

6º ano



MATEMÁTICA

www.japassei.pt



✓ Resumos da matéria
✓ Exercícios resolvidos

Este e-book é parte integrante da plataforma de educação *Já Passei* e propriedade da DEVIT - Desenvolvimento de Tecnologias de Informação, Unipessoal Lda.

Disciplina:
Matemática

Ano de escolaridade:
6º ano

Coordenação:
Maria João Tarouca

Design e composição gráfica:
Vanessa Augusto

Já Passei

Rua das Azenhas, 22 A
Cabanas Golf
Fábrica da Pólvora
2730 - 270 Barcarena

site: www.japassei.pt

e-mail: marketing@japassei.pt

www.japassei.pt



ÍNDICE

1	VOLUMES	
1.1)	Volume de um sólido. Sólidos equivalentes	6
1.2)	Volume de um paralelepípedo e de um cubo	8
1.3)	Volume do cilindro	11
1.4)	Unidades de volume	13
1.5)	Medidas de capacidade	16
2	NÚMEROS NATURAIS	
2.1)	Potência de um número natural. Propriedades da multiplicação	20
2.2)	Propriedades das potências de base e expoente natural	22
3	NÚMEROS RACIONAIS NÃO NEGATIVOS	
3.1)	Multiplicação de números racionais não negativos	26
3.2)	Propriedades da multiplicação de números racionais não negativos	29
3.3)	Inverso de um número. Divisão de números racionais não negativos	32
3.4)	Valores aproximados e arredondamentos	35
4	REFLEXÃO, ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO	
4.1)	Isometrias	39
4.2)	Composição de simetrias	43
4.3)	Simetria numa figura	45
4.4)	Simetria na geometria	50
4.5)	Rosáceas	53
5	REPRESENTAÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE DADOS	
5.1)	Natureza dos dados estatísticos	56
5.2)	Recolha e organização de dados estatísticos: tabelas e gráficos	58
5.3)	Média aritmética. Extremos e amplitude	64
6	RELAÇÕES E REGULARIDADES	
6.1)	Expressões numéricas	69
6.2)	Expressões algébricas	73
6.3)	Sequências e regularidades	76
6.4)	Razão, proporção e regra três simples	82
6.5)	Proporcionalidade direta	89
7	NÚMEROS INTEIROS	
7.1)	Noção de número inteiro. Representação na reta numérica	93
7.2)	Comparação e ordenação	95
7.3)	Valor absoluto e simétrico de um número inteiro	98
7.4)	Adição e subtração de números inteiros	100
7.5)	Propriedades da adição de números inteiros. Simplificação da escrita	104
8	SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS	
8.1)	Potência dum número natural. Propriedades da multiplicação	108
8.2)	Propriedades das potências de base e expoente natural I	108
8.3)	Propriedades das potências de base e expoente natural II	108
8.4)	Propriedades da multiplicação de n ^o s racionais ã negativos	109
8.5)	Inverso de um número. Divisão de números racionais ã negativos	110
8.6)	Comparação e ordenação	110

TEMA

1

Volumes



VOLUME DE UM SÓLIDO SÓLIDOS EQUIVALENTES

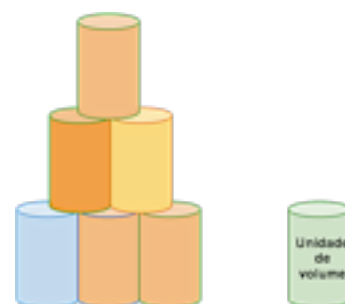
* Define-se o **volume de um corpo** como sendo o espaço que ele ocupa. Os corpos aqui estudados vão ser os sólidos.

O volume de um sólido tem uma medida que depende da **unidade de volume** escolhida, ou seja, a medida do volume depende da porção de espaço escolhida para ser a unidade

exemplo

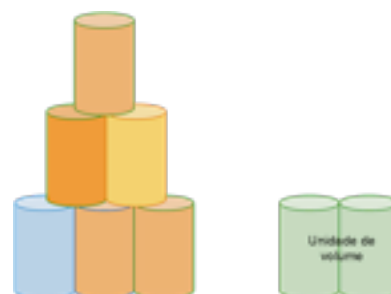
1) Considera a seguinte pilha de objetos onde são todos geometricamente iguais.

a) Qual é a medida do volume da pilha, tendo em conta a unidade escolhida?



A medida do volume é de 6 unidades.

b) Escolhida outra unidade de volume qual é agora a medida do volume da pilha?

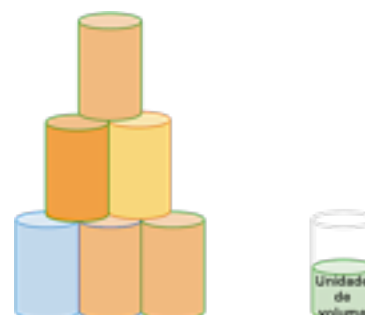


A medida do volume é 3 unidades de volume.

Repara: Comparando os dois resultados anteriores verificamos que ao duplicarmos a unidade a medida do volume passou para metade. Vendo ao contrário, ao passar para metade a unidade duplicamos a medida do volume.

c) E para esta nova unidade de volume?

De acordo com a conclusão anterior então se a nova unidade de volume é um quarto da anterior, a medida do volume deverá quadruplicar, ou seja $4 \times 3 = 12$ unidades.



Podemos confirmar contando na pilha quantas novas unidades de volume "cabem" na pilha: $6 \times 2 = 12$.

d) Então as três pilhas anteriores têm volumes diferentes?

O volume ocupado pelas pilhas anteriores é sempre o mesmo, o que muda é a unidade de medida e por isso as medidas dos volumes têm valores diferentes.

Repara que:



e) O volume desta pilha é diferente do volume da pilha anterior?

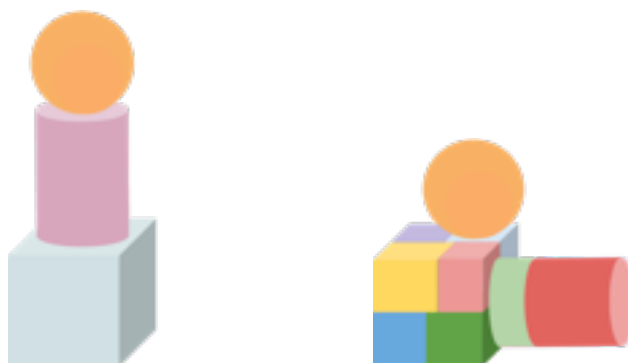
Apesar das pilhas terem formas diferentes, como são constituídas pelos mesmos objetos, o seu volume mantêm-se igual.



* Se dois sólidos têm o mesmo volume então dizem-se **sólidos equivalentes**.

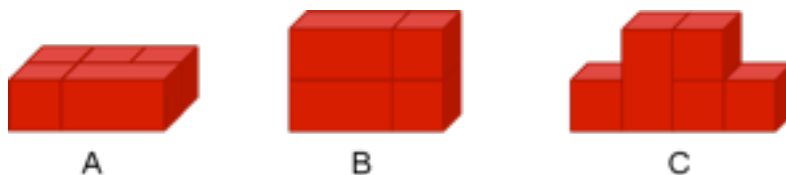
exemplo

1)



Verificamos que podemos ter sólidos com formas diferentes mas que ocupam o mesmo espaço, isto é, têm o mesmo volume.

2) Quais destes sólidos são equivalentes?



R: A , B e C são equivalentes. Tomando como unidade de volume o cubo vermelho então a medida de cada um dos sólidos é 6 unidades.

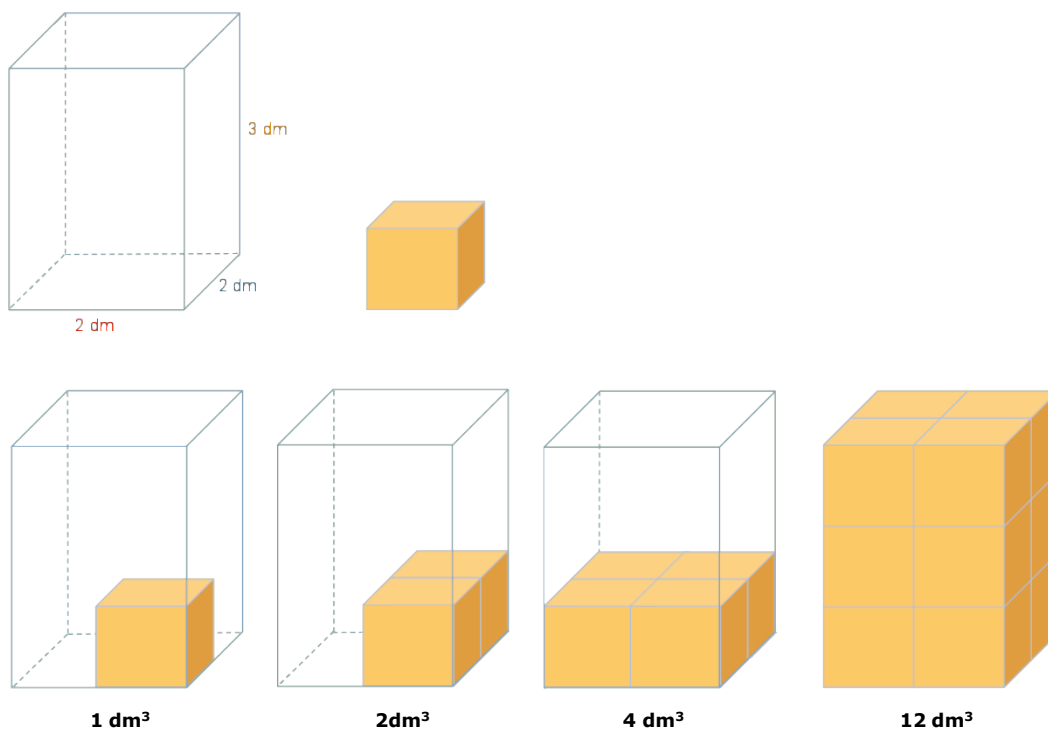
VOLUME DE UM PARALELEPÍPEDO E DE UM CUBO

* Conhecendo as medidas, comprimento, largura e altura de um paralelepípedo, como podemos determinar a medida do seu volume?

Vamos considerar uma caixa com as medidas:

2 dm de comprimento, 2 dm de largura e 3 dm de altura

e um cubo com 1 dm^3 . Este cubo vai ser a nossa unidade de volume. Experimentemos quantas vezes cabe dentro da caixa!



Coloquemos um primeiro cubo. Como a largura e o comprimento da caixa têm ambos 2 dm então cabem dois cubos ao longo da largura e ao longo do comprimento.

O fundo da caixa fica preenchido com quatro cubos, ocupando estes 4 dm^3 .

A altura da caixa mede 3 dm então podemos colocar mais dois conjuntos de quatro cubos até chegar ao topo da caixa. Temos $4 \text{ cubos} \times 3 = 12 \text{ cubos}$, ou seja, temos um volume com medida $12 \times 1 \text{ dm}^3 = 12 \text{ dm}^3$.

Repara: $12 \text{ dm}^3 = (2 \times 2 \times 3) \text{ dm}^3 = 2 \text{ dm} \times 2 \text{ dm} \times 3 \text{ dm}$ ou seja,

$$\text{volume da caixa} = \text{comprimento} \times \text{largura} \times \text{altura}$$

Atenção: a linguagem acima encontra-se simplificada pois estamos a falar de medida do volume e de medida de comprimento, medidas de largura e de altura.

Repara ainda que:

$$12 \text{ dm}^3 = 2 \text{ dm} \times 2 \text{ dm} \times 3 \text{ dm} = (2 \text{ dm} \times 2 \text{ dm}) \times 3 \text{ dm} = (2 \times 2) \text{ dm}^2 \times 3 \text{ dm}$$

onde $(2 \times 2) \text{ dm}^2$ é a medida da área da base da caixa, ou seja,

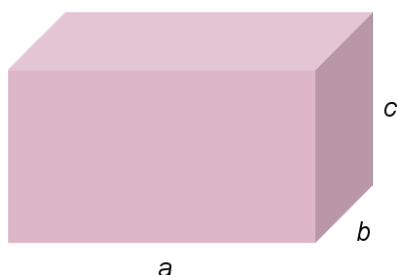
$$\text{volume da caixa} = \text{área da base} \times \text{altura}$$

* Para um qualquer paralelepípedo conhecidas as suas medidas então:

A medida do volume de um paralelepípedo é igual ao produto das suas medidas

dito de outra forma:

a medida do volume de um paralelepípedo é igual ao produto da medida da área da sua base pela medida da altura:



$$V_{\text{Paralelepípedo}} = a \times b \times c = \text{comprimento} \times \text{largura} \times \text{altura}$$

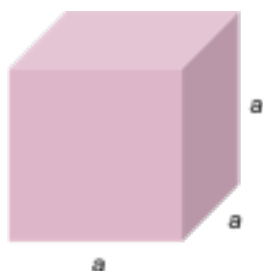
$$V_{\text{Paralelepípedo}} = a \times b \times c = (a \times b) \times c = \text{área da base} \times \text{altura}$$

* **Volume de um cubo.**

Como um cubo é também um paralelepípedo então sabemos que o seu volume é o produto das suas medidas.

No entanto um cubo é um sólido especial pois todas as suas medidas são iguais.

Se considerarmos um cubo de aresta com medida a , o seu **volume** medirá $a \times a \times a$, ou seja a^3 :



$$V_{Cubo} = a^3 = \text{comprimento} \times \text{largura} \times \text{altura}$$

Repara que também:

$$V_{Cubo} = (a^2) \times a = \text{área da base} \times \text{altura}$$

exemplo₁

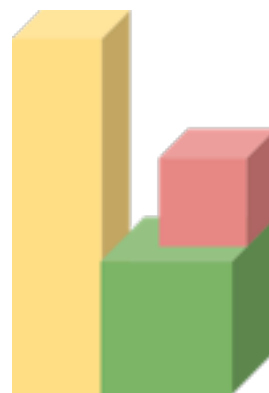
Observa o seguinte conjunto de sólidos:

Um cubo rosa de aresta com 30 cm ;

Um cubo verde com aresta medindo $\frac{3}{2}$ da aresta do cubo rosa;

Um paralelepípedo amarelo com base igual à do cubo rosa e com altura o quádruplo da aresta do cubo rosa.

Qual a medida do volume (em m³) deste conjunto?



$$\text{Volume do cubo rosa: } 30^3 = 27\,000 \text{ cm}^3$$

$$\text{Medida do lado do cubo verde: } \frac{3}{2} \times 30 = \frac{90}{2} = 45 \text{ cm}$$

$$\text{Volume do cubo verde: } 45^3 = 91\,125 \text{ cm}^3$$

$$\text{Volume do paralelepípedo: } \text{área da base} \times \text{altura} = 30^2 \times (4 \times 30) = 900 \times 120 = 108\,000 \text{ cm}^3$$

$$\text{Volume do conjunto: } 27\,000 + 91\,125 + 108\,000 = 226\,125 \text{ cm}^3$$

R: O volume do conjunto mede 0,226 125 m³.

exemplo₂

Um cubo tem um volume com 8 m^3 e no seu interior tem um outro cubo de aresta com 80 cm .

a) Qual a medida do volume entre os dois cubos?

Volume do cubo no interior: $80^3 \text{ cm}^3 = 0,8^3 \text{ m}^3 = 0,512 \text{ m}^3$

Volume entre os cubos: $8 - 0,512 = 7,488 \text{ m}^3$

b) Qual a medida da aresta do cubo com maior volume?

Se a aresta medir C então sabemos que $C^3 = 8 \rightarrow C = 2$ pois

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

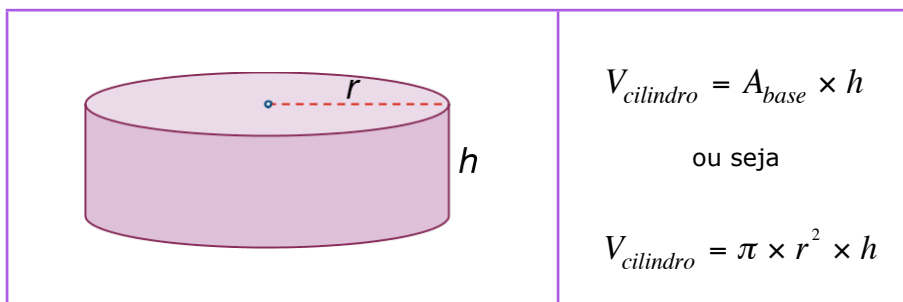
R: A aresta mede 2 metros.

VOLUME DO CILINDRO

* Para determinarmos o volume de um cilindro basta conhecermos a sua altura e a medida do seu raio (ou diâmetro):

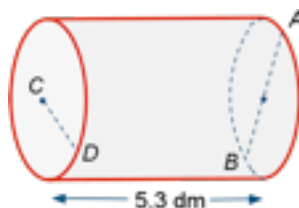
A medida do volume de um cilindro é igual ao produto da medida da área da sua base pela medida da altura.

Neste caso a base é um círculo e assim área da base será a área de um círculo: $\pi \times r^2$



exemplo₁

Observando o cilindro seguinte e sabendo que $\overline{CD} = 3 \text{ cm}$ e C é o centro do círculo,



a) Qual a medida do segmento AB ?

Como $[AB]$ é um diâmetro e $[CD]$ um raio então $\overline{AB} = 2 \times 3 = 6 \text{ cm}$.

b) Determina o valor da área da base do cilindro.

Sendo a base um círculo, $A_{base} = \pi \times r^2 \approx 3,14 \times 3^2 = 28,26 \text{ cm}^2$

c) Qual o valor do volume do cilindro?

A altura do cilindro mede $5,3 \text{ dm} = 53 \text{ cm}$ logo $V = A_{base} \times h$

$$V = 28,26 \times 53 = 1497,78 \text{ cm}^3$$

exemplo₂

Um banco foi projetado a partir de um cilindro cujo raio mede $4,1 \text{ cm}$. O comprimento do banco é o triplo do diâmetro da circunferência. Qual o volume do banco?

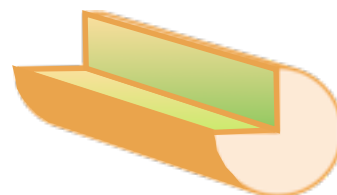
Considerando o cilindro da figura com raio r e altura h :
(foi utilizado o valor π da calculadora)

$$A_{base} = \pi r^2 = \pi \times 4,1^2 \approx 52,81 \text{ cm}^2$$

$$h = 3 \times \text{diâmetro} = 3 \times 2 \times 4,1 = 24,6 \text{ cm}$$

$$V_{cilindro} = A_{base} \times h \approx 52,81 \times 24,6 = 1299,126 \text{ cm}^3$$

$$V_{cilindro} \approx 1299,126 \text{ cm}^3$$



R: O volume do banco mede $\frac{3}{4} V = \frac{3}{4} \times 1299,126 \approx 974,34 \text{ cm}^3$

UNIDADES DE VOLUME

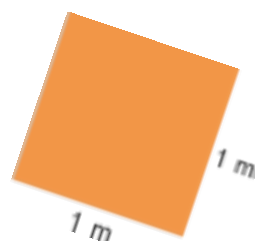
* As unidades de medida encontram-se uniformizadas de modo a facilitar a leitura das medidas em quase todo o mundo pelo Sistema Internacional de Unidades.

Para as medidas de comprimento a unidade é o metro (1 m) . Serve para medir grandezas com uma dimensão.

Para as medidas de área (ou superfície) a unidade é o metro quadrado (1 m²) . Serve para medir figuras planas com duas dimensões: comprimento e largura.

O que é um metro quadrado?

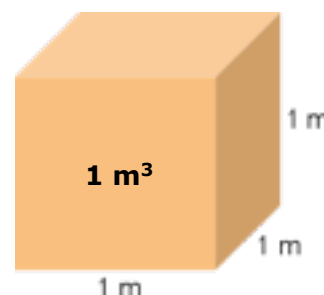
Imagina uma folha de papel quadrada com um metro de lado, 1 m² é exatamente a medida da sua área.



Para as medidas de volume a unidade é o metro cúbico (1 m³) . Servem para medir corpos com três dimensões: comprimento, largura e altura.

O que é um metro cúbico?

Imagina um cubo com um metro de aresta, 1 m³ é exatamente a medida do seu volume.

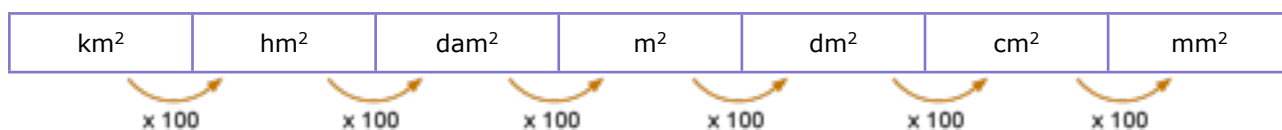


* Nem sempre trabalhamos com o metro quadrado ou o metro cúbico, mas sim com os seus múltiplos ou submúltiplos como o centímetro quadrado ou o quilometro cúbico. Vamos relembrar em primeiro lugar as **medidas de área** e como estas se relacionam:

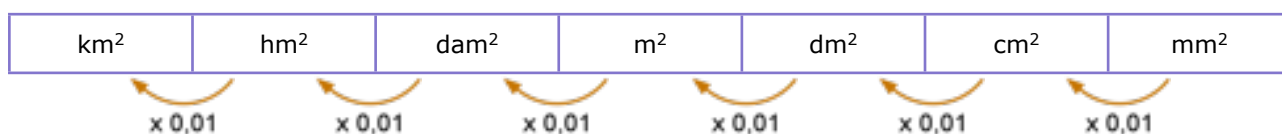
Quilómetro quadrado	Hectómetro quadrado	Decâmetro quadrado	Metro quadrado	Decímetro quadrado	Centímetro quadrado	Milímetro quadrado
km ²	hm ²	dam ²	m ²	dm ²	cm ²	mm ²

Como passamos da unidade m² para um seu múltiplo como o km² ? Ou para um seu submúltiplo como o mm² ?

Cada unidade é 100 vezes maior que a seguinte :



Cada unidade é 100 vezes mais pequena que a anterior ($1/100 = 0,01$):



exemplo₁

Uma sala tem 2580 dm² de área. A sala tem quantos metros quadrados?

$$2580 \text{ dm}^2 = 25,80 \text{ m}^2$$

(recuamos 2 casas decimais)

R: A sala tem 25,8 metros quadrados.



Fotografia de RyanGWU82 no Flickr

exemplo₂

O Pedro viu uma casa à venda com um jardim de 0,14 hm². Se o Pedro quiser colocar relva no jardim todo, quantos metros quadrados precisa de comprar?

$$0,14 \text{ hm}^2 = 1400 \text{ m}^2$$

(avancamos 4 casas decimais pois multiplicamos por 100 duas vezes, ou seja $0,14 \text{ hm}^2 = 14 \text{ dam}^2 = 1400 \text{ m}^2$)

R: Precisa de comprar 1400 metros quadrados de relva.



Fotografia de Jo-H no Flickr

* De modo semelhante nas **medidas de volumes**.

Cada unidade é 1000 vezes maior que a seguinte:

Quilómetro cúbico	Hectómetro cúbico	Decâmetro cúbico	Metro cúbico	Decímetro cúbico	Centímetro cúbico	Milímetro cúbico
km ³	hm ³	dam ³	m ³	dm ³	cm ³	mm ³

Diagrama de conversão para volumes (multiplicação por 1000):

$\text{km}^3 \xrightarrow{\times 1000} \text{hm}^3 \xrightarrow{\times 1000} \text{dam}^3 \xrightarrow{\times 1000} \text{m}^3 \xrightarrow{\times 1000} \text{dm}^3 \xrightarrow{\times 1000} \text{cm}^3 \xrightarrow{\times 1000} \text{mm}^3$

Cada unidade é 1000 vezes mais pequena que a anterior ($1/1000=0,001$):

km ³	hm ³	dam ³	m ³	dm ³	cm ³	mm ³
-----------------	-----------------	------------------	----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Diagrama de conversão para volumes (multiplicação por 0,001):

$\text{km}^3 \xrightarrow{\times 0,001} \text{hm}^3 \xrightarrow{\times 0,001} \text{dam}^3 \xrightarrow{\times 0,001} \text{m}^3 \xrightarrow{\times 0,001} \text{dm}^3 \xrightarrow{\times 0,001} \text{cm}^3 \xrightarrow{\times 0,001} \text{mm}^3$

exemplo₁

Um cubo com 2,3 metros cúbicos tem quantos milímetros cúbicos?

$$2,3 \text{ m}^3 = 2 \text{ } \underbrace{300 \text{ } 000 \text{ } 000}_{\text{dm}^3 \text{ cm}^3 \text{ mm}^3} \text{ mm}^3 = 2 \text{ } 300 \text{ } 000 \text{ } 000 \text{ mm}^3$$

(avancamos a vírgula 9 casas decimais pois multiplicamos por 1000 três vezes)

R: Tem 2,3 mil milhões de milímetros cúbicos.



Fotografia de Marshall Astor no Flickr

exemplo₂

Um volume de uma piscina com 5,36 dm³ tem quantos decâmetros cúbicos?

$$5,36 \text{ dm}^3 = 0, \underbrace{000 \text{ } 005 \text{ } 36}_{\text{dam}^3 \text{ m}^3} \text{ dam}^3 = 0,000 \text{ } 005 \text{ } 36 \text{ dam}^3$$

(recuamos a vírgula 6 casas decimais pois dividimos por 1000 duas vezes)



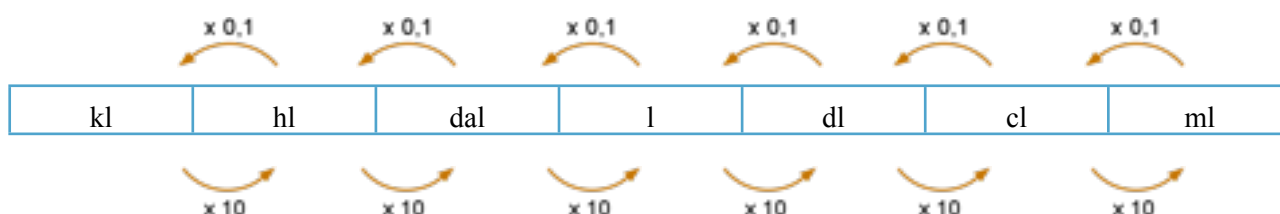
Fotografia de Concrete Forms no Flickr

MEDIDAS DE CAPACIDADE

* A **medida de capacidade** que encontramos com mais frequência é o **litro** (l) e o mililitro (ml). Mas existem mais unidades de medida, vejamos:

Quilolitro	Hectolitro	Decalitro	Litro	Decilitro	Centilitro	Mililitro
kl	hl	dal	l	dl	cl	ml

Cada uma é 10 vezes maior que a seguinte e claro 10 vezes menor que a anterior:



exemplo₁

A Mafalda tem várias embalagens de sumo com 220 ml . Quantas embalagens completas pode a Mafalda despejar para um jarro com 1,4 l ?

$$220 \text{ ml} = 0,220 \text{ l} = 0,22 \text{ l}$$

$$\text{Como } 1,4 : 0,22 = 6,36\dots$$

R: A Mafalda pode despejar 6 embalagens completas.



Fotografia de Stevendepolo no Flickr

exemplo₂

Um tonel de madeira para conservar o vinho pode levar até 25 kl . Quantos litros podem levar dois tonéis e meio?

Como $25 \text{ kl} = 25\,000 \text{ l}$, um tonel leva 25 mil litros. Então dois tonéis levam 50 mil litros e meio tonel leva 12,5 mil litros.

R: Dois tonéis e meio levam 62,5 mil litros.



Fotografia de Chiquidesign no Flickr

* Estas unidades são úteis quando se pretende medir líquidos como o azeite ou o vinho mas também servem para medir sementes como o grão e o feijão, embora já quase em desuso.

Para se medir um litro de feijão por exemplo, utilizava-se uma medida de madeira semelhante a esta caixa:



1 dm³

A caixa tinha 1 dm de lado no seu interior, logo ocupava um volume de 1 dm³.

* Verifica-se que existe uma **relação entre as medidas de capacidade e as medidas de volume**:

1 litro de feijão corresponde a **1 decímetro cúbico** de feijão, ou seja

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$$

Temos então a seguinte correspondência:

1 kl	1 m ³
1 l	1 dm³
1 ml	1 cm ³

exemplo₁

Um garrafão com cinco litros de água poderá ser despejado na totalidade para uma cuba de vidro com 0,0049 m³ de volume ?

No garrafão temos 5 l = 5 dm³.

A cuba só tem uma capacidade de 0,0049 m³ = 4,9 dm³.

R: Não se consegue despejar toda a água porque o volume da cuba é menor que o volume do garrafão.



exemplo2

O Filipe fez sumo de laranja num recipiente que ficou cheio até três quartos. No recipiente está marcado, volume: 2000 cm^3 . Quantas garrafas de $0,23 \text{ l}$ conseguirá o Filipe encher na totalidade?

Volume do recipiente: $2000 \text{ cm}^3 = 2000 \text{ ml}$

Volume do sumo de laranja: $\frac{3}{4} \times 2000 = \frac{6000}{4} = 1500 \text{ ml}$

Volume das garrafas: $0,23 \text{ l} = 230 \text{ ml}$

Como $\frac{1500}{230} = 6,52\dots$

R: O Filipe consegue encher seis garrafas.



TEMA

2

Números naturais



POTÊNCIA DE UM NÚMERO NATURAL PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

* A potência de um número natural é um número que representa um produto de fatores iguais. Neste caso os fatores são números naturais.

Uma potência tem a forma a^n onde a é a base, natural, e n o expoente, também um natural.

exemplos

1) 51^4 é uma potência de base 51 e expoente 4 ;

$$51^4 = 51 \times 51 \times 51 \times 51 = 6\,765\,201$$

2) 2^3 é uma potência de base 2 e expoente 3 ;

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

3) 10 000 também pode ser escrito como uma potência. Qual a base e o expoente?

$$10\,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 \text{ ou } 10\,000 = 100 \times 100 = 100^2$$

R: A base é 10 e o expoente 4 , ou podemos ter base 100 e expoente 2 .

4) 520 também pode ser escrito como uma potência. Quando o expoente é 1 podemos omiti-lo na escrita.

$$\text{Ou seja } 520 = 520^1 .$$

* **Propriedades da multiplicação de números naturais.**

$a \times b = b \times a$ **Propriedade comutativa** (a e b são números naturais)

exemplo

$$10^3 \times 3^2 \times 5 = 10^3 \times 5 \times 3^2 = 5000 \times 9 = 45\,000$$

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ **Propriedade associativa** (a , b e c são números naturais)

exemplo

$$50 \times 3^2 \times 100 \times 3 = 50 \times 900 \times 3 = 50 \times 2700 = 135\,000$$

(podemos associar quaisquer dois fatores num produto com vários fatores)

$1 \times a = a \times 1 = a$ **Existência na multiplicação de um elemento neutro** (a e 1 são naturais)

exemplo

$$200 \times 1 \times 5^2 = 200 \times 5^2 = 200 \times 25 = 5000$$

(elemento neutro pois o seu efeito na multiplicação é neutro)

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ **Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (e subtração)** (a , b e c são números naturais)

exemplo

$$(5 + 20^2) \times 5 + 4500 = 5 \times 5 + 20^2 \times 5 + 4500 = 25 + 2000 + 4500 = 6525$$

Relembrar: As potências de base 10 e de expoente natural.

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$

Então 10^{250} será 1 seguido de quantos zeros? 250 zeros!

Sem esta representação não seria possível trabalhar com números tão grandes ...

EXERCÍCIO

Calcula o valor das seguintes expressões:

a) $3^3 + 2 \times 10^2$

b) $30^2 \times (2 + 10^2) + 2^2$

c) $0,59 \times 10^5 - 2 \times 10^3 + 0 \times 2^{25}$

PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS DE BASE E EXPOENTE NATURAL

* As propriedades das potências são fundamentais para simplificar o cálculo de expressões.
Estas propriedades aplicam-se quando temos multiplicações e/ou divisões entre potências.

Multiplicação de potências com a mesma base:

exemplos

$$2^3 \times 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$$

$$10^3 \times 10^2 \times 10 = 10^{3+2+1} = 10^6 = 1\,000\,000$$

$$7 \times 10^3 \times 10^2 = 7 \times 10^{3+2} = 7 \times 10^5 = 700\,000$$

dá-se a mesma base e somam-se os expoente

Multiplicação de potências com o mesmo expoente:

exemplos

$$2^3 \times 4^3 = (2 \times 4)^3 = 8^3 = 512$$

$$10^2 \times 2^2 \times 10^2 = (10 \times 2 \times 10)^2 = 200^2 = 40\,000$$

dá-se o mesmo expoente e

multiplicam-se as bases

Divisão de duas potências com a mesma base:

No caso onde o expoente da potência do dividendo é maior que o expoente da potência do divisor.

exemplos

$$10^6 : 10^3 = 10^{6-3} = 10^3 = 1000$$

$$\frac{5^7}{5^5} = 5^{7-5} = 5^2 = 25$$

dá-se a mesma base e subtraem-se os
expoentes

Divisão de potências com o mesmo expoente:

exemplos

$$10^6 : 5^6 = (10 : 5)^6 = 2^6 = 64$$

$$\frac{30^2}{6^2} = \left(\frac{30}{6}\right)^2 = 5^2 = 25$$

dá-se o mesmo expoente e dividem-se as
bases

EXERCÍCIO 1

1) A distância média da Terra ao Sol é cerca de 150 milhões de quilómetros. Indica esse valor em metros e na forma de potência.



NASA/cedida por nasaimages.org

2) Simplifica o mais possível a expressão $10^4 \times 3 \times 5^4 - 2 \times 50^4$.

O seu resultado pode ficar na forma de potência.

EXERCÍCIO 2

Resolve usando as propriedades das potências:

1) Uma caixa tem $1\,000\,000\text{ cm}^3$ de medida de volume. Quantas embalagens cúbicas com 5^2 cm de medida de lado podem ser colocadas no seu interior?



2) $(5^2 \times 10^2) : 50 - 2 \times (10^2 : 2^2)$

TEMA

3

Números racionais não negativos



MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS NÃO NEGATIVOS

* Os **número racionais** são todos os números inteiros e todos os números fracionários.

Podemos escrever: **{Números racionais} = {Números inteiros e números fracionários}**

exemplos

1) Considera os seguintes números racionais não negativos:

$$0,78 \quad ; \quad \frac{5}{4} \quad ; \quad \frac{20}{5} \quad ; \quad 480,27 \quad ; \quad 8,(9)$$

a) Indica os que são fracionários.

Todos menos $\frac{20}{5}$ pois é um inteiro, 4 .

b) Indica os números que representam frações decimais.

0,78 pois representa a fração $\frac{78}{100}$

$\frac{5}{4}$ pois representa $1,25 = \frac{125}{100}$

480,27 pois representa a fração $\frac{48\,027}{100}$

2) O número 0 é um número racional. Porquê?

O zero é um inteiro logo é um racional e claro é um número racional não negativo.

* Uma fração não tem uma escrita única. Pode ser representada por outras **frações equivalentes** e por vezes até por um número decimal.

exemplos

$$\frac{5}{2} = \frac{5 \times 2}{2 \times 2} = \frac{10}{4}$$

$$\frac{45}{12} = \frac{45 \div 3}{12 \div 3} = \frac{15}{4}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 4} = \frac{20}{8}$$

$$\frac{45}{12} = 3,75$$

$$\frac{5}{2} = 2,5$$

Ao multiplicar ambos os membros de uma fração por um mesmo número obtém-se uma fração equivalente.

Ao dividir ambos os membros de uma fração por um mesmo número obtém-se uma fração equivalente. Este é o processo para se chegar a uma **fração irredutível**. Fração onde o numerador e o denominador já não têm fatores comuns.

exemplo

Transformar a fração $\frac{60}{210}$ numa fração irredutível.

$$\frac{60}{210} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

$\downarrow$
 $\div 10$

$\downarrow$
 $\div 3$

* Para se **multiplicar dois números racionais** temos de observar se estes se encontram na forma de fração ou não.

Multiplicação de duas frações: multiplicam-se os numeradores e os respetivos denominadores

exemplos

$$1) \frac{5}{3} \times \frac{11}{7} = \frac{5 \times 11}{3 \times 7} = \frac{55}{21}$$

$$2) \frac{2}{3} \times 5 = \frac{2}{3} \times \frac{5}{1} = \frac{2 \times 5}{3 \times 1} = \frac{10}{3}$$

$$3) 1,25 \times \frac{10}{3} = \frac{125}{100} \times \frac{10}{3} = \frac{1250}{300} = \frac{250}{60} = \frac{25}{6}$$

Multiplicação de uma fração por um número decimal: consoante o caso passamos o número decimal para a forma de fração ou a fração para notação decimal

exemplos

$$1) 0,25 \times \frac{2}{5} = 0,25 \times 0,4 = 0,1$$

$$\text{ou } 0,25 \times \frac{2}{5} = \frac{25}{100} \times \frac{2}{5} = \frac{25 \times 2}{100 \times 5} = \frac{50}{500} = \frac{1}{10}$$

$$2) \frac{1}{3} \times 2,2 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{10} = \frac{1 \times 22}{3 \times 10} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$$

$$\begin{aligned} 3) 0,2 \times \frac{4}{20} \times \frac{5}{2} + 3 \times \frac{1}{15} &= 0,2 \times \frac{20}{40} + \frac{3}{15} = \\ &= 0,2 \times \frac{1}{2} + \frac{3}{15} = \\ &= 0,1 + 0,2 = \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS NÃO NEGATIVOS

* As propriedades da multiplicação que conhecemos para os números naturais mantêm-se para os números racionais não negativos:

É comutativa:

exemplo

$$\frac{5}{7} \times 3 = \frac{5 \times 3}{7} = \frac{15}{7}$$

$$3 \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{7} = \frac{15}{7}$$

então $\frac{5}{7} \times 3 = 3 \times \frac{5}{7}$

O elemento absorvente é o zero:

exemplo

$$2,26 \times 0 = 0 \quad ; \quad 0 \times \frac{14}{3} = 0$$

O elemento neutro é o um:

exemplo

$$1 \times 23,478 = 23,478 \quad ; \quad \frac{15}{7} \times 1 = \frac{15}{7}$$

É associativa:

exemplo

$$\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{3} \times 0,12 \right) = \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \right) \times 0,12 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times 0,12$$

É distributiva em relação à adição e à subtração:

exemplos

Na adição:

$$\frac{1}{3} \times \left(4 + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$$

O produto de uma soma é a soma dos produtos.

$$\text{Resolução: } \frac{1}{3} \times \left(4 + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{2}{9} = \frac{12}{9} + \frac{2}{9} = \frac{14}{9}$$

Uma soma de produtos pode ser transformada num produto se existir um fator comum em cada parcela a somar. Dizemos que colocámos em evidência um fator comum:

$$\frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \left(4 + \frac{2}{3} \right)$$

Resolução:

$$\frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \left(4 + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{12}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{14}{3} = \frac{14}{9}$$

Na subtração:

$$\frac{1}{3} \times \left(4 - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} \times 4 - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$$

O produto de uma diferença é a diferença dos produtos.

E a diferença entre produtos pode ser também um produto desde que exista um fator comum:

$$\frac{1}{3} \times 4 - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \left(4 - \frac{2}{3} \right)$$

EXERCÍCIOS

1) O volume da Terra mede cerca de $108,321 \times 10^{10} \text{ km}^3$ e o volume do planeta Júpiter mede $143,128 \times 10^{13} \text{ km}^3$.

Quantas vezes o planeta Terra cabe no planeta Júpiter?



2) Observa a sequência: $\frac{3}{6}$; $\frac{9}{12}$; $\frac{27}{24}$...

a) Indica quais serão os dois termos seguintes desta sequência.

b) Se um termo desta sequência for a fracção $\frac{n}{m}$ qual a expressão para o termo seguinte?

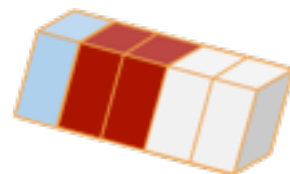
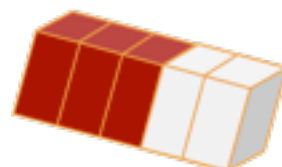
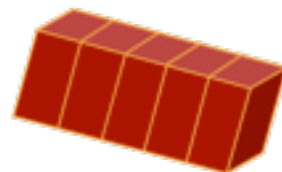
3) A Joana partiu um chocolate e levou $\frac{2}{5}$. Depois veio o Pedro e levou

$\frac{1}{3}$ do chocolate que a Joana tinha deixado.

a) Que parte do chocolate inicial encontrou o Pedro?

b) Que fracção do chocolate inicial levou o Pedro?

c) Supondo que o chocolate tem 70 g de cacau, quantas gramas de cacau terá o chocolate que sobrou?



Inverso de um número
Divisão de números racionais não negativos

* O **inverso de um número** é o número que multiplicado pelo número inicial dá um.

exemplos

$$1) \frac{5}{7} \times \frac{7}{5} = \frac{35}{35} = 1 \quad \text{logo} \quad \frac{5}{7} \text{ é o inverso de } \frac{7}{5} \quad \text{e} \quad \frac{7}{5} \text{ é o inverso de } \frac{5}{7}.$$

$$2) \text{ O inverso de } 0,23 \text{ é } \frac{100}{23}.$$

$$\text{Porque } 0,23 = \frac{23}{100} \quad \text{e} \quad 0,23 \times \frac{100}{23} = \frac{23}{100} \times \frac{100}{23} = \frac{23 \times 100}{100 \times 23} = 1$$

$$3) \text{ O zero não tem inverso e o inverso de } 1 \text{ é } 1.$$

$$4) 8 \text{ e } \frac{1}{8} \text{ são inversos.}$$

* **Divisão de dois números racionais não negativos** (divisor diferente de zero).

Se forem duas frações: dividimos os numeradores e os seus denominadores respectivamente.

exemplo

$$\frac{6}{10} \div \frac{2}{5} = \frac{6 \div 2}{10 \div 5} = \frac{3}{2}$$

Mas nem sempre este processo nos facilita o cálculo:

exemplo

$$\frac{1}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{1 \div 5}{3 \div 7} = \frac{0,2}{0,42...} = ...$$

Mas uma **divisão pode ser transformada numa multiplicação**:

O dividendo a dividir pelo divisor é o mesmo que o dividendo a multiplicar pelo inverso do divisor.

Então no exemplo anterior vem:

$$\frac{1}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{1}{3} \times \frac{7}{5} \quad \left(\frac{7}{5} \text{ é o inverso de } \frac{5}{7} \right)$$

e podemos continuar o cálculo:

$$\frac{1}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{1}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{7}{15}$$

exemplos

$$1) 1,5 \div \frac{4}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$$

2) O perímetro de um quadrado mede $\frac{12}{5}$ dm. Qual a medida do seu lado?

$$\frac{12}{5} \div 4 = \frac{12}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

R: O lado do quadrado mede $\frac{3}{5}$ dm.

* Reparamos então que **dividir por um número maior que um** é o mesmo que **multiplicar por um número menor que um**. O resultado é inferior ao número inicial.

No exemplo: $\frac{2300}{5} = 2300 \times \frac{1}{5} = 2300 \times 0,2 = 460$

Ou seja, a quinta parte de 2300 é o mesmo que $\frac{1}{5}$ de 2300 : $2300 : 5 = 2300 \times \frac{1}{5} = 460$

E dividindo 2300 por um número menor que um ?

Por exemplo $\frac{2300}{0,2}$:

$$\frac{2300}{0,2} = 2300 : 0,2 = 2300 : \frac{2}{10} = 2300 : \frac{1}{5} = 2300 \times 5 = 11\,500$$

Dividir por um número inferior a um é o mesmo que **multiplicar por um número superior a um** . O resultado será maior que o número inicial.

No exemplo acima: $2300 : 0,2 = 2300 \times 5 = 11\,500$

exemplo

Completa:

$$40 : \dots = 40 \times 0,5 = \dots$$

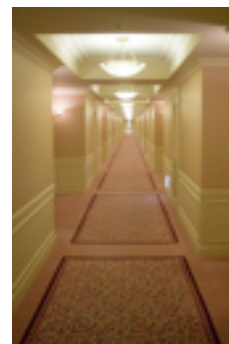
$$212 \times 4 = 212 : \dots = \dots$$

$$40 : 2 = 40 \times 0,5 = 20$$

$$212 \times 4 = 212 : 0,25 = 848$$

EXERCÍCIOS

- 1) Um tapete de corredor tem uma área de $1\,380\,000\text{ mm}^2$. O lado mais estreito mede $\frac{3}{5}$ metros, quantos metros tem o lado maior?



Fotografia de Indy138 no Flickr

- 2) A quinta parte de 2300 é o mesmo que duas décimas de 2300 ?

VALORES APROXIMADOS E ARREDONDAMENTOS

* Os **valores aproximados** são importantes porque nem sempre resultados como $\frac{75}{7}$ m ou

$5,1 \times \pi$ cm são adequados para uma resposta concreta no nosso dia-a-dia.

Na calculadora $\frac{75}{7}$ surge como 10,714286 mas este é já um valor aproximado por isso

devemos escrever $\frac{75}{7} \approx 10,714286$.

Ao utilizarmos um valor aproximado de $\frac{75}{7}$ podemos apenas considerar uma, duas ou três

casas decimais. Ao utilizarmos esse valor num cálculo quantas mais casas decimais considerarmos maior será a precisão.

Vamos determinar um valor aproximado de $\frac{75}{7}$:

- Com **uma casa decimal**, ou seja, com uma aproximação às décimas:

Como $\frac{75}{7} \approx 10,714286$ então $10,7 < \frac{75}{7} < 10,8$

(ambos os valores 10,7 e 10,8 são aproximações com um erro inferior a 0,1)

10,7 é um **valor aproximado por defeito** de $\frac{75}{7}$ com uma casa decimal,

10,8 é um **valor aproximado por excesso** de $\frac{75}{7}$ com uma casa decimal.

- Com **duas casas decimais**, ou seja, com uma aproximação às centésimas:

$$\frac{75}{7} \approx 10,714286 \text{ então } 10,71 < \frac{75}{7} < 10,72$$

(ambos os valores 10,71 e 10,72 são aproximações com um erro inferior a 0,01)

10,71 é um **valor aproximado por defeito** de $\frac{75}{7}$ com duas casas decimais,

10,72 é um **valor aproximado por excesso** de $\frac{75}{7}$ com duas casas decimais.

exemplos

1)

	Valor aproximado às décimas por defeito	Valor aproximado às décimas por excesso	Valor aproximado às milésimas por defeito	Valor aproximado às milésimas por excesso
$\frac{2}{3} = 0,(6)$	0,6	0,7	0,666	0,667
$2 \times \pi = 6,28315\dots$	6,2	6,3	6,283	6,284

2) Uma jarra cilíndrica assente numa mesa ocupa uma área com $4,59 \text{ dm}^2$. Sabendo que a jarra tem 3 dm de altura, quantos litros de água (valor às unidades) pode a jarra levar?

$$V_{\text{jarra}} = 4,59 \times 3 = 13,77 \text{ dm}^3 = 13,77 \text{ litros}$$

$13,77 \approx 14$ este é um valor aproximado às unidades por excesso. Neste caso não nos serve pois a jarra leva apenas 13,77 litros.

$13,77 \approx 13$ valor aproximado às unidades por defeito

R: 13 litros

* Um **arredondamento** de um número é também um valor aproximado e segue as seguintes regras para a casa decimal que se pretende arredondar:

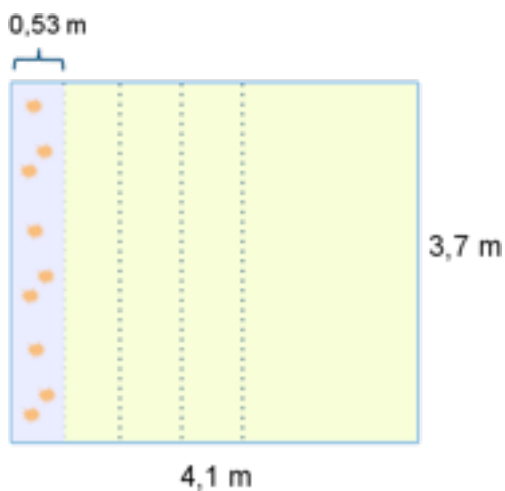
- se o algarismo da casa decimal seguinte for maior ou igual a 5, o número da casa decimal a arredondar sobe uma unidade.
- se o algarismo da casa decimal seguinte for inferior a 5, o número da casa decimal a arredondar mantém-se inalterado.

exemplos

1)

	Arredondamento às unidades	Arredondamento às décimas	Arredondamento às centésimas
3,965	4	4,0	3,97
2,0943...	2	2,1	2,09

2) Um rolo de papel de parede tem 10 m x 0,53 m . Para forrar um espaço com 4,10 metros de comprimento por 3,70 metros de altura quantos rolos serão necessários?



Cálculo do n.º de rolos a serem colocadas na vertical:

$$4,1 : 0,53 = 7,735... \approx 8 \text{ tiras}$$

Um rolo tem 10 metros, como $10 : 3,7 \approx 2,7$ então um rolo chega apenas para colocar 2 tiras completas (sobra 70 cm).

Para as 8 tiras completas precisamos de $8 : 2 = 4$.

R: São necessários 4 rolos.

TEMA

4

Reflexão, rotação e translação



ISOMETRIAS

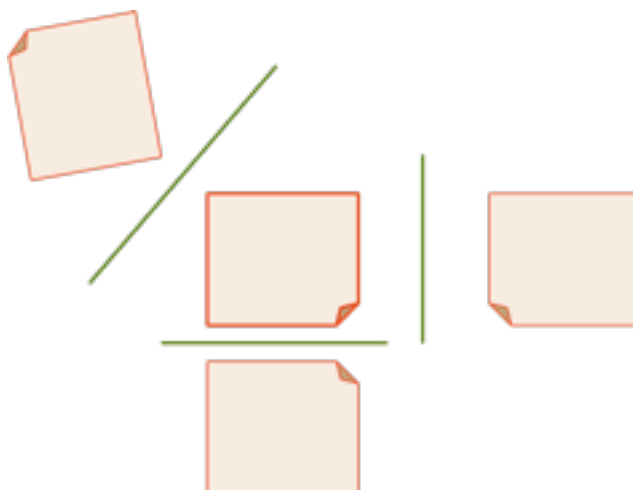
* Como o seu nome indica, **isometria** deriva de *isos* (igual) e *metria* ou *metron* (medida), igual medida. Uma isometria é uma transformação geométrica de uma figura que preserva a distância entre quaisquer dois pontos.

Isto é, transforma uma figura noutra geometricamente igual, mantendo-se as medidas e as amplitudes dos ângulos.

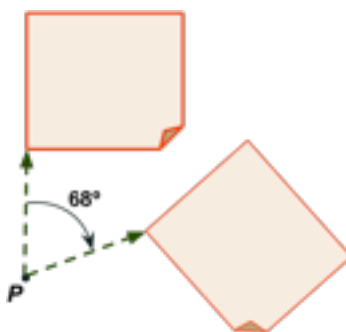
Existem no plano apenas quatro isometrias: Reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante.

exemplos

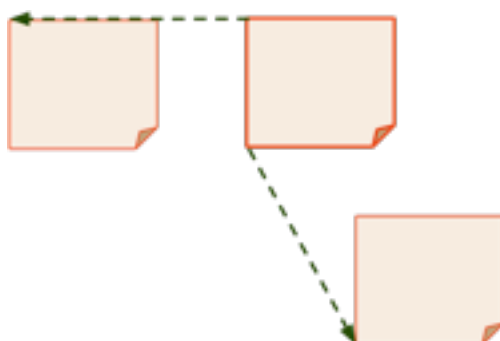
1) **Reflexão**: A figura é invertida em relação a um eixo axial (retas a verde).



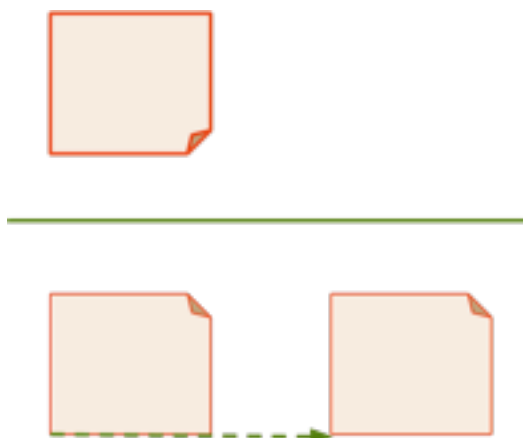
2) **Rotação**: A figura é rodada de um certo ângulo em torno de um certo ponto fixo (P).



3) **Translação:** A figura é deslocada uma dada distância numa determinada direção e sentido.

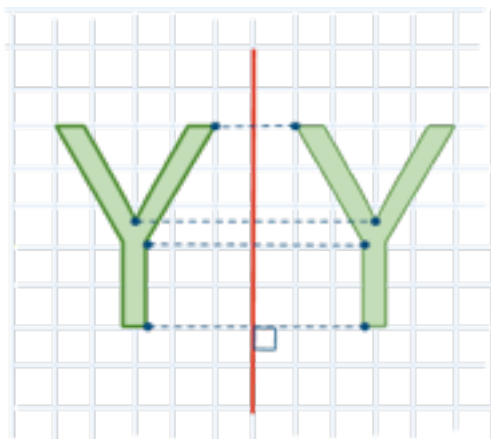


4) **Reflexão deslizante:** A figura passa por duas isometrias, uma reflexão seguida de uma translação.



A reflexão deslizante é uma composição de isometrias.

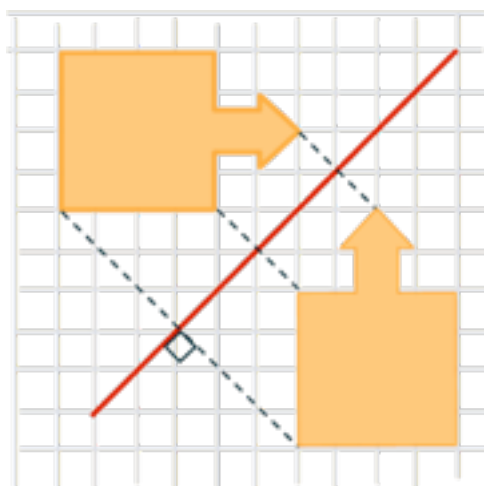
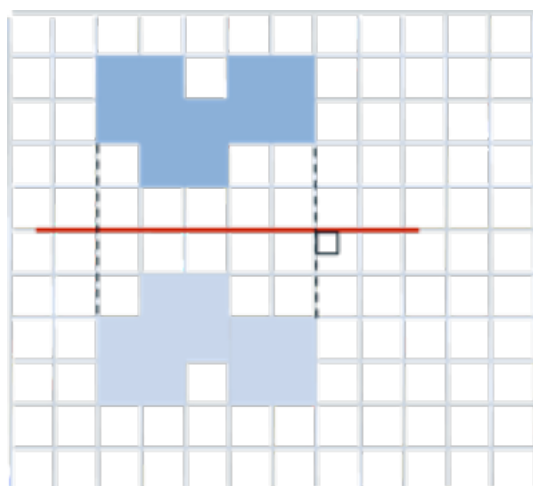
* Como construir a figura resultante de uma reflexão?



Dada uma figura e um eixo axial, são traçadas a partir de alguns pontos da figura vários segmentos de reta **perpendiculares ao eixo**.

Marcam-se nos segmentos traçados, pontos correspondentes aos pontos iniciais e **à mesma distância** do eixo axial.

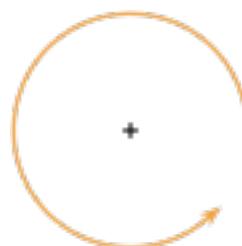
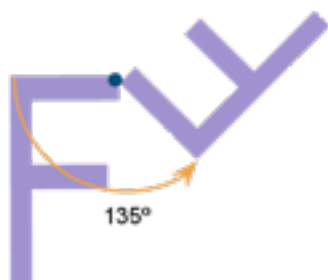
exemplo



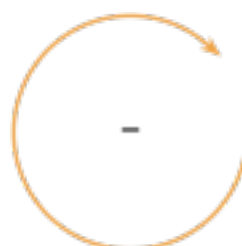
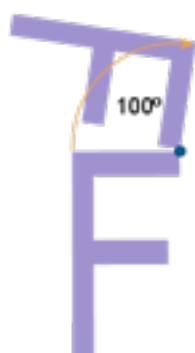
* Como construir uma figura obtida por rotação?

A rotação é feita em torno de um ponto fixo e o ângulo de rotação pode ter dois sentidos.

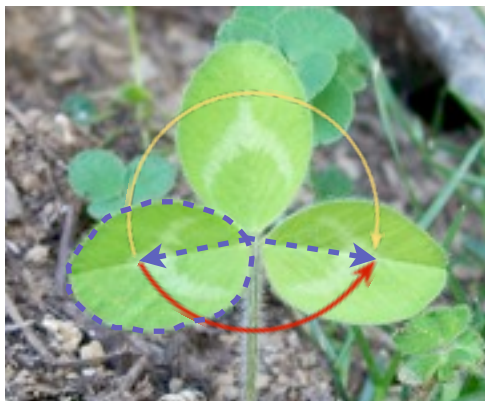
- **Sentido positivo:** Quando a amplitude do ângulo é feita no sentido contrário aos ponteiros do relógio:



- **Sentido negativo:** Quando esta é feita no sentido dos ponteiros do relógio:



exemplos

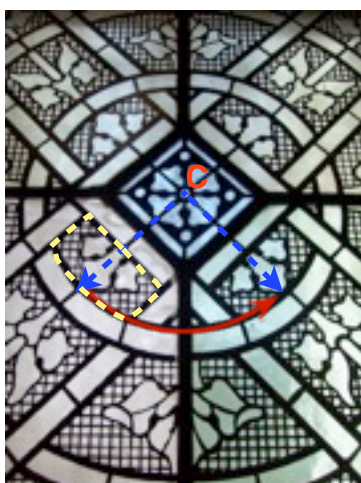


A folha selecionada a azul neste trevo repete-se por rotação a partir do ponto de união das suas folhas.

No sentido positivo temos uma rotação com cerca de 160° de amplitude (seta a vermelho)

Considerando a rotação contrária, no sentido negativo, temos uma amplitude de rotação com cerca de 200° (seta a amarelo).

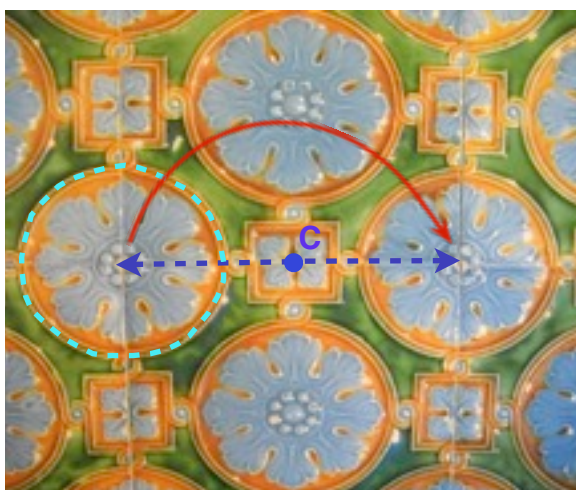
Fotografia de Misterteacher no Flickr



O desenho marcado a amarelo surge mais três vezes por rotação em torno do ponto fixo C .

Está representado a vermelho uma rotação no sentido positivo de 90° de amplitude.

Fotografia de Postinos em Arte & Fotografia



Neste azulejo a flor marcada a azul claro repete-se por rotação também mais três vezes em torno do ponto C .

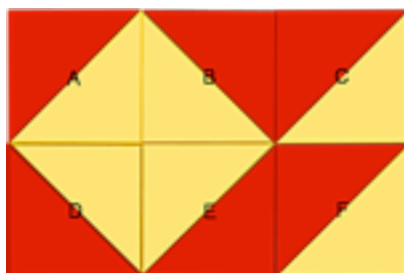
No desenho está indicado uma rotação no sentido negativo de 180° de amplitude.

COMPOSIÇÃO DE SIMETRIAS

* A composição de isometrias é a utilização de mais de uma isometria para transformar uma figura noutra congruente.

exemplo

Observa o painel seguinte.



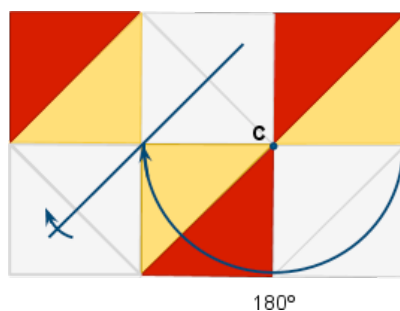
Que isometrias podemos utilizar para passar:

- da figura C para a figura A ?

Uma translação,



Uma composição de duas isometrias: Rotação de 180° no sentido negativo em torno do ponto C seguido de uma reflexão com eixo paralelo às diagonais dos quadrados coloridos,



Uma outra composição de isometrias possível: uma reflexão seguida de outra reflexão com eixo paralelo ao da primeira,



- da figura D para a figura B ?

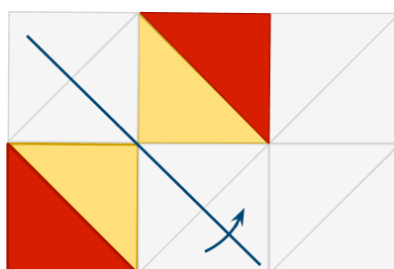
Uma rotação de 180° no sentido positivo (ou negativo),



Uma composição de isometrias: Uma reflexão seguida de outra reflexão com eixo perpendicular ao da primeira,



Uma reflexão de eixo paralelo à diagonal do quadrado D ,



SIMETRIA NUMA FIGURA

* Uma figura é simétrica quando existe uma isometria que deixa a figura invariante, isto é, que vai coincidir com a figura original.

Nem todas as figuras apresentam simetrias.

exemplos



* Existem vários tipos de simetria consoante a isometria existente.

Uma figura tem uma **simetria axial** se tiver uma **simetria por reflexão** e ao eixo de reflexão chamamos **eixo de simetria**.

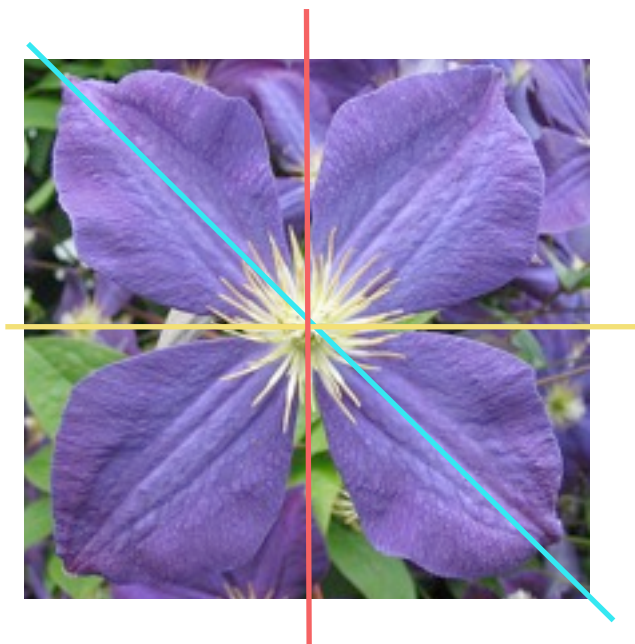
exemplos



O vitral tem várias simetrias axiais.

Estão representadas três.

Quantas consegues contabilizar?

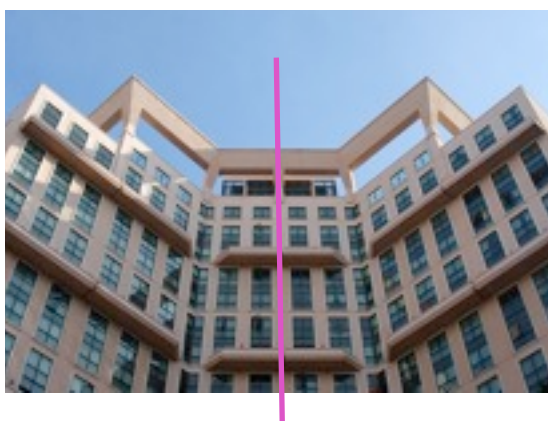


Na natureza encontramos muitos exemplos de figuras com simetrias axiais.

Neste exemplo não estão desenhados todos os eixos de simetria da figura.

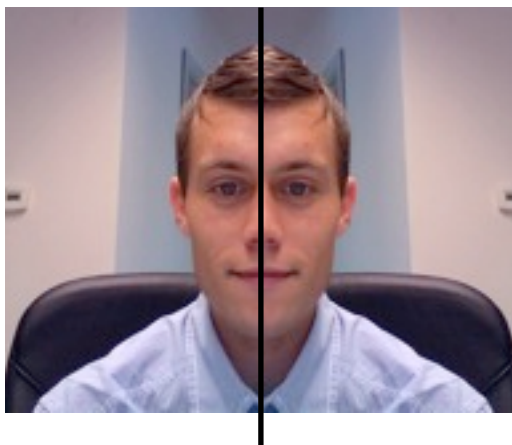
Quantos faltam?

Fotografia de Scottfelstein no Flickr



Observamos simetria axial com frequência nos edifícios.

Fotografia de DesmondDWyson no Flickr



A figura humana é grosso modo simétrica, com simetria axial.

Nesta imagem temos verdadeiramente uma simetria axial. 😊

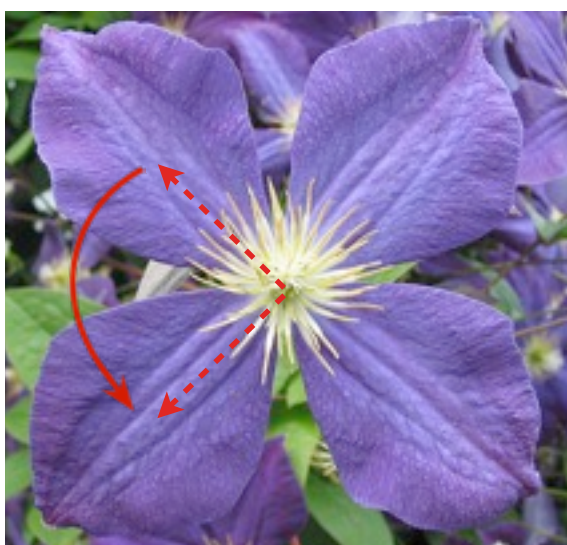
Fotografia de Joren Degroof no Flickr

* Uma figura tem **simetria rotacional** se existir uma **simetria por rotação** com amplitude de rotação superior a 0° e inferior a 360° . No caso da rotação ter amplitude igual a 0° ou a 360° é óbvio que obtemos sempre a figura original.

O ponto sobre o qual a rotação é feita chama-se **centro de simetria rotacional** e o ângulo de rotação chama-se **ângulo de simetria rotacional**.

exemplos

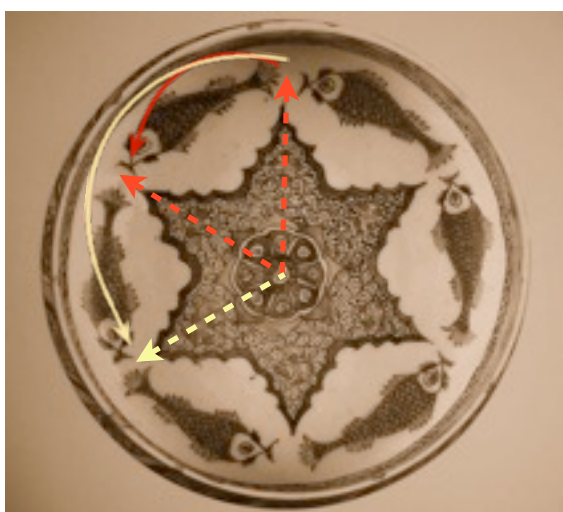
Uma das fotografias anteriores apresenta também uma simetria rotacional:



A rotação da figura no sentido positivo num ângulo de amplitude 90° deixa a figura da flor invariante (grosso modo!).

Observa que uma rotação (em qualquer dos sentidos) com amplitude de 180° , 270° e 360° também são ângulos de simetria rotacional da figura.

O ângulo de amplitude 360° é considerado quando existem outros ângulos de simetria rotacional.



Neste prato temos indicado a vermelho uma simetria rotacional no sentido positivo de 60° ($360^\circ : 6$).

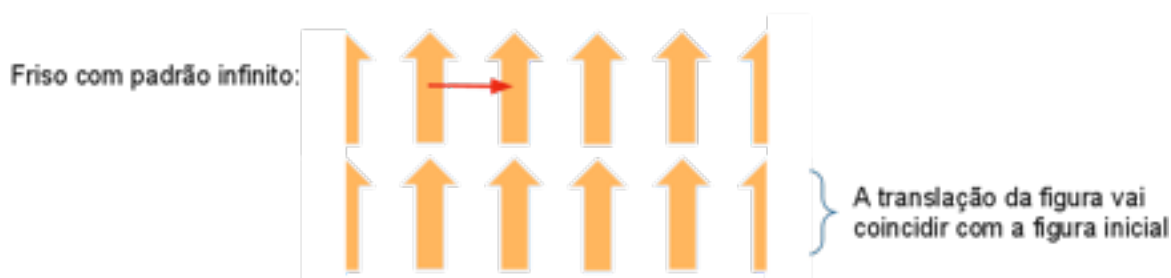
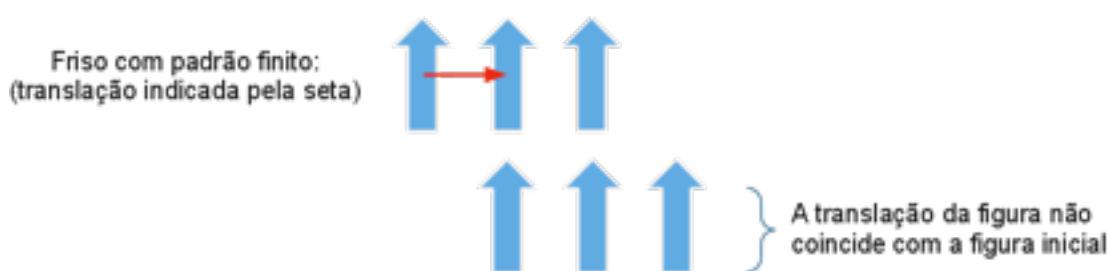
Também podemos considerar os ângulos de simetria rotacional de amplitudes: 120° , 180° , 240° , 300° e 360° que correspondem respetivamente a $60^\circ \times 2$, $60^\circ \times 3$, $60^\circ \times 4$, $60^\circ \times 5$ e $60^\circ \times 6$.

A amarelo está representado o ângulo de simetria rotacional no sentido positivo de 120° .

* A **simetria por translação** surge em figuras que designamos por frisos. Um friso é uma repetição de um padrão ao longo de uma direcção.

A simetria por translação num friso só ocorre verdadeiramente se o padrão se repetir infinitamente.

Observa no exemplo seguinte a figura constituída por três setas. É um friso com um padrão finito.



exemplos

Encontramos casos de frisos no nosso dia-a-dia. Embora não sejam infinitos, podemos olhar para eles como parte de um friso infinito.



Neste friso do convento de Tomar estão representadas duas simetrias por translação.

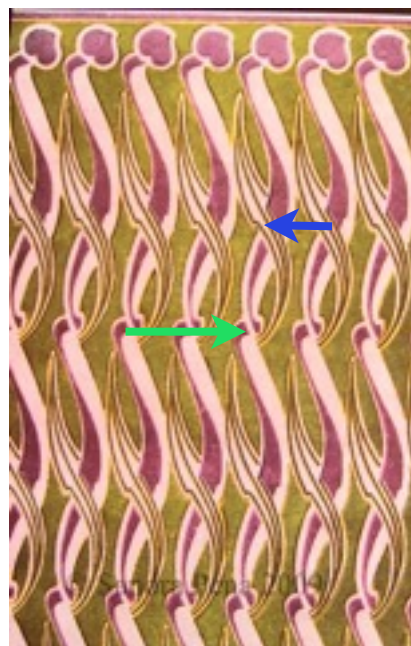
O vetor azul tem a mesma direcção e sentido do vetor amarelo mas com o dobro de comprimento.

Fotografia de Waugsberg em Wikimedia Commons

Claro que outros vetores com outros comprimentos (múltiplos do comprimento do vetor amarelo) e até sentidos opostos podem ser representados.



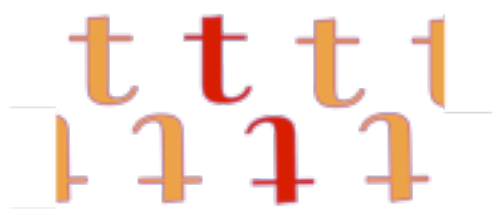
Nos tapetes e no papel de parede encontramos também exemplos de frisos e com eles simetrias de translação.



* Simetrias nos frisos.

Existem vários tipos de frisos. Podemos ver as suas diferenças pelo modo como o padrão (ou motivo) de repetição é construído. Esse motivo, gerador do friso, depende de uma ou várias isometrias. Essas isometrias permitem classificar os frisos em sete tipos. As isometrias seguintes geram os sete frisos possíveis:

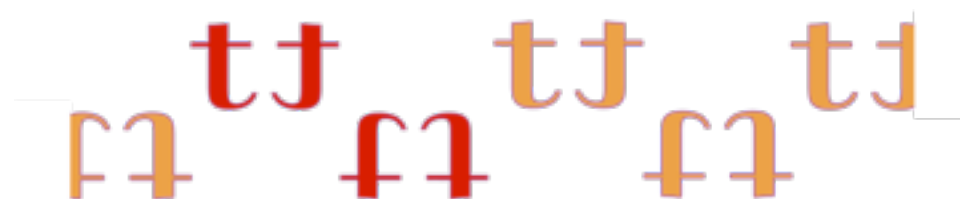




Gerado por rotação de 180° e translação

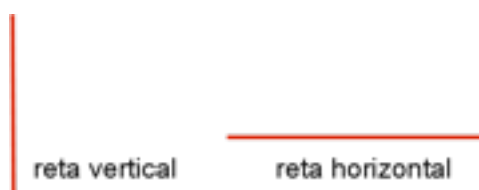


Gerado por reflexão vertical e horizontal seguida de translação



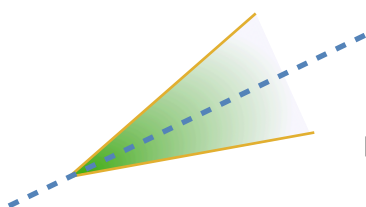
Gerado por reflexão vertical e reflexão deslizante seguida de translação

Utiliza-se a seguinte convenção para as reflexões axiais:

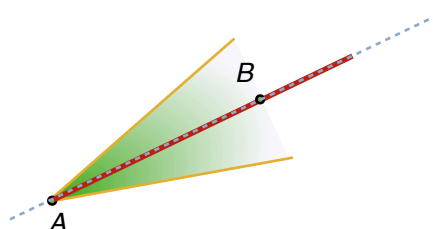


SIMETRIA NA GEOMETRIA

* Simetria de um ângulo.



Qualquer ângulo (inferior a 360°) tem um eixo de simetria que passa pelo seu vértice.

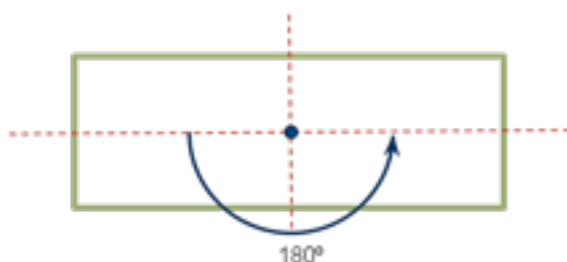


O eixo de simetria do ângulo (reta AB) contém a semirreta AB (indicada a vermelho) a que chamamos **bissetriz do ângulo**.

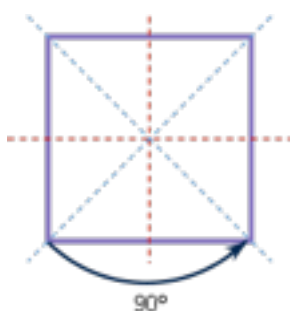
Escrevemos $\overrightarrow{AB}$ para designar a semirreta AB .

Esta semirreta tem origem no vértice e divide o ângulo em dois ângulos geometricamente iguais.

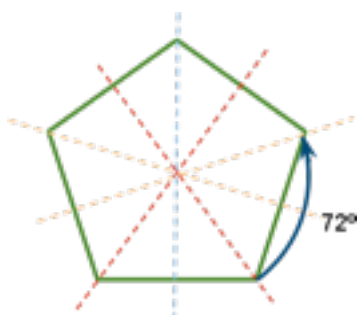
* **Simetria em polígonos.**



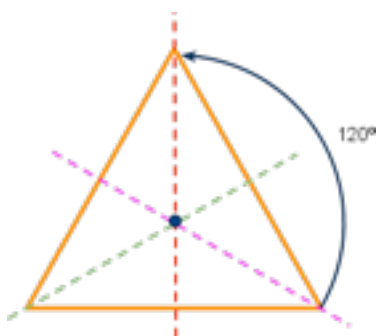
O retângulo tem dois eixos de simetria e duas simetrias por rotação. Uma de 180° e outra de 360° com centro de rotação no ponto de cruzamento dos seus eixos de simetria.



O quadrado tem quatro eixos de simetria e quatro simetrias por rotação em torno do seu centro. Com ângulos de rotação de amplitude de 90° , 180° , 270° e 360° .



O pentágono regular tem cinco eixos de simetria e cinco simetrias por rotação. O desenho coincide com o desenho inicial quando o ângulo de rotação tem amplitude: 72° , 144° , 216° , 288° e 360° .

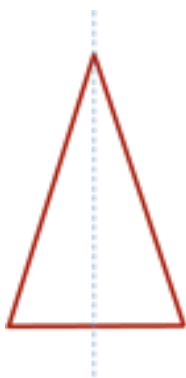


O triângulo equilátero tem três eixos de simetria e três simetrias por rotação com centro de rotação no ponto de cruzamento dos três eixos de simetria.

Qual a amplitude de cada rotação? 120° ($360^\circ : 3$), 240° e 360° .

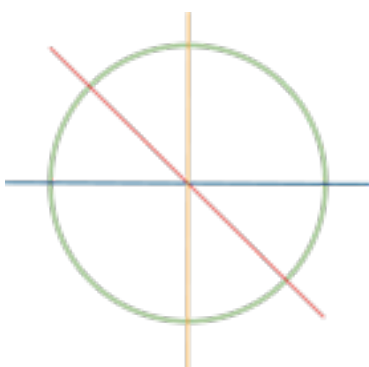
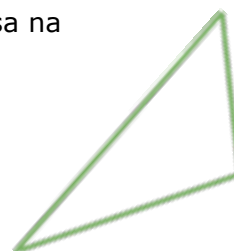
Reparamos que nos polígonos regulares:

- o número de eixos de simetria coincide com o número de vértices;
- os eixos de simetria dividem a área do polígono em triângulos congruentes e o número desses triângulos é o dobro do número de eixos (ou vértices);
- cada eixo de simetria divide o respetivo ângulo interno do polígono em dois ângulos congruentes;
- se o número de vértices é ímpar então os eixos de simetria passam por um vértice e pelo ponto médio do lado oposto a esse vértice. Se o número de vértices é par então metade dos eixos de simetria passam por dois vértices e a outra metade passa pelos pontos médios dos lados do polígono.



O triângulo isósceles tem um eixo de simetria que passa na interseção dos seus dois lados congruentes e não tem simetria por rotação.

O triângulo escaleno não tem qualquer tipo de simetria.



O círculo tem infinitos eixos de simetria.

Passam todos pelo centro do círculo e cada um contém um diâmetro.

ROSÁCEAS

* Rosáceas são figuras compostas por um motivo que se repete por rotação em torno de um ponto fixo, o centro da rosácea.

O motivo repete-se um número fixo de vezes, n . Assim a amplitude do ângulo de rotação é sempre $360^\circ : n$ mais os seus múltiplos até obtermos 360° .

As rosáceas têm sempre simetrias rotacionais podendo ter também simetrias de reflexão.

exemplos



Rosácea em pedra com um motivo indicado a amarelo e que se repete quatro vezes.

Tem assim quatro simetrias por rotação com ângulo de rotação de amplitude 90° , 180° , 270° e 360° .

Não tem simetrias de reflexão.

Fotografia de Takomabibelot no Flickr



Rosácea com seis simetrias rotacionais e seis simetrias axiais.

O motivo indicado repete-se seis vezes rodando em relação ao centro da rosácea segundo um ângulo de amplitude 60° , 120° , 180° , 240° , 300° e 360° .

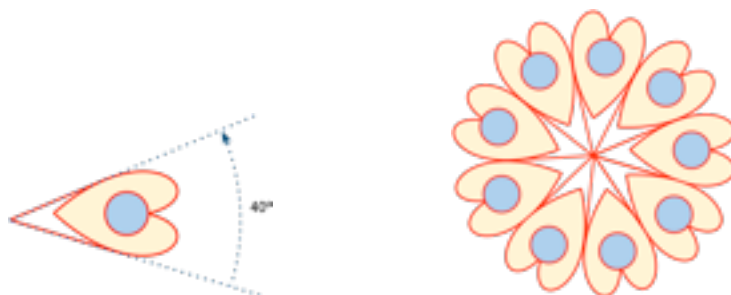
*** Construção de uma rosácea.**

A construção manual de uma rosácea é facilitada quando a divisão do ângulo giro (360°) em partes iguais resulta num ângulo de amplitude com valor inteiro.

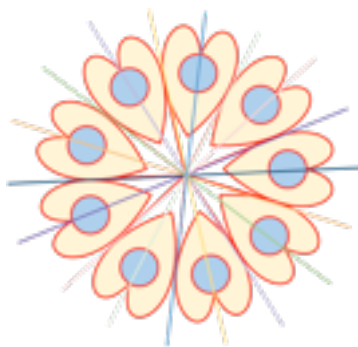
Como $360^\circ : 9 = 40^\circ$ podemos elaborar uma rosácea com nove simetrias por rotação em torno do seu centro.

Desenhamos um ângulo de 40° e criamos um motivo.

exemplo

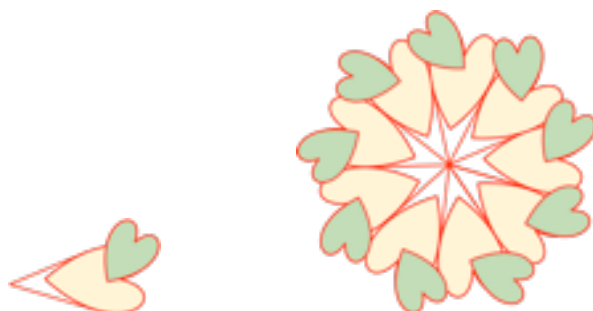


Deste modo criamos uma rosácea com nove simetrias axiais.



Podemos construir muitos motivos diferentes dentro de um ângulo de 40° de amplitude.

O motivo seguinte, por exemplo, irá originar uma rosácea sem simetrias axiais:



TEMA

5

Representação e interpretação de dados



NATUREZA DOS DADOS ESTATÍSTICOS

* Para se iniciar um estudo estatístico é necessário definir qual o conjunto de elementos que se pretende estudar. Podem ser pessoas, objectos ou acontecimentos. Podemos estudar todos os elementos ou apenas uma parte, a que chamamos amostra.

O que queremos estudar nesse conjunto? Queremos estudar algo que seja comum a todos esses elementos, uma característica ou propriedade, a que chamamos **variável estatística**.

exemplos

1) Inquérito sobre as horas de sono dos idosos residentes num lar da santa Casa.

Variável estatística: número de horas de sono



2) Estudo sobre as justificações de faltas ao trabalho numa fábrica de garrafas.

Variável estatística: motivo das faltas ao trabalho



Fotografia de Seattle Municipal Archives no Flickr

Aos resultados ou respostas obtidas designamos por **dados estatísticos**. São estes dados que necessitam depois de serem organizados e representados em tabelas e gráficos de modo a serem interpretados.

* Observando os exemplos anteriores percebemos que os dados estatísticos podem ser números ou não. No caso do número de horas de sono, os resultados podem ser: 7 , 8 ou 9 horas e no caso dos motivos de falta ao trabalho podemos obter respostas como: visita às finanças, doença do filho ou urgência médica.

Dizemos que no 1.º caso a variável é **quantitativa** e no 2.º caso é **qualitativa**. Estamos a definir a natureza dos dados estatísticos.

Uma variável diz-se quantitativa (ou numérica) quando se refere a uma propriedade que se pode contar ou medir, o dado estatístico obtido é um número.

Uma variável diz-se qualitativa (ou categórica) quando se refere a uma propriedade que está relacionado com uma qualidade. Os dados estatísticos obtidos podem assumir várias modalidades ou categorias.

No caso da variável estatística ser quantitativa ainda fazemos duas distinções:

Variável quantitativa e discreta: quando os dados recolhidos surgem de uma contagem e não de uma medição.

Variável quantitativa e contínua: quando os dados recolhidos surgem de uma medição, como por exemplo a altitude, o comprimento ou as horas, onde podemos ser tão precisos quanto queiramos. Claro que muitas vezes estes valores surgem discretos, isto é, são números inteiros embora a sua natureza seja contínua.

exemplo

Classifica as seguintes variáveis estatísticas:

- A** - Volume das caixas de embalagem numa fábrica;
- B** - Tamanho da caixa de pipocas no cinema;
- C** - Número de vendas de bilhetes por dia para um espetáculo de teatro;
- D** - Número de gramas de cada embalagem de sardinhas à venda na loja do peixe;
- E** - Nível de qualidade dos manuais escolares escolhidos numa escola.

- A - variável quantitativa contínua
- B - variável qualitativa
- C - variável quantitativa discreta
- D - variável quantitativa contínua
- E - variável qualitativa

RECOLHA E ORGANIZAÇÃO DE DADOS ESTATÍSTICOS: TABELAS E GRÁFICOS

* Após a recolha dos dados estatísticos para estudo, a organização desses dados pode ser feita através de uma tabela.

Observa o seguinte registo do números de golos de uma equipa de futebol:



Fotografia de Wilson Dias no
Wikimedia Commons

1 4 5 0 1 0 2 1 2 1
3 1 0 1 1 2 1 3 1 3
3 0 2 2 2 4 0 1 5 0
4 0 1 1 2 2 1 0 3 1

Procedendo à contagem e ordenação dos golos numa tabela, chamada **tabela de frequências absolutas**, obtemos:

Número de golos	Frequência absoluta
0	8
1	14
2	8
3	5
4	3
5	2

A **frequência absoluta de um acontecimento** é a contagem do número de vezes que esse acontecimento surge no estudo estatístico. Neste caso representa o número de jogos.

Observando a tabela podemos retirar algumas conclusões:

- o número máximo de golos num jogo foi 5 ;
- a equipa realizou com mais frequência 1 golo por jogo;
- só em 5 jogos é que fizeram quatro ou mais golos;
- foram registados 40 jogos.

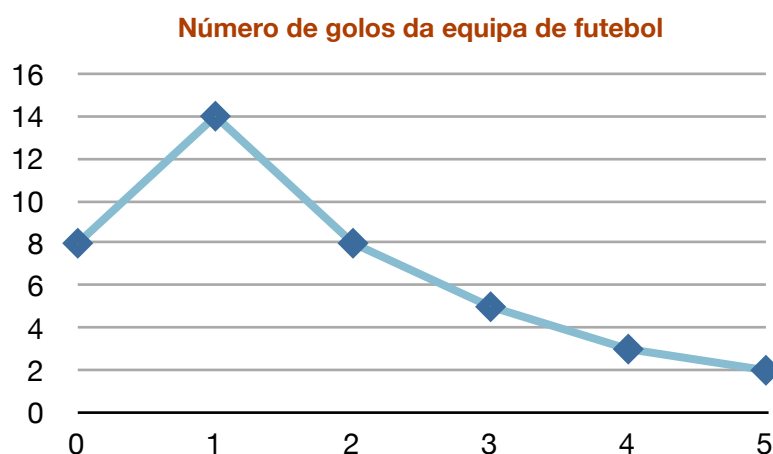
Com a tabela de frequências absolutas podemos elaborar ainda uma **tabela de frequências relativas**:

Número de golos	Frequência absoluta	Frequência relativa
0	8	$\frac{8}{40} = 0,2 = 20\%$
1	14	$\frac{14}{40} = 0,35 = 35\%$
2	8	$\frac{8}{40} = 0,2 = 20\%$
3	5	$\frac{5}{40} = 0,125 = 12,5\%$
4	3	$\frac{3}{40} = 0,075 = 7,5\%$
5	2	$\frac{2}{40} = 0,05 = 5\%$
	40	1 ou 100%

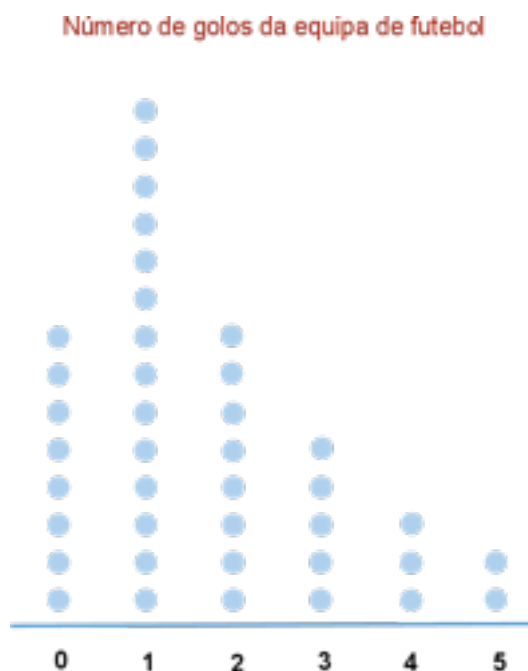
A **frequência relativa** de um acontecimento é o quociente entre a respetiva frequência absoluta e o número total de frequências absolutas (o número total de dados estatísticos). Esta pode ser representada na forma de fração, número decimal ou em percentagem.

* Outras apresentações de um estudo estatístico podem ser feitas com recurso a representações gráficas como o gráfico de linhas, de barras, de pontos, gráficos circulares e diagramas de caule-e-folha.

Tomando a tabela de frequências absolutas como ponto de partida podemos construir o **gráfico de linhas** associado:



Ou o **gráfico de pontos**:

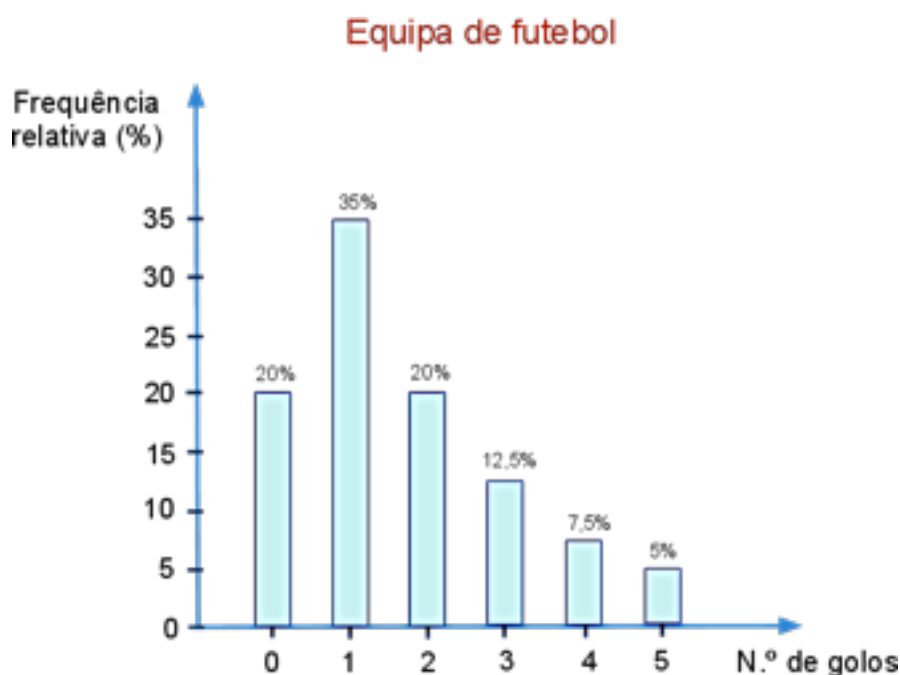


Um **gráfico de barras** pode ser construído tanto na vertical como na horizontal. Num dos eixos temos os acontecimentos e no outro as frequências absolutas ou as frequências relativas.

É preciso observar bem os valores nas tabelas de frequências para se decidir qual a escala a tomar nos eixos.

As barras têm a mesma largura e estão sempre igualmente espaçadas.

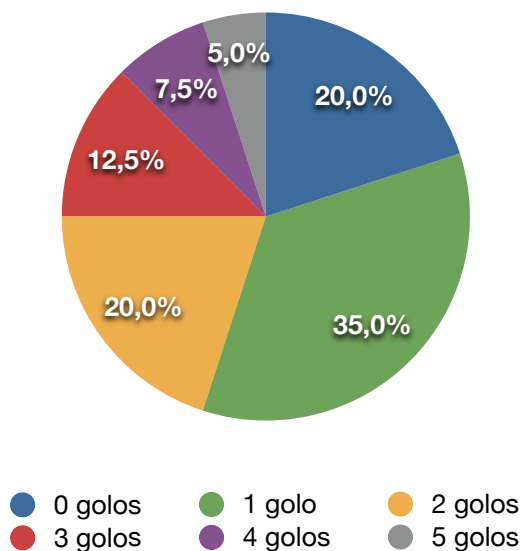
Observa o **gráfico de barras vertical** associado à tabela de frequências relativas:



Um **gráfico circular** pode ser construído manualmente ou obtido através de diversos programas, sendo necessário ter os dados estatísticos já organizados numa tabela de frequências (absolutas ou relativas).

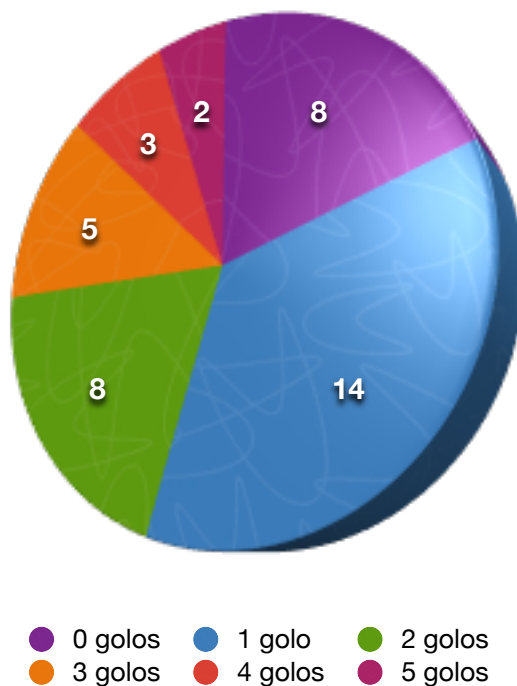
O **gráfico circular das frequências relativas** relativo ao estudo do número de golos da equipa de futebol pode então ficar com o seguinte aspeto:

Percentagem de golos em 40 jogos da equipa de futebol



E o **gráfico circular das frequências absolutas em 3D**:

Número de golos da equipa de futebol



Um **diagrama de caule-e-folhas** é de grande utilidade quando os dados estatísticos são de natureza quantitativa, discreta ou contínua, mas apresentando-se muito dispersos sendo difícil a sua organização em tabelas.

exemplo

Um inquérito sobre o número de moradores por prédio num bairro recente forneceu os seguintes resultados:



88	96	64	77	76	79	58	97
65	66	78	52	87	76	41	47
74	73	81	86	74	85	84	90
67	54	73	79	94	73	81	86

Vamos organizar os dados num diagrama de caule-e-folhas:

Fotografia de Vmenkov no Wikimedia Commons

4	 	1 7									
5	 	2 4 8									
6	 	4 5 6 7									
7	 	3 3 3 4 4 5 6 6 7 9 9									
8	 	1 1 4 5 6 6 7 8									
9	 	0 4 6 7									

Podemos agora retirar algumas conclusões observando o diagrama acima:

- apenas dois prédios tem menos de 50 moradores;
- o máximo de moradores por prédio é 97 ;
- 11 prédios têm entre 73 a 79 moradores;
- cerca de 72% (23 : 32) dos prédios tem mais de 70 moradores.

MÉDIA ARITMÉTICA

EXTREMOS E AMPLITUDE

*A **média aritmética**, ou somente **média**, só pode ser determinada se os dados estatísticos forem quantitativos e calcula-se fazendo o quociente entre a soma de todos os valores estatísticos e o número total de valores existentes.

exemplos

1) Num campeonato de tiro ao alvo os participantes realizaram 10 tiros cada um. Os valores seguintes indicam o números de acertos no alvo de cada um dos participantes:



3 , 5 , 9 , 8 , 10 , 5 , 10 , 7 , 3 , 9 , 6 , 10

Fotografia de Tim Hipps cedida pela U.S. Army

a) Qual o número médio de acertos no alvo?

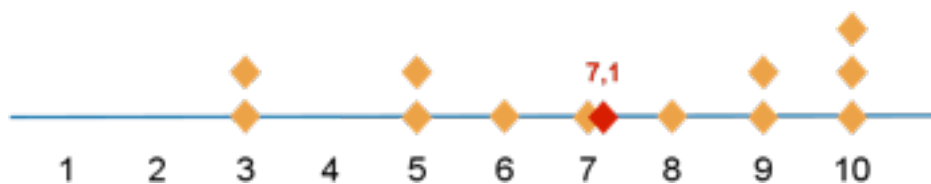
$$\frac{3 + 5 + 9 + 8 + 10 + 5 + 10 + 7 + 3 + 9 + 6 + 10}{12} = \frac{85}{12} \approx 7,08$$

R: O número médio foi aproximadamente 7,1 acertos.

b) Quantos participantes estavam no campeonato?

R: 12

Representando os valores estatísticos anteriores e a sua média num gráfico de pontos:



Repara que a média:

- não tem de coincidir com um dado estatístico;
- representa o “centro” da distribuição dos dados estatísticos;
- tem em conta todos os dados estatísticos.

2) Os pesos em gramas de diversas embalagens de fruta são os seguintes:

45	0	1	2	7	7	8
61	1	2	4			
70	0	0				



a) Qual o peso médio das embalagens?

Fotografia de Karimian no Flickr

Cálculo da média $(450 + 451 + \dots + 700) : 11 = 5962 : 11 = 542$

R: O peso médio é 542 gramas.

b) Que percentagem (com uma casa decimal) das embalagens tem peso inferior a 620 gramas?

$9 : 11 \approx 0,818 = 81,8 \%$

R: 81,8 % das embalagens.

* Perante um conjunto de dados estatísticos de natureza quantitativa, uma das primeiras avaliações a fazer é observar os valores mínimo e máximo registados.

Chamamos **extremos de um conjunto de dados** ao mais pequeno e ao maior valores observados, ou seja os extremos são o **mínimo** e **máximo**.

Com esses dois valores determinamos ainda a **amplitude dos dados estatísticos** que é a diferença entre o máximo e o mínimo, ou seja:

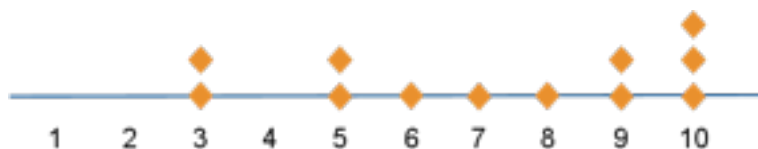
$$\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}$$

A amplitude permite-nos ter uma ideia da dispersão dos dados estatísticos.

exemplos

Determina os extremos e a amplitude dos seguintes dados estatísticos:

1) Número de acertos por cada participante num campeonato de tiro ao alvo:



R: Mínimo: 3 ; máximo: 10 e amplitude = $10 - 3 = 7$

2) Ordenados, em euros, num departamento de uma empresa:

75	0	4	8						
86	3	4	4	5	5	5			
96	0	0	1	1	7	7	8	9	

R: Mínimo: 750 euros ; máximo: 969 euros e amplitude = $969 - 750 = 219$ euros

3) Resultado obtido num grupo de alunos de uma escola secundária:



R: Mínimo: 12 horas ; máximo: 30 horas

Amplitude = $30 - 12 = 18$ horas

TEMA

6

Relações e regularidades



EXPRESSÕES NUMÉRICAS

* Uma expressão numérica é uma expressão com números e operações. Podemos ter uma ou várias operações de adição, subtração, multiplicação e/ou divisão. Surgirem ou não parênteses. Números em forma de fração, inteiros, decimais ou potências.

A resolução de uma expressão numérica pode ter um significado preciso pois estas são muitas vezes a tradução matemática de problemas de situações da vida real. Ao resolver uma expressão numérica obtemos sempre um número!

exemplo1

Com dois euros compro 10 carcaças que custam 0,12 euros cada, um bolo a 65 centavos e ainda recebo troco. Qual a expressão que representa o troco que vou receber?

Expressão numérica que representa o troco: $2 - 10 \times 0,12 - 0,65$

(65 centavos são 0,65 euros pois 1 euro = 100 centavos)

O cálculo da expressão acima representa o valor do troco:

$$2 - 10 \times 0,12 - 0,65 = 2 - 1,2 - 0,65 = 0,8 - 0,65 = 0,15$$

R: No fim recebo 15 centavos de troco.

* A resolução da expressão numérica é feita efetuando os cálculos da esquerda para a direita (como no exemplo acima) não esquecendo que:

- os cálculos com potências devem ser feitos em 1.º lugar;
- os cálculos dentro dos parênteses devem de ser resolvidos antes dos parênteses serem removidos;
- as operações da multiplicação e da divisão têm prioridade sobre as operações da adição e subtração;
- usar as propriedades da adição e da multiplicação sempre que estas possam simplificar o cálculo.

exemplo2

De uma caixa com 12 lápis de cor perderam-se três. Mais tarde um terço dos restantes foram deixados no sofá. Dos que sobraram metade estavam ainda novos.

a) Indica uma expressão que represente o número de lápis deixados no sofá.

$$(12 - 3) : 3$$

b) Quantos lápis ficaram no sofá?

$$12 - 3 = 9 \quad \text{e} \quad 9 : 3 = 3$$

R: Ficaram 3 lápis no sofá.

c) O que representa a expressão $9 - (9 : 3)$?

Representa o número de lápis que ficaram na caixa depois de alguns terem ficado no sofá.

d) Qual a expressão que representa o número de lápis novos? E quantos são?

$$(9 - 3) : 2 \quad \text{Cálculo:} \quad (9 - 3) : 2 = 6 : 2 = 3$$

R: Existem 3 lápis novos na caixa.



Este exemplo mostra a importância dos parênteses.

Repara como o cálculo $(9 - 3) : 2$ é diferente do cálculo $9 - 3 : 2$,

$$(9 - 3) : 2 = 6 : 2 = 3$$

O que está entre parênteses tem de ser calculado antes da divisão por 2 .

$$9 - 3 : 2 = 9 - 1,5 = 7,5$$

Sem os parênteses apenas o número 3 é dividido por 2 e a divisão efetua-se primeiro que a subtração.

E na expressão da anterior alínea b) $9 - (9 : 3)$ será mesmo necessário os parênteses?

Como a divisão tem prioridade sobre a subtração, $9 : 3$ será sempre o primeiro cálculo a ser efetuado assim os parênteses podem ser dispensados $9 - (9 : 3) = 9 - 9 : 3$.

exemplo3

A Filipa comprou dois cadernos e quinze gomas a 5 cêntimos cada uma. Gastou € 4,35 no total. O Eduardo comprou o dobro dos cadernos da Filipa e um terço das gomas.

a) O que representam as seguintes expressões: $4,35 - 0,05 \times 15$ e $(4,35 - 0,05 \times 15) : 2$?

$4,35 - 0,05 \times 15$ representa o preço dos cadernos que a Filipa comprou;
 $(4,35 - 0,05 \times 15) : 2$ representa o preço de cada caderno (a Filipa comprou 2).

b) Qual o preço de cada caderno?

$(4,35 - 0,05 \times 15) : 2 = (4,35 - 0,75) : 2 = 3,6 : 2 = 1,8$
 R: Cada caderno custa € 1,80.



c) Indica uma expressão numérica que represente quanto gastou o Eduardo e resolve-a.

O dobro dos cadernos da Filipa --> $2 \times 2 = 4$

Um terço das gomas --> $15 : 3 = 5$

O preço de quatro cadernos e cinco gomas tem a seguinte expressão: $4 \times 1,8 + 5 \times 0,05$

Resolução: $4 \times 1,8 + 5 \times 0,05 = 7,2 + 0,25 = 7,45$

R: O Eduardo gastou € 7,45 .

exemplo4

1) Calcula: $5^2 - 0,25 \times (101 - 1)$

$5^2 - 0,25 \times (101 - 1) = 25 - 0,25 \times 100 = 25 - 25 = 0$

Podemos resolver as potências e o que se encontra entre parênteses ao mesmo tempo.

2) As frases "A soma do dobro de cinco com seis" e "O dobro da soma de cinco com três" traduzem o mesmo número?

A soma do dobro de cinco com seis --> $2 \times 5 + 6$

O dobro da soma de cinco com três --> $2 \times (5 + 3)$

Resolução: $2 \times 5 + 6 = 10 + 6 = 16$ e $2 \times (5 + 3) = 2 \times 8 = 16$

R: Sim.

Ou seja as expressões $2 \times 5 + 6$ e $2 \times (5 + 3)$ são equivalentes. Observa que usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição a expressão $2 \times (5 + 3)$ é exactamente $2 \times 5 + 6$:

$$2 \times (5 + 3) = 2 \times 5 + 2 \times 3 = 2 \times 5 + 6$$

Provámos que as duas expressões representam o mesmo número sem as resolver!

3) Traduz em linguagem matemática: Quantos euros tinha o Pedro sabendo que um terço foi gasto num dvd de € 15 e em quatro livros a € 5 cada.

Indica na expressão qual a operação que resolverias em 1.º, 2.º e em 3.º lugar.

Se gastou um terço então é porque tinha o triplo: $3 \times (15 + 4 \times 5)$

R: $3 \times (15 + 4 \times 5)$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 3.º 2.º 1.º

4) Analisa mentalmente as expressões seguintes indicando se as igualdades ou desigualdades apresentadas são verdadeiras ou falsas:

a) $2,6 + 3 - 3 = -5 + 2,6 + 5$

e) $\frac{26}{4} + 2,1 = \frac{13}{2} + 1 + 1,2$

b) $0,5 - 0,5 + 66 = 67$

f) $(0,2 - 1)2 = 0,4 - 2$

c) $\frac{1}{3} + 1 < \frac{1}{2} + 1$

g) $3(5 + 1,1) < 15 + 3,4$

d) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + 8 = 8 + \frac{3}{5}$

h) $6,3 + 0,2 < 6,23 + 0,2$

a) V

e) F

b) F

f) V

c) V

g) V

d) V

h) F

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

* Uma expressão algébrica é uma expressão onde, para além de números e de operações numéricas, surgem letras que representam números que desconhecemos e que podem tomar vários valores. Chamamos por isso a essas letras, **variáveis** ou **incógnitas**.

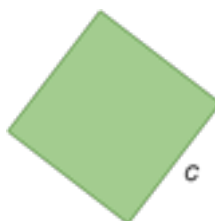
Já utilizámos este tipo de expressões anteriormente por exemplo no cálculo da área e do perímetro de um retângulo.

exemplos

1) Num quadrado de lado com medida c escreve a expressão algébrica que traduz a medida do seu perímetro e da sua área.

$$P_{\text{quadrado}} = c + c + c + c = 4 \times c$$

$$A_{\text{quadrado}} = c \times c = c^2$$



2) Traduz em linguagem matemática cada uma das frases seguintes:

pensa num número entre 1 e 10
 divide-o por 2
 multiplica tudo por 8
 adiciona depois 10
 divide o resultado por 2
 no fim subtrai 5

Que número obténs?

pensa num número	-->	b
divide-o por 2	-->	$b : 2$
multiplica tudo por 8	-->	$8 \times (b : 2)$
adiciona depois 10	-->	$8 \times (b : 2) + 10$
divide o resultado por 2	-->	$(8 \times (b : 2) + 10) : 2$
no fim subtrai 5	-->	$(8 \times (b : 2) + 10) : 2 - 5$

Simplificando a expressão final:

$$\begin{aligned}
 \left(8 \times \left(\frac{b}{2} \right) + 10 \right) : 2 - 5 &= \left(\frac{8 \times b}{2} + 10 \right) : 2 - 5 = \\
 &= (4 \times b + 10) : 2 - 5 = \\
 &= \frac{4 \times b + 10}{2} - 5 = \\
 &= \frac{4 \times b}{2} + \frac{10}{2} - 5 = \\
 &= 2 \times b + 5 - 5 = \\
 &= 2 \times b
 \end{aligned}$$

R: Obtemos o dobro do número inicial.

Vamos ver um exemplo: pensando no número 5

$$\begin{aligned}
 5 : 2 &= 2,5 \\
 2,5 \times 8 &= 20 \\
 20 + 10 &= 30 \\
 30 : 2 &= 15 \\
 15 - 5 &= 10 \text{ (é o dobro de 5)!!}
 \end{aligned}$$

*** Simplificação de expressões algébricas.**

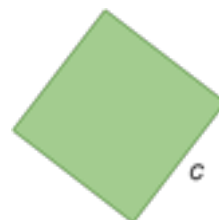
Simplificação da escrita: Numa expressão algébrica podemos simplificar a escrita de um produto entre um número e uma variável substituindo o sinal de multiplicação por um ponto ou mesmo eliminando o sinal de $\times$.

exemplos

1) Como vimos atrás, a expressão que representa o perímetro do quadrado de lado c é $4 \times c$.

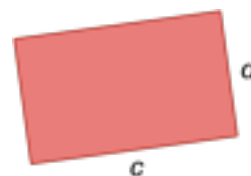
Esta expressão é equivalente a escrever $4 \cdot c$ ou mesmo $4c$.

Ou seja $4 \times c = 4 \cdot c = 4c$. Podemos escrever $P_{\text{quadrado}} = 4c$ e lê-se *quatro c* ou *quatro vezes c*.



2) No cálculo do perímetro de um retângulo cujos lados medem c e d podemos escrever:

$$P_{\text{retângulo}} = 2 \times c + 2 \times d = 2c + 2d = 2(c + d)$$



O sinal de igualdade entre as três expressões

$2 \times c + 2 \times d = 2c + 2d = 2(c + d)$ indica que estas são equivalentes.

As expressões algébricas ficam assim mais simples, com menos símbolos presentes.

exemplos

Simplificação das expressões:

$$1) \quad 2 \times (1,5 - a) = 2(1,5 - a) = 3 - 2a$$

↓
simplificação
da escrita

↓
prop. distributiva da multiplicação

$$2) -2a + 5a = (-2 + 5)a = +3a$$

↓
prop. distributiva da multiplicação

$$3) 10n + n - 3n - 5n = 9n - 8n = 1n = n$$

$$4) +3 - x - 13 + 10x = +3 - 13 - x + 10x = -10 + 9x$$

↓
prop. comutativa da adição

$$5) -7 + n + 8m - 8n + 10 + 13m + 3n =$$

$$-7 + 10 + n - 8n + 3n + 8m + 13m = 3 - 5n + 24m$$

SEQUÊNCIAS E REGULARIDADES

* Quatro amigos decidiram fazer um jogo numérico entre eles e começava assim: Três deles escolhiam uma regra para a sequência de números que iam dizer e o outro tinha de adivinhar qual era. Eis os números que os três amigos disseram:

0 , 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , ...

Adivinhas qual é o número seguinte?

* Uma **sequência** ou **sucessão numérica** é um conjunto de números que se constrói a partir de uma regularidade, de um padrão. Pode ser finita ou infinita.

exemplos

1) Na sequência anterior 0 , 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , ... o termo seguinte será 36 .
Qual é o padrão aqui?

Reparamos que estes números são os quadrados dos números inteiros não negativos:

0^2 , 1^2 , 2^2 , 3^2 , 4^2 , 5^2 , ...

Assim o número seguinte será 6^2 que é 36 . Este é um exemplo de uma **sequência crescente**.

2) Completa a sequência seguinte:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{8}, \frac{5}{12}, \frac{6}{17}, \frac{7}{23}, \dots$$

R: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{8}, \frac{5}{12}, \frac{6}{17}, \frac{7}{23}, \dots$

No numerador temos a sequência dos números naturais (ou inteiros positivos) e no denominador, observando as diferenças entre dois denominadores consecutivos, vemos que estes seguem também a sequência dos números naturais:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{6}{17} \quad \frac{7}{23}, \dots$$

$\underbrace{\quad}_{+1} \quad \underbrace{\quad}_{+2} \quad \underbrace{\quad}_{+3} \quad \underbrace{\quad}_{+4} \quad \underbrace{\quad}_{+5} \quad \underbrace{\quad}_{+6}$

* Numa sequência de números, por exemplo 2, 4, 8, 16, 32, ... dizemos que temos uma sequência de **termos** ou **elementos** que surgem numa determinada ordem.

O número 2 será o 1.º termo, o número 4 o 2.º termo e assim sucessivamente:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & , & 4 & , & 8 & , & 16 & , & 32 & , & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1.^\circ \text{ termo} & & 2.^\circ & & 3.^\circ & & 4.^\circ & & 5.^\circ & & \end{array}$$

Os elementos surgem assim por **ordem**, ou seja o 1.º elemento será o **termo de ordem 1** e o 2.º elemento será o termo de ordem 2:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & , & 4 & , & 8 & , & 16 & , & 32 & , & \dots \\ \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \text{termo de} & & & & \text{termo de} & & & & \text{termo de} & & \\ \text{ordem 1} & & & & \text{ordem 3} & & & & \text{ordem 5} & & \end{array}$$

* A **lei de formação** de uma sequência é a regra que determina qual o elemento que surge numa determinada ordem.

No exemplo acima a lei de formação será as potências de 2 a iniciar-se com 2^1 :

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & , & 4 & , & 8 & , & 16 & , & 32 & , & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 2^1 & , & 2^2 & , & 2^3 & , & 2^4 & , & 2^5 & , & \dots \end{array}$$

Também podíamos dizer que o termo seguinte se obtém do termo anterior multiplicando por dois. Deste modo estamos a definir a sucessão à custa do termo inicial e do termo seguinte.

Existe uma sucessão de termos muito conhecida, esta é definida a partir não de um termo inicial mas de dois. A sua lei de formação é: o termo seguinte é o resultado da soma dos dois termos anteriores. Chama-se sucessão ou **sequência de Fibonacci**:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & , & 1 & , & 2 & , & 3 & , & 5 & , & 8 & , & 13 & , & 21 & , & 34 & , & 55 & , & 89 & \dots \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & 1 + 1 & & 2 + 1 & & 3 + 2 & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$



Aos números que surgem na sucessão anterior chamamos **números de Fibonacci**.

Como curiosidade: Podemos encontrar alguns destes números no número de espirais das sementes de girassóis. Encontramos nos girassóis pequenos 34 espirais num sentido e 55 espirais noutro, outros com 55 e 89 e noutros maiores 89 e 44 espirais.

Fotografia de Esdras Calderan na Wikimedia Commons

* Uma **sequência repetitiva** é uma sequência onde os termos podem repetir-se. Nestas sequências interessa determinar a conjunto de elementos que se repete. Esse conjunto será a **unidade** que ciclicamente aparece na sequência.

exemplo

Observa a sequência seguinte: $+1, 0, -1, 0, +1, 0, -1, \dots$

a) Quais os termos de ordem 3, 8, 9 e 10?

-1 é o termo de ordem 3;

0 é o termo de ordem 8;

$+1$ é o termo de ordem 9;

0 é o termo de ordem 10;

b) Qual a unidade de repetição?

$+1, 0, -1, 0$

c) Descreve a lei de formação.

Observando a ordem dos elementos da sequência $+1, 0, -1, 0, +1, 0, -1, \dots$
 $1.^\circ \quad 2.^\circ \quad 3.^\circ \quad 4.^\circ \quad 5.^\circ \quad 6.^\circ \quad 7.^\circ$

Reparamos que os termos de ordem par são sempre 0 e os termos de ordem ímpar alternam entre $+1$ e -1 .

Os termos $+1$ surgem nas ordens $1, 5, 9, 13, \dots$ e os termos -1 surgem nas ordens $3, 7, 11, \dots$ ambos sempre de quatro em quatro.

Assim podemos dizer que as ordens dos termos $+1$ são sempre múltiplos de $4 + 1$ e as ordens dos termos -1 são múltiplos de $4 - 1$.

d) Qual o termo de ordem 56 e de ordem 203?

O termo de ordem 56 (como é par) é 0 e o termo de ordem 203 ($203 = 51 \times 4 - 1$) é -1 .

* Outro tipo de sequências são as pictóricas. O uso de símbolos em combinação com cores ou não, fornecem muitas maneiras de se construir uma **sequência pictórica**.

exemplos

1)



a) Indica quantos cilindros se encontram nos termos de ordem 4 e 5 . Explica a lei de formação.

O termo de ordem 4 terá 10 cilindros e o termo de ordem 5 terá 15 .

Construindo uma tabela com as ordens e o número de cilindros em cada ordem:

Ordem	Número de cilindros
1	1
2	3
3	6

Vamos relacionar o número de cilindros com a ordem respetiva. Observando a sequência deste modo:



Ordem	Número de cilindros
1	1
2	$1 + 2 = 3$
3	$1 + 2 + 3 = 6$

Podemos dizer que a lei de formação é a seguinte:

o número de cilindros de uma certa ordem n é o número de cilindros do termo anterior mais n .

Ou sem precisar de conhecer o termo anterior:

o número de cilindros de uma certa ordem n é $1 + 2 + 3 + \dots + n$.

b) Quantos cilindros terá o termo da sequência de ordem 10 ?

R: $1 + 2 + \dots + 10 = 55$

2) Uma sequência pictórica é formada do seguinte modo:

Desenha um triângulo (grande) para 1.º elemento. No 2.º elemento desenha o mesmo triângulo e outro no seu interior com os vértices situados em cada aresta deste. Continua a sequência assim onde o elemento seguinte toma o desenho do elemento anterior e acrescenta um triângulo invertido no seu interior.

a) Desenha os quatro primeiros termos.

R:



ou por exemplo



b) Quantos triângulos (de todos os tamanhos) conseguimos contar em cada termo? Quantos triângulos terá o termo de ordem 9 ?

Construindo uma tabela com a contagem dos triângulos:

Ordem	Número de triângulos
1	1
2	$1 + 4 = 5$
3	$1 + 4 + 4 = 9$
4	$1 + 4 + 4 + 4 = 13$



Para determinar quantos triângulos terá o termo de ordem 9 convém perceber a lei de formação do número de triângulos. Observando a tabela e o desenho anterior percebemos que cada novo triângulo acrescenta sempre 4 novos triângulos. O termo de ordem 3 tem $1 + 4 \times 2$ triângulos e o termo de ordem 4 tem $1 + 4 \times 3$ ou seja o termo de ordem n terá $1 + 4 \times (n - 1)$ triângulos.

Então para o termo de ordem 9 : $1 + 4 \times 8 = 1 + 32 = 33$

R: 33 triângulos.

RAZÃO, PROPORÇÃO E REGRA TRÊS SIMPLES

*Uma **razão** é um quociente entre dois números, $3 : 5$ ou $\frac{4}{9}$ por exemplo. A esses números

(no exemplo 3 e 5, 4 e 9) chamamos **termos** da razão.

Ao primeiro termo chamamos **antecedente** (o 3 e o 4) e ao segundo termo **consequente** (o 5 e o 9).

Se esses valores representarem quantidades ou medidas então a razão permite comparar esses valores, desde que se apresentem escritos nas mesmas unidades.

exemplos



1)

A razão entre o número de cubos e o número de cilindros é de 5 : 2

Porque temos 15 cubos e 6 cilindros. Logo $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$. Para cada 5 cubos temos 2 cilindros.

2) As maçãs estavam marcadas a € 0,78 o quilo e meio. Qual o preço do quilograma de maçãs?

A razão $\frac{0,78 \text{ euros}}{1,5 \text{ quilos}}$ dá-nos o preço por quilo (em euros).

Como $\frac{0,78}{1,5} = 0,52$, as maçãs custam 0,52 euros o quilo

ou seja 52 cêntimos.



3) O que representa a razão entre os 11 cm de comprimento de uma miniatura de um comboio e os reais 220 metros de comprimento desse comboio?

$$\frac{11 \text{ cm}}{220 \text{ m}} = \frac{11 \text{ cm}}{22\,000 \text{ cm}} = \frac{11}{22\,000} = \frac{1}{2000}$$



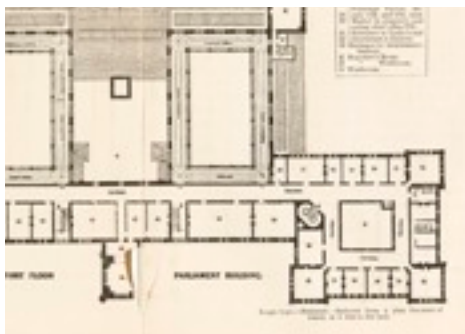
R: A razão 1 : 2000 indica a escala do comboio miniatura. É um valor menor que um. indica assim que a miniatura é 2000 vezes mais pequena que o comboio real.

- * Uma **escala** num desenho é uma razão entre um comprimento do desenho e o comprimento correspondente na realidade.



Um desenho à escala pode ser uma ampliação, como nos desenhos e imagens de microorganismos e de pequenos insectos.

Fotografia de Jol no Flickr



Ou uma redução como nos mapas de estradas e nas plantas de prédios e de andares.

Observando a escala podemos de imediato dizer se temos uma ampliação ou redução.

exemplos

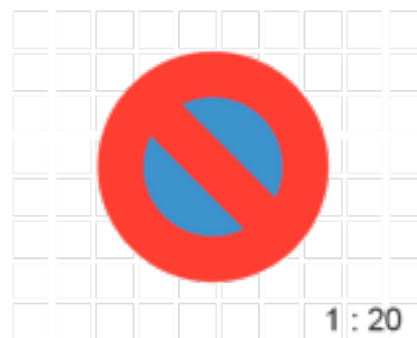
1) Observa o desenho do sinal de trânsito:

A escala $1 : 20$ indica uma redução.

Como $1 : 20$ é uma razão, representa $\frac{1}{20}$.

Sendo menor que um temos uma redução do sinal de trânsito real.

Este será 20 vezes maior que o desenho aqui apresentado.



2) A imagem seguinte representa os esporos de uma bactéria:

É uma ampliação, a sua escala 10 000 : 1 representa a

$$\text{razão } \frac{10\,000}{1} = 10\,000 > 1.$$

A imagem encontra-se ampliada dez mil vezes.



* Uma **proporção** é uma equivalência entre razões, por exemplo sabemos que $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ e

dizemos que 10 está para 4 assim como 5 está para 2.

Aos números utilizados na proporção chamamos **termos**, no exemplo acima os termos são 10, 4, 5 e 2.

No entanto aos termos 10 e 2 chamamos **extremos** e aos termos 4 e 5 chamamos **meios**.

Como $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ é o mesmo que $10 \times 2 = 4 \times 5$ então podemos afirmar que:

Numa proporção o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Esta é a **propriedade fundamental das proporções**.

exemplos

1) Os preços dos objetos de uma montra sofreram um desconto. Calcula os novos preços.



Fotografia de Pretzelpaws
no Wikipedia



Fotografia de Ingermaaike2
no Flickr



Fotografia de Durova
no Wikimedia Commons

- As botas têm 25% de desconto, logo só pagamos 75% (100% – 25%) de 74 euros:

$$\frac{74}{100} = \frac{b}{75} \rightarrow 74 \times 75 = 100 \times b \rightarrow b = \frac{74 \times 75}{100} \rightarrow b = 55,5$$

As botas ficam apenas por € 55,50 .

- O casaco tem 50% de desconto. Como 50% = 1 : 2 então o preço fica pela metade, € 60 .

- O colar tem 20% de desconto.

$$\frac{12}{100} = \frac{c}{20} \rightarrow c = \frac{12 \times 20}{100} \rightarrow c = 2,4$$

O colar terá um desconto de € 2,4 . Então ficará com o novo preço de € 12 – € 2,4 = € 9,60 .

2) Num jogo do euromilhões dois amigos apostaram na razão 3 : 2 num total de dez euros.

a) Quantos euros apostou cada um?

A razão 3 : 2 indica se um tivesse apostado 3 euros o outro teria gasto 2 euros num total de 5 euros. Como gastaram o dobro então um apostou 6 euros e o outro 4 euros .

b) Supondo que receberam um prémio e que 42 euros foi quanto recebeu o maior apostador, qual a parte recebida pelo seu amigo?

$$\frac{3}{2} = \frac{42}{x} \text{ então } 3 \times x = 2 \times 42$$

$$x = \frac{2 \times 42}{3} = 28$$



R: O amigo recebeu 28 euros de prémio.

3) Um bombardeiro da 2.ª guerra mundial, o B-17, tinha de comprimento 22,66 metros. Qual a escala de uma miniatura com 103 mm de comprimento?



$$22,66 \text{ m} = 22\,660 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{103} = \frac{x}{22\,660} \rightarrow x = \frac{22\,660 \times 1}{103} = 220$$

Também se podia escrever:

$$\frac{103}{22\,660} = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{22\,660 \times 1}{103} = 220$$

R: Está numa escala de 1 : 220 . Isto quer dizer que o bombardeiro B-17 é 220 vezes maior que a miniatura.

* A **regra três simples** é uma outra maneira de escrever e pensar numa proporção.

Quando na proporção $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ dizemos que 10 está para 4 assim como 5 está para 2 .

Podemos representar este raciocínio pela seguinte simbologia:

$$\begin{array}{ccc} 10 & \text{-----} & 4 \\ 5 & \text{-----} & 2 \end{array} \quad \text{ou seja} \quad \begin{array}{ccc} 10 & \text{X} & 4 \\ 5 & \text{X} & 2 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} 10 & \text{X} & 4 \\ 5 & \text{X} & 2 \end{array}} \right\} 10 \times 2 = 5 \times 4$$

exemplos

1) A tabela seguinte indica as quantidades para se fazer panquecas de maça para quatro pessoas.

Completa as colunas seguintes referentes às quantidades dos ingredientes para se fazer panquecas de maça para seis pessoas e para duas pessoas:

	4 pessoas	6	2
Maças	3		
Farinha	14 colheres de sopa		
Manteiga	3 colheres de sopa		
Leite	100 ml		
Ovos	2		

Para obtermos os valores da primeira coluna (6 pessoas) vamos usar a regra três simples ou as proporções por exemplo:

1.ª casa 4 _____ 3

$$6 \text{ _____ } x \quad \rightarrow \quad x = \frac{6 \times 3}{4} = 4,5$$

2.ª casa $\frac{4}{14} = \frac{6}{y} \quad \rightarrow \quad y = \frac{14 \times 6}{4} = 21$

E assim sucessivamente. Obtemos os valores seguintes:

4,5
21
4,5
150
3

1,5
7
1,5
50
1

Para a segunda coluna (2 pessoas) como 2 é metade de 4 obtemos:

2) Um pão-de-ló precisa de 7 ovos e 350 g de açúcar entre outros ingredientes. Mas só tendo 5 ovos que quantidade de açúcar precisamos?



Seja a a quantidade de açúcar que precisamos:

$$\begin{array}{ccc} 7 & \text{-----} & 5 \\ 350 & \text{-----} & a \end{array} \quad a = \frac{350 \times 5}{7} = 250$$

Ou então

$$\begin{array}{ccc} 7 & \text{-----} & 350 \\ 5 & \text{-----} & a \end{array} \quad a = \frac{350 \times 5}{7} = 250$$

R: Precisamos de 250 g de açúcar.

PROPORCIONALIDADE DIRETA

* A proporcionalidade direta é o estudo de uma relação entre duas grandezas que variam proporcionalmente.

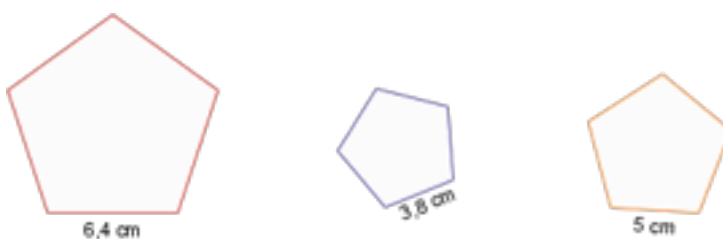
Duas **grandezas** dizem-se **diretamente proporcionais** quando a razão entre os seus valores correspondentes se mantém sempre igual, ou seja, é constante.

A essa constante chamamos **constante de proporcionalidade direta**.

exemplos

1) O perímetro de um pentágono regular é diretamente proporcional ao comprimento do seu lado.

Considerando alguns pentágonos regulares:



E os seus perímetros respectivos:

$$P = 6,4 \times 5 = 32 \text{ cm}$$

$$P = 3,8 \times 5 = 19 \text{ cm}$$

$$P = 5 \times 5 = 25 \text{ cm}$$

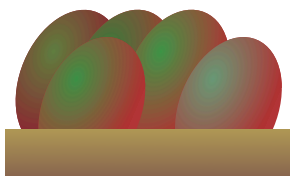
As razões entre os valores dos perímetros e as medidas dos respetivos lados são:

$$\frac{32}{6,4} = 5 \quad \frac{19}{3,8} = 5 \quad \frac{25}{5} = 5$$

Podemos então afirmar que o perímetro (P) de um pentágono regular é diretamente proporcional ao comprimento (c) do seu lado, isto é $\frac{P}{c} = 5$.

Esta constante 5 representa o número de lados do pentágono.

2) Verifica que a tabela com o peso das mangas (todas do mesmo peso) é diretamente proporcional ao número de mangas a pesar.



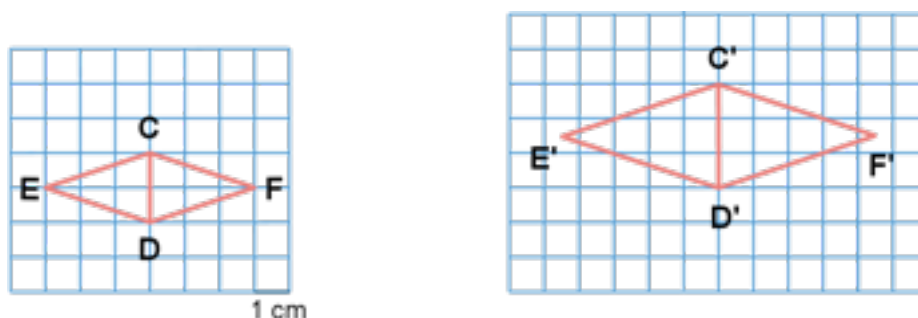
Número de mangas	4	6	9
Peso (g) das mangas	480	720	1080

Como $\frac{480}{4} = 120$, $\frac{720}{6} = 120$, $\frac{1080}{9} = 120$ então as grandezas, peso das mangas e

número de mangas são diretamente proporcionais.

A constante de proporcionalidade direta é 120. E o que representa este número?
É o peso (em g) de cada manga.

3) Verifica que o primeiro desenho é uma redução do segundo desenho.



Calculando as razões entre as medidas de dois dos lados correspondentes, temos que:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{EF}}{\overline{E'F'}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Os lados correspondentes têm medidas proporcionais mantendo-se constante a sua razão. Ou seja, as medidas dos desenhos são diretamente proporcionais sendo $\frac{2}{3}$ a constante de proporcionalidade (sendo uma redução faz sentido que a constante seja inferior a um).

* Uma **ampliação** ou **redução** de uma imagem ou desenho é uma cópia da imagem inicial de tamanho maior ou menor mas mantendo-se as proporções, não existindo deformações.

exemplo

O desenho A é uma ampliação do desenho C. Os desenhos B e D não mantêm as proporções do desenho A ou C.



A



B



C



D

TEMA

7

Números inteiros



NOÇÃO DE NÚMERO INTEIRO REPRESENTAÇÃO NA RETA NUMÉRICA

* Os números inteiros são uma extensão dos números naturais. Relembra que o conjunto dos números naturais representa-se por $\mathbb{N}$ onde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

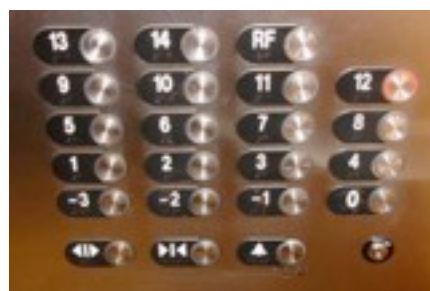
Para além dos números naturais os números inteiros contêm ainda o zero e os números inteiros de sinal negativo como o -1 , -5 , $-23\,000$...

Representamos o conjunto dos números inteiros por $\mathbb{Z}$ (vem da palavra alemã *Zahlen* que significa números ou algarismos) ou seja $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$.

exemplos

1) Num elevador encontras sempre números inteiros.

O zero em geral representa o r/c e os números negativos -1 , -2 surgem quando o prédio tem caves.



2) Um termómetro vertical interior indica uma temperatura entre os valores -30°C a $+50^\circ\text{C}$.



3) A montanha mais alta do mundo é o Everest com cota altimétrica $+8845$ metros e o lugar mais profundo da Terra situa-se no Oceano Pacífico, na fossa das Marianas com cota altimétrica $-11\,022$ metros.

(a cota altimétrica é a distância na vertical em relação ao nível médio do mar)



Fotografia de Albr em Arte&Fotografia

* Conhecido o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ podemos considerar alguns subconjuntos seus, isto é, conjuntos onde todos os seus elementos pertencem a $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z}_0^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \rightarrow \text{conjunto dos números inteiros não negativos}$$

$$\mathbb{Z}_0^- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\} \quad \rightarrow \text{conjunto dos números inteiros não positivos}$$

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \quad \rightarrow \text{conjunto dos números inteiros positivos}$$

$$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1\} \quad \rightarrow \text{conjunto dos números inteiros negativos}$$

exemplos

$$1) \quad 2 \in \mathbb{Z}^+ \quad , \quad -480 \notin \mathbb{Z}^+ \quad , \quad 0 \notin \mathbb{Z}^+ \quad , \quad -5 \in \mathbb{Z}_0^-$$

O sinal $\in$ lê-se pertence e $\notin$ lê-se não pertence.

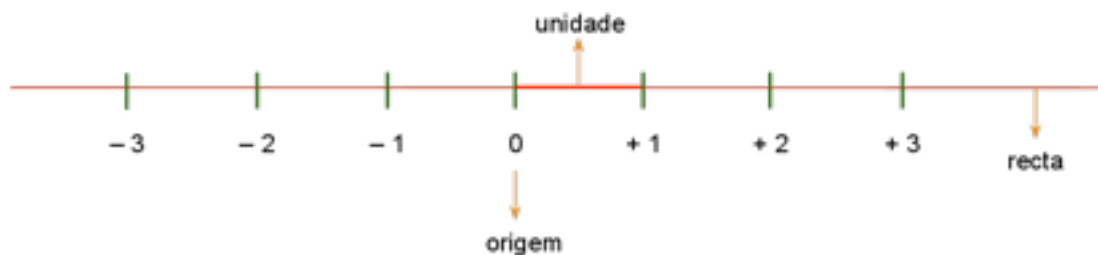
$$2) \quad \mathbb{Z}^- \subset \mathbb{Z} \quad , \quad \mathbb{Z}_0^+ \subset \mathbb{Z} \quad , \quad \mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z}_0^+$$

O sinal $\subset$ lê-se contido.

* Todos os números inteiros podem-se ordenar e representar numa reta numérica.

Para representarmos uma reta numérica é necessário desenhar uma reta, uma origem (o zero) e uma unidade de comprimento.

exemplo



Para a direita do zero temos os números inteiros positivos (os naturais) e para a esquerda do zero temos os números negativos.

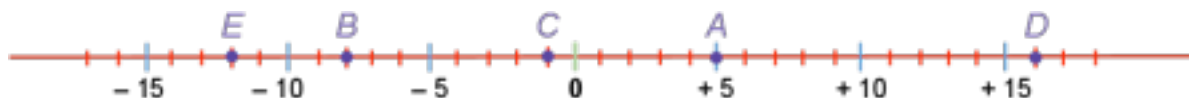


exemplos

1) Representa numa reta numérica os pontos

$A \rightarrow +5$, $B \rightarrow -8$, $C \rightarrow -1$, $D \rightarrow +16$ e $E \rightarrow -12$

R:



2) Identifica o número inteiro a que corresponde cada ponto representado na reta seguinte:



R: $A \rightarrow -22$; $B \rightarrow -19$; $C \rightarrow -4$; $D \rightarrow +7$; $E \rightarrow +22$ e $F \rightarrow +28$

A cada ponto situado na reta corresponde um número a que chamamos **abcissa**. No exemplo anterior determinámos as abcissas dos pontos indicados na reta.

COMPARAÇÃO E ORDENAÇÃO

* Num dia de Inverno em Manteigas na Serra da Estrela as temperaturas durante a noite passaram de -1°C para -3°C .

Podemos dizer que arrefeceu pois -3°C é menor que -1°C .
Estamos a comparar os números -3 e -1 .



Fotografia de Michael Clarke Stuff no Flickr

Na comparação de dois números inteiros temos as seguintes situações:

- Se forem ambos de sinal positivo então o maior é o que se encontra mais distante da origem;
- Se forem ambos de sinal negativo então o maior é o que se encontra mais perto da origem;
- Se tiverem sinais opostos então o maior é o de sinal positivo;
- O número zero é maior que qualquer número negativo e menor que qualquer número positivo.

Desenhar os pontos na reta numérica sem cuidados de escala ajuda a comparar os números inteiros. Sempre que puderes usa este facto para tirares as tuas dúvidas.

exemplo

Qual dos seguintes números, -21 , 90 , -23 , $+89$ e 79 é o maior negativo e o menor positivo?

Como



R: O maior negativo é -23 e o menor positivo é 79 .

* Os números inteiros podem ser ordenados por **ordem crescente**, ou seja, do menor para o maior ou por ordem **decrescente**, do maior para o menor.

Percorrendo a reta numérica da esquerda para a direita temos os números ordenados por ordem crescente. Ao contrário teremos os números ordenados por ordem decrescente.

exemplos

- 1) Durante um passeio de automóvel foram registados os seguintes níveis de altitude em metros:

$+105$, $+203$, $+117$, $+49$, -1 , -20 ,
 -3 , $+35$, $+156$, $+230$, $+111$

Ordena por ordem crescente os valores anteriores.

R: -20 , -3 , -1 , $+35$, $+49$, $+105$, $+111$, $+117$, $+156$, $+203$, $+230$



Fotografia de Stig Nygaard no Flickr

2) Em qual das seguintes situações se obtém um registo de números decrescentes?

A - Registo do volume disponível numa embalagem de fruta vazia á medida que vão sendo colocadas frutas no seu interior.



Fotografia de Avlxyz no Flickr

B - Registo da temperatura de um gelado a partir do momento que é retirado do congelador.



Fotografia de Jasoniam no Flickr

R: Na situação A .

À medida que as maçãs vão sendo colocadas no interior da embalagem o volume disponível vai diminuindo.

EXERCÍCIO

Completa com um dos sinais $<$ ou $>$.

a) $-101 \dots\dots 0$

d) $+89 \dots\dots -9$

b) $+58 \dots\dots +56$

e) $0 \dots\dots -568$

c) $-2001 \dots\dots -2009$

f) $-90 \dots\dots +90$

VALOR ABSOLUTO E SIMÉTRICO DE UM NÚMERO INTEIRO

* Considera um mergulhador que atingiu a cota altimétrica de -56 metros ao largo da Costa. Mais tarde depois do mergulho subiu até ao alto da Costa atingindo a cota altimétrica de $+201$ metros.

Qual a variação da cota altimétrica entre os dois pontos?



Fotografia de Tadeu Pereira no Flickr

No mergulho esteve a uma distância de 56 metros do nível médio do mar e na Costa esteve a 201 metros do nível do mar. Então entre os dois pontos estão $56 + 201$ metros, ou seja 257 metros.

Os valores -56 e $+201$ são determinados a partir do nível médio do mar, que equivale ao zero, e as suas distâncias ao zero são respetivamente 56 e 201 como já vimos. A estes valores chamamos valor absoluto de -56 e valor absoluto de $+201$.

O **valor absoluto** de um número inteiro a é a sua distância ao zero (ou origem) e representa-se por $|a|$.

Podemos dizer **valor absoluto** ou **módulo** de um número inteiro. Este representa sempre um número positivo.

exemplos

$$1) \quad |-4059| = 4059 \quad ; \quad | + 235 | = 235 \quad ; \quad |0| = 0$$

2) Completa com $<$, $>$ ou $=$:

$$a) \quad |-500| \dots\dots\dots | + 500 |$$

$$d) \quad -| + 24 | \dots\dots\dots - 24$$

$$b) \quad | + 37 | \dots\dots\dots | - 85 |$$

$$e) \quad | - 101 | \dots\dots\dots - | + 21 |$$

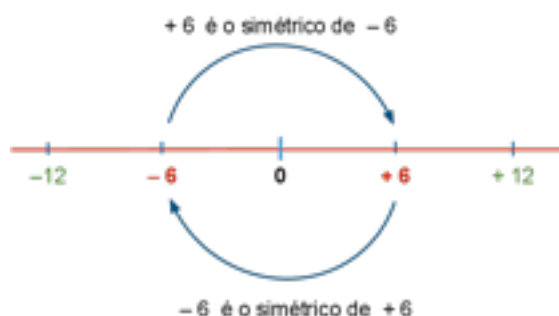
$$c) \quad | - 3 | \dots\dots\dots - 1$$

$$f) \quad -| - 49 | \dots\dots\dots | + 506 |$$

- a) $|-500| = |+500|$ porque $|-500| = 500$ e $|+500| = 500$
- b) $|+37| < |-85|$ porque $|+37| = 37$ e $|-85| = 85$
- c) $|-3| > -1$ porque $|-3| = 3$
- d) $-|+24| = -24$ porque $|+24| = 24$
- e) $-|-101| > -|+21|$ porque $-|-101| = 101$ e $-|+21| = -21$
- f) $-|-49| < |+506|$ porque $-|-49| = -49$ e $|+506| = 506$

* No exemplo anterior observámos que $|-500| = |+500|$, ou seja, ambos os números estão à mesma distância do zero. Dizemos por isso que os números -500 e $+500$ são simétricos.

O **simétrico** de um número é um número com o mesmo valor absoluto e de sinal oposto.



exemplos

1) As afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas? Justifica.

- a) O valor absoluto de um número negativo é negativo.
- b) O simétrico do simétrico de um número inteiro negativo é negativo.
- c) O simétrico do valor absoluto de um número inteiro é positivo.

- a) Falso. O valor absoluto de um número é sempre positivo pois é uma distância.
- b) Verdadeiro. O simétrico de um número inteiro negativo é positivo e o simétrico deste será negativo.
- c) Falso. É sempre negativo pois o valor absoluto de um número inteiro é sempre positivo.

2) Completa:

- a) O simétrico de -52 é _____ .
- b) O simétrico de $-|+4|$ é _____ .
- c) O $+8900$ é o simétrico de _____ .
- d) O $-|-12|$ é o simétrico de _____ .

- a) O simétrico de -52 é $+52$.
- b) O simétrico de $-|+4|$ é $+4$.
- c) O $+8900$ é o simétrico de -8900 .
- d) O $-|-12|$ é o simétrico de $+12$.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

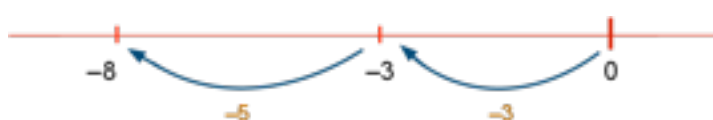
* Adição de números inteiros.

Vamos visualizar na reta, sem cuidados rigorosos de escala, o resultado da adição dos números inteiros seguintes:

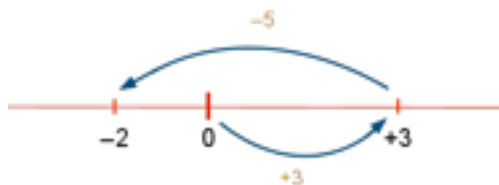
$$(+3) + (+5) = +8$$



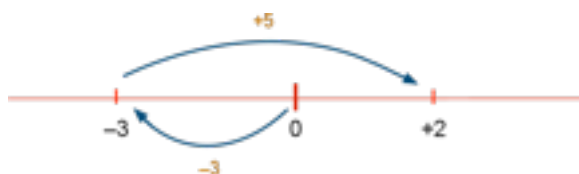
$$(-3) + (-5) = -8$$



$$(+3) + (-5) = -2$$



$$(-3) + (+5) = +2$$



Também podemos pensar em termos de ganho e perda para resolver as adições anteriores:

$(+3) + (+5)$	Ganhos: 3 e 5	Total: 8 de ganho	+8
$(-3) + (-5)$	Perdas: 3 e 5	Total: 8 de perda	-8
$(+3) + (-5)$	Ganhos: 3 Perdas: 5	Total: 2 de perda	-2
$(-3) + (+5)$	Ganhos: 5 Perdas: 3	Total: 2 de ganho	+2

Observando as adições anteriores podemos resumir o cálculo assim:

- na **adição de dois números com mesmo sinal** dá-se o mesmo sinal e somam-se os módulos das parcelas a adicionar;

$$(+3) + (+5) = + (3 + 5) = +8$$

$$(-3) + (-5) = - (3 + 5) = -8$$

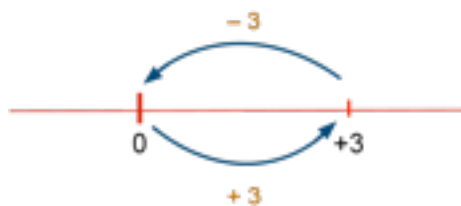
- na **adição de dois números com sinais opostos** dá-se o sinal da parcela com maior módulo e faz-se a diferença dos módulos das parcelas (maior módulo – menor módulo) a adicionar;

$$(+3) + (-5) = - (5 - 3) = -2$$

$$(-3) + (+5) = + (5 - 3) = +2$$

No caso de os números serem simétricos, usando a regra acima o resultado seria -0 ou $+0$, mas zero não tem sinal, ou seja o resultado é zero. Visualizando na recta numérica:

$$(+3) + (-3) = 0$$



exemplos

1) Cálculo pela adição sucessiva:

$$(-14) + (-6) + (+5) + (-1) = (-20) + (+5) + (-1) = (-15) + (-1) = -16$$

$$(+50) + (-10) + (-35) = (+40) + (-35) = +5$$

2) Num jogo de cartas a Patricia obteve as pontuações seguintes:

+8 ; -2 ; -7 ; +4 ; +10 ; -5

Faz os cálculos para saberes se a pontuação da Patricia foi positiva ou negativa.



Fotografia de Liko81 no Wikimedia Commons

$$\begin{aligned}
 (+8) + (-2) + (-7) + (+4) + (+10) + (-5) &= \\
 = (+6) + (-7) + (+4) + (+10) + (-5) &= \\
 = (-1) + (+4) + (+10) + (-5) &= \\
 = (+3) + (+10) + (-5) &= \\
 = (+13) + (-5) &= \\
 = +8
 \end{aligned}$$

Ou mais rapidamente: somando todos os pontos positivos, +22 , e somando todos os pontos negativos, -14 , então a pontuação final é $(+22) + (-14) = +8$

R: A pontuação final da Patricia é positiva.

* Subtração de números inteiros.

Usando o facto da subtração ser a operação inversa da adição, temos que uma subtração transforma-se numa adição substituindo o subtrativo pelo seu simétrico. Assim todos os cálculos com subtrações passam a adições que já sabemos calcular.

Ou seja, subtrair um número inteiro é o mesmo que somar o seu simétrico.

$$(+3) - (+5) = (+3) + (-5) = -2$$

$$(-3) - (-5) = (-3) + (+5) = +2$$

$$(+3) - (-5) = (+3) + (+5) = +8$$

$$(-3) - (+5) = (-3) + (-5) = -8$$

exemplos

1) Completa a tabela:

-		(+10)
(-10)	-8	
		+5

Resolução:

-	a	(+10)
(-10)	-8	
		+5

$$(-10) - a = -8 \text{ então } -8 + a = -10 \rightarrow a = -2$$

Com este número descoberto os restantes são simples:

-	(-2)	(+10)
(-10)	-8	-20
(+15)	(+17)	+5

2) Se a temperatura de uma caixa de gelado passar de -12°C para $+2^{\circ}\text{C}$ qual foi a variação da temperatura?

$$(+2) - (-12) = (+2) + (+12) = +14$$

R: 14°C

$$\begin{aligned} 3) (+10) - (-1) + (+4) - (+20) &= (+10) + (+1) + (+4) + (-20) = \\ &= (+11) + (+4) + (-20) = \\ &= (+15) + (-20) = \\ &= -5 \end{aligned}$$

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

SIMPLIFICAÇÃO DA ESCRITA

* A adição de números inteiros mantêm as propriedades comutativa, associativa e existência de elemento neutro (o zero) como para os números racionais não negativos.

exemplos

$$1) (-15) + (+10) + (-10) - (+3) = (-15) + 0 - (+3) = (-15) + (-3) = -18$$

Usando a propriedade associativa e o elemento neutro.

$$2) (-300) - (+20) + (+300) = (-300) + (+300) - (+20) = 0 + (-20) = -20$$

Usando a propriedade comutativa e o elemento neutro da adição.

* No cálculo de expressões com adições e subtrações podemos **simplificar a sua escrita** ao transformar a expressão numa soma algébrica (só somas) e depois eliminar o sinal de adição entre as várias parcelas e ainda os parênteses das parcelas:

exemplo

$$\begin{aligned} & (-15) - (-3) + (-15) - (+4) + (+45) = \\ & = (-15) + (+3) + (-15) + (-4) + (+45) = \quad \leftarrow \text{passando as subtrações a adições (obtemos uma soma algébrica)} \\ & = -15 + 3 - 15 - 4 + 45 \quad \leftarrow \text{eliminando-se o sinal + entre as parcelas e os parênteses} \end{aligned}$$

À expressão $-15 + 3 - 15 - 4 + 45$ chamamos expressão simplificada.

$$\begin{aligned} \text{Podemos agora continuar o cálculo: } & (-15) - (-3) + (-15) - (+4) + (+45) = -15 + 3 - 15 - 4 + 45 = \\ & = -12 - 15 - 4 + 45 = \\ & = -27 + 45 = \\ & = +18 = \\ & = 18 \end{aligned}$$

Observando com atenção os sinais envolvidos na expressão inicial

$(-15) - (-3) + (-15) - (+4) + (+45)$ e na expressão simplificada $-15 + 3 - 15 - 4 + 45$:

$$(-15) - (-3) + (-15) - (+4) + (+45) = -15 + 3 - 15 - 4 + 45$$

verifica-se que **dois sinais iguais dão origem a um sinal positivo**:

$$- (-3) = + 3 \quad + (+45) = + 45$$

e que dois **sinais contrários originam um sinal negativo**:

$$+(-15) = - 15 \quad - (+4) = - 4$$

Podemos então simplificar o cálculo de uma adição ou subtração entre quaisquer dois números inteiros:

- na **adição e subtração de dois números com mesmo sinal**:

$$(+3) + (+5) = + 3 + 5 = +8$$

$$(-3) + (-5) = - 3 - 5 = -8$$

$$(+3) - (+5) = + 3 - 5 = - 2$$

$$(-3) - (-5) = - 3 + 5 = + 2$$

- na **adição e subtração de dois números com sinais opostos**:

$$(+3) + (-5) = + 3 - 5 = -2$$

$$(-3) + (+5) = - 3 + 5 = +2$$

$$(+3) - (-5) = + 3 + 5 = + 8$$

$$(-3) - (+5) = - 3 - 5 = - 8$$

exemplos

1) Completa os três termos seguintes da sequência:

-5 ; -4 ; -6 ; -3 ; -7 ; ; ;

R: -5 ; -4 ; -6 ; -3 ; -7 ; -2 ; -8 ; -1
 +1 -2 +3 -4 +5 -6 +7

2) O João pediu o movimento da sua conta bancária e obteve o seguinte registo:

Saldo anterior +550 €

.....

-30 €

-90 €

+50 €

-100 €

-70 €



Qual o seu saldo atual? Positivo ou negativo?

$$\begin{aligned} + 550 - 30 - 90 + 50 - 100 - 70 &= + 550 - 120 + 50 - 170 = \\ &= + 550 + 50 - 120 - 170 = \\ &= + 600 - 290 = \\ &= +310 \end{aligned}$$

R: O seu saldo é positivo, € 310 .

TEMA

8

Soluções dos exercícios



POTÊNCIA DUM NÚMERO NATURAL PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

a) $3^3 + 2 \times 10^2 = 27 + 2 \times 100 = 27 + 200 = 227$

O cálculo efetua-se da esquerda para a direita sem esquecer que a multiplicação tem prioridade sobre a soma.

b) O cálculo entre parênteses é resolvido primeiro antes de se efetuar a multiplicação:

$$30^2 \times (2 + 10^2) + 2^2 = 900 \times (2 + 100) + 4 = 900 \times 102 + 4 = 91\,800 + 4 = 91\,804$$

Outra resolução, usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

$$30^2 \times (2 + 10^2) + 2^2 = 30^2 \times 2 + 30^2 \times 100 + 4 = 1800 + 90\,000 + 4 = 91\,804$$

c) $0,59 \times 10\,000 - 2 \times 1000 + 0 = 59\,000 - 2000 = 57\,000$

As multiplicações resolvem-se em primeiro lugar.

O zero é o elemento absorvente na multiplicação e também é o elemento neutro na adição.

PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS DE BASE E EXPOENTE NATURAL I

1) 150 milhões = $150\,000\,000 = 15 \times 10^7$ e $1\text{ km} = 1000\text{ m} = 10^3\text{ m}$

Então 150 milhões de quilómetros são $15 \times 10^7 \times 10^3\text{ m}$ ou seja $15 \times 10^{10}\text{ m}$

R: 15×10^{10} metros ou $1,5 \times 10^{11}$ metros.

2)

$$\begin{aligned} 10^4 \times 3 \times 5^4 - 2 \times 50^4 &= 10^4 \times 5^4 \times 3 - 2 \times 50^4 = && \rightarrow \text{Propriedade comutativa} \\ &= 50^4 \times 3 - 2 \times 50^4 = && \leftarrow \text{Propriedade das potências com o mesmo expoente} \\ &= 3 \times 50^4 - 2 \times 50^4 = && \leftarrow \text{Propriedade comutativa} \\ &= (3 - 2) \times 50^4 = && \leftarrow \text{Propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração} \\ &= 50^4 && \leftarrow 1 \text{ é o elemento neutro da multiplicação} \end{aligned}$$

PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS DE BASE E EXPOENTE NATURAL II

1) Volume da caixa: $1\,000\,000\text{ cm}^3 = 10^6\text{ cm}^3$

Volume da embalagem: $5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^{2+2+2} = 5^6\text{ cm}^3$

$$\text{Então } \frac{10^6}{5^6} = \left(\frac{10}{5}\right)^6 = 2^6$$

R: Podem ser colocadas 2^6 embalagens.

2)

$$\begin{aligned}
 (5^2 \times 10^2) : 50 - 2 \times (10^2 : 2^2) &= (5 \times 10)^2 : 50 - 2 \times (10 : 2)^2 = \\
 &= 50^2 : 50 - 2 \times 5^2 = \\
 &= 50^{2-1} - 2 \times 25 = \\
 &= 50^1 - 50 = \\
 &= 50 - 50 = \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE N°S RACIONAIS Ñ NEGATIVOS

1)

$$\begin{aligned}
 \frac{143,128 \times 10^{13}}{108,321 \times 10^{10}} &= \frac{143,128}{108,321} \times \frac{10^{13}}{10^{10}} \approx \quad \rightarrow \text{Propriedade multiplicação de fracções} \\
 &\approx 1,321 \times 10^{13-10} = \quad \leftarrow \text{Propriedade da divisão de potências com a mesma base} \\
 &= 1,321 \times 10^3 = \\
 &= 1321
 \end{aligned}$$

R: A Terra cabe 1321 vezes no planeta Júpiter.

2)

a) $\frac{81}{48}$ e $\frac{243}{96}$

b) Será a fração $\frac{3}{2} \times \frac{n}{m} = \frac{3n}{2m}$.

3)

a) Como $1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

R: $\frac{3}{5}$

b) $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{5}$, ou seja $\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

R: $\frac{1}{5}$

c) Sobraram $\frac{2}{5}$ do chocolate, logo $\frac{2}{5} \times 70 = \frac{140}{5} = 28$.

R: Tem 28 g de cacau.

**INVERSO DE UM NÚMERO
DIVISÃO DE NÚMEROS RACIONAIS Ñ NEGATIVOS**

1) $1\,380\,000\text{ mm}^2 = 1,38\text{ m}^2$

Seja l a medida do lado maior então $\frac{3}{5} \times l = 1,38$

$$l = 1,38 : \frac{3}{5} = 1,38 \times \frac{5}{3} = \frac{1,38 \times 5}{3} = 2,3$$

R: O lado maior mede 2,3 metros.

2) $\frac{2300}{5} = 2300 \times \frac{1}{5} = 2300 \times 0,2 = 460$

R: Sim

COMPARAÇÃO E ORDENAÇÃO

a) $-101 < 0$

b) $+58 > +56$

c) $-2001 > -2009$

d) $+89 > -9$

e) $0 > -568$

f) $-90 < +90$