



Caderno de apoio às metas curriculares

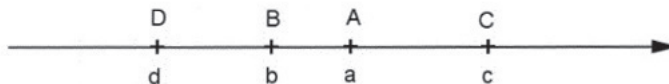
Números e Operações NO6

Números racionais

Descritores 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10 (páginas 33 e 34 do Caderno de Apoio)

Exemplo

Na figura junta está representada a reta numérica e nela estão marcados quatro pontos A, B, C e D de abcissas, respetivamente, a , b , c e d .



Completa com os sinais $<$ e $>$ cada uma das expressões seguintes de forma a serem verdadeiras:

- a. $a \dots c$
- b. $a \dots b$
- c. $d \dots c$
- d. $b \dots d$
- e. $c \dots b$

Resolução

- a. $a < c$
- b. $a > b$
- c. $d < c$
- d. $b > d$
- e. $c > b$

Exemplo*

Completa as seguintes afirmações colocando um dos seguintes sinais $<$, $>$ ou $=$.

- a. Sendo $a < 0$, $b < 0$ e $|a| < |b|$, então $a \dots b$.
- b. Sendo $a > 0$, $b > 0$ e $|a| < |b|$, então $a \dots b$.
- c. Sendo $a < 0$, $b < 0$ e $|a| = |b|$, então $a \dots b$.
- d. Sendo $a > 0$, $b > 0$ e $|a| = |b|$, então $a \dots b$.
- e. Sendo $a < 0$, $b > 0$ então $a \dots b$.
- f. Sendo $a < 0$ e $a > b$ então $|a| \dots |b|$.
- g. Sendo $a > 0$ e $a < b$ então $|a| \dots |b|$.

Resolução

- a. Sendo $a < 0$, $b < 0$ e $|a| < |b|$, então $a > b$
- b. Sendo $a > 0$, $b > 0$ e $|a| < |b|$, então $a < b$
- c. Sendo $a < 0$, $b < 0$ e $|a| = |b|$, então $a = b$
- d. Sendo $a > 0$, $b > 0$ e $|a| = |b|$, então $a = b$
- e. Sendo $a < 0$, $b > 0$ então $a < b$
- f. Sendo $a < 0$ e $a > b$ então $|a| < |b|$
- g. Sendo $a > 0$ e $a < b$ então $|a| < |b|$

Exemplo

Completa as seguintes afirmações colocando um dos seguintes sinais $<$, $>$ ou $=$.

a. $0,2 \dots 0,19$

b. $-3 \dots -5$

c. $\frac{2}{3} \dots \frac{3}{4}$

d. $-7 \dots -2$

e. $-\frac{2}{3} \dots -\frac{3}{4}$

f. $-0,15 \dots -\frac{3}{50}$

Resolução

a. $0,2 > 0,19$

b. $-3 > -5$

c. $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

d. $-7 < -2$

e. $-\frac{2}{3} > -\frac{3}{4}$

f. $-0,15 < -\frac{3}{50}$

Descritor 4.1 (página 39 do Caderno de Apoio)

Exemplo**

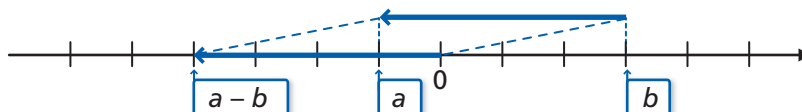
Considera dois números racionais a e b . Representa geometricamente $a - b$ para diferentes valores de a e b e enuncia uma regra que preveja o sinal da diferença a partir dos valores de a e b .

Resolução

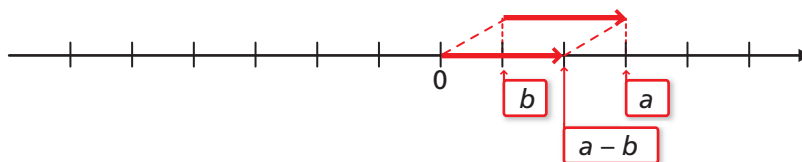
Dados dois números racionais a e b , qual é o valor da sua diferença?

Por definição de diferença, $a - b$ é o número racional cuja soma com b é igual a a .

Representando geometricamente $a - b$ para valores em que a é menor do que b :



Representando geometricamente $a - b$ para valores em que a é maior do que b :



O sinal da diferença será $+$ se:

- $0 < b < a$
- $a < 0, b < 0, a > b$ e $|b| > |a|$
- $a > 0, b < 0$

O sinal da diferença será $-$ se:

- $0 < a < b$
- $a < 0, b < 0, a < b$ e $|a| > |b|$
- $a < 0, b > 0$

Geometria e Medida GM6

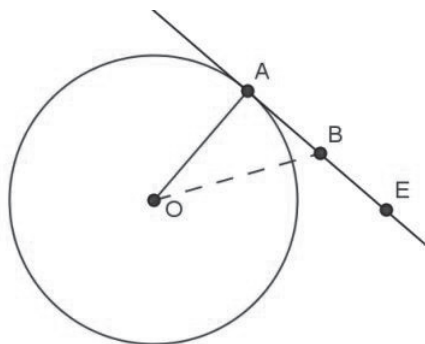
Figuras geométricas planas

Descritor 1.4 [página 41 do Caderno de Apoio]

Exemplo*

Na figura junta está representada uma circunferência de centro O e a reta AE perpendicular ao raio em A .

- Considera B um ponto qualquer da reta AE distinto de A . Justifica que $OB > OA$.
- Justifica que B é um ponto exterior ao círculo de centro O e raio $[OA]$.
- Justifica que A é o único ponto em que a reta AE intersecta o círculo.



Resolução

- Uma reta que passa por um ponto A de uma circunferência e é perpendicular ao raio com extremo nesse ponto tem os restantes pontos a uma distância do centro superior ao raio da circunferência; com efeito, o centro O , o ponto A e outro qualquer ponto B da reta são vértices de um triângulo retângulo em A cuja hipotenusa é o segmento de reta $[OB]$, maior do que qualquer um dos catetos, já que se opõe ao maior dos ângulos do triângulo.
- A distância de B ao centro O é maior do que a distância de A a O , ou seja, é maior do que o raio. Portanto, o ponto B está na parte externa da circunferência (no exterior do círculo).
- A reta $[AE]$, apenas intersecta a circunferência (e o círculo) no ponto A , ou seja, é a reta tangente à circunferência no ponto A , pois quaisquer um dos pontos da reta $[AE]$ é exterior ao círculo.

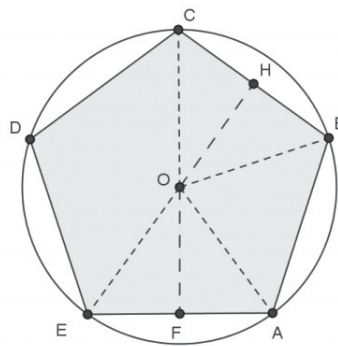
Descritor 1.7 [página 41 do Caderno de Apoio]

Exemplo*

Na figura está representado um pentágono regular inscrito na circunferência de centro O .

O ponto F é o pé da perpendicular tirada de O para $[EA]$ e o ponto H é o pé da perpendicular tirada de O para $[BC]$.

- Justifica que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OE}$.
- Justifica que os triângulos $[OEA]$ e $[OBC]$ são iguais, assim como os ângulos AEO e CBO .
- Justifica que são iguais os ângulos EOF e BOH .
- Utiliza o caso ALA de igualdade de triângulos para justificar que os triângulos $[EOF]$ e $[BOH]$ são iguais e que $\overline{OF} = \overline{OH}$.
- Justifica que os apótemas de um dado polígono regular são todos iguais.



Resolução

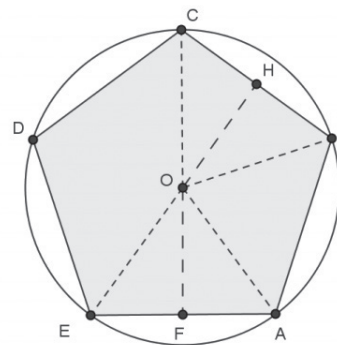
- São raios da circunferência.
- $[EA]$ e $[BC]$ são iguais, pois são lados de um polígono regular inscrito numa circunferência. $[OE]$ é igual a $[OB]$ e $[OA]$ é igual a $[OC]$, pois são raios da circunferência. Então, pelo critério LLL de igualdade de triângulos, são iguais os triângulos $[OEA]$ e $[OBC]$, assim como os ângulos AEO e CBO , por se oporem a lados iguais em triângulos iguais.

- c. Como os ângulos AEO e CBO são iguais e os ângulos OFE e OHB , por serem retos, também são iguais, então os ângulos EOF e BOH são iguais.
- d. Podemos aplicar o critério ALA aos triângulos $[EOF]$ e $[BOH]$ uma vez que os lados $[OE]$ e $[OB]$ são iguais, pois são raios da circunferência, e os respectivos ângulos adjacentes, FEO , HBO , EOF e BOH , são iguais. Como os triângulos são iguais, $\overline{OF} = \overline{OH}$.
- e. Um polígono regular tem os lados todos iguais. Na alínea d, provou-se que os apótemas $[OF]$ e $[OH]$ são iguais. Do mesmo modo, prova-se que todos os outros são iguais a estes.

Exemplo*

Na figura está representado um pentágono regular inscrito na circunferência de centro O .

O ponto F é o pé da perpendicular tirada de O para $[EA]$ e o ponto H é o pé da perpendicular tirada de O para $[BC]$.



- a. Justifica que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OE}$.
- b. Justifica que os triângulos $[OEA]$ e $[OBC]$ têm áreas iguais.
- c. Tendo em conta o resultado da alínea anterior, justifica que os apótemas de um dado polígono regular são todos iguais.

Resolução

- a. $[OA]$ é igual a $[OB]$, $[OB]$ é igual a $[OC]$ e $[OC]$ é igual a $[OE]$, pois são raios da circunferência.
- b. Os lados $[EA]$ e $[BC]$ são iguais, pois são lados de um polígono regular. Os segmentos de reta $[OE]$, $[OA]$, $[OB]$ e $[OC]$ são iguais, pois são raios de uma circunferência. Assim sendo, pelo critério LLL de igualdade de triângulos, os triângulos $[OEA]$ e $[OBC]$ são iguais. Logo, têm áreas iguais.
- c. A medida da área de um triângulo em unidades quadradas é igual a metade do produto da medida de comprimento de uma base pela medida de comprimento da altura correspondente, na unidade pré-fixada. Tomando para bases dos triângulos os lados do polígono, as alturas correspondentes são precisamente os apótemas, pelo que da igualdade das medidas de área e dos comprimentos das bases dos triângulos é possível deduzir as igualdades das medidas de comprimento dos apótemas.

Sólidos geométricos

Descritor 3.1 (página 42 do Caderno de Apoio)

Exemplo

Imagina um prisma e uma pirâmide cujas bases são polígonos com 100 lados. Indica o número de arestas laterais e totais do prisma e da pirâmide e explica o teu raciocínio.

Resolução

Um prisma é um poliedro com duas faces geometricamente iguais (bases do prisma). Nos prismas, o número de arestas é o triplo do número de arestas da base. Num prisma cuja base é um polígono com 100 lados o número de arestas é 300, 200 arestas nas bases e 100 arestas laterais.

Uma pirâmide é um poliedro determinado por um polígono (base da pirâmide), que constitui uma das faces, e por um ponto (vértice da pirâmide), exterior ao plano que contém a base, de tal modo que as restantes faces (faces laterais da pirâmide) são os triângulos determinados pelo vértice da pirâmide e pelos lados do polígono da base. Nas pirâmides, o número de arestas é o dobro do número de arestas da base. Numa pirâmide cuja base é um polígono com 100, lados o número de arestas é 200, 100 arestas da base e 100 arestas laterais.

Descritor 3.2 [página 43 do Caderno de Apoio]**Exemplo***

- a. Indica uma expressão que permita determinar o número de vértices de um prisma dado o número n de lados da base e explica o teu raciocínio.
- b. Indica uma expressão que permita determinar o número de vértices de uma pirâmide dado o número m de lados da base e explica o teu raciocínio.

Resolução

- a. Num prisma, o número de vértices da base é igual ao número de lados da base e o número total de vértices é o dobro do número de vértices da base. Se n for o número de lados do polígono da base $2n$ será o número de vértices do prisma.
- b. Numa pirâmide, o número de vértices da base é igual número de lados da base e o número total de vértices é igual ao número de vértices da base adicionado de uma unidade. Se m for o número de lados do polígono da base, então $m + 1$ será o número de vértices da pirâmide.

Descritor 3.4 [página 43 do Caderno de Apoio]**Exemplo**

Na figura está representado um octaedro. Indica o número de faces, arestas e vértices e verifica a validade da relação de Euler.

Resolução

Nos poliedros convexos, $F + V = A + 2$. Neste caso, $F = 8$, $V = 6$ e $A = 12$. Então, $8 + 6 = 12 + 2$. Logo, verifica-se a relação de Euler.

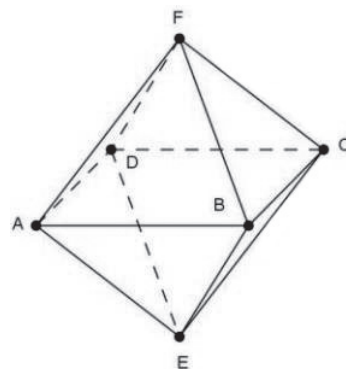
Exemplo*

Considera um prisma e uma pirâmide em que o polígono da base tem 100 vértices.

- a. Indica quantas arestas e quantas faces têm o prisma e a pirâmide e explica o teu raciocínio.
- b. Soma o número de faces com o número de vértices em cada um dos poliedros e compara com o respetivo número de arestas. O que concluis?

Resolução

- a. Prisma:
Se o número de vértices é o dobro do número de vértices da base, então um prisma cujo polígono da base tem 100 vértices tem, no total, 200 vértices e 102 faces (2 bases e 100 faces laterais). O número de arestas é o triplo do número de vértices da base, ou seja, é 300.
- Pirâmide:
Se o número de vértices da base é igual ao número de lados da base e o número total de vértices é igual ao número de vértices da base adicionado de uma unidade, então uma pirâmide com 100 vértices na base tem 101 vértices, no total, e tem 101 faces (1 base e 100 faces laterais). O número de arestas é o dobro do número de vértices da base, ou seja, é 200.
- b. Prisma:
 $102 + 200 = 300 + 2$
Logo, $F + V = A + 2$
- Pirâmide:
 $101 + 101 = 200 + 2$
Logo, $F + V = A + 2$
- Assim, a soma do número de faces com o número de vértices é igual à soma do número de arestas com 2.

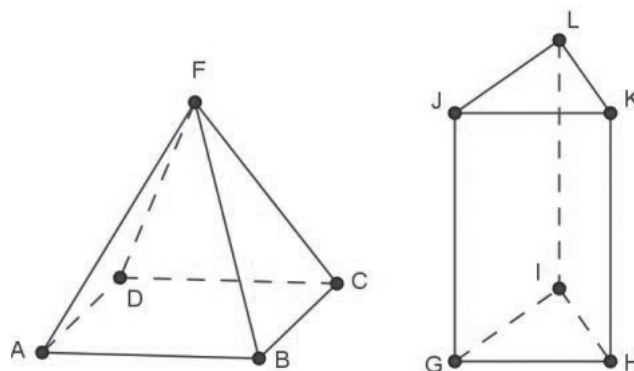


Descritor 4.1 (páginas 43 e 44 do caderno de apoio)

Exemplo (3.1, 3.2)

Considere a figura junta onde estão representados um prisma triangular e uma pirâmide quadrangular.

- Indica o número de arestas e de vértices de cada um dos sólidos.
- Indica que relação existe entre o número de arestas do prisma e o número de arestas da respetiva base.
- Indica que relação existe entre o número total de vértices da pirâmide e o número de vértices da respetiva base.



Resolução

- Pirâmide: 8 arestas e 5 vértices
Prisma: 9 arestas e 6 vértices
- O número de arestas do prisma é o triplo do número de arestas da respetiva base.
- O número total de vértices da pirâmide é igual ao número de vértices da base adicionado de uma unidade.

Exemplo* (3.1, 3.2)

Um prisma e uma pirâmide têm ambos 24 arestas.

- Quantas faces laterais tem o prisma?
- Quantos vértices tem o mesmo prisma?
- Quantas faces laterais tem a pirâmide?

Resolução

- $24 : 3 = 8$ O número de arestas da base é 8. Assim sendo, o número de faces laterais do prisma é igual ao número de arestas da base.
O prisma tem 8 faces laterais.
- Se a base do prisma tem 8 arestas, tem 8 vértices. Como o número de vértices de um prisma é o dobro do número de vértices da base, o prisma tem 16 vértices.
- Uma pirâmide com 24 arestas tem na base um polígono com 12 lados. O número de faces laterais da pirâmide é igual ao número de lados do polígono da base. Assim sendo, a pirâmide tem 12 faces laterais.

Exemplo (3.1, 3.2)**

Uma pirâmide tem o mesmo número de arestas de um prisma.

- Dá exemplos de várias pirâmides e prismas com esta propriedade.
- Qual o menor número de lados que pode ter o polígono da base de cada um deles?

Resolução

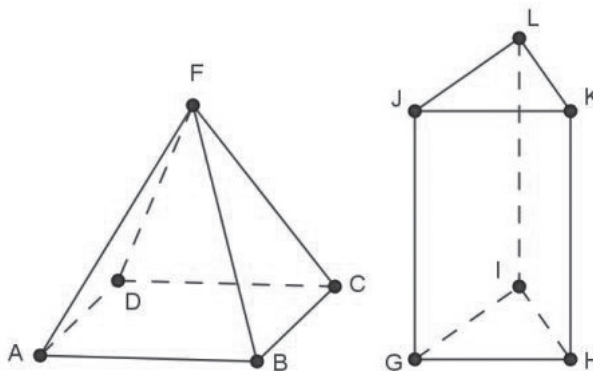
- O prisma quadrangular tem 12 arestas tal como a pirâmide hexagonal.
O prisma hexagonal tem 18 arestas tal como a pirâmide eneagonal.
O prisma octogonal tem 24 arestas tal como a pirâmide dodecagonal.
- O menor número de lados do polígono da base do prisma é 4 e da pirâmide é 6.

Exemplo (3.4)

Considera a figura junta onde estão representados um prisma triangular e uma pirâmide quadrangular.

- a. Completa a tabela junta.

FACES F	VÉRTICES V	ARESTAS A	$F + V$



- b. Que relação existe entre o número de arestas e a soma do número de faces com o número de vértices?

Resolução

- a.

FACES F	VÉRTICES V	ARESTAS A	$F + V$
5	5	8	10
5	6	9	11

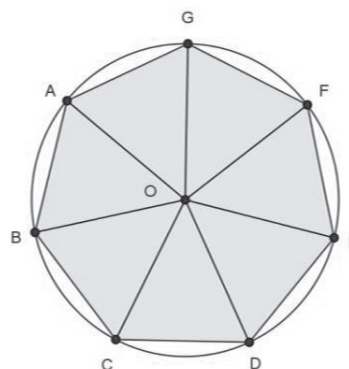
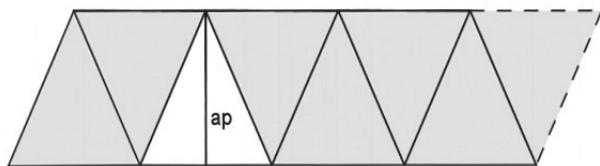
- b. $F + V = A + 2$

Medida

Descritor 5.4 [página 44 do Caderno de Apoio]

Exemplo

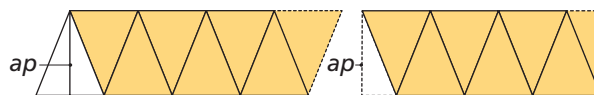
Na figura ao lado está representado um heptágono regular inscrito numa circunferência e dividido em triângulos isósceles. Construindo um paralelogramo com estes triângulos aos quais se juntou um, obtém-se a figura junta.



- a. Constrói, a partir do paralelogramo, um retângulo que tenha área igual à do heptágono sendo um dos lados igual ao semiperímetro e outro igual ao apótema do heptágono. (Sugestão: Decompõe os triângulos das extremidades em dois triângulos iguais, traçando as respetivas alturas, iguais ao apótema do heptágono.)
- b. Conclui que a área do heptágono é igual ao produto do semiperímetro pelo apótema.

Resolução

A partir do paralelogramo construi-se um retângulo.



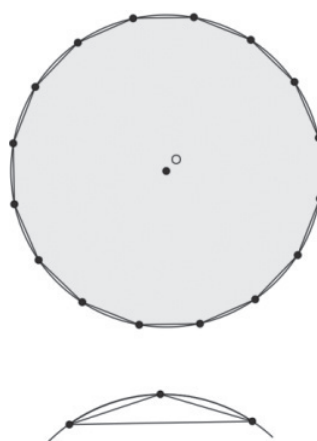
Como a altura desse retângulo é igual ao apótema do heptágono e a base é igual a metade do perímetro do heptágono, conclui-se que a área do retângulo é $A = \frac{P}{2} \times ap$ em que P representa o perímetro do heptágono e ap o seu apótema. Como o retângulo é equivalente ao heptágono, a área do heptágono é igual ao produto do semiperímetro pelo apótema.

Descritor 5.5 (página 44 do Caderno de Apoio)

Exemplo

Na figura ao lado está representado um polígono regular de 16 lados inscrito numa circunferência de centro O e raio r cm.

- a. Considerando que o perímetro do polígono é aproximadamente igual ao perímetro do círculo e que o apótema do polígono é aproximadamente igual ao raio do círculo, determina uma expressão para um valor aproximado da área do polígono envolvendo apenas π e r .
- b. Considera que, na alínea a., em vez de um polígono de 16 lados tínhamos utilizado um polígono regular com 32 lados, substituindo cada lado do polígono anterior por dois como descrito na figura ao lado.
 - b₁. Pensas que o valor obtido em a. é uma melhor aproximação da área do polígono de 32 lados ou do polígono de 16 lados? Porquê?
 - b₂. E o perímetro e o raio do círculo parecem melhores aproximações respetivamente do perímetro e do apótema do polígono de 32 lados ou de 16 lados?
- c. Que fórmula deduzes para a área do círculo supondo que pode ser confundido com um polígono regular nele inscrito com um número suficientemente grande de lados?



Resolução

- a. Se a área de um polígono regular é: $A = \frac{P}{2} ap$
 Se o perímetro do polígono é aproximadamente igual ao perímetro do círculo e se o apótema do polígono é aproximadamente igual ao raio do círculo, então o valor aproximado da área do polígono, envolvendo apenas π e r , será dado pela expressão:

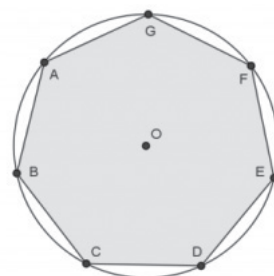
$$A = \frac{2 \times \pi \times r}{2} \times r, \text{ ou seja, } A = \frac{2 \times \pi \times r \times r}{2}. \text{ Logo, } A = \pi r^2$$
- b₁. É uma melhor aproximação do polígono de 32 lados, pois a área do polígono aproxima-se mais da área do círculo.
- b₂. O perímetro e o raio do círculo parecem melhores aproximações, respetivamente, do perímetro e do apótema do polígono de 32 lados.
- c. $A = \pi r^2$

Descritor 6.1 (páginas 45 e 46 do Caderno de Apoio)

Exemplo (5.1)

Na figura está representado um heptágono regular inscrito numa circunferência. Sabe-se que o lado do heptágono mede 2 cm.

- a. Calcula o respetivo perímetro.
- b. Tomando o perímetro do heptágono como valor aproximado do perímetro do círculo, determina um valor aproximado do raio da circunferência.



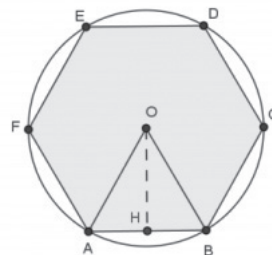
Resolução

- a. $P = 2 \times 7$ $P = 14$ cm
 b. $P = 2 \times \pi \times r$ $14 = 2 \times 3,1416 \times r$ $r = 14 : (2 \times 3,1416)$ $r \approx 2,2$ cm

Exemplo*

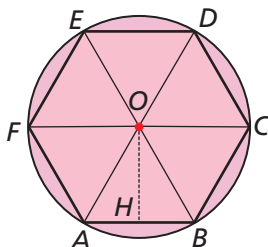
Na figura está representado um hexágono regular inscrito numa circunferência de centro O e raio 2 cm.

- a. Decompõe o hexágono em triângulos em que um dos vértices é O e o lado oposto é um dos lados do polígono.
 b. Mostra que $\widehat{AOB} = 60^\circ$ e determina a amplitude dos ângulos BAO e OBA .
 c. Como classifica esses triângulos quanto aos lados? Justifica.
 d. Supondo que a altura $\overline{OH}$ do triângulo $[ABO]$ mede aproximadamente 1,7 cm, determina valores aproximados da área do triângulo $[ABO]$ e do hexágono $[ABCDEF]$.



Resolução

a.



- b. $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$
 $\widehat{AOB} + \widehat{BAO} + \widehat{ABO} = 180^\circ$
 $\widehat{BAO} + \widehat{ABO} = 120^\circ$
 Logo, $\widehat{BAO} = \widehat{ABO} = 60^\circ$, pois, num triângulo, a lados iguais opõem-se ângulos iguais ($\overline{AO} = \overline{BO}$, pois $[AO]$ e $[BO]$ são raios da circunferência).
 c. São triângulos equiláteros, pois a medida da amplitude de cada um dos seus ângulos internos é 60° e a ângulos iguais opõem-se lados iguais.
 d. $A_{\text{triângulo}} = \frac{b \times a}{2}$, logo, $A_{\text{triângulo}} = \frac{2 \times 1,7}{2}$, ou seja, $A_{\text{triângulo}} = 1,7$ cm²
 $A_{\text{hexágono}} = 6 \times 1,7$, ou seja, $A_{\text{hexágono}} = 10,2$ cm²

Exemplo*

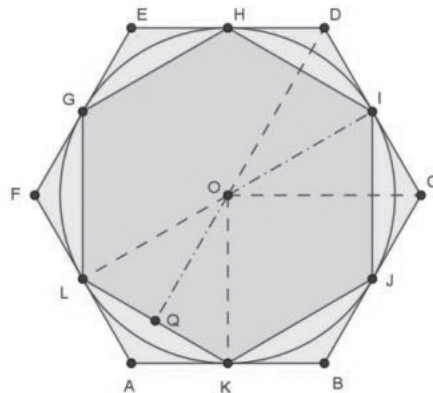
(1.3, 1.6, 5.1, 5.4, 5.5)

Na figura junta estão representados dois hexágonos regulares, um inscrito e o outro circunscrito a uma dada circunferência.

Sabe-se que o raio da circunferência mede 2 cm.

Sabe-se também que $\overline{OD} = 2,3$ cm e $\overline{OQ} = 1,7$ cm, aproximadamente.

- a. Determina um valor aproximado da área do hexágono inscrito na circunferência começando por calcular um valor aproximado da área do triângulo equilátero $[LOK]$.
 b. Determina um valor aproximado da área do hexágono circunscrito à circunferência começando por calcular um valor aproximado da área do triângulo $[DOC]$.
 c. Tendo em conta as alíneas anteriores, aproximadamente entre que valores está compreendida a área do círculo?
 d. Determina a área do círculo tomando 3,1416 para valor aproximado de π e compara o valor obtido com a conclusão da alínea c.



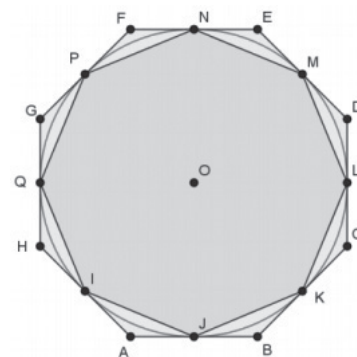
Resolução

- a. $A_{\text{triângulo}} = \frac{2 \times 1,7}{2}$, ou seja, $A_{\text{triângulo}} = 1,7 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{hexágono}} = 6 \times 1,7$, ou seja, $A_{\text{hexágono}} = 10,2 \text{ cm}^2$
- b. $A_{\text{triângulo}} = \frac{2,3 \times 2}{2}$, ou seja, $A_{\text{triângulo}} = 2,3 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{hexágono}} = 6 \times 2,3$, ou seja, $A_{\text{hexágono}} = 13,8 \text{ cm}^2$
- c. Entre $10,2 \text{ cm}^2$ e $13,8 \text{ cm}^2$.
- d. $A = \pi r^2$
 $A = 3,1416 \times 2^2$
 $A = 12,5664 \text{ cm}^2$
 O valor obtido está entre $10,2 \text{ cm}^2$ e $12,8 \text{ cm}^2$.

Exemplo* (1.3, 1.6, 5.1, 5.3)

Na figura está representada uma circunferência de centro O e dois octógonos, um inscrito e outro circunscrito a essa circunferência.

- a. Sabendo que o lado do polígono $[ABCDEFGH]$ mede aproximadamente $2,2 \text{ cm}$, determina um valor aproximado do respectivo perímetro.
- b. Determina o perímetro do octógono inscrito na circunferência sabendo que o lado mede 2 cm .
- c. Tomando o perímetro do octógono inscrito como valor aproximado do perímetro do círculo, determina um valor aproximado do raio da circunferência.
- d. Tomando o perímetro do octógono circunscrito como valor aproximado do perímetro do círculo, determina um valor aproximado do raio da circunferência.
- e. Supondo que o raio da circunferência mede aproximadamente $2,6 \text{ cm}$, obtém valores aproximados por excesso e por defeito de π utilizando os resultados obtidos nas alíneas a. e b.



Resolução

- a. $P = 8 \times 2,2$, ou seja, $P = 17,6 \text{ cm}$
- b. $P = 8 \times 2$, ou seja, $P = 16 \text{ cm}$
- c. $P_{\text{círculo}} = 2\pi r$ $P_{\text{círculo}} = 16 \text{ cm}$, logo, $r = \frac{16}{2 \times 3,1416}$, ou seja, $r \approx 2,5 \text{ cm}$
- d. $P = 17,6 \text{ cm}$, ou seja, $r = \frac{17,6}{2 \times 3,1416}$, logo, $r \approx 2,8 \text{ cm}$
- e. $16 = 2 \times \pi \times 2,6$, logo, $\pi = \frac{16}{2 \times 2,6}$
 $\pi \approx 3,0769 \text{ cm}$
 $17,6 = 2 \times \pi \times 2,6$, logo, $\pi = \frac{17,6}{2 \times 2,6}$
 $\pi \approx 3,3846 \text{ cm}$

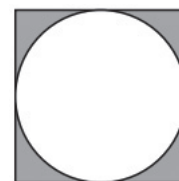
Exemplo (5.5)

Na figura está representado um quadrado de área 4 cm^2 e nele inscrito um círculo. Determina um valor aproximado da área da região sombreada.

Resolução

Se a área do quadrado é 4 cm^2 , então o comprimento do lado é 2 cm . O diâmetro do círculo é 2 cm . O raio do círculo é 1 cm .

$A_{\text{círculo}} = 3,1416 \times 1^2$, ou seja, $A_{\text{círculo}} = 3,1416 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{região sombreada}} = 4 - 3,1416$, logo, $A_{\text{região sombreada}} = 0,8584 \text{ cm}^2$
 Resposta: A região sombreada tem $0,8584 \text{ cm}^2$ de área.

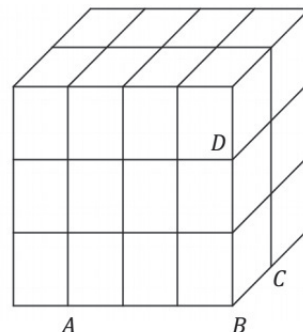


Descritores 7.1 e 7.2 (página 46 do Caderno de Apoio)

Exemplo

Na figura está representado um cubo cuja aresta mede 1 dm e que foi dividido em paralelepípedos retângulos iguais tal como a figura sugere.

- Em quantos paralelepípedos está dividido o cubo?
- Indica o volume do cubo e de cada um dos paralelepípedos em que ficou dividido.
- Quais as dimensões de cada um dos paralelepípedos?
- Como podes calcular o volume de cada paralelepípedo a partir das respetivas dimensões?
- *Sabe-se que os pontos A, B, C e D são vértices de um paralelepípedo $\mathcal{P}$.
 - Calcula, sem os contar, em quantos paralelepípedos está dividido e determina o volume de $\mathcal{P}$ sem utilizar a fórmula.
 - Indica as dimensões de $\mathcal{P}$ e explica como se pode calcular o respetivo volume a partir desses valores.



Resolução

- O cubo está dividido em 24 paralelepípedos.
- $V_{\text{cubo}} = 1 \text{ dm}^3$ e $V_{\text{cada paralelepípedo}} = \frac{1}{24} \text{ dm}^3$
- Dimensões de cada paralelepípedo: $\frac{1}{4} \text{ dm}$, $\frac{1}{3} \text{ dm}$, $\frac{1}{2} \text{ dm}$.
- Calculando o produto das três dimensões:

$$V_{\text{cada paralelepípedo}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24} \text{ dm}^3$$
 - $3 \times 1 \times 2 = 6$
O paralelepípedo está dividido em 6 paralelepípedos.

$$\frac{6}{24} = \frac{1}{4} \text{ dm}^3$$
 - As dimensões de $\mathcal{P}$ são $\frac{3}{4} \text{ dm}$; $\frac{1}{2} \text{ dm}$; $\frac{2}{3} \text{ dm}$.

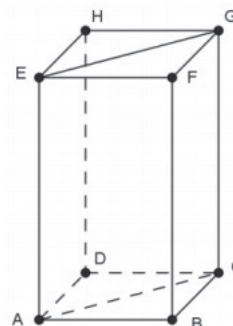
$$V = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \text{ dm}^3$$

Descritores 7.3, 7.4 e 7.5 (página 47 do Caderno de Apoio)

Exemplo*

Na figura está representado um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c decomposto em dois prismas triangulares.

- Determina o volume do paralelepípedo.
- Admitindo que os dois prismas triangulares são iguais, determina o volume de cada um deles.
- Calcula a área da base de um dos prismas e do paralelepípedo.
- Deduz das alíneas anteriores uma fórmula para o cálculo do volume do prisma conhecida a área da base e a altura.



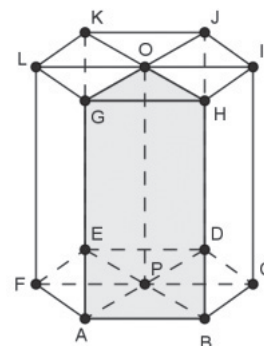
Resolução

- a. $V_{\text{paralelepípedo}} = a \times b \times c$
- b. $V_{\text{cada prisma}} = \frac{1}{2} a \times b \times c$
- c. $A_{\text{base do prisma}} = \frac{a \times b}{2}$
 $A_{\text{base do paralelepípedo}} = a \times b$
- d. $V_{\text{prisma}} = \frac{1}{2} a \times b \times c = \frac{a \times b}{2} \times c = \text{Área da base} \times \text{altura do prisma}$
 $V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \times a$

Exemplo

Considera um prisma hexagonal regular decomposto em prismas triangulares regulares tal como ilustra a figura.

- a. Sabendo que a área da base de cada um dos prismas triangulares mede 6 cm^2 e que a respetiva altura mede 8 cm , determina o volume de cada um dos prismas triangulares.
- b. Determina a área da base do prisma hexagonal.
- c. Determina o volume do prisma hexagonal de duas formas: tendo em conta a decomposição em prismas triangulares e utilizando diretamente a fórmula.



Resolução

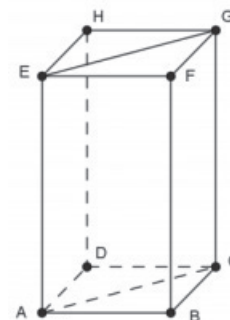
- a. $V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \times \text{altura}$
 $V_{\text{prisma triangular}} = 6 \times 8$
 $V_{\text{prisma triangular}} = 48 \text{ cm}^3$
- b. $A_{\text{base do prisma hexagonal}} = 6 \times 6$
 $A_{\text{base do prisma hexagonal}} = 36 \text{ cm}^2$
- c. $V_{\text{prisma hexagonal}} = 6 \times 48$
 $V_{\text{prisma hexagonal}} = 288 \text{ cm}^3$
 $V_{\text{prisma hexagonal}} = 36 \times 8$
 $V_{\text{prisma hexagonal}} = 288 \text{ cm}^3$

Descritor 8.1 (página 47 do Caderno de Apoio)

Exemplo

Na figura está representado um paralelepípedo retângulo decomposto em dois prismas triangulares.

- a. Sabendo que o volume do paralelepípedo é igual a 17 cm^3 , indica o volume de cada um dos prismas triangulares.
- b. Supondo que a altura do paralelepípedo mede $4,25 \text{ cm}$, qual a área da base de cada um dos prismas triangulares?



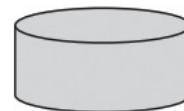
Resolução

- a. $V_{\text{paralelepípedo}} = 17 \text{ cm}^3$
 $V_{\text{prisma triangular}} = \frac{17}{2}$
 $V_{\text{prisma triangular}} = 8,5 \text{ cm}^3$
- b. $A_{\text{base do prisma triangular}} = \frac{V_{\text{prisma}}}{\text{altura}}$
 $A_{\text{base do prisma triangular}} = \frac{8,5}{4,25}$
 $A_{\text{base do prisma triangular}} = 2 \text{ cm}^2$

Exemplo* (7.6)

Na figura está representado um cilindro de volume igual a 30 cm^3 .

Determina um valor aproximado da altura do cilindro sabendo que o diâmetro da base mede 5 cm .



Resolução

$$V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \times \text{altura} \text{ e } A_{\text{base cilindro}} = \pi r^2$$

$$A_{\text{base cilindro}} = \pi \times 2,5^2, \text{ ou seja, } A_{\text{base cilindro}} = 19,635 \text{ cm}^2$$

$$30 = 19,635 \times \text{altura, ou seja, altura} = \frac{30}{19,635}$$

$$\text{altura} \approx 1,53 \text{ cm}$$

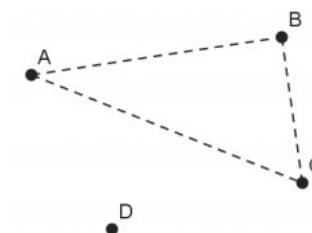
Isometrias no plano

Descritores 9.2 e 9.3 (página 48 do Caderno de Apoio)

Exemplo

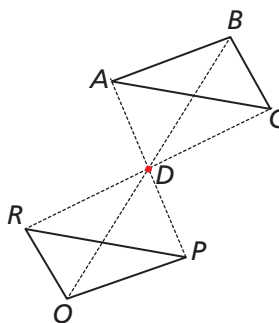
Considera o triângulo de vértices A , B e C e um ponto D distinto de A , B e C .

- Constrói as imagens de A , B e C pela reflexão central de centro D e designa-as respetivamente por P , Q e R .
- Completa as seguintes igualdades, utilizando vértices do triângulo $[ABC]$:
 $\overline{PQ} = \dots\dots\dots$; $\overline{PR} = \dots\dots\dots$; $\overline{QR} = \dots\dots\dots$
- Utilizando o critério de igualdade de ângulos, completa as seguintes afirmações utilizando apenas as letras P , Q e R :
 O ângulo ABC é igual ao ângulo..... e o ângulo..... é igual ao ângulo BCA .



Resolução

a.



- $\overline{PQ} = \overline{AB}$; $\overline{PR} = \overline{AC}$; $\overline{QR} = \overline{BC}$
- O ângulo ABC é igual ao ângulo PQR e o ângulo QRP é igual ao ângulo BCA .

Descritores 9.5 e 9.7 (página 49 do Caderno de Apoio)

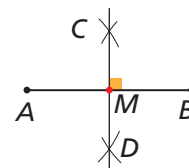
Exemplo*

Desenha um segmento de reta $[AB]$ e constrói a respetiva mediatriz utilizando régua e compasso. Justifica o procedimento utilizado.

Resolução

Com o compasso, com centro em A , traçamos dois arcos de circunferência, um acima e outro abaixo de $[AB]$, com o mesmo raio. Esse raio deve ser superior a metade de $\overline{AB}$. Com centro em B e o mesmo raio, traçamos dois arcos que interseitam os anteriores nos pontos C e D , equidistantes de A e de B .

Traçando a reta CD , obtemos a mediatriz do segmento de reta $[AB]$. O ponto M de interseção do segmento de reta e da sua mediatriz é o ponto médio do segmento de reta.



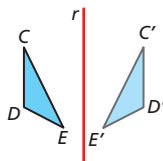
Descritor 9.10 (página 49 do Caderno de Apoio)

Exemplo*

Na figura junta está representado um triângulo $[CDE]$ e uma reta r .

- Constrói os transformados C' , D' e E' respetivamente, de cada um dos vértices C , D e E do triângulo na reflexão axial de eixo r .
- Prova que o triângulo $[C'D'E']$ é igual ao triângulo $[CDE]$.

Resolução

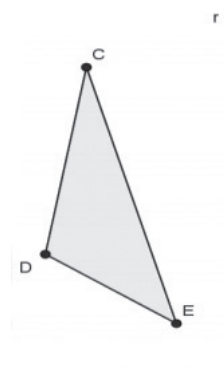


$\overline{CD} = \overline{C'D'}$ pois $\overline{C'D'}$ é o transformado de $\overline{CD}$ pela reflexão axial de eixo r .

$\overline{DE} = \overline{D'E'}$ pois $\overline{D'E'}$ é o transformado de $\overline{DE}$ pela reflexão axial de eixo r .

$\overline{CE} = \overline{C'E'}$ pois $\overline{C'E'}$ é o transformado de $\overline{CE}$ pela reflexão axial de eixo r .

Logo, pelo critério LLL, os triângulos $[CDE]$ e $[C'D'E']$ são iguais.



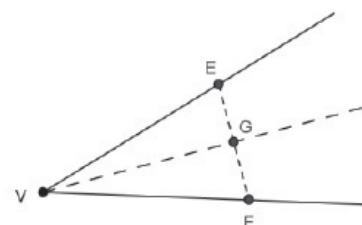
Descritor 9.13 (página 50 do Caderno de Apoio)

Exemplo*

Na figura está representado o ângulo convexo FVE e a respetiva bissetriz.

Os pontos E e F estão à mesma distância de V .

- Une os pontos E e F por um segmento de reta. Prova que os triângulos $[EVG]$ e $[FVG]$ são iguais, onde G designa a interseção da bissetriz de FVE com o segmento de reta $[EF]$.
- Justifica que $\overline{EG} = \overline{GF}$.
- Justifica que EF é perpendicular a VG .
- Justifica que o ponto E é imagem de F pela reflexão de eixo VG .



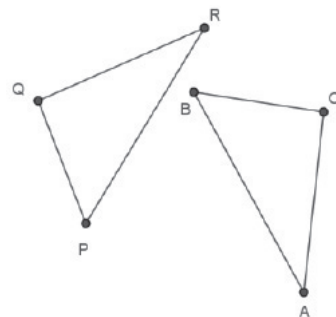
Resolução

- Pelo critério LAL de igualdade de triângulos, os triângulos $[EVG]$ e $[FVG]$ são iguais, pois os ângulos GVE e FVG são iguais uma vez que a semirreta $\overrightarrow{VG}$ é a bissetriz do ângulo FVE , os lados $[EV]$ e $[FV]$ são iguais (já que $EV = FV$) e o lado $[VG]$ é comum aos dois triângulos.
- Pelo que foi dito na alínea anterior, é possível concluir que $\overline{EG} = \overline{GF}$.
- Os ângulos GVE e GVF são iguais, pois opõem-se a lados iguais. Como são iguais e suplementares, cada um dos ângulos mede 90° e, assim sendo, são ângulos retos, donde se conclui que EF é perpendicular a VG .
- Uma vez que $\overline{EG} = \overline{GF}$ e $[EF]$ é perpendicular a VG , então os pontos E e F são imagem um do outro pela reflexão de eixo que contém a bissetriz $\overrightarrow{VG}$.

Descritor 9.18 (página 51 do Caderno de Apoio)

Exemplo

Na figura, $\overline{AB} > \overline{AC} > \overline{BC}$ e $\overline{PR} > \overline{RQ} > \overline{QP}$. Sabe-se que cada um dos pontos A, B e C é transformado por uma dada rotação num dos pontos P, Q ou R. Indica qual o transformado de cada um dos pontos A, B e C por essa rotação.



Resolução

Os pontos P, Q e R são os transformados, respetivamente, dos pontos B, C e A.

Descritor 10.1 (página 51 do Caderno de Apoio)

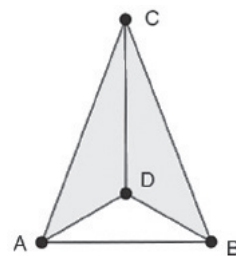
Exemplo (9.5)

Na figura está representado um segmento de reta $[AB]$ e os pontos C e D pertencentes à mediatriz de $[AB]$.

Justifica que os triângulos $[ADC]$ e $[BDC]$ são iguais.

Resolução

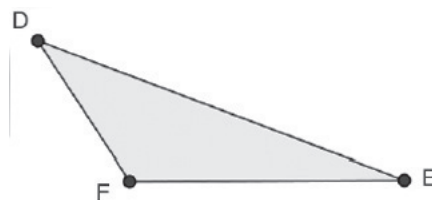
Pelo critério LLL de igualdade de triângulos, prova-se que os triângulos $[ADC]$ e $[BDC]$ são iguais. Como D pertence à mediatriz de $[AB]$, então D é equidistante dos pontos A e B e, assim, $\overline{AD} = \overline{BD}$. $[CD]$ é um lado comum aos dois triângulos e sabe-se que $\overline{AC} = \overline{CB}$, pois o ponto C pertence também à mediatriz de $[AB]$.



Exemplo* (9.2, 9.3)

Desenha um triângulo qualquer como, por exemplo, o triângulo $[DEF]$ representado na figura.

- Determina o ponto médio de um dos lados, por exemplo, do lado $[DE]$ e designa-o por M.
- Constrói o transformado de cada um dos vértices do triângulo pela reflexão central de centro M e designa a imagem de F por G.
- Prova que o quadrilátero $[DFEG]$ é um paralelogramo.

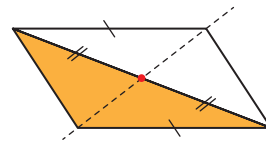


Resolução

Os segmentos de reta $[GM]$ e $[MF]$ são iguais, pois M é o ponto médio do segmento de reta $[FG]$.

Na reflexão de centro M, os pontos D e E são imagens um do outro, assim como os pontos F e G.

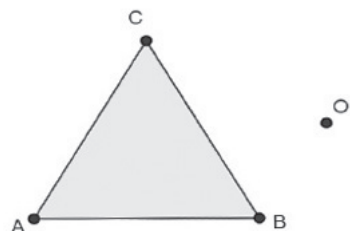
Logo, $\overline{DG} = \overline{FE}$ e $\overline{DM} = \overline{ME}$. Então, pelo critério ALA de igualdade de triângulos, os triângulos $[HGD]$ e $[HFE]$ são iguais. Logo, os ângulos $\angle EDG$ e $\angle DEF$ são iguais. Como são ângulos alternos internos determinados em cada par de lados opostos por uma secante, os lados opostos $[DG]$ e $[FE]$ do quadrilátero são paralelos. Do mesmo modo se prova que $[FD]$ e $[EG]$ são paralelos, pelo que $[DFEG]$ é um paralelogramo.



Exemplo (9.18)

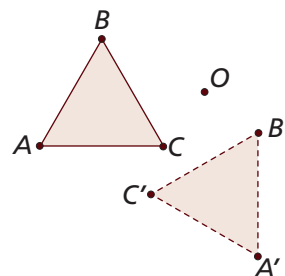
Na figura junta está representado um triângulo equilátero $[ABC]$.

- Constrói as imagens A', B' e C' dos pontos A, B e C pela rotação de centro O, sentido positivo e amplitude 90° .
- Justifica que o triângulo $[A'B'C']$ é equilátero.



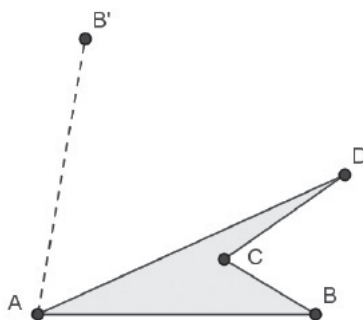
Resolução

- b. Como uma rotação é uma isometria, os dois triângulos são iguais. Assim sendo, o triângulo $[A'B'C']$ também é equilátero.



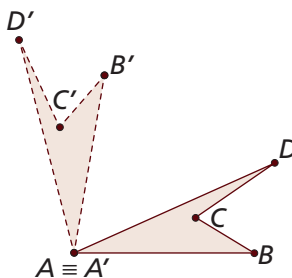
Exemplo*

Na figura está representado um quadrilátero côncavo $[ABCD]$ e o ponto B' que é o transformado do ponto B por uma rotação de centro em A .



Desenha a figura no teu caderno e, utilizando compasso e régua, determina os transformados dos restantes vértices do polígono.

Resolução



Descritor 10.2 (página 52 do Caderno de Apoio)

Exemplo

- a. Indica as simetrias de reflexão e de rotação dos seguintes quatro polígonos: triângulo equilátero, quadrado e pentágono e hexágono regulares.
- b. Será que podes conjecturar uma regra que preveja o número de simetrias de reflexão e de rotação para um polígono regular com n lados? Justifica.

Resolução

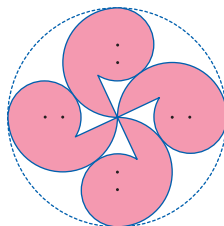
- a. O triângulo equilátero tem três eixos de simetria de reflexão e três simetrias de rotação (120° , 240° e 360°).
O quadrado tem quatro eixos de simetria de reflexão e quatro simetrias de rotação (90° , 180° , 270° e 360°).
O pentágono regular tem cinco eixos de simetria de reflexão e cinco simetrias de rotação (72° , 144° , 216° , 288° e 360°).
O hexágono regular tem seis eixos de simetria de reflexão e seis simetrias de rotação (60° , 120° , 180° , 240° , 300° e 360°).
- b. Conjectura: Um polígono regular de n lados tem n simetrias de reflexão e n simetrias de rotação.

Exemplo

Desenha uma figura que tenha um centro de simetria mas que não tenha eixo de simetria e justifica.

Resolução

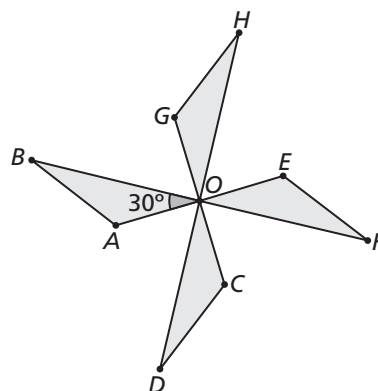
A figura tem um centro de simetria, mas não tem nenhum eixo de simetria. Tem quatro simetrias de rotação, com centro no centro da figura: 90° , 180° , 270° e 360° .



Exemplo

Na figura está representado um triângulo $[OAB]$ e os seus transformados em sucessivas rotações de centro O e amplitude 90° .

- a. Identifica o transformado de B na rotação de centro O e amplitude:
- a_1 180° ;
 - a_2 90° e sentido negativo;
 - a_3 270° e sentido positivo.
- b. Descreve as simetrias de rotação que identificas nesta figura.

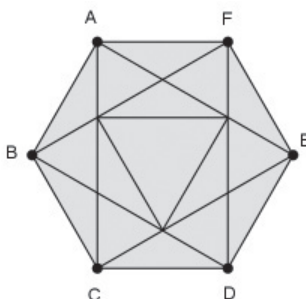


Resolução

- a. a_1 F
 a_2 H
 a_3 H
- b. Simetria de rotação de centro O e amplitude 90° ; simetria de rotação de centro O e amplitude 180° ; simetria de rotação de centro O e amplitude 270° ; simetria de rotação de centro O e amplitude 360° .

Exemplo

O hexágono $[ABCDEF]$ representado na figura é regular.



- a. Indica o número de eixos de simetria da figura.
- b. Descreve as simetrias de rotação que identificas nesta figura.

Resolução

- a. 3 eixos de simetria de reflexão.
- b. Simetrias de rotação de centro no centro da figura com as amplitudes seguintes: 120° , 240° e 360° .

Organização e tratamento de dados OTD6

Representação e tratamento de dados

Descritor 1.3 (página 59 do Caderno de Apoio)

Exemplo

Das seguintes variáveis estatísticas indica as que são qualitativas:

- Idade;
- Ano de escolaridade;
- Altura;
- Nacionalidade;
- Meio de transporte utilizado no percurso casa-escola;
- Tempo médio gasto no percurso casa-escola;
- Código postal.

Resolução

Variáveis qualitativas: ano de escolaridade; nacionalidade; meio de transporte utilizado no percurso casa-escola; código postal.

Descritor 2.2 (página 59 do Caderno de Apoio)

Exemplo

Considera o seguinte conjunto de dados: 7, 6, 5, 1, 4, 2, 6, 5, 6, 3.

Indica se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

- A moda é igual à amplitude;
- A média é um número inteiro;
- Se acrescentarmos o número 7 aumenta a amplitude;
- Se acrescentarmos o número 7 aumenta a média;
- Se acrescentarmos o número 7 aumenta a moda;
- Se retirarmos o número 3 diminui a amplitude;
- Se retirarmos o número 3 diminui a média;
- Se retirarmos o número 3 diminui a moda.

Resolução

- A moda é igual à amplitude; V
- A média é um número inteiro; F
- Se acrescentarmos o número 7 aumenta a amplitude; F
- Se acrescentarmos o número 7 aumenta a média; V
- Se acrescentarmos o número 7 aumenta a moda; F
- Se retirarmos o número 3 diminui a amplitude; F
- Se retirarmos o número 3 diminui a média; V
- Se retirarmos o número 3 diminui a moda. F

NOTAS[illegible]