentes. As duas figuras têm a mesma área?



Sendo o triângulo a unidade de área escolhida então as duas figuras, cada uma com quatro triângulos, ocupam a mesma área: 4 unidades de área.

R: As duas figuras são equivalentes.

2) Os dois tipos de pavimento (zona colorida) foram construídos a partir do mesmo mosaico quadrado de cantos arredondados. Qual a área de cada pavimento? São equivalentes?



A área do pavimento vermelho e laranja é 10 unidades de área.

A área do pavimento verde e azul é 8 unidades de área.

R: Os pavimentos não são equivalentes.

* Tal como no cálculo da medida do perímetro, a medida da área varia consoante a unidade de área escolhida, apesar da área ocupada ser a mesma.

exemplo

Vamos comparar as medidas da área de um pavimento consoante a unidade de área:

Com esta unidade a área do pavimento mede:

$$2 + 2 \times 4 = 2 + 8 = 10$$

10 unidades de área



Com a unidade de área representada o pavimento tem:

$$4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4 + 1 = 5$$

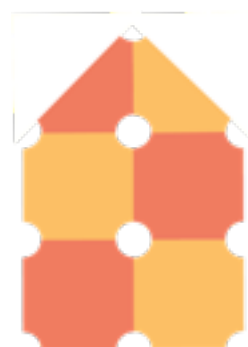
5 unidades de área



Repara: A unidade de área é o dobro da anterior logo a medida da área passou para metade.

Seguindo o raciocínio anterior se a nova unidade de área é um quarto da anterior então a medida da área do pavimento deverá de ser o quádruplo da anterior medida:

$$4 \times 5 = 20 \text{ unidades de área}$$



Vamos confirmar contando quantas unidades temos:

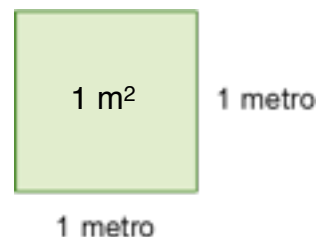
$$2 + 2 + 4 \times 4 = 4 + 16 = 20$$

ÁREA DO RETÂNGULO E DO QUADRADO

* Para ser possível reconhecer, por todas as pessoas, a medida da área de uma figura plana usamos o sistema métrico internacional.

A unidade de medida de área é o **metro quadrado**.

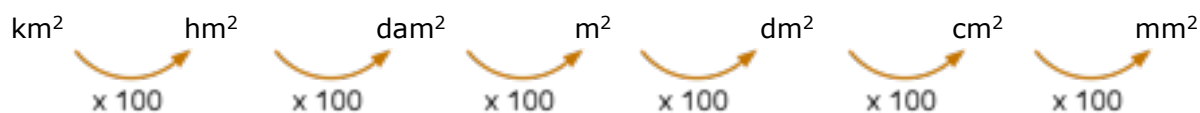
O metro quadrado é a área de um quadrado com 1 metro de lado.



Não usamos só o metro quadrado mas também os seus múltiplos: o km^2 , o hm^2 e o dam^2 .

Bem como os seus submúltiplos: o cm^2 , o dm^2 e o mm^2 .

Não esquecer que passamos de cada unidade para a seguinte multiplicando por 100 :



Ao contrário será necessário dividir por 100 .

exemplos

1) Num edifício mediu-se a área da sua superfície lateral para ser revestida de azulejo. Tinha aproximadamente $2\,758\,900\text{ cm}^2$.

Ou seja precisamos de $275,89\text{ m}^2$ de azulejo.

$$2\,758\,900\text{ cm}^2 = 275,89\text{ m}^2$$

(recuamos 4 casas decimais pois dividimos por 100 duas vezes)



2) Um tapete com $2,16 \text{ m}^2$ tem $2\,160\,000 \text{ mm}^2$.

$$2,16 \text{ m}^2 = 2\,160\,000 \text{ mm}^2$$

(avancamos a vírgula 6 casas decimais pois multiplicamos por 100 três vezes, ou seja multiplicamos por 10^6)



* Área do retângulo e do quadrado.

Considerando um retângulo de comprimento de medida c e largura de medida l então a sua área é **o produto da medida do comprimento pela medida da largura.**



$$A_{\text{rectângulo}} = c \times l$$

exemplo

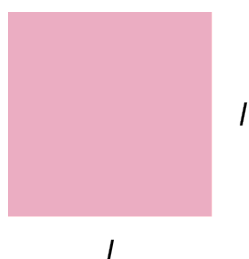
Se o anterior retângulo amarelo tiver $c = 4,5 \text{ cm}$ e $l = 2,4 \text{ cm}$ então a sua área mede:

$$4,5 \text{ cm} \times 2,4 \text{ cm} = (4,5 \times 2,4) \text{ cm}^2 = 10,8 \text{ cm}^2$$

$$\text{ou simplesmente } 4,5 \times 2,4 = 10,8 \text{ cm}^2$$

Um quadrado é um caso particular de um retângulo pois os seus lados tem igual comprimento.

Então escrevemos que a área de um quadrado de lado com comprimento l é o produto $l \times l$.



$$A_{\text{quadrado}} = l \times l$$

exemplo

Se o anterior quadrado rosa tiver $l = 2,8 \text{ cm}$ então a sua área mede:

$$2,8 \text{ cm} \times 2,8 \text{ cm} = (2,8 \times 2,8) \text{ cm}^2 = 7,84 \text{ cm}^2$$

$$\text{ou mais rapidamente } 2,8 \times 2,8 = 7,84 \text{ cm}^2$$

Mas atenção às unidades! Na resolução de um problema é preciso reduzir os dados sempre à mesma unidade de medida.

exemplo

Um jardim retangular tem $117,75 \text{ dam}^2$ de área. No seu interior tem um espaço quadrado de piso amarelo para outras atividades.



Foi colocado relva em todo o jardim excepto no piso amarelo. Quantos rolos de relva com 120 m^2 foram necessários?

Conhecendo a área do jardim basta determinar a área do quadrado:

$$0,323 \text{ hm} = 32,3 \text{ m} \quad \text{e} \quad 32,3 \times 32,3 = 1043,29 \text{ m}^2$$

Logo a zona a ser relvada tem de área:

$$A_{\text{rectângulo}} - A_{\text{quadrado}}$$

$$\text{Como } 117,75 \text{ dam}^2 = 11\,775 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{rectângulo}} - A_{\text{quadrado}} = 11\,775 - 1043,29 = 10\,731,71 \text{ m}^2$$



Fotografia de Crstphere no Flickr

Como cada rolo de relva tem 120 m^2 então dividindo a área a ser relvada pela área do rolo:

$$\frac{1073,71}{120} \approx 89,43$$

R: São necessários 90 rolos.

* Perímetros e áreas de retângulos e quadrados.

Já sabemos que o perímetro de uma figura é a soma dos comprimentos dos seus lados. Vejamos alguns exemplos em que as figuras são retângulos ou quadrados para comparar os seus perímetros e áreas.

exemplos

1) Considera as duas figuras seguintes constituídas por quadrados iguais de 70 mm de lado.

Calcula os perímetros e as áreas respectivas.



A *figura rosa* e a *figura verde* têm de área 4 quadrados: $(70 \times 70) \times 4 = 19\,600 \text{ mm}^2$

$P_{\text{figura rosa}} = 10 \times 70 = 700 \text{ mm}$ e $P_{\text{figura verde}} = 10 \times 70 = 700 \text{ mm}$

(ambas são limitadas por 10 segmentos com 70 mm)

Repara: Temos duas figuras não congruentes mas com a mesma área e o mesmo perímetro.

2) Considera um quadrado com 12 cm de lado e um retângulo de medidas 6 cm x 24 cm . Calcula os seus perímetros e áreas.

$$A_{\text{quadrado}} = 12 \times 12 = 144 \text{ cm}^2$$

$$P_{\text{quadrado}} = 12 \times 4 = 48 \text{ cm}$$

$$A_{\text{retângulo}} = 6 \times 24 = 144 \text{ cm}^2$$

$$P_{\text{retângulo}} = (6 \times 2) + (24 \times 2) = 12 + 48 = 60 \text{ cm}$$



Repara: Temos duas figuras com a mesma área mas com perímetros diferentes.

3) Considera um quadrado com 21 cm de lado. Encontramos algum retângulo com o mesmo perímetro? Calcula depois a sua área e compara-a com a do quadrado.

$$A_{\text{quadrado}} = 21 \times 21 = 441 \text{ cm}^2 \quad \text{e} \quad P_{\text{quadrado}} = 21 \times 4 = 84 \text{ cm}$$

Para encontrar um retângulo com perímetro igual a 84 cm :

Escolhendo por exemplo um dos lados com 30 cm de comprimento:



$$30 \times 2 = 60 \quad \text{então o lado em falta mede} \quad (84 - 60) : 2 = 24 : 2 = 12 \text{ cm}$$

Encontrámos um retângulo de medidas 30 cm x 12 cm .

$$A_{\text{retângulo}} = 30 \times 12 = 360 \text{ cm}^2 \quad \text{é menor que a área do quadrado.}$$

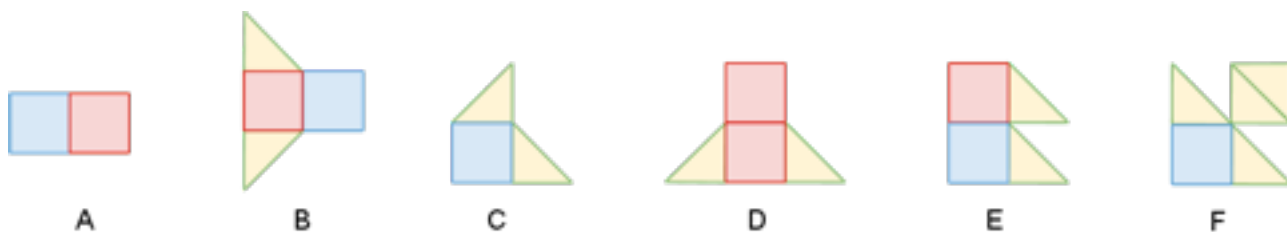
Repara: Temos duas figuras com o mesmo perímetro mas área diferentes.

Conclusões:

- Duas figuras podem ter a mesma área e perímetros diferentes;
- Duas figuras podem ter o mesmo perímetro e áreas diferentes;
- Duas figuras podem ter a mesma área e o mesmo perímetro e não serem congruentes.

EXERCÍCIO 1

Observa as seguintes figuras planas construídas com quadrados e triângulos.



1) Indica:

- a) duas figuras congruentes;
- b) duas figuras com a mesma área mas não congruentes;
- c) duas figuras não congruentes com o mesmo perímetro;
- d) duas figuras com a mesma área e perímetros diferentes. Qual tem maior perímetro?

2) As figuras A e C ocupam a mesma área mas qual terá maior perímetro?

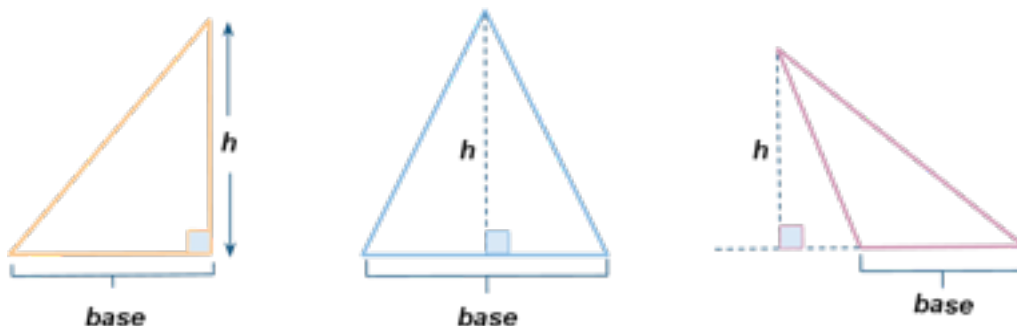
3) Existem figuras com a mesma área e perímetro mas geometricamente diferentes?

ÁREA DO TRIÂNGULO DECOMPOSIÇÃO DE FIGURAS

* A área do triângulo relaciona-se com a área do retângulo. Os elementos necessários ao seu cálculo são a medida da base do triângulo e a medida da sua altura. Atenção que a altura do triângulo depende da base escolhida.

Vamos recordar o que é a **altura** de um triângulo:

Escolhe a base do triângulo e encontra o seu vértice oposto. A altura é o segmento de reta, h , que une na perpendicular esse vértice à base.

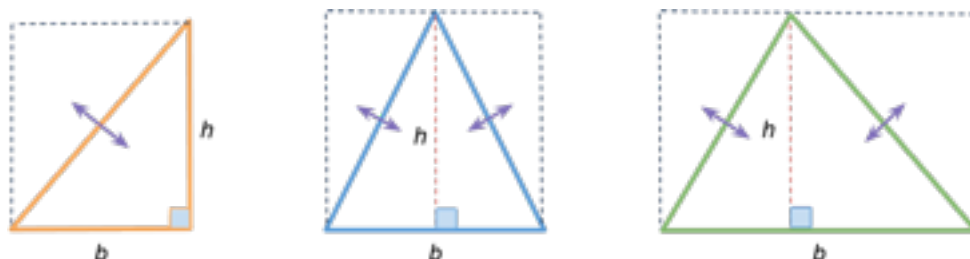


A **área do triângulo** é metade do produto da medida da base, b , pela medida da altura h :

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \times h}{2}$$

Se num triângulo a base medir 20 cm e a altura 23 cm então $A_{\text{triângulo}} = \frac{20 \times 23}{2} = 230 \text{ cm}^2$.

Observa: Em cada um dos casos seguintes é fácil de ver que o triângulo ocupa metade da área do retângulo (com a mesma base e a mesma altura do triângulo). As setas indicam os pares de triângulos geometricamente iguais.

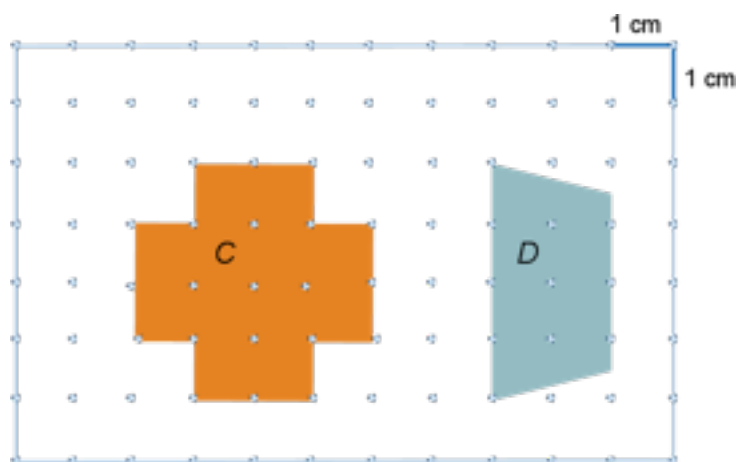


Ou seja, **a área de um triângulo é metade da área de um retângulo com a mesma base e altura.**

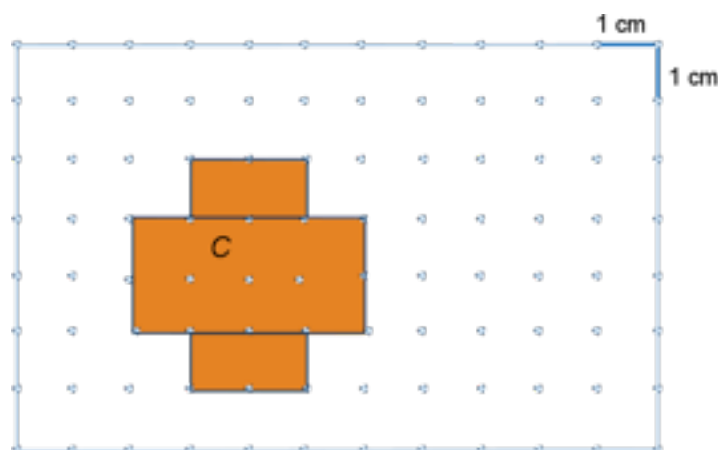
* No cálculo de áreas de figuras planas usamos, sempre que possível, o conhecimento adquirido acerca das áreas de retângulos, quadrados e triângulos. A decomposição de figuras nestes elementos é assim importante para o cálculo da medida das suas áreas.

exemplos

1) Como calcular a área destas figuras geométricas?



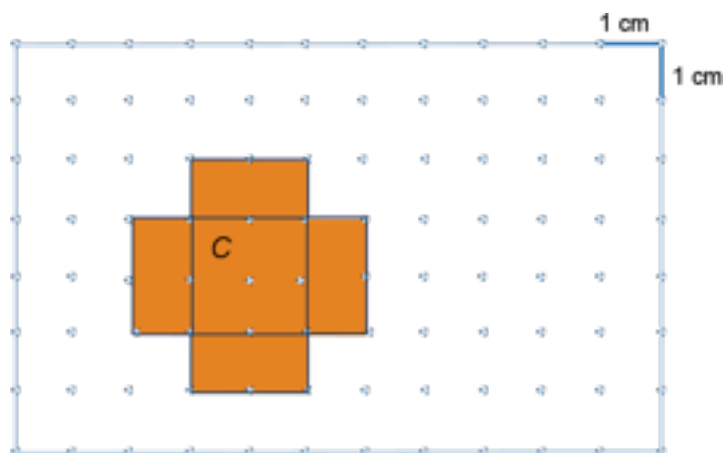
Para a figura C vamos decompô-la em três retângulos:



Medindo as áreas dos retângulos da figura, de cima para baixo:

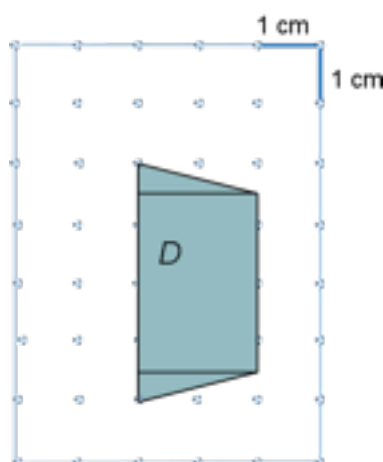
$$A_{\text{figura C}} = (2 \times 1) + (4 \times 2) + (2 \times 1) = 2 + 8 + 2 = 12 \text{ cm}^2$$

Vejamos outra decomposição: um quadrado e quatro retângulos iguais



$$A_{\text{figura } C} = (2 \times 2) + 4 \times (2 \times 1) = 4 + 4 \times 2 = 4 + 8 = 12 \text{ cm}^2$$

Para a figura D vamos decompô-la num retângulo e em dois triângulos:



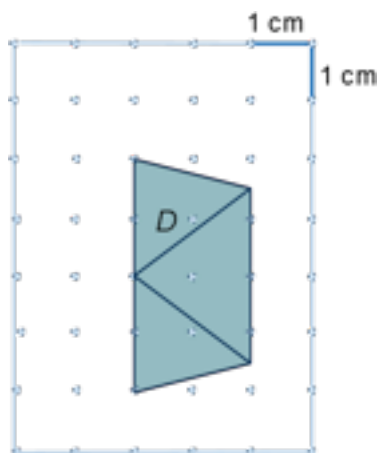
Medindo os elementos da decomposição de cima para baixo:

$$A_{\text{figura } D} = \frac{(2 \times 0,5)}{2} + (2 \times 3) + \frac{(2 \times 0,5)}{2} = 0,5 + 6 + 0,5 = 7 \text{ cm}^2$$

Também podemos observar que os dois triângulos são iguais e que juntos formam um retângulo de área $(0,5 \times 2) \text{ cm}^2$. Assim outra apresentação para o cálculo da área da figura D é:

$$A_{\text{figura } D} = (2 \times 0,5) + (2 \times 3) = 1 + 6 = 7 \text{ cm}^2$$

Vejamos outra decomposição: três triângulos onde dois deles são congruentes



Considerando como bases dos triângulos os segmentos verticais, os valores das bases e da altura são imediatos:

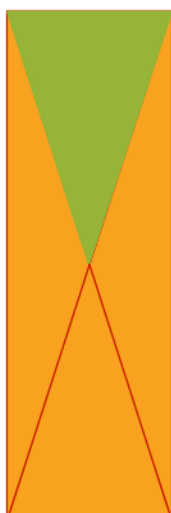
os dois triângulos congruentes têm base e altura com 2 cm

o outro triângulo tem 3 cm de base e 2 cm de altura

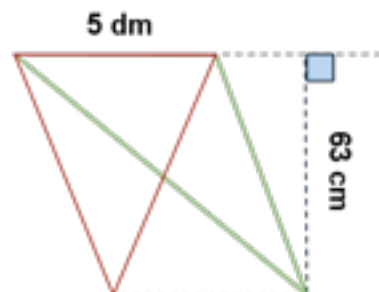
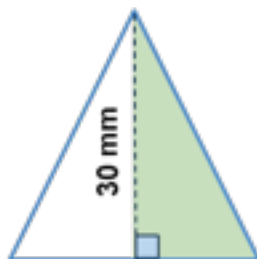
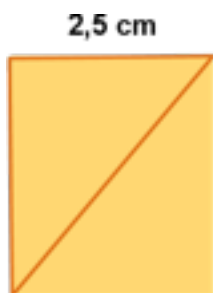
$$A_{\text{figura } D} = 2 \times \frac{2 \times 2}{2} + \frac{2 \times 3}{2} = 4 + 3 = 7 \text{ cm}^2$$

EXERCÍCIO 2

1) Qual a altura, em metros, do seguinte painel com 85 cm de largura sabendo que o triângulo verde tem 5525 cm² de área?



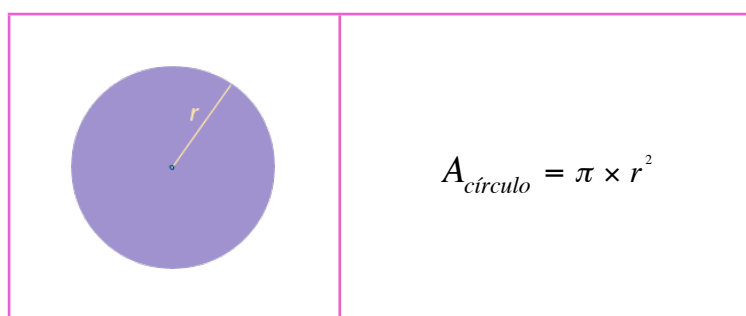
2) Observa as seguintes figuras. Sabemos que a área do retângulo amarelo mede $7,25 \text{ cm}^2$ e que o triângulo retângulo verde têm 234 mm^2 de área.



- Qual a área do triângulo que se encontra no retângulo amarelo? Calcula a sua altura.
- Calcula a medida da base do triângulo isósceles azul.
- Calcula a área de cada um dos triângulos vermelho e verde da última figura.

ÁREA DO CÍRCULO

* Para o cálculo da área do círculo precisamos apenas de conhecer a medida do seu diâmetro ou do seu raio.



Relembrando que o perímetro do círculo é $\pi \times d = \pi \times 2 \times r$, verificamos que a unidade do perímetro será a unidade do raio (se o raio for medido em dm, a medida do perímetro virá em dm).

Faz então sentido que a unidade da área do círculo, seja a unidade não do raio, mas do quadrado do raio. Se o raio for medido em cm, a medida da área virá em cm^2 .

exemplos

(usa 3,14 para o valor de π)

1) Num relógio com 22 cm de diâmetro calcula a medida da área da zona limitada pelos ponteiros situados nas 10h:10m.



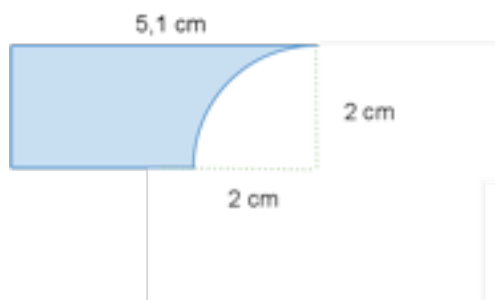
A área do círculo é $\pi \times 11^2 \approx 3,14 \times 121 = 379,94 \text{ cm}^2$

O relógio encontra-se dividido em 12 partes pelas horas e a zona limitada pelos ponteiros é de 4 partes, então:

$$379,94 \times \frac{4}{12} \approx 126,65 \text{ cm}^2$$

R: A área limitada pelos ponteiros é aproximadamente $126,65 \text{ cm}^2$.

2) Calcula a área da zona azul sabendo que faz parte de um retângulo.



Área do retângulo: $5,1 \times 2 = 10,2 \text{ cm}^2$

Área do círculo de raio com 2 cm : $\pi \times 2^2 \approx 12,56 \text{ cm}^2$

Então a área da zona azul: $10,2 - \frac{12,56}{4} = 10,2 - 3,14 = 7,06 \text{ cm}^2$

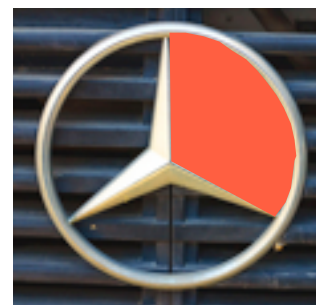
3) Sabendo que a área laranja no símbolo da Mercedes -Benz ocupa $26,17 \text{ cm}^2$ descobre qual será aproximadamente a medida do raio do círculo?

Área do círculo: $26,17 \times 3 = 78,51 \text{ cm}^2$

$$3,14 \times r^2 = 78,51 \rightarrow r^2 = 78,51 : 3,14 \rightarrow r^2 = 25,003...$$

Ou seja r^2 é aproximadamente 25 ($r^2 \approx 25$)

Como sabemos que $5^2 = 25$ então $r \approx 5$



Fotografia de Leonid Mamchenkov no Flickr

R: O raio é aproximadamente 5 cm.

TEMA

8

Soluções dos exercícios



NÚMEROS NATURAIS

EXERCÍCIO 1

1) Por exemplo 49 pois $49 = 7 \times 7$.

Por exemplo 105, pois $105 = 3 \times 7 \times 5$.

2) 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66 --> são os múltiplos de 6 a iniciar no 24
40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180 --> são os múltiplos de 20 a iniciar no 40

3) Usando a calculadora descobrimos rapidamente se um número é múltiplo de outro.

Fazendo o cálculo $458 : 8$ não obtemos um número natural ($458 : 8 = 57,25$) logo 458 não é múltiplo de 8.

Mas fazendo $458 : 2$ obtemos 229, ou seja $458 = 2 \times 229$ logo 458 é múltiplo de 2.

EXERCÍCIO 2

1) Como $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$ o único que não é múltiplo de 2 é o 1.

2) O maior é 1202 e o menor é 1.

3) Um divisor de um número nunca é maior que esse número. Falso.

4) Os múltiplos de 3 são 0, 3, 9, O único divisor de 3 nesse conjunto é o próprio 3. Logo a frase é verdadeira.

5)

a) 26 é divisor de 156.

d) 45 é divisível por 9.

c) 45 é múltiplo de 5.

d) 1 é sempre divisor de um qualquer número.

6) 4 é divisor de 32. 64 é múltiplo de 32 logo 4 também é divisor de 64.

Verificação: $64 = 32 \times 2$ e $32 = 4 \times 8$ então $64 = 4 \times 8 \times 2$ --> 4 é divisor de 64

EXERCÍCIO 3

1) Observando a decomposição em factores primos:

$$20 = 2 \times 2 \times 5$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

Então $m.m.c.(20, 24) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$ e $m.d.c.(20, 24) = 2 \times 2 = 4$

2) Por exemplo, $m.d.c.(15, 2) = 1$ ou $m.d.c.(15, 4) = 1$

Pois os divisores de 15 são 1, 3, 5 e 15.

$$m.d.c.(9, 10) = 1$$

Pois os divisores de 9 são 1, 3 e 9 e os divisores de 10 são 1, 2, 5 e 10.

3) Como 20 é múltiplo de 5 então o $m.m.c.(5, 20)$ é 20.

Então 5 é divisor de 20 logo $m.d.c.(5, 20) = 5$

Repara:

- Para determinar o $m.m.c.$ ou o $m.d.c.$ entre dois números vale a pena olhar com atenção quais os números envolvidos. Se um deles for múltiplo do outro, ou seja o outro é divisor deste, então temos o problema resolvido. Observa o anterior exercício 3).

- No anterior exercício 2) os resultados foram sempre 1.

Quando isso acontece dizemos que os números são **primos entre si**. Então 15 e 2 são primos entre si, assim como 15 e 4 ou 9 e 10.

EXERCÍCIO 4

1) 2 é divisor de: 26, 2560 e 4748 pois estes são números pares.

Múltiplos de 4: 2560 e 4748 pois 60 e 48 são divisíveis por 4.

2)

a) 500 e 2100.

b) 500, 330 e 2100.

c) Não existe. Se é divisível por 10 também é por 5.

d) 16, 330 e 118.

e) 330 e 2100. Pois $3 + 3 + 0 = 6$ (divisível por 3) e $2 + 1 = 3$.

f) 16, 500 e 2100.

EXERCÍCIO 5

1) a) $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^6$ e $4 = 4^1$

b) $9 \times 9 \times 9 = 3^6$ pois $9 = 3 \times 3$ logo $9 \times 9 \times 9 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

c) $11^4 = 14\,641$

2) $4 \times 4 \times 2 = 32$

R: 32 orelhas

$32 = 4 \times 4 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

R: $32 = 2^5$ onde 2 é a base e 5 o expoente.

3) Por exemplo 3^4 ou 21^4 .

EXERCÍCIO 6

1) a) $34\,000 = 34 \times 10^3$

b) 112×10^5

2) a) Quinze ao cubo. Base 15 e expoente 3. Valor: 3375

b) Seis à quarta. Base 6 e expoente 4. Valor: 1296

EXERCÍCIO 7

1) $999 + 12 + 1 = 12 + 999 + 1 = 12 + 1000 = 1012$


 P. comutativa P. associativa

2) $50 + 0 + 127 + 13 = 50 + 127 + 13 = 50 + 140 = 190$


 E. neutro P. associativa

3) $890 + 45 + 5 + 10 = 890 + 50 + 10 = 50 + 890 + 10 = 50 + 900 = 950$


 P. associativa P. comutativa P. associativa

FIGURAS NO PLANO

EXERCÍCIO 1

- a) Verdadeiro. São retas que passam nas arestas paralelas do paralelepípedo.
- b) Verdadeiro. Os paralelepípedos laranja são iguais.
- c) Verdadeiro. Os pontos F e A pertencem à reta AG logo a semirreta também pertence.
- d) Falso. São retas concorrentes oblíquas.
- e) Falso. Intersectam-se no ponto J .
- f) Verdadeiro. Intersectam-se no ponto G .

NÚMEROS RACIONAIS NÃO NEGATIVOS

EXERCÍCIO 1

1) a) $\frac{11}{3} = \frac{121}{33}$ pois $3 \times 11 = 33$ logo $121 : 11 = 11$.

b) $\frac{102}{2} = \frac{306}{6} = \frac{51}{1}$

c) $\frac{25}{4} = \frac{75}{12} = \frac{150}{24}$

2) Como $1,24 = \frac{124}{100}$ e $\frac{124}{100} = \frac{31}{25}$ (dividindo por 4)

Então as duas frações podem ser: $\frac{124}{100}$ e $\frac{31}{25}$.

EXERCÍCIO 2

1) As frações $\frac{12}{5}$ e $\frac{14}{5}$ são maiores que um e as restantes menores que um.

Ordenando as frações menores que um vem: $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$

Ordenando as frações maiores que um vem: $\frac{12}{5} < \frac{14}{5}$

Logo, $\frac{2}{5} < \frac{2}{3} < \frac{12}{5} < \frac{14}{5}$.

- 2)**
- a) $\frac{12}{4} = \frac{15}{5}$ Porque representam o número 3.
 - b) $\frac{7}{20} < \frac{7}{12}$ Porque a fração que tem menor denominador é a maior.
 - c) $\frac{145}{90} > \frac{45}{55}$ Porque a 1.ª fração é maior que um e a 2.ª fração é menor que um.
 - d) $\frac{2}{4} = \frac{5}{10}$ Porque ambas as frações são equivalentes a $\frac{1}{2}$.
 - e) $\frac{2}{7} > \frac{3}{11}$ Porque calculando os seus quocientes obtemos $0,28... > 0,27... .$

EXERCÍCIO 3

1) a) Como as frações têm denominador 5 então vamos dividir a unidade 5 partes iguais. Atenção ao espaço escolhido para representar a distância entre 0 e 1.

Os pontos B e C são inferiores a 1.

O ponto D é superior a 3.

O ponto F é superior a 2 ($12 : 5 = 2,4$) mais exatamente $\frac{12}{5} = \frac{5}{5} + \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = 1 + 1 + \frac{2}{5} = 2\frac{2}{5}$

Os pontos A e E são meias unidades e por isso também fáceis de representar.



b) Dois números entre 0,5 e 0,8 : por exemplo $\frac{3}{5}$ e 0,68.

Outro exemplo 0,65 e 0,709.

c) Por exemplo $\frac{13}{10}$ e $\frac{165}{100}$ (ou seja 1,3 e 1,65).

2) Tendo em atenção às divisões feitas em partes iguais em cada unidade:

entre 0 e 1 : 4 partes

entre 2 e 3 : 2 partes

entre 1 e 2 : 6 partes

entre 3 e 4 : 3 partes

Então os pontos acima representam:

$$A \rightarrow 0,25 \text{ ou } \frac{1}{4}$$

$$C \rightarrow 1\frac{1}{3} \text{ ou } 1\frac{2}{6}$$

$$E \rightarrow 2,75 \text{ ou } 2\frac{3}{4}$$

$$B \rightarrow \frac{7}{8}$$

$$D \rightarrow 1\frac{5}{6} \text{ ou } \frac{11}{6}$$

$$F \rightarrow 3\frac{2}{3} \text{ ou } \frac{11}{3}$$

Claro que podemos escrever um número racional na sua representação decimal, fração ou numeral misto.

EXERCÍCIO 4

$$1) a) \frac{3}{8} + 0,25 + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3+2+1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

b) Como $\frac{3}{4} < 1$ o círculo não foi todo pintado.

$$c) \frac{1}{4} \text{ pois } \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

2)

$$\begin{aligned} 0,5 + 2 + \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4} - 0,75 \right) &= 2,5 + \left(\frac{1}{8} + \frac{6}{8} - 0,75 \right) = \\ &= \frac{5}{2} + \left(\frac{7}{8} - \frac{3}{4} \right) = \\ &= \frac{5}{2} + \left(\frac{7}{8} - \frac{6}{8} \right) = \\ &= \frac{5}{2} + \frac{1}{8} = \\ &= \frac{20}{8} + \frac{1}{8} = \frac{21}{8} \end{aligned}$$

3) Neste caso é mais simples recorrer à representação decimal,

$$0,3 + 1,31 + \frac{5}{4} = 1,61 + 1,25 = 2,86$$

PERÍMETROS

EXERCÍCIO 1

1) $(3,1 + 5 + 5,2 + 4,7 + 4 + 3,1 + 4) \text{ cm} = 29,1 \text{ cm}$

R: O perímetro mede 29,1 cm .

2) Como num quadrado os quatro lados têm todos a mesma medida então: $6,26 \times 4 = 25,04$

R: O perímetro do quadrado mede 25,04 dm .

3) Temos as medidas



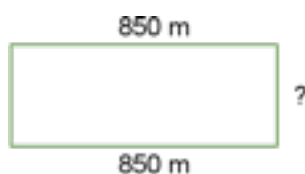
Para a figura R que tem 10 lados: $P_R = 2 \text{ cm} \times 10 = 20 \text{ cm}$

Para a figura S que também tem 10 lados : $P_S = 2 \text{ cm} \times 10 = 20 \text{ cm}$

Repara: Temos duas figuras geometricamente diferentes mas com o mesmo perímetro!

EXERCÍCIO 2

1) Esboço do percurso:



(claro que não sabemos se o lado maior tem 850 m mas serve para colocar os dados dos problema)

$2,16 \text{ km} = 2160 \text{ m}$ então $2160 - 2 \times 850 = 2160 - 1700 = 460$ e $460 : 2 = 230$

R: A medida do outro lado do retângulo mede 230 metros. Afinal o esboço ficou bem!

2) a) $P_1 = 4$; $P_2 = 8$; $P_3 = 12$

b) Será mais 4 unidades que o anterior logo $P_4 = 12 + 4 = 16$ e $P_5 = 16 + 4 = 20$.

c) Neste caso não interessa saber relacionar o perímetro com o da figura anterior.

Vamos tentar relacionar a posição da figura com o seu perímetro.

Já conhecemos alguns valores:



Vamos colocar num tabela:

N.º da posição	1	2	3	4	5	...	50
Medida do Perímetro	4	8	12	16	20	...	?

Que relação encontramos?

N.º da posição	1	2	3	4	5	...	50
Medida do Perímetro	4	8	12	16	20	...	?

x 4

A medida do perímetro da figura é o número da sua posição vezes 4 .

Agora é simples responder: o perímetro da figura na posição 50 mede $50 \times 4 = 200$.

EXERCÍCIO 3

1) a) Como os lados do triângulo têm o mesmo comprimento então sabemos que o diâmetro do semicírculo rosa mede 7 cm .

$$P_{\text{circunferência}} = \pi \times d \approx 3,14 \times 7 = 21,98 \text{ cm}$$

$$P_{\text{semicircunferência}} = \frac{21,98}{2} = 10,99 \text{ cm}$$

$$10,99 + 7 = 17,99$$

R: O perímetro da meia bola de gelado mede cerca de 17,99 cm .

$$\text{b) } 10,99 + 7 + 7 = 24,99$$

R: Mede 24,99 cm .

2) a) $P_1 = 3,14 \times 4 = 12,56$

$P_2 = 12,56:2 + 4 = 6,28 + 4 = 10,28$ (é metade do P_1 mais o diâmetro)

$P_3 = 6,28:2 + 4 = 3,14 + 4 = 7,14$ (é metade do perímetro curvo da figura anterior mais dois raios ou seja o diâmetro)

$P_4 = 3,14:2 + 4 = 1,57 + 4 = 5,57$

Existem mais maneiras de calcular estes perímetros, por exemplo: o perímetro de uma figura é sempre metade do perímetro anterior mais o raio. Verifica!! 😊

b) $P_5 = 1,57:2 + 4 = 0,785 + 4 = 4,785$

ou $P_5 = P_4 : 2 + 2 = 5,57:2 + 2 = 2,785 + 2 = 4,785$

ÁREAS

EXERCÍCIO 1

1) a) B e D

b) A e C ou B e E . Procura outras respostas.

c) B e E ou D e E

d) F é uma das figuras B , D ou E . A figura F .

2) C

3) Sim, B e E ou D e E .

EXERCÍCIO 2

1) A altura do painel será o dobro da altura do triângulo verde.

Podemos calcular a altura do triângulo verde através da sua área:

$$\frac{85 \times h}{2} = 5525$$

$$85 \times h = 5525 \times 2$$

$$h = \frac{11050}{85} = 130 \text{ cm}$$

Então a altura do painel será: $2 \times 130 = 260 \text{ cm} = 2,60 \text{ m}$

R: O painel tem 2,60 metros.

2) a) A área é metade da área do retângulo: $7,25 : 2 = 3,625 \text{ cm}^2$

Área do retângulo: $h \times 2,5 = 7,25 \rightarrow h = 7,25 : 2,5 = 2,9$

R: A altura mede 2,9 cm .

(também podíamos usar o cálculo da área do triângulo)

b) $A_{\text{triângulo azul}} = 2 \times A_{\text{triângulo verde}} = 2 \times 234 = 468 \text{ mm}^2$

$(b \times 30) : 2 = 468$ então $b \times 30 = 468 \times 2 \rightarrow b \times 30 = 936 \rightarrow b = 936 : 30 = 31,2$

R: A base mede 31,2 mm .

(também podíamos usar o cálculo da área do triângulo verde)

c) Os dois triângulos têm a mesma base e a mesma altura logo têm a mesma área.

$h = 63 \text{ cm}$ e $b = 5 \text{ dm} = 50 \text{ cm}$

$A_{\text{triângulo}} = (63 \times 50) : 2 = 3150 : 2 = 1575 \text{ cm}^2$