

METAS CURRICULARES DO ENSINO BÁSICO

6.º ano

EXEMPLOS DO CADERNO DE APOIO

2.º CICLO

António Bivar

Carlos Grosso

Filipe Oliveira

Maria Clementina Timóteo

INTRODUÇÃO

Com este pequeno trabalho, pretendeu a Porto Editora facilitar o acesso, aos professores, a todos os exemplos sugeridos na publicação acima mencionada, da responsabilidade da equipa das Metas Curriculares e divulgada pela Direção-Geral da Educação*, num formato totalmente editável e passível de fácil integração com os diferentes materiais já elaborados (ou a elaborar) pelos docentes da disciplina.

Procedeu-se, igualmente, a uma sugestão de **organização dos diferentes exemplos**, de modo a facilitar o rápido acesso ao correspondente **descriptor** ou **descritores**. Esta organização pode ser sintetizada do seguinte modo:

- O presente documento, em formato *pdf*, está organizado sequencialmente de acordo com o manual **Matemática 6**, contendo a remissão da respetiva parte e página do manual no canto superior direito de cada novo descriptor desenvolvido.
- Cada exemplo/descriptor pode ser consultado num único ficheiro *word*.
- O nome de cada ficheiro *word* identifica, de imediato, o descriptor correspondente. Por exemplo, o ficheiro **gm6_5p1.doc** diz respeito ao descriptor **1.4** do domínio **Geometria e Medida** do **6.º ano**. Esta remissão encontra-se destacada no final da primeira página de cada documento.
- A estrutura de cada ficheiro *word* é sempre a mesma: para cada descriptor é apresentado o respetivo **exemplo** (ou **exemplos**), seguido da **proposta de resolução**, terminando com o **texto de apoio ao professor**.
- Este último é constituído pelas “introduções teóricas” que antecedem certos exemplos e, no caso em que tal é aplicável, pelo correspondente **texto complementar de geometria**, retirado do anexo que complementa o Caderno de Apoio.
- Determinados descritores, por exemplo *Resolver problemas*, surgem associados a descritores que os antecedem, como se pode comprovar no Caderno de Apoio. Essa associação é igualmente concretizada nos ficheiros *word* em que tal se justifica, como se pode ver, por exemplo, no ficheiro **gm6_5p1.doc**.

A utilidade destes ficheiros, assim organizados, pode ir desde a simples projeção em contexto de sala de aula (via *e-Manual*) até à utilização/adaptação dos exemplos apresentados em fichas ou testes para os seus alunos.

Esperando ter contribuído, de alguma forma, para facilitar o trabalho de implementação do **Programa e Metas Curriculares**, desejamos a todos um excelente ano letivo, com votos de grande sucesso tanto pessoal como profissional.

Bom trabalho!

*A utilização do formato editável do Caderno de Apoio não dispensa a consulta do respetivo documento PDF original, disponibilizado pela DGE no respetivo sítio da Internet.

[Parte 1, pág. 20]

1. Mostra que $5^6 \times 5^3 = 5^9$, recorrendo à definição de potência de expoente natural.
- 2.** Mostra, dados dois números naturais m e n , que $3^n \times 3^m = 3^{n+m}$.

Resposta

1. Por definição, $5^6 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$.

Da mesma forma, $5^3 = 5 \times 5 \times 5$.

Assim, $5^6 \times 5^3 = (5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) = 5^9$

2. 3^n designa o produto de n fatores iguais a 3 ;

3^m designa o produto de m fatores iguais a 3 :

$$3^n \times 3^m = \underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{n \text{ vezes}} \times \underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{m \text{ vezes}}$$

Existem, pois, no produto $3^n \times 3^m$, $n + m$ fatores iguais a 3 logo $3^n \times 3^m = 3^{n+m}$.

ALG6-1.3

1. Mostra que $(7^3)^4 = 7^{3 \times 4} = 7^{12}$, recorrendo à definição de potência de expoente natural.
- 2.** Mostra, dados dois números naturais m e n , que $(4^n)^m = 4^{n \times m}$.

Resposta

1. Por definição, $(7^3)^4 = 7^3 \times 7^3 \times 7^3 \times 7^3$

$$= (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7 \times 7)$$

Existem, assim, $4 \times 3 = 12$ fatores iguais a 7 neste produto, de onde se conclui que $(7^3)^4 = 7^{3 \times 4}$.

2. $(4^n)^m = \underbrace{(4^n \times 4^n \times \dots \times 4^n)}_{m \text{ vezes}}$

Substituindo cada um dos fatores 4^n pelo produto de n fatores iguais a 4, vem

$$(4^n)^m = \underbrace{(4 \times 4 \times \dots \times 4)}_{n \text{ vezes}} \times \underbrace{(4 \times 4 \times \dots \times 4)}_{n \text{ vezes}} \times \dots \times \underbrace{(4 \times 4 \times \dots \times 4)}_{n \text{ vezes}}$$

$m \text{ vezes}$

Existem $m \times n$ fatores iguais a 4 neste produto, obtendo-se a igualdade $(4^n)^m = 4^{n \times m}$.

ALG6-1.4

[Parte 1, pág. 22]

- 1.* Dados dois números racionais q e r , mostra, utilizando a definição de potência, que $(q \times r)^5 = q^5 \times r^5$
2. Decompõe em fatores primos os seguintes números.
- 2.1 14^5
- 2.2 6^7
- 2.3* $10^5 \times 12^4$

Resposta

1. $(q \times r)^5 = (q \times r) \times (q \times r) \times (q \times r) \times (q \times r) \times (q \times r) =$
 $= q \times q \times q \times q \times q \times r \times r \times r \times r \times r = q^5 \times r^5$
- 2.1 $14^5 = (2 \times 7)^5 = 2^5 \times 7^5$
- 2.2 $6^7 = (2 \times 3)^7 = 2^7 \times 3^7$
- 2.3 $10^5 \times 12^4 = (2 \times 5)^5 \times (2^2 \times 3)^4 = 2^5 \times 5^5 \times (2^2)^4 \times 3^4 =$
 $= 2^5 \times 5^5 \times 2^8 \times 3^4 = 2^{5+8} \times 3^4 \times 5^5 = 2^{13} \times 3^4 \times 5^5$

ALG6-1.6

1. Escreve na forma de potência o número racional $\frac{6^5}{6^2}$.

2.** Dados dois números naturais a e b , com $a > b$, mostra que $\frac{7^a}{7^b} = 7^{a-b}$.

3.** Dados dois números naturais a e b , com $a > b$, mostra que $\frac{6,13^a}{6,13^b} = 6,13^{a-b}$.

Resposta

1. $\frac{6^5}{6^2} = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}{6 \times 6} = 6 \times 6 \times 6 = 6^3$

2. Por definição de potência,

$$\frac{7^a}{7^b} = \frac{\overbrace{7 \times 7 \times 7 \times \dots \times 7 \times 7}^{a \text{ vezes}}}{\underbrace{7 \times 7 \times \dots \times 7}_b} = 7^{a-b}$$

Existem mais fatores no numerador, pelo que todos os fatores do denominador podem ser eliminados por simplificação. Sobram então $a - b$ fatores no numerador:

$$\frac{7^a}{7^b} = \frac{\overbrace{7 \times 7 \times \dots \times 7}^{a-b \text{ vezes}}}{1} = 7^{a-b}$$

3. Por definição de potência,

$$\frac{6,13^a}{6,13^b} = \frac{\overbrace{6,13 \times 6,13 \times 6,13 \times \dots \times 6,13 \times 6,13}^{a \text{ vezes}}}{\underbrace{6,13 \times 6,13 \times \dots \times 6,13}_b} = 6,13^{a-b}$$

Existem mais fatores no dividendo, pelo que todos os fatores do divisor podem ser simplificados (cf. o texto de apoio a ALG5-1.8 ou, neste caso, por definição de quociente). Sobram então $a - b$ fatores no dividendo:

$$\frac{6,13^a}{6,13^b} = \frac{\overbrace{6,13 \times 6,13 \times \dots \times 6,13}^{a-b \text{ vezes}}}{1} = 6,13^{a-b}$$

ALG6-1.7

[Parte 1, pág. 25]

1. Utilizando a definição de potência, escreve o quociente $\frac{3^2}{7^2}$ na forma de potência.
- 2.* Utilizando a definição de potência, escreve o quociente $\frac{5^4}{3^4}$ na forma de potência.
- 3.* Utilizando a definição de potência, escreve o quociente $\frac{73,4^3}{8,23^3}$ na forma de potência.

Resultado

1. $\frac{3^2}{7^2} = \frac{3 \times 3}{7 \times 7} = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \left(\frac{3}{7}\right)^2$
2. $\frac{5^4}{3^4} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{5}{3} \times \frac{5 \times 5 \times 5}{3 \times 3 \times 3} = \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5 \times 5}{3 \times 3} = \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \left(\frac{5}{3}\right)^4$
3. $\frac{73,4^3}{8,23^3} = \frac{73,4 \times 73,4 \times 73,4}{8,23 \times 8,23 \times 8,23} = \frac{73,4}{8,23} \times \frac{73,4 \times 73,4}{8,23 \times 8,23} = \frac{73,4}{8,23} \times \frac{73,4}{8,23} \times \frac{73,4}{8,23} = \left(\frac{73,4}{8,23}\right)^3$

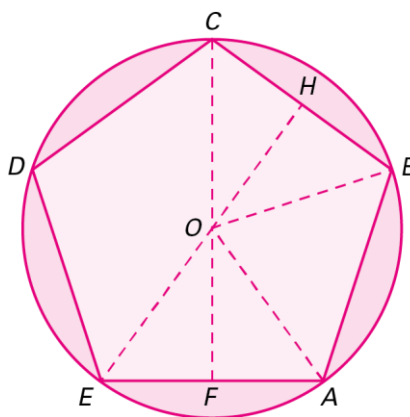
Descritor: 1.8

No último exemplo utilizou-se o resultado expresso em ALG5-1.8 .

ALG6-1.8

[Parte 1, pág. 52]

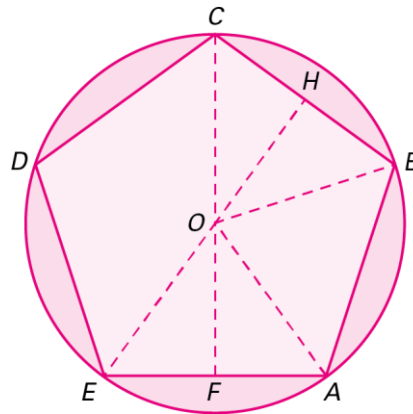
- 1.* Na figura está representado um pentágono regular inscrito na circunferência de centro O . O ponto F é o pé da perpendicular tirada de O para $[EA]$ e o ponto H é o pé da perpendicular tirada de O para $[BC]$.



- 1.1 Justifica que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OE}$.
- 1.2 Justifica que os triângulos $[OEA]$ e $[OBC]$ são iguais, assim como os ângulos OEA e OBC .
- 1.3 Justifica que são iguais os ângulos EOF e BOH .
- 1.4 Utiliza o caso ALA de igualdade de triângulos para justificar que os triângulos $[EOF]$ e $[BOH]$ são iguais e que $\overline{OF} = \overline{OH}$.
- 1.5 Justifica que os apótemas de um dado polígono regular são todos iguais.

GM6-1.7

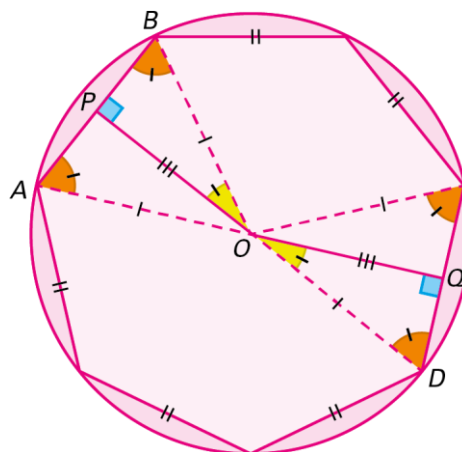
- 2.* Na figura está representado um pentágono regular inscrito na circunferência de centro O . O ponto F é o pé da perpendicular tirada de O para $[EA]$ e o ponto H é o pé da perpendicular tirada de O para $[BC]$.



- 2.1 Justifica que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OE}$.
- 2.2 Justifica que os triângulos $[OEA]$ e $[OBC]$ têm áreas iguais.
- 2.3 Tendo em conta o resultado da alínea anterior, justifica que os apótemas de um dado polígono regular são todos iguais.

Descritor: 1.7

Um polígono regular tem, em particular, os lados todos iguais; se os respectivos vértices estiverem situados em determinada circunferência, ou seja, se o polígono estiver inscrito nessa circunferência, então as distâncias do centro da circunferência aos pés das perpendiculares traçadas do centro para os lados do polígono serão todas iguais, como se pode concluir argumentando como se segue, utilizando a figura:



Considerando dois quaisquer lados do polígono, $[AB]$ e $[CD]$, por exemplo, terão comprimentos iguais, já que o polígono é regular; por outro lado os raios da circunferência são também todos iguais, pelo que, em particular são iguais os segmentos $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ e $[OD]$.

Então, pelo critério LLL de igualdade de triângulos, são iguais os triângulos $[OAB]$ e $[OCD]$, pelo que serão também iguais os ângulos OAB , OBA , OCD e ODC por se oporem a lados iguais, os dois primeiros e os dois últimos nos mesmos triângulos (cf. GM5-2.12) e o segundo e o terceiro (por exemplo) em triângulos iguais (cf. GM5-2.13).

Agora podemos aplicar o critério ALA (cf. GM5-2.11) aos triângulos $[OPB]$ e $[OQD]$ (por exemplo), já que têm iguais os lados $[OB]$ e $[OD]$ (raios da circunferência) e os respectivos ângulos adjacentes: OBP é igual a ODQ e BOP é igual a DOQ , já que estes dois ângulos são complementares dos anteriores por ser reto o terceiro ângulo interno de cada um dos triângulos e a soma dos três ser igual a dois retos (GM5-2.2).

Da igualdade dos triângulos $[OPB]$ e $[OQD]$ deduzimos finalmente a igualdade dos lados $[OP]$ e $[OQ]$, que se opõem a ângulos iguais em triângulos iguais (GM5-2.13); trata-se de dois quaisquer dos «apótemas» do polígono, pelo que acabámos de verificar que todos os apótemas são iguais.

Observação

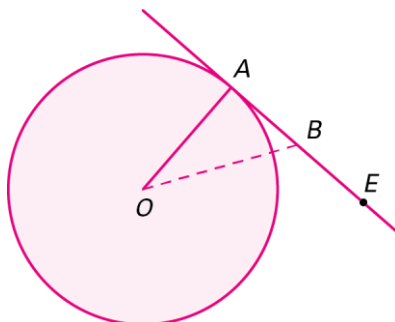
A igualdade dos apótemas poderia ser justificada admitindo propriedades básicas da medida de área; com efeito os triângulos iguais $[OAB]$ e $[OCD]$ têm áreas iguais (por serem iguais, pelo critério LLL, com acima se referiu) e sabemos que a medida da área de um triângulo em unidades quadradas é igual a metade do produto da medida de comprimento de uma base pela medida de comprimento da altura correspondente, na unidade pré-fixada (GM5-4.6).

Tomando para bases dos triângulos os lados do polígono, as alturas correspondentes são precisamente os apótemas, pelo que da igualdade das medidas de área e dos comprimentos das bases dos triângulos deduz-se imediatamente as igualdades das medidas de comprimento dos apótemas.

A dedução anterior evita o recurso a propriedades da área, cuja justificação rigorosa é mais complexa, embora sejam muito intuitivas.

[Parte 1, pág. 53]

- 1.* Na figura seguinte está representada uma circunferência de centro O e a reta AE perpendicular ao raio em A .



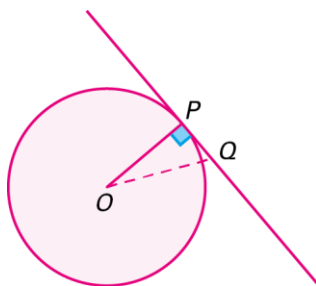
- 1.1 Considera B um ponto qualquer da reta AE distinto de A . Justifica que $\overline{OB} > \overline{OA}$.
- 1.2 Justifica que B é um ponto exterior ao círculo de centro O e raio $[OA]$.
- 1.3 Justifica que A é o único ponto em que a reta AE intersesta o círculo.

Descritor: 1.4

Uma reta passando por um ponto P de uma circunferência e perpendicular ao raio com extremo nesse ponto tem os restantes pontos a uma distância do centro superior ao raio da circunferência; com efeito, o centro O , o ponto P e outro qualquer ponto Q da reta são vértices de um triângulo retângulo em P cuja hipotenusa é o segmento $[OQ]$, maior do que qualquer dos catetos, já que se opõe ao maior dos ângulos do triângulo (o ângulo reto - cf. GM5-2.3, 2.13).

Em particular, a distância de Q ao centro O é maior do que a distância de P a O , ou seja, é maior do que o raio.

Portanto o ponto Q está na parte externa da circunferência (no exterior do círculo), ou seja, a reta apenas intersesta a circunferência (e o círculo) no ponto P :

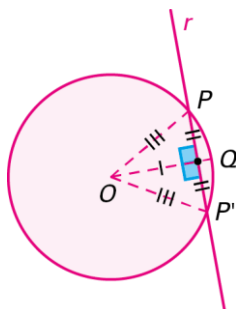


Esta propriedade da reta PQ leva-nos a designá-la por *reta tangente à circunferência no ponto P* . Pode portanto ser construída traçando a perpendicular a OP no ponto P , no plano da circunferência.

Observação

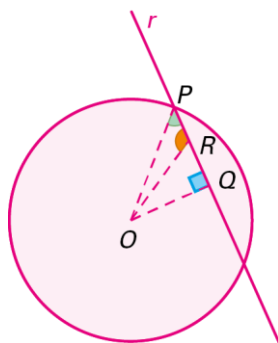
Podemos também notar que, considerando qualquer outra reta r do plano passando por P , uma vez que não pode ser perpendicular ao raio (GM5-2.19), será distinto de P o ponto Q , pé da perpendicular traçada de O para r .

Agora, se considerarmos o ponto P' da reta r à mesma distância de Q que P mas na semirreta oposta de origem Q , facilmente se conclui que são iguais os triângulos retângulos $[OQP]$ e $[OQP']$ (critério LAL - os triângulos têm iguais os lados assinalados respetivamente com um e dois traços e os ângulos retos) e portanto também as hipotenusas $[OP]$ e $[OP']$ (opõem-se aos ângulos retos em triângulos retângulos iguais):



Daqui resulta que o ponto P' também está na circunferência, por estar à mesma distância do centro que o ponto P ; ou seja, qualquer reta do plano da circunferência passando por P e distinta da tangente interseca a circunferência num segundo ponto; por outras palavras, a tangente à circunferência em P é a única reta do plano passando por P que interseca a circunferência (e o círculo) num único ponto.

Ainda se pode concluir que os pontos situados na reta entre P e P' estão na parte interna da circunferência (no interior do círculo); considerando, por exemplo, um desses pontos, seja R , situado entre P e Q , conclui-se que $[OR]$ tem comprimento menor do que o raio $[OP]$, pois, no triângulo $[ORP]$, $[OP]$ opõe-se a um ângulo obtuso (é ângulo externo não adjacente ao ângulo reto do triângulo $[OQR]$) ao passo que $[OR]$ opõe-se a outro ângulo interno, o qual só pode ser agudo:

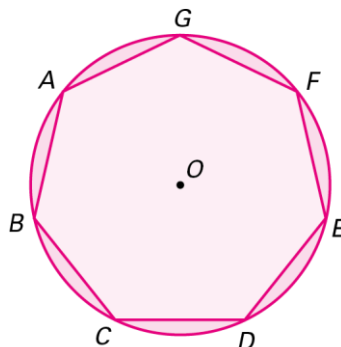


O mesmo argumento valeria para um ponto situado entre Q e P' e para o próprio ponto Q , invocando, nesse caso, o facto de $[OP]$ ser a hipotenusa do triângulo retângulo $[OQP]$ (lado oposto ao ângulo reto) e portanto maior que o lado $[OQ]$, que é um cateto (oposto a um ângulo agudo no mesmo triângulo).

Analogamente se concluiria que os pontos da reta r fora do segmento $[PP']$ estão no exterior do círculo; assim a reta r interseca a circunferência exatamente em dois pontos, se não lhe for tangente e, estando situada no plano da circunferência, a interseçar num ponto («reta secante à circunferência»).

[Parte 1, pág. 59]

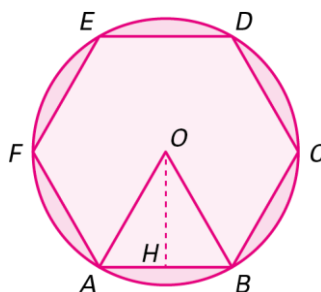
1. Na figura está representado um heptágono regular inscrito numa circunferência. Sabe-se que o lado do heptágono mede 2 cm .



1.1 Calcula o respetivo perímetro.

1.2 Tomando o perímetro do heptágono como valor aproximado do perímetro do círculo, determina um valor aproximado do raio da circunferência.

- 2.* Na figura está representado um hexágono regular inscrito numa circunferência de centro O e raio 2 cm .



2.1 Decompõe o hexágono em triângulos em que um dos vértices é O e o lado oposto é um dos lados do polígono.

2.2 Mostra que $\widehat{AOB} = 60^\circ$ e determina a amplitude dos ângulos OAB e ABO .

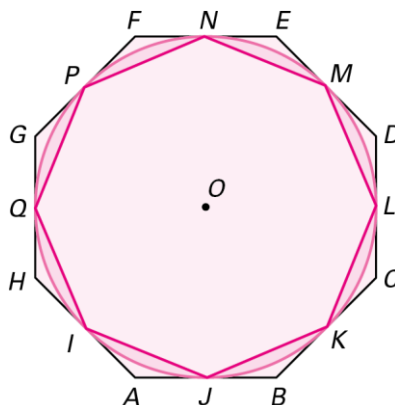
2.3 Como classificas esses triângulos quanto aos lados? Justifica.

2.4 Supondo que a altura $\overline{OH}$ do triângulo $[ABO]$ mede aproximadamente 1,7 cm , determina valores aproximados da área do triângulo $[ABO]$ e do hexágono $[ABCDEF]$.

GM6-5.1 e 6.1

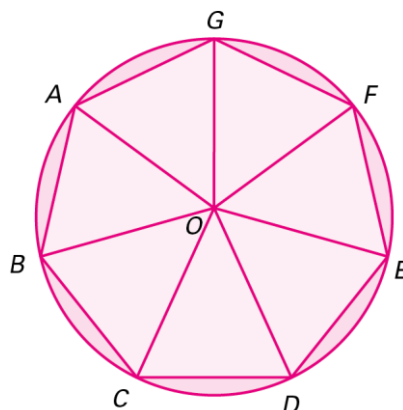
[Parte 1, pág. 59]

- 1.*** Na figura está representada uma circunferência de centro O e dois octógonos, um inscrito e outro circunscrito a essa circunferência.

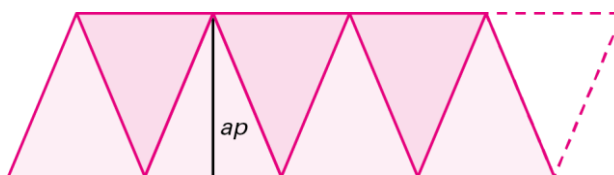


- 1.1** Sabendo que o lado do polígono $[ABCDEFGH]$ mede aproximadamente 2,2 cm, determina um valor aproximado do respetivo perímetro.
- 1.2** Determina o perímetro do octógono inscrito na circunferência sabendo que o lado mede 2 cm.
- 1.3** Tomando o perímetro do octógono inscrito como valor aproximado do perímetro do círculo, determina um valor aproximado do raio da circunferência.
- 1.4** Tomando o perímetro do octógono circunscrito como valor aproximado do perímetro do círculo, determina um valor aproximado do raio da circunferência.
- 1.5** Supondo que o raio da circunferência mede aproximadamente 2,6 cm, obtém valores aproximados por excesso e por defeito de π utilizando os resultados obtidos em **1.2** e **1.3**.

1. Na figura ao lado está representado um heptágono regular inscrito numa circunferência e dividido em triângulo isósceles.



Construindo um paralelogramo com estes triângulos aos quais se juntou um, obtém-se a figura junta.



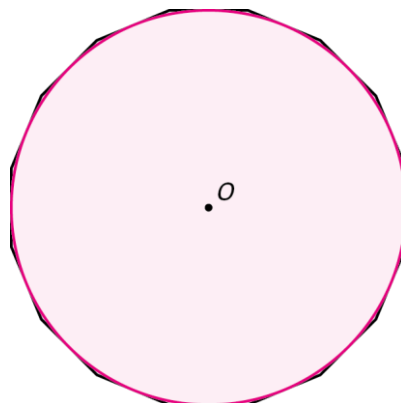
- 1.1 Constrói, a partir do paralelogramo, um retângulo que tenha área igual à do heptágono sendo um dos lados igual ao semiperímetro e outro igual ao apótema do heptágono.

(Sugestão: Decompõe os triângulos das extremidades em dois triângulos iguais, traçando as respetivas alturas, iguais ao apótema do heptágono.)

- 1.2 Conclui que a área do heptágono é igual ao produto do semiperímetro pelo apótema.

[Parte 1, pág. 59]

1. Na figura seguinte está representado um polígono regular de 16 lados inscrito numa circunferência de centro O raio r cm.



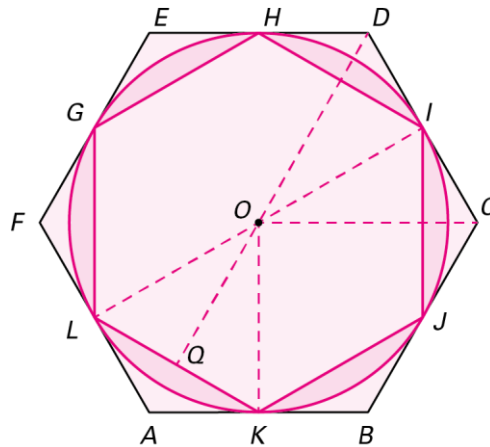
- 1.1 Considerando que o perímetro do polígono é aproximadamente igual ao perímetro do círculo e que o apótema do polígono é aproximadamente igual ao raio do círculo, determina uma expressão para um valor aproximado da área do polígono envolvendo apenas π e r .
- 1.2 Considera que, na alínea a., em vez de um polígono de 16 lados tínhamos utilizado um polígono regular com 32 lados, substituindo cada lado do polígono anterior por dois como descrito na figura ao lado.



- a. Pensas que o valor obtido em a. é uma melhor aproximação da área do polígono de 32 lados ou do polígono de 16 lados? Porquê?
- b. E o perímetro e o raio do círculo parecem melhores aproximações respetivamente do perímetro e do apótema do polígono de 32 lados ou de 16 lados?
- 1.3 Que fórmula deduzes para a área do círculo supondo que pode ser confundido com um polígono regular nele inscrito com um número suficientemente grande de lados?

GM6-5.5 e 6.1

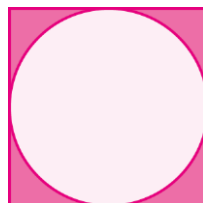
- 2.*** Na figura seguinte estão representados dois hexágonos regulares, um inscrito e o outro circunscrito a uma dada circunferência.



Sabe-se que o raio da circunferência mede 2 cm . Sabe-se também que $\overline{OD} = 2,3$ cm e $\overline{OQ} = 1,7$ cm , aproximadamente.

- 2.1** Determina um valor aproximado da área do hexágono inscrito na circunferência começando por calcular um valor aproximado da área do triângulo equilátero $[LOK]$.
- 2.2** Determina um valor aproximado da área do hexágono circunscrito à circunferência começando por calcular um valor aproximado da área do triângulo $[DOC]$.
- 2.3** Tendo em conta as alíneas anteriores, aproximadamente entre que valores está compreendida a área do círculo?
- 2.4** Determina a área do círculo tomando 3,1416 para valor aproximado de π e compara o valor obtido com a conclusão de **2.3**.

- 3.** Na figura está representado um quadrado de área 4 cm² e nele inscrito um círculo. Determina um valor aproximado da área da região sombreada.



1. No quadro indica-se o consumo efetuado por um veículo que completa um trajeto fixo a uma dada velocidade média.

Verifica que o consumo é diretamente proporcional à velocidade média.

Velocidade média	80 km/h	120 km/h	160 km/h
Gasolina gasta	10 litros	15 litros	20 litros

Resposta

1. A 80 km/h , o veículo consome 10 litros. A 160 km/h , o veículo consome 20 litros.

Para passar de 80 km/h para 160 km/h , multiplica-se por 2 .

Para passar de 10 para 20 litros multiplica-se por 2 .

(Inversamente, para passar de 160 km/h para 80 km/h e de 20 para 10 litros, multiplica-se pelo mesmo coeficiente $\frac{1}{2}$.)

A 80 km/h , o veículo consome 10 litros. A 120 km/h , o veículo consome 15 litros.

Para passar de 80 km/h para 120 km/h , multiplica-se por $\frac{120}{80} = \frac{3}{2}$.

Para passar de 10 para 15 litros, multiplica-se por $\frac{15}{10} = \frac{3}{2}$.

(Inversamente, para passar de 120 km/h para 80 km/h e de 15 para 10 litros, multiplica-se pelo mesmo coeficiente $\frac{2}{3}$.)

Atendendo à definição de proporcionalidade direta, é ainda necessário proceder a mais duas verificações (apesar de poderem ser deduzidas das anteriores):

A 160 km/h , o veículo consome 20 litros. A 120 km/h , o veículo consome 15 litros. Para passar de 120 km/h para 160 km/h , multiplica-se por $\frac{160}{120} = \frac{4}{3}$.

Para passar de 15 para 20 litros, multiplica-se por $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$.

(Inversamente, para passar de 160 km/h para 120 km/h e de 20 para 15 litros, multiplica-se pelo mesmo coeficiente $\frac{3}{4}$.)

Podemos concluir que, no quadro apresentado, o consumo é diretamente proporcional à velocidade média.

ALG6-4.1

Descritor: 4.1

Neste descritor apresenta-se a definição de «grandezas diretamente proporcionais».

Se y e x designarem respetivamente as medidas de duas grandezas, a primeira dependendo da segunda, as grandezas em causa dizem-se diretamente proporcionais se, dado um número positivo q , a uma medida $q \times x$ da segunda corresponder uma medida $q \times y$ da primeira.

Pode ser extremamente trabalhoso verificar que uma grandeza é diretamente proporcional a outra pela definição.

No exemplo seguinte, em que se fornecem três valores da grandeza «Velocidade Média» e os correspondentes três valores da grandeza «Gasolina Gasta», é, em rigor, necessário efetuar 6 verificações, correspondentes a todas as passagens possíveis entre valores da Velocidade Média: em km/h, de 80 para 120, de 80 para 160, de 120 para 160 e inversamente.

Alguns destes cálculos são obviamente redundantes.

É, no entanto, importante que os alunos apreendam esta definição e o seu significado: «se duplicar a velocidade, duplico a gasolina gasta», «se multiplicar por $\frac{3}{2}$ a velocidade, multiplico também por $\frac{3}{2}$ a gasolina gasta», etc.

Em 4.2 apresenta-se um resultado que permite, na prática, uma verificação bem mais expedita da proporcionalidade direta entre duas grandezas, por cálculo do quociente das respetivas medidas.

Por equivalência, essa propriedade pode eventualmente ser apresentada como definição, embora seja intuitivamente menos esclarecedora quanto ao significado da proporcionalidade direta.

[Parte 1, pág. 95]

1. Num supermercado, a quantidade de arroz que se pode comprar com uma dada soma de dinheiro é-lhe diretamente proporcional.

- 1.1 Completa a seguinte tabela.

Arroz	3 kg	6000 g	3 hg
Preço	4 €		

- 1.2 Efetua o quociente entre o preço e o número de quilos de arroz que lhe corresponde.
O que verificas?

Resposta

- 1.1 É necessário começar por converter o peso do arroz considerado numa mesma unidade de medida:

Arroz	3 kg	6 kg	0,3 kg
Preço	4 €		

Tem-se

		$\times 2$	$\times \frac{1}{10}$
Arroz	3 kg	6 kg	0,3 kg
Preço	4 €	8 €	0,40 €
		$\times 2$	$\times \frac{1}{10}$

Logo:

- 1.2 $\frac{0,4}{0,3} = \frac{4 \times \frac{1}{10}}{3 \times \frac{1}{10}} = \frac{4}{3}$ e $\frac{8}{6} = \frac{4 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{3}$. Verifica-se que os três quocientes são iguais.

ALG6-4.2 e 4.3

Descritor: 4.2

Esta propriedade, por ser equivalente à definição fornecida no descritor anterior, pode ser utilizada como definição da noção de proporcionalidade direta, passando então o descritor 4.1 a descrever uma propriedade.

Grandezas diretamente proporcionais

Consideremos uma grandeza Y diretamente proporcional a outra X .

Se as medidas y e y' de Y corresponderem respetivamente a medidas x e x' de X , como para passar de x para x' se pode multiplicar por $\frac{x'}{x}$, então $y' = \frac{x'}{x}y$, ou seja,

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}.$$

Inversamente, dadas duas grandezas X e Y , Y dependente de X de modo que quaisquer medidas x e x' de X e correspondentes medidas y e y' de Y respeitem a igualdade,

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x} \text{ tomando } x' = qx, \text{ obtemos } \frac{y'}{qx} = \frac{y}{x}, \text{ ou seja, utilizando a propriedade expressa no}$$

descritor ALG5-1.8, $y' = qx \frac{y}{x} = \frac{qxy}{x} = qy$, logo as grandezas são diretamente proporcionais.

Note-se ainda que a propriedade enunciada no presente descritor permite verificar de forma mais célere que duas grandezas são diretamente proporcionais.

Por exemplo, no exemplo do descritor anterior, teria bastado observar que os quocientes dos valores correspondentes são iguais $\left(\frac{80}{10} = \frac{160}{20} = \frac{120}{15}\right)$ para se poder concluir que as duas grandezas em causa são diretamente proporcionais.

Descritor: 4.3

Trata-se de uma consequência imediata do descritor anterior: se $\frac{y}{x} = c$ é constante, então se

$\frac{x}{y} = \frac{1}{c}$ é também constante, observando-se que as duas constantes de proporcionalidade são inversas uma da outra.

Esta propriedade permite falar em «duas grandezas diretamente proporcionais», sem especificar qual é a grandeza que se considera como dependente da outra.

[Parte 2, pág. 17]

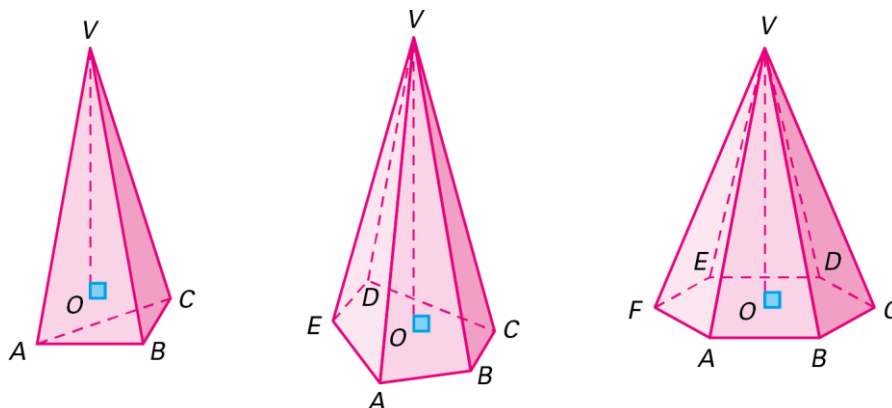
1. Imagina um prisma e uma pirâmide cujas bases são polígonos com 100 lados.
Indica o número de arestas laterais e totais do prisma e da pirâmide e explica o teu raciocínio.

GM6-2.3, 2.7 e 3.1

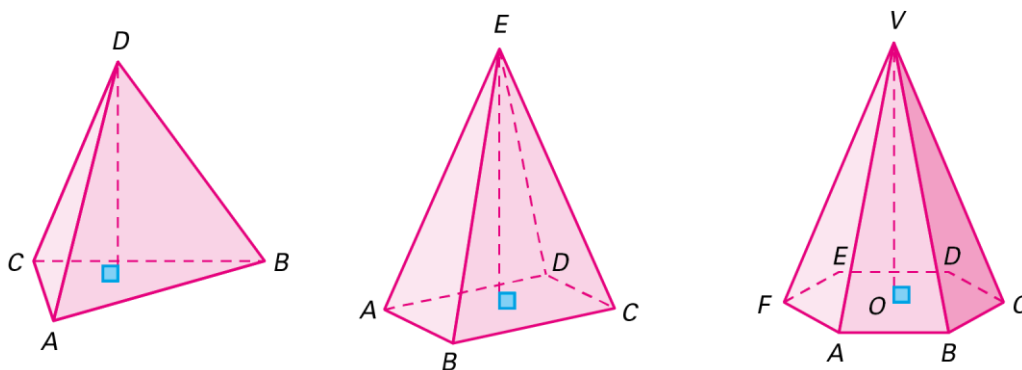
Descritor 2.3 e 2.7

Observação:

Certos autores definem «pirâmide reta» como uma pirâmide cujas arestas laterais são iguais, como nos exemplos seguintes:



Esta definição não é, no entanto, consensual. Em várias obras entende-se por «pirâmide reta» uma pirâmide tal que o segmento de reta que liga o vértice ao centro de massa da base é perpendicular ao plano que contém a base, como se ilustra nos desenhos seguintes:



Por esta razão optou-se por não fornecer, nas Metas Curriculares, uma definição de «pirâmide reta».

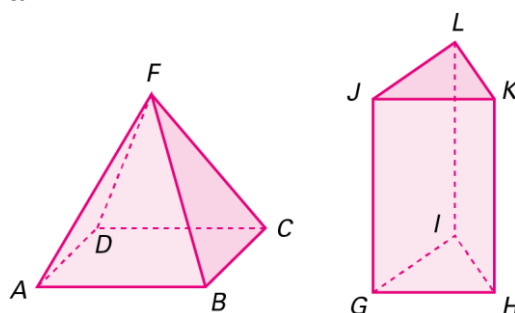
Observe-se ainda que, com a primeira definição, uma pirâmide é reta se e apenas se existir uma circunferência que contém todos os vértices da base e se o segmento de reta que liga o vértice ao centro da circunferência for perpendicular à base (ver uma justificação deste facto no Caderno de Apoio do 3.º Ciclo, GM9-8.1). Com esta definição, as pirâmides retas são as pirâmides que se podem inscrever em cones retos.

Quanto à segunda definição, notemos que a noção de «centro de massa» de uma figura, em toda a sua generalidade, não pode ser apresentada no ensino Básico e Secundário uma vez que utiliza noções de cálculo integral. No entanto, em figuras limitadas que possuam pelo menos dois eixos de simetria concorrentes num ponto P , é fácil ver qualquer outro eixo de simetria passa igualmente por P e que P é o centro de massa da figura.

Com qualquer uma destas definições, uma pirâmide regular é sempre uma pirâmide reta.

[Parte 2, pág. 17]

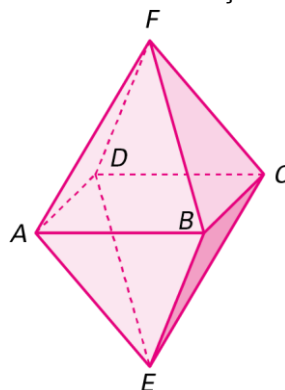
- 1.* Indica uma expressão que permita determinar o número de vértices de um prisma dado o número n de lados da base e explica o teu raciocínio.
- 2.* Indica uma expressão que permita determinar o número de vértices de uma pirâmide dado o número m de lados da base e explica o teu raciocínio.
3. Considera a figura seguinte onde estão representados um prisma triangular e uma pirâmide quadrangular.



- 3.1 Indica o número de arestas e de vértices de cada um dos sólidos.
- 3.2 Indica que relação existe entre o número de arestas do prisma e o número de arestas da respetiva base.
- 3.3 Indica que relação existe entre o número total de vértices da pirâmide e o número de vértices da respetiva base.
- 4.* Um prisma e uma pirâmide têm ambos 24 arestas.
- 4.1 Quantas faces laterais tem o prisma?
- 4.2 Quantos vértices tem o mesmo prisma?
- 4.3 Quantas faces laterais tem a pirâmide?
- 5.** Uma pirâmide tem o mesmo número de arestas de um prisma.
- 5.1 Dá exemplos de várias pirâmides e prismas com esta propriedade.
- 5.2 Qual o menor número de lados que pode ter o polígono da base de cada um deles?

GM6-3.2 e 4.1

1. Na figura está representado um octaedro. Indica o número de faces, arestas e vértices e verifica a validade da relação de Euler.

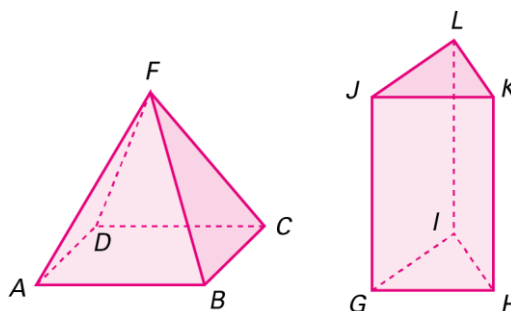


- 2.* Considera um prisma e uma pirâmide em que o polígono da base tem 100 vértices.

- 2.1 Indica quantas arestas e quantas faces têm o prisma e a pirâmide e explica o teu raciocínio.
- 2.2 Soma o número de faces com o número de vértices em cada um dos poliedros e compara com o respetivo número de arestas.

O que concluis?

3. Considera a figura junta onde estão representados um prisma triangular e uma pirâmide quadrangular.



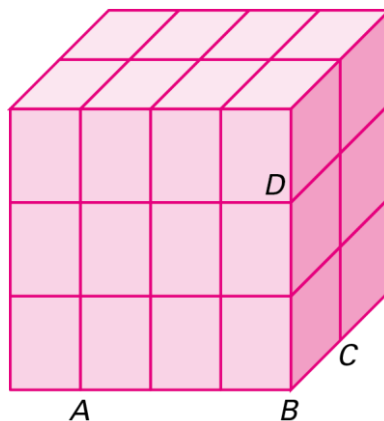
- 3.1 Completa a tabela seguinte.

Faces F	Vértices V	Arestas A	$F + V$

- 3.2 Que relação existe entre o número de arestas e a soma do número de faces com o número de vértices?

[Parte 2, pág. 27]

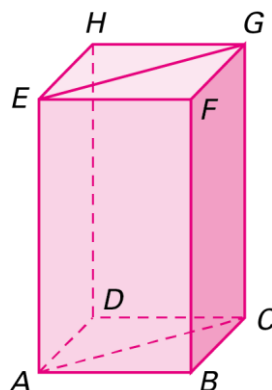
1. Na figura está representado um cubo cuja aresta mede 1 dm e que foi dividido em paralelepípedos retângulos iguais tal como a figura sugere.



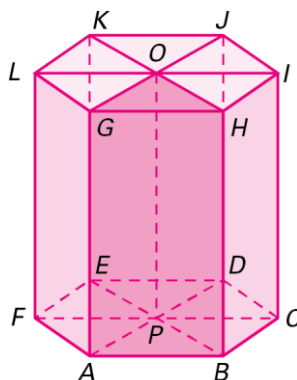
- 1.1 Em quantos paralelepípedos está dividido o cubo?
- 1.2 Indica o volume do cubo e de cada um dos paralelepípedos em que ficou dividido.
- 1.3 Quais as dimensões de cada um dos paralelepípedos?
- 1.4 Como podes calcular o volume de cada paralelepípedo a partir das respetivas dimensões?
- 1.5* Sabe-se que os pontos A , B , C e D são vértices de um paralelepípedo P .
- a. Calcula, sem os contar, em quantos paralelepípedos está dividido e determina o volume de P sem utilizar a fórmula.
- b. Indica as dimensões de P e explica como se pode calcular o respetivo volume a partir desses valores.

[Parte 2, pág. 31]

- 1.* Na figura está representado um paralelepípedo retângulo de dimensões a , b e c decomposto em dois prismas triangulares.



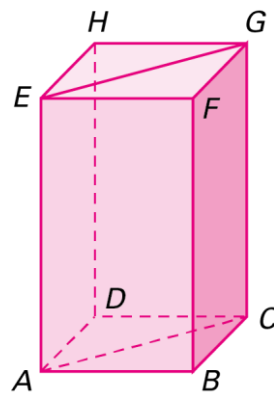
- 1.1 Determina o volume do paralelepípedo.
- 1.2 Admitindo que os dois prismas triangulares são iguais, determina o volume de cada um deles.
- 1.3 Calcula a área da base de um dos prismas e do paralelepípedo.
- 1.4 Deduz das alíneas anteriores uma fórmula para o cálculo do volume do prisma conhecida a área da base e a altura.
2. Considera um prisma hexagonal regular decomposto em prismas triangulares regulares tal como ilustra a figura.



- 2.1 Sabendo que a área da base de cada um dos prismas triangulares mede 6 cm^2 e que a respetiva altura mede 8 cm , determina o volume de cada um dos prismas triangulares.
- 2.2 Determina a área da base do prisma hexagonal.
- 2.3 Determina o volume do prisma hexagonal de duas formas: tendo em conta a decomposição em prismas triangulares e utilizando diretamente a fórmula.

GM6-7.3 a 7.6 e 8.1

3. Na figura está representado um paralelepípedo retângulo decomposto em dois prismas triangulares.



- 3.1 Sabendo que o volume do paralelepípedo é igual a 17 cm^3 , indica o volume de cada um dos prismas triangulares.
- 3.2 Supondo que a altura do paralelepípedo mede $4,25 \text{ cm}$, qual a área da base de cada um dos prismas triangulares?
4. Na figura está representado um cilindro de volume igual a 30 cm^3 .



Determina um valor aproximado da altura do cilindro sabendo que o diâmetro da base mede 5 cm .

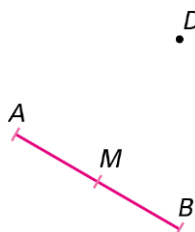
Descritores: 7.3 a 7.5

No caso em que o triângulo da base do prisma não é retângulo, pode considerar-se em primeiro lugar, um prisma cuja base é um paralelogramo que duplica o triângulo e utilizar-se as decomposições conhecidas (GM5-4.5) que o transformam num retângulo equivalente para obter um paralelepípedo retângulo com o mesmo volume que esse prisma.

Deste modo, conclui-se, no caso geral, que a medida do volume de um prisma triangular reto, em unidades cúbicas, é igual ao produto da medida da área da base, em unidades quadradas, pela medida da altura.

[Parte 2, pág. 51]

- 1.** Na figura está representado um segmento de reta $[AB]$, o respetivo ponto médio M e um ponto D não pertencente à reta AB , tal que $\overline{AD} = \overline{BD}$.



- 1.1 Prova que os triângulos $[AMD]$ e $[BMD]$ são iguais.
 1.2 Justifica que os ângulos AMD e BMD são iguais e ambos retos.
 1.3 Justifica que a reta DM é a mediatriz de $[AB]$.

- 2.** Na figura está representado um segmento de reta $[AB]$ e um ponto D não colinear com A e B e que pertence à mediatriz de $[AB]$.

- 2.1 Considera o ponto médio M de $[AB]$. Justifica que os ângulos AMD e BMD são iguais.

- 2.2 Justifica que os triângulos $[AMD]$ e $[BMD]$ são iguais.

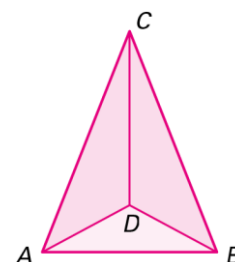
- 2.3 Justifica que $\overline{AD} = \overline{BD}$.



- 3.* Desenha um segmento de reta $[AB]$ e constrói a respetiva mediatriz utilizando régua e compasso. Justifica o procedimento utilizado.

4. Na figura está representado um segmento de reta $[AB]$ e os pontos C e D pertencentes à mediatriz de $[AB]$.

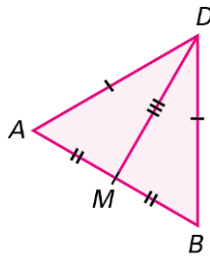
Justifica que os triângulos $[ADC]$ e $[BDC]$ são iguais.



GM6-9.4 a 9.7 e 10.1

Resposta

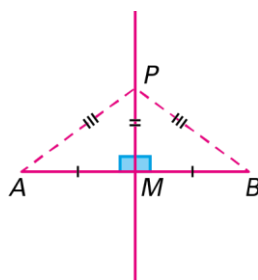
- 1.1** Pelo caso LLL, prova-se que os triângulos $[AMD]$ e $[BMD]$ são iguais pois, como M é ponto médio de $[AB]$, então $\overline{AM} = \overline{MB}$, $[MD]$ é um lado comum aos dois triângulos e sabe-se que $\overline{AD} = \overline{BD}$.



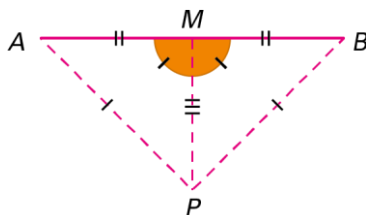
- 1.2** Os ângulos AMD e BMD opõem-se a lados iguais $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$ de triângulos iguais, logo são também iguais. Como são suplementares, ou seja, a sua soma é um ângulo raso, são ambos retos.
- 1.3** A reta DM é a mediatriz de $[AB]$ pois é perpendicular a $[AB]$ no ponto médio M .
- 2.1** A mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular ao segmento de reta no seu ponto médio, logo M pertence à mediatriz. O ponto D também pertence à mediatriz pelo que MD é a mediatriz de $[AB]$ e os ângulos AMD e BMD são ambos retos, logo iguais.
- 2.2** Pelo caso LAL, prova-se que os triângulos $[AMD]$ e $[BMD]$ são iguais pois $\overline{AM} = \overline{MB}$, $[MD]$ é comum aos dois triângulos e $\hat{AMD} = \hat{BMD}$.
- 2.3** $\overline{AD} = \overline{BD}$ porque são lados que se opõem a ângulos iguais de triângulos iguais.

Descritores: 9.4 a 9.7

A mediatriz de um segmento, reta perpendicular a esse segmento no respetivo ponto médio (em determinado plano contendo o segmento) é única (cf. GM5-2.19) sendo constituída por pontos equidistantes dos extremos do segmento como pode verificar-se argumentando como se segue, utilizando a figura seguinte.



A reta PM , mediatriz do segmento $[AB]$, por definição, é perpendicular ao segmento $[AB]$ no respetivo ponto médio, pelo que os ângulos assinalados são retos e os segmentos $[AM]$ e $[MB]$ são iguais; então, pelo critério LAL, os triângulos $[AMP]$ e $[BMP]$ também são iguais (já que o lado $[MP]$ é comum aos dois triângulos), pelo que também são iguais os segmentos $[PA]$ e $[PB]$, ou, seja, o ponto P é equidistante dos extremos do segmento $[AB]$.

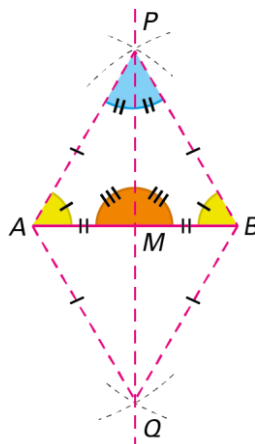


Reciprocamente, qualquer ponto do plano equidistante de A e B está na mediatriz, como pode concluir-se da seguinte figura ao lado.

Supondo que o ponto P é equidistante de A e B e traçando o segmento de reta que une P ao ponto médio M do segmento $[AB]$, podemos aplicar o critério LLL para concluir que são iguais os triângulos $[AMP]$ e $[BMP]$ e portanto também os ângulos AMP e BMP , por se oporem a lados iguais em triângulos iguais; mas tratando-se de ângulos suplementares iguais concluímos que são retos e portanto a reta MP é, de facto, a mediatriz do segmento $[AB]$.

Identificada a mediatriz com o conjunto dos pontos do plano equidistantes de A e B , podemos agora, facilmente, construí-la com régua e compasso, bastando, para o efeito, interseção de duas circunferências com o mesmo raio (podemos tomar os raios iguais ao comprimento do próprio segmento $[AB]$) e de centros respetivamente em A e B (com a escolha sugerida dos raios tais circunferências interseção em dois pontos P e Q , já que a soma dos raios é superior à distância entre os respetivos centros e a diferença é nula, portanto inferior à distância entre os centros, o que garante a existência dos triângulos $[ABP]$ e $[ABQ]$, como foi referido na observação do texto de apoio ao descritor GM5-2.17).

Obtêm-se assim dois pontos da mediatriz (um em cada um dos semiplanos determinados pela reta suporte de $[AB]$ no plano fixado), já que, por construção, ficam equidistantes de A e B :



Na figura indicam-se as linhas auxiliares da construção e as que permitem concluir que a reta PQ assim construída é de facto a mediatriz do segmento $[AB]$, agora sem invocar as propriedades acima justificadas, em particular sem se utilizar à partida o ponto médio do segmento $[AB]$.

Com efeito, a construção efetuada garante que são iguais os quatro segmentos marcados com um traço (raios das duas circunferências) e, em particular, os ângulos marcados com um traço (opostos a lados iguais num mesmo triângulo - *pons asinorum*); assim, pelo critério LLL são iguais os triângulos isósceles $[APQ]$ e $[BPQ]$ e portanto também os ângulos marcados com dois traços (opostos a lados iguais nestes dois triângulos iguais).

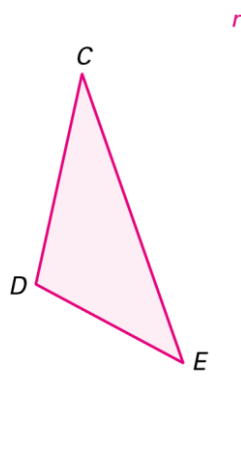
Então, pelo critério ALA (utilizando os lados $[AP]$ e $[BP]$ e os respetivos ângulos adjacentes), concluímos que são iguais os triângulos $[APM]$ e $[BPM]$, o que garante a igualdade respetivamente dos segmentos marcados com dois traços e dos ângulos marcados com três traços.

Ou seja, M é, de facto, o ponto médio do segmento $[AB]$ e os ângulos AMP e BMP são retos (iguais e suplementares), o que significa que a reta PQ é a mediatriz do segmento $[AB]$ no plano considerado.

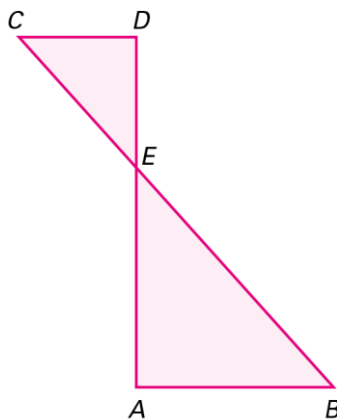
Note-se que esta construção também permite obter o ponto médio M do segmento $[AB]$, uma vez que esse ponto não foi utilizado para obter a mediatriz, mas resultou antes da interseção dessa reta com o segmento $[AB]$.

[Parte 2, pág. 57]

- 1.* Na figura seguinte está representado um triângulo $[CDE]$ e uma reta r



- 1.1 Constrói os transformados C' , D' e E' respetivamente, de cada um dos vértices C , D e E do triângulo na reflexão axial de eixo r .
- 1.2 Prova que o triângulo $[C'D'E']$ é igual ao triângulo $[CDE]$.
- 2.** Na figura seguinte, AB e CD são perpendiculares a DA e o ponto E é a interseção dos segmentos de reta $[AD]$ e $[CB]$.

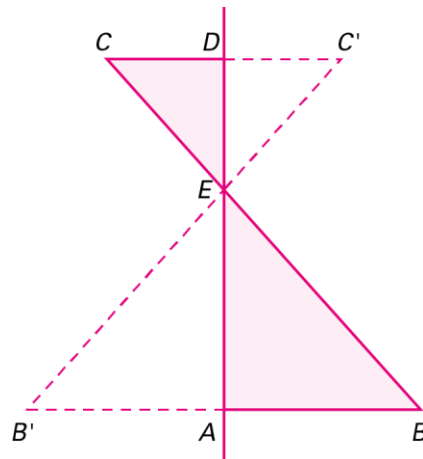


- 2.1 Constrói os pontos B' e C' , *imagens respetivas dos pontos B e C pela reflexão de eixo AD*.
- 2.2 Mostra que os triângulos $[CDE]$ e $[C'DE]$ são iguais e justifica que os ângulos DEC e DEC' são iguais, assim como os segmentos $[CE]$ e $[C'E]$.
- 2.3 O que dizer dos triângulos $[BAE]$ e $[B'AE]$, dos ângulos BEA e $B'EA$ e dos lados $B'E$ e BE ?
- 2.4 Justifica que $\overline{CB} = \overline{C'B'}$ explicando por que é que os pontos C' , E e B' estão alinhados.

GM6-9.8 a 9.11

Resposta

- 2.1** Por definição, a reta AD é a mediatriz do segmento de reta $[CC']$. Logo, para construir C' basta marcar na reta CD (por hipótese perpendicular a AD) o ponto distinto de C à mesma distância de D que C . O ponto B' pode ser construído de forma análoga.
- 2.2** Por construção, $\widehat{CDE} = \widehat{C'DE}$ pois são ambos retos. $\overline{CD} = \overline{C'D}$ e $[DE]$ é comum aos triângulos $[CDE]$ e $[C'DE]$.



Então, pelo caso LAL, estes triângulos são iguais. Consequentemente, os ângulos $\widehat{DEC}$ e $\widehat{DEC'}$ são iguais pois opõem-se a lados iguais em triângulos iguais.

Finalmente, $\overline{CE} = \overline{C'E}$ pois são lados que se opõem a ângulos iguais de triângulos iguais.

- 2.3** Por um raciocínio análogo ao utilizado na alínea anterior, estes triângulos são iguais assim como os ângulos e os segmentos de reta referidos.
- 2.4** Os ângulos $\widehat{CED}$ e $\widehat{BEA}$ são iguais pois são verticalmente opostos, logo os ângulos $\widehat{C'ED}$ e $\widehat{B'EA}$ também são iguais porque $\widehat{CED} = \widehat{C'ED}$ e $\widehat{BEA} = \widehat{B'EA}$.

Tem-se então que $\widehat{B'EC'} = \widehat{C'ED} + \widehat{B'ED} = \widehat{B'EA} + \widehat{B'ED} = \widehat{AED}$ que é um ângulo raso. Logo, B' , E e C' estão alinhados por esta ordem pelo que $\overline{B'C'} = \overline{B'E} + \overline{EC'} = \overline{BE} + \overline{EC} = \overline{BC}$.

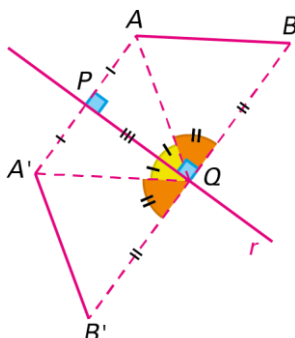
Descritor: 9.10

Não se pede para reconhecer que as reflexões axiais preservam as distâncias entre pontos, pelo que, no primeiro exemplo, os alunos poderão utilizar este resultado para concluir o que se pede.

No segundo exemplo, correspondente a um nível de desempenho elevado, apresenta-se um caminho possível para provar a propriedade expressa neste descritor para dois pontos em semiplanos opostos relativamente ao eixo de reflexão

Descritores: 9.8 a 9.11

A imagem de um ponto P por uma reflexão de eixo r (r uma reta dada) que não passa pelo ponto obtém-se traçando a perpendicular do ponto para r e tomando nessa perpendicular, no semiplano oposto a P determinado por r , um ponto à mesma distância que P do pé da perpendicular. Indicam-se na figura as imagens, respetivamente A' e B' , de dois pontos, A e B por uma reflexão de eixo r , no caso em que os dois pontos pertencem a um mesmo semiplano determinado por r e não estão nessa reta; em particular, o segmento $[AB]$ não intersesta r :



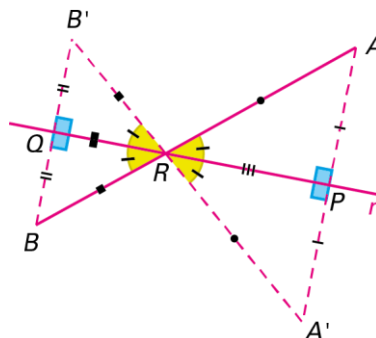
A construção indicada permite verificar que os segmentos $[AB]$ e $[A'B']$ são iguais.

Com efeito, por definição de imagem por uma reflexão, são iguais respetivamente os segmentos marcados com um traço e os segmentos marcados com dois traços, sendo retos os ângulos como tal indicados.

Pelo critério LAL concluímos que serão então iguais os triângulos $[APQ]$ e $[A'PQ]$ e portanto os lados $[AQ]$ e $[A'Q]$ (marcados com um pequeno círculo) e os ângulos marcados com um traço.

Daqui resulta que são iguais os ângulos marcados com dois traços (complementares de ângulos iguais) e portanto, novamente pelo critério LAL, os triângulos $[ABQ]$ e $[A'B'Q]$; podemos então finalmente concluir que são iguais os segmentos $[AB]$ e $[A'B']$, por se oporem a ângulos iguais em triângulos iguais.

No caso em que os pontos A e B pertencem a semiplanos distintos determinados por r em determinado plano contendo esta reta, em particular o segmento $[AB]$ intersektará a reta r em determinado ponto R e a seguinte construção permite concluir, mais uma vez, que os pontos A e B estão à mesma distância que os pontos A' e B' :



Podemos começar por verificar que são iguais os triângulos $[APR]$ e $[A'PR]$, utilizando o critério LAL (são iguais os ângulos retos, os lados $[AP]$ e $[A'P]$ e o lado $[PR]$ é comum) e portanto os ângulos marcados com um traço nestes dois triângulos.

De modo análogo são iguais os ângulos marcados com um traço nos triângulos $[BQR]$ e $[B'QR]$ e são iguais os ângulos QRB e ARP por serem verticalmente opostos.

Mas então são iguais dois a dois todos os ângulos marcados com um traço, e, em particular, os ângulos $A'RP$ e $B'RQ$; como os lados $\overrightarrow{RQ}$ e $\overrightarrow{RP}$ são colineares, também terão de o ser os lados $\overrightarrow{RB'}$ e $\overrightarrow{RA'}$, pois podemos considerar o ângulo verticalmente oposto a um dos ângulos considerados (seja $B'RQ$) que será então forçosamente igual a $A'RP$ com um lado comum com este ângulo ($\overrightarrow{RP}$), no mesmo semiplano, tendo portanto de coincidir com ele, o que prova a referida colinearidade de $\overrightarrow{RB'}$ e $\overrightarrow{RA'}$ (também poderíamos concluir esta colinearidade de $B'RP$ ser um ângulo suplementar de $B'RQ$ e portanto do ângulo $A'RP$, igual a $B'RQ$, o que prova que $B'RA'$ é um ângulo raso).

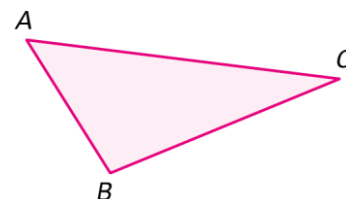
Então a distância entre A' e B' será, de facto, igual à distância entre A e B , por serem iguais os comprimentos de $[AR]$ e $[A'R]$ e também os comprimentos de $[RB]$ e $[RB']$ (opõem-se a ângulos iguais em triângulos iguais) e por R estar situado tanto no segmento $[AB]$ como no segmento $[A'B']$, atendendo ao que acabámos de ver.

De modo análogo (mas mais simplesmente) poderíamos tratar o caso em que pelo menos um dos pontos se situa na reta r .

Do que precede conclui-se que as reflexões são também isometrias do plano (preservam as distâncias entre os pontos) e pelo que se disse acima a propósito das simetrias centrais, também preservam as amplitudes dos ângulos.

[Parte 2, pág. 61]

1. Considera o triângulo $[ABC]$ representado na figura.

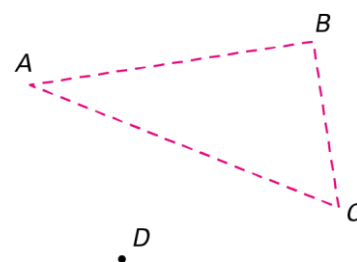


- 1.1 Constrói os transformados A' , B' e C' respetivamente dos pontos A , B e C pela reflexão central de centro B .

- 1.2 Justifica que o triângulo $[A'B'C']$ obtido em 1.1 é igual ao triângulo $[ABC]$.

- 1.3 Justifica que a reflexão central de centro em B mantém a distância entre os pontos A e C .

2. Considera o triângulo de vértices A , B e C e um ponto D distinto de A , B e C .

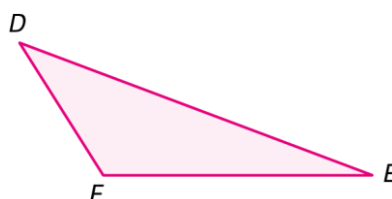


- 2.1 Constrói as imagens de A , B e C pela reflexão central de centro D e designa-as respetivamente por P , Q e R .

- 2.2 Completa as seguintes igualdades, utilizando vértices do triângulo $[ABC]$: $\overline{PQ} = \dots\dots$; $\overline{PR} = \dots\dots$; $\overline{QR} = \dots\dots$.

- 2.3 Utilizando o critério de igualdade de ângulos, completa as seguintes afirmações utilizando apenas as letras P , Q e R : O ângulo ABC é igual ao ângulo $\dots\dots$ e o ângulo $\dots\dots$ é igual ao ângulo BCA .

- 3.* Desenha um triângulo qualquer como, por exemplo, o triângulo $[DEF]$ representado na figura.



- 3.1 Determina o ponto médio de um dos lados, por exemplo, do lado $[DE]$ e designa-o por M .

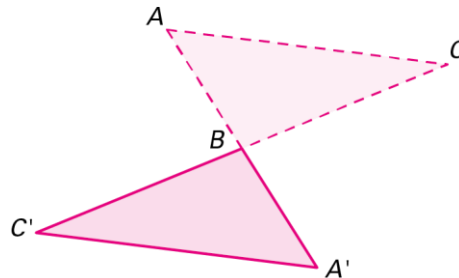
- 3.2 Constrói o transformado de cada um dos vértices do triângulo pela reflexão central de centro M e designa a imagem de F por G .

- 3.3 Prova que o quadrilátero $[DFEG]$ é um paralelogramo.

GM6-9.2, 9.3 e 10.1

Resposta

- 1.1** Por definição, B é o ponto médio do segmento $[AA']$. Para construir A' basta pois marcar na reta AB o ponto distinto de A à mesma distância de B que A .



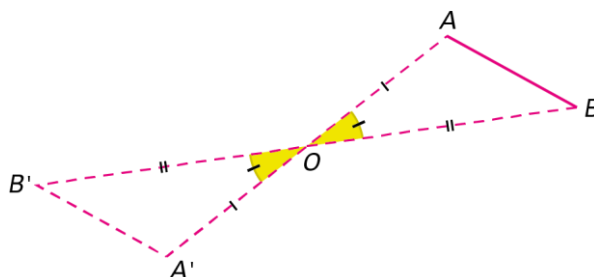
O ponto C' constrói-se de forma análoga. A imagem de B é por definição o próprio B , ou seja, B' coincide com B .

- 1.2** Por construção, $\overline{AB} = \overline{A'B}$ e $\overline{CB} = \overline{C'B}$. Por outro lado, os ângulos ABC e $A'BC'$ são verticalmente opostos, logo iguais. Assim, pelo caso LAL, podemos afirmar que os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são iguais.
- 1.3** Os lados $[AC]$ e $[A'C']$ são iguais porque se opõem a ângulos iguais em triângulos iguais.

Descritor: 9.2

As reflexões centrais de centro O transformam um ponto P distinto de O no ponto P' da semirreta oposta a $\overrightarrow{OP}$ à mesma distância de O que P .

São «isometrias», no sentido em que mantêm as distâncias entre os pontos; a seguinte construção permite reconhecer esse facto, no caso em que os pontos A e B não são colineares com O :



Os pontos A e B são transformados pela reflexão central de centro O respetivamente nos pontos A' e B' .

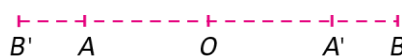
Ora facilmente se conclui que os triângulos $[OAB]$ e $[OA'B']$ são iguais; basta utilizar o critério LAL, uma vez que os ângulos internos em O dos dois triângulos são verticalmente opostos e portanto iguais (por definição de simetria central, O está nos segmentos $[AA']$ e $[BB']$) e, também por definição de simetria central, $[OA]$ e $[OA']$ são iguais, assim como $[OB]$ e $[OB']$.

Consequentemente, $[AB]$ e $[A'B']$ também são iguais, por se oporem a ângulos iguais em triângulos iguais.

Se a reta determinada pelos pontos A e B passar pelo ponto O , centro da reflexão, também passará pelos pontos A' e B' (já que as semirretas opostas a $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ estão evidentemente contidas na única reta que contém os três pontos A , B e O) e, examinando os diversos casos possíveis das posições relativas dos pontos A e B e O , é fácil concluir a igualdade dos comprimentos de $[AB]$ e $[A'B']$, utilizando princípios básicos, que temos admitido implicitamente, relativos a comprimentos de segmentos justapostos.

Tais princípios estão na base, em particular, da definição geométrica de soma de números racionais, pois deles depende a coerência desta definição; examinemos, por exemplo, o caso em que o ponto O está no segmento $[AB]$, sendo distinto dos respetivos extremos e ponto médio.

A situação será a seguinte:



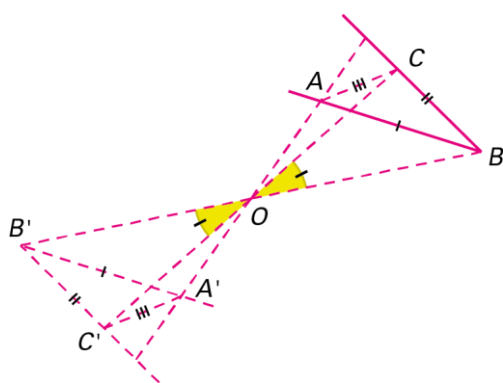
Da definição de reflexão resulta que $[OA]$ e $[OA']$ são iguais, assim como $[OB]$ e $[OB']$; resulta então dos referidos princípios que também serão iguais os comprimentos de $[B'A]$ e $[A'B]$ ("diferenças" de pares de segmentos respetivamente iguais) e em seguida os comprimentos de $[AB]$ e $[A'B']$, já que estes segmentos são formados pela justaposição do segmento $[AA']$ respetivamente com os segmentos iguais $[A'B]$ e $[B'A]$.

Note-se que a demonstração acima, utilizando o critério LAL de igualdade de triângulos, mas agora invocando diretamente a igualdade dos terceiros lados, continua praticamente a valer, se admitirmos que se aplica a "triângulos degenerados", ou seja, determinados por trios de pontos colineares, o que resultará de axiomas básicos da Geometria indispensáveis para a introdução coerente das operações de medida de comprimentos e amplitudes de ângulos, axiomas que fundamentam o critério geral de igualdade de ângulos e respetivas condições de coerência (cf. a observação a propósito de 9.21).

Neste caso os "ângulos iguais" para se poder aplicar o critério LAL seriam os ângulos rasos AOB e $A'OB'$, deduzindo-se a igualdade dos "terceiros lados" $[AB]$ e $[A'B']$ dos triângulos degenerados $[AOB]$ e $[A'OB']$.

Descritor: 9.3

Dado que uma isometria se caracteriza por preservar as distâncias entre pontos, pelo critério de igualdade de ângulos, que recorre às distâncias mútuas entre três pontos em cada ângulo (o vértice e um ponto distinto do vértice em cada lado do ângulo), serão necessariamente iguais as amplitudes de dois ângulos se o primeiro for determinado por três dados pontos e o segundo pelos pontos transformados destes por essa isometria (desde que o vértice do segundo ângulo seja o transformado do vértice do primeiro); na seguinte figura exemplifica-se esta propriedade com uma reflexão central:



Os pontos A , B e C são transformados respetivamente nos pontos A' , B' e C' pela simetria central de centro O e as igualdades dos segmentos assinalados respetivamente com um, dois e três traços garantem a igualdade das amplitudes dos ângulos ABC e $A'B'C'$.

[Parte 2, pág. 67]

- 1.* Na figura está representado o ângulo convexo EVF e a respetiva bissetriz.

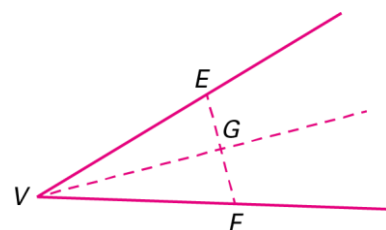
Os pontos E e F estão à mesma distância de V .

- 1.1 Une os pontos E e F por um segmento de reta. Prova que os triângulos $[EVG]$ e $[FVG]$ são iguais, onde G designa a interseção da bissetriz de EVF com o segmento de reta $[EF]$.

- 1.2 Justifica que $\overline{EG} = \overline{GF}$.

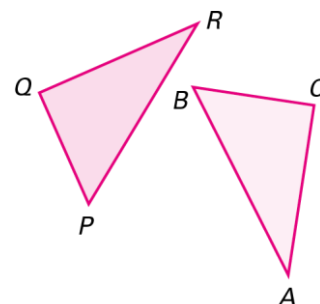
- 1.3 Justifica que EF é perpendicular a VG .

- 1.4 Justifica que o ponto E é imagem de F pela reflexão de eixo VG .



2. Na figura, $\overline{AB} > \overline{AC} > \overline{BC}$ e $\overline{PR} > \overline{RQ} > \overline{QP}$

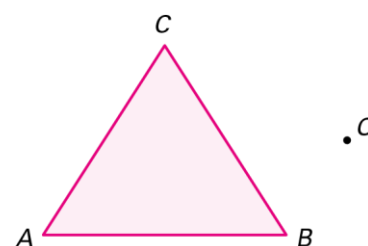
Sabe-se que cada um dos pontos A , B e C é transformado por uma dada rotação num dos pontos P , Q ou R . Indica qual o transformado de cada um dos pontos A , B e C por essa rotação.



3. Na figura junta está representado um triângulo equilátero $[ABC]$.

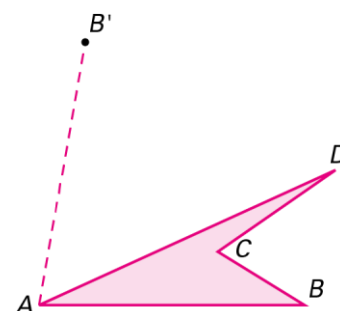
- 3.1 Constrói as imagens A' , B' e C' dos pontos A , B e C pela rotação de centro O , sentido positivo e amplitude 90° .

- 3.2 Justifica que o triângulo $[A'B'C']$ é equilátero.



- 4.* Na figura está representado um quadrilátero côncavo $[ABCD]$ e o ponto B' que é o transformado do ponto B por uma rotação de centro em A .

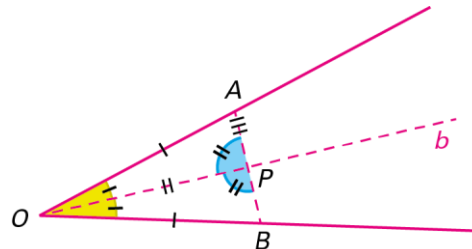
Desenha a figura no teu caderno e, utilizando compasso e régua, determina os transformados dos restantes vértices do polígono.



GM6-9.12 a 9.21 e 10.1

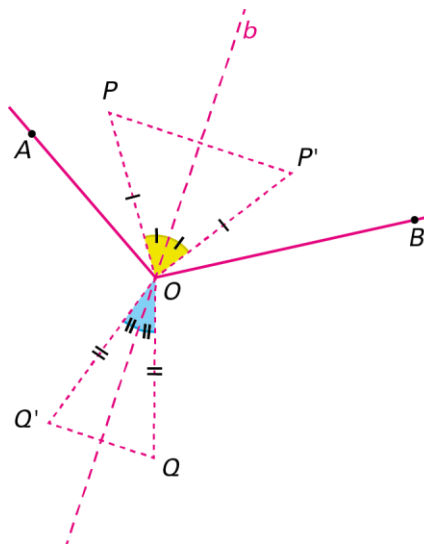
Descritor: 9.12

Consideremos a bissetriz b de um dado ângulo convexo AOB , semirreta situada entre os lados do ângulo e determinando, com estes, ângulos convexos iguais (neste caso os ângulos marcados com um traço):



Tomando os pontos A e B a igual distância do vértice e sendo P a interseção do segmento $[AB]$ com a semirreta b , o critério LAL permite imediatamente concluir que os triângulos $[AOP]$ e $[BOP]$ são iguais e portanto também os segmentos de reta marcados com três traços e os ângulos marcados com dois traços; estes ângulos, sendo iguais e suplementares, são portanto retos, o que, juntamente com a igualdade dos segmentos $[AP]$ e $[BP]$, permite concluir que A e B são imagens um do outro pela reflexão de eixo igual à reta suporte da bissetriz b .

Que a reta suporte da bissetriz de um ângulo convexo é, de facto, eixo de simetria desse ângulo e do ângulo côncavo associado, pode deduzir-se dos argumentos abaixo, que utilizam a figura seguinte.



É fácil concluir que a imagem de um ponto P de qualquer um dos ângulos pela reflexão de eixo igual à reta suporte da bissetriz b pode ser obtida marcando no semiplano oposto determinado por essa reta um ponto à mesma distância do vértice O , e "à mesma distância angular" da bissetriz, ou seja, situado no lado não comum do ângulo adjacente de igual amplitude àquele que tem um dos lados igual à bissetriz e outro igual à semirreta OP .

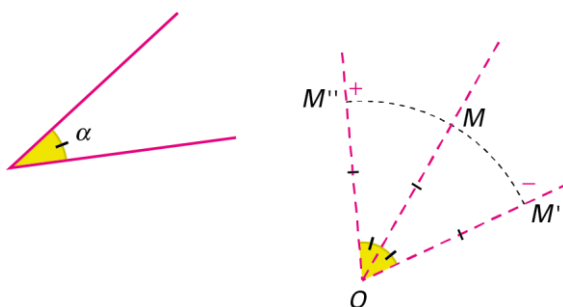
Uma construção análoga à anterior permite mostrar que, de facto, os pontos P' e Q' indicados na figura e construídos do modo indicado, respetivamente no ângulo convexo e no côncavo associado, são imagens respetivamente dos pontos P e Q fixados nesses ângulos pela reflexão de eixo igual à reta suporte de b .

Assim se conclui que as imagens dos pontos de qualquer um destes dois ângulos por esta reflexão reconstituem o próprio ângulo.

Descritores: 9.13 a 9.19

Dado um ângulo α não nulo, nem giro nem raso e um ponto O em determinado plano, qualquer ponto M desse plano distinto de O determina com O uma semirreta de origem O contida nesse plano, a qual pode ser tomada para lado de um ângulo de amplitude igual a α em cada um dos semiplanos em que o plano fica dividido pela reta OM .

Cada um desses ângulos fica unicamente determinado, bastando, para tal, transportar o ângulo α para o respetivo semiplano de modo que um dos lados coincida com a semirreta $\vec{OM}$:



Se agora marcarmos em cada um dos lados distintos desses dois ângulos pontos à distância do vértice O igual ao comprimento do segmento $[OM]$, obteremos as duas únicas imagens, M' e M'' de M por rotações de centro O e ângulo α nesse plano.

Se o ângulo α for nulo ou giro, por definição, para que MOM' tenha amplitude igual a α , as semirretas $\vec{OM}$ e $\vec{OM'}$ terão de coincidir e portanto, para que os segmentos de reta $[OM]$ e $[OM']$ tenham o mesmo comprimento, terá de ser M coincidente com M' ; nesses casos, portanto, a imagem de M por uma rotação de qualquer centro distinto de M e ângulo α será o próprio ponto M .

Se α for raso, também por definição, os pontos M e M' estarão em semirretas opostas de origem O à mesma distância de O , já que os lados de um ângulo raso, precisamente, são semirretas opostas; neste caso haverá uma única imagem de M por rotação de determinado centro O distinto de M e ângulo α , a qual coincide com a imagem de M pela reflexão central de centro O .

Podemos distinguir as duas imagens de M por rotações com o mesmo centro e ângulo num mesmo plano, intuitivamente, imaginando que são obtidas pela "rotação, no plano, ao longo de um intervalo de tempo" de um segmento de reta com "posição inicial" igual ao segmento $[OM]$ e posição final igual ao segmento $[OM']$ (ou alternativamente igual a $[OM'']$), passando por posições intermédias cujos extremos descrevem, em alternativa, os arcos de circunferência indicados a tracejado na figura anterior.

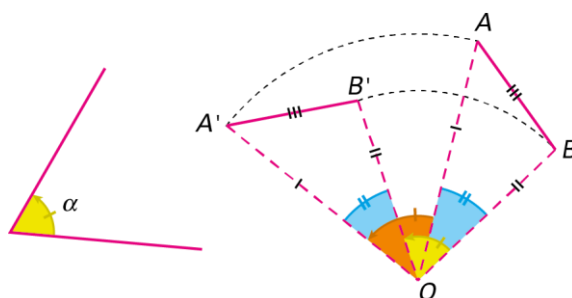
Comparando o "movimento do segmento de reta" com o movimento de um ponteiro de um relógio, uma das rotações (dita de *sentido positivo* ou *direto*) será "efetuada" no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio (na figura, a que conduz a M'') e a outra (dita de *sentido negativo* ou *retrógrado*) no sentido dos ponteiros do relógio (a que, na figura, conduz a M').

Note-se que os ângulos MOM' e MOM'' , correspondentes às rotações de *sentidos contrários*, partilham um lado e são adjacentes; este critério permite distinguir "ângulos orientados" de sentidos contrários, no caso em que, num plano, partilham o "lado origem".

São considerações deste tipo que permitem formalizar adequadamente a noção de orientação de ângulos (orientados) num plano, em alternativa à abordagem intuitiva que agora seguimos, utilizando o "movimento dos ponteiros de um relógio".

Podemos agora examinar o efeito das rotações nos comprimentos dos segmentos.

Na figura seguinte representam-se as imagens de dois pontos A e B por uma rotação de centro O num ponto e ângulo um dado α (não nulo nem giro) em determinado plano contendo O , A e B tendo-se o cuidado de escolher rotações *com o mesmo sentido* (neste caso o sentido positivo ou direto, ou seja, contrário ao dos ponteiros do relógio):



Esta igualdade de sentido das rotações aplicadas aos dois pontos A e B pode traduzir-se na "igualdade de sentido" dos "ângulos orientados" de "lados origem" $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ e "lados extremidade" respetivamente $\vec{OA'}$ e $\vec{OB'}$. Essa igualdade de sentido, por sua vez, pode aferir-se, de forma mais rigorosa (sem se utilizar o sentido dos ponteiros de um relógio...), passando por "igualdades de sentido" de ângulos orientados que com estes partilham um dos lados; assim podemos começar por considerar o ângulo convexo de lado origem $\vec{OA}$ e lado extremidade $\vec{OB'}$, o qual partilha um lado com o ângulo $\angle AOA'$, não sendo adjacente, já que está nele contido, e portanto terá o mesmo sentido que o ângulo orientado que corresponde à rotação que transforma A em A' .

Agora podemos notar que o mesmo ângulo orientado tem o lado extremidade coincidente com o lado extremidade do ângulo orientado correspondente à rotação que transforma o ponto B no ponto B' , não sendo esses ângulos adjacentes, pelo que, mais uma vez podemos assim aferir a igualdade de sentido.

A conclusão é que os ângulos orientados utilizados para obter A' e B' respetivamente a partir de A e B têm, de facto, o mesmo sentido, atendendo ao modo como foram construídos.

Esta análise permite concluir que a situação geométrica do ângulo AOB' é tal que fica adjacente aos ângulos AOB e $A'OB'$, formando com cada um deles somas iguais (de amplitudes iguais a α).

Daqui se deduz que os ângulos marcados na figura com dois traços também são iguais, o que permite aplicar o critério LAL aos triângulos AOB e $A'OB'$ concluir que são iguais, bem como, em consequência, os segmentos $[AB]$ e $[A'B']$.

Do que precede conclui-se que também são isometrias as rotações de determinado centro, ângulo e sentido, num dado plano; em consequência, e atendendo ao que se viu a propósito das simetrias centrais, também manterão as amplitudes dos ângulos.

Descritor 9.21

Uma isometria caracteriza-se por manter as distâncias entre os pontos; ou seja, se A' e B' forem, respetivamente, as imagens de A e B por uma dada isometria então a distância entre A' e B' é igual à distância entre A e B , ou seja, os segmentos de reta $[AB]$ e $[A'B']$ são iguais.

Mas podemos, além disso, afirmar que os pontos de $[A'B']$ são exatamente as imagens dos pontos de $[AB]$ por essa isometria; com efeito, prova-se que as isometrias, pelo facto de "manterem as distâncias entre os pontos" também "preservam os alinhamentos".

Observação**

Esta propriedade pode ligar-se a uma extensão natural do critério de igualdade de ângulos; examinemos a figura abaixo em que se representam as imagens A' , P' e B' , por uma isometria, de três pontos alinhados A , B e P (P no segmento $[AB]$):



Pretendemos provar que o ponto P' está no segmento $[A'B']$, ou, mais precisamente, que coincide com o ponto P'' desse segmento, assinalado na figura, a uma distância de A' igual à distância de A a P (e portanto a uma distância de B' igual à distância de B a P).

Ora as distâncias assinaladas com o mesmo número de traços serão iguais, por definição de isometria e por construção de P'' , o que, em particular, pelo critério de igualdade de ângulos (estendido ao caso em que um dos ângulos é nulo) daria que o ângulo $P'A'B'$ é igual ao ângulo nulo PAB (são iguais dois a dois os segmentos $[P'A']$ e $[PA]$, $[A'B']$ e $[AB]$, $[P'B']$ e $[PB]$).

Mas agora "o recíproco" do mesmo critério (mais uma vez estendido ao caso em que um dos ângulos é nulo) permitiria concluir, da igualdade desses dois ângulos, que o segmento de reta $[P'P']$ teria de ser igual ao "segmento de reta degenerado" $[PP]$ o que permitira concluir que os pontos P' e P'' têm de coincidir (admitindo que "um segmento de reta é degenerado se for igual a um segmento degenerado"...).

Poderíamos também ter logo concluído que P' não poderia formar um triângulo ("não degenerado") com A' e B' invocando uma propriedade conhecida, embora menos "primitiva".

Trata-se da *desigualdade triangular* (GM5-2.17); com efeito, na figura acima, se P' não fosse colinear a A' e B' , no triângulo $[A'B'P']$ a medida do lado $[A'B']$ seria igual à soma das medidas dos lados $[A'P']$ e $[P'B']$, o que contrariaria a desigualdade triangular.

Sendo então, forçosamente, P' colinear a A' e B' , uma análise dos comprimentos dos segmentos envolvendo os pontos A' , B' e P' permitiria facilmente depois concluir que os pontos P' e P'' têm de coincidir.

Podemos ainda notar, a este propósito, que a propriedade acima admitida segundo a qual a igualdade de $[PB]$ e $[P''B']$ resulta imediatamente das igualdades dois a dois dos pares de segmentos $[AP]$, $[A'P']$ e $[AB]$, $[A'B']$ e do facto de P estar no segmento $[AB]$ assim como P'' no segmento $[A'B']$, também pode ser encarada como resultando de uma extensão do critério de igualdade de ângulos agora ao caso em que ambos os ângulos são nulos.

Neste caso serão iguais os ângulos PAB e $P''A'B'$ e portanto daí resultará a igualdade pretendida dos segmentos $[PB]$ e $[P''B']$.

Este tipo de resultados envolvendo distâncias de pontos alinhados, que foram admitidos como evidentes em diversas instâncias desde o 1.º ciclo e são essenciais para a interpretação geométrica das operações sobre as diversas classes de números que foram sendo introduzidas, podem assim ser unificados com os resultados básicos relativos à igualdade de ângulos, envolvendo comparação de distâncias, desde que esses resultados se considerem como válidos também para ângulos nulos, giros e rasos.

[Parte 2, pág. 71]

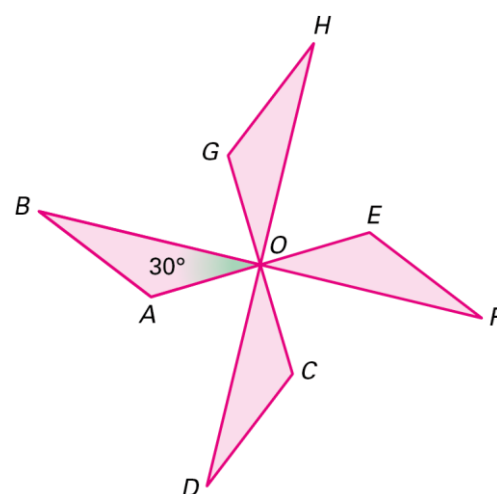
- 1.* Indica as simetrias de reflexão e de rotação dos seguintes quatro polígonos: triângulo equilátero, quadrado e pentágono e hexágono regulares.
- 2.* Será que podes conjecturar uma regra que preveja o número de simetrias de reflexão e de rotação para um polígono regular com n lados? Justifica.
3. Desenha uma figura que tenha um centro de simetria mas que não tenha eixo de simetria e justifica.

4. Na figura está representado um triângulo $[OAB]$ e os seus transformados em sucessivas rotações de centro O e amplitude 90° .

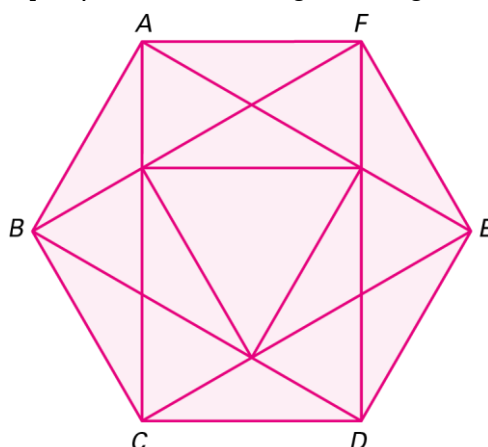
- 4.1 Identifica o transformado de B na rotação de centro O e amplitude:

- a. 180°
- b. 90° e sentido negativo;
- c. 270° e sentido positivo.

- 4.2 Descreve as simetrias de rotação que identificas nesta figura.



5. O hexágono $[ABCDEF]$ representado na figura é regular.



- 5.1 Indica o número de eixos de simetria da figura.
- 5.2 Descreve as simetrias de rotação que identificas nesta figura.

GM6-10.2

Descritor: 10.2

Nos exemplos 1 e 2 admite-se que a imagem de um polígono é o polígono cujos vértices são as imagens dos vértices do primeiro.

Em rigor, este resultado, embora muito intuitivo, é neste nível ainda desconhecido dos alunos.

[Parte 2, pág. 95]

1.* Considera o seguinte conjunto de dados: 7 , 6 , 5 , 1 , 4 , 2 , 6 , 5 , 6 , 3 .

Indica se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

- A moda é igual à amplitude;
- A média é um número inteiro;
- Se acrescentarmos o número 7 aumenta a amplitude;
- Se acrescentarmos o número 7 aumenta a média;
- Se acrescentarmos o número 7 aumenta a moda;
- Se retirarmos o número 3 diminui a amplitude;
- Se retirarmos o número 3 diminui a média;
- Se retirarmos o número 3 diminui a moda.

OTD6-2.2

1. Das seguintes variáveis estatísticas indica as que são qualitativas:

- Idade;
- Ano de escolaridade;
- Altura;
- Nacionalidade;
- Meio de transporte utilizado no percurso casa-escola;
- Tempo médio gasto no percurso casa-escola;
- Código postal.

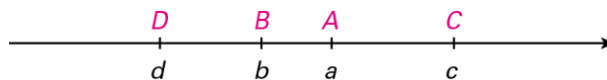
Descritor: 1.3

No que diz respeito ao último exemplo, é importante chamar a atenção dos alunos para o facto de que nem todas as variáveis que tomam valores envolvendo representações com algarismos são quantitativas.

O código postal é uma variável estatística qualitativa, uma vez que não resulta de uma contagem, ou, mais geralmente da medida de uma dada grandeza.

[Parte 2, pág. 129]

1. Na figura junta está representada a reta numérica e nela estão marcados quatro pontos A , B , C e D de abscissas, respetivamente, a , b , c e d .



Completa com os sinais $<$ e $>$ cada uma das expressões seguintes de forma a serem verdadeiras:

1.1 $a \dots c$

1.2 $a \dots b$

1.3 $d \dots c$

1.4 $b \dots d$

1.5 $c \dots b$

- 2.* Completa as seguintes afirmações colocando um dos seguintes sinais $<$, $>$ ou $=$.

2.1 Sendo $a < 0$, $b < 0$ e $|a| < |b|$, então $a \dots b$.

2.2 Sendo $a > 0$, $b > 0$ e $|a| < |b|$, então $a \dots b$.

2.3 Sendo $a < 0$, $b < 0$ e $|a| = |b|$, então $a \dots b$.

2.4 Sendo $a > 0$, $b > 0$ e $|a| = |b|$, então $a \dots b$.

2.5 Sendo $a < 0$, $b > 0$, então $a \dots b$.

2.6 Sendo $a < 0$, $a > b$, então $|a| \dots |b|$.

2.7 Sendo $a > 0$, $a < b$, então $|a| \dots |b|$.

3. Completa as seguintes afirmações colocando um dos seguintes sinais $<$, $>$ ou $=$.

3.1 $0,2 \dots 0,19$

3.2 $-3 \dots -5$

3.3 $\frac{2}{3} \dots \frac{3}{4}$

3.4 $-7 \dots -2$

3.5 $-\frac{2}{3} \dots -\frac{3}{4}$

3.6 $-0,15 \dots -\frac{3}{50}$

Descritores: 2.5 a 2.10

Estes descritores indicam como se devem ordenar dois números racionais representados na reta numérica.

Por definição $a > b$ se o ponto A (de abscissa a) pertencer à semirreta de sentido positivo associada a B (de abscissa b), ou seja, se $\vec{BA}$ tiver o mesmo sentido do que a semirreta dos números positivos.

Esta condição significa que $\vec{BA}$ contém essa semirreta ou está nela contida; examinado as três possibilidades para a posição da origem relativamente aos pontos A e B conclui-se que, numa representação usual da reta numérica, esta propriedade é equivalente a que A esteja situado entre B e a ponta da seta que indica o sentido positivo.



No caso em que a reta numérica é representada com o "sentido da esquerda para a direita" os alunos poderão limitar-se a reconhecer, de forma mais informal, que " $a > b$ se A está à direita de B ".

[Parte 2, pág. 133]

1. Constrói geometricamente o ponto que representa na reta numérica a soma dos números racionais:

1.1 3 e 5

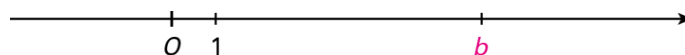
1.2 2 e -4

1.3 $-\frac{5}{3}$ e $\frac{3}{2}$

1.4 $-\frac{5}{6}$ e $-\frac{4}{3}$

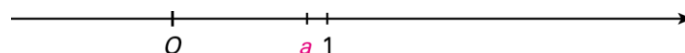
1.5 $-\frac{3}{7}$ e $+\frac{3}{7}$

- 2.* Considera o número racional positivo b representado na reta numérica.



Representa na reta numérica a soma de 3 com b :

3. Considera o número racional positivo a representado na reta numérica.



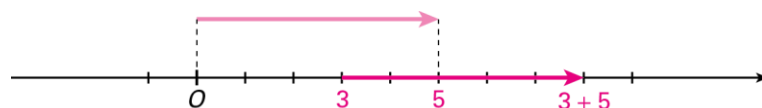
Representa na reta numérica as seguintes somas:

3.1 $2 + (-a)$

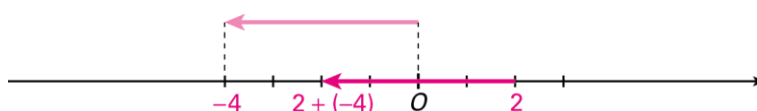
3.2 $a + (-a)$

Resolução

1.1

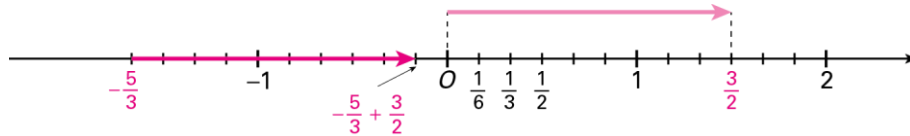


1.2



NO6-3.1 a 3.5

1.3



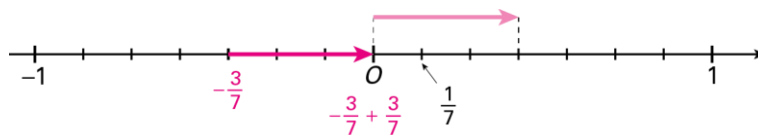
1.4



Como fica patente na figura, a soma $-\frac{5}{6} + \left(-\frac{4}{3}\right)$ pode ser traduzida por uma fração de denominador 6, ou seja, $-\frac{5}{6} + \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{13}{6}$.

Para dividir a unidade em seis partes iguais, basta dividi-la em três partes iguais (terços) e depois cada terço em duas partes iguais (dois sextos). Então se marcamos na reta numérica pontos a distâncias da origem múltiplas de $\frac{1}{6}$, cada um dos números $-\frac{5}{6}$ e $-\frac{4}{3}$ fica representado por um desses pontos. A respetiva soma, obtida por justaposição de segmentos de comprimento $\frac{1}{6}$, pode portanto ser representada por uma fração de denominador 6.

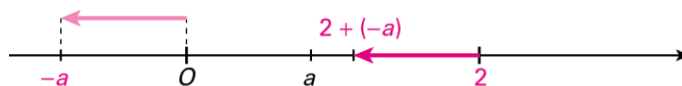
1.5



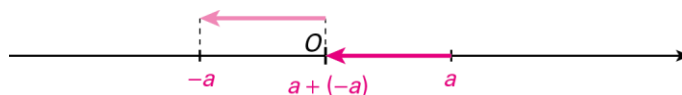
2.



3.1



3.2



Descritores: 3.1 a 3.3

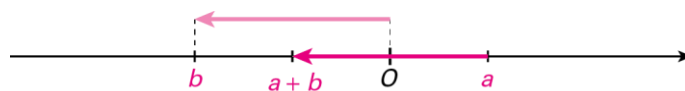
A introdução de segmentos de reta orientados é referida nos descritores 3.1 e 3.2 com vista à definição de soma de dois números racionais utilizando a reta numérica e à posterior interpretação geométrica também da diferença de dois destes números.

No descritor 3.3 estende-se a definição de adição de racionais não negativos (NO3-10.1 e NO3-10.2) a todos os racionais, estabelecendo que:

- para dois números racionais não nulos a e b , representados pelos pontos A e B da reta numérica, se identifica $a + b$ como a abscissa da outra extremidade do segmento orientado de origem em A e de comprimento e orientação de $[O, B]$.
- Exemplo em que $a < 0$, $b > 0$ e $a + b > 0$.



- Exemplo em que $a > 0$, $b < 0$ e $a + b < 0$.



- para um número racional a não nulo e b nulo, se identifica $a + b$ como a abscissa de A .

Pode começar-se por considerar exemplos que apenas envolvam números inteiros.

No caso dos números racionais não necessariamente inteiros poderá utilizar-se uma reta numérica munida de escala apropriada ou inserida de forma conveniente num quadriculado, tal como se sugeriu no 1.º ciclo a propósito das operações com números racionais positivos (cf. Caderno de Apoio NO2-11.1,11.2 e NO3-12.1,12.2,12.3).

Descritores:: 3.4 e 3.5

Estas duas propriedades, depois de reconhecidas geometricamente, são fundamentais para fornecer um método algébrico que permita, no 2.º ciclo, o cálculo da soma e da diferença de dois números racionais.

Note-se que as fórmulas fornecidas nos descritores NO5-1.4 e NO5-1.5

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - c \times b}{b \times d}$$

só no 3.º ciclo poderão ser generalizadas ao caso em que a , b , c e d são números inteiros quaisquer, uma vez que é então que se definem quocientes envolvendo números negativos.

Assim, para calcular a soma de dois números racionais de sinais contrários, por exemplo

$\left(-\frac{4}{7}\right) + \frac{3}{21}$, os alunos poderão:

- reduzir ao mesmo denominador o valor absoluto de ambas as frações, o que permitirá em particular compará-los:

$$\left(-\frac{4}{7}\right) + \frac{3}{21} = \left(-\frac{12}{21}\right) + \frac{3}{21}$$

- aplicar a propriedade enunciada neste descritor e concluir o cálculo:

$$\text{Como } \frac{12}{21} > \frac{3}{21}, \left(-\frac{12}{21}\right) + \frac{3}{21} = -\left(\frac{12}{21} - \frac{3}{21}\right) = -\frac{9}{21} = -\frac{1}{3}.$$

Tal como se referiu mais acima, não se poderá, a este nível, escrever:

$$\left(-\frac{4}{7}\right) + \frac{3}{21} = \left(-\frac{12}{21}\right) + \frac{3}{21} = \frac{-12+3}{21} = \frac{-9}{21} = -\frac{9}{21} = -\frac{1}{3}$$

uma vez que o quociente $\frac{-12+3}{21} = \frac{-9}{21}$ não se encontra sequer definido.

Para adicionar dois números racionais com o mesmo sinal, o processo é mais simples uma vez que não é necessário efetuar qualquer comparação.

Por exemplo, para calcular $\left(-\frac{4}{7}\right) + \left(-\frac{3}{21}\right)$, bastará fazer:

$$\left(-\frac{4}{7}\right) + \left(-\frac{3}{21}\right) = -\left(\frac{4}{7} + \frac{3}{21}\right) = -\left(\frac{12}{21} + \frac{3}{21}\right) = -\frac{15}{21}$$

[Parte 2, pág. 141]

1. Constrói geometricamente os pontos que representam, na reta numérica, as seguintes diferenças:

1.1 $6 - 4$

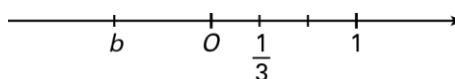
1.2 $4 - 6$

1.3 $-3 - \frac{5}{3}$

1.4 $-\frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{2}\right)$

2. Constrói geometricamente o ponto que representa na reta numérica a diferença entre os números racionais 5,25 e 4.

- 3.* Considera número racional negativo b representado na reta numérica.



Representa na reta numérica $\frac{4}{3} - b$.

- 4.** Considera dois números racionais a e b .

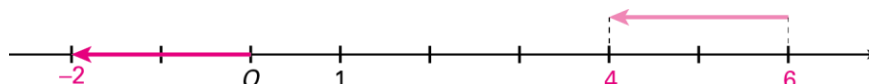
Representa geometricamente $a - b$ para diferentes valores de a e b e enuncia uma regra que preveja o sinal da diferença a partir dos valores de a e b .

Resposta

1.1

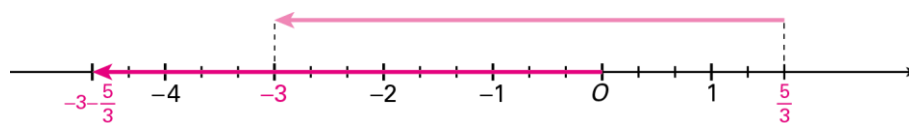


1.2

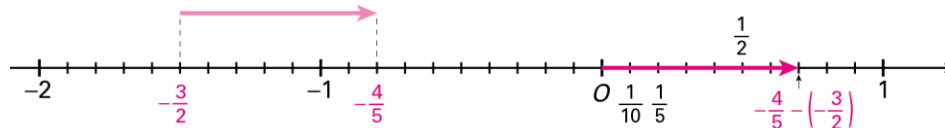


NO6-4.1

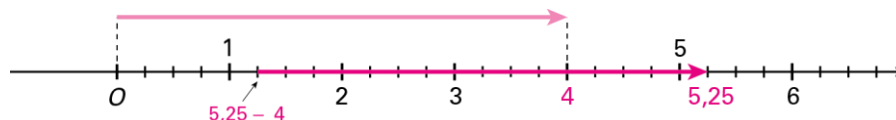
1.3



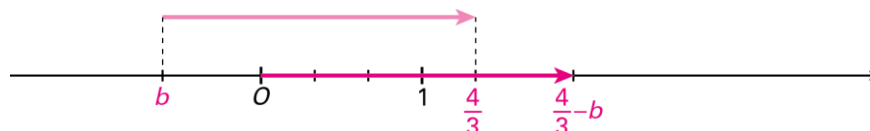
1.4



2.



3.



Ou, utilizando a observação, para representar $\frac{4}{3} - b$ devemos fazer coincidir a extremidade de um segmento orientado com o comprimento e orientação de $[O, B]$ (sendo B o ponto de abscissa b) no ponto de abscissa $\frac{4}{3}$ e ver em que ponto fica a origem, a qual representa exatamente a diferença.



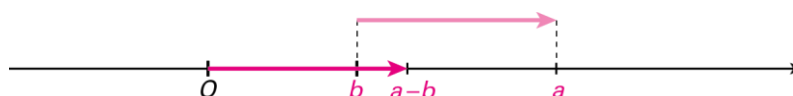
Descritor: 4.1

A diferença $a - b$ é definida como o número racional cuja soma com b é igual a a , ou seja, tal que $(a - b) + b = a$, ou, em alternativa, $b + (a - b) = a$.

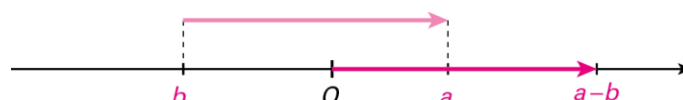
Utilizando esta segunda formulação, os alunos podem considerar o segmento orientado de origem B (de abscissa b) e extremidade A (de abscissa a) e representar um segmento orientado de origem em 0 mas com a mesma orientação e comprimento de $[B, A]$.

A sua extremidade será o ponto de abscissa $a - b$.

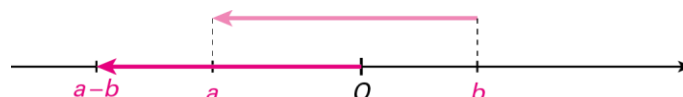
- Exemplo em que $a > b$ e $b > 0$.



- Exemplo em que $a > b$ e $b < 0$.



- Exemplo em que $a < 0 < b$.

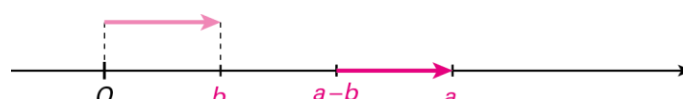


Observação

Como foi referido, é possível entender $a - b$ como o número racional a que se deve adicionar b para obter a , ou seja, tal que $(a - b) + b = a$.

Nesse sentido, para representar na reta numérica o número racional $a - b$, podemos fazer coincidir a extremidade de um segmento orientado com o comprimento e orientação de $[0, B]$ em A e ver em que ponto fica a origem, a qual representa exatamente a diferença, já que, por esta construção, a soma do valor obtido com b é igual a a .

- Exemplo em que $0 < b < a$

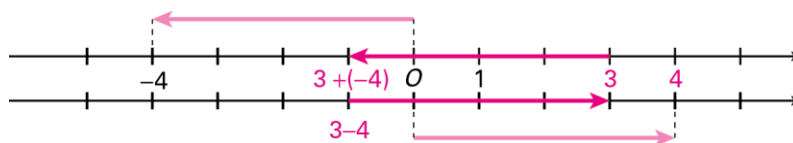


[Parte 2, pág. 141]

- 1.* Representa geometricamente os pontos que representam na reta numérica $3 + (-4)$ e $3 - 4$ e explica por que razão correspondem ao mesmo ponto.

Resposta

1.



Os segmentos orientados que unem o ponto de abscissa 3 ao ponto que representa o resultado de cada uma das operações têm o mesmo comprimento, já que correspondem a números simétricos um do outro.

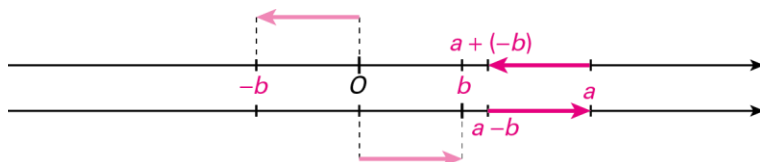
Como os segmentos orientados têm orientações simétricas e, num dos casos, o ponto de abscissa 3 é a origem e, no outro, a extremidade, esses resultados correspondem ao mesmo ponto da reta numérica.

NO6-4.2 a 4.6

Descritores: 4.2 a 4.4

Dados dois números racionais a e b , pode verificar-se geometricamente que $a - b$ é igual à soma de a com o simétrico de b , ou seja, que $a - b = a + (-b)$.

Utiliza-se, na representação de $a - b$, a interpretação considerada na observação feita no texto de apoio ao descritor 4.1.



Note-se que utilizando as considerações feitas em 3.4 e 3.5, o descritor 4.2 fornece um método prático para o cálculo da diferença de dois quaisquer números racionais, por conversão numa soma.

Por exemplo, para calcular $\frac{2}{3} - \frac{7}{6}$, os alunos podem considerar que se trata da soma

$\frac{2}{3} + \left(-\frac{7}{6}\right)$ e concluir o cálculo tal como indicado a propósito dos descritores 3.4 e 3.5:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} - \frac{7}{6} &= \frac{2}{3} + \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{4}{6} + \left(-\frac{7}{6}\right) = -\left(\frac{7}{6} - \frac{4}{6}\right) && (\text{porque } \frac{7}{6} > \frac{4}{6}) \\ &= -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

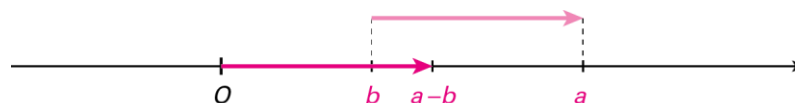
Podemos reconhecer geometricamente que a medida da distância entre dois pontos de abscissa a e b é igual ao módulo da respetiva diferença.

Descritores: 4.5 e 4.6

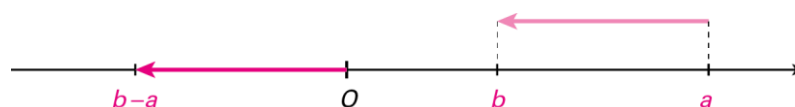
Na primeira figura estão representados dois pontos de abscissa a e b , com $a > b$ e o segmento de reta (a vermelho) cujo comprimento é igual à distância entre os pontos.



Esta distância é igual à distância da origem ao ponto que representa $a - b$



e à distância da origem ao ponto que representa $b - a$.



Por definição de módulo, as medidas destas duas distâncias são dadas respetivamente por $|a - b|$ e $|b - a|$, sendo ambas iguais à distância entre os pontos de abcissas a e b .