



Manuel Marques e Paula Ferreira

Componentes do projeto:

Manual do aluno
Caderno de atividades
Livromédia



A Santillana publicou a obra Projeto **Desafios** Matemática 7.º ano em dois volumes para reduzir o peso a transportar pelos alunos. Os dois volumes não podem ser vendidos separadamente.



EDIÇÃO REVISTA
DE ACORDO COM AS NOVAS
M E T A S
CURRICULARES

MANUAL CERTIFICADO pela Faculdade
de Ciências da Universidade de Lisboa,
nos termos da legislação em vigor



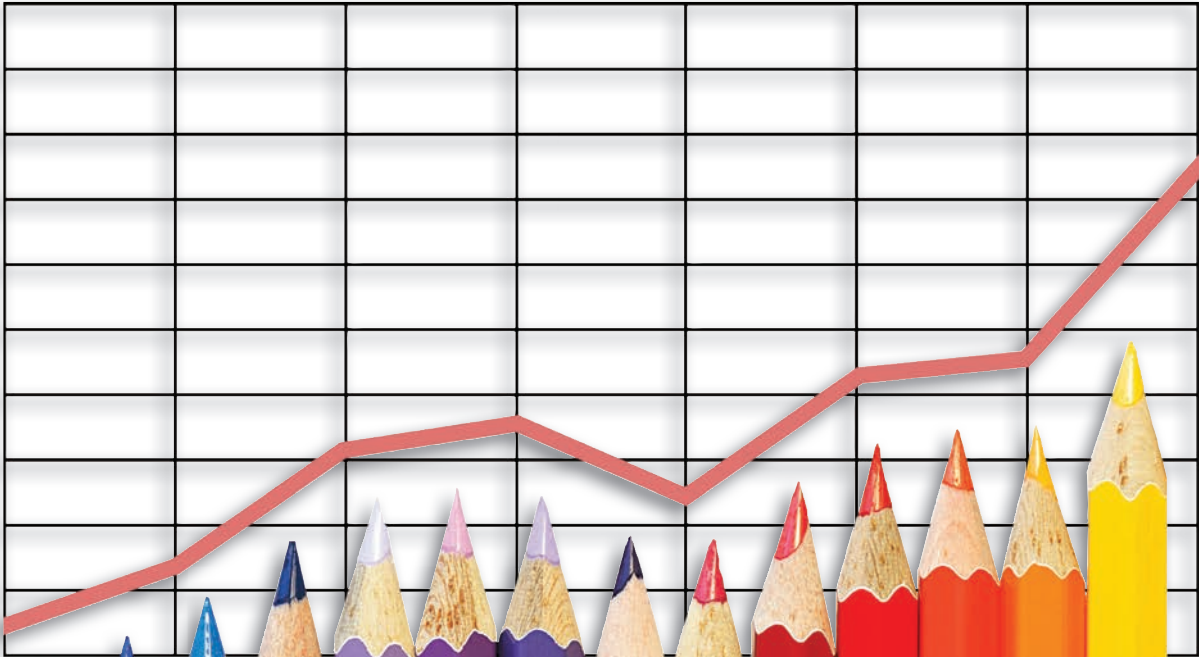
Conforme o novo
Acordo Ortográfico
da língua portuguesa

Projeto **Desafios**

Matemática Volume 1

Projeto **Desafios**

SANTILLANA CONSTÂNCIA



EDIÇÃO REVISTA
DE ACORDO COM AS NOVAS
M E T A S
CURRICULARES

MANUAL CERTIFICADO
pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Projeto **Desafios**

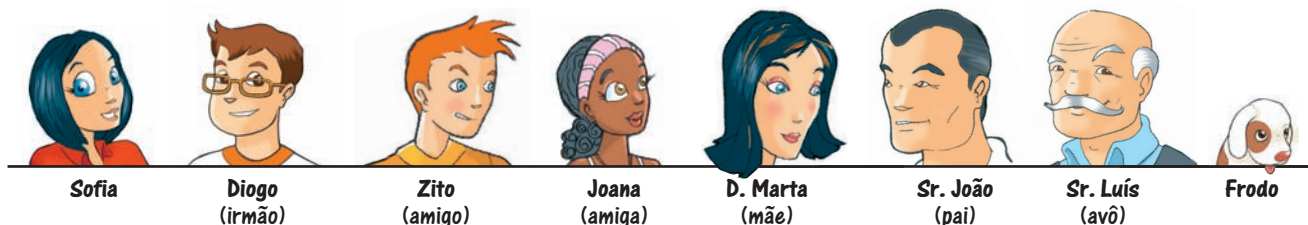


Matemática

Volume 1

7^o ano

As personagens deste manual vão apresentar-te o modelo didático.



Sofia

Diogo
(irmão)

Zito
(amigo)

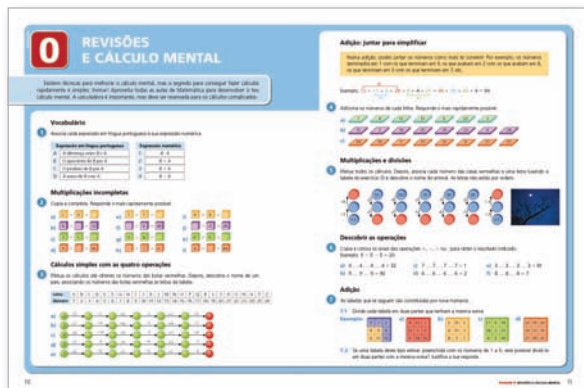
Joana
(amiga)

D. Marta
(mãe)

Sr. João
(pai)

Sr. Luís
(avô)

Frodo



Unidade 0 Nesta unidade particular, podes rever técnicas para melhorar o cálculo mental e recordar alguns conceitos fundamentais do 2.º Ciclo logo no início do 7.º ano. Esta unidade inclui uma ficha de diagnóstico.

Abertura de unidade e atividades iniciais

No início de cada unidade, encontra-se uma fotografia relacionada com o tema, o índice de conteúdos e uma página de atividades iniciais para relembrares os conceitos necessários à aprendizagem da matéria nova.

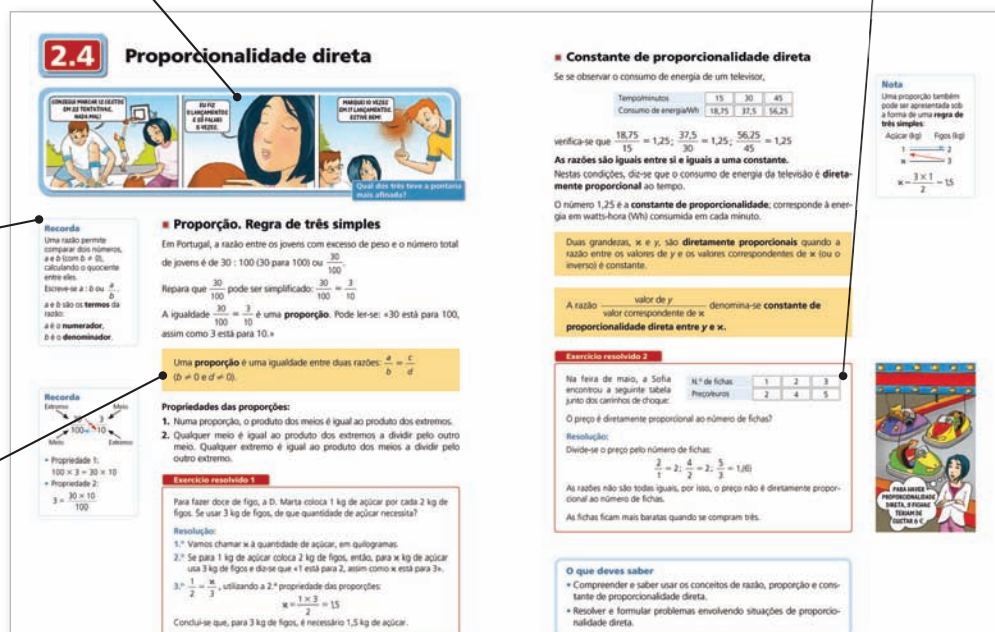


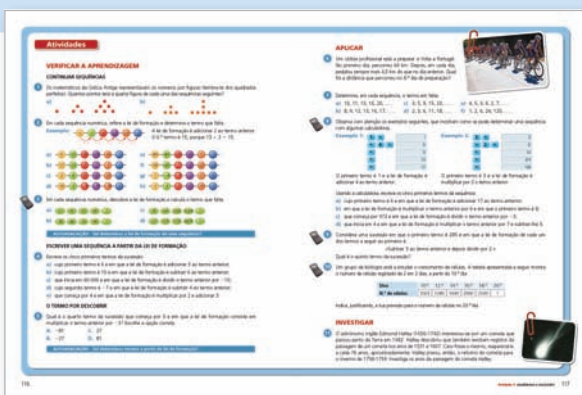
Banda desenhada que ilustra uma situação relacionada com o dia a dia e que funciona como situação de partida para a abordagem dos conteúdos.

Exercícios resolvidos passo a passo.

Na parte lateral de cada página de teoria, existem caixas com notas, informação sobre a matéria dada e curiosidades.

Conteúdos teóricos destacados.





Porquê aprender Matemática?	6
5 Conselhos... para o sucesso em Matemática	8

0 REVISÕES E CÁLCULO MENTAL 10

Ficha de diagnóstico	17
----------------------------	----

1 NÚMEROS RACIONAIS 18



Atividades iniciais	19
---------------------------	----

1.1 Adição algébrica de racionais 20

Dos naturais aos racionais	
Adição	
Subtração	
Adição algébrica	
Atividades	24

1.2 Multiplicação 28

Multiplicação de números racionais	
Propriedades da multiplicação	
Atividades	31

1.3 Divisão 34

Divisão de números racionais	
Atividades	36

1.4 Potências de base racional e expoente natural 38

Potências de base positiva	
Potências de base negativa	
Atividades	40

1.5 Operações com potências 42

Operações com potências	
Prioridade das operações	
Atividades	45

1.6 Raiz quadrada 48

Raiz quadrada	
Propriedades da raiz quadrada	
Atividades	52

1.7 Raiz cúbica 54

Raiz cúbica	
Propriedades da raiz cúbica	
Potências e raízes	
Atividades	58
Síntese	60
Atividades globais	62
Autoavaliação	66
Estratégias para a resolução de problemas e jogos	68
Investigar	70

2

FUNÇÕES

72



Atividades iniciais 73

2.1

Conceito de função 74

Noção de função

Domínio, contradomínio, objeto e imagem

Operações com funções

Atividades 77

2.2

Gráfico de uma função 80

O plano cartesiano

Gráfico cartesiano de uma função

Atividades 82

2.3

Função linear e função afim 84

Função linear

Função afim

Atividades 87

2.4

Proporcionalidade direta 90

Proporção. Regra de três simples

Constante de proporcionalidade direta

Atividades 92

2.5

Proporcionalidade direta como função 94

Expressão algébrica

Representação gráfica

Atividades 97

Síntese 100

Atividades globais 102

Autoavaliação 106

Estratégias para a resolução de problemas e jogos 108

Investigar 110

3

SEQUÊNCIAS E SUCESSÕES

112



Atividades iniciais 113

3.1

Sequências e sucessões 114

Termos e ordem

Lei de formação

Atividades 116

3.2

Termo geral 118

Termo geral. Representação

Sucessões de múltiplos naturais

Atividades 120

3.3

Termos de uma sequência e de uma sucessão 122

Escrever termos de uma sucessão a partir do termo geral

Determinar um termo de uma ordem qualquer

Gráficos de sequências

Atividades 124

Síntese 126

Atividades globais 128

Autoavaliação 132

Estratégias para a resolução de problemas e jogos 134

Investigar 136

SOLUÇÕES 138

ANEXOS 151

Porquê aprender Matemática?

Nos últimos anos aprendeste Matemática na escola, tal como todas as pessoas da tua idade e tal como os teus pais, na sua juventude. Por que motivo é a Matemática tão importante que é ensinada na escola?

1 Uma ciência muito antiga

Há milhares de anos que o Homem inventa Matemática, porque ela é necessária. Em todo o mundo, existem pessoas que têm a investigação matemática como profissão e que criam nova Matemática todos os dias. O que aprendes na escola é apenas uma parte muito pequena.



Papiro de Rhind, 1650 a. C., Egito.



2 Situações práticas no dia a dia

A Matemática é necessária no nosso dia a dia para: confirmar um troco; saber quantas páginas de um livro nos falta ler; utilizar a escala de um mapa; calcular uma percentagem; fazer uma medição; entender gráficos e tabelas; etc.

3 O raciocínio lógico

O cérebro, como os músculos, precisa de ser exercitado! Estudar Matemática é como fazer «ginástica mental». Se a prática de um desporto permite ter uma boa condição física, também o estudo da Matemática melhora o raciocínio. Ao usarem-se números ou figuras geométricas, desenvolvem-se capacidades e descobrem-se novas maneiras de pensar.

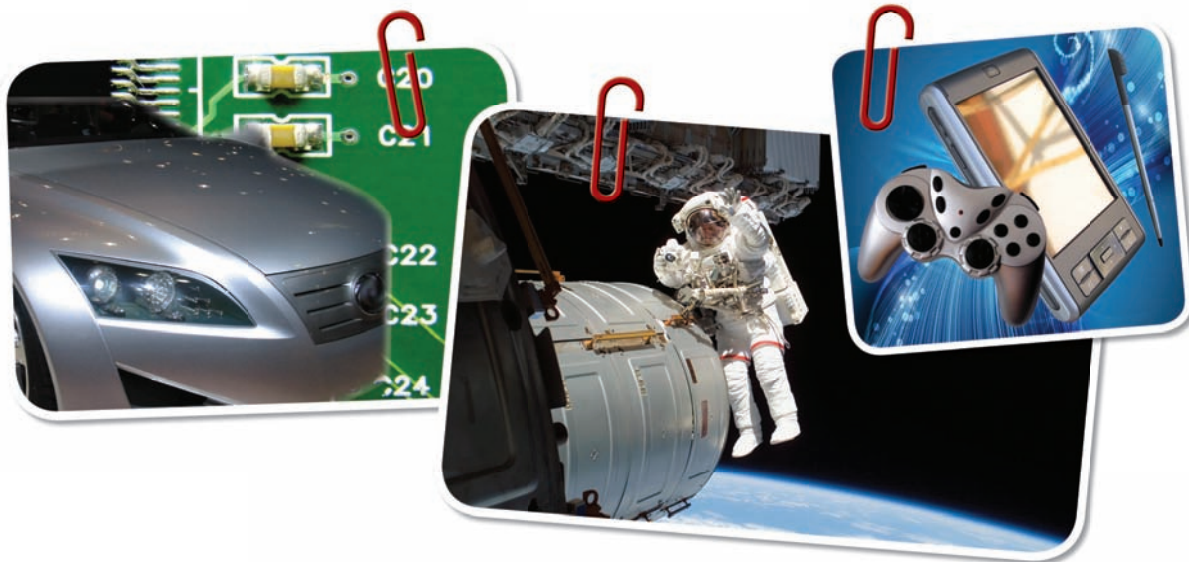
4 Beleza visual

A Matemática teve sempre uma forte presença nas artes. O arquiteto, o artesão, o pintor e o escultor utilizam os seus conhecimentos de Geometria para criar obras visualmente belas, através de simetrias, proporções, padrões, etc.



5 Progresso tecnológico

A nossa sociedade consome imensa Matemática: os computadores, a Internet, a televisão ou o telemóvel, por exemplo, nunca teriam sido possíveis sem uma enorme quantidade de Matemática.



A Ciência e a Tecnologia estão sempre a exigir Matemática. Ela está presente na Astronomia, na Física, na Informática, na Economia, na Engenharia, na Biologia, etc. Quem trabalha nessas áreas deve ser bom em Matemática.

6 Uma linguagem comum

Em todo o mundo se aprende Matemática, por isso existe uma parte da Matemática que pertence à linguagem comum. Quem não tem esses conhecimentos fica em desvantagem em relação aos outros. Hoje em dia, são cada vez mais os domínios em que a Matemática é necessária.

7 Divertimento

Finalmente, a Matemática também é utilizada como divertimento. São muitos os jogos de estratégia, enigmas, problemas de lógica ou quebra-cabeças que recorrem à Matemática. Sabias que o jogo Magic The Gathering foi inventado por um matemático?

CONCLUSÃO: Sempre que te perguntares «Para que é que isto serve?», pensa no que acabaste de ler e lembra-te de que mesmo o que não parece útil hoje pode vir a sê-lo amanhã.



5 Conselhos... para o sucesso em Matemática

Não existe nenhum segredo nem nenhuma fórmula mágica para ter sucesso na disciplina de Matemática. É preciso ter uma atitude positiva, trabalhar e nunca desistir! É importante também a maneira como se começa o ano: não penses muito se eras ou não um bom aluno a Matemática no ano anterior e preocupa-te em ser um bom aluno no ano que vai começar!

1 Fazer da Matemática um jogo!

Pensa num «quebra-cabeças» que tenhas tentado resolver numa revista, na televisão ou na Internet, por exemplo. Não foi um desafio? Não ficaste alegre e orgulhoso por o ter resolvido? A maioria dos exercícios matemáticos podem ser encarados como jogos, é uma questão de atitude! Se gostas de jogos, gostas de Matemática!



2 Entender a utilidade da Matemática!

Imagina que estás a fazer um passeio de bicicleta e tens um furo: é um problema! Se nunca ninguém te ensinou a pôr um remendo e a encher um pneu, então estás numa situação complicada... A Matemática não vai compor o teu pneu, mas vai ajudar-te no teu quotidiano. Existem muitas situações concretas que neste momento não serias capaz de resolver (porque ninguém te ensinou) e que vais aprender a solucionar ao longo deste ano!



3 Compreender e não decorar!

Quando compras um jogo, demoras algum tempo no início a perceber as regras, aprender os comandos, memorizar algumas técnicas, etc. Não precisas de decorar todas as jogadas possíveis. Nas aulas de Matemática, acontece o mesmo. Experimenta trocar a preocupação de «lembrar» pela atitude de compreender! Depois, só precisarás realmente de decorar algumas coisas. Se te preocupares apenas em memorizar, o mais certo é trocares tudo e esqueceres rapidamente!



4 Estudar com regularidade!

Se praticas algum desporto, sabes que para obter bons resultados é preciso treinar e praticar com regularidade. Nesse sentido, a Matemática também é um desporto! Não te preparas para um jogo de futebol ou para uma audição de um instrumento apenas na véspera, ou mesmo alguns dias antes! Aproveita ao máximo cada aula e não te esqueças de estudar em casa. É fundamental!

5 Não ter receio!

Não digas que a Matemática é difícil antes de experimentares e dares o teu melhor! Em muitos jogos, és obrigado a pensar tanto como num exercício de Matemática, e isso não te assusta! Um jogo só é interessante quando não é demasiado fácil; acontece o mesmo com um exercício de Matemática! Se já terminaste um jogo difícil ou resolveste um exercício que, à partida, parecia complicado, sabes que é uma sensação gratificante!



0

REVISÕES
E CÁLCULO MENTAL

Existem técnicas para melhorar o cálculo mental, mas o segredo para conseguir fazer cálculos rapidamente é simples: treinar! Aproveita todas as aulas de Matemática para desenvolver o teu cálculo mental. A calculadora é importante, mas deve ser reservada para os cálculos mais complexos.

Vocabulário

- 1 Associa cada expressão em língua portuguesa à sua expressão numérica.

Expressão em língua portuguesa	Expressão numérica
A A diferença entre 8 e 4.	1 $8 : 4$
B O quociente de 8 por 4.	2 $8 + 4$
C O produto de 8 por 4.	3 8×4
D A soma de 8 com 4.	4 $8 - 4$

Multiplicações incompletas

- 2 Copia e completa. Responde o mais rapidamente possível.

a) $2 \times 9 =$

e) $7 \times 7 =$

i) $4 \times 8 =$

b) $8 \times = 72$

f) $\times 6 = 48$

j) $\times 4 = 28$

c) $3 \times 5 =$

g) $5 \times 8 =$

k) $6 \times 6 =$

d) $9 \times = 36$

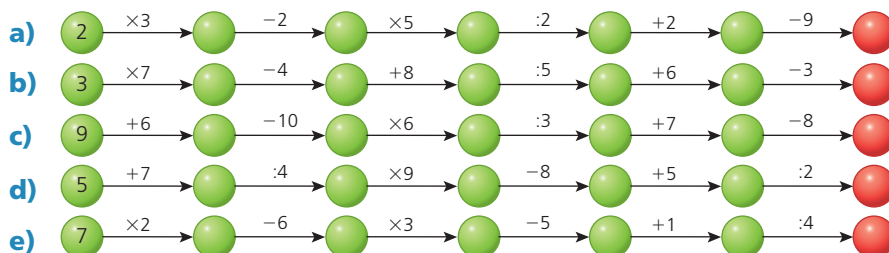
h) $\times 7 = 0$

l) $8 \times = 64$

Cálculos simples com as quatro operações

- 3 Efetua os cálculos até obteres os números das bolas vermelhas. Depois, descobre o nome de um país, associando os números das bolas vermelhas às letras da tabela.

Letra	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26



Adição: juntar para simplificar

Numa adição, podes juntar os números como mais te convém! Por exemplo, os números terminados em 1 com os que terminam em 9, os que acabam em 2 com os que acabam em 8, os que terminam em 3 com os que terminam em 7, etc.

Exemplo: $12 + 17 + 3 + 28 + 9 + 4 + 21 = 40 + 20 + 30 + 4 = 94$

- 4 Adiciona os números de cada linha. Responde o mais rapidamente possível.

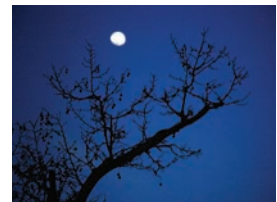
a)

b)

c)

Multiplicações e divisões

- 5 Efetua todos os cálculos. Depois, associa cada número das casas vermelhas a uma letra (usando a tabela do exercício 3) e descobre o nome do animal. As letras não estão por ordem.



Descobrir as operações

- 6 Copia e coloca os sinais das operações $+$, $-$, $\times$ ou $:$ para obteres o resultado indicado.
Exemplo: $5 \times 5 - 5 = 20$

- a) $4 \dots 4 \dots 4 \dots 4 = 32$ c) $7 \dots 7 \dots 7 \dots 7 = 1$ e) $3 \dots 3 \dots 3 \dots 3 = 81$
b) $9 \dots 9 \dots 9 = 90$ d) $6 \dots 6 \dots 6 \dots 6 = 2$ f) $8 \dots 8 \dots 8 = 7$

Adição

- 7 As tabelas que se seguem são constituídas por nove números.

7.1 Divide cada tabela em duas partes que tenham a mesma soma.

Exemplo:

3	7	2
4	9	8
6	11	10

a)

8	13	7
12	1	9
6	14	10

b)

2	15	5
4	11	1
8	3	7

c)

17	9	19
18	3	11
4	5	16

d)

23	19	20
14	22	16
27	18	25

7.2 Se uma tabela deste tipo estiver preenchida com os números de 1 a 9, será possível dividi-la em duas partes com a mesma soma? Justifica a tua resposta.

Um calendário com números

8

Vamos associar um número a cada dia do ano. Esse número é o **produto** dos números correspondentes ao dia e ao mês.

Por exemplo: 3 de abril $\rightarrow 3 \times 4 = 12$;

14 de dezembro $\rightarrow 14 \times 12 = 168$.

8.1 Determina o número que corresponde aos dias 15 de fevereiro, 12 de março, 25 de maio, 6 de julho, 9 de setembro e 25 de dezembro.

8.2 Descobre:

- a) as sete datas do calendário que correspondem ao número 24;
- b) as dez datas que correspondem a um número maior do que 300;
- c) os cinco números aos quais correspondem apenas duas datas.



Critérios de divisibilidade

2 Um número é **divisível por 2** quando o algarismo das unidades é 0, 2, 4, 6 ou 8.

Por exemplo, são divisíveis por 2: 12, 36, 74, 528, 780, etc.

3 Um número é **divisível por 3** quando a soma dos seus algarismos é um múltiplo de 3.

Por exemplo, 531 é divisível por 3, porque $5 + 3 + 1 = 9$, e 9 é múltiplo de 3.

47 não é divisível por 3, porque $4 + 7 = 11$, mas 11 não é múltiplo de 3.

4 Um número é **divisível por 4** quando o número formado pelos últimos dois algarismos é múltiplo de 4.

Por exemplo, 768 é divisível por 4, porque 68 é múltiplo de 4

(68 é par e a sua metade, 34, também é par).

5 Um número é **divisível por 5** quando o algarismo das unidades é 0 ou 5.

Por exemplo, são divisíveis por 5: 30, 75, 210, 1025, etc.

9 Um número é **divisível por 9** quando a soma dos seus algarismos é um múltiplo de 9.

Por exemplo, 846 é divisível por 9, porque $8 + 4 + 6 = 18$ e 18 é múltiplo de 9.

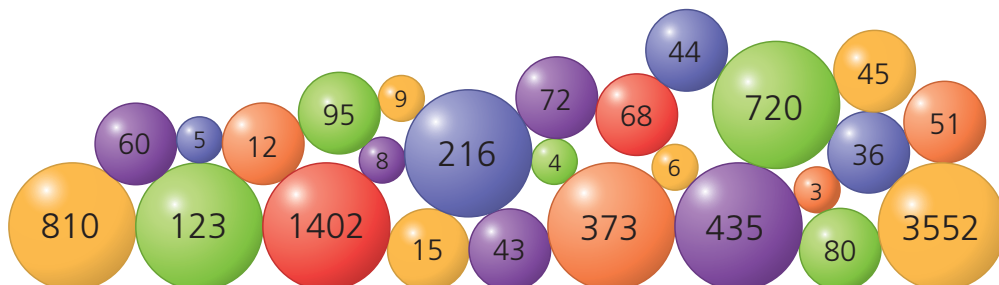
10 Um número é **divisível por 10** quando o algarismo das unidades é 0.

Por exemplo, são divisíveis por 10: 60, 200, 1340, etc.

9

Dos seguintes números, indica os que são divisíveis:

- a) por 2;
- b) por 3;
- c) por 4;
- d) por 5;
- e) por 9;
- f) por 10.



Divisores em comum

10

Coloca um número inteiro de 1 a 9 em cada um dos cubos de maneira que o resultado das multiplicações seja o indicado. Não podes repetir números.

a) $\begin{array}{c} \text{cubo} \times \text{cubo} = 6 \\ \times \quad \times \\ \text{cubo} \times \text{cubo} = 35 \\ \hline \text{14} \quad \text{15} \end{array}$

b) $\begin{array}{c} \text{cubo} \times \text{cubo} = 45 \\ \times \quad \times \\ \text{cubo} \times \text{cubo} = 32 \\ \hline \text{40} \quad \text{36} \end{array}$

c) $\begin{array}{c} \text{cubo} \times \text{cubo} = 21 \\ \times \quad \times \\ \text{cubo} \times \text{cubo} = 54 \\ \hline \text{27} \quad \text{42} \end{array}$

d) $\begin{array}{c} \text{cubo} \times \text{cubo} = 12 \\ \times \quad \times \\ \text{cubo} \times \text{cubo} = 6 \\ \hline \text{24} \quad \text{3} \end{array}$

e) $\begin{array}{c} \text{cubo} \times \text{cubo} \times \text{cubo} = 72 \\ \times \quad \times \quad \times \\ \text{cubo} \times \text{cubo} \times \text{cubo} = 60 \\ \times \quad \times \quad \times \\ \text{cubo} \times \text{cubo} \times \text{cubo} = 84 \\ \hline \text{21} \quad \text{192} \quad \text{90} \end{array}$

f) $\begin{array}{c} \text{cubo} \times \text{cubo} \times \text{cubo} = 48 \\ \times \quad \times \quad \times \\ \text{cubo} \times \text{cubo} \times \text{cubo} = 180 \\ \times \quad \times \quad \times \\ \text{cubo} \times \text{cubo} \times \text{cubo} = 42 \\ \hline \text{60} \quad \text{96} \quad \text{63} \end{array}$

g) $\begin{array}{c} \text{cubo} \times \text{cubo} \times \text{cubo} = 120 \\ \times \quad \times \quad \times \\ \text{cubo} \times \text{cubo} \times \text{cubo} = 54 \\ \times \quad \times \quad \times \\ \text{cubo} \times \text{cubo} \times \text{cubo} = 56 \\ \hline \text{45} \quad \text{126} \quad \text{64} \end{array}$

Dividir facilmente

Dividir por 2 é calcular a metade.

Por exemplo: $2000 : 2 = 1000$.

Dividir por 4 é calcular a metade da metade.

Por exemplo: $120 : 4 = 30$, porque metade de 120 é 60 e metade de 60 é 30.

Dividir por 10 equivale a deslocar a vírgula uma unidade para a esquerda. Se o número for inteiro e terminar em zero, retira-se o último zero.

Por exemplo: $1248 : 10 = 124,8$; $3500 : 10 = 350$.

Dividir por 5 é dividir por 10 e multiplicar por 2.

Por exemplo: $130 : 5 = 26$, porque $130 : 10 = 13$ e $13 \times 2 = 26$.

11

Efetua todos os cálculos. Depois, associa os números obtidos a uma letra (usando a tabela do exercício 3) e descobre a palavra-mistério. As letras não estão por ordem.

a) uma região portuguesa:

$\begin{array}{ccccccc} \text{100} & \text{8} & \text{50} & \text{48} & \text{70} & \text{60} & \text{30} & \text{20} \\ :5 & :8 & :10 & :4 & :5 & :4 & :6 & :2 \\ \hline ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$

c) uma cidade no Sul:

$\begin{array}{ccccccc} \text{36} & \text{10} & \text{52} & \text{80} & \text{30} & \text{81} & \text{80} & \text{150} \\ :2 & :10 & :4 & :5 & :2 & :9 & :4 & :10 \\ \hline ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$

b) uma cidade no Centro:

$\begin{array}{ccccc} \text{190} & \text{84} & \text{18} & \text{35} & \text{110} \\ :10 & :4 & :2 & :7 & :5 \\ \hline ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$

d) uma ilha açoriana:

$\begin{array}{ccccc} \text{90} & \text{24} & \text{38} & \text{45} & \text{75} & \text{24} \\ :5 & :4 & :2 & :9 & :5 & :2 \\ \hline ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$

- A calculadora pode permitir encontrar regularidades que, depois, ajudam no cálculo mental.
- Antes de utilizares a calculadora, tenta sempre primeiro ter uma ideia do resultado. Se o número obtido na máquina estiver muito afastado daquele em que tinhas pensado, poderás ter usado mal a calculadora.

Valores aproximados. Estimativas

Usa-se o cálculo mental no dia a dia para fazer estimativas. Quando se vai às compras, por exemplo, convém ter uma ideia da despesa, antes de pagar.

- 12** Observa os artigos que se seguem e indica uma estimativa do valor a pagar.



Arredondamentos

Quando se calcula $23 : 7$, por exemplo, obtém-se um resultado que não é inteiro: 3,285714... Não é possível calcular o valor exato da divisão de 23 por 7. Tem de se apresentar um valor aproximado.

Caso se trate de um preço, poderá ser necessário indicar um valor aproximado com duas casas decimais (que correspondem aos cêntimos). Para isso, tem de ser feito um arredondamento.

Regras de arredondamento:

- Mantém-se o algarismo da casa decimal escolhida se o algarismo da casa decimal seguinte for 0, 1, 2, 3 ou 4.
- Aumenta-se uma unidade ao algarismo da casa decimal escolhida se o algarismo da casa decimal seguinte for 5, 6, 7, 8 ou 9.

Exemplos de arredondamento com uma casa decimal (1 c. d.):

- $6,739221 \approx 6,7$
A 1.ª casa decimal é um 7, mas como a seguir vem um 3, então, mantém-se o 7.
- $3,285714 \approx 3,3$
A 1.ª casa decimal é um 2, mas como a seguir vem um 8, então, o 2 aumenta para 3.
- $12,96207 \approx 13,0$
A 1.ª casa decimal é um 9, mas como a seguir vem um 6, então, o 9 aumenta para 10 e faz com que 12,9 passe para 13,0.

Exemplos de arredondamento com duas casas decimais (2 c. d.):

- $6,739221 \approx 6,74$
A 2.ª casa decimal é um 3, mas como a seguir vem um 9, então, o 3 aumenta para 4.
- $3,285714 \approx 3,29$
A 2.ª casa decimal é um 8, mas como a seguir vem um 5, então, o 8 aumenta para 9.
- $12,96207 \approx 12,96$
A 2.ª casa decimal é um 6, mas como a seguir vem um 2, então, mantém-se o 6.

Recorda:

O símbolo $\approx$ lê-se «aproximadamente igual a».

6,7 é um valor aproximado de 6,739221 **por defeito**, porque $6,7 < 6,739221$.

6,74 é um valor aproximado de 6,739221 **por excesso**, porque $6,74 > 6,739221$.

- 13** Arredonda às décimas, ou seja, de modo que o número fique com 1 casa decimal:

- a) 4,3845 c) 7,6529 e) 0,46267
b) 5,23673 d) 23,9075 f) 3,9721

- 14** Arredonda às centésimas, ou seja, de modo que o número fique com 2 casas decimais:

- a) 8,3642 c) 0,3333 e) 0,135653
b) 2,5471 d) 1,6666 f) 10,2985

O resultado deve fazer sentido!

Quando se resolvem problemas, é importante verificar se a solução obtida faz sentido ou não. Por exemplo, o valor 35 cm não seria razoável para a altura de um adulto.

- 15** Associa cada um dos valores à distância que lhe corresponde.

Valores aproximados/metros		Distâncias	
A	2350	1	Comprimento de uma cama.
B	25	2	Distância entre o Porto e Aveiro.
C	0,3	3	Altitude do Pico.
D	2	4	Comprimento de um campo de ténis.
E	70 000	5	Altura de uma garrafa de água de 1,5 L.

Adição, subtração, multiplicação e divisão

Em muitas situações do nosso dia a dia, temos de resolver pequenos problemas. Para tal, é importante perceber qual é a operação necessária ou, mais frequentemente, quais são as operações necessárias.

- 16** A Joana vive com o pai, a mãe, dois gatos, três papagaios e cinco peixes. Qual é o número total de pernas e patas que possuem em conjunto?

- 17** Numa floreira existem 3 filas, cada fila com 3 vasos, cada vaso com 3 flores, cada flor com 3 pétalas. Quantas pétalas existem no total?



- 18** O pai do Zito comprou-lhe um skate que custou 84 €. Pagou com cinco notas de 20 €. Quanto dinheiro recebeu de troco?

- 19** O Zito comprou quatro sacos de 5 kg de ração para os seus cães. Se os cães comem por dia 400 g, para quantos dias servirá a ração?

- 20** Nos iniciados de um clube de futebol, estão inscritos 19 jogadores. Nos juvenis, estão inscritos 6 jogadores a mais do que nos iniciados. Ao todo, quantos jogadores estão inscritos?

- 21** A D. Marta vai comprar um computador novo que custa 1200 € e, aproveitando uma campanha de retoma, vai devolver o seu computador antigo por 250 €. Sabendo que a D. Marta vai pagar em 10 meses sem juros, quanto pagará por mês?

Outros problemas

- 22** Numa mesa quadrada podem sentar-se 4 pessoas (uma em cada lado). Se juntarmos 12 mesas para formar uma mesa longa e retangular, quantas pessoas se podem sentar nessa nova mesa?

- 23** Na receita de uma tarte, a Sofia leu que eram necessários 6 ovos para fazer essa tarte para 4 pessoas. Quantos ovos são necessários para preparar a tarte para 10 pessoas?

- 24** O Sr. João foi à oficina fazer uma revisão ao carro e mudar o óleo. A mudança de óleo custou 59 € e a mão de obra custou 30 € por hora. O Sr. João teve um desconto de 10 € e pagou no total 229 €. Quanto tempo esteve o carro na oficina?

- 25** Um golfinho nada durante 2 horas e 30 minutos, a uma velocidade de 30 km/h. Depois, regressa pelo mesmo caminho, mas a uma velocidade de 25 km/h. Quanto tempo demora a viagem, ao todo?

- 26** Um comerciante transporta 4 televisores e 8 rádios. Cada televisor pesa tanto como 3 rádios e, no total, o comerciante transporta 120 kg. Quanto pesa cada televisor?



FICHA DE DIAGNÓSTICO

Cálculo mental

- 1 Calcula:
- a) a soma de 75 com 35.
 - b) o produto de 8 por 6.
 - c) a diferença entre 34 e 25.
 - d) o quociente de 60 por 4.
 - e) $2 + 3 \times 4$
 - f) $7 - 3 + 5 - 10$

Potências

- 2 Escreve $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ sob a forma de uma potência.
- 3 Calcula: $4^2 + 2^3$.

Frações

- 4 Desenha um retângulo (com as dimensões que quiseres) e pinta $\frac{2}{5}$ da sua área.
- 5 Calcula o valor das seguintes expressões numéricas.
- a) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$
 - b) $\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$
 - c) $\frac{5}{3} \times \frac{8}{9}$

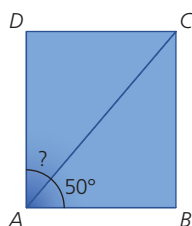
Sequências

- 6 Em cada caso, indica o número que se segue.

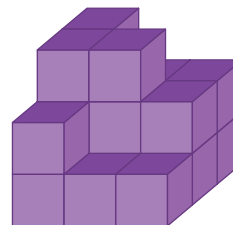
- a) 1 — 2 — 4 — 7 — 11 — ?
- b) 2 — 4 — 8 — 16 — 32 — ?

Geometria

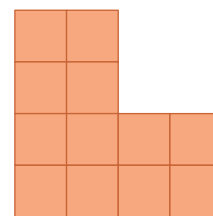
- 7 No retângulo seguinte, está traçada uma diagonal. Quanto mede, em graus, o ângulo $\angle DAC$?



- 8 Quantos cubos pequenos faltam para completar o cubo maior?



- 9 Copia a figura e divide-a em quatro parcelas geometricamente iguais. Os limites das parcelas devem seguir os limites dos quadrados.



Problemas

- 10 48 carneiros podem ser divididos em 3 grupos de 16 carneiros, por exemplo. Escreve todas as outras maneiras de dividir 48 carneiros em vários grupos, todos com o mesmo número de carneiros.
- 11 O Diogo demora 24 minutos para andar a pé de casa até à escola e regressar de autocarro. Quando vai e vem de autocarro, precisa de apenas 12 minutos. Quanto tempo demoraria a viagem se fosse toda feita a pé?

Cálculo

- 12 Usando quatro vezes o número 3, as operações $+$, $-$, $\times$, $:$ e os parênteses que quiseres, podes obter vários números.

Por exemplo, para obter o número 10:

$$3 \times 3 + \frac{3}{3} = 10 \quad \text{ou} \quad \frac{33 - 3}{3} = 10$$

Obtém agora os números 0, 1, 2, 3, 4 e 5 desta maneira.

NÚMEROS RACIONAIS



Atividades iniciais 19

1.1 Adição algébrica de racionais 20

Dos naturais aos racionais

Adição

Subtração

Adição algébrica

Atividades 24

1.2 Multiplicação 28

Multiplicação de números racionais

Propriedades da multiplicação

Atividades 32

1.3 Divisão 34

Divisão de números racionais

Atividades 36

1.4 Potências de base racional e expoente natural 38

Potências de base positiva

Potências de base negativa

Atividades 40

1.5 Operações com potências 42

Operações com potências

Prioridade das operações

Atividades 45

1.6 Raiz quadrada 48

Raiz quadrada

Propriedades da raiz quadrada

Atividades 52

1.7 Raiz cúbica 54

Raiz cúbica

Propriedades da raiz cúbica

Potências e raízes

Atividades 58

Síntese 60

Atividades globais 62

Autoavaliação 66

Estratégias para a resolução
de problemas e jogos 68

Investigar 70



EM QUATRO CAPITALS EUROPEIAS, AS TEMPERATURAS MÍNIMAS REGISTRADAS NUM DETERMINADO DIA FORAM:

LISBOA	PARIS	AMSTERDÃO	ATENAS
-1°C	-5°C	-2°C	$+3^{\circ}\text{C}$

NAS SEMANA SEGUINTE, VERIFICOU-SE UM AUMENTO DE 4°C NAS DUAS PRIMEIRAS CIDADES REFERIDAS E UMA DESCIDA DE 3°C NAS OUTRAS DUAS.

Quais foram, então, as temperaturas mínimas?

Recorda

1. Um número racional positivo a pode ser representado por $+a$.

2. O **valor absoluto** (ou **módulo**) de um número é a distância entre a origem e o ponto que lhe está associado na reta numérica. O valor absoluto de um número é **sempre positivo ou nulo**.

Exemplos:

$$|+3| = 3$$

$$|-6| = 6$$

$$|0| = 0$$

3. Diz-se que dois números são **simétricos** se a sua soma é zero. O simétrico de a representa-se por $-a$.

Exemplo: $-\frac{5}{2}$ e $+\frac{5}{2}$ são simétricos. Logo:

$$-\left(+\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{2}$$

$$-\left(-\frac{5}{2}\right) = +\frac{5}{2}$$

4. Não é permitido escrever dois sinais seguidos. Têm de estar sempre separados por parênteses.

Dos naturais aos racionais

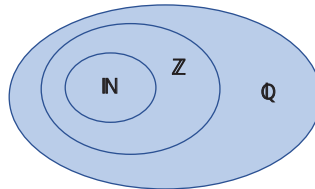
O conjunto dos números naturais representa-se por $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

O conjunto dos números inteiros relativos, ou, simplesmente, inteiros, designa-se por $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

O conjunto dos números racionais designa-se por $\mathbb{Q}$. É formado pelo zero, pelos números racionais positivos e pelos respetivos simétricos.



Tem-se também:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \{\text{números fracionários}\}$$

Adição

TENHO $\frac{6}{3}$ DE EURO NO BOLSO DIREITO E 3 € NO BOLSO ESQUERDO. ENTÃO, AO TODO, TENHO 5 €.



$$\frac{6}{3} + 3 = \frac{6}{3} + \frac{9}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

ESTOU A DEVER 1 € AO DIOGO E 2 € À SOFIA. ENTÃO, AO TODO, DEVO 3 €.



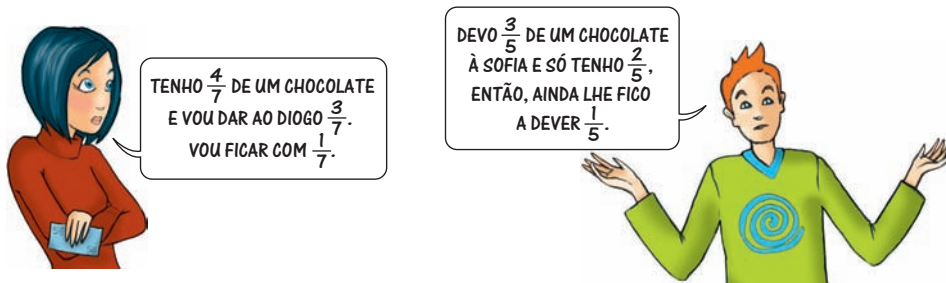
$$(-1) + (-2) = -3$$

A soma de dois números positivos é um número positivo.

O seu valor absoluto é a soma dos valores absolutos das parcelas.

A soma de dois números negativos é um número negativo.

O seu valor absoluto é a soma dos valores absolutos das parcelas.



$$\left(+\frac{4}{7}\right) + \left(-\frac{3}{7}\right) = +\frac{1}{7}$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(+\frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{5}$$

A soma de dois números com sinais contrários é um número cujo sinal é o da parcela que tem maior valor absoluto. O seu valor absoluto é igual à diferença entre os valores absolutos das parcelas.

Propriedades da adição

Para quaisquer q, r e $s \in \mathbb{Q}$

Propriedade comutativa	$q + r = r + q$
Propriedade associativa	$q + (r + s) = (q + r) + s$
0 é o elemento neutro da adição	$q + 0 = 0 + q = q$
Existência de simétrico	$q + (-q) = (-q) + q = 0$



Traduzindo matematicamente:

$$\begin{aligned} -(3 + 2) + 5 &= \\ &= -5 + 5 = 0 \end{aligned}$$

Traduzindo matematicamente:

$$\begin{aligned} (-3) + (-2) + 5 &= \\ &= -5 + 5 = 0 \end{aligned}$$

Pode concluir-se, assim, que: $-(3 + 2) = (-3) + (-2)$

Em geral:

O simétrico da soma de dois números racionais é igual à soma dos seus simétricos:

$$-(q + r) = (-q) + (-r)$$

Dados dois números racionais, q e r , pode mostrar-se que a afirmação anterior é verdadeira, determinando a soma:

$$q + r + (-q + (-r)) = (q + (-q)) + (r + (-r)) = 0 + 0 = 0$$

Como a soma é nula, os números em causa são simétricos um do outro, ou seja:

$$-(q + r) = (-q) + (-r)$$

■ Subtração

Dados q e r racionais, $q - r$ é igual à soma de q com o simétrico de r .

Por exemplo:

$$\bullet (+7) - (+4) = (+7) + (-4) = +3$$

$$\bullet +\frac{5}{3} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \left(+\frac{5}{3}\right) + \left(+\frac{3}{2}\right) = \left(+\frac{10}{6}\right) + \left(+\frac{9}{6}\right) = +\frac{19}{6}$$

Dados dois números racionais, q e r :

$$-(q - r) = -(q + (-r)) = -q + (-(-r)) = -q + r$$

O simétrico da diferença é igual à soma do simétrico do aditivo com o subtrativo:

$$-(q - r) = -q + r$$

Exercício resolvido 1

Calcula:

a) $(+4) + (+6)$

b) $(-1) + (+8)$

c) $\left(+\frac{41}{2}\right) + \left(-\frac{20}{2}\right)$

d) $\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right)$

e) $(+7) - (+8)$

f) $(-6) - (+1)$

g) $\left(+\frac{41}{2}\right) - \left(-\frac{13}{2}\right)$

h) $\left(+\frac{7}{4}\right) - \left(-\frac{8}{3}\right)$

Resolução:

a) $(+4) + (+6) = 4 + 6 = 10$

b) $(-1) + (+8) = -1 + 8 = 7$

c) $\left(+\frac{41}{2}\right) + \left(-\frac{20}{2}\right) = \frac{41}{2} - \frac{20}{2} = \frac{21}{2}$

d) $\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{5}{10} - \frac{4}{10} = \frac{1}{10}$

e) $(+7) - (+8) = 7 - 8 = -1$

f) $(-6) - (+1) = -6 - 1 = -7$

g) $\left(+\frac{41}{2}\right) - \left(-\frac{13}{2}\right) = \frac{41}{2} + \frac{13}{2} = \frac{54}{2} = 27$

h) $\left(+\frac{7}{4}\right) - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{7}{4} + \frac{8}{3} = \frac{21}{12} + \frac{32}{12} = \frac{53}{12}$

Nota

Numa expressão como, por exemplo, $(-2) + (+3) - (-4)$, distinguem-se dois tipos de sinais:

- os sinais **posicionais** (positivo ou negativo), a **vermelho**;
- os sinais **operacionais** (adição ou subtração), a **azul**.

■ Adição algébrica

Uma adição algébrica é uma expressão constituída por adições e subtrações. O seu resultado é uma **soma algébrica**. Por exemplo:

$$5 - (+8,1) + (+4) - (-3) + (-7,2)$$

Para começar, transformam-se as subtrações em adições:

$$5 - (+8,1) + (+4) - (-3) + (-7,2) = 5 + (-8,1) + (+4) + (+3) + (-7,2)$$

Depois, existem, pelo menos, dois modos de proceder:

1.º modo:

$$\begin{aligned} &5 + (-8,1) + (+4) + (+3) + (-7,2) \\ &= \boxed{5 - 8,1} + 4 + 3 - 7,2 = \text{Fazer os cálculos dois a dois} \\ &= \boxed{-3,1} + 4 + 3 - 7,2 = \text{Vd tan do a e crev e os res tan tes} \\ &= \boxed{+0,9} + 3 - 7,2 = \text{números).} \\ &= \boxed{+3,9 - 7,2} = \\ &= -3,3 \end{aligned}$$

2.º modo:

$$\begin{aligned} &5 + (-8,1) + (+4) + (+3) + (-7,2) \\ &= \underbrace{5 + (+4) + (+3)}_{\text{Positivos}} + \underbrace{(-8,1) + (-7,2)}_{\text{Negativos}} = \text{Agrupar os números positivos} \\ &= 12 + (-15,3) = \text{e os números negativos.} \\ &= -3,3 \end{aligned}$$

Simplificação de expressões com parênteses

As expressões entre parênteses têm sempre prioridade.

Por exemplo: $5 + (-7 + 10) = 5 + (+3) = 5 + 3 = 8$

Mas também é possível simplificar tirando os parênteses:

- O sinal $+$ antes dos parênteses pode ser retirado com os parênteses, **mantendo o sinal das parcelas**:

$$\begin{aligned} 5 + (-7 + 10) &= 5 - 7 + 10 = -2 + 10 = 8 \\ \frac{6}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) &= \frac{6}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = \frac{18}{6} + \frac{2}{6} - \frac{9}{6} = \frac{20}{6} - \frac{9}{6} = \frac{11}{6} \end{aligned}$$

- O sinal $-$ antes dos parênteses pode ser retirado com os parênteses, **desde que se troque o sinal das parcelas**:

$$\begin{aligned} 5 - (-7 + 10) &= 5 + 7 - 10 = 12 - 10 = 2 \\ 6 - (3 - 12) &= 6 - 3 + 12 = 15 \\ \frac{6}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) &= \frac{6}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{18}{6} - \frac{2}{6} + \frac{9}{6} = \frac{25}{6} \end{aligned}$$

O que debes saber

- Adicionar e subtrair dois números racionais.
- Calcular uma soma algébrica (eventualmente com parênteses).

SE «CORTARES» OS
NÚMEROS SIMÉTRICOS,
FICA MAIS FÁCIL:
 $\cancel{-3} + 4 + \cancel{3} - 7 =$
 $= +4 - 7 = -3$
(VISTO QUE $-3 + 3 = 0$).



Nota

Diz-se «tirar os parênteses» ou «desembaraçar de parênteses».

Nota

Quando a primeira parcela de uma adição algébrica é um número negativo, podem omitir-se alguns parênteses.

Exemplo:

$$(-7) + 10 = -7 + 10$$

Atividades

VERIFICAR A APRENDIZAGEM

ADIÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

1 Para cada situação do dia a dia, efetua a adição e completa as frases.

a)



c)



e)



b)



d)



f)



2 Associa cada propriedade da adição ao exemplo que lhe corresponde.

A	Propriedade comutativa	1	$(-6) + 0 = 0 + (-6) = -6$
B	Propriedade associativa	2	$(+5) + (-5) = (-5) + (+5) = 0$
C	Existência de elemento neutro	3	$(-3) + (+4) = (+4) + (-3)$
D	Existência de elemento simétrico	4	$[(+3) + (-6)] + (-1) = (+3) + [(-6) + (-1)]$

ADICIONAR E SUBTRAIR DOIS NÚMEROS RACIONAIS

3 Adiciona os dois números racionais:

a) $(+5) + (-2)$

c) $(-3) + (-8)$

e) $(+8) + 0$

g) $(-13) + (+6)$

b) $(+6) + (-10)$

d) $(-7) + (+7)$

f) $(-4) + (-4)$

h) $(+12) + (-5)$

4 Calcula:

a) $-6 + 8$

c) $14 + (-3)$

e) $-35 + 25$

g) $-51 + (-78)$

b) $-\frac{9}{2} + 5$

d) $-\frac{7}{3} + (-3)$

f) $\frac{33}{6} + \left(-\frac{12}{2}\right)$

h) $-\frac{4}{6} + \frac{6}{5}$

5 Subtrai os dois números racionais:

a) $(+5) - (+4)$

c) $(+4) - (-7)$

e) $(+5) - (+5)$

g) $(-5) - (+14)$

b) $(-7) - (-3)$

d) $(-6) - (+3)$

f) $(-8) - (-6)$

h) $(+7) - (+16)$

6 Calcula:

a) $10 - 15$

c) $13 - (-8)$

e) $-15 - 55$

g) $-47 - (-63)$

b) $-\frac{9}{7} - 5$

d) $-\frac{3}{2} - (-2)$

f) $\frac{1}{8} - \left(-\frac{6}{5}\right)$

h) $-\frac{2}{7} - \frac{3}{8}$

AUTOAVALIAÇÃO Sei adicionar e subtrair dois números racionais?

SIMPLIFICAR A ESCRITA

7

Calcula.

a) $-(-5)$

d) $-(-18)$

g) $+(+2)$

b) $-(+7)$

e) $-(-2)$

h) $+\left(+\frac{5}{8}\right)$

c) $+(+23)$

f) $-(+2)$

i) $-\left(+\frac{2}{6}\right)$

8

Simplifica a escrita de cada uma das expressões retirando os parênteses:

a) $(-2) + (+0,5)$

e) $(-2) + \left(+\frac{1}{2}\right)$

i) $\left(+\frac{5}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$

b) $(-1,2) + (-1)$

f) $\left(-\frac{7}{4}\right) + (-3)$

j) $\left(-\frac{3}{15}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right)$

c) $(-7,2) - (0,8)$

g) $(-6) - \left(+\frac{1}{2}\right)$

k) $\left(+\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$

d) $(-0,25) - (-8)$

h) $\left(-\frac{1}{4}\right) - (-2)$

l) $\left(-\frac{1}{10}\right) - \left(-\frac{2}{5}\right)$

AUTOAVALIAÇÃO Sei simplificar a escrita?

ADIÇÃO ALGÉBRICA

9

Simplifica a escrita (quando necessário) e calcula o valor de cada expressão.

a) $(+2) - (+4) - (-8) + (-5)$

f) $7 - 4 + 9 - 12 - 3$

b) $(-5) + (+10) - (+7) - (-1)$

g) $-5 + 6 + 16 - 9 - 8$

c) $(-7) + (-2) + (+8) - (+15) + (-2) - (-6)$

h) $3 - 17 + 14 - (-15) - (+4)$

d) $(+10) - (+4) + (-6) + 0 + (-3) + (+9)$

i) $(-2) + (+0,4) - (-1,8) + (-0,1)$

e) $-7 - 6 + 12 + 7 - 2$

j) $\left(+\frac{5}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - (-6)$

DESEMPAQUETAR DE PARÊNTESES

10

Simplifica cada expressão, retirando os parênteses, e calcula o seu valor.

a) $7 + (-6 + 2)$

e) $-7 + 2 - (-5 - 6 + 4 - 10)$

b) $8 + (3 - 19 + 7)$

f) $-3 + (9 - 15) - (-3 - 6)$

c) $6 - (-2 + 10)$

g) $(-8) + (3,4 - 2,8)$

d) $9 - (4 - 12 + 5)$

h) $\left(+\frac{5}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2} - 4 + \frac{2}{6}\right)$

AUTOAVALIAÇÃO Sei calcular uma soma algébrica?

APLICAR

11

Considera os seguintes números: 8; -4; 7,5; 0; $\frac{5}{2}$; -106; $\frac{1}{3}$; -5; +9; $\frac{12}{4}$

11.1 Destes números, alguns são números inteiros. Quais são? E quais são os números racionais?

11.2 Escreve os números por ordem crescente.

11.3 Indica o valor absoluto de cada um dos números.

Atividades

- 12** Um autocarro inicia a sua viagem sem passageiros. Em cada paragem, entram e saem passageiros, conforme é descrito na tabela ao lado.

Paragem	1. ^a	2. ^a	3. ^a	4. ^a	5. ^a
Entradas	12	15	6	8	2
Saídas	0	7	14	5	9

Determina quantos passageiros se encontram dentro do autocarro após a 5.^a paragem.

- 13** A temperatura numa aldeia era, às 7 horas, de -3°C ; entre as 7 horas e as 9 horas, a temperatura aumentou 2°C ; entre as 9 horas e as 15 horas, a temperatura aumentou 7°C ; entre as 15 horas e as 16 horas, desceu 2°C ; entre as 16 horas e as 20 horas, desceu 4°C ; e entre as 20 horas e as 24 horas, desceu 6°C .

Traduz a situação descrita por uma adição algébrica e determina a temperatura na aldeia à meia-noite.

- 14** Em cada um dos cálculos seguintes foi apagada uma das parcelas. Descobre-a.

- a)** $(+7) + (\dots) = +2$ **h)** $+3,2 - (\dots) = -6,2$
b) $(+3) + (\dots) = -6$ **i)** $-1,3 + (\dots) = 0$
c) $(-12) + (\dots) = +4$ **j)** $(-5,1) - (\dots) = -6$
d) $(\dots) + 19 = 0$ **k)** $\left(\frac{1}{3}\right) + (\dots) = 1$
e) $(\dots) - 13 = -15$ **l)** $\left(-\frac{4}{7}\right) + (\dots) = 0$
f) $12 - (\dots) = -60$ **m)** $-(5 + 3) = (\dots) + (\dots)$
g) $(+2,8) + (\dots) = +1$ **n)** $-(-7 + 2) = (\dots) + (\dots)$

- 15** Copia e completa com os sinais $+$ e $-$ de maneira a obteres o resultado indicado.

- a)** $\dots 4 \dots 2 \dots 6 = 4$
b) $\dots 9 \dots 7 \dots 5 = -3$
c) $\dots 8 \dots 7 \dots 6 = -7$
d) $\dots 2 \dots 3 \dots 4 \dots 5 = 0$
e) $\dots 4 \dots 3 \dots 2 \dots 1 = -2$
f) $\dots 3 \dots 8 \dots 2 \dots 6 = 9$
g) $\dots 2 \dots 1 \dots 4 \dots 3 \dots 8 = 0$

- 16** Considera a expressão: $-2 + (-5) - (-4)$.

16.1 Indica quais são os sinais posicionais e os sinais operacionais.

16.2 Usando a tua calculadora, verifica que o valor da expressão é -3 .

NOTA: As calculadoras têm dois sinais «menos»:

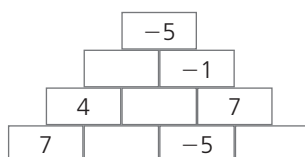
- o sinal operacional da subtração $-$;
- o sinal posicional de negativo $(-)$ ou $+/-$ (este sinal aparece mais pequeno).

16.3 A Sofia quis confirmar o cálculo, mas, da segunda vez, apareceu **Ans $-2+(-5)-(-4)$** no visor da calculadora. **Ans** (abreviatura de *Answer*, resultado do cálculo anterior) apareceu sozinho. O resultado foi -6 . Explica qual foi o erro da Sofia.



Cuidado com os sinais «menos» na calculadora!

- 17 Completa os espaços em branco, sabendo que em cada retângulo se escreve a soma dos números que estão nos dois retângulos situados imediatamente abaixo.



- 18 No tabuleiro apresentado à direita, existem vários caminhos desde a casa superior esquerda, assinalada com 1, até à casa «FIM», deslocando-se apenas na horizontal e na vertical para baixo. Em cada caminho, adicionam-se os números por onde se passa.

Procura um caminho com a **menor soma** possível. Compara o teu resultado com o dos teus colegas.

1	2	3	-5	1
-1	2	5	-3	3
4	-3	2	1	-7
-5	7	-4	-3	-1
3	-2	1	3	FIM

- 19 O João levou um bolo para a escola para festejar o seu aniversário com todos os colegas da turma. A turma do João tem 24 alunos. Assim, tem de cortar o bolo em 24 partes iguais para dividir por todos.

19.1 Como poderás representar numericamente uma fatia de bolo?

19.2 Representa em linguagem matemática a quantidade de bolo comida por 5 colegas do João.

19.3 E como podíamos representar numericamente a totalidade das fatias?

20 Jogo Batalha de cartas

NÚMERO DE JOGADORES:

2 e 1 árbitro, se necessário.

MATERIAL: 20 cartas (de 1 a 10 de um naipe preto e de 1 a 10 de um naipe vermelho). As cartas pretas representam números positivos e as vermelhas representam números negativos.

REGRAS:

Baralham-se as 20 cartas (viradas para baixo) em cima de uma mesa. Depois, os jogadores escolhem uma carta e viram-na ao mesmo tempo. O primeiro a indicar o resultado correto da soma guarda as duas cartas. Repete-se o processo até não haver mais cartas em cima da mesa.

Ganha o jogo aquele que tiver mais cartas no final.

21 Jogo Cartas na testa

NÚMERO DE JOGADORES: 3.

MATERIAL: Idêntico ao do jogo anterior.

REGRAS:

Dois jogadores pegam numa carta cada um e, sem a verem, colocam-na na testa, para ser observada pelo adversário. O terceiro jogador vê as duas cartas e diz a soma. Cada jogador, sabendo a soma e a carta do adversário, calcula o valor da sua. Quem descobrir primeiro a sua carta ganha as duas. A seguir, trocam-se os papéis, até acabarem as cartas. O vencedor é aquele que, no final, tiver mais cartas.



1.2

Multiplicação



Recorda

Os números que se multiplicam chamam-se **fatores**, e o resultado é o **produto**.

Exemplo:

$$\begin{array}{ccc} 2 \times 3 = 6 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{Fatores} \quad \text{Produto} \end{array}$$



O sinal $\times$ deve ser sempre separado dos sinais posicionais $+$ e $-$ por um parêntese.

Não se escreve 2×-1 , mas, sim, $2 \times (-1)$.

Nota

Na multiplicação de dois números racionais, tem-se:

$$(-a) \times b = a \times (-b) = -(a \times b)$$

$$(-a) \times (-b) = a \times b$$

■ Multiplicação de números racionais

Observa que:

$$3 \times (-0,5) = (-0,5) + (-0,5) + (-0,5) = -1,5$$

O produto de um número natural n por um número racional q é igual à soma de n parcelas iguais a q :

$$n \times q = q \times n = \underbrace{q + \dots + q}_{n \text{ vezes}}$$

Pode também escrever-se:

$$(-0,5) \times 3 = 3 \times (-0,5) = -1,5 = -(0,5 \times 3)$$

Em geral, se $n \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{Q}$:

$$n \times (-q) = (-q) \times n = -(n \times q)$$

O quociente entre um número racional q e um número natural n é o número racional cujo produto por n é igual a q .

Representa-se por $q : n$ ou $\frac{q}{n}$.

Observa agora que:

$$(-2) : 3 = -\frac{2}{3}, \text{ pois } 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -(3 \times \frac{2}{3}) = -2$$

Pode também escrever-se:

$$\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

Em geral, dado um número natural n e um número racional q :

$$n \times \left(-\frac{q}{n}\right) = -\left(n \times \frac{q}{n}\right) = -q$$

Logo:

$$\frac{-q}{n} = -\frac{q}{n}$$

O produto de -1 por um número racional q é igual ao simétrico desse número.

$$(-1) \times q = q \times (-1) = -q$$

Assim, mantendo as propriedades da multiplicação, pode observar-se que:

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{5} = (-1) \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = (-1) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}\right) = -\frac{2}{15}$$

O produto de um número positivo por um número negativo é um número negativo.

O seu valor absoluto é o produto dos valores absolutos dos fatores.

Em geral, se $q \in \mathbb{Q}$ e r é um número racional positivo:

$$(-q) \times r = r \times (-q) = -(q \times r)$$

Observa:

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3} \times (-1) \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

O produto de dois números negativos é um número positivo.

O seu valor absoluto é o produto dos valores absolutos dos fatores.

Em geral, se q e r são dois números racionais positivos:

$$(-q) \times (-r) = q \times (-1) \times (-r) = q \times r$$

Em resumo, para multiplicar dois números racionais deve considerar-se que:

O produto de dois números racionais com o mesmo sinal é um número racional positivo, cujo valor absoluto é igual ao produto dos valores absolutos dos fatores.

O produto de dois números racionais de sinais diferentes é um número racional negativo, cujo valor absoluto é igual ao produto dos valores absolutos dos fatores.



Exercício resolvido 1

Calcula:

a) $(-4) \times 7$ b) $\frac{2}{5} \times \left(-\frac{3}{8}\right)$ c) $\left(-\frac{3}{6}\right) \times \left(-\frac{3}{6}\right)$ d) $\left(-\frac{2}{9}\right) \times 0$

Resolução:

a) $(-4) \times 7 = -28$ c) $\left(-\frac{3}{6}\right) \times \left(-\frac{3}{6}\right) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{2}{5} \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{6}{40} = -\frac{3}{20}$ d) $\left(-\frac{2}{9}\right) \times 0 = 0$

Propriedades da multiplicação

Para quaisquer números racionais q, r e $s \in \mathbb{Q}$

Propriedade comutativa	$q \times r = r \times q$
Propriedade associativa	$q \times (r \times s) = (q \times r) \times s$
1 é o elemento neutro da multiplicação.	$q \times 1 = 1 \times q = q$
0 é o elemento absorvente da multiplicação.	$q \times 0 = 0 \times q = 0$
Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.	$s \times (q + r) = s \times q + s \times r$ $(q + r) \times s = q \times s + r \times s$

Exemplos da propriedade distributiva:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{6}\right) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{4}{6}\right) = \frac{1}{6} - \frac{4}{18} = \frac{3}{18} - \frac{4}{18} = -\frac{1}{18} \\ \bullet -\frac{4}{3} \times \left(-\frac{6}{2} + \frac{9}{4}\right) &= \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{6}{2}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) \times \frac{9}{4} = \frac{24}{6} - \frac{36}{12} = \frac{48}{12} - \frac{36}{12} = \frac{12}{12} = 1 \end{aligned}$$

Exercício resolvido 2

Calcula usando as propriedades da multiplicação:

a) $-36 \times 15 \times (-47) \times 0$ c) $1 - 3 \times (6 - 2)$

b) $3 \times (-4) \times \frac{1}{3} \times (-6)$ d) $(-189 \times 5) \times 2$

Resolução:

a) $-36 \times 15 \times (-47) \times 0 = 0$

c) $1 - 3 \times (6 - 2) = 1 - 3 \times 6 + (-3) \times (-2) = 1 - 18 + 6 = -11$

b) $3 \times (-4) \times \frac{1}{3} \times (-6) = 3 \times \frac{1}{3} \times (-4) \times (-6) = 1 \times (-4) \times (-6) = (-4) \times (-6) = +24$

d) $(-189 \times 5) \times 2 = -189 \times (5 \times 2) = -189 \times 10 = -1890$

O que deves saber

- Multiplicar números racionais.
- Usar as propriedades da multiplicação para simplificar os cálculos.

Atividades

VERIFICAR A APRENDIZAGEM

MULTIPLICAR NÚMEROS RACIONAIS

1

Calcula:

a) $(+5) \times (+3)$

h) $(+9) \times (-6)$

o) $-5 \times 6 \times (-2)$

v) $\left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{6}{5}\right)$

b) $(-7) \times (-7)$

i) $1 \times (-37)$

p) $-2 \times (-2) \times (-2)$

w) $(+2,1) \times (+3)$

c) $(+3) \times (-6)$

j) $(-12) \times (-4)$

q) $(-0,2) \times (+3)$

x) $(-5) \times \left(+\frac{1}{3}\right)$

d) $(-2) \times (+8)$

k) $20 \times (-80)$

r) $-3 \times \left(+\frac{1}{3}\right)$

y) $\left(+\frac{5}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{6}\right)$

e) $(-5) \times (-9)$

l) $(-5) \times (-25)$

s) $\left(+\frac{5}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)$

z) $(-0,1) \times (-0,3)$

f) $(-8) \times 0$

m) $9 \times (-1) \times 8$

t) $(-5) \times (-1,6)$

g) $(-2) \times (-8)$

n) $4 \times (-2) \times (-3)$

u) $\left(-\frac{4}{7}\right) \times (-2)$

AUTOAVALIAÇÃO Sei multiplicar números racionais?

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

2

Associa cada propriedade da multiplicação ao exemplo que lhe corresponde.

A	Propriedade comutativa	1	$7 \times 0 = 0 \times 7 = 0$
B	Propriedade associativa	2	$1 \times (-13) = (-13) \times 1 = -13$
C	Existência de elemento neutro	3	$(2 \times 3) \times (-6) = 2 \times [3 \times (-6)]$
D	Existência de elemento inverso	4	$2 \times (-5 + 3) = 2 \times (-5) + 2 \times 3$
E	Existência de elemento absorvente	5	$(-9) \times 4 = 4 \times (-9)$
F	Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição	6	$(-8) \times \left(-\frac{1}{8}\right) = \left(-\frac{1}{8}\right) \times (-8) = 1$

3

Qual é o inverso de -5 ? Escolhe a opção correta.

A. $+5$

B. $\frac{1}{5}$

C. $0,5$

D. $-\frac{1}{5}$

4

Qual é o produto de -4 pelo seu simétrico? Escolhe a opção correta.

A. -16

B. -1

C. 1

D. 16

USAR AS PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

5

Calcula usando as propriedades da multiplicação:

a) $7 \times (-4) \times 1 + (-9) \times 0$

d) $-1 \times 25 \times (-39) \times (-4)$

b) $5 \times (-2) \times \frac{1}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

e) $-8 \times (-3) \times (-4) \times \frac{1}{24}$

c) $(-137 \times 5) \times (-2)$

f) $3 \times (2 - 5) - 0 \times 11$

Atividades

PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA

6 Calcula usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

- | | |
|--|---|
| a) $5 \times (4 + 7)$ | j) $(-0,2) \times (+3 + 0,2)$ |
| b) $9 \times (-2 - 8)$ | k) $(-6 - 0,4) \times (-0,3)$ |
| c) $-6 \times (-2 + 8)$ | l) $\left(-\frac{1}{2} - 6\right) \times 2$ |
| d) $-3 \times (-10 - 3)$ | m) $(-5) \times (-1,6 + 1,2)$ |
| e) $-4 \times (6 - 8) + 5 \times (-3 + 9)$ | n) $\left(-3 + \frac{5}{4}\right) \times (-3)$ |
| f) $2 \times (-9 + 5) - 3 \times (7 - 10)$ | o) $(-4) \times \left(-\frac{1}{2} - 2 - \frac{3}{4}\right)$ |
| g) $1 + 6 \times (2 - 3)$ | p) $(+2,1) \times (+3 - 2,3)$ |
| h) $5 + (-1 - 7) \times 2$ | q) $2 \times \left(\frac{1}{2} - 6\right)$ |
| i) $-3 \times (4 - 5) + (6 - 7) \times 2$ | r) $\left(-3 + \frac{2}{3}\right) \times (-3) + 7 \times \frac{1}{3}$ |

AUTOAVALIAÇÃO Sei usar as propriedades da multiplicação?

7 Determina o simétrico de:

- | | | |
|--------|-------------------|---------------------------------|
| a) 3 | d) $\frac{8}{3}$ | g) $\frac{1}{2}$ |
| b) -26 | e) $-\frac{7}{4}$ | h) $-\left(+\frac{2}{5}\right)$ |
| c) 0,3 | f) 0 | i) $-\left(-\frac{1}{2}\right)$ |

APLICAR

8 Verifica se as afirmações são verdadeiras ou falsas.

a)



UM PRODUTO DE DOZE FATORES NEGATIVOS É SEMPRE POSITIVO.

b)

QUALQUER NÚMERO MULTIPLICADO POR ELE PRÓPRIO DÁ UM NÚMERO POSITIVO.



c)



UM PRODUTO É NULO SE, PELO MENOS, UM DOS FATORES FOR ZERO.

d)

TODOS OS NÚMEROS INTEIROS TÊM INVERSO.



9 A partir da frase em linguagem corrente, escreve a expressão matemática que traduz cada alínea e calcula o seu valor.

- a) O produto de -6 por -7 .
- b) O produto de -2 pelo valor absoluto de -8 .
- c) A soma do inverso de $-\frac{1}{8}$ com o simétrico de 14 .
- d) A diferença entre o dobro de 25 e o produto de 8 por -9 .

- 10** Em cada caso, observa atentamente o exemplo de **estratégia para o cálculo mental** e efetua os cálculos apresentados a seguir.

10.1 Produto de múltiplos de 10

Exemplo: $50 \times 700 = 5 \times 10 \times 7 \times 100 = (5 \times 7) \times (10 \times 100) = 35 \times 1000 = 35\,000$

- a) 30×800
- b) -400×900
- c) $-70\,000 \times (-600)$
- d) $20 \times (-3500)$

10.2 Multiplicar por 99, 999, etc.

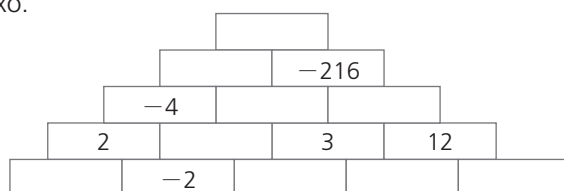
Exemplo: $7 \times 99 = 7 \times (100 - 1) = 700 - 7 = 693$

- a) 5×99
- b) $-8 \times (-99)$
- c) 3×999
- d) -6×999

- 11** Calcula o valor numérico das seguintes expressões, sabendo que se mantêm as prioridades das operações, já tuas conhecidas.

- a) $\frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{4}\right) + 1$
- b) $-\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 + \left(-\frac{1}{5}\right)$
- c) $-\frac{1}{4} \times \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3}\right)$
- d) $-2 \times \frac{1}{5} - \frac{5}{3} \times \left(-\frac{1}{10}\right)$
- e) $\left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{4} \times \left(-\frac{9}{2}\right)$
- f) $-\frac{1}{3} \times 0,2 - \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-4)$
- g) $\frac{1}{5} - \left(\frac{7}{2}\right) \times \left(-\frac{2}{7}\right) + 1$
- h) $5 - \frac{1}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 1$
- i) $-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{3} \times \left(-\frac{1}{5}\right)$
- j) $5 \times \left(2 - \frac{2}{3}\right) + 3 \times \frac{7}{6} + \frac{3}{2} \times \left(-\frac{4}{3}\right)$

- 12** Completa os espaços, sabendo que em cada retângulo se escreve o produto dos dois números que se encontram por baixo.



- 13** Completa:
- a) Dois números racionais positivos têm como produto um número racional
 - b) Dois números racionais negativos têm como produto um número racional
 - c) Dois números racionais com sinais opostos têm como produto um número racional

- 14** O Zico foi dar um passeio no comboio turístico da cidade onde vive. O comboio começou o seu percurso com 12 passageiros. Na primeira paragem entraram 15 pessoas e na segunda paragem saiu o dobro do número de pessoas que iniciaram a viagem. Na paragem seguinte entraram tantas pessoas como o quádruplo das que permaneciam no comboio. Na quarta paragem entraram tantas pessoas como a terça parte das que estavam no comboio.

Quantas pessoas estavam no comboio depois da quarta paragem?



Completa a última frase do Zito.

Nota

Um quociente pode ser representado de várias maneiras:

- com dois pontos: $8 : 2$;
- como uma fração: $\frac{8}{2}$.

ATENÇÃO: NUMA FRAÇÃO, SE DIVIDES O NUMERADOR POR 5, TAMBÉM TENS DE DIVIDIR O DENOMINADOR POR 5.



■ Divisão de números racionais

Recorda que o quociente de 8 por 4 é 2, porque $2 \times 4 = 8$.

O quociente entre um número q (o dividendo) e um número não nulo r (o divisor) é igual ao número racional cujo produto pelo divisor é igual ao dividendo e representa-se por $q : r$ ou $\frac{q}{r}$.

Repara que:

$$\left(-\frac{2}{3}\right) : \frac{1}{5} = -\frac{10}{3}, \text{ pois } \left(-\frac{10}{3}\right) \times \frac{1}{5} = -\frac{10}{15} = -\frac{2}{3}$$

e

$$\left(-\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{10}{3}, \text{ pois } \frac{10}{3} \times \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{10}{15} = -\frac{2}{3}$$

Dois números são **inversos** um do outro quando o respetivo produto for igual a 1.

O inverso de q é $\frac{1}{q}$, porque $q \times \frac{1}{q} = 1$.

Exemplo: O inverso de $\frac{1}{3}$ é 3, porque $\frac{1}{3} \times 3 = 1$.

Dividir dois números é o mesmo que multiplicar o primeiro pelo inverso do segundo:

$$q : r = q \times \frac{1}{r}, \text{ com } r \neq 0$$

Exemplos:

$$\left(-\frac{2}{3}\right) : \frac{7}{5} = -\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = -\frac{10}{21}$$

e

$$\left(-\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{7}{5}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{10}{21}$$

Como a divisão se pode transformar numa multiplicação, as regras dos sinais mantêm-se.

O quociente de dois números racionais com o mesmo sinal é um número positivo.

O seu valor absoluto é o quociente dos valores absolutos dos números.

O quociente de dois números racionais de sinais contrários é um número negativo.

O seu valor absoluto é o quociente dos valores absolutos dos números.



A divisão por zero é impossível.

Por exemplo, não se pode dividir 5 por 0, visto que nenhum número multiplicado por 0 dá 5.

Exemplos:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{-8,5}{5} &= \frac{8,5}{-5} = -\frac{8,5}{5} = -1,7 \\ \bullet \frac{-16}{12} &= \frac{-16 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{-4}{3} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Em geral, se q e r são números racionais ($r \neq 0$), então:

$$\frac{-q}{r} = \frac{q}{-r} = -\frac{q}{r}$$

Exercício resolvido 1

Calcula:

a) $(-8) : (-4)$

c) $(+35) : (-7)$

e) $-23 : 23$

b) $\frac{(-18)}{(+3)}$

d) $\frac{(-60)}{(-15)}$

f) $\frac{0}{-6}$

Resolução:

a) $(-8) : (-4) = +2$

c) $(+35) : (-7) = -5$

e) $-23 : 23 = -1$

b) $\frac{-18}{(+3)} = -6$

d) $\frac{-60}{-15} = +4$

f) $\frac{0}{-6} = 0$

Exercício resolvido 2

Calcula:

a) $\frac{3}{10} \times \left(-\frac{5}{3}\right)$ b) $-\frac{1}{5} \times \left(\frac{-8}{-3}\right)$ c) $\frac{5}{8} : \frac{2}{-3}$ d) $\frac{\frac{-6}{5}}{\frac{1}{2}}$

Resolução:

a) $\frac{3}{10} \times \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{3 \times 5}{10 \times 3} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{5} \times \left(\frac{-8}{-3}\right) = -\frac{1}{5} \times \frac{8}{3} = \frac{-8}{15} = -\frac{8}{15}$

c) $\frac{5}{8} : \frac{2}{-3} = \frac{5}{8} : \left(-\frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{5}{8} : \frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{5}{8} \times \frac{3}{2}\right) = -\frac{15}{16}$

d) $\frac{\frac{-6}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{6}{5}}{\frac{1}{2}} = -\frac{\frac{6}{5}}{\frac{1}{2}} = -\left(\frac{6}{5} \times \frac{2}{1}\right) = -\frac{12}{5}$

O que deves saber

- Dividir números racionais.
- Simplificar expressões usando a divisão.

Nota

- O quociente entre dois números inteiros pode não ser um número inteiro.
- A divisão não é comutativa. Por exemplo, $\frac{8}{2} = 4$, mas $\frac{2}{8} = 0,25$
- A divisão não é associativa. Por exemplo, $(20 : 10) : 2 = 2 : 2 = 1$ é diferente de $20 : (10 : 2) = 20 : 5 = 4$

Nota

- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$,
 - $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$,
- em que a, b, c e $d \in \mathbb{Q}$ e b, c e $d \neq 0$

Atividades

VERIFICAR A APRENDIZAGEM

DIVISÃO NO DIA A DIA

- 1 Como dividir 45 € por 5 pessoas de maneira que todos recebam a mesma quantia?
- 2 Para fazer um bolo, são precisos 3 ovos. Quantos bolos se podem fazer com 22 ovos?
- 3 Numa festa de anos, participam 32 pessoas. Sabendo que em cada mesa se podem sentar 6 pessoas, quantas mesas são necessárias?

A DIVISÃO, OPERAÇÃO INVERSA DA MULTIPLICAÇÃO

- 4 Copia e completa:

a) $12 : 2 = \dots$, porque $2 \times \dots = 12$	c) $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \dots$, porque $\frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \dots$
b) $15 : 5 = \dots$, porque $5 \times \dots = 15$	d) $\frac{27}{3} : 3 = \dots$, porque $\frac{27}{3} \times \frac{1}{3} = \dots$

DIVISÕES DE NÚMEROS RACIONAIS

- 5 Calcula:

a) $(+14) : (+7)$	d) $(-9) : (+9)$	g) $50 : (-1)$	j) $-48 : (-4)$
b) $(+20) : (-2)$	e) $(+21) : (-7)$	h) $0 : (-16)$	k) $-5200 : 10$
c) $\frac{(-36)}{(+4)}$	f) $\frac{(-48)}{(-6)}$	i) $\frac{13}{13}$	l) $\frac{276}{-12}$
- 6 Qual é o resultado de $0 : 3$ e de $3 : 0$? Experimenta fazer os cálculos na tua calculadora.
- 7 Calcula:

a) $100 : (-2) : 5$	b) $-72 : 9 : 2 : (-2)$	c) $-81 : (-9) : (-1) : (-3)$
---------------------	-------------------------	-------------------------------
- 8 Simplifica:

a) $\frac{-15}{25}$	c) $\frac{6 \times (-24)}{3}$	e) $\frac{6 \times (-5) \times 11}{11 \times (-5)}$	g) $\frac{35 \times 40}{5 \times 28}$
b) $\frac{-4}{-12}$	d) $\frac{6 \times 7}{7 \times (-36)}$	f) $\frac{-16 \times (-18) \times 12}{6 \times 8 \times (-9)}$	h) $\frac{(-20) \times 27}{18 \times (-30)}$

AUTOAVALIAÇÃO Sei dividir números racionais?

APLICAR

- 9 Preenche os espaços vazios de modo a obteres uma igualdade.

a) $\frac{-2}{7} = \frac{\dots}{-7} = -\frac{\dots}{\dots}$	b) $\frac{-2}{-7} = \frac{\dots}{\dots}$
---	--
- 10 Determina o inverso:

a) 6,5	c) 27,3	e) $-\frac{21}{4}$	g) $\frac{-30}{31}$	i) $\frac{-5}{-2}$
b) -34	d) $\frac{16}{3}$	f) 1	h) $\frac{-24}{-20}$	

11

Calcula:

a) $2 : \frac{2}{5}$

b) $-\frac{6}{9} : \frac{3}{7}$

c) $-0,1 : \left(-\frac{1}{3}\right)$

12

Calcula:

a) $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{7}}$

b) $\frac{-\frac{12}{5}}{\frac{1}{6}}$

c) $\frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{1}{3}}$

13

Calcula:

a) $2 : \frac{2}{5} + \frac{1}{4} : \frac{2}{3}$

b) $\frac{4}{7} : \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right)$

c) $\frac{4}{7} : 32 + 0,2$

14

Calcula:

a) $\left(-\frac{1}{3}\right) : \frac{4}{3}$

f) $12 : \left(-\frac{1}{5}\right) + 7 : \frac{1}{4}$

b) $\left(-\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right)$

g) $\frac{6}{3} - \frac{1}{2} : (-10) + 1$

c) $3 : \frac{6}{7}$

h) $-\frac{2}{3} : \left(3 + \frac{1}{3}\right) + 5 \times (-1)$

d) $\left(\frac{5}{2}\right) : \left(-\frac{1}{4}\right)$

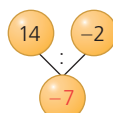
i) $\frac{20}{30} : \left(-\frac{1}{6}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{1}{8}\right)$

e) $\frac{1}{2} : \left(-\frac{2}{10}\right) : \left(-\frac{3}{2}\right)$

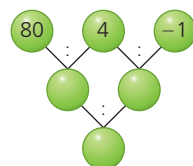
j) $\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{3}{7}} + 2 : \left(-\frac{1}{4}\right)$

15

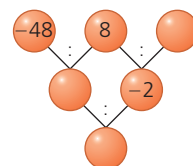
Copia e completa.

Exemplo:

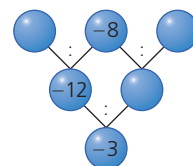
a)



b)



c)



16

Classifica as afirmações seguintes como verdadeiras ou falsas.

A.

O QUOCIENTE ENTRE DOIS
NÚMEROS INTEIROS
NEGATIVOS É SEMPRE UM
NÚMERO INTEIRO POSITIVO.



B.

UMA DAS PROPRIEDADES
DA DIVISÃO É A PROPRIEDADE
COMUTATIVA.



C.

O QUOCIENTE ENTRE UM
NÚMERO NÃO NULO E O SEU
SIMÉTRICO É SEMPRE -1.



D.

A PROPRIEDADE ASSOCIATIVA
NÃO É VÁLIDA PARA A DIVISÃO.



1.4

Potências de base racional e expoente natural



Recorda

a^n

Expoente
(número de vezes que a base se repete)

Base
(fator que se repete)

$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ vezes}}$

$a^1 = a$

Potências de base positiva

Uma potência é um produto de fatores iguais. Em vez de se escrever $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$, escreve-se, simplesmente, 3^5 .

Exemplos:

- $9^1 = 9$
- $6^2 = 6 \times 6 = 36$ (Lê-se «6 ao quadrado».)
- $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ (Lê-se «5 ao cubo».)
- $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ (Lê-se «3 à quarta» ou «3 elevado a 4».)
- $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{243}$

Potências de base negativa

Dado um número racional q , define-se como q^n o produto de n fatores iguais a q :

$$q^1 = q \text{ e se } n > 1, q^n = \underbrace{q \times q \times q \times \dots \times q}_{n \text{ vezes}}$$

Uma potência de base positiva é sempre um número positivo.

Observa agora o que ocorre quando a base é negativa:

- $(-2)^1 = -2$ (número negativo)
- $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = +4$ (número positivo)
- $(-2)^3 = \underbrace{(-2) \times (-2)}_{+4} \times (-2) = -8$ (número negativo)
- $(-2)^4 = \underbrace{(-2) \times (-2)}_{+4} \times \underbrace{(-2) \times (-2)}_{+4} = +16$ (número positivo)

Quando a base é negativa, verifica-se que o valor da potência pode ser positivo ou negativo. Tudo depende do expoente.

Uma potência de **base positiva** é sempre um número **positivo**.

Uma potência de **base negativa** e **expoente par** é um número **positivo**.

Uma potência de **base negativa** e **expoente ímpar** é um número **negativo**.



2^5 é **diferente** de 2×5 .
 $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
 $2 \times 5 = 10$

Nota

Numa **potência de base 10**, o expoente (natural) indica o número de zeros do valor da potência.

Exemplos:

- $10^3 = 1\underbrace{000}_{3 \text{ zeros}}$
- $10^5 = 1\underbrace{00\,000}_{5 \text{ zeros}}$

Exemplos:

$$\bullet \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = +\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Base negativa e expoente PAR

$$\bullet \left(-\frac{8}{2}\right)^3 = -\left(\frac{8}{2}\right)^3 = -\frac{512}{8} = -64$$

Base negativa e expoente ÍMPAR

$$\bullet \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = +\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

Base negativa e expoente PAR

$$\bullet (-10)^5 = -10^5 = -100\,000$$

Base negativa e expoente ÍMPAR

Em geral, se $q \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$(-q)^n = q^n, \text{ se } n \text{ for par}$$

$$(-q)^n = -q^n, \text{ se } n \text{ for ímpar}$$

Exercício resolvido 1

Em cada caso, indica o sinal e calcula o valor da potência:

- a) $(-10)^4$ c) 4^3 e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$
 b) $(-2)^7$ d) $\left(\frac{5}{3}\right)^3$ f) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$

Resolução:

a) A base (-10) é negativa e o expoente (4) é par, logo, o resultado é positivo: $(-10)^4 = +10^4 = 10\,000$

b) A base (-2) é negativa e o expoente (7) é ímpar, por isso o resultado é negativo: $(-2)^7 = -2^7 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = -128$

c) A base (4) é positiva, logo, o resultado é positivo: $4 \times 4 \times 4 = 64$

d) A base $\left(\frac{5}{3}\right)$ é positiva, logo, o resultado é positivo:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{125}{27}$$

e) A base $\left(-\frac{1}{2}\right)$ é negativa e o expoente (5) é ímpar, por isso o resultado

$$\text{é negativo: } \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{32}$$

f) A base $\left(-\frac{2}{5}\right)$ é negativa e o expoente (2) é par, logo, o resultado é positivo:

$$\left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{25}$$

O que deves saber

- Indicar o sinal de uma potência de base racional.
- Calcular o valor de potências com base racional e expoente natural.

Calculadora



A maioria das calculadoras permite calcular potências através das teclas

$\wedge$, x^y ou y^x .

Exemplos:

$$\bullet 12^3 = ?$$

$$1 \quad 2 \quad \wedge \quad 3 \quad =$$

1728

$$\bullet (-8)^6 = ?$$

$$(\quad (-) \quad 8 \quad) \quad \wedge \quad 6 \quad =$$

262 144



$(-3)^2$ é **diferente** de -3^2 .
 $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = +9$
 $-3^2 = -3 \times 3 = -9$

Nota

Em geral, quaisquer que sejam q e $r \in \mathbb{Q}$, tem-se:

$$\left(\frac{q}{r}\right)^n = \frac{q^n}{r^n}$$

Exemplo:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{2 \times 2} = \frac{3^2}{2^2}$$

Atividades

VERIFICAR A APRENDIZAGEM

TRANSFORMAR EM POTÊNCIA

- 1 Escreve sob a forma de potência:
- a) 3×3 b) $5 \times 5 \times 5 \times 5$ c) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$

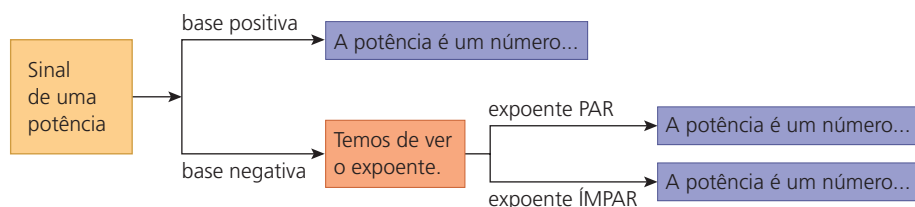
POTÊNCIAS COM BASE RACIONAL E EXPOENTE NATURAL

- 2 Em cada caso, indica a base e o expoente. Depois, escreve sob a forma de produto e calcula.
- a) 2^4 b) 1^6 c) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ d) $\left(\frac{2}{7}\right)^2$ e) 10^6
- 3 Sobre os quadrados perfeitos, copia e completa:
- a) $6^2 = \dots$ b) $8^2 = \dots$ c) $11^2 = \dots$ d) $\dots^2 = 25$ e) $\dots^2 = 81$
- 4 Sobre os cubos perfeitos, copia e completa:
- a) $2^3 = \dots$ b) $4^3 = \dots$ c) $10^3 = \dots$ d) $\dots^3 = 1$ e) $\dots^3 = 125$
- 5 Sobre as potências de base 10, copia e completa:
- a) $10^4 = \dots$ b) $10^1 = \dots$ c) $10^9 = \dots$ d) $10^{\dots} = 100$ e) $10^{\dots} = 100\,000\,000$

AUTOAVALIAÇÃO Sei calcular o valor de uma potência de base racional e expoente natural?

SINAL DE UMA POTÊNCIA

- 6 Copia e completa corretamente o esquema com as palavras «positivo» e «negativo».



- 7 Sem fazer cálculos, indica se a potência é um número positivo ou negativo.
- a) $(-7)^9$ b) $(-3)^{10}$ c) 8^3 d) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{12}$ e) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{15}$ f) $\left(\frac{5}{7}\right)^{15}$

AUTOAVALIAÇÃO Sei indicar o sinal de uma potência de base racional?

VALOR DE UMA POTÊNCIA COM BASE RACIONAL E EXPOENTE NATURAL

- 8 Calcula:
- a) $(-5)^2$ d) $(-1)^6$ g) $\left(\frac{3}{9}\right)^2$ j) $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$ m) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$
- b) $(-2)^3$ e) $(-1)^7$ h) $(-4)^3$ k) $(-10)^5$ n) $0,2^2$
- c) 2^5 f) $(-7)^2$ i) $(-13)^1$ l) 12^2 o) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

AUTOAVALIAÇÃO Sei calcular o valor de uma potência de base racional?

APLICAR

- 9 Observa a sequência de figuras:



9.1 Escreve o número de pontos de cada figura sob a forma de potência. As quatro potências devem ter o mesmo expoente.

9.2 Quantos pontos terá a quinta figura da sequência?

- 10 Qual das potências seguintes tem o maior valor? Escolhe a opção correta.

A. $(-7)^2$ B. 40^1 C. 1^{50} D. $(-10)^3$

- 11 Copia e completa os espaços com $<$, $>$ ou $=$, de modo a obteres afirmações verdadeiras.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

c) 1^{16} $(-1)^{18}$

e) $(-3)^8$ 3^5

b) 15^2 14^2

d) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{11}$ $\left(\frac{5}{2}\right)^{10}$

f) $(-4)^2$ $(-2)^4$

- 12 Calcula usando a calculadora (quando for possível):

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^6$

b) 14^5

c) $(-2)^8$

d) $\left(-\frac{5}{7}\right)^3$

e) 5^{400}

- 13 Numa mesa, estão 12 exemplares de um panfleto. Cada panfleto tem 12 páginas e cada uma delas tem 12 linhas. Se cada linha tiver 12 palavras, ao todo, quantas palavras há nos panfletos?

- 14 A Sofia, o Diogo e a Joana criaram uma associação para sensibilizar as pessoas para o problema dos cães abandonados. Em cada semana, o número de sócios é multiplicado por 3. Copia e completa a tabela que se segue:

Semana	1	2	3	4	5	10
N.º de sócios	3	9	27			
Potência		3^2				



- 15 Lê o diálogo entre a Sofia e a Joana:

Sofia: «Deveria pedir uma mesada muito diferente! Pedia que me dessem 2 cêntimos no dia 1, 4 cêntimos no dia 2, 8 cêntimos no dia 3, 16 cêntimos no dia 4, e assim, até ao fim do mês.»

Joana: «Não é assim que vais enriquecer...»

15.1 Ao todo, quanto receberia a Sofia ao fim de 15 dias?

15.2 Quanto receberia só no último dia do mês?

INVESTIGAR

- 16 Um matemático famoso chamado Pitágoras (século VI a. C.) descobriu uma relação entre os quadrados perfeitos e os números ímpares.

16.1 Tenta descobrir essa relação.

SUGESTÃO: Calcula a soma dos primeiros dois números ímpares, dos primeiros três, etc.

16.2 Qual é a soma dos 100 primeiros números naturais ímpares?

$1 = 1$
 $1 + 3 = \dots$
 $1 + 3 + 5 = \dots$
 $1 + 3 + 5 + 7 = \dots$



1.5

Operações com potências



■ Operações com potências

Repara

$$\begin{aligned} 4^5 \times 4^3 &= \\ &= (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4) \times \\ &\quad \times (4 \times 4 \times 4) = \\ &= 4^8 \\ \text{ou seja, } 4^5 \times 4^3 &= 4^{5+3} \\ &= 4^8. \end{aligned}$$

Repara

$$\begin{aligned} 4^5 : 4^3 &= \\ &= \frac{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}{4 \times 4 \times 4} = \\ &= \frac{4 \times 4}{1} = 4 \times 4 = 4^2 \\ \text{ou seja, } 4^5 : 4^3 &= 4^{5-3} \\ &= 4^2. \end{aligned}$$



Na multiplicação e na divisão, **se nem as bases nem os expoentes forem iguais**, calcula-se cada potência separadamente e depois efetua-se a multiplicação ou a divisão. Por exemplo:
 $2^3 \times 5^2 = 8 \times 25 = 200$

a) Multiplicar potências com a mesma base

De um modo geral, $q^m \times q^n = q^{m+n}$ (em que $q \in \mathbb{Q}$ e $m, n \in \mathbb{N}$).

Para multiplicar potências com a mesma base, mantém-se a base e **adicionam-se os expoentes**.

Exemplos:

- $5^9 \times 5^7 = 5^{9+7} = 5^{16}$
- $(-8)^{10} \times (-8) = (-8)^{10+1} = (-8)^{11}$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$

b) Dividir potências com a mesma base

De um modo geral, $q^m : q^n = q^{m-n}$ ou $\frac{q^m}{q^n} = q^{m-n}$ (em que $q \in \mathbb{Q}$ e $q \neq 0$; $m, n \in \mathbb{N}$ e $m > n$).

Para dividir potências com a mesma base, dá-se a mesma base e **subtraem-se os expoentes**.

Exemplos:

- $3^{15} : 3^{14} = 3^{15-14} = 3^1 = 3$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^6 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{16}$

c) Multiplicar e dividir potências com o mesmo expoente

- Multiplicar:** $q^m \times r^m = (q \times r)^m$ (em que $q, r \in \mathbb{Q}$ e $m \in \mathbb{N}$), ou seja, mantém-se o expoente e multiplicam-se as bases.

Para multiplicar potências com o mesmo expoente, **multiplicam-se as bases** e mantém-se o expoente.

- Dividir:** $q^m : r^m = (q : r)^m$ ou $\frac{q^m}{r^m} = \left(\frac{q}{r}\right)^m$ (em que $q, r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ e $m \in \mathbb{N}$), ou seja, mantém-se o expoente e dividem-se as bases.

Para dividir potências com o mesmo expoente, **dividem-se as bases** e mantém-se o expoente.

Exemplos:

- $(-5)^3 \times (-6)^3 = [(-5) \times (-6)]^3 = 30^3$
- $14^9 : (-2)^9 = [14 : (-2)]^9 = (-7)^9$

d) Potência de potência

Pode suceder que a base de uma potência seja uma potência. Por exemplo, $(4^2)^3$ é uma potência em que a base é 4^2 e o expoente é 3.

Neste caso, $(4^2)^3 = 4^2 \times 4^2 \times 4^2 = 4^{2+2+2} = 4^{3 \times 2} = 4^6$.

De um modo geral: $(q^m)^n = q^{m \times n}$ ($q \in \mathbb{Q}$ e $m, n \in \mathbb{N}$).

Para simplificar uma potência de potência, mantém-se a base e **multiplicam-se os expoentes**.

Exemplos:

- $(9^3)^5 = 9^{3 \times 5} = 9^{15}$
- $\left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^{3 \times 4} = \left(\frac{5}{6}\right)^{12}$

e) Elevar um número racional a uma potência

Pode suceder que um número racional esteja elevado a uma potência.

Por exemplo, $\left(\frac{3}{2}\right)^{2^3}$ é uma potência em que a base é $\frac{3}{2}$ e o expoente é a potência 2^3 .

Neste caso, $\left(\frac{3}{2}\right)^{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2 \times 2 \times 2} = \left(\frac{3}{2}\right)^8 = \frac{3^8}{2^8}$

De um modo geral: $q^{m^n} = q^{\overbrace{m \times m \times \dots \times m}^{n \text{ vezes}}}$ ($q \in \mathbb{Q}$ e $m, n \in \mathbb{N}$)

Para simplificar uma expressão em que a base é um número racional e o expoente é uma potência, **calcula-se a potência do expoente**.

Exemplos:

- $\left(\frac{1}{2}\right)^{2^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{32}$
- $\left(\frac{2}{5}\right)^{3^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{3 \times 3} = \left(\frac{2}{5}\right)^9$

Pelas alíneas d) e e), verifica-se que, em geral:

$$q^{m^n} \neq (q^m)^n$$

Por exemplo, $\left(\frac{3}{4}\right)^{5^2} \neq \left(\left(\frac{3}{4}\right)^5\right)^2$, porque:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{5^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{5 \times 5} = \left(\frac{3}{4}\right)^{25} \text{ e } \left(\left(\frac{3}{4}\right)^5\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{2 \times 5} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

Como $\left(\frac{3}{4}\right)^{25} \neq \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$, conclui-se que: $\left(\frac{3}{4}\right)^{5^2} \neq \left(\left(\frac{3}{4}\right)^5\right)^2$



Não há regras para **adicionar** ou **subtrair** potências. Tem de se calcular cada potência separadamente e depois efetua-se a adição ou a subtração.

Por exemplo:

$$2^3 + 2^5 = 8 + 32 = 40$$



Exercício resolvido 1

a) Escreve $\left(\frac{1}{9}\right)^5$ sob a forma de uma potência de base $\frac{1}{3}$.

b) Escreve 8^7 sob a forma de uma potência de base 2.

Resolução:

a) Pretende-se $\left(\frac{1}{9}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^?$. Começando por se transformar $\frac{1}{9}$ numa potência de base $\frac{1}{3}$, obtém-se $\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$. Substituindo, fica:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^5 = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2 \times 5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

b) Pretende-se $8^7 = 2^?$. Substituindo 8 por 2^3 , fica: $8^7 = (2^3)^7 = 2^{3 \times 7} = 2^{21}$.

Exercício resolvido 2

Simplifica as potências:

a) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^4$

b) $\left(\frac{1}{10^2}\right)^6$

Resolução:

a) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2 \times 4} = \left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{256}{6561}$

b) $\left(\frac{1}{10^2}\right)^6 = \left(\left(\frac{1}{10}\right)^2\right)^6 = \left(\frac{1}{10}\right)^{2 \times 6} = \left(\frac{1}{10}\right)^{12} = \frac{1^{12}}{10^{12}} = \frac{1}{10^{12}}$

■ Prioridade das operações

Para calcular o valor de uma expressão numérica como, por exemplo:

$$1 + \frac{2}{5} \times \left[(-10)^2 : \frac{4}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right]$$

É necessário respeitar a prioridade das operações:

1.º Operações com potências.

2.º Multiplicação e divisão, da esquerda para a direita.

3.º Adição e subtração.

Se a expressão tiver parênteses, deve começar-se por calcular as operações dentro de parênteses, respeitando as prioridades.

Assim sendo:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{5} \times \left[(-10)^2 : \frac{4}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] &= 1 + \frac{2}{5} \times \left(100 : \frac{4}{2} - \frac{1}{4} \right) = \\ &= 1 + \frac{2}{5} \times \left(100 \times \frac{2}{4} - \frac{1}{4} \right) = 1 + \frac{2}{5} \times \left(\frac{200}{4} - \frac{1}{4} \right) = 1 + \frac{2}{5} \times \frac{199}{4} = \\ &= 1 + \frac{398}{20} = \frac{20}{20} + \frac{398}{20} = \frac{418}{20} = \frac{209}{10} \end{aligned}$$

Curiosidade

As potências também estão presentes no dia a dia.

Sabias que, em informática,

1 Mb = 2^{10} Kb?

Ou seja, 1 Mb = 1024 Kb.

O que deves saber

- Usar as regras das operações com potências.
- Respeitar a prioridade das operações.

Atividades

VERIFICAR A APRENDIZAGEM

MULTIPLICAR POTÊNCIAS COM A MESMA BASE

1 Escreve sob a forma de uma única potência:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^8 \times \left(\frac{3}{4}\right)^9$

c) $(-4,1)^{18} \times (-4,1)^7$

e) $(-2)^4 \times (-2) \times (-2)^3$

b) 10×10^{14}

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{15} \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$

DIVIDIR POTÊNCIAS COM A MESMA BASE

2 Escreve sob a forma de uma única potência:

a) $4^8 : 4^5$

d) $(-7)^{10} : (-7)$

g) $(-9)^{12} : (-9)$

b) $\frac{20^{13}}{20^4}$

e) $\frac{15^6}{15^5}$

h) $(-6) \times (-6)^8 : (-6)^5$

c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{30} : \left(\frac{2}{5}\right)^{18}$

f) $(-2)^{24} : (-2)^5$

i) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 : \left(\frac{1}{9}\right)$

MULTIPLICAR E DIVIDIR POTÊNCIAS COM O MESMO EXPOENTE

3 Escreve sob a forma de uma única potência:

a) $3^{10} \times 5^{10}$

d) $(-21)^2 : (-3)^2$

g) $7^3 : 7^3$

b) $\frac{12^7}{6^7}$

e) $\frac{(-64)^5}{8^5}$

h) $\frac{4^9 \times (-5)^9}{2^9}$

c) $(-6)^{11} \times (-7)^{11}$

f) $(-10)^4 \times (-10)^4$

i) $(-2)^6 \times 5^6 \times (-3)^6$

POTÊNCIA DE POTÊNCIA

4 Copia e completa de modo a obteres uma única potência:

a) $(5^2)^3 = \underbrace{5^2 \times 5^2 \times 5^2}_{3 \text{ vezes}} = 5^{\dots}$

c) $(7^3)^6 = 7^{\dots}$

b) $\left(\left(\frac{3}{8}\right)^7\right)^4 = \left(\frac{3}{8}\right)^7 \times \left(\frac{3}{8}\right)^7 \times \left(\frac{3}{8}\right)^7 \times \left(\frac{3}{8}\right)^7 = \left(\frac{3}{8}\right)^{\dots}$

d) $\left(\left(\frac{4}{9}\right)^5\right)^{10} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\dots}$

5 Copia e completa: «De um modo geral, $(q^m)^n = \underbrace{q^m \times q^m \times \dots \times q^m}_{n \text{ vezes}} = q^{\dots}$ ($q \in \mathbb{Q}$ e $m, n \in \mathbb{N}$).»

6 Escreve sob a forma de uma única potência:

a) $\left(\frac{4^6}{3}\right)^2$

b) $(8^7)^5$

c) $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{12}$

d) $(30^7)^7$

e) $(40^{25})^4$

AUTOAVALIAÇÃO Sei usar as regras das operações com potências?

PRIORIDADE DAS OPERAÇÕES

7 Calcula:

a) $3 + 2 \times 5^2$

d) $2 + 3 [(-3)^2 - 4 \times 3 : 2]$

g) $-4 - (-6 + 12) : (-3) - 7^2$

b) $20 - 10 : (-5)$

e) $(4 - 18) : 2 + 3 \times (-1)^{10}$

h) $\frac{2 \times 3 - 3^3}{7} - (5 - 8)$

c) $(-2)^3 \times 3 + 6 \times (-2)^2$

f) $7 - (-2)^5 : (-2)^3 - 7$

i) $14 - [-1 + (-9)^2] : (-8)$

AUTOAVALIAÇÃO Respeito a prioridade das operações?

Atividades

APLICAR

- 8 Uma empresa de desporto abriu 3^4 lojas em Portugal. Cada loja recebeu 3^5 skates para vender. Escreve sob a forma de uma única potência o número total de skates à venda.
- 9 De cada lado de uma rua existem $(2^4)^2$ pessoas que têm um skate. Escreve sob a forma de uma única potência o número total de skates existentes nessa rua.



- 10 Completa de maneira a obteres o resultado indicado:

- a) $(18^4)^{\dots} = 18^{12}$
 b) $(-5)^4 \times \dots = 35^4$
 c) $21^2 : \dots = 7^2$
 d) $(-6)^5 \times (-6) \times (-6)^{\dots} = (-6)^{10}$
 e) $10^9 : 10^{\dots} = 10^3$
 f) $5 \times (5^{\dots})^6 = 5^{25}$

- 11 Calcula:

- a) $\frac{(-2)^{13} \times (-5)^{13} \times (1^3)^4}{10^{11} \times 10}$
 b) $\frac{2^5 - (-3)^2 \times 2^3}{5}$

- 12 Escreve sob a forma de uma potência de base 5:

- a) 25
 b) $(5^6)^7$
 c) $(-5)^4$
 d) 25^{10}

- 13 Escreve sob a forma de uma potência de base 3:

- a) 27
 b) 3
 c) 9^6
 d) 3×27^2

- 14 Quando se utiliza uma calculadora, é necessário ter o cuidado de verificar se esta é científica ou não.

Lê o comentário da Sofia e responde às questões seguintes.

- 14.1 O resultado certo é 20 ou 14?
- 14.2 Nas calculadoras que dão um resultado errado, como explicas esse erro? Encontra uma forma de se obter o resultado correto com essas calculadoras.
- 14.3 Calcula $2 + 3 \times 4$ nas calculadoras de alguns telemóveis para testá-las.

CALCULEI $2 + 3 \times 4$ NUMA CALCULADORA DO MEU PAI, NA CALCULADORA PADRÃO DO COMPUTADOR E NA CALCULADORA DO MEU TELEMÓVEL. OBTIVE 20.

A MESMA CONTA NA CALCULADORA CIENTÍFICA DÁ 14.



15 Calcula usando sempre que possível as regras de operações com potências.

a) $-(-5)^2 + (5)^4 : (5)^2$

b) $(-4)^3 : (-4)^2 - 1^5$

c) $(15^2)^3 : 3^6 - (5^3)^2$

d) $5^3 \times (-2)^3 - 10^2 - 1^2$

e) $3^3 \times 3^5 : (3^2)^3$

f) $(-3)^5 \times (-2)^5 : 6^2$

g) $\frac{3^4 \times (2^2)^2}{(-2 \times 3)^4}$

h) $\frac{3^3 \times (-1)^{40}}{-3} : \left(-\frac{3}{3^2}\right)$

i) $[(-1)^{702} : 1^8 : (-2)^2]^2$

j) $4^3 : 2^3 \times 2 + 0^9 - 3^5 : (2^2 - 1^{20})^3$

k) $(-3)^{14} : (-3)^{12} \times 2^2$

l) $\frac{(-3)^{50} : (-3)^{10} \times 3^{50}}{6^{50} : (-2)^{50} \times (-3)^{38}}$

16 Uma bailarina tem:

- 3 *maillots*: 1 branco, 1 rosa e 1 preto;
- 3 fitas: uma branca, uma verde e uma azul;
- 3 pares de sapatilhas: um preto, um azul e um branco.

16.1 Determina de quantas maneiras diferentes se pode vestir a bailarina.

16.2 Escreve o número anterior na forma de potência.

17 Um edifício tem 9 andares, cada andar tem 9 apartamentos, cada apartamento tem 9 janelas e cada janela tem 9 vidros.

17.1 Determina quantas janelas tem o edifício.

17.2 Indica o número de vidros existentes no edifício.



18 Mesmo utilizando uma calculadora, as prioridades das operações devem ser respeitadas. Responde às questões seguintes.

18.1 Na tua calculadora, calcula $\frac{-12 + 20}{2 - 4}$ e verifica que o resultado é -4 .

18.2 O Zito escreveu $(-)$ 1 2 $+$ 2 0 $:$ 2 $-$ 4 $=$ na calculadora e obteve o resultado -6 . Porquê?

Explica qual foi o erro do Zito e indica a forma correta de escrever a expressão na calculadora.

19 Desafio

Quanto é metade de 2^{100} ?

1.6

Raiz quadrada

DE REGRESSO AOS BALNEÁRIOS APÓS UM JOGO DA SELECÇÃO NACIONAL DE FUTEBOL, O CAPITÃO FEZ UM PEDIDO A TODOS OS JOGADORES QUE PARTICIPARAM NO ENCONTRO (INCLUINDO OS QUE ENTRARAM DURANTE O JOGO).



DEPOIS DE TODOS TEREM ASSINADO, O CAPITÃO CONTOU 169 ASSINATURAS E EXCLAMOU:

NUNCA TINHA VISTO TANTAS ASSINATURAS!

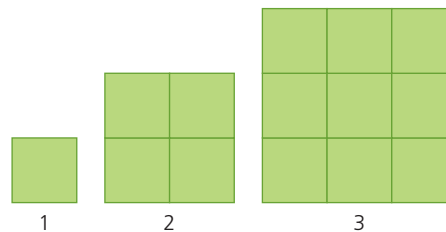
Quantos jogadores da seleção participaram no encontro?

Raiz quadrada

Os **quadrados perfeitos** (0, 1, 4, 9, 16, 25, ...) são os números que podem ser expressos como quadrados de números inteiros não negativos:

$0^2 = 0$	$4^2 = 16$	$8^2 = 64$	$12^2 = 144$
$1^2 = 1$	$5^2 = 25$	$9^2 = 81$	$13^2 = 169$
$2^2 = 4$	$6^2 = 36$	$10^2 = 100$	$14^2 = 196$
$3^2 = 9$	$7^2 = 49$	$11^2 = 121$	$15^2 = 225$ Etc.

Podem ser representados graficamente da seguinte forma:



No 1.º caso, é necessário apenas 1 quadradinho: 1^2

No 2.º caso, são necessários 4 quadradinhos: 2^2

No 3.º caso, são necessários 9 quadradinhos: 3^2

E se o lado medisse 6 unidades de comprimento, quantos quadradinhos seriam precisos?

Neste caso, seriam necessários 6^2 quadradinhos, ou seja, 36 quadradinhos.

Se a e b são números naturais e $a < b$, então, $a^2 < b^2$.

Esta propriedade verifica-se para quaisquer números racionais positivos.

Conclui-se que:

Se q e r são números racionais positivos e $q < r$, então, $q^2 < r^2$.

Exemplos:

- $1,5 < 3,2$, então: $1,5^2 < 3,2^2$

- $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, então: $\left(\frac{1}{3}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Existe algum número que, multiplicado por ele próprio, dê 25?

Por outras palavras, existe algum número cujo quadrado seja 25?

Existem duas soluções: -5 e 5 , uma vez que:

$$(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25 \text{ e } 5^2 = 25.$$

Diz-se que a raiz quadrada de 25 é 5 e escreve-se $\sqrt{25} = 5$.

Existe algum número cujo quadrado seja $\frac{4}{9}$?

Existem duas soluções $-\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{3}$, uma vez que:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} \text{ e } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

Diz-se que a raiz quadrada de $\frac{4}{9}$ é $\frac{2}{3}$ e escreve-se $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

De um modo geral:

A **raiz quadrada** de um quadrado perfeito não nulo (ou de um quociente de quadrados perfeitos) x é o número positivo y , cujo quadrado é x . Escreve-se:

$$\sqrt{x} = y$$

Outros exemplos:

- $\sqrt{9} = 3$. A raiz quadrada de 9 é o número positivo cujo quadrado é 9. É 3, porque $3^2 = 3 \times 3 = 9$.
- $\sqrt{36} = 6$. A raiz quadrada de 36 é 6, porque $6^2 = 6 \times 6 = 36$ e 6 é positivo.
- $\sqrt{64} = 8$. A raiz quadrada de 64 é 8, porque $8^2 = 8 \times 8 = 64$ e 8 é positivo.
- $0^2 = 0$ e zero é o único racional cujo quadrado é zero. Diz-se que a raiz quadrada de 0 é 0 e escreve-se $\sqrt{0} = 0$.

Raízes quadradas de quadrados perfeitos:

$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{169} = 13$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{196} = 14$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{225} = 15$

Para calcular a raiz quadrada de um quadrado perfeito, pode recorrer-se à calculadora (ver margem).

Por exemplo: $\sqrt{529} = 23$

No fim do livro, encontra-se uma tabela que contém quadrados perfeitos.

Exercício resolvido 1

Se um quadrado tem 225 cm^2 de área, qual é o comprimento do seu lado?

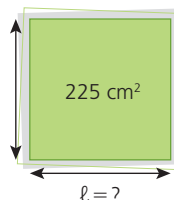
Resolução:

A área de um quadrado obtém-se pela fórmula:

$$A_{\text{quadrado}} = \ell^2. \text{ Neste caso, tem-se } 225 = \ell^2.$$

Temos, então, de descobrir o número positivo que ao quadrado é igual a 225, ou seja, $\sqrt{225}$. Ora, $\sqrt{225} = 15$.

O lado do quadrado mede 15 cm.



Nota

O sinal $\sqrt{\quad}$ chama-se **radical**. Apareceu pela primeira vez impresso em 1525, numa obra alemã.

Nota

Se $\sqrt{x} = y$, então, $y^2 = x$.
Se y é não negativo, $\sqrt{y^2} = y$.

Calculadora

Como calcular $\sqrt{529}$?

- Escreve-se:

$\sqrt{\quad}$ 5 2 9
=

23

- Se a raiz quadrada for a

2.ª opção da tecla $\sqrt{x^2}$,
faz-se:

2nd $\sqrt{x^2}$ 5 2
9 =

ou

SHIFT $\sqrt{x^2}$ 5 2
9 =

- Noutras calculadoras:

5 2 9 $\sqrt{\quad}$

É POR ISSO QUE SE
CHAMA RAIZ QUADRADA.



Exercício resolvido 2

- a) Calcula $\left(\frac{3}{4}\right)^2$.
- b) Quantos números racionais positivos existem com o mesmo quadrado que $\frac{3}{4}$?
- c) Que relação existe entre o quadrado de $\frac{3}{4}$ e o quadrado do seu simétrico?

Resolução:

- a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$
- b) Os racionais positivos inferiores a $\frac{3}{4}$ têm quadrados inferiores a $\frac{9}{16}$ e os racionais positivos superiores a $\frac{3}{4}$ têm quadrados superiores a $\frac{9}{16}$. Desta forma, $\frac{3}{4}$ é o único número racional positivo cujo quadrado é igual a $\frac{9}{16}$.
- c) O simétrico de $\frac{3}{4}$ é $-\frac{3}{4}$. Tem-se que $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$, porque o expoente 2 é par.
Desta forma, um número e o seu simétrico têm o mesmo quadrado.

■ Propriedades da raiz quadrada

Será que $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9}$?

$$\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36}$$

Como $6^2 = 36$, então, $\sqrt{36} = 6$.

Vejamos agora:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{4} \times \sqrt{9} & = & 2 \times 3 = 6 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2 & & 3 \end{array}$$

Conclui-se, assim, que:

$$\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9}$$

Será que $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$?

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{3 \times 3}{2 \times 2}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

Por outro lado:

$$\sqrt{9} = 3 \text{ e } \sqrt{4} = 2.$$

$$\text{Assim: } \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Conclui-se que } \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}.$$

Dados dois números racionais $q = \frac{a^2}{b^2}$ e $r = \frac{c^2}{d^2}$, em que a, b, c e d são números naturais, tem-se:

$$q \times r = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2 \times c^2}{b^2 \times d^2} = \frac{(a \times c)^2}{(b \times d)^2}$$

Como $q \times r = \left(\frac{a \times c}{b \times d}\right)^2$, por definição de raiz quadrada tem-se que:

$$\sqrt{q \times r} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \sqrt{q} \times \sqrt{r}$$



Não há raízes quadradas de números negativos porque nenhum número multiplicado por ele próprio pode dar um resultado negativo.

Nas condições anteriores:

$$\frac{q}{r} = \frac{\frac{a^2}{b^2}}{\frac{c^2}{d^2}} = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{d^2}{c^2} = \frac{(a \times d)^2}{(b \times c)^2}$$

Como $\frac{q}{r} = \left(\frac{a \times d}{b \times c}\right)^2$, por definição de raiz quadrada tem-se que:

$$\sqrt{\frac{q}{r}} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}$$

Em geral:

Se q e r são quocientes de quadrados perfeitos, então também o são $q \times r$ e $\frac{q}{r}$, com $r \neq 0$. Além disso:

- $\sqrt{q \times r} = \sqrt{q} \times \sqrt{r}$;
- $\sqrt{\frac{q}{r}} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}$ (com $r \neq 0$).

Exercício resolvido 3

Exprime na forma de dízima:

- $\sqrt{0,000081}$
- $\sqrt{0,0625}$
- $\sqrt{0,000064}$

Resolução:

$$\text{a) } 0,000081 = \frac{81}{1000\,000} = \frac{9^2}{10^6} = \frac{9^2}{10^{3 \times 2}} = \left(\frac{9}{10^3}\right)^2$$

de onde se conclui que:

$$\sqrt{0,000081} = \frac{9}{10^3} = \frac{9}{1000} = 0,009$$

$$\text{b) } 0,0625 = \frac{625}{10\,000} = \frac{25^2}{10^4} = \frac{25^2}{10^{2 \times 2}} = \left(\frac{25}{10^2}\right)^2$$

$$\sqrt{0,0625} = \frac{25}{100} = 0,25$$

$$\text{c) } 0,000064 = \frac{64}{1000\,000} = \frac{8^2}{10^6} = \frac{8^2}{10^{2 \times 3}} = \left(\frac{8}{10^3}\right)^2$$

$$\sqrt{0,000064} = \frac{8}{10^3} = \frac{8}{1000} = 0,008$$

Repara

Por exemplo, $\sqrt{0,81}$ também se pode escrever

como $\sqrt{\frac{81}{100}}$ e:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{81}{100}} &= \sqrt{\frac{9^2}{10^2}} = \\ &= \frac{9}{10} = 0,9 \end{aligned}$$

O que deves saber

- Calcular a raiz quadrada de quadrados perfeitos e de quocientes de quadrados perfeitos.
- Aplicar propriedades da multiplicação e da divisão de raízes quadradas.

Atividades

VERIFICAR A APRENDIZAGEM

QUADRADOS PERFEITOS

1 Copia e completa:

- | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|
| a) $1^2 = \dots$ | f) $6^2 = \dots$ | k) $11^2 = \dots$ |
| b) $2^2 = \dots$ | g) $7^2 = \dots$ | l) $12^2 = \dots$ |
| c) $3^2 = \dots$ | h) $8^2 = \dots$ | m) $13^2 = \dots$ |
| d) $4^2 = \dots$ | i) $9^2 = \dots$ | n) $14^2 = \dots$ |
| e) $5^2 = \dots$ | j) $10^2 = \dots$ | o) $15^2 = \dots$ |

RAIZ QUADRADA DE UM NÚMERO

2 Copia e completa:

- | | |
|--|-------------------------|
| a) $\sqrt{9} = \dots$ (porque $\dots^2 = \dots \times \dots = 9$) | f) $\sqrt{0} = \dots$ |
| b) $\sqrt{25} = \dots$ (porque $\dots^2 = \dots \times \dots = 25$) | g) $\sqrt{1} = \dots$ |
| c) $\sqrt{49} = \dots$ (porque $\dots^2 = 49$) | h) $\sqrt{121} = \dots$ |
| d) $\sqrt{81} = \dots$ (porque $\dots^2 = 81$) | i) $\sqrt{\dots} = 6$ |
| e) $\sqrt{16} = \dots$ (porque $\dots$) | j) $\sqrt{\dots} = 8$ |

3 Consulta a tabela de quadrados perfeitos que se encontra no fim do manual e descobre o valor das raízes:

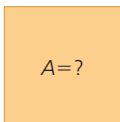
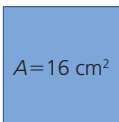
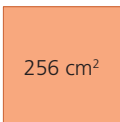
- | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|
| a) $\sqrt{324}$ | b) $\sqrt{625}$ | c) $\sqrt{1369}$ |
|-----------------|-----------------|------------------|

AUTOAVALIAÇÃO Sei calcular raízes quadradas?

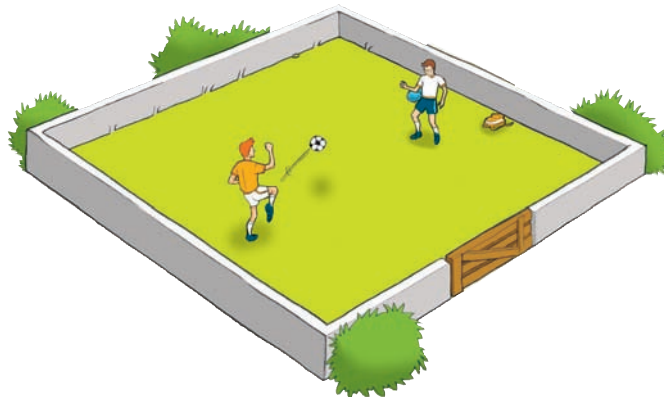
APLICAR

4 A Sofia e a Joana têm exatamente a mesma altura. Multiplicando os números correspondentes às suas alturas, em centímetros, obtém-se 20 449. Qual é a altura das duas amigas, em metros?

5 Determina a área quando é conhecido o lado ou determina o lado quando é conhecida a área.

- | | | | |
|---|---|--|--|
| a) 
$A = ?$
$\ell = 13 \text{ cm}$ | b) 
$A = 16 \text{ cm}^2$
$\ell = ?$ | c) 
256 cm^2
$\ell = ?$ | d) 
576 mm^2
$\ell = ?$ |
|---|---|--|--|

6 O Diogo costuma jogar à bola com o Zito num terreno do pai. Esse terreno é quadrado e o Diogo ouviu o pai dizer que tem uma área de 400 m^2 . Se os dois amigos fizerem balizas no centro de dois lados opostos, a que distância ficam as balizas?



- 7** Numa escola de *kickboxing*, estão sempre presentes 7 alunos. Em vez de comprar cada um a sua garrafa de água, decidiram que, em cada aula, seria um aluno diferente a comprar garrafas para todos (neste caso, 7 garrafas).

7.1 Qual foi o total de garrafas compradas depois de já todos terem comprado uma vez?

7.2 No ano seguinte, inscreveram-se novos alunos, mantendo-se o «esquema da água». Após todos terem comprado água uma vez, tinham sido compradas 484 garrafas. Quantos novos alunos se inscreveram?

- 8** Compara os resultados de:

a) $\sqrt{4 \times 25}$ e $\sqrt{4} \times \sqrt{25}$

b) $\sqrt{9 \times 16}$ e $\sqrt{9} \times \sqrt{16}$

c) $\sqrt{\frac{36}{9}}$ e $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}$

- 9** Sem utilizar a calculadora, calcula:

a) $\sqrt{49 \times 81}$

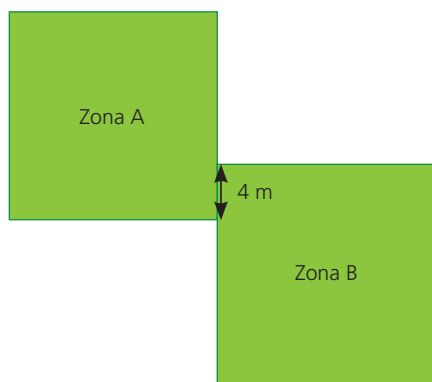
d) $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}}$

b) $\sqrt{4} \times \sqrt{16}$

e) $\sqrt{2^2 \times 4^2 \times 5^2}$

c) $\sqrt{\frac{144}{4}}$

- 10** Um jardim está dividido em dois quadrados, de acordo com a figura:



10.1 Sabendo que a área total é de 481 m^2 e que a área da zona B tem 256 m^2 , determina as medidas dos lados de cada um dos terrenos.

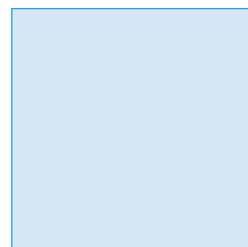
10.2 Pretende-se vedar os terrenos, mantendo a zona sobreposta aberta (4 metros).

Quantos metros de rede se devem comprar para vedar os dois terrenos mantendo esse espaço aberto?

- 11** A Sofia quer cobrir a sua piscina com um toldo quadrado com uma área de 81 m^2 .

11.1 O pai da Sofia pretende colocar ainda uma rede de proteção à volta da piscina. Sabendo que o metro linear de rede custa 2,3 €, que valor vai o pai da Sofia gastar?

11.2 Sabendo que a piscina tem três metros de profundidade, calcula a quantidade de água, em litros, necessária para encher a piscina.





■ Raiz cúbica

Os **cubos perfeitos** (0, 1, 8, 27, ...) são os cubos dos números inteiros não negativos:

$$0^3 = 0$$

$$3^3 = 27$$

$$6^3 = 216$$

$$9^3 = 729$$

$$1^3 = 1$$

$$4^3 = 64$$

$$7^3 = 343$$

$$10^3 = 1000$$

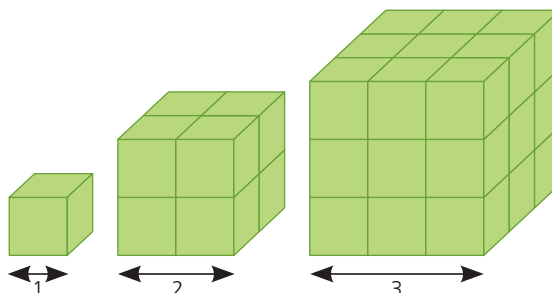
$$2^3 = 8$$

$$5^3 = 125$$

$$8^3 = 512$$

Etc

Estes podem ser representados graficamente da seguinte forma:



No 1.º caso, é necessário apenas 1 cubinho: 1^3

No 2.º caso, são necessários 8 cubinhos: 2^3

No 3.º caso, são necessários 27 cubinhos: 3^3

E se a aresta medisse 10 unidades, quantos cubinhos seriam necessários?

Neste caso, seriam necessários 10^3 cubinhos, ou seja, 1000 cubinhos.

Se a e b são naturais e $a < b$, então, $a^3 < b^3$.

Esta propriedade verifica-se para quaisquer números racionais.

Se q e r são números racionais e $q < r$, então, $q^3 < r^3$.

Exemplos:

- $0,8 < 2,1$, então: $0,8^3 < 2,1^3$

- $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$, então: $\left(\frac{3}{8}\right)^3 < \left(\frac{5}{8}\right)^3$

- $-3 < -2$, então: $(-3)^3 < (-2)^3$

Existe algum número cujo cubo é 125?

Tem-se que: $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

Além disso, 5 é o único número cujo cubo é igual a 125.

Diz-se que a raiz cúbica de 125 é 5 e escreve-se $\sqrt[3]{125} = 5$.

A **raiz cúbica** de um cubo perfeito (ou simétrico) x é o número y cujo cubo é x . Escreve-se:

$$\sqrt[3]{x} = y$$

Exemplos:

- $\sqrt[3]{8} = 2$, porque $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.
- $\sqrt[3]{1000} = 10$, porque $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$.
- $\sqrt[3]{0} = 0$, porque $0^3 = 0$.

Raízes cúbicas de cubos perfeitos:

$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{27} = 3$	$\sqrt[3]{216} = 6$	$\sqrt[3]{729} = 9$
$\sqrt[3]{1} = 1$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt[3]{343} = 7$	$\sqrt[3]{1000} = 10$
$\sqrt[3]{8} = 2$	$\sqrt[3]{125} = 5$	$\sqrt[3]{512} = 8$	etc.

Nota ainda que:

- $\sqrt[3]{-8} = -2$, porque $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$.
- $\sqrt[3]{-125} = -5$, porque $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$.

Também se podem calcular raízes cúbicas de quocientes de cubos perfeitos (ou do seu simétrico).

Exemplos:

- $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{3}{2}$
- $\sqrt[3]{-\frac{125}{512}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{5}{8}\right)^3} = -\frac{5}{8}$

Um número e a sua raiz cúbica têm sempre o mesmo sinal.

Exercício resolvido 1

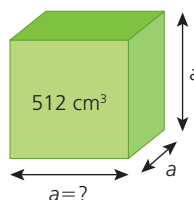
Se o volume de um cubo é de 512 cm^3 , quanto mede a sua aresta?

Resolução:

Sabemos que o volume de um cubo se obtém através da fórmula $V_{\text{cubo}} = a^3$. Neste caso, $512 = a^3$.

Temos, então, de descobrir o número cujo cubo é igual a 512, ou seja, $\sqrt[3]{512}$. Ora, $\sqrt[3]{512} = 8$.

A aresta do cubo mede 8 cm.



Calculadora

Como calcular $\sqrt[3]{512}$?

Consoante a calculadora:

• **SHIFT** **x³** **5** **1**
2 **=**

8

OU

• **3** **2nd** **√** **5**
1 **2** **=**

8



É POR ISSO QUE SE CHAMA RAIZ CÚBICA.

ARESTA =
 $\sqrt[3]{\text{VOLUME DO CUBO}}$



Exercício resolvido 2

- a) Calcule $\left(\frac{5}{2}\right)^3$.
- b) Quantos números racionais positivos existem com o mesmo cubo que $\frac{5}{2}$?
- c) Quantos números racionais negativos existem cujo cubo é igual a $\frac{125}{8}$?

Resolução:

- a) $\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$
- b) Os racionais positivos inferiores a $\frac{5}{2}$ têm cubos inferiores a $\frac{125}{8}$ e os racionais positivos superiores a $\frac{5}{2}$ têm cubos superiores a $\frac{125}{8}$. Desta forma, $\frac{5}{2}$ é o único número racional positivo cujo cubo é igual a $\frac{125}{8}$.
- c) O cubo de um número negativo é negativo, pelo que não existe nenhum número negativo cujo cubo seja igual a $\frac{125}{8}$. Consequentemente, $\frac{5}{2}$ é o único número racional que elevado ao cubo é igual a $\frac{125}{8}$.

■ Propriedades da raiz cúbica

Será que $\sqrt[3]{-8}$ é igual a $-\sqrt[3]{8}$?

$$\sqrt[3]{-8} = -2 = -\sqrt[3]{8}$$

Será que $\sqrt[3]{27 \times 8} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{8}$?

$$\text{Tem-se que: } \sqrt[3]{27 \times 8} = \sqrt[3]{216}$$

O número que, ao cubo, dá 216 é 6, ou seja, $\sqrt[3]{216} = 6$.

$$\text{Vejamos agora: } \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{8} = 3 \times 2 = 6$$

$\downarrow \qquad \downarrow$
3 2

$$\text{Conclui-se, assim, que: } \sqrt[3]{27 \times 8} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{8}$$

Será que $\sqrt[3]{\frac{216}{27}} = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{27}}$?

$$\sqrt[3]{\frac{216}{27}} = \sqrt[3]{\frac{6 \times 6 \times 6}{3 \times 3 \times 3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{6}{3}\right)^3} = \frac{6}{3} = 2$$

Por outro lado, $\sqrt[3]{216} = 6$ e $\sqrt[3]{27} = 3$.

$$\text{Assim: } \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\text{Conclui-se que: } \sqrt[3]{\frac{216}{27}} = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{27}}.$$

Em geral:

Se q e r são cubos perfeitos (ou simétricos) ou quocientes de cubos perfeitos (ou simétricos), então também o são $q \times r$ e $\frac{q}{r}$ ($r \neq 0$). Além disso:

- $\sqrt[3]{-q} = -\sqrt[3]{q}$
- $\sqrt[3]{q \times r} = \sqrt[3]{q} \times \sqrt[3]{r}$
- $\sqrt[3]{\frac{q}{r}} = \frac{\sqrt[3]{q}}{\sqrt[3]{r}}$

Exercício resolvido 3

Exprime na forma de dízima:

a) $\sqrt[3]{-\frac{729}{125}}$

b) $\sqrt[3]{0,027}$

Resolução:

- a) Por consulta da tabela que se encontra no final do manual, $125 = 5^3$ e $729 = 9^3$.

Assim: $\sqrt[3]{-\frac{729}{125}} = -\sqrt[3]{\frac{729}{125}} = -\frac{9}{5} = -\frac{18}{10} = -1,8$

- b) $0,027 = \frac{27}{1000} = \frac{3^3}{10^3} = \left(\frac{3}{10}\right)^3$, pelo que $\sqrt[3]{0,027} = \frac{3}{10} = 0,3$.

Nota

A igualdade $\sqrt{a^2} = a$ não se verifica quando a é negativo.

Por exemplo, se $a = -1$:

$$\sqrt{(-1)^2} = 1 \neq -1$$

De um modo geral,

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Repara:

Por exemplo, $\sqrt[3]{0,000008}$ também se pode escrever

como $\sqrt[3]{\frac{8}{1000000}}$, assim:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{1000000}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{10^6}} =$$

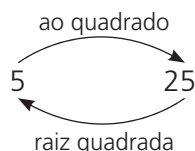
$$= \sqrt[3]{\frac{2^3}{10^{3 \times 2}}} =$$

$$= \frac{2}{10^2} = 0,02$$

Potências e raízes

De um modo geral:

Se a é não negativo $\sqrt{a^2} = a$ e se a é um quadrado perfeito $(\sqrt{a})^2 = a$

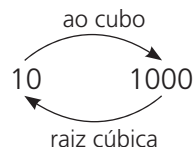


Exemplos:

- $\sqrt{5^2} = 5$
- $(\sqrt{4})^2 = 4$
- $\sqrt{9} \times \sqrt{9} \times \sqrt{9} = (\sqrt{9})^3 = 9$

De um modo geral:

$\sqrt[3]{a^3} = a$ e se a é um cubo perfeito $(\sqrt[3]{a})^3 = a$



Exemplos:

- $\sqrt[3]{10^3} = 10$
- $(\sqrt[3]{-8})^3 = -8$
- $\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{27} = (\sqrt[3]{27})^3 = 27$

O que deves saber

- Calcular a raiz cúbica de cubos perfeitos.
- Relacionar potências e raízes.

Atividades

VERIFICAR A APRENDIZAGEM

CUBOS PERFEITOS

1 Copia e completa:

a) $1^3 = \dots$

b) $2^3 = \dots$

c) $3^3 = \dots$

d) $4^3 = \dots$

e) $5^3 = \dots$

f) $6^3 = \dots$

g) $7^3 = \dots$

h) $8^3 = \dots$

i) $9^3 = \dots$

j) $10^3 = \dots$

RAIZ CÚBICA DE UM NÚMERO

2 Copia e completa:

a) $\sqrt[3]{8} = \dots$ (porque $\dots^3 = \dots \times \dots \times \dots = 8$)

b) $\sqrt[3]{27} = \dots$ (porque $\dots^3 = \dots \times \dots \times \dots = 27$)

c) $\sqrt[3]{125} = \dots$ (porque $\dots^3 = 125$)

d) $\sqrt[3]{-125} = \dots$ (porque $\dots^3 = -125$)

e) $\sqrt[3]{1000} = \dots$ (porque $\dots^3 = \dots$)

f) $\sqrt[3]{0} = \dots$

g) $\sqrt[3]{1} = \dots$

h) $\sqrt[3]{-1} = \dots$

i) $\sqrt[3]{\dots} = \dots$ (porque $11^3 = 1331$)

j) $\sqrt[3]{\dots} = \dots$ (porque $(-15)^3 = -3375$)

3 Usa a tabela de cubos perfeitos que se encontra no fim do manual para obteres os resultados e escreve o resultado.

a) $\sqrt[3]{2197}$

b) $\sqrt[3]{729}$

c) $\sqrt[3]{-64}$

AUTOAVALIAÇÃO Sei calcular raízes cúbicas?

4 Completa com os símbolos < e >.

a) $2 \dots 5$, então, $2^3 \dots 5^3$

b) $\frac{2}{5} \dots \frac{1}{5}$, então, $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \dots \left(\frac{1}{5}\right)^3$

c) $-\frac{1}{3} \dots -\frac{1}{6}$, então, $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \dots \left(-\frac{1}{6}\right)^3$

POTÊNCIAS E RAÍZES

5 Comenta a afirmação:

«A raiz cúbica desfaz o que o cubo faz.»

SUGESTÃO: Calcula o cubo de 2 e, a seguir, calcula a raiz cúbica do número obtido.

6

Calcula:

a) $\sqrt[3]{12^3}$

c) $\sqrt[3]{-16^3}$

b) $\sqrt[3]{5^3}$

d) $\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{27}$

AUTOAVALIAÇÃO Sei relacionar potências e raízes?**APLICAR**

7

Responde às perguntas seguintes sobre volumes.

7.1 Se um cubo tem 10 cm de aresta, qual é o seu volume?

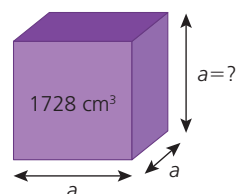
7.2 Se o volume de um cubo é de 5832 cm^3 , quanto mede cada uma das suas arestas?

8

A Joana quer construir uma caixa cúbica de cartão (sem tampa), para colocar um presente que vai oferecer à tia. O volume da caixa tem de ser 1728 cm^3 .

8.1 Quanto medirá cada aresta da caixa?

8.2 Qual é a área de cartão necessária para construir a caixa?



9

Compara os resultados de:

a) $\sqrt[3]{27 \times 8}$ e $\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{8}$

b) $\sqrt[3]{-2 \times 25}$ e $\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{25}$

c) $\sqrt[3]{\frac{125}{343}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{343}}$

10

Sem utilizar a calculadora, calcula:

a) $\sqrt[3]{27 \times 125}$

d) $\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}}$

g) $\sqrt[3]{64} + 2 \times \sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{27}$

b) $\sqrt[3]{-27 \times 8}$

e) $\sqrt[3]{\frac{27^4}{27}}$

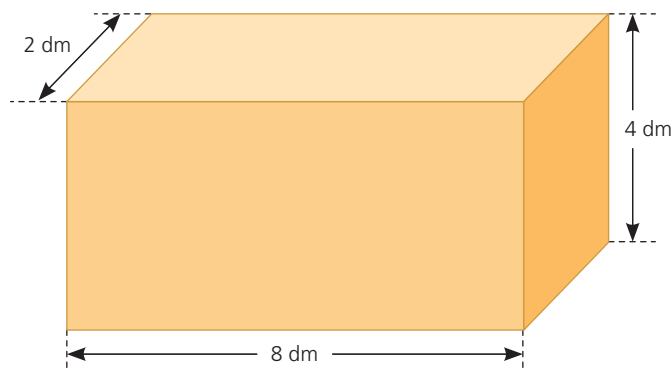
h) $(3^2)^3 : (3)^5 \times \sqrt[3]{27} + 4 \times \sqrt[3]{1000}$

c) $\sqrt[3]{\frac{-8}{-64}}$

f) $\sqrt[3]{(-8)^3}$

11

Uma caixa tem as dimensões assinaladas na figura:



Pretende-se construir um cubo que tem a mesma capacidade de arrumação. Qual deve ser o valor da aresta?

12

A Joana quer construir um aquário de forma cúbica, sem tampa, com 729 dm^3 de volume. Determina, em cm^2 , a quantidade de vidro de que a Joana vai precisar.

13

Traduz em linguagem matemática a seguinte frase:

«A diferença entre o triplo da raiz cúbica de 125 e o dobro da raiz quadrada de 64.»

Síntese

Multiplicação e divisão de números racionais

Regras dos sinais na multiplicação

$$+ \times + = +$$

$$- \times - = +$$

$$+ \times - = -$$

$$- \times + = -$$

Exemplos:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} &= \frac{6}{20} = \frac{3}{10} & \bullet 8 \times (-8) &= -64 \\ \bullet -6 \times (-7) &= +42 & \bullet -1 \times \frac{1}{9} &= -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

Regras dos sinais na divisão

$$+ : + = +$$

$$- : - = +$$

$$+ : - = -$$

$$- : + = -$$

Exemplos:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{30}{3} : \frac{1}{2} &= \frac{60}{3} = 20 & \bullet 8 : (-2) &= -4 \\ \bullet -21 : (-7) &= +3 & \bullet \frac{-4}{3} : \frac{5}{3} &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Simétrico

O produto de -1 por um número racional q é igual ao simétrico desse número:

$$(-1) \times q = q \times (-1) = -q$$

Exemplo:

O simétrico de $\frac{1}{9}$ é:

$$(-1) \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \times (-1) = -\frac{1}{9}$$

Inverso

Dois números são inversos um do outro quando o respectivo produto for igual a 1.

Exemplo:

$\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{2}$ são inversos porque:

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1$$

Potências de base racional e expoente natural

Base racional positiva

$$q^n = \underbrace{q \times q \times \dots \times q}_{n \text{ vezes}} \quad q^1 = q$$

Exemplos:

$$\begin{aligned} \bullet 4^2 &= 4 \times 4 = 16 \\ \bullet 2^3 &= 2 \times 2 \times 2 = 8 \\ \bullet \left(\frac{3}{5}\right)^2 &= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25} \\ \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^6 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

Uma potência de **base positiva** é sempre um número **positivo**.

Base racional negativa

- Uma potência de **base negativa** e **expoente par** é um número **positivo**.

Exemplos: $(-10)^4 = +10^4 = 10\,000$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = +\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

- Uma potência de **base negativa** e **expoente ímpar** é um número **negativo**.

Exemplos: $(-10)^5 = -10^5 = -100\,000$

$$(-4)^3 = -4^3 = -64$$

$$(-3,1)^3 = -3,1^3 = -29,791$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\left(\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1^3}{2^3} = -\frac{1}{8}$$

Operações com potências

- Multiplicar e dividir potências com a mesma base: $q^m \times q^n = q^{m+n}$; $q^m : q^n = q^{m-n}$
- Multiplicar e dividir potências com o mesmo expoente: $q^m \times r^m = (q \times r)^m$; $q^m : r^m = (q : r)^m$
- Potência de potência: $(q^m)^n = q^{m \times n}$
- Elevar um número racional a uma potência: $q^{m^n} = \overbrace{q^{m \times m \times \dots \times m}}^{n \text{ vezes}}$

Prioridade das operações

Operações com potências → Multiplicação e divisão → Adição e subtração

Se a expressão tiver parênteses, deve começar-se por calcular as operações dentro de parênteses, respeitando as prioridades.

Raiz quadrada e raiz cúbica

Raiz quadrada

• Quadrados perfeitos

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...

Exemplo:

- $\sqrt{9} = 3$ (porque $3^2 = 3 \times 3 = 9$ e 3 é positivo)
- $\sqrt{25} = 5$ (porque $5^2 = 5 \times 5 = 25$ e 5 é positivo)

Raiz cúbica

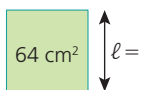
• Cubos perfeitos

0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, ...

Exemplo:

- $\sqrt[3]{8} = 2$ (porque $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$)
- $\sqrt[3]{125} = 5$ (porque $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$)

Comprimento do lado de um quadrado



Lado = $\sqrt{\text{Área}}$
Lado = $\sqrt{64} = 8$ O lado mede 8 cm.

Comprimento da aresta de um cubo



Aresta = $\sqrt[3]{\text{Volume}}$
Aresta = $\sqrt[3]{27} = 3$ A aresta mede 3 cm.

Potências e raízes

- A raiz quadrada anula-se com o quadrado (para números não negativos).

Exemplos:

- $\sqrt{6^2} = 6$
- $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$

- $\sqrt{4} \times \sqrt{4} = (\sqrt{4})^2 = 4$

- A raiz cúbica anula-se com o cubo.

Exemplos:

- $\sqrt[3]{5^3} = 5$
- $\sqrt[3]{\left(-\frac{2}{3}\right)^3} = -\frac{2}{3}$

- $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{8} = (\sqrt[3]{8})^3 = 8$

Raiz quadrada e raiz cúbica de um produto

- $\sqrt{q \times r} = \sqrt{q} \times \sqrt{r}$
- $\sqrt[3]{q \times r} = \sqrt[3]{q} \times \sqrt[3]{r}$

Raiz quadrada e raiz cúbica de um quociente

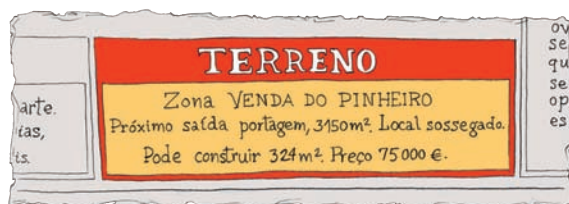
- $\sqrt{\frac{q}{r}} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} \quad (r \neq 0)$
- $\sqrt[3]{\frac{q}{r}} = \frac{\sqrt[3]{q}}{\sqrt[3]{r}} \quad (r \neq 0)$

Atividades globais

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

Das quatro alternativas, escolhe a única opção correta.

- 1 A entrada de uma gruta encontra-se a uma altitude de 150 m e a parte mais baixa da mesma encontra-se a -230 m. Qual é a diferença de altitude entre a entrada e a parte mais baixa da gruta?
A. -380 m **B.** -80 m **C.** 80 m **D.** 380 m
- 2 Qual é o produto entre o simétrico de $-\frac{1}{2}$ e metade de -8 ?
A. 2 **B.** 4 **C.** -8 **D.** -2
- 3 Usando a propriedade distributiva, $(-3) \times (2 - \frac{10}{4}) = ?$
A. $-6 - \frac{10}{4}$ **B.** $-6 + \frac{30}{4}$ **C.** $6 - \frac{30}{4}$ **D.** $-1 - 13$
- 4 Qual das seguintes potências tem o valor menor?
A. $(-\frac{2}{3})^2$ **B.** $(-2)^4$ **C.** $(-2)^3$ **D.** $(-1)^5$
- 5 Qual das expressões seguintes é igual a 5^{12} ?
A. $5^3 \times 5 \times 5^9$ **B.** $5^{10} : 5^2$ **C.** $2^{12} \times 3^{12}$ **D.** $(5^3)^4$
- 6 Se alguém quisesse construir uma casa com base quadrada no terreno apresentado no anúncio, qual seria o comprimento máximo da casa?
A. 18 m **C.** $56,12$ m
B. 24 m **D.** 81 m
- 7 Qual das seguintes igualdades é falsa?
A. $\sqrt[3]{1000} = 10$ **B.** $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}} = \frac{7}{3}$ **C.** $\sqrt[3]{-8} = 2$ **D.** $\sqrt{81} = 9$
- 8 $1 + 2 \times 5 + \sqrt{6} \times \sqrt{6} = ?$
A. 11 **B.** 17 **C.** 21 **D.** 47
- 9 A expressão $-\left(\frac{2}{9} + 1\right)$ é equivalente a:
A. $-\frac{2}{9} + 1$ **B.** $\frac{2}{9} + 1$ **C.** $-\frac{2}{9} - 1$ **D.** $\frac{2}{9} - 1$



EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

- 10 Calcula:
 - a) $\left(-\frac{1}{13}\right) + \left(-\frac{71}{13}\right)$
 - b) $\left(+\frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + 3 - \frac{3}{2}\right)$
 - c) $\left(-\frac{1}{6}\right) \times (-3) + \left(-\frac{1}{3} + 1 - \frac{4}{3}\right)$
 - d) $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{81}} - \sqrt{\frac{16}{81}}$
 - e) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} + \sqrt[3]{64} - \sqrt{\frac{1}{4}}$
 - f) $(-2)^3 \times \sqrt{\frac{25}{4}} \times \sqrt{\frac{9}{4}}$
 - g) $\frac{(13^2)^6 \times 13 \times 13^8}{13^{19}}$
 - h) $\frac{2^{17} \times (-3)^{17}}{(-6)^{10} \times (-6)^5}$
 - i) $1 + 2 \times \sqrt[3]{5^3} \times (\sqrt{4})^2$
 - j) $\frac{(\sqrt{25} - \sqrt{9}) \times 2^{102}}{(2^{25})^4}$

CUIDADO COM AS PRIORIDADES!

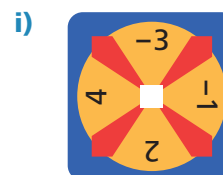
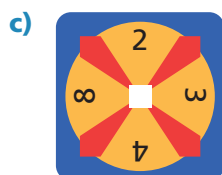
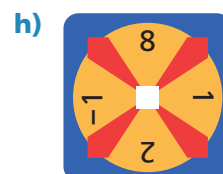
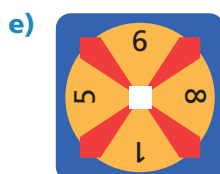
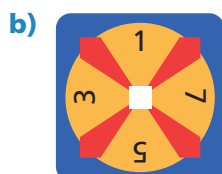
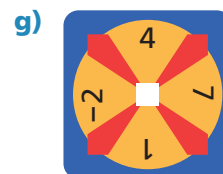
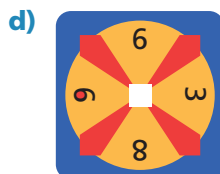
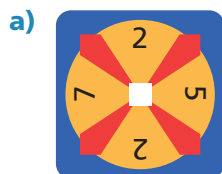


11 Jogo O Jogo do 24

O objetivo do Jogo do 24 é obter o número 24. Em cada cartão, são apresentados quatro números que podes multiplicar, adicionar, subtrair ou dividir, de modo a obteres o número 24. Os quatro números devem ser usados e cada um só pode ser utilizado uma vez.

Exemplo

$$(7 - 1) \times (8 : 2) = 6 \times 4 = 24$$



- 12 A Joana colocou em cima da cama três pares de calças (umas de ganga, umas pretas e umas cinzentas) e três *T-shirts* (uma amarela, uma vermelha e uma laranja). De quantas maneiras diferentes se pode vestir?



- 13 A Sofia tem, no seu roupeiro, o mesmo número de saias e de camisas. Fez uma multiplicação e descobriu que se podia vestir de 256 maneiras diferentes. Quantas saias e quantas camisas tem?



- 14 É possível equilibrar numa balança quatro cubos feitos do mesmo material com 6, 8, 10 e 12 cm de aresta?



- 15 O Zito tem uma caixa, sem tampa, com a forma de um cubo, onde quer guardar os seus CD. O volume da caixa é de 2197 cm^3 . A caixa de cada CD tem 14 cm de comprimento, 12,5 cm de largura e 0,5 cm de espessura.

15.1 Explica como cabem os CD na caixa.

15.2 Quantos CD podem ser guardados na caixa?

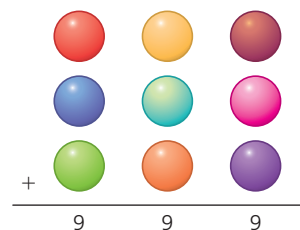
- 16 Quantos cubos com 2 cm de aresta cabem num cubo com 6 cm de aresta?



Atividades globais

17 Desafio 999

Distribui cada um dos 9 primeiros números naturais (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9) pelas bolas, de modo que a soma dos três números seja 999.



18 Desafio 1, 2, 3 e 4

Usando os quatro algarismos 1, 2, 3 e 4 (por esta ordem), as operações +, -, ×, : e $\sqrt{\quad}$ e os parênteses que quiseres, obtém os números inteiros de 0 a 10.

Por exemplo, para obter 5: $\sqrt{1 + 2 \times 3 \times 4} = 5$.

19 Desafio Quadrados mágicos

Num quadrado mágico, a soma dos números em cada linha, coluna ou diagonal é sempre igual (soma mágica). Arruma os números escritos nos quadrados de forma a obteres quadrados mágicos.

a)

0	1	2
3	4	5
6	7	8

A soma mágica é 12.

b)

-4	-3	-2
-1	0	1
2	3	4

A soma mágica é 0.

c)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

A soma mágica é 15.



CANGURU MATEMÁTICO SEM FRONTEIRAS

O Canguru Matemático sem Fronteiras é um dos concursos de Matemática mais conhecidos em todo o mundo. Todos os anos, milhões de alunos testam as suas capacidades matemáticas.



20

Estavam 60 pássaros em três árvores. A dado momento, 6 pássaros voaram da primeira árvore, 8 voaram da segunda árvore e 4 voaram da terceira árvore. Ficou, então, o mesmo número de pássaros em cada uma das árvores. Quantos pássaros estavam inicialmente na segunda árvore?

A. 26

B. 24

C. 22

D. 21

E. 20

Prova «Benjamim», 2007



OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

As Olimpíadas Portuguesas de Matemática são um concurso de problemas, dirigido aos estudantes do 2.º Ciclo, 3.º Ciclo e Ensino Secundário, que visa incentivar e desenvolver o gosto pela Matemática.



21

No circo, as entradas custam 7 euros para crianças e 12 euros para adultos. Num domingo, cada adulto comprou, além do seu bilhete, mais dois bilhetes para crianças, e o circo faturou 1638 euros. Quantas entradas se venderam nesse domingo?

A. 63

B. 86

C. 136

D. 189

E. 234

XXV OPM, Pré-Olimpíadas, 1.ª Eliminatória

CONVIVER COM A MATEMÁTICA

- 22** As focas têm de subir à superfície para respirarem, mesmo quando estão a dormir. O Diogo observou uma foca durante uma hora. Quando começou a observá-la, a foca, que se encontrava à superfície, inspirou e mergulhou. Após chegar ao fundo e adormecer, começou a subir lentamente. A subida demorou 8 minutos até a foca alcançar a superfície e respirar. Depois, mergulhou novamente e chegou ao fundo do mar ao fim de 3 minutos. O Diogo reparou que todo esse processo se repetia segundo um ritmo regular.

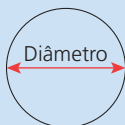


Ao fim de uma hora, a foca estava:

- A.** No fundo do mar. **C.** A respirar.
B. A caminho da superfície. **D.** A caminho do fundo.
- 23** Os líquenes são seres vivos muito simples que se desenvolvem como placas de várias cores na superfície das árvores ou nas rochas expostas à humidade e ao sol. Uma das consequências do aquecimento global no nosso planeta é o degelo de alguns glaciares. Doze anos após o desaparecimento do gelo, os líquenes aparecem nas rochas.

Durante o seu crescimento, cada líquen desenvolve-se numa forma quase circular. A relação entre o **diâmetro** do círculo (em milímetros) e a **idade** do líquen pode ser calculada, aproximadamente, pela fórmula:

$$\text{Diâmetro} = 7 \times \sqrt{t - 12}$$



em que t representa o número de anos que passaram desde o degelo.

23.1 Utilizando a fórmula, calcula o diâmetro de um líquen 16 anos após o degelo.

23.2 Comenta a seguinte afirmação: «A fórmula só é válida a partir do 12.º ano após o degelo.»

SUGESTÃO: Repara no que acontece à raiz quadrada quando se quer calcular o diâmetro do líquen após 5 anos, por exemplo.

AUTOAVALIAÇÃO

SUGESTÃO: Não utilizes a calculadora.

EM CADA UMA DAS TRÊS QUESTÕES SEGUINTE,
ESCOLHE A OPÇÃO CORRETA.



Págs. 20, 21 e 22

- 1** O tarifário do telemóvel do Sr. João permite ter um saldo negativo. Quando já só tinha 50 cêntimos, enviou 9 SMS com um custo de 8 cêntimos cada um. Com que saldo ficou?
- A.** -122 cêntimos.
B. -72 cêntimos.
C. -42 cêntimos.
D. -22 cêntimos.

Págs. 38 e 39

- 2** Qual das seguintes potências tem o valor maior?
- A.** $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$ **B.** $\left(-\frac{3}{7}\right)^3$ **C.** $(-1)^{10}$ **D.** 8^1

Págs. 49, 51 e 57

- 3** Qual das seguintes igualdades é verdadeira?
- A.** $\sqrt[3]{\frac{-27}{64}} = \frac{3}{4}$ **C.** $\sqrt{\frac{3^4}{4^2}} = \frac{3}{4}$
B. $\sqrt{\frac{9}{2^2}} = \frac{3}{4}$ **D.** $\sqrt{\frac{1}{10^2}} = \frac{1}{10}$

APRESENTA TODOS OS CÁLCULOS QUE TIVERES DE EFETUAR.

Pág. 21

- 4** Descreve duas situações do dia a dia em que se utilizam números racionais.

Págs. 20, 21, 22, 23,
28, 29, 30, 34 e 35

- 5** Calcula:
- a)** $\frac{6}{4} - 5 \times \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{2}\right)$ **c)** $-\frac{1}{\frac{5}{7}}$ **e)** $-\frac{\left(-\frac{3}{6}\right)}{\frac{5}{7}}$
b) $-\left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{6} - \frac{5}{18}\right) - \frac{5}{3}$ **d)** $\frac{0}{\frac{5}{7}} \times \frac{7}{5}$ **f)** $\left(-\frac{20}{6}\right) : \frac{2}{6}$

Págs. 38 e 39

- 6** Sem fazer cálculos, indica se a potência é um número positivo ou negativo.
- a)** $(-7)^{14}$ **b)** $(-8)^{13}$ **c)** 9^{15}

Págs. 38 e 39

- 7** Calcula o valor de cada potência.
- a)** 2^4 **c)** $(-2)^3$ **e)** $(-1)^{32}$
b) $\frac{(-5)^2}{2^2}$ **d)** $\frac{(-3)^4}{2^2}$ **f)** $\frac{(-10)^7}{3^7}$

Págs. 42, 48 e 49

- 8** Escreve sob a forma de uma única potência:
- a)** $4^5 \times 4^2$ **d)** $8^3 \times 8 \times (8^2)^5$
b) $(11^3)^6$ **e)** $(-6)^{14} : (-3)^{14}$
c) $(-5)^{12} : (-5)^8$ **f)** $(7^5)^3 \times (-4)^{15}$

Se tens dúvidas, consulta as páginas indicadas.

Págs. 48, 49, 53 e 54

Págs. 28, 29, 34, 35, 50 e 56

Pág. 50

Pág. 54

9 Calcula e explica o resultado:

a) $\sqrt{36}$

b) $\sqrt{81}$

c) $\sqrt{14^2}$

d) $\sqrt[3]{8}$

e) $\sqrt[3]{-1000}$

f) $(\sqrt[3]{15})^3$

10 Calcula sem utilizares calculadora:

a) $5 \times \sqrt{4 \times 36}$

c) $\frac{-\sqrt{4} + \sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{-\frac{64}{8}}}$

b) $-\sqrt{9} - 3 \times \sqrt[3]{-\frac{64}{8}}$

d) $\sqrt[3]{0,008}$

11 Lê o anúncio seguinte, publicado num jornal. Qual deve ser o comprimento máximo de um automóvel para poder ser estacionado na garagem?

VENDE-SE GARAGEM

ZONA PRAIA DA ROCHA – PORTIMÃO

ÁREA: QUADRADO COM 16 m²

EXCELENTE PREÇO!

12 O Diogo quer construir uma gaiola para o seu papagaio com a forma de um cubo. Para o bem-estar da ave, o Diogo quer que a gaiola tenha 1 000 000 cm³ de volume.

Explica como deve o Diogo calcular o comprimento da aresta da gaiola.



GRELHA DE AVALIAÇÃO

Exercício	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cotação ¹ (pontos)	4	4	4	2	18	8	12	12	12	12	6	6

¹ Para saberes a cotação de cada alínea, basta dividires a cotação do exercício pelo número de alíneas.



SE TENS MENOS DE 50 PONTOS: É MELHOR VOLTARES A ESTUDAR ESTA UNIDADE!

SE TENS ENTRE 50 PONTOS E 69 PONTOS: REVÊ AS PARTES EM QUE ERRASTE E FAZ MAIS ALGUNS EXERCÍCIOS.

SE TENS ENTRE 70 PONTOS E 89 PONTOS: ESTÁS NO BOM CAMINHO.

SE TENS 90 PONTOS OU MAIS: PARABÉNS!

Estratégias para a resolução de problemas e jogos

Como se relacionam os jogos com a Matemática?

Alguns jogos ajudam a desenvolver vários tipos de raciocínio. Um bom jogador, para ganhar, recorre ao mesmo tipo de **estratégias** que se usam para resolver problemas de Matemática.

Jogo O Jogo dos 30 Feijões

História da Matemática

Luca Pacioli (1445–1517): Monge e matemático italiano. A sua principal obra foi *Summa de Arithmetica*, uma enciclopédia de Matemática com 600 páginas que fez dele uma celebridade e lhe assegurou um lugar na História como «pai da Contabilidade».

Luca Pacioli também escreveu *De Viribus Quantitatis* («o poder dos números»), o primeiro manuscrito inteiramente dedicado à Matemática Recreativa (contém jogos numéricos, jogos geométricos, adivinhas, truques de magia, truques de cartas, etc.).



O Jogo dos 30 Feijões foi apresentado por Luca Pacioli no seu livro *De Viribus Quantitatis*.

NÚMERO DE JOGADORES: 2.

REGRAS:

O primeiro jogador possui um conjunto de feijões brancos, e o seu adversário usa feijões pretos. O primeiro jogador coloca em cima da mesa entre 1 e 6 feijões, conforme a sua escolha, iniciando assim uma linha de feijões. A seguir, o seu adversário continua a linha, podendo colocar entre 1 e 6 feijões. O jogo prossegue assim, colocando cada um na sua vez entre 1 e 6 feijões. O vencedor é aquele que colocar o 30.º feijão.

Em vez de feijões, podes usar uma folha de papel na qual um dos jogadores faz cruces (de 1 a 6) e o outro faz circunferências (sempre entre 1 e 6). Ganha quem colocar o 30.º símbolo.

1. Desafia um amigo para jogar ao Jogo dos 30 Feijões.
2. Descobre uma estratégia que te permita ser sempre o vencedor. Explica o teu raciocínio.
3. Se fosses o segundo jogador a começar e pudesses alterar o número final de feijões, que número maior do que 30 escolherias?



Problema O Jogo do Pisa

Para escolher os jogadores que vão fazer parte da sua equipa de futebol, o Diogo e o Zito costumam jogar ao Pisa para decidir quem escolhe primeiro. Para isso, traçam uma linha reta no chão e colocam a ponta do pé em cada uma das extremidades. O Diogo, por ser mais novo, começa sempre. Os dois amigos avançam alternadamente ao encontro um do outro, colocando, em cada jogada, um pé encostado ao outro. Vence quem pisar o adversário.

O Diogo não gosta de perder, nem ao Jogo do Pisa! Às escondidas, mediu o comprimento dos sapatos de ambos: registou 26 cm para os do Zito e 24 cm para os seus. A ideia dele é traçar uma linha no chão de modo a dar 10 passos e pisar o Zito no 11.º passo.

Para isso, qual deve ser o comprimento da linha?

EXPLICAÇÃO DA ESTRATÉGIA DO JOGO E RESOLUÇÃO DO PROBLEMA:

Em certas situações, como esta, pode ser vantajoso usar a seguinte estratégia:

ESTRATÉGIA: Trabalhar do fim para o princípio.

Para simplificar o problema, vamos pôr de lado, por enquanto, a fase de aproximação dos amigos e concentrar-nos apenas no final. Neste caso, como no Jogo dos 30 Feijões, **a última jogada é a mais importante, pois é ela que deve assegurar a vitória.**

Depois de cada um andar 10 passos (A), o Diogo ganha se a distância que o separa do Zito for:

- maior do que 0 cm, para conseguir colocar o 11.º pé;
- menor do que 24 cm, para pisar o adversário.

Por exemplo, se o Diogo quisesse ganhar com o seu segundo passo (B), a linha no chão teria de ter:

- mais de 50 cm;
- menos de 74 cm.

Vamos agora voltar ao princípio, contando com os 10 passos dos dois amigos (C).



Se for inferior a 24 cm, então o Diogo ganha.



RESPOSTA: O Diogo ganha o Jogo do Pisa, no 11.º passo, se a linha traçada no chão tiver:

- mais de 500 cm (porque $260 \text{ cm} + 240 \text{ cm} = 500 \text{ cm}$);
- menos de 524 cm (porque $260 \text{ cm} + 24 \text{ cm} + 240 \text{ cm} = 524 \text{ cm}$).

Investigar

A história dos números

Os primeiros números que o Homem inventou e com os quais começou a fazer operações foram os **números naturais**, 1, 2, 3, 4, 5, ... No entanto, para responder aos problemas que iam surgindo, foi necessário estender o conceito de número aos **números fracionários**, aos irracionais positivos (que não podem ser escritos sob a forma de fração, por exemplo: $\sqrt{2}$), ao **zero** e, mais tarde, aos **números negativos**.



No Egito

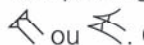


Após as cheias do Nilo, no Egito, os funcionários do faraó usavam cordas para fazer medições. Esticavam a corda, na qual tinham assinalado uma unidade, e verificavam quantas vezes a unidade estava contida nos lados do terreno. No entanto, dificilmente a unidade escolhida cabia um número inteiro de vezes. Foi por isso que os Egípcios criaram

os **números fracionários**: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, ...

Na Mesopotâmia (zona do atual Iraque)

As necessidades do dia a dia levaram ao desenvolvimento da Matemática na Mesopotâmia. Pelas placas de argila descobertas, sabe-se que os Mesopotâmicos já sabiam calcular a **raiz quadrada** de um número. O primeiro **zero** apareceu na Mesopotâmia, por volta do século III a. C., através de astrónomos e matemáticos. Os espaços vazios que deixavam para significar a ausência foram substituídos pelos sinais:



O zero, tal como é entendido atualmente, nasceu na Índia e chegou a Portugal com o símbolo «0» através dos Árabes (século IX).



Plimpton 322 (aproximadamente 1900 a 1600 a. C.).

Na China e na Índia

O aparecimento dos **números negativos** ocorreu no Oriente (século II a. C.). Os **Chineses** representavam os ganhos com barras vermelhas e as perdas com barras pretas. Depois, usavam o facto de uma barra vermelha anular uma barra preta. Por exemplo: **II** **IIIIII** **III**

$$(+2) + (-5) = (-3)$$

Os **Indianos** mostraram, desde o século VII, um perfeito conhecimento dos números negativos (usaram-nos em situações comerciais, para as dívidas). As regras da aritmética com os números negativos apareceram pela primeira vez numa obra do matemático Brahmagupta, no ano 628.

No **Ocidente**, no entanto, o aparecimento dos números negativos deu-se de forma tímida. Embora alguns matemáticos os utilizassem por vezes, quase todos desconfiavam deles. René Descartes (1596-1650), um famoso matemático, chamava-lhes «números falsos».

No início do século XIX, os números negativos foram finalmente aceites. Entre o seu aparecimento e a sua aceitação passaram mais de 1000 anos!

Sugestões de trabalho

- Escreve um texto explicando por que razão a Matemática é uma linguagem universal.
- Elabora um trabalho sobre o contributo da civilização egípcia para a evolução das Ciências. Procura informações no teu livro de História.
- Elabora um cartaz com o título «A História dos Números», com imagens que mostrem a evolução dos números em todo o mundo. Poderás incluir uma fotocópia de um mapa-múndi e pintar as regiões onde aconteceram os principais progressos.

Os instrumentos de cálculo

Ao longo da História, à medida que foram surgindo novos números, também apareceram (e continuam a aparecer) novos instrumentos de cálculo.



Sugestão de trabalho

Escolhe um dos instrumentos apresentados (ábaco, régua de cálculo, calculadora ou computador) e investiga o seu aparecimento, o seu funcionamento, os vários modelos que existem, etc.

Páginas da Internet

- Atividades sobre números e operações:
<http://www.apm.pt/portal/index.php?id=26373>
- Adição, subtração, multiplicação e divisão com números inteiros:
http://cubodegelo.no.sapo.pt/matematica_ficheiros/interactividades/calculo_inteiros.htm
- História da Matemática: <http://www.malhatlantica.pt/mathis/>
- Jogos sobre Matemática: http://nautilus.fis.uc.pt/mn/p_index.html



Atividades iniciais 73

2.1 Conceito de função 74

Noção de função

Domínio, contradomínio, objeto e imagem

Operações com funções

Atividades 77

2.2 Gráfico de uma função 80

O referencial cartesiano

Gráfico cartesiano de uma função

Atividades 82

2.3 Função linear e função afim 84

Função linear

Função afim

Atividades 87

2.4 Proporcionalidade direta 90

Proporção. Regra de três simples

Constante de proporcionalidade direta

Atividades 92

2.5 Proporcionalidade direta como função 94

Expressão algébrica

Representação gráfica

Atividades 97

Síntese 100

Atividades globais 102

Autoavaliação 106

Estratégias para a resolução de problemas e jogos 108

Investigar 110

Atividades iniciais

Relação preço-quantidade

1 A D. Marta foi ao supermercado e reparou nos produtos à direita.

- 1.1 Se a D. Marta optasse pela embalagem com quatro iogurtes, quanto pagaria por cada iogurte?
- 1.2 Quanto pouparia a D. Marta se comprasse a embalagem com quatro iogurtes em vez de comprar quatro iogurtes separados?
- 1.3 Discute, com um colega, qual é a compra mais acertada: a embalagem de 375 g de cereais ou a embalagem de 500 g? Justifiquem a vossa escolha.



Velocidade

2 De acordo com o Código da Estrada, os limites de velocidade, em km/h, para os quadriciclos e certos motociclos são os seguintes:

	Dentro das localidades	Auto-estradas	Vias reservadas a automóveis e motociclos	Restantes vias
Quadriciclos	40	—	—	45
Motociclos com cilindrada até 50 cm ³	40	—	—	60

- 2.1 O que significa o limite de velocidade para quadriciclos dentro das localidades ser de 40 km/h?
- 2.2 Considera que um quadriciclo circula à velocidade máxima dentro de localidades.
 - 2.2.1 Copia e completa a tabela seguinte:

Tempo gasto/horas	1	2	3
Distância percorrida/km			



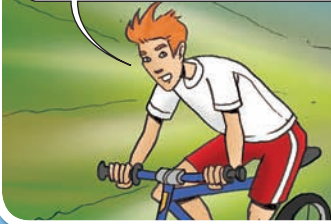
- 2.2.2 Quanto tempo demora a percorrer 60 km?
- 2.3 Um motociclo com 50 cm³ de cilindrada e um quadriciclo circulam à velocidade máxima fora das localidades.
 - 2.3.1 Em meia hora, o motociclo percorre quantos quilómetros a mais do que o quadriciclo?
 - 2.3.2 Se saírem à mesma hora de um mesmo sítio e percorrerem 90 km, qual chegará primeiro? Quanto tempo separará a chegada de cada um?

3 Desafio

O Diogo nadou durante 30 minutos dos 45 minutos que passou na piscina. A Sofia nadou durante 20 minutos, mas só esteve 30 minutos na piscina.

Qual dos dois aproveitou melhor o tempo passado na piscina para nadar?

O TEMPO QUE DEMORO ATÉ CASA
DEPENDE DA VELOCIDADE A QUE VOU.



O TEMPO QUE SEPARA O TROVÃO DO SEU
RELÂMPAGO DEPENDE DA DISTÂNCIA
A QUE ESTE SE ENCONTRA.



O PREÇO QUE PAGO PELO
FRANGO DEPENDE DO SEU PESO.



Dá exemplos de outras situações
usando a expressão «depende de».

História

Em 1673, foi usado pela primeira vez o termo matemático «função», pelo alemão Gottfried Leibniz.



Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646-1716.

Nota

As funções são representadas por letras minúsculas: f , g , h , etc.

Curiosidade

O adjetivo «sagital» significa que tem a forma de uma seta, e é por esse motivo que estes diagramas se chamam diagramas sagitais.

Noção de função

«O tempo gasto depende da velocidade» ou «o preço é em função da quantidade» são expressões que se ouvem no dia a dia.

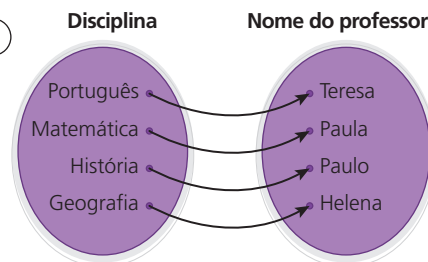
A palavra «função» surge frequentemente, mas tem um significado especial em Matemática.

Dá-se o nome de **função** ou aplicação, f , a toda a correspondência entre um conjunto A e um conjunto B que a cada elemento x do conjunto A faz corresponder **um, e um só**, elemento y do conjunto B .

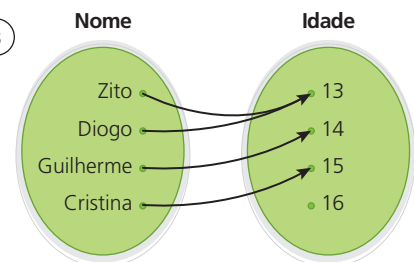
Simbolicamente, representa-se por $f: A \rightarrow B$

Exemplos:

(A)

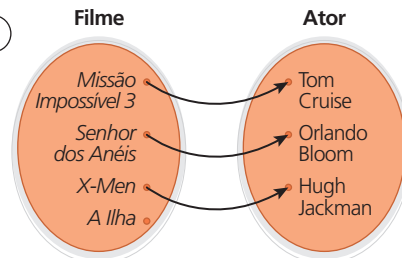


(B)

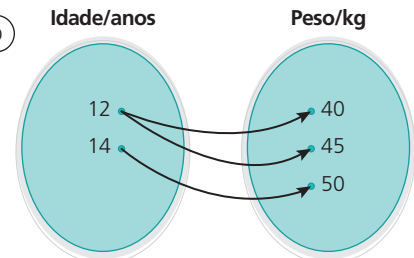


Os diagramas sagitais A e B representam funções.

(C)



(D)

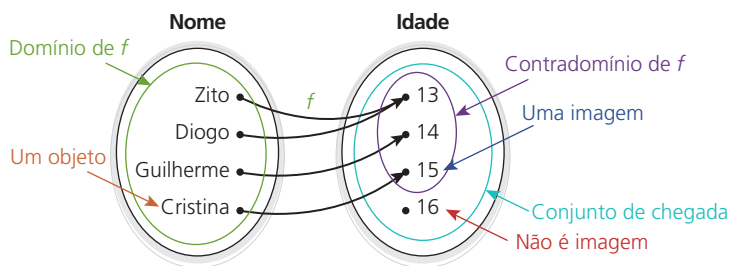


O diagrama sagital C não representa uma função do conjunto dos quatro filmes para o conjunto dos três atores, porque existe um filme (*A Ilha*) ao qual não corresponde nenhum ator.

O diagrama sagital D não representa uma função, porque a idade «12 anos» corresponde a dois pesos diferentes.

Domínio, contradomínio, objeto e imagem

A situação B da página anterior representa uma função entre o conjunto dos nomes e o conjunto das idades.



Dada a função $f: A \rightarrow B$, o conjunto A denomina-se **domínio da função** e representa-se por D_f . Os elementos do domínio chamam-se **objetos**.

Os elementos do conjunto B que são imagens por f dos elementos de A formam o **contradomínio da função**, que é representado por D'_f , CD_f ou $f(A)$. Os elementos do contradomínio chamam-se **imagens**.

O **conjunto de chegada** é o conjunto B .

No exemplo anterior, o conjunto de chegada é $\{13, 14, 15, 16\}$ e o contradomínio é $\{13, 14, 15\}$.

Duas funções, f e g , são iguais quando têm o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada, e cada elemento do domínio tem a mesma imagem por f e por g .

A função $f: A \rightarrow B$ diz-se uma função de **variável numérica** se A é um conjunto de números e diz-se uma **função numérica** se B é um conjunto de números.

Exercício resolvido 1

A tabela seguinte apresenta a correspondência entre um número e o seu quadrado.

Número	0	1	2	3	4
Quadrado do número	0	1	4	9	16

- Justifica que a tabela representa uma função.
- Indica o domínio e o contradomínio da função.
- Qual é a imagem de 2? Qual é a imagem de 4?
- Qual é o objeto que tem por imagem 9?

Resolução:

- A tabela representa uma função porque a cada número corresponde um, e um só, quadrado.
- Domínio = $\{0; 1; 2; 3; 4\}$.
Contradomínio = $\{0; 1; 4; 9; 16\}$.
- A imagem de 2 é 4.
A imagem de 4 é 16.
- O objeto que tem por imagem 9 é o 3.

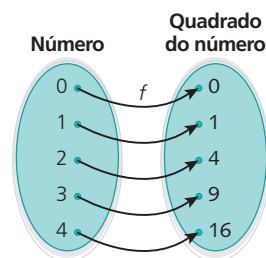
O OBJETO «ZITO» TEM POR IMAGEM 13.

O 15 É A IMAGEM DO OBJETO «CRISTINA».



Nota

- Pode construir-se um **diagrama sagital** com os dados da tabela:



- Se x é um objeto do domínio da função f , representa-se por $f(x)$ a imagem de x .
Por exemplo:
 $f(0) = 0$;
 $f(1) = 1$;
 $f(2) = 4$.
- x é uma **variável**. Neste caso, pode tomar os valores 0, 1, 2, 3 ou 4.

Operações com funções

Dadas funções $f: A \rightarrow \mathbb{Q}$ e $g: A \rightarrow \mathbb{Q}$, define-se $f+g$, $f-g$, $f \times g$, f^n ($n \in \mathbb{N}$) e λf ($\lambda \in \mathbb{Q}$) como sendo as funções de domínio A e conjunto de chegada $\mathbb{Q}$, tais que:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
- $f^n(x) = (f(x))^n$, se $n \in \mathbb{N}$
- $(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$

para qualquer $x \in A$.

Considera as seguintes funções f e g :

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	6	9	12

x	1	2	3	4
$g(x)$	2	4	6	8

Observa agora a tabela:

x	1	2	3	4
$f(x) + g(x)$	$3 + 2 = 5$	$6 + 4 = 10$	$9 + 6 = 15$	$12 + 8 = 20$

A tabela anterior representa a função $f+g$.

Considera ainda a função representada na tabela seguinte:

x	1	2	3	4
$h(x)$	5	5	5	5

Tem-se que $h(x) = 5$ para qualquer x . Esta função denomina-se **função constante** ou simplesmente **constante**, porque qualquer que seja o objeto, a sua imagem é sempre a mesma. O produto desta função por uma função g pode representar-se simplesmente por $5 \times g$ ou $5g$.

x	1	2	3	4
$5 \times g(x)$	$5 \times 2 = 10$	$5 \times 4 = 20$	$5 \times 6 = 30$	$5 \times 8 = 40$

Nota

Se f e g são funções de A em $\mathbb{Q}$, as funções $f+g$, $f-g$, $f \times g$ e f^n têm também domínio A e conjunto de chegada $\mathbb{Q}$.

Nota

Representa-se por $-f$ a função $(-1) \times f$.

Exercício resolvido 2

Considera as funções f e g .

a) Será que estão definidas as funções $f+g$, $f-g$ e $f \times g$?

b) Indica o domínio e o contradomínio de g^2 .

Resolução:

a) Não, porque as funções f e g não têm o mesmo domínio.

b) $D_{g^2} = \{1, 2, 3, 4\}$
 $D_{g^2} = \{9, 36, 64, 144\}$

O que deves saber

- Compreender o conceito de função.
- Numa função, identificar o domínio e o contradomínio.
- Operar com funções.

Atividades

VERIFICAR A APRENDIZAGEM

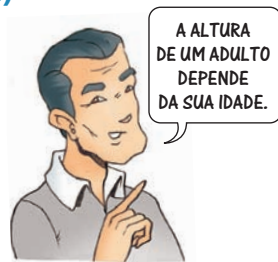
CONCEITO DE FUNÇÃO

- 1 Refere se concordas com as afirmações. Se discordares, explica porquê.

a)



b)



c)

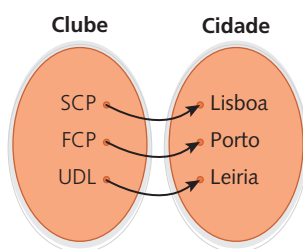


d)



- 2 Para cada uma das correspondências seguintes, justifica se se trata ou não de uma função entre os dois conjuntos indicados.

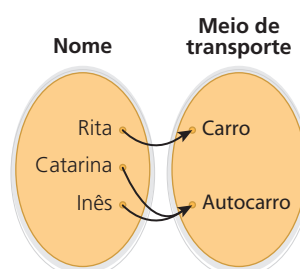
a)



c)



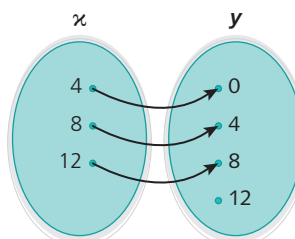
e)



b)

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	4	6	8

d)



f)

x	1	2	3	4
$g(x)$	0	1	2	3

AUTOAVALIAÇÃO Compreendo o conceito de função?

DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO, OBJETOS E IMAGENS

- 3 Observa as funções f e g , apresentadas à direita.

3.1 Indica, para cada uma das funções, o domínio e o contradomínio.

3.2 Qual é a imagem de 4 pela função f ?

3.3 Na função g , qual é o objeto que tem por imagem 13?

3.4 Copia e completa:

a) $f(2) = \dots$

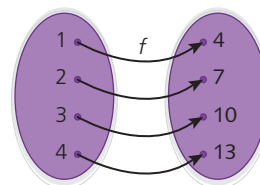
c) $f(1) = \dots$

e) $f(\dots) = 10$

b) $g(2) = \dots$

d) $g(8) = \dots$

f) $g(\dots) = 69$



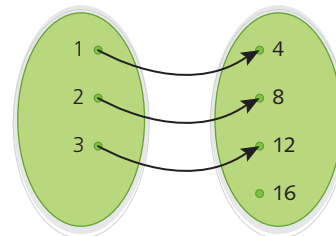
x	2	4	8	10
$g(x)$	13	27	55	69

AUTOAVALIAÇÃO Sei identificar o domínio, o contradomínio, os objetos e as imagens?

APLICAR

- 4 Qual é o contradomínio da função representada no diagrama à direita?

- A. {1; 2; 3}
- B. {4; 8; 12}
- C. {4; 8; 12; 16}
- D. {1; 2; 3; 4; 8; 12; 16}



- 5 A tabela seguinte mostra a distância que um automóvel percorre até se imobilizar, segundo a velocidade a que seguia.

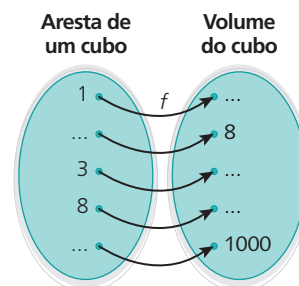
Velocidade/(km/h)	60	90	120	150	180
Distância de paragem/m	34,4	64,9	104,2	152,4	209,4

- 5.1 A tabela representa uma função? Justifica a tua resposta.
- 5.2 Qual é a imagem de 90 km/h? E qual é o objeto que tem por imagem 209,4 m?
- 5.3 Para que o automóvel pare antes de bater num obstáculo a 100 m, o condutor pode circular a 120 km/h?

- 6 Observa o diagrama apresentado ao lado.

- 6.1 Copia e completa o diagrama à direita.
- 6.2 Diz, justificando, se se trata de uma função.
- 6.3 Qual é a imagem de 3?
- 6.4 Qual é o objeto que tem por imagem 8?
- 6.5 Copia e completa:

- a) $f(1) = \dots$ b) $f(8) = \dots$ c) $f(\dots) = 27$



- 7 Considera a correspondência que a cada valor do conjunto $\{-1, 0, 1, 2, 5, 8, 10\}$ faz corresponder o seu dobro adicionado de uma unidade.

- 7.1 Representa esta correspondência por um diagrama sagital.
- 7.2 Trata-se de uma função? Justifica a tua resposta.
- 7.3 Qual é a imagem do objeto 2?
- 7.4 Qual é o objeto cuja imagem é 17?
- 7.5 Representa esta correspondência por uma tabela.

- 8 Considera a correspondência que a cada valor de um conjunto faz corresponder a sua metade originando o conjunto $\{-2, 0, 1, 2, 4, 6\}$.

- 8.1 Representa esta correspondência por um diagrama sagital.
- 8.2 Trata-se de uma função? Justifica a tua resposta.
- 8.3 Qual é o objeto que corresponde à imagem 4?
- 8.4 Qual é a imagem do objeto 0?
- 8.5 Representa esta correspondência por uma tabela.

- 9 Considera as funções f e g , definidas pelas tabelas seguintes.

Função f

x	1	2	3	4	6
y	3	6	9	12	18

Função g

x	1	2	3	4	6
y	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3

- 9.1 Indica os domínios de f e de g .
 9.2 Refere $f(2)$, $f(4)$, $g(2)$ e $g(4)$.
 9.3 Qual é o objeto cuja imagem por f é 9?
 9.4 Qual é o objeto cuja imagem por g é $\frac{1}{2}$?
 9.5 Calcula $f(6) + g(6)$.
 9.6 Completa a tabela seguinte.

x	1	2	3	4	6
$f(x) - g(x)$					

- 9.7 Elabora as tabelas relativas às funções $-f$ e $2g$.
 9.8 Elabora a tabela relativa à função $f \times g$.
 9.9 Elabora a tabela relativa à função g^3 .

- 10 As tabelas a seguir apresentadas relacionam a medida do comprimento do lado de um quadrado com o seu perímetro (tabela 1) e com a sua área (tabela 2).

Tabela 1

Medida do lado de um quadrado/cm	2	3		5	
Perímetro do quadrado/cm	8		16		32

Tabela 2

Medida do lado de um quadrado/cm	2	3		6	
Área do quadrado/cm ²	4		25		100

- 10.1 Completa as tabelas.
 10.2 Justifica que as correspondências anteriores são funções.

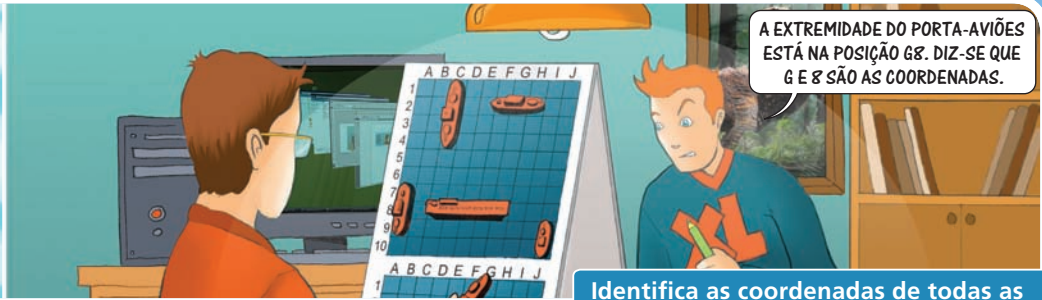
INVESTIGAR

- 11 Já aprendeste as capitais de vários países europeus. E quanto ao resto do Mundo? A função f faz corresponder a cada país a sua capital. O domínio da função f é apresentado a seguir.

$D_f = \{\text{Porto Rico, Afeganistão, Camboja, Malásia, Nepal, Equador, Peru, Burkina Faso, Costa do Marfim, Togo}\}$

- 11.1 Qual é o contradomínio da função?
 11.2 Investiga outras funções relacionadas com outras disciplinas.

NA BATALHA NAVAL, CADA QUADRÍCULA DO TABULEIRO DE JOGO É LOCALIZADA POR UMA LETRA (QUE DEFINE A COLUNA) E UM NÚMERO (QUE DEFINE A LINHA).



Identifica as coordenadas de todas as quadrículas em que se encontram navios.

■ O referencial cartesiano

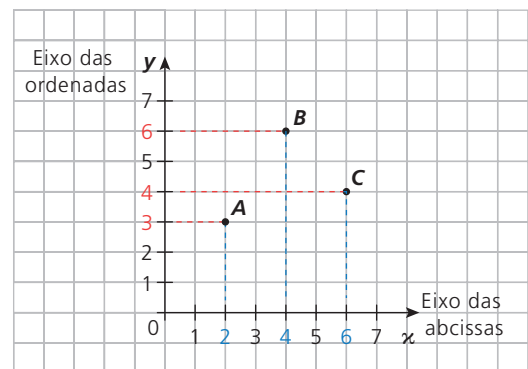
Um **referencial cartesiano** consiste num par de retas numéricas não coincidentes que se intersectam nas respectivas origens; uma é o eixo das abcissas e a outra, o eixo das ordenadas. Os dois eixos, o das abcissas e o das ordenadas, denominam-se **eixos coordenados**.

O referencial cartesiano é:

- **ortogonal** — quando os eixos são perpendiculares;
- **monométrico** — quando a unidade de comprimento é a mesma para ambos os eixos.

Num referencial cartesiano, qualquer ponto é localizado por um par de **coordenadas**:

- uma **abscissa**, que se lê no **eixo das abcissas**;
- uma **ordenada**, que se lê no **eixo das ordenadas**.



O **par ordenado** de primeiro elemento, a , e de segundo elemento, b , representa-se por (a, b) .

Os pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais quando, e apenas quando, $a = c$ e $b = d$.

O ponto A tem por coordenadas 2 e 3 e escreve-se:

$A(2; 3)$
Abcissa → ← Ordenada

O ponto B tem por coordenadas 4 e 6. A sua abcissa é 4 e a sua ordenada é 6. Escreve-se $B(4; 6)$.

O ponto C tem por coordenadas 6 e 4. Escreve-se $C(6; 4)$.

■ Gráfico cartesiano de uma função

Considera a função seguinte, representada por uma tabela:

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	6	9	12

Cada imagem, $f(x)$, depende do objeto, x .

Então, a x chama-se **variável independente** e a $f(x)$ ou y , como é costume ser representada $f(x)$, chama-se **variável dependente**.

A **variável independente**, x , representa cada **objeto** do domínio.

A **variável dependente**, y , representa a **imagem** do objeto x .

Fixado um referencial cartesiano num plano, o **gráfico cartesiano** de uma dada função numérica de variável numérica é constituído pelos pontos $P(x, y)$ do plano cuja ordenada, y , é a imagem por f da abscissa, x .

Para obter o gráfico cartesiano da função:

1. desenha-se um referencial cartesiano, escolhendo adequadamente a unidade de comprimento em cada eixo;
2. marcam-se os pontos de coordenadas $(x; y)$, em que $y = f(x)$.

Exercício resolvido 1

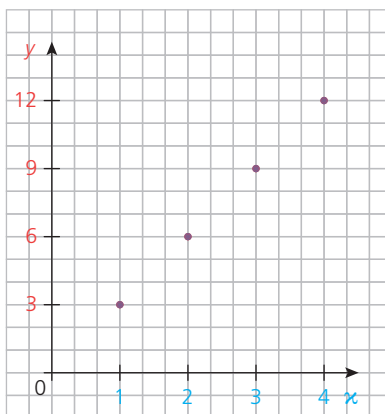
Constrói o gráfico da função representada pela tabela anterior.

Resolução:

O **objeto 1** tem **imagem 3**.
Então, marca-se no gráfico o ponto de coordenadas:

Objeto $(1; 3)$ **Imagem**

Os outros pontos têm coordenadas $(2; 6)$; $(3; 9)$ e $(4; 12)$.



O que deves saber

- Identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano.
- Representar graficamente uma função.
- Determinar a imagem de um objeto e objetos correspondentes a uma imagem quando a função é representada por um gráfico.

DIZ-SE QUE
 $y = f(x)$
É A EQUAÇÃO
DO GRÁFICO DE f .

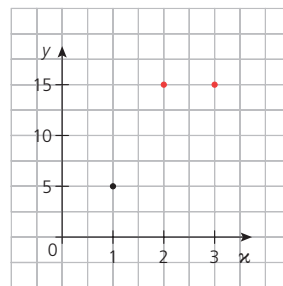


Nota

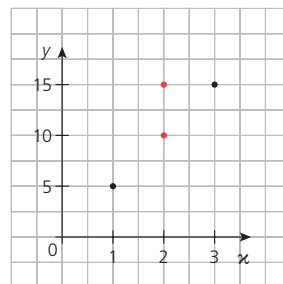
O **gráfico** de uma função $f: A \rightarrow B$ consiste no conjunto dos pares ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y = f(x)$.

Repara

A correspondência abaixo representada é uma função, pois a cada objeto corresponde uma, e uma só, imagem. Repara que podem existir dois objetos com a mesma imagem.



A correspondência abaixo representada não é uma função, pois ao valor 2 do eixo das abscissas correspondem dois valores, 10 e 15, do eixo das ordenadas.



Atividades

VERIFICAR A APRENDIZAGEM

PONTOS NO PLANO CARTESIANO

- 1 Observe o gráfico apresentado ao lado e responda às questões.

1.1 Indica:

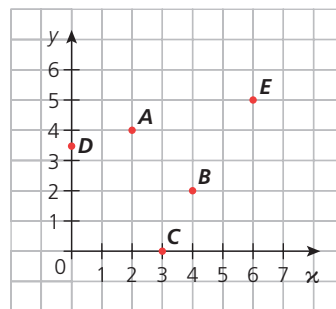
- a) as coordenadas dos pontos A, B, C, D e E;
- b) as abscissas dos pontos A, B e C;
- c) as ordenadas dos pontos D e E.

1.2 Como se chama o ponto com as coordenadas (0; 0)?

1.3 Qual é o ponto que está no eixo das abscissas?

1.4 Qual é o ponto que está no eixo das ordenadas?

1.5 Observe as coordenadas dos pontos A e B. Será que a ordem das coordenadas é importante?



AUTOAVALIAÇÃO Sei indicar as coordenadas de um ponto?

- 2 Num referencial cartesiano, representa cada um dos pontos seguintes.

F(2; 2) G(5; 10) H(8; 4) I(3; 0) J(0; 6) K(4; 8) L(6; 1)

AUTOAVALIAÇÃO Sei representar pontos no plano cartesiano?

GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

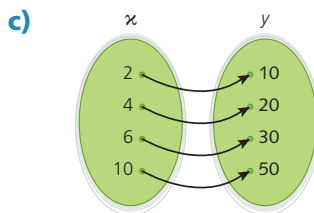
- 3 Representa graficamente cada uma das funções seguintes.

a)

x	1	2	3	4
y	0	1	2	3

b)

x	1	3	4	6
y	2	6	8	12



AUTOAVALIAÇÃO Sei representar graficamente uma função?

OBJETOS E IMAGENS

- 4 Observe o gráfico ao lado e responda às questões.

4.1 Justifica que se trata de uma função.

4.2 Qual é a imagem do objeto 3?

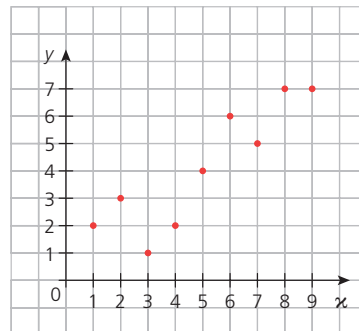
4.3 Qual é a imagem do objeto 5?

4.4 Qual é o objeto que tem por imagem 4?

4.5 Quais são os objetos que têm por imagem 2?

4.6 Qual é o domínio da função?

4.7 Qual é o contradomínio da função?



AUTOAVALIAÇÃO Sei identificar a imagem de um objeto e o(s) objeto(s) correspondente(s) a uma imagem quando a função é dada por um gráfico?

APLICAR

- 5 Representa um referencial cartesiano no teu caderno.

5.1 Marca cada um dos pontos:

$A(4; 4)$ $B(6; 4)$ $C(4; 6)$ $D(4; 3)$ $E(1; 3)$ $F(3; 1)$ $G(5; 1)$ $H(7; 3)$

5.2 Liga os pontos por ordem alfabética e, no fim, liga H e D . Qual é a figura obtida?

- 6 Uma operadora de telecomunicações representou o custo das chamadas para a rede móvel utilizando o gráfico ao lado.

6.1 Qual é a variável independente e qual é a variável dependente?

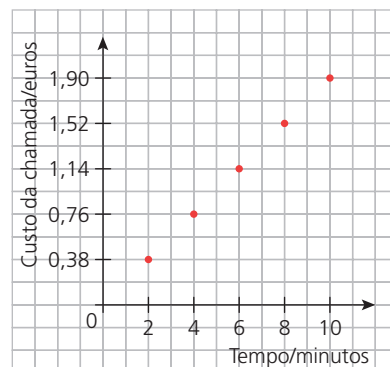
6.2 Quanto custa uma chamada de 6 minutos?

6.3 Qual é a duração de uma chamada que custe 1,52 €?

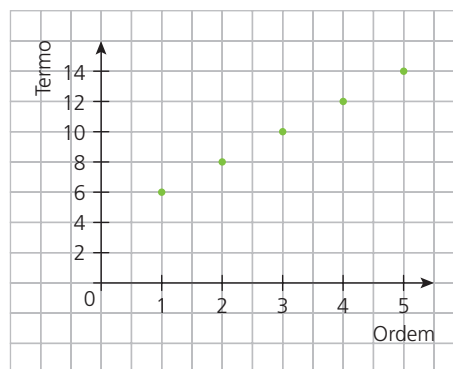
6.4 Qual é o custo de cada minuto de chamada?

6.5 A Joana efetuou uma chamada que durou 32 minutos. Quanto pagou pela chamada?

6.6 Representa a função apresentada ao lado por meio de uma tabela.



- 7 Analisa o gráfico seguinte e responde à Joana.



- 8 Um retângulo, com medidas da base e da altura inteiras, tem 42 cm de perímetro.



8.1 Copia e completa a tabela:

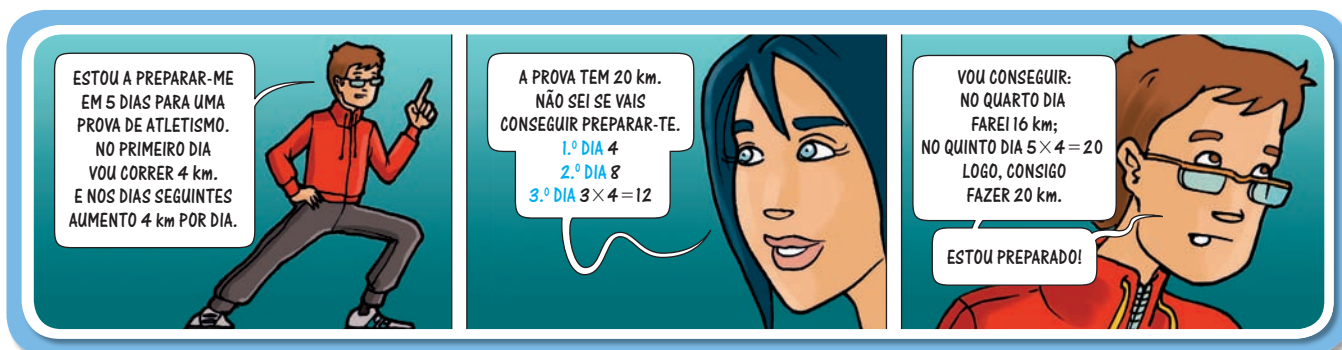
Base (x /cm)	5	8	10	15
Altura (y /cm)				

8.2 Justifica que a tabela apresentada acima representa uma função.

8.3 A base do retângulo poderá medir 30 cm? Justifica, dizendo qual poderá ser a maior medida da base.

8.4 Representa graficamente os dados da tabela.

8.5 Indica as coordenadas de outros pontos que possam ser as dimensões do retângulo, sem serem os que constam da tabela.



■ Função linear

O pai do Diogo recebe 10 euros à hora. Pode representar-se a função que traduz o valor recebido, em euros, em função das horas de trabalho, pela tabela:

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	10	10×2	10×3	10×4	10×5	10×6	10×7

onde x é o número de horas de trabalho e $f(x)$, o valor em euros que o pai do Diogo recebe.

Quanto ganharia o pai do Diogo se trabalhasse 50 horas?

Para responder à questão anterior, efetua-se o cálculo seguinte:

$$10 \times 50$$

Pode utilizar-se uma função para representar a situação:

$$f(x) = 10 \times x = 10x$$

Nota

Quando uma função linear se apresenta na forma

$$f(x) = ax$$

diz-se que está na **forma canónica**.

Uma função $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ diz-se **função linear** se existe um número racional a , tal que $f(x) = ax$ para todo o $x \in \mathbb{Q}$. Diz-se que a é o **coeficiente** de f .

Considera a função linear $f(x) = 3x$.

Será que a função $2f$ ainda é uma função linear?

$$(2f)(x) = 2 \times f(x) = 2 \times 3x = 6x$$

Continuamos a ter uma função linear e o seu coeficiente é 6.

Pode concluir-se que:

O produto de uma função linear por uma constante é uma função linear. O seu coeficiente é igual ao produto da constante pelo coeficiente da função.

Considera agora as funções lineares:

$$f(x) = 3x \text{ e } g(x) = -5x$$

Nota

$$\begin{aligned} 2 \times 3x &= \\ = 2 \times 3 \times x &= \\ = 6 \times x &= \\ = 6x \end{aligned}$$

Será que as funções $f + g$ e $f - g$ continuam a ser funções lineares?

Vejam: $f(x) + g(x) = 3x + (-5x) = -2x$

e $f(x) - g(x) = 3x - (-5x) = 8x$

Em geral:

A soma e a diferença de funções lineares são funções lineares.

O coeficiente da soma é igual à soma dos coeficientes.

O coeficiente da diferença é igual à diferença dos coeficientes.

$2x + 3x$ DÁ $5x$.
É COMO DIZER QUE
2 LIVROS MAIS
3 LIVROS SÃO
5 LIVROS!



■ Função afim

O Zito, o Diogo e a Sofia foram jogar *bowling*.

SÓ PAGO 3 € POR JOGO.



NÃO TINHA MEIAS,
POR ISSO PAGO 3 €
POR JOGO, MAIS 1 €
PELAS MEIAS.



COMO FAÇO ANOS,
PAGO 5 €; NÃO IMPORTA
O NÚMERO DE JOGOS.



O preço que cada um irá pagar (y), em função do número de jogos (x), pode ser representado por uma tabela ou por uma expressão algébrica:

Zito	
N.º de jogos (x)	Preço (y)/€
1	3
2	6
3	9

$$y = 3x$$

ou $f(x) = 3x$

Diogo	
N.º de jogos (x)	Preço (y)/€
1	4
2	7
3	10

$$y = 3x + 1$$

ou $f(x) = 3x + 1$

Sofia	
N.º de jogos (x)	Preço (y)/€
1	5
2	5
3	5

$$y = 5$$

ou $f(x) = 5$

Uma função cuja expressão algébrica é do tipo $f(x) = ax + b$ (em que a e b são números racionais) designa-se por **função afim**. Diz-se que a é o **coeficiente de x** e que b é o **termo independente**.

Portanto:

- Todas as funções lineares (do tipo $f(x) = ax$) são funções afins, em que $b = 0$. Por exemplo, $f(x) = 3x$ é uma função afim.
- Uma função afim pode ser não linear. Por exemplo, $f(x) = 3x + 1$ é uma função afim (em que $a = 3$ e $b = 1$), mas não é uma função linear.
- Todas as **funções constantes** (do tipo $f(x) = b$) são funções afins, em que $a = 0$. Por exemplo, $f(x) = 5$ é uma função afim.

Qualquer função afim é a soma de uma função linear com uma constante.

Demonstração

Se $f(x) = ax$ e $g(x) = bx$, então:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= \\ &= f(x) + g(x) = \\ &= ax + bx = \\ &= (a + b) \times x \end{aligned}$$

Nota

Uma **expressão algébrica** é uma expressão que contém letras, além de operações e números. As letras chamam-se **variáveis** e representam um número qualquer.

Nota

Quando uma função afim se apresenta na forma $f(x) = ax + b$, diz-se que está na **forma canónica**.

Considera a função afim $f(x) = 2x + 3$.

Pretende-se calcular a expressão algébrica da função $4f$:

$$(4f)(x) = 4 \times f(x) = 4 \times (2x + 3)$$

Utilizando a propriedade distributiva, tem-se:

$$4 \times 2x + 4 \times 3 = 8x + 12$$

A função $4f$ continua a ser uma função afim.

Pode concluir-se que:

Demonstração

$$\begin{aligned}\text{Se } f(x) &= ax + b \text{ e } k \in \mathbb{Q}, \\ (kf)(x) &= k \times f(x) = \\ &= k \times (ax + b) = \\ &= k(ax) + kb = \\ &= (ka)x + kb\end{aligned}$$

Demonstração

$$\begin{aligned}\text{Se } f(x) &= ax + b \\ \text{e } g(x) &= cx + d, \text{ então,} \\ (f+g)(x) &= f(x) + g(x) = \\ &= ax + b + cx + d = \\ &= ax + cx + b + d = \\ &= (a+c)x + b + d\end{aligned}$$

O produto de uma constante por uma função afim é uma função afim. O coeficiente de x é o produto da constante pelo coeficiente de x na função dada e o termo independente é o produto da constante pelo termo independente da função dada.

Considera agora as funções:

$$f(x) = 2x - 3 \text{ e } g(x) = -5x + 2$$

Será que as funções $f+g$ e $f-g$ continuam a ser funções afins?

$$\text{Vejamos: } f(x) + g(x) = 2x - 3 + (-5x) + 2 = -3x - 1$$

$$\begin{aligned}\text{e } f(x) - g(x) &= 2x - 3 - (-5x + 2) = \\ &= 2x - 3 + 5x - 2 = 7x - 5\end{aligned}$$

Em geral:

A soma e a diferença de funções afins são funções afins.

Exercício resolvido 1

Classifica como função linear, função afim ou função constante cada uma das funções a seguir apresentadas:

a) $f(x) = -2x + 4$

c) $f(x) = 3 - 4x$

b) $g(x) = -3x$

d) $g(x) = 5$

Resolução:

a) Função afim em que $a = -2$ (coeficiente de x) e $b = 4$ (termo independente).

b) Função linear em que $a = -3$.

c) Função afim em que $a = -4$ e $b = 3$.

d) Função constante em que $b = 5$.

O que deves saber

- Reconhecer e representar algebricamente uma função linear.
- Reconhecer e representar algebricamente uma função afim.

Atividades

VERIFICAR A APRENDIZAGEM

FUNÇÃO LINEAR

- 1 Considera a função linear $y = \frac{5}{2}x$.
Qual das tabelas define esta função?

A.

x	-1	0	1	2	3	4
y	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	4	$\frac{15}{2}$	-10

B.

x	-1	0	1	2	3	4
y	$-\frac{5}{2}$	0	5	$\frac{3}{2}$	7,5	10

C.

x	-1	0	1	2	3	4
y	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	5	$\frac{15}{2}$	10

- 2 Considera a função $f(x) = -2x$.
- 2.1 Determina $f(-2)$, $f(0,3)$, $f(\frac{1}{2})$ e $f(-\frac{2}{3})$.
- 2.2 Trata-se de uma função linear? Justifica a tua resposta.
- 2.3 Qual é o objeto cuja imagem é 10?

AUTOAVALIAÇÃO Sei reconhecer e usar a expressão algébrica de uma função linear?

FUNÇÃO AFIM

- 3 A D. Marta quer reservar um quarto de hotel no Algarve e assistir a um espetáculo. O preço do quarto é de 80 € por noite, aos quais se acrescentam 20 € para o bilhete do espetáculo. Escreve a expressão algébrica da função que a cada número de noites (x) faz corresponder o preço da reserva (y).
- 4 Considera as seguintes expressões algébricas de funções:
- A. $y = 8x$ C. $y = 14$ E. $y = -9x - 11$ G. $y = 5x^2 + 1$
 B. $y = 3x + 7$ D. $y = 2,5x - 4$ F. $y = -x$ H. $y = -6$
- 4.1 Identifica as funções lineares.
- 4.2 Quais das funções são constantes?
- 4.3 Indica as funções afins e, em cada caso, refere o coeficiente de x e o termo independente.
- 5 Considera a função que tem por expressão algébrica $y = 4x - 7$. Copia e completa a tabela seguinte:

x	-5	-3,25			3	6,3
y			-15	-7		

AUTOAVALIAÇÃO Sei reconhecer e usar a expressão algébrica de uma função afim?

Atividades

Tarefa

- 6** O preço do aluguer de material para esquiar, num complexo situado na serra da Estrela, é apresentado na tabela seguinte:

Duração/h	1	2	3	4	5
Preço/€	14	16	18	20	22

Os valores da tabela podem ser calculados através da função f definida por:

$$f(x) = 2x + 12$$

- 6.1** Justifica que se trata de uma função afim, mas não de uma função linear.
6.2 Qual seria o preço do aluguer de material durante dez horas?



APLICAR

- 7** O pai do Diogo tem uma fotocopiadora nova na sua empresa. A tabela seguinte relaciona o número de fotocópias (y) em função do tempo (x) que a fotocopiadora leva a tirar as mesmas.

Tempo (x)/min	1	2	3	4	5	6	...
N.º de fotocópias (y)	30	60	90	120	150	180	...

- 7.1** Quantas fotocópias é possível tirar em 8 minutos?
7.2 Escreve uma expressão algébrica que relacione as variáveis x e y .
7.3 Quanto tempo demorará a máquina a tirar 900 fotocópias?

- 8** Selecciona, de entre as expressões a seguir apresentadas, as que representam funções lineares.

Nota: Nos casos em que se trate de funções lineares, indica o respetivo coeficiente.

- A.** $f(x) = 3x + 1$
B. $g(x) = -7x$
C. $h(x) = \frac{1}{2}x$
D. $j(x) = 2x^2$
E. $s(x) = 0,6x$

- 9** O António recebe diariamente 2,5 € para lanche na escola.

- 9.1** Indica uma expressão algébrica que relacione o dinheiro (y) recebido pelo António em x dias de escola.
9.2 Quanto recebe o António ao fim de 8 dias?
9.3 Ao fim de quantos dias recebeu o António 50 €?

- 10** A D. Maria toma todos os dias dois comprimidos *Melhorex*, para controlar a sua tensão arterial.

- 10.1** Escreve uma expressão algébrica que relacione o número de comprimidos tomados (y) ao fim de x dias.
10.2 Quantos comprimidos *Melhorex* toma a D. Maria durante um ano bissexto?

- 11** Considera as seguintes funções:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	0	-2	-4	-6

x	-1	0	1	2	3
$g(x)$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

11.1 Escreve expressões algébricas para f e g .

11.2 Define, através de uma tabela, as funções:

- a) $f + g$
- b) $2g$
- c) $g - f$
- d) $f \times g$
- e) f^2

- 12** Completa as tabelas seguintes considerando $f(x) = -4x$ e $g(x) = 2$.

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$							

c)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) + g(x)$							

12.1 Define algebricamente $f + g$. Trata-se de uma função afim? Justifica a tua resposta.

- 13** O João recebeu 100 € no dia do seu aniversário. A partir dessa altura, poupa, em cada semana, 2 € da sua semanada.

13.1 Quanto dinheiro terá o João ao fim de sete semanas?

13.2 Quantas semanas passaram se o João já tiver 122 €?

13.3 Escreve uma expressão algébrica que relacione o dinheiro (y) que o João tem ao fim de x semanas.

- 14** Considera as funções $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 5x - 4$.

14.1 Calcula $f(1)$ e $g(-1)$.

14.2 Qual é o objeto cuja imagem por meio de f é 11?

14.3 Qual é o objeto cuja imagem por meio de g é 26?

14.4 Para o domínio $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ constrói as tabelas de $f + g$ e de $f \times g$.

14.5 Indica a forma canónica de $f - g$ e de $2g$.

2.4

Proporcionalidade direta



Recorda

Uma razão permite comparar dois números, a e b (com $b \neq 0$), calculando o quociente entre eles.

Escreve-se $a : b$ ou $\frac{a}{b}$.

a e b são os **termos** da razão:

a é o **numerador**,

b é o **denominador**.

■ Proporção. Regra de três simples

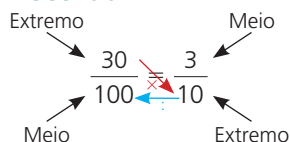
Em Portugal, a razão entre os jovens com excesso de peso e o número total de jovens é de $30 : 100$ (30 para 100) ou $\frac{30}{100}$.

Repara que $\frac{30}{100}$ pode ser simplificado: $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

A igualdade $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ é uma **proporção**. Pode ler-se: «30 está para 100, assim como 3 está para 10.»

Uma **proporção** é uma igualdade entre duas razões: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b \neq 0$ e $d \neq 0$).

Recorda



- Propriedade 1:
 $100 \times 3 = 30 \times 10$
- Propriedade 2:
 $3 = \frac{30 \times 10}{100}$

Propriedades das proporções:

1. Numa proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.
2. Qualquer meio é igual ao produto dos extremos a dividir pelo outro meio. Qualquer extremo é igual ao produto dos meios a dividir pelo outro extremo.

Exercício resolvido 1

Para fazer doce de figo, a D. Marta coloca 1 kg de açúcar por cada 2 kg de figos. Se usar 3 kg de figos, de que quantidade de açúcar necessita?

Resolução:

- 1.º Vamos chamar x à quantidade de açúcar, em quilogramas.
- 2.º Se para 1 kg de açúcar coloca 2 kg de figos, então, para x kg de açúcar usa 3 kg de figos e diz-se que «1 está para 2, assim como x está para 3».

- 3.º $\frac{1}{2} = \frac{x}{3}$, utilizando a 2.ª propriedade das proporções:

$$x = \frac{1 \times 3}{2} = 1,5$$

Conclui-se que, para 3 kg de figos, é necessário 1,5 kg de açúcar.

■ Constante de proporcionalidade direta

Se se observar o consumo de energia de um televisor,

Tempo/minutos	15	30	45
Consumo de energia/Wh	18,75	37,5	56,25

verifica-se que $\frac{18,75}{15} = 1,25$; $\frac{37,5}{30} = 1,25$; $\frac{56,25}{45} = 1,25$

As razões são iguais entre si e iguais a uma constante.

Nestas condições, diz-se que o consumo de energia da televisão é **diretamente proporcional** ao tempo.

O número 1,25 é a **constante de proporcionalidade**; corresponde à energia em watts-hora (Wh) consumida em cada minuto.

Duas grandezas, x e y , são **diretamente proporcionais** quando a razão entre os valores de y e os valores correspondentes de x (ou o inverso) é constante.

A razão $\frac{\text{valor de } y}{\text{valor correspondente de } x}$ denomina-se **constante de proporcionalidade direta entre y e x** .

Exercício resolvido 2

Na feira de maio, a Sofia encontrou a seguinte tabela junto dos carrinhos de choque:

N.º de fichas	1	2	3
Preço/euros	2	4	5

O preço é diretamente proporcional ao número de fichas?

Resolução:

Divide-se o preço pelo número de fichas:

$$\frac{2}{1} = 2; \frac{4}{2} = 2; \frac{5}{3} = 1,6$$

As razões não são todas iguais, por isso, o preço não é diretamente proporcional ao número de fichas.

As fichas ficam mais baratas quando se compram três.

Nota

Uma proporção também pode ser apresentada sob a forma de uma **regra de três simples**:

Açúcar (kg) Figs (kg)

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\quad} & 2 \\ x & \xleftarrow{\quad} & 3 \end{array}$$

$$x = \frac{3 \times 1}{2} = 1,5$$



O que deves saber

- Compreender e saber usar os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade direta.
- Resolver e formular problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta.

Atividades

VERIFICAR A APRENDIZAGEM

RAZÃO

- 1 Determina a razão entre o número de horas que costumás dormir por noite e o número de horas de um dia.
- 2 Quando vão para a escola, o Diogo percorre 800 m em 12 minutos e o Zito demora 16 minutos a percorrer 1 km. Qual deles é mais rápido? Justifica a tua resposta.
- 3 O Zito tem um aquário com 10 peixes. A razão entre o número de peixes vermelhos e o número total de peixes é de 3 : 5. Quantos peixes vermelhos tem o aquário?

AUTOAVALIAÇÃO Compreendo o conceito de razão?

PROPORÇÃO

- 4 Será verdade que $\frac{3}{18} = \frac{5}{35}$? Justifica a tua resposta.
- 5 Descobre o valor de x nas proporções:
a) $\frac{20}{5} = \frac{40}{x}$ **b)** $\frac{x}{15} = \frac{4}{20}$ **c)** $\frac{14}{6} = \frac{x}{9}$
- 6 A Joana está empenhada na reciclagem e costuma separar as embalagens de iogurtes e as garrafas de plástico numa razão de 9 : 2. Se no final do mês separou 45 embalagens de iogurtes, quantas garrafas de plástico separou?

AUTOAVALIAÇÃO Compreendo e sei usar o conceito de proporção?

REGRA DE TRÊS SIMPLES

- 7 A Sofia comprou 3 pacotes de bolachas por 3,45 €. Quanto custariam 5 pacotes? Quantos pacotes podia ter comprado com 8,05 €?
- 8 O carro do Sr. João consome cerca de 6 litros aos 100 quilómetros na autoestrada. Quantos litros de combustível são necessários para percorrer 350 km na autoestrada?
- 9 Converte:
a) 2,15 minutos em segundos;
b) 252 segundos em minutos.

AUTOAVALIAÇÃO Utilizo corretamente a regra de três simples?

PROPORCIONALIDADE DIRETA

- 10 Em cada caso, explica se existe proporcionalidade direta.
a) Entre o preço e o peso dos quivis.
b) Entre a altura de uma pessoa e a sua idade.
c) Entre o número de orelhas e o número de gatos.



- 11 Verifica, em cada caso, se as duas grandezas são diretamente proporcionais e, no(s) caso(s) afirmativo(s), indica a constante de proporcionalidade.

a)

x	3	6	8
y	12	24	32

b)

a	7	12	16
b	3	6	8

c)

x	33	3	15
y	11	0	5

AUTOAVALIAÇÃO Compreendo o conceito de proporcionalidade direta?

APLICAR

- 12 A Sofia e a Joana fazem anos na mesma altura e receberam, respetivamente, 40 € e 50 €. No dia seguinte, quando viram um cartaz da Associação Ajude os Animais Abandonados, decidiram contribuir com algum do dinheiro que tinham recebido.



Ajuda a Joana a responder à Sofia.

- 13 Numa escola, a razão entre o número de raparigas e o número de rapazes é de 5 : 3. Se a escola tem 600 alunos, quantos são rapazes?

A. 225 B. 240 C. 360 D. 375

- 14 A Joana quer fazer arroz-doce seguindo uma receita da sua mãe. Segundo essa receita, precisa de 300 gramas de arroz por cada 6 gemas de ovos.

14.1 Quantas gemas de ovos são necessárias se a Joana tiver apenas 200 g de arroz? E se tiver 450 g?

14.2 Determina a constante de proporcionalidade direta entre a quantidade de arroz e o número de gemas de ovos necessário.

14.3 Completa a relação: número de gramas de arroz = $\times$ número de gemas

- 15 Observa o quadro seguinte e responde às questões.

15.1 Copia e completa a tabela ao lado.

15.2 Justifica que o perímetro de um quadrado é diretamente proporcional ao comprimento do seu lado. Qual é a constante de proporcionalidade?

15.3 A área de um quadrado é diretamente proporcional ao comprimento do seu lado?

Lado do quadrado/cm	3	5			
Perímetro do quadrado/cm			24		
Área do quadrado/cm ²				64	121

INVESTIGAR

- 16 Procura um produto que se venda em várias embalagens cujo preço seja diretamente proporcional ao peso da embalagem; outro produto em que quanto maior for a embalagem mais económica se torna; e, por último, um produto em que seja mais vantajoso comprar embalagens pequenas.

Proporcionalidade direta como função

A SOFIA FOI AO TEATRO COM A MÃE INFORMAR-SE SOBRE O PREÇO DOS BILHETES...



N.º de bilhetes	1	2	3	4	5
Preço (€)	7,50	15	22,50	30	37,50

Descobre uma expressão que dê o preço a pagar, em euros, em função do número de bilhetes comprados.

Expressão algébrica



A tabela seguinte representa o custo da impressão de fotografias digitais, em função do seu número:

N.º de fotografias	1	2	3	4	5
Preço/cêntimos	5	10	15	20	25

Verifica-se que: $\frac{5}{1} = 5$; $\frac{10}{2} = 5$; $\frac{15}{3} = 5$; $\frac{20}{4} = 5$; $\frac{25}{5} = 5$

Como a razão entre o preço e o número de fotografias é constante, trata-se de uma situação de proporcionalidade direta.

Pode, então, dizer-se que:

$$\text{Preço} = 5 \times \text{n.º de fotografias}$$

Representando y o preço a pagar e x o número de fotografias, obtém-se a expressão:

$$y = 5x$$

sendo 5 a **constante de proporcionalidade direta**.

A função $f(x) = 5x$, definida para valores positivos, diz-se uma função de proporcionalidade direta. Nota que:

$$5 = f(1)$$

A expressão algébrica de uma **função de proporcionalidade direta** é $f(x) = kx$, em que k é a constante de proporcionalidade direta (k é positivo).

Observa que:

$$k = f(1),$$

ou seja, $f(1)$ dá-nos o valor da constante de proporcionalidade.

Uma função numérica f definida para valores positivos é uma função de proporcionalidade direta quando (e apenas quando)

$$\frac{f(x)}{x} = k,$$

para qualquer x pertencente ao domínio de f .

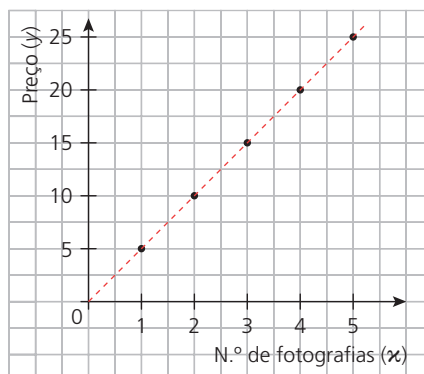
De facto:

- se f é uma função de proporcionalidade direta, então, existe um número k tal que $f(x) = kx$ (isto é, $\frac{f(x)}{x} = k$) para qualquer x pertencente ao domínio de f , ou seja, $\frac{f(x)}{x}$ é constante;
- se $\frac{f(x)}{x}$ é constante, então, para certo k , $\frac{f(x)}{x} = k$, ou seja, $f(x) = kx$ para x pertencente ao domínio de f . Ora, $y = kx$ e x podem ser considerados medidas de grandezas diretamente proporcionais, já que $\frac{y}{x} = \frac{kx}{x} = k$, logo, f é uma função de proporcionalidade direta.

■ Representação gráfica

Para construir o gráfico da função da página anterior (que ao número de fotografias faz corresponder o preço), é necessário marcar no plano cartesiano os pontos: (1; 5), (2; 10), (3; 15), (4; 20), (5; 25).

Estes cinco pontos estão todos numa reta, mas nem todos os pontos dessa reta pertencem ao gráfico.



Numa situação de proporcionalidade direta, os pontos do gráfico estão numa **reta que passa pela origem do referencial**.

Considera o exemplo anterior:

N.º de fotografias	1	2	3	4	5
Preço/cêntimos	5	10	15	20	25

Tem-se, $f(x) = 5x$.

Se a empresa pretender imprimir apenas pacotes de 10, 20, 30, 40 ou 50 fotografias, mantendo o preço por fotografia, qual será o preço de cada pacote?

Será que se mantém a proporcionalidade direta?

N.º de fotografias	10	20	30	40	50
Preço/cêntimos	?	?	?	?	?

O preço de cada pacote determina-se multiplicando o preço anterior pelo valor por que se multiplicou o número de fotografias para obter os pacotes:

N.º de fotografias	1×10	2×10	3×10	4×10	5×10
Preço/cêntimos	5×10	10×10	15×10	20×10	25×10

Nota que:

$$f(10) = 50$$

$$f(10 \times 3) = f(30) = 150$$

$$\text{e } 150 = 10 \times 15 = 10 \times f(3)$$

Em geral:

$$f(10x) = 10 \times f(x)$$

Se f é uma função de proporcionalidade direta, então:

$$f(cx) = cf(x) \quad (c > 0)$$

Exercício resolvido 1

O Sr. Miguel dedica-se ao cultivo de laranjeiras e à produção de laranjas. Vende cada quilograma de laranjas a 0,60 €.

- a) Completa a tabela apresentada ao lado, sabendo que se mantém o preço por quilograma de laranjas.

n	1	2	3	4	5	6
$C/\text{€}$						

- b) Como a colheita de 2012 foi muito boa, o Sr. Miguel decidiu colocar à disposição dos seus clientes sacos de 4, 8, 12, 16, 20 e 24 quilogramas de laranjas. Elabora uma tabela com o preço destes sacos.

Resolução:

a)

n (n.º de quilos comprados)	1	2	3	4	5	6
$C/\text{€}$ (custo a pagar)	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60

- b) Repare-se que os valores 4, 8, 12, 16, 20 e 24 resultam de 1×4 ; 2×4 ; 3×4 ; 4×4 ; 5×4 e 6×4 ; então as imagens serão também calculadas fazendo $0,60 \times 4$; $1,20 \times 4$; $1,80 \times 4$; $2,40 \times 4$; $3,00 \times 4$ e $3,60 \times 4$.

Assim:

n (n.º de quilos comprados)	4	8	12	16	20	24
$C/\text{€}$ (custo a pagar)	2,40	4,80	7,20	9,60	12,00	14,40

O que deves saber

- Compreender a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade direta.

Atividades

VERIFICAR A APRENDIZAGEM

EXPRESSÃO ALGÉBRICA

- 1 Faz corresponder a cada função, representada por uma tabela, a sua expressão algébrica.

A.

x	1	2	3	4
y	2	4	6	8

B.

x	3	4	8	10
y	7,5	10	20	25

C.

x	15	20	30	45
y	7,5	10	15	22,5

1. $y = 0,5x$

2. $y = 2,5x$

3. $y = 2x$

DETERMINAR UMA IMAGEM CONHECENDO A EXPRESSÃO ALGÉBRICA

- 2 Considera a função definida pela expressão algébrica $y = 10x$.
A imagem de 50 é:

A. 5

B. 10

C. 60

D. 500

AUTOAVALIAÇÃO Sei determinar e usar a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade direta?

FUNÇÃO DE PROPORCIONALIDADE DIRETA

- 3 Segundo a informação nutricional de uma caixa de pastilhas de chocolate, em cada 10 gramas existem aproximadamente 45 quilocalorias.

3.1 Copia e completa a tabela seguinte:

Massa/g	10	20	40	50	70
Valor energético/kcal					



3.2 Constrói o gráfico da função representada pelo problema.

3.3 Qual é o valor energético de 100 g de pastilhas de chocolate?

3.4 Qual é a expressão algébrica da função?

AUTOAVALIAÇÃO Sei construir o gráfico de uma situação de proporcionalidade direta?

APLICAR

- 4 Completa as tabelas seguintes, sabendo que as grandezas são diretamente proporcionais.

A.

a	1	4		21
b		16	10	

C.

t		8	10	
v	1	2		12

B.

x	2	1	6	
y			12	24

D.

a	0	2	5		12
b		6		18	

Atividades

- 5 Uma torneira verte água durante algum tempo. Os dados foram registados na seguinte tabela:

Tempo/minutos	1	3	4	5	6
Volume de água/litros	2,5	7,5	10	12,5	15

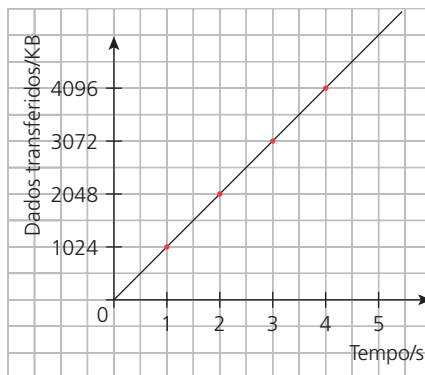
- 5.1 Verifica se o volume de água vertido é diretamente proporcional ao tempo. Justifica a tua resposta.
 5.2 Indica o valor da constante da proporcionalidade no contexto do problema.
 5.3 Completa:
 volume de água = $\times$ tempo
 tempo = $\times$ volume de água
 5.4 Calcula o volume de água vertido ao fim de 9 minutos.
 5.5 Determina ao fim de quanto tempo foram vertidos 45 litros de água.

- 6 A empresa de transportes *Às das Mudanças* faz todo o tipo de transportes e mudanças em Portugal. Aplica um preço único de 6 € ao quilómetro.

- 6.1 Num dia, a empresa fez cinco transportes de 15, 30, 45, 50 e 80 km. Constrói uma tabela que represente o custo de cada um dos transportes, em função dos quilómetros percorridos.
 6.2 Mostra que existe proporcionalidade direta entre o custo do transporte e a distância percorrida. Refere a constante de proporcionalidade direta e o seu significado.
 6.3 Escreve a expressão algébrica da função, sendo c o custo a pagar, em euros, e d a distância percorrida, em quilómetros.

- 7 O gráfico seguinte mostra a velocidade com que o computador portátil do Zito executa os *downloads*.

- 7.1 Quanto tempo demora o *download* de um ficheiro com 512 KB?
 7.2 Calcula a constante de proporcionalidade direta entre os dados transferidos e o tempo gasto.
 7.3 Qual é o significado da constante de proporcionalidade direta?
 7.4 O Zito copiou um programa de Matemática com 6144 KB. Quantos segundos demorou a copiar o programa?



- 8 Numa pizzeria muito conceituada, o preço das pizzas (p), em euros, varia em função do seu diâmetro (d), em centímetros. Existem pizzas com 25 cm, 36 cm e 45 cm, que custam 4,25 €, 6,12 € e 7,65 €, respetivamente.



- 8.1 Existe proporcionalidade direta entre o preço da pizza e o seu diâmetro? Justifica a tua resposta.
 8.2 Escreve a expressão algébrica do preço das pizzas, p , em função do seu diâmetro, d , para que o dono da pizzeria a possa colocar no letreiro da entrada do restaurante.
 8.3 Quanto custaria uma pizza com 50 cm de diâmetro?
 8.4 Se te dessem a escolher entre uma pizza com 50 cm de diâmetro ou duas com 25 cm de diâmetro, qual seria a tua opção? Justifica a tua resposta.
 8.5 Procura uma pizzeria na tua região e verifica o que é mais vantajoso: se é escolher duas pizzas pequenas ou uma média.

- 9 Numa reprografia, o custo de cada fotocópia é de 4 cêntimos.

x	1	2	3	4	7
$C(x)$					

9.1 Completa a tabela, em que x representa o número de fotocópias e $C(x)$, o custo.

9.2 Trata-se de uma situação de proporcionalidade direta? Justifica a tua resposta.

9.3 Quanto custam 18 fotocópias?

9.4 Com base na tabela anterior, completa a tabela seguinte apresentando o custo em euros.

x	10	20	30	40	70
$C(x)$					

- 10 O Sr. António produz e vende batatas. Cada quilograma de batatas custa 0,20 €. A tabela seguinte relaciona a quantidade vendida de batatas, em quilogramas, com a quantia recebida pela venda das mesmas.

10.1 Completa a tabela seguinte.

Peso/kg	0	1	2		
Custo/€				0,80	3,00

10.2 Escreve uma expressão que relacione o valor recebido pelo Sr. António, em função do número de quilogramas de batatas vendido.

10.3 A D. Marta comprou um saco com 22 kg de batatas. Quanto pagou?

10.4 Quantos quilogramas de batatas comprou com 50 €?

10.5 Com o intuito de esgotar o *stock* de batatas do último ano, o Sr. António decidiu vender as batatas em sacos de 10, 20, 30 e 40 quilogramas cada. Elabora a tabela de preços.

Peso/kg	10	20	30	40
Custo/€				

- 11 Um comboio efetua o trajeto sem paragens entre duas cidades a uma velocidade constante. A tabela que a seguir se apresenta relaciona a distância percorrida pelo comboio com o tempo que o mesmo demora a percorrê-la.

Tempo/horas	0,5	2	3	4,5
Distância/km	70	280	420	630

11.1 Mostra que as duas grandezas são diretamente proporcionais e indica o valor da constante de proporcionalidade, bem como o seu significado.

11.2 Escreve uma expressão que relacione a distância percorrida, d , com o tempo, t .

11.3 Quanto tempo é necessário para que o comboio percorra 490 quilómetros?

- 12 Na papelaria *Papel&Lápis*, a expressão que relaciona o custo a pagar por cada cliente, C , com o número de lápis que compra, n , é do tipo $C = n \times k$, em que k representa o custo de cada lápis.

12.1 Com base na tabela apresentada ao lado, determina o valor de k .

12.2 Completa a tabela.

12.3 Qual é o preço a pagar por 23 lápis?

12.4 A Maria gastou 4,20 € em lápis nesta papelaria e beneficiou de uma promoção: «Por cada 4 lápis comprados, leva mais 1 lápis grátis.» Quantos lápis levou a Maria?

N.º de lápis comprados (n)	Custo (C)/€
2	
3	1,05
5	
7	
15	

- 13 Inventa um problema que represente uma situação de proporcionalidade direta e escreve a constante e a expressão algébrica que o traduz.

Síntese

Definição de função

Dá-se o nome de função ou aplicação, f , a toda a correspondência entre um conjunto A e um conjunto B que a cada elemento x do conjunto A faz corresponder um, e um só, elemento y do conjunto B .

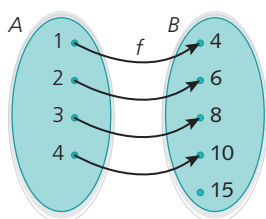
Simbolicamente, representa-se por $f: A \rightarrow B$.

O conjunto A denomina-se **domínio da função** e representa-se por D_f . Os elementos do domínio chamam-se **objetos**.

Os elementos do conjunto B que são imagens por f dos elementos de A formam o **contradomínio da função**, que é representado por D'_f , CD_f ou $f(A)$. Os elementos do contradomínio designam-se por **imagens**.

Uma função $f: A \rightarrow B$ é uma função de **variável numérica** se A é um conjunto de números e diz-se uma **função numérica** se B é um conjunto de números.

Exemplo:



$D_f = \{1; 2; 3; 4\}$; os objetos são: 1, 2, 3 e 4.

$D'_f = \{4; 6; 8; 10\}$; as imagens são: 4, 6, 8 e 10.

Conjunto de chegada = $\{4; 6; 8; 10; 15\}$

Diz-se que: «a imagem do objeto 2, pela função f , é 6.»

Imagem do objeto 2

$$f(2) = 6$$

Objeto Imagem

Operações com funções

Dadas as funções $f: A \rightarrow \mathbb{Q}$ e $g: A \rightarrow \mathbb{Q}$ é possível definir $f + g$, $f - g$, $f \times g$, λf e f^n ($\lambda \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$) como sendo as funções de domínio A e conjunto de chegada $\mathbb{Q}$, tais que:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
- $(f)^n(x) = [f(x)]^n$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $\lambda f(x) = \lambda \times f(x)$

Gráfico cartesiano

A função do exemplo anterior (função f) pode ser representada por meio de uma tabela:

A **variável independente**, x , representa cada **objeto** do domínio.

A **variável dependente**, y , representa a **imagem** do objeto x .

Variável independente (x)	1	2	3	4
Variável dependente (y)	4	6	8	10

Plano cartesiano

Num referencial cartesiano, qualquer ponto é identificado por duas coordenadas.

Exemplo:

$A(1; 4)$

- 1 é a **abscissa** (no eixo horizontal)
- 4 é a **ordenada** (no eixo vertical)

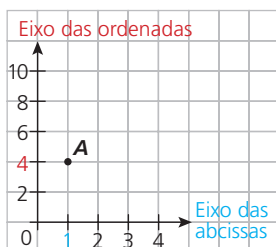
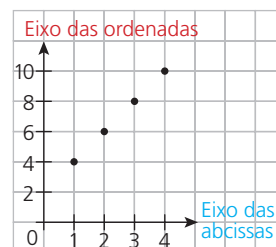


Gráfico cartesiano de uma função

- No eixo das abscissas, colocam-se os valores que a variável independente toma.
- No eixo das ordenadas, colocam-se os valores que a variável dependente toma.

Exemplo:



Função constante

Uma função $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ diz-se uma **função constante** se existe um número racional a tal que $f(x) = a$, com a número racional, para todo o $x \in \mathbb{Q}$.

Função linear

Uma função $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ diz-se uma **função linear** se existe um número racional, a , tal que $f(x) = ax$ para todo o $x \in \mathbb{Q}$. Diz-se que a é o **coeficiente da função linear** f .

$f(x) = ax$ é a **forma canónica** da função linear.

O **produto** de uma função linear por uma constante é uma função linear.

A **soma e a diferença** de duas funções lineares são funções lineares.

Exemplos: Considera $f(x) = 4x$ e $g(x) = -2x$

- $3 \times f(x) = 3 \times 4x = 12x$ (função linear de coeficiente 12)
- $f(x) + g(x) = 4x + (-2x) = 2x$ (função linear de coeficiente 2)
- $f(x) - g(x) = 4x - (-2x) = 6x$ (função linear de coeficiente 6)

Função afim

Uma função $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ diz-se uma **função afim** se existem números racionais, a e b , tais que $f(x) = ax + b$ para todo o $x \in \mathbb{Q}$. Diz-se que a é o **coeficiente de x** e que b é o **termo independente**.

$f(x) = ax + b$ é a **forma canónica** da função afim.

Qualquer **função afim** é a **soma de uma função linear com uma constante**.

O **produto** de uma constante por uma função afim é uma função afim.

A **soma e a diferença** de duas funções afins são funções afins.

Exemplos: Considera $f(x) = 4x - 1$ e $g(x) = -2x + 3$.

- $3 \times f(x) = 3 \times (4x - 1) = 12x - 3$ (função afim)
- $f(x) + g(x) = 4x - 1 + (-2x + 3) = 2x + 2$ (função afim)
- $f(x) - g(x) = 4x - 1 - (-2x + 3) = 4x - 1 + 2x - 3 = 6x - 4$ (função afim)

Proporcionalidade direta

Constante de proporcionalidade direta

Duas grandezas, x e y , são **diretamente proporcionais** quando a razão entre os valores de y e os valores correspondentes de x (ou o inverso) é constante.

Exemplo:

x	4	6	8
y	16	24	32

$\times 4$ $\times 0,25$ $\frac{16}{4} = 4$; $\frac{24}{6} = 4$; $\frac{32}{8} = 4$ x e y são diretamente proporcionais.

No exemplo, a **constante de proporcionalidade direta** entre y e x é 4 (dividindo y por x); a constante de proporcionalidade direta entre x e y é 0,25 (dividindo x por y).

Função de proporcionalidade direta

Expressão algébrica

A expressão algébrica de uma função de proporcionalidade direta é $y = kx$, em que k é a constante de proporcionalidade direta (k é positivo).

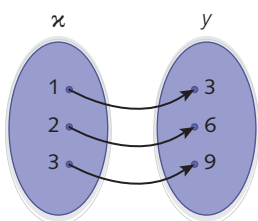
Atividades globais

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

Das quatro alternativas, escolhe a única opção correta.

- 1 Qual das seguintes correspondências não representa uma função?

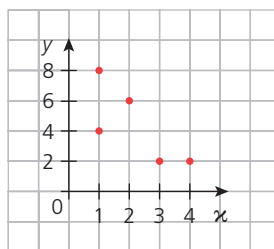
A.



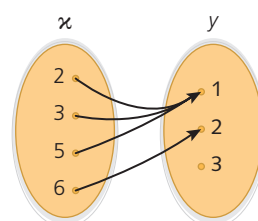
B.

x	5	10	15
y	3	8	13

C.



D.



- 2 O maior avião de passageiros de sempre, o A-380 da Airbus, tem uma velocidade de cruzeiro de 1013 km/h. A esta velocidade, qual é a distância que percorre em oito horas e meia?

- A. 8013 km C. 8407,9 km
B. 8104 km D. 8610,5 km



- 3 No tempo dos teus avós e bisavós, existiam muitas medidas que hoje já não se usam. Uma delas era o almude, usado para líquidos como o azeite. Sabendo que 1 almude equivale a cerca de 16,8 litros, quantos almudes são 58,8 litros?

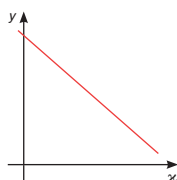
- A. 3 B. 3,5 C. 75,6 D. 987,8

- 4 Em qual das seguintes expressões algébricas a imagem de 42 é 14?

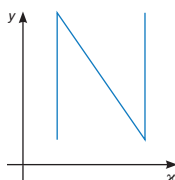
- A. $y = 3x$ B. $y = \frac{x}{3}$ C. $y = 14x$ D. $y = \frac{x}{14}$

- 5 Observa os gráficos:

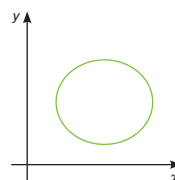
I.



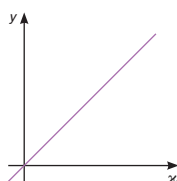
II.



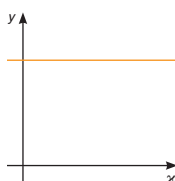
III.



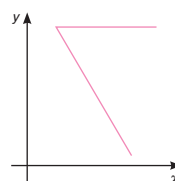
IV.



V.



VI.

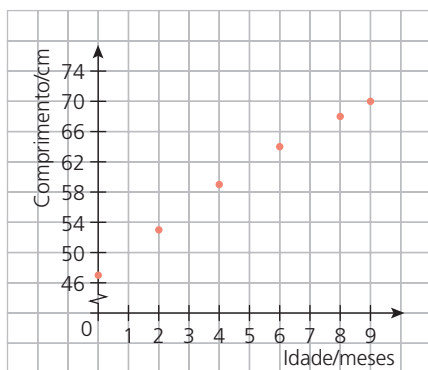


Seleciona a opção correta.

- A. São funções os gráficos I, II e V. C. São funções os gráficos I, IV e VI.
B. São funções os gráficos II, III e VI. D. São funções os gráficos I, IV e V.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

- 6** O gráfico que se segue representa a correspondência entre a idade da Anita, em meses, e o seu comprimento, em centímetros.



- 6.1** O gráfico representa uma função? Justifica a tua resposta.
6.2 Com quantos centímetros de comprimento nasceu a Anita?
6.3 Passados 6 meses, quantos centímetros tinha crescido a Anita?
6.4 Traduz os dados do gráfico por meio de uma tabela.
6.5 Existe proporcionalidade direta entre o comprimento da Anita e a sua idade? Justifica a tua resposta.

- 7** A Joana e a Sofia fizeram a seguinte experiência:

«Usa uma vela pequena (das de aniversário), mede o seu comprimento e coloca-a na vertical, deitando algumas gotas de cera de outra vela num prato, por exemplo. Prepara um relógio que te permita medir intervalos de 20 segundos. Acende a vela e espera 20 segundos. Apaga imediatamente a vela. Mede novamente o seu comprimento. Repete a experiência 4 vezes, registando sempre os valores obtidos para o comprimento da vela.»

A tabela que se segue mostra os registos feitos pela Joana e pela Sofia.

Tempo, em segundos (x)	Comprimento da vela, em centímetros	Porção de vela ardida, em centímetros (y)
0	4,8	0
20	4,6	0,2
40	4,4	0,4
60	4,2	0,6
80	4	0,8
100	3,8	1

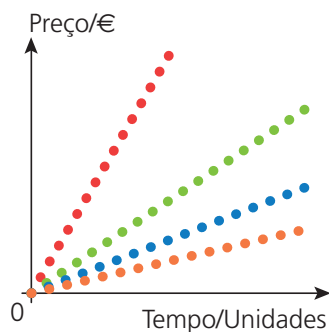


- 7.1** Justifica que existe proporcionalidade direta entre o tempo decorrido e a porção de vela ardida.
7.2 Qual é a constante de proporcionalidade direta? Qual é o seu significado?
7.3 Constrói o gráfico da função num referencial cartesiano.
7.4 Faz sentido unir os pontos do gráfico? Justifica a tua resposta.
7.5 Ao fim de 3 minutos, que porção de vela terá ardido?

(Atividade adaptada de «A Chama de Aniversário», da brochura Funções do 10.º ano de escolaridade)

Atividades globais

- 8 Numa determinada operadora de telecomunicações, o preço de uma chamada telefónica pela rede fixa é diretamente proporcional ao número de unidades de contagem, que depende do tipo de chamada (local, regional, nacional e internacional). Associa cada um dos tipos de chamadas a uma das cores representadas no referencial. Justifica a tua resposta.



- 9 Observa as tabelas e responde às questões.

A.

x	1	2	3	4
$y = 3x$				

C.

x	1	2	3	4
$y = 2x + 1$				

B.

x	1	2	3	4
$y = x^2 - 1$				

D.

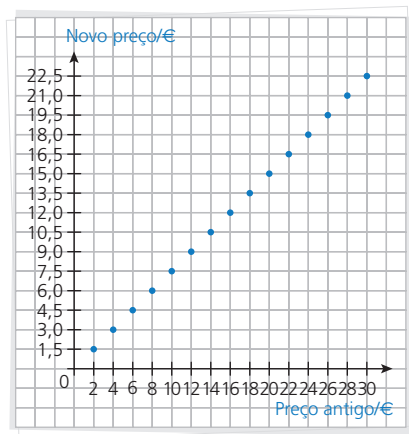
x	1	2	3	4
$y = 0,5x$				

9.1 Copia e completa as tabelas.

9.2 Representa os dados de cada tabela num referencial cartesiano.

9.3 Quais são as funções lineares e quais são as funções afins?

- 10 Numa feira do livro, junto aos livros, está afixado um gráfico com os preços antigos e os preços com desconto.



10.1 Quanto custa um livro cujo preço era 16 €?

10.2 Qual era o preço de um livro que custa agora 21 €?

10.3 Comenta: «O gráfico representa uma função de proporcionalidade direta.»

10.4 Copia e completa a relação:
novo preço = $\times$ preço antigo.



CANGURU MATEMÁTICO SEM FRONTEIRAS

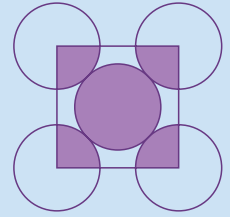


- 11** No diagrama, os cinco círculos têm o mesmo raio e tocam-se como indicado na figura. Os vértices do quadrado coincidem com os centros dos quatro círculos exteriores.

A razão entre a área sombreada e a área não sombreada dos cinco círculos é:

- A.** 1 : 3 **B.** 1 : 4 **C.** 2 : 5 **D.** 2 : 3 **E.** 5 : 4

Prova «Benjamim», 2005



- 12** Um grupo de dança tem 39 rapazes e 23 raparigas. Todas as semanas entram para o grupo mais 6 rapazes e mais 8 raparigas. Ao fim de algumas semanas o grupo terá o mesmo número de rapazes e de raparigas.

Quantos rapazes e raparigas terá, nessa altura, o grupo de dança?

- A.** 144 **B.** 154 **C.** 164 **D.** 174 **E.** 184

Prova «Benjamim», 2009

- 13** Uma bola de borracha cai verticalmente do telhado de uma casa de uma altura de 10 m. Após cada impacto no chão ela dá um salto de altura igual a $\frac{4}{5}$ da altura anterior. Quantas vezes irá a bola passar à frente de uma janela retangular com 1 m de altura e cuja parte inferior está a 5 m do chão?

- A.** 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6 **E.** 8

Prova «Benjamim», 2012

CONVIVER COM A MATEMÁTICA

- 14** A D. Marta vai trabalhar um mês na Noruega. Antes de partir, precisa de trocar euros (EUR) por coroas norueguesas (NOK).

14.1 A taxa de câmbio entre o euro e a coroa norueguesa é: $1 \text{ EUR} = 7,97 \text{ NOK}$. A D. Marta trocou 1500 euros. Que quantia recebeu em coroas norueguesas?

14.2 Quando a D. Marta regressou, tinha ainda 2025 coroas, que trocou por euros. Reparou, no entanto, que a taxa de câmbio tinha mudado para $1 \text{ EUR} = 8,10 \text{ NOK}$. Quantos euros recebeu a D. Marta?

14.3 Durante esse mês, a taxa de câmbio mudou. Para a D. Marta, foi vantajoso reconverter as suas coroas em euros quando a taxa de câmbio era de 8,10 em vez de 7,97? Justifica a tua resposta.



- 15** Os moradores de um prédio decidiram comprar esse prédio. Reuniram o dinheiro de forma que cada um contribuisse com uma quantia proporcional ao tamanho do seu apartamento. Por exemplo, uma pessoa que more num apartamento que ocupe um quinto da área total de todos os apartamentos deverá pagar um quinto do preço total do prédio. O prédio tem três apartamentos. O maior, o apartamento 1, tem uma área total de 95 m^2 . Os apartamentos 2 e 3 têm áreas de 85 m^2 e 70 m^2 , respetivamente. O preço da venda do prédio é de 300 000 €.

Quanto terá de pagar o proprietário do apartamento 2? Mostra como obtiveste a tua resposta.

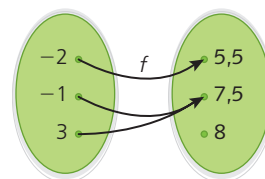


AUTOAVALIAÇÃO

EM CADA UMA DAS TRÊS QUESTÕES SEGUINTE,
ESCOLHE A OPÇÃO CORRETA.

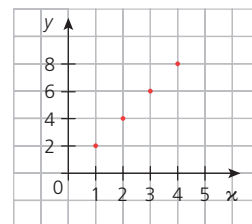
Pág. 75

- 1** Qual é o domínio da função f definida pelo diagrama representado ao lado?
- A.** $\{5,5; 7,5; 8\}$ **C.** $\{5,5; 7,5\}$
B. $\{-2; -1; 3\}$ **D.** $\{-2\}$



Pág. 81

- 2** Atendendo ao gráfico da figura ao lado, qual é o objeto que tem por imagem 4?
- A.** 0 **C.** 4
B. 2 **D.** 8



Pág. 90

- 3** Na proporção $\frac{15}{x} = \frac{25}{12}$, o valor de x é:
- A.** 2 **B.** 7 **C.** 7,2 **D.** 21

APRESENTA TODOS OS CÁLCULOS QUE TIVERES DE EFETUAR.

- 4** Considera as funções f e g definidas pelas tabelas apresentadas.

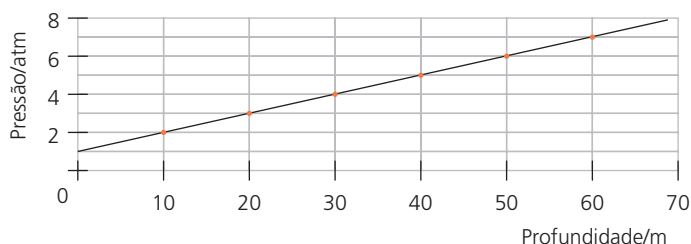
x	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	-1	-2

x	-1	0	1	2
$g(x)$	-5	0	5	10

- 4.1** Representa a função f graficamente.
4.2 Define através de uma tabela a função $f \times g$.
4.3 Define através de uma tabela a função f^3 .
4.4 As funções f e g são funções lineares. Define as funções f e g por expressões algébricas e prova que $f - g$ é uma função linear.

- 5** Num determinado local, a relação entre a pressão, em atmosferas (atm), a que está sujeito um corpo imerso em água, e a profundidade, em metros (m), a que o corpo se encontra é dada pelo gráfico seguinte.

A partir da análise do gráfico, responde às questões que se seguem.



- 5.1** O gráfico representa uma função? Justifica a tua resposta.
5.2 Se uma pessoa estiver à superfície da água, qual é a pressão, em atmosferas, exercida sobre ela?
5.3 Explica por que motivo a relação entre a pressão e a profundidade não é uma relação de proporcionalidade direta.

Exercício adaptado do Teste Intermédio do 8.º ano, 2008

Pág. 81

Pág. 76

Pág. 76

Pág. 84

Pág. 74

Pág. 95

Pág. 95

- 6** Numa loja de doces, estão à venda pacotes de caramelos de vários tamanhos. Na tabela seguinte, estão indicados os preços de três embalagens.

Peso/kg	0,2	0,6	0,8
Preço/€	2,50	7,50	10



- 6.1** O preço é diretamente proporcional ao peso? Justifica a tua resposta.
6.2 O que representa a constante de proporcionalidade?
6.3 Completa a relação: preço = $\times$ peso da embalagem.
6.4 Identifica a variável independente e a variável dependente.
6.5 Representa os dados da tabela num referencial cartesiano.
6.6 Um dia, o gerente da loja decidiu reduzir em 0,75 € o preço de cada pacote.
6.6.1 Indica os novos preços, preenchendo uma tabela:

Peso/kg	0,2	0,6	0,8
Preço/€			

- 6.6.2** Nesse caso, o preço a pagar é diretamente proporcional ao peso? Justifica a tua resposta.
6.6.3 Mantendo a redução de 0,75 € no preço do pacote de 0,2 kg, como aconselharias o gerente a baixar o preço dos outros pacotes, de modo a existir proporcionalidade direta?

- 7** Classifica como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações, justificando em cada um dos casos.
- A.** Numa função, cada objeto tem de corresponder a uma imagem diferente.
B. Numa função, cada elemento do segundo conjunto está em correspondência com um elemento do primeiro conjunto.
C. A expressão $y = 2x + 1$ representa uma proporcionalidade direta.

Pág. 91

Pág. 91

Pág. 94

Pág. 81

Pág. 81

Pág. 91

Pág. 91

Pág. 91

Págs. 90, 91, 92 e 94

SE TENS MENOS DE 50 PONTOS: É MELHOR VOLTARES A ESTUDAR ESTA UNIDADE!
 SE TENS ENTRE 50 PONTOS E 69 PONTOS: REVÊ AS PARTES QUE ERRASTE
 E FAZ MAIS ALGUNS EXERCÍCIOS. SE TENS ENTRE 70 PONTOS E 89 PONTOS:
 ESTÁS NO BOM CAMINHO. SE TENS 90 PONTOS OU MAIS: PARABÉNS!

GRELHA DE AVALIAÇÃO

Exercício	1	2	3	4.1	4.2 a 4.4	5	6.1 a 6.4	6.5	6.6	7
Cotação ¹ (pontos)	4	4	4	8	15	14	18	7	14	12

¹ Para saberes a cotação de cada alínea, basta dividires a cotação do exercício pelo número de alíneas.



Estratégias para a resolução de problemas e jogos

Alguns jogos ajudam a desenvolver vários tipos de raciocínio. Um bom jogador, para ganhar, usa o mesmo tipo de **estratégias** que se usam para resolver problemas de Matemática.

Jogo O jogo Solitário na variante Diamante

Jogar sozinho

O Solitário é um jogo de raciocínio para ser jogado individualmente. As suas origens não são bem conhecidas, mas pensa-se que tenha sido inventado no século XVIII por um francês, durante o tempo em que esteve preso na Bastilha. Foi, portanto, na Europa que teve maior sucesso. Sobre este jogo, o filósofo e matemático alemão Gottfried Leibniz disse: «O Solitário é, certamente, a perfeita arte de meditar.»

Caso não tenhas um tabuleiro de Solitário, podes desenhar quadrículas numa cartolina e usar feijões em vez de pinos.

Apresentam-se, a seguir, as regras de uma das variantes do jogo Solitário: o Diamante.

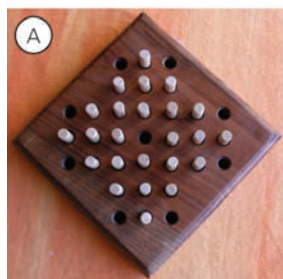


NÚMERO DE JOGADORES: 1.

MATERIAL: Um tabuleiro com 33 orifícios e 24 pinos.

REGRAS:

1. Colocam-se as peças conforme se mostra na figura A.
2. O jogo consiste em pegar num pino e saltar por cima de um pino adjacente para o orifício vazio seguinte. O pino sobre o qual se faz o salto é então removido do tabuleiro (a jogada é idêntica à efetuada no jogo das Damas).
3. Só são permitidos movimentos para cima, para baixo e para os lados.
4. O objetivo é terminar o jogo com apenas um pino no orifício central.
5. Um pino, depois de ter saltado sobre outro, pode não ter mais para onde ir. Contudo, se se deixarem vários pinos com espaços entre si, um pino vai conseguir saltar os outros pinos em sucessão, removendo assim vários pinos **numa só jogada**. Deste modo, o número de jogadas para alcançar o objetivo final pode ser reduzido, fazendo movimentos em cadeia.



Diamante, uma variante do jogo Solitário.

LI, NUM LIVRO,
QUE O NÚMERO
MÍNIMO DE JOGADAS
PARA ACABAR
ESTE JOGO É 8.
VOU COMEÇAR ASSIM:



Problema Videoclube

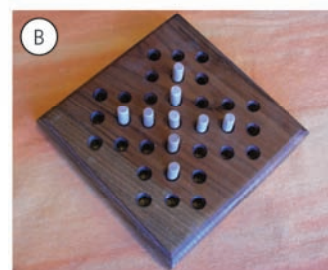
A Joana e o Diogo alugam filmes no mesmo videoclube. A Joana, como tem outras atividades, só aluga, no máximo, quatro filmes por mês. O Diogo aluga dois filmes por semana, ou seja, pelo menos oito filmes por mês.

Tendo em conta as condições do videoclube, descritas ao lado, como devem proceder os amigos para gastar o menos possível? A partir de quantos filmes vale a pena adquirir o cartão Cine Mais?



EXPLICAÇÃO DA ESTRATÉGIA DO JOGO E RESOLUÇÃO DO PROBLEMA:

- No jogo Solitário, antes de conseguir resolver «o diamante» em apenas oito jogadas, pode começar-se por treinar numa situação mais simples, por exemplo, «a cruz grega» (B) em seis jogadas (lembra-te de que, sempre que uses o mesmo pino para saltar várias vezes, só conta como uma jogada).
- Para resolver o problema do videoclube, também é mais fácil começar por torná-lo mais simples, neste caso, considerando **apenas uma parte do problema**.



ESTRATÉGIA: Começar por resolver um problema parecido, mas mais simples.

Começemos pela situação de não ter o cartão Cine Mais:

N.º de filmes alugados por mês	1	2	3	4	5	6	7	8
Preço a pagar/€	3	6	9	12	15	18	21	24

De seguida, observemos o que sucede quando a pessoa é portadora do cartão Cine Mais:

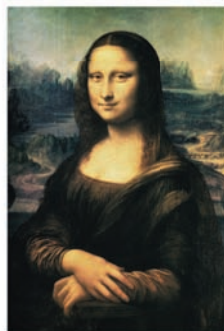
N.º de filmes alugados por mês	1	2	3	4	5	6	7	8
Preço a pagar/€	8	10	12	14	16	18	20	22

RESPOSTA: Para a Joana, não compensa adquirir o cartão Cine Mais, pois gastaria mais 2 € por mês. Já para o Diogo, se adquirir o cartão, poupa 2 € por mês. O cartão Cine Mais traz vantagens para pessoas que aluguem 7 ou mais filmes por mês.

Representa graficamente as funções apresentadas nas duas tabelas. São funções de proporcionalidade direta? Para cada uma, encontra a expressão algébrica que relaciona o preço a pagar com o número de filmes alugados por mês.

O número de ouro e o retângulo de ouro

Qual é o ponto comum entre o Partenon de Atenas, a Mona Lisa, de Leonardo da Vinci, e uma concha de caracol?



Desde a Antiguidade que se considera que a forma mais harmoniosa de dividir um segmento $[AB]$ em duas partes é colocar um ponto C , tal que:

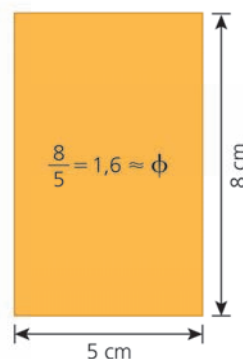
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$


Esta proporção é conhecida por **proporção de ouro**. O valor da razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$ é designado por **número de ouro** (ϕ , «Phi») e é igual a $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.

Este número encontra-se frequentemente na Natureza: na regularidade do crescimento das árvores, nas proporções do corpo humano e dos animais, na frequência do nascimento de coelhos, na forma da concha do caracol, etc.

Além disso, considera-se que um dos retângulos mais agradáveis à vista é o **retângulo de ouro**, em que a razão entre o comprimento e a largura é igual ao número de ouro.

O retângulo de ouro tem uma forte presença nas artes. Aparece, nomeadamente, em obras de Albrecht Dürer, Georges Seurat, Piet Mondrian e Salvador Dalí. Leonardo da Vinci, um dos maiores génios de todos os tempos, disse que esse retângulo tem «proporções divinas» e usou-o no rosto de Mona Lisa. Também parece estar presente em numerosas obras de arquitetura, como o Partenon em Atenas (na Grécia).

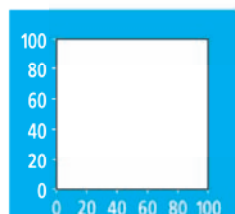


Sugestões de trabalho

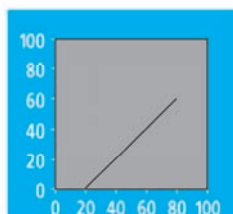
- Elabora uma apresentação em PowerPoint sobre o número de ouro e o retângulo de ouro explicando o que são e descrevendo situações em que aparecem e curiosidades relacionadas com eles.
- Faz uma ilustração sobre o tema «Proporcionalidade Direta» utilizando o número de ouro e o retângulo de ouro.

Programa de desenho (adaptado de Design by Numbers¹, PISA, 2003)

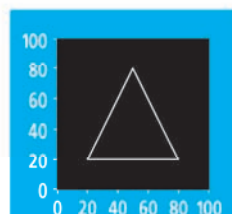
Design by Numbers é um programa de desenho que permite criar imagens por meio de instruções. Observa atentamente os exemplos seguintes:



Papel 0

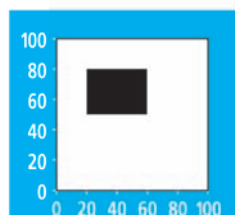


Papel 50
Caneta 100
Linha 20 0 80 60



Papel 100
Caneta 0
Linha 20 20 80 20
Linha 80 20 50 80
Linha 50 80 20 20

Observa agora um exemplo com a instrução «Repetir».



Papel 0
Caneta 100
Repetir A 50 80
{
Linha 20 A 60 A
}

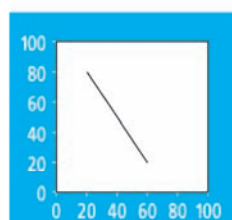
A instrução «Repetir A 50 80» indica ao programa que repita as ações entre chavetas { } para valores sucessivos de A, desde A = 50 até A = 80.

¹ Design by Numbers foi desenvolvido pelo Aesthetics and Computation Group no MIT Media Laboratory, Copyright 1999, Massachusetts Institute of Technology. Pode ser feito o download do programa em <http://dbn.media.mit.edu>.

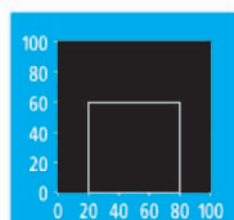
Sugestão de trabalho

Escreve as instruções que permitem obter cada uma das imagens seguintes.

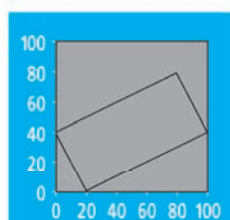
a)



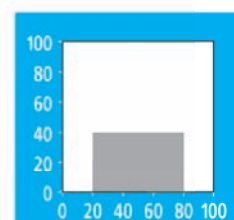
b)



c)



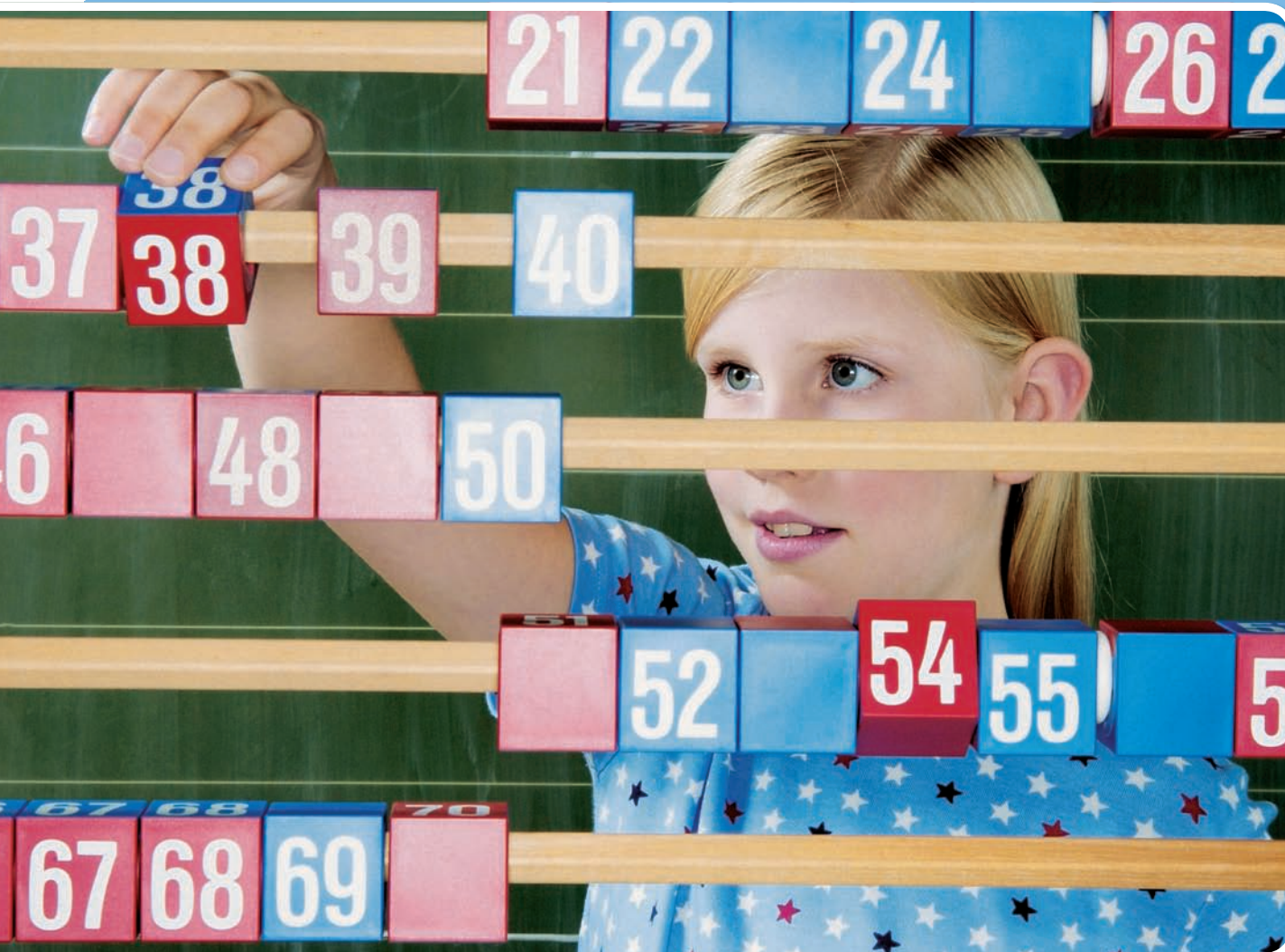
d)



Páginas da Internet

- Número de ouro: <http://scsmatematica.com.sapo.pt/mundomatematico/numerodeouro.htm>
- Software para gráficos de funções: <http://graphmatica.com>
- Batalha Naval (coordenadas): <http://www.skool.pt/content/sims/maths/co-ordinates/launch.html>

SEQUÊNCIAS E SUCESSÕES



Atividades iniciais 113

3.1 Sequências e sucessões 114

Termos e ordem

Lei de formação

Atividades 116

3.2 Termo geral 118

Termo geral. Representação

Sucessões de múltiplos naturais

Atividades 120

3.3 Termos de uma sequência e de uma sucessão 122

Escrever termos de uma sucessão a partir do termo geral

Determinar um termo de uma ordem qualquer

Gráficos de sequências

Atividades 124

Síntese 126

Atividades globais 128

Autoavaliação 132

Estratégias para a resolução de problemas

e jogos 134

Investigar 136

Atividades iniciais

Regularidades

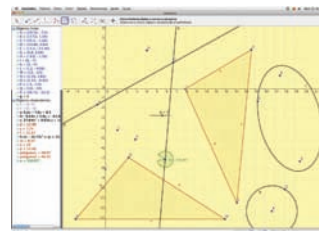
- 1 São vários os fenómenos que ocorrem com regularidade.



A lua cheia ocorre a cada 29 dias e meio.



O metropolitano entra na estação a cada 10 minutos.



Um software pode procurar atualizações de 7 em 7 dias.

Os fenómenos regulares são interessantes do ponto de vista matemático, pois podem ser estudados através de sequências de números. Por exemplo, se estivermos numa estação do metropolitano e observarmos que os últimos três metropolitano chegaram às 14h10, 14h20 e 14h30, poderemos prever que o próximo irá entrar na estação às 14h40.

Indica outros fenómenos que ocorrem com regularidade no dia a dia.

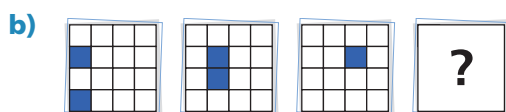
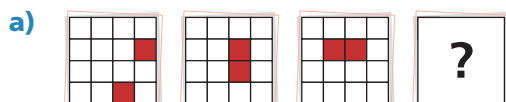
- 2 Observa a tabela e indica o ano dos Jogos Olímpicos de Barcelona.

Cidade	Barcelona	Atlanta	Sydney	Atenas	Pequim	Londres
Ano	?	1996	2000	2004	2008	2012



Sequências

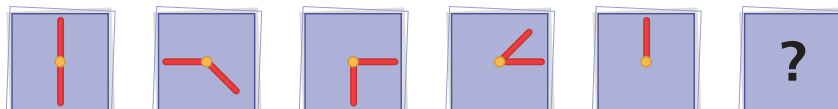
- 3 Desenha no teu caderno, em cada uma das sequências, a figura que se segue.



- 4 Imagina que estás a participar numa corrida de bicicletas.

- 4.1 Se estiveres em sexto lugar e ultrapassares dois adversários, qual será o teu lugar?
 4.2 Se ultrapassares o concorrente que ia em segundo lugar, qual será o teu lugar?

- 5 Desenha a última figura, de modo a obters uma sequência que obedeça a uma regularidade.



**Nota**

Uma **sequência** é uma lista finita de números escritos numa certa ordem.
Uma **sucessão** é uma lista infinita.

Termos e ordem

Durante cinco dias, o Zito vai pôr em prática um novo programa de treino físico: começou por fazer doze flexões e cada dia faz mais quatro flexões do que no dia anterior.

O número de flexões feitas em cada dia de uma semana forma uma sequência, cujos primeiros termos são: 12, 16, 20, 24, 28.

Dado um número natural, p , uma **sequência** de p elementos é uma função de domínio $\{1, 2, \dots, p\}$.

Cada imagem é denominada **termo** da sequência.

Neste caso: 12	16	20	24	28
↑	↑	↑	↑	↑
1.º termo	2.º termo	3.º termo	4.º termo	5.º termo
da sequência,	da sequência,	da sequência,	da sequência,	da sequência,
ou termo	ou termo	ou termo	ou termo	ou termo
de ordem 1	de ordem 2	de ordem 3	de ordem 4	de ordem 5

Nota

As sequências e as sucessões podem ser:

- crescentes, quando os termos vão sendo cada vez maiores (2, 4, 6, 8, ...);
- decrescentes, quando os termos vão sendo cada vez menores (-3, -6, -9, -12, ...);
- constantes, quando os termos são sempre iguais (5, 5, 5, 5, ...);
- nem crescentes, nem decrescentes, nem constantes (1, 6, 4, 9, 7, ...).

Uma **sucessão** é uma função de domínio $\mathbb{N}$. Cada imagem é denominada **termo** da sucessão.

Exemplo: A sucessão dos números naturais pares, 2, 4, 6, 8, ...

Lei de formação

Quantas flexões irá fazer o Zito no 6.º dia de treino, ou seja, qual é o 6.º termo (ou termo de ordem 6) da sequência?

Ordem	1	2	3	4	5	6
Termo	12	16	20	24	28	32

+4 +4 +4 +4 +4

Esta sequência tem uma **lei de formação**, ou seja, existe uma regra que permite passar de um termo para o termo seguinte.

Neste caso, a lei de formação é «adicionar 4 ao termo anterior». Assim, o 6.º termo da sequência é 32, o que significa que o Zito irá fazer 32 flexões no 6.º dia de treino.

Existem vários tipos de leis de formação. Por exemplo:

a) Adicionar (ou subtrair) sempre o mesmo número ao termo anterior:

$$\bullet \quad 1, 7, 13, 19, 25, \dots \quad \bullet \quad 4, 1, -2, -5, -8, \dots$$

$\xrightarrow{+6} \quad \xrightarrow{+6} \quad \xrightarrow{+6} \quad \xrightarrow{+6}$
 $\xrightarrow{-3} \quad \xrightarrow{-3} \quad \xrightarrow{-3} \quad \xrightarrow{-3}$

b) Multiplicar (ou dividir) sempre pelo mesmo número, diferente de zero, o termo anterior:

$$\bullet \quad 3, -6, 12, -24, 48, \dots \quad \bullet \quad 1000, 100, 10, 1, 0,1, \dots$$

$\xrightarrow{\times(-2)} \quad \xrightarrow{\times(-2)} \quad \xrightarrow{\times(-2)} \quad \xrightarrow{\times(-2)}$
 $\xrightarrow{:10} \quad \xrightarrow{:10} \quad \xrightarrow{:10} \quad \xrightarrow{:10}}$

c) Outras leis de formação:

$$\bullet \quad 1, 2, 4, 7, 11, \dots \quad \bullet \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots$$

$\xrightarrow{+1} \quad \xrightarrow{+2} \quad \xrightarrow{+3} \quad \xrightarrow{+4}$
 $\xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \quad \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} \quad \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \quad \xrightarrow{\times \frac{1}{5}}$

Uma vez conhecida a lei de formação de uma sequência, ou de uma sucessão, é fácil dar-lhes continuidade.

Exercício resolvido 1

- a) Escreve os cinco primeiros termos da sequência cujo primeiro termo é 7 e em que a lei de formação é subtrair 4 ao termo anterior.
- b) Determina o quarto termo da sequência que começa por 16 e em que a lei de formação consiste em dividir o termo anterior por -2 .

Resolução:

a) $7, 3, -1, -5, -9$ b) $16, -8, 4, -2$. O quarto termo é -2 .

$\xrightarrow{-4} \quad \xrightarrow{-4} \quad \xrightarrow{-4} \quad \xrightarrow{-4}$
 $\xrightarrow{:(-2)} \quad \xrightarrow{:(-2)} \quad \xrightarrow{:(-2)}$

Exercício resolvido 2

Durante quatro anos, alguns cientistas registaram o número de pinguins que viviam numa região do Polo Sul:

Ano	1.º	2.º	3.º	4.º
N.º de pinguins	15	45	135	405

Faz uma previsão do número de pinguins no 5.º ano.

Resolução:

- A lei de formação da sequência **não** é adicionar um mesmo número porque, de 15 para 45, adiciona-se 30, mas, de 45 para 135, adiciona-se 90.
- A lei de formação é multiplicar por 3, visto que:

$$\frac{45}{15} = 3; \quad \frac{135}{45} = 3; \quad \frac{405}{135} = 3. \text{ Ou seja: } 15, 45, 135, 405.$$

$\xrightarrow{\times 3} \quad \xrightarrow{\times 3} \quad \xrightarrow{\times 3}$

- $3 \times 405 = 1215$.

No 5.º ano, a previsão é de que existem 1215 pinguins.

Nota

A lei de formação é útil para escrever os primeiros termos de uma sequência, mas não é prática para descobrir um termo muito afastado (por exemplo, o 100.º termo).



O que deves saber

- Determinar a lei de formação de uma sequência ou de uma sucessão.
- Determinar termos a partir da lei de formação.

Atividades

VERIFICAR A APRENDIZAGEM

SEQUÊNCIAS

- 1 Os matemáticos da Grécia Antiga representavam os números por figuras (lembra-te dos quadrados perfeitos). Quantos pontos terá a quarta figura de cada uma das sequências seguintes?

a)

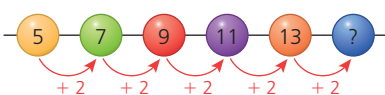


b)



- 2 Em cada sequência numérica, refere a lei de formação e determina o termo que falta.

Exemplo:



A lei de formação é adicionar 2 ao termo anterior. O 6.º termo é 15, porque $13 + 2 = 15$.

a) 6, 12, 18, 24, 30, ?

e) 80, 40, 20, 10, 5, ?

b) 37, 1, 9, 5, 1, ?

f) 958, 4, ?, 31, 22, 13

c) 2, 4, 8, 16, 32, ?

g) ?, -4, -1, 2, 5, 8

d) 10, 3, -4, -11, -18, ?

h) 1, 3, 7, 15, 31, ?

- 3 Em cada sequência numérica, descobre a lei de formação e calcula o termo que falta.

a) 27, 41, 55, 69, ?

c) 16, 64, 256, 1024, ?

b) 18, 44, 70, 96, ?

d) 23, 115, 575, 2875, ?

AUTOAVALIAÇÃO Sei determinar a lei de formação de uma sequência?

ESCREVER UMA SEQUÊNCIA A PARTIR DA LEI DE FORMAÇÃO

- 4 Escreve os cinco primeiros termos da sucessão:

- a) cujo primeiro termo é 6 e em que a lei de formação é adicionar 3 ao termo anterior;
- b) cujo primeiro termo é 10 e em que a lei de formação é subtrair 6 ao termo anterior;
- c) que inicia em 60 000 e em que a lei de formação é dividir o termo anterior por -10 ;
- d) cujo segundo termo é -7 e em que a lei de formação é subtrair 4 ao termo anterior;
- e) que começa por 4 e em que a lei de formação é multiplicar por 2 e adicionar 3.

O TERMO POR DESCOBRIR

- 5 Qual é o quarto termo da sucessão que começa por 3 e em que a lei de formação consiste em multiplicar o termo anterior por -3 ? Escolhe a opção correta.

- A. -81
- B. -27
- C. 27
- D. 81

AUTOAVALIAÇÃO Sei determinar termos a partir da lei de formação?

APLICAR

- 6 Um ciclista profissional está a preparar a Volta a Portugal. No primeiro dia, percorreu 60 km. Depois, em cada dia, pedalou sempre mais 4,5 km do que no dia anterior. Qual foi a distância que percorreu no 8.º dia de preparação?



- 7 Determina, em cada sequência, o termo em falta.

- a) 10, 11, 13, 16, 20, c) 3, 5, 9, 15, 23, e) 4, 5, 3, 6, 2, 7,
b) 8, 9, 12, 13, 16, 17, d) 2, 3, 6, 11, 18, f) 1, 2, 6, 24, 120,



- 8 Observa com atenção os exemplos seguintes, que mostram como se pode determinar uma sequência com algumas calculadoras.

Exemplo 1:

1	=		1
+	4	=	5
=			9
=			13
=			17

O primeiro termo é 1 e a lei de formação é adicionar 4 ao termo anterior.

Exemplo 2:

3	=		3
×	2	=	6
=			12
=			24
=			48

O primeiro termo é 3 e a lei de formação é multiplicar por 2 o termo anterior.

Usando a calculadora, escreve os cinco primeiros termos da sequência:

- a) cujo primeiro termo é 6 e em que a lei de formação é adicionar 17 ao termo anterior;
b) em que a lei de formação é multiplicar o termo anterior por 6 e em que o primeiro termo é 8;
c) que começa por 972 e em que a lei de formação é dividir o termo anterior por -3 ;
d) que inicia em 4 e em que a lei de formação é multiplicar o termo anterior por 7 e subtrair-lhe 5.



- 9 Considera uma sucessão em que o primeiro termo é 285 e em que a lei de formação de cada um dos termos a seguir ao primeiro é:

«Subtrair 3 ao termo anterior e depois dividir por 2.»

Qual é o quinto termo da sucessão?



- 10 Um grupo de biólogos está a estudar o crescimento de células. A tabela apresentada a seguir mostra o número de células registado de 2 em 2 dias, a partir do 10.º dia:

Dias	10.º	12.º	14.º	16.º	18.º	20.º
N.º de células	1024	1280	1600	2000	2500	?

Indica, justificando, a tua previsão para o número de células no 20.º dia.

INVESTIGAR

- 11 O astrónomo inglês Edmond Halley (1656-1742) interessou-se por um cometa que passou perto da Terra em 1682. Halley descobriu que também existiam registos da passagem de um cometa nos anos de 1531 e 1607. Caso fosse o mesmo, reapareceria a cada 76 anos, aproximadamente. Halley previu, então, o retorno do cometa para o inverno de 1758-1759. Investiga os anos da passagem do cometa *Halley*.

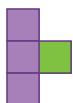


A SOFIA E O ZITO INICIARAM UM CORDÃO HUMANO PARA APELAR À PRESERVAÇÃO DAS ÁRVORES.

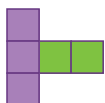
Se o cordão humano continuar a aumentar ao mesmo ritmo, por quantas pessoas será constituído às 10:45?

Repara

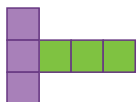
Observa a construção das figuras:

1.^a figura

3 + 1 quadrado

2.^a figura

3 + 2 quadrados

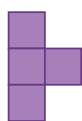
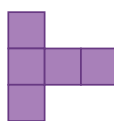
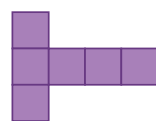
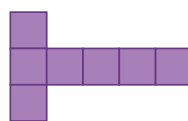
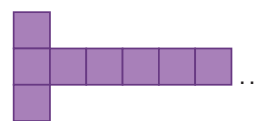
3.^a figura

3 + 3 quadrados

Ordem	Termo
1	3 + 1
2	3 + 2
3	3 + 3
4	3 + 4
...	...
100	3 + 100
n	3 + n

Termo geral. Representação

Observa os primeiros cinco termos da sequência de 100 figuras:

1.^a figura2.^a figura3.^a figura4.^a figura5.^a figura

O número de quadrados em cada figura forma uma sequência:

4, 5, 6, 7, 8, ...

Quantos quadrados tem a 7.^a figura?

A lei de formação da sequência é adicionar 1 ao termo anterior; logo, a 7.^a figura tem 10 quadrados:

Ordem	1	2	3	4	5	6	7
Termo	4	5	6	7	8	9	10

Quantos quadrados tem a 100.^a figura?

Nesta situação, a lei de formação é pouco útil. Em vez disso, deve procurar-se uma forma de **passar diretamente da ordem para o termo**.

Ordem	Termo
1	4 = 1 + 3
2	5 = 2 + 3
3	6 = 3 + 3
4	7 = 4 + 3
5	8 = 5 + 3
...	...
100	100 + 3 = 103

Neste caso, basta reparar que o **termo** é sempre igual à **ordem mais três**.

Assim, o termo de ordem 100 é 103, ou seja, a 100.^a figura tem 103 quadrados.

Seguindo o mesmo raciocínio, pode agora indicar-se qualquer termo da sequência.

O **termo geral de uma sequência** é uma expressão com uma variável n que permite obter a sequência substituindo a variável n por 1, 2, 3, 4, ..., A , em que A é a ordem do último termo da sequência.

O **termo de ordem k** da sequência é o termo que se obtém substituindo n por k no termo geral.

No exemplo anterior, a n -ésima figura tem $n + 3$ quadrados. O termo geral da sequência 4, 5, 6, 7, 8, ... é, por isso, $n + 3$.

O **termo geral de uma sucessão** é uma expressão com uma variável n que permite obter, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, o termo de ordem k , substituindo a variável n por k .

O termo geral de uma sucessão designa-se por u_n .

■ Sucessões de múltiplos naturais

Considera a sucessão dos múltiplos naturais de 5: 5, 10, 15, 20, 25, ...

Ordem	Termo
1	$5 = 5 \times 1$
2	$10 = 5 \times 2$
3	$15 = 5 \times 3$
4	$20 = 5 \times 4$
5	$25 = 5 \times 5$
...	...
n	$5 \times n$

Nesta sucessão, o **termo** é sempre igual a **cinco vezes** a **ordem**.

O termo geral é $5 \times n$, que se escreve **$5n$** .

Por **convenção**, não se escreve o sinal da multiplicação, $\times$, entre um número e uma variável.

← Termo geral

Termo geral de outras sucessões:

- Sucessão dos números naturais (1, 2, 3, 4, 5, ...): $u_n = n$.
- Sucessão dos números pares positivos (2, 4, 6, 8, 10, ...): $u_n = 2n$.

Exercício resolvido 1

Descobre o termo geral de cada uma das sucessões:

a) 2, 4, 8, 16, 32, ...

b) 4, 7, 10, 13, 16, ...

Resolução:

a)

Ordem	Termo
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
...	...
n	2^n

É a sucessão das potências de base 2. O termo geral é 2^n .

b)

Ordem	Termo
1	$4 = 3 \times 1 + 1$
2	$7 = 3 \times 2 + 1$
3	$10 = 3 \times 3 + 1$
...	...
n	$3n + 1$

O termo geral desta sucessão é $3n + 1$.

O que deves saber

- Definir o termo geral de uma sequência e de uma sucessão.
- Distinguir sequência de sucessão.

DIGO $2n$ E NÃO $2 \times n$.
TAMBÉM SE DIZ
2 PINCÉIS
E NÃO $2 \times$ PINCÉIS.



Nota

De um modo geral, a sucessão dos múltiplos naturais de um número a ($a \in \mathbb{N}$) tem por termo geral $a \times n$ (ou simplesmente an).

Atividades

VERIFICAR A APRENDIZAGEM

DETERMINAR O TERMO GERAL

- 1 Copia e completa as tabelas de modo a determinares o termo geral de cada sucessão.

a) 3, 4, 5, 6, 7, ...

d) 4, 8, 12, 16, 20, ...

g) 3, 5, 7, 9, 11, ...

Ordem	Termo
1	$3 = 1 + 2$
2	$4 = 2 + 2$
3	$5 = 3 + 2$
4	$6 =$
5	$7 =$
...	...
n	

Ordem	Termo
1	$4 = 4 \times 1$
2	$8 = 4 \times 2$
3	$12 =$
4	$16 =$
5	$20 =$
...	...
n	

Ordem	Termo
1	$3 = 2 \times 1 + 1$
2	$5 =$
3	$7 =$
4	$9 =$
5	$11 =$
...	...
n	

b) -1, 0, 1, 2, 3, ...

e) -5, -10, -15, -20, -25, ...

h) 3, 9, 27, 81, 243, ...

Ordem	Termo
1	$-1 = 1 - 2$
2	$0 = 2 - 2$
3	$1 =$
4	$2 =$
5	$3 =$
...	...
n	

Ordem	Termo
1	$-5 = -5 \times 1$
2	$-10 = -5 \times 2$
3	$-15 =$
4	$-20 =$
5	$-25 =$
...	...
n	

Ordem	Termo
1	$3 = 3^1$
2	$9 =$
3	$27 =$
4	$81 =$
5	$243 =$
...	...
n	

c) 11, 12, 13, 14, 15, ...

f) 10, 20, 30, 40, 50, ...

i) 1, 4, 9, 16, 25, ...

Ordem	Termo
1	$11 =$
2	$12 =$
3	$13 =$
4	$14 =$
5	$15 =$
...	...
n	

Ordem	Termo
1	$10 =$
2	$20 =$
3	$30 =$
4	$40 =$
5	$50 =$
...	...
n	

Ordem	Termo
1	$1 = 1^2$
2	$4 =$
3	$9 =$
4	$16 =$
5	$25 =$
...	...
n	

- 2 Determina o termo geral de cada sucessão.

a) 3, 6, 9, 12, 15, ...

c) 6, 12, 18, 24, 30, ...

e) 1, 2, 3, 4, 5, ...

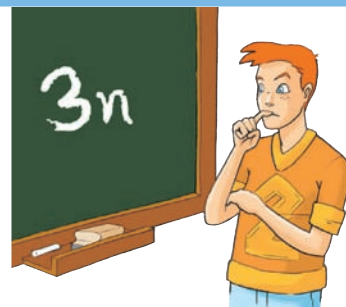
b) 6, 7, 8, 9, 10, ...

d) -3, -2, -1, 0, 1, ...

f) 9, 18, 27, 36, 45, ...

AUTOAVALIAÇÃO Sei determinar o termo geral de uma sucessão?

APLICAR



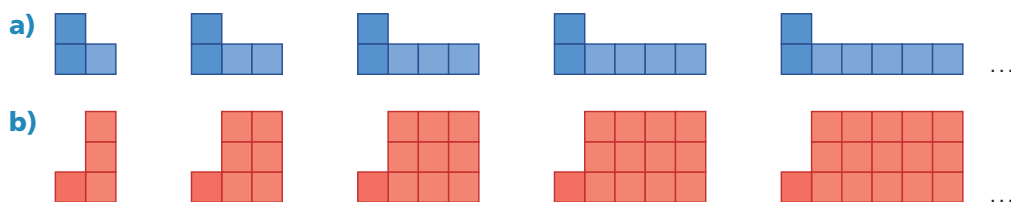
- 3 Sabendo que n representa um número natural, escreve em linguagem matemática:
- a) o dobro de n ;
 - b) a soma de n com 7;
 - c) o produto entre 5 e n ;
 - d) a diferença entre n e 12;
 - e) metade de n ;
 - f) o quádruplo de n ;
 - g) o número natural a seguir a n ;
 - h) o número inteiro antes de n .
- 4 Refere quantas rodas há, em cada caso:
- a) 1 moto;
 - b) 2 motos;
 - c) 3 motos;
 - d) 10 motos;
 - e) n motos.
- 5 Refere quantos dias há, em cada caso:
- a) 1 semana;
 - b) 2 semanas;
 - c) 3 semanas;
 - d) 8 semanas;
 - e) n semanas.
- 6 Qual dos números seguintes é um termo da sucessão de termo geral $4n$?
- A. 73 B. 78 C. 81 D. 84
- 7 Observa a sequência de figuras:



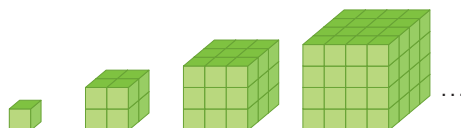
7.1 O número total de bolas em cada figura forma uma sequência. Qual é o termo geral da sequência?

7.2 Poderá existir uma figura com 103 bolas de basquetebol? Justifica a tua resposta.

- 8 Observa as figuras. O número de quadrados em cada figura corresponde aos primeiros cinco termos de uma sucessão. Determina o termo geral da sucessão.



- 9 O número de cubos em cada figura apresentada à direita corresponde aos primeiros quatro termos de uma sucessão. Determina o seu termo geral.



INVESTIGAR

- 10 Investiga sequências numéricas nas tabelas de horários dos autocarros, dos comboios ou dos metropolitanos.

		B.º Sta. Cruz → Charneca										Dias úteis – verão									
Horas →	Minutos {	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1
		02	03	06	07	10	14	02	06	10	14	09	12	04	12	00	04	05	08	00	00
		14	16	18	22	26	30	18	22	26	30	21	25	17	28	30	23	26	30	30	
		26	28	30	38	42	46	34	38	42	46	33	38	30	44	47	44	47			
		38	41	42	54	58		50	54	58	58	46	51	43							
		50	53	54								59	56								

3.3

Termos de uma sequência e de uma sucessão

O DIOGO E A JOANA ESTÃO A ORGANIZAR UM ALMOÇO. NUMA MESA CABEM 4 PESSOAS.



JUNTANDO 2 MESAS PODEM SENTAR-SE 6 PESSOAS.



JUNTANDO 3 MESAS PODEM SENTAR-SE 8 PESSOAS.



N.º DE MESAS	N.º DE PESSOAS
1	4
2	6
3	8
4	?
...	...
n	?

Completa o quadro. Juntando 39 mesas, quantas pessoas se podem sentar?



$2n$ significa $2 \times n$.

Dar um **valor** a uma variável é fixá-la momentaneamente.

Na expressão $2n$, quando se substitui a variável n por um número, é obrigatório **acrescentar o sinal da multiplicação**.

Por exemplo, substituindo n por 3, fica $2 \times 3 = 6$.

■ Escrever termos de uma sucessão a partir do termo geral

- a) Conhecendo o termo geral de uma sucessão, podem calcular-se termos substituindo n por 1, 2, 3, 4, 5, etc.

Quais são os cinco primeiros termos da sucessão de termo geral $2n - 1$?

Ordem	Termo
n	$2n - 1$
1	$2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1$
2	$2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$
3	$2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$
4	$2 \times 4 - 1 = 8 - 1 = 7$
5	$2 \times 5 - 1 = 10 - 1 = 9$

Os cinco primeiros termos desta sucessão são: 1, 3, 5, 7 e 9. A sucessão de termo geral $2n - 1$ é a dos números naturais ímpares.

A PALAVRA-CHAVE É SUBSTITUIR! SE EU QUISER SABER O 6.º TERMO, BASTA SUBSTITUIR n POR 6 E FAZER O CÁLCULO.



Exercício resolvido 1

Determina os cinco primeiros termos das sucessões de termo geral:

a) $3n + 2$

b) $n^2 - 4n$

Resolução:

a)

Ordem	Termo
n	$3n + 2$
1	$3 \times 1 + 2 = 5$
2	$3 \times 2 + 2 = 8$
3	$3 \times 3 + 2 = 11$
4	$3 \times 4 + 2 = 14$
5	$3 \times 5 + 2 = 17$

Sucessão: 5, 8, 11, 14, 17, ...

b)

Ordem	Termo
n	$n^2 - 4n$
1	$1^2 - 4 \times 1 = -3$
2	$2^2 - 4 \times 2 = -4$
3	$3^2 - 4 \times 3 = -3$
4	$4^2 - 4 \times 4 = 0$
5	$5^2 - 4 \times 5 = 5$

Sucessão: -3, -4, -3, 0, 5, ...

- b) Conhecendo o termo geral, pode calcular-se o primeiro termo e, em alguns casos, ficar a saber a lei de formação.

Termo geral	Termos	Lei de formação
$2n - 1$	1, 3, 5, 7, 9, ...	Adicionar 2
$3n + 2$	5, 8, 11, 14, 17, ...	Adicionar 3
$-5n$	-5, -10, -15, -20, -25, ...	Subtrair 5 (ou adicionar -5)

De um modo geral, uma sucessão cujo termo geral é do tipo $an + b$ (em que a e b são números) tem por lei de formação **adicionar a** .

Quais são os cinco primeiros termos da sucessão de termo geral $4n + 1$?

- 1.º Calcula-se o 1.º termo:

$$4 \times 1 + 1 = 5$$

- 2.º A lei de formação é **adicionar 4**; por isso, os cinco primeiros termos são:

$$5, 9, 13, 17, 21$$

+4 +4 +4 +4

SE O TERMO GERAL FOR $2n + 3$,
FICO A SABER QUE OS TERMOS
«VÃO DE 2 EM 2».

CALCULO O 1.º TERMO
SUBSTITUINDO n POR 1.
DÁ $2 \times 1 + 3 = 5$.

OS TERMOS SÃO, ENTÃO:
5, 7, 9, 11...



■ Determinar um termo de uma ordem qualquer

Qual é o 50.º termo da sequência 8, 14, 20, 26, 32, ...?

- 1.º Determina-se o termo geral.

A lei de formação é **adicionar 6**; logo, o termo geral é do tipo $6n + ?$.
A sequência de termo geral $6n$ começa por 6, mas esta começa por 8, então, temos de lhe adicionar 2. O termo geral é, então, $6n + 2$.

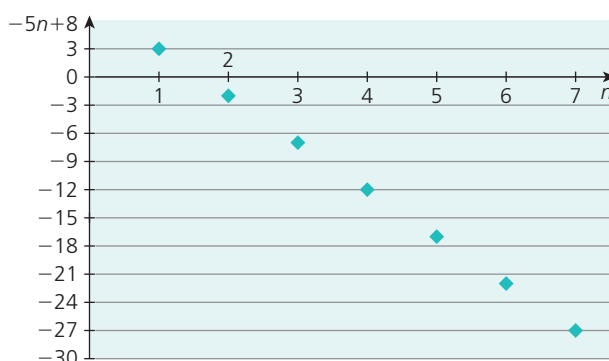
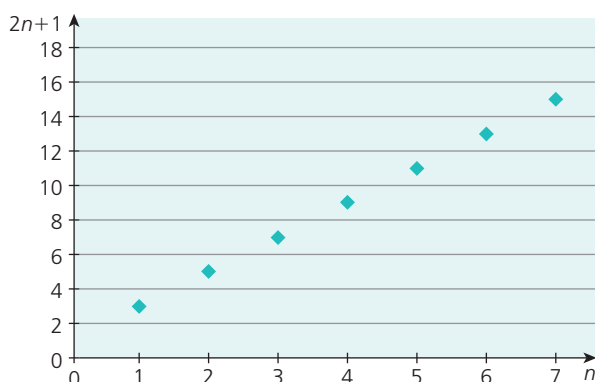
- 2.º Calcula-se o 50.º termo, substituindo n por 50. Fica $6 \times 50 + 2 = 302$.
O 50.º termo é 302.

Repara

$$\begin{array}{rcl} 6n: & 6, & 12, & 18, & 24, & \dots \\ \downarrow +2 & & \downarrow +2 & \downarrow +2 & \downarrow +2 & \\ 6n+2: & 8, & 14, & 20, & 26, & \dots \end{array}$$

■ Gráficos de sequências

Podemos representar uma sequência num referencial cartesiano e obter assim o seu gráfico. Por exemplo, se considerarmos as sequências de termos gerais $2n + 1$ e $-5n + 8$, com sete termos, obtêm-se os seguintes gráficos.



O que deves saber

- Determinar termos de várias ordens a partir do termo geral.
- Construir gráficos de sequências.

Atividades

VERIFICAR A APRENDIZAGEM

ESCREVER TERMOS DE UMA SUCESSÃO A PARTIR DO TERMO GERAL

- 1 Copia e completa as tabelas, de modo a determinares os cinco primeiros termos de cada sequência.

a)

Ordem	Termo
n	$n + 7$
1	
2	
3	
4	
5	

c)

Ordem	Termo
n	$6n$
1	
2	
3	
4	
5	

e)

Ordem	Termo
n	$4 - 3n$
1	
2	
3	
4	
5	

b)

Ordem	Termo
n	$n - 3$
1	
2	
3	
4	
5	

d)

Ordem	Termo
n	$5n - 8$
1	
2	
3	
4	
5	

f)

Ordem	Termo
n	$n^2 - n + 3$
1	
2	
3	
4	
5	

- 2 Qual é o 20.º termo da sucessão de termo geral $-3n + 10$?

Escolhe a opção correta.

A. -70

B. -50

C. 7

D. 27

TERMO GERAL E LEI DE FORMAÇÃO

- 3 Escreve os cinco primeiros termos das sucessões cujo termo geral é:

a) $2n$

b) $2n + 1$

c) $2n + 2$

Qual é a lei de formação da cada uma das sucessões?

- 4 Escreve os cinco primeiros termos das sucessões cujo termo geral é:

a) $3n$

b) $3n + 4$

c) $3n - 1$

O que têm em comum as três sucessões?

- 5 Para escrever os termos da sucessão de termo geral $4n + 5$, o Diogo segue este raciocínio: Como a sucessão de termo geral $4n$ começa em 4 e «vai de 4 em 4», então, a sucessão de termo geral $4n + 5$ também «vai de 4 em 4», mas começa em $4 + 5 = 9$. Logo, os seus termos são:

9, 13, 17, 21, 25, ...


Da mesma forma, determina os cinco primeiros termos das sucessões de termo geral:

a) $6n + 1$

b) $3n - 7$

c) $-2n + 5$

- 6 Determina o termo geral e o 50.º termo das sucessões que se seguem.
- a) 2, 4, 6, 8, 10, ... c) 4, 5, 6, 7, 8, ... e) 4, 7, 10, 13, 16, ...
b) 6, 12, 18, 24, 30, ... d) 5, 7, 9, 11, 13, ... f) 3, 7, 11, 15, 19, ...

AUTOAVALIAÇÃO Sei determinar qualquer termo a partir do termo geral?

APLICAR

- 7 Quantos fósforos tem a 20.ª figura de cada sucessão? Em cada caso, indica o termo geral.



- 8 A D. Marta inscreveu-se numa associação para a proteção do lince-ibérico. No primeiro mês, pagou 10 € de inscrição e doou 5 €. A seguir, em cada mês, doou 5 €. Identifica o valor que a D. Marta terá dado, ao todo, ao fim de:

- a) um mês; c) três meses; e) n meses;
b) dois meses; d) quatro meses; f) 24 meses.



- 9 Determina os cinco primeiros termos das sucessões cujo termo geral é indicado a seguir. Sempre que possível, simplifica as frações.

a) $u_n = \frac{n}{n+1}$ b) $u_n = \frac{3n}{n+2}$ c) $u_n = \frac{2^n}{1-3n}$

- 10 Determina o termo geral e o 100.º termo das sucessões que se seguem.

a) $\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}, \frac{12}{7}, \frac{15}{7}, \dots$ c) $\frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, \dots$ e) $\frac{1}{4}, \frac{4}{8}, \frac{9}{12}, \frac{16}{16}, \frac{25}{20}, \dots$
b) $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \dots$ d) $\frac{5}{1}, \frac{10}{3}, \frac{15}{5}, \frac{20}{7}, \frac{25}{9}, \dots$ f) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$

- 11 Selecciona a opção correta.

A sucessão de termo geral $u_n = n - 10$ é:

- A. Crescente. C. Constante.
B. Decrescente. D. Nenhuma das opções anteriores.

12 Desafio

Qual é a letra que se segue?

U D T Q

INVESTIGAR

- 13 No filme 21 (R. Luketic, 2008), os amigos de Ben, um bom aluno a Matemática, fizeram-lhe um bolo de aniversário com a inscrição: «1, 1, 2, 3, 5, 8, 13».

13.1 Qual seria o número seguinte?

13.2 Pesquisa informações sobre esta sequência, denominada «sequência de Fibonacci».

Síntese

Sequências e sucessões

- Dado um número natural p , uma **sequência** de p elementos é uma função de domínio $\{1, 2, 3, \dots, p\}$.
- Cada imagem pela função é denominada **termo da sequência** (1.º termo, 2.º termo, 3.º termo, ..., último termo).

Exemplo 1



O número total de páginas lidas após cada minuto forma uma sequência:
4, 8, 12, 16, ..., 44, 48, 52.

Exemplo 2



As várias distâncias percorridas formam uma sequência (crescente):
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Exemplo 3



Os tempos de jogo formam uma sequência (decrescente):
115, 110, 105, 100, ..., 40, 35, 30.

- Uma **sucessão** é uma função de domínio $\mathbb{N}$, em que cada imagem é designada por termo da sucessão.

Exemplo: A sucessão dos números ímpares, 1, 3, 5, 7, 9, ...

Lei de formação

- A **lei de formação** é uma regra que permite passar de um termo para o termo seguinte.
- É útil para **continuar uma sequência ou sucessão**.

Exemplo 1

Quantas páginas lê a Sofia em 5 minutos?

Ordem	1	2	3	4	5
Termo	4	8	12	16	20

+4 +4 +4 +4

Resposta: 20 páginas.

A lei de formação é adicionar 4 ao termo anterior.

Exemplo 2

Quantos quilómetros correu a D. Marta no 5.º dia?

Ordem	1	2	3	4	5
Termo	3	4	5	6	7

+1 +1 +1 +1

Resposta: 7 quilómetros.

A lei de formação é adicionar 1 ao termo anterior.

Exemplo 3

Quanto tempo jogou o Diogo no 5.º dia?

Ordem	1	2	3	4	5
Termo	115	110	105	100	95

-5 -5 -5 -5

Resposta: 95 minutos.

A lei de formação é subtrair 5 ao termo anterior.

Termo geral

- O **termo geral de uma sequência** é uma expressão com uma variável n que permite obter a sequência substituindo a variável n por 1, 2, 3, 4, ..., p , em que p é a ordem do último termo da sequência.
- O **termo de ordem k da sequência** é o termo que se obtém substituindo n por k no termo geral.
- Para determinar o termo geral de uma sequência, procura-se uma forma de relacionar a ordem e o termo.

Exemplo 1

Quantas páginas lê a Sofia em 40 minutos?

Ordem	Termo
1	$4 = 4 \times 1$
2	$8 = 4 \times 2$
3	$12 = 4 \times 3$
4	$16 = 4 \times 4$
...	...
n	$4 \times n = 4n$

O termo geral é $4n$.

Substituindo n por 40:

$$4 \times 40 = 160$$

Em 40 minutos, a Sofia lê 160 páginas.

Exemplo 2

Quantos quilômetros correu a D. Marta no 13.º dia?

Ordem	Termo
1	$3 = 1 + 2$
2	$4 = 2 + 2$
3	$5 = 3 + 2$
4	$6 = 4 + 2$
...	...
n	$n + 2$

O termo geral é $n + 2$.

Substituindo n por 13:

$$13 + 2 = 15$$

No 13.º dia, a D. Marta correu 15 quilômetros.

Exemplo 3

Durante quanto tempo jogou o Diogo no 18.º dia?

Ordem	Termo
1	$115 = 120 - 5 \times 1$
2	$110 = 120 - 5 \times 2$
3	$105 = 120 - 5 \times 3$
4	$100 = 120 - 5 \times 4$
...	...
n	$120 - 5n$

O termo geral é $120 - 5n$.

Substituindo n por 18:

$$120 - 5 \times 18 = 30$$

No 18.º dia, o Diogo jogou durante 30 minutos.

- O termo geral é útil para determinar qualquer termo de uma sequência ou de uma sucessão.
- Quando se conhece o termo geral de uma sequência e se quer escrever os seus termos, basta **substituir n por 1** (para obter o 1.º termo), **por 2** (para obter o 2.º termo), **por 3** (para obter o 3.º termo), e assim sucessivamente, e fazer os cálculos.

Termo geral de uma sucessão

O **termo geral de uma sucessão** é uma expressão que permite obter a sequência de números substituindo a variável n por 1, 2, 3, 4, ..., 100, ... para todo o número natural.

O termo geral de uma sucessão representa-se por u_n .

Sucessões de múltiplos naturais

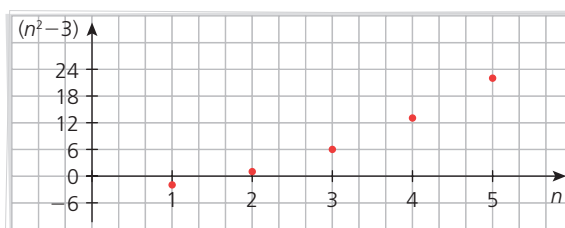
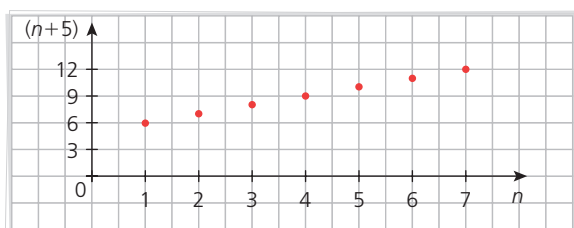
A sucessão dos múltiplos naturais de um número a (com $a \in \mathbb{N}$) tem por termo geral an .

Exemplos:

- A sucessão dos números pares positivos (múltiplos de 2): 2, 4, 6, 8, ... tem por termo geral $u_n = 2n$.
- A sucessão dos múltiplos naturais de 5: 5, 10, 15, 20, ... tem por termo geral $u_n = 5n$.
- A sucessão dos múltiplos naturais de 8: 8, 16, 24, 32, ... tem por termo geral $u_n = 8n$.

Gráfico de uma sequência

O **gráfico de uma sequência** obtém-se representando a sequência num referencial cartesiano.



Atividades globais

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

Das quatro alternativas, escolhe a única opção correta.

- 1 Quantos pontos tem a quinta figura desta sequência?



- A. 19 B. 20 C. 21 D. 22

- 2 Qual é o 5.º termo da sequência cujo 1.º termo é 2 e em que a lei de formação é subtrair 6 ao termo anterior?

- A. -16 B. -18 C. -20 D. -22

- 3 Qual é o termo geral da sucessão 5, 10, 15, 20, 25, ...?

- A. $n + 5$ B. $n - 5$ C. $5n$ D. $n + 4$

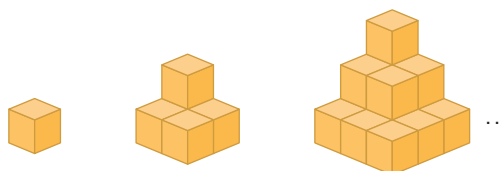
- 4 Se n representa um número natural, como se escreve a soma entre o triplo de n e o quadrado de n ?

- A. $3n + n^2$ B. $3n + 2n$ C. $n^2 - 3n$ D. $3n + 4n$

- 5 Qual é o 3.º termo da sucessão cujo termo geral é $u_n = 4n^2 - 1$?

- A. 35 B. 23 C. 15 D. 11

- 6 O número de cubos em cada figura forma uma sucessão.
Qual é o 4.º termo?



- A. 28 B. 29 C. 30 D. 31

- 7 Qual é o 10.º termo da sucessão 1, 8, 27, 64, 125, ...?

- A. 500 B. 1000 C. 1500 D. 3000

- 8 Numa sala de cinema, a primeira fila tem dez lugares, a segunda tem mais três lugares do que a primeira, e assim sucessivamente: cada fila tem sempre três lugares a mais do que a fila anterior. Qual das seguintes expressões é o termo geral da sequência do número de lugares?

- A. $3n$ B. $10 + n$ C. $3n + 10$ D. $3n + 7$

- 9 Seja $-3n + 10$ o termo geral de uma sequência.

9.1 O termo de ordem 6 é:

- A. 28 B. -28 C. -8 D. 8

9.2 Qual é a ordem do termo -35?

- A. 14 B. 13 C. 12 D. 15

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

- 10** Na tabela que se segue estão indicadas algumas das horas a que o metropolitano sai da estação da Póvoa de Varzim em direção à estação do Estádio do Dragão.

...	8:06	8:26	8:46	9:06	9:26	9:46	10:06	10:26	...
-----	------	------	------	------	------	------	-------	-------	-----



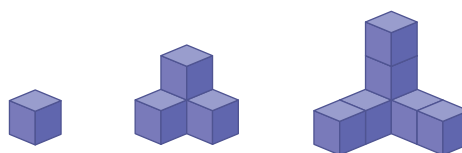
O Zito chegou à estação da Póvoa de Varzim às 10h28. Faz uma previsão do tempo que o Zito deverá esperar até à partida do próximo metropolitano.

- 11** Na sucessão $-4, -8, -12, -16, -20, \dots$ qual é a ordem do termo -48 ?
- 12** Na sucessão de termo geral $2n + 5$, qual é a ordem do termo 11?
- 13** O número de cubos em cada figura seguinte indica os primeiros três termos de uma sucessão.

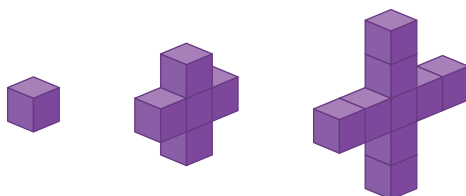
A.



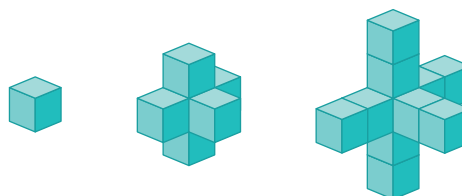
C.



B.



D.



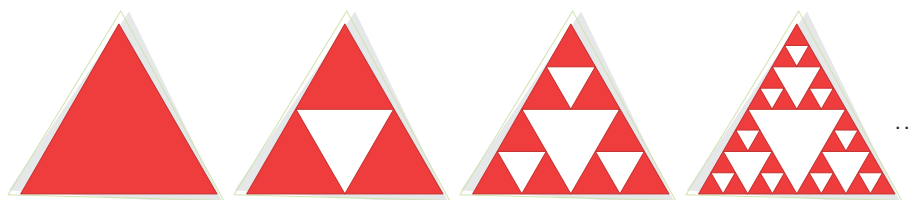
Em cada caso, determina:

- a)** o número de cubos da figura seguinte;
- b)** a lei de formação da sucessão;
- c)** o termo geral da sucessão;
- d)** o número de cubos da 30.^a figura.

- 14** Escreve os cinco primeiros termos das sucessões cujo termo geral é:

- a)** $u_n = n + 5$
- b)** $u_n = 6n - 2$
- c)** $u_n = n^2 + 4$
- d)** $u_n = n \times (n + 2)$
- e)** $u_n = \frac{n}{2 - 3n}$
- f)** $u_n = (-2)^n + 1$

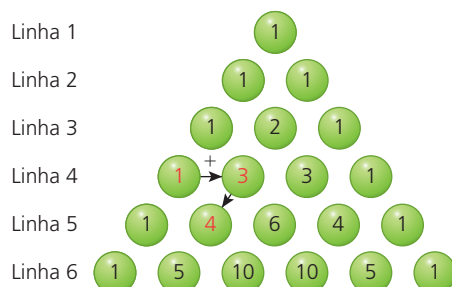
- 15** O número de triângulos vermelhos em cada figura forma uma sucessão.



- 15.1** Quantos triângulos vermelhos tem a quinta figura da sucessão?
- 15.2** Qual é a lei de formação desta sucessão?
- 15.3** Procura informações sobre o triângulo de Sierpinski.

Atividades globais

- 16** O **triângulo de Pascal** é um quadro formado por números em disposição triangular. Na figura seguinte, estão apenas apresentadas as seis primeiras linhas, mas o triângulo de Pascal é infinito. Cada linha começa e termina com o número 1. Os restantes números são a soma dos dois números que estão imediatamente acima (repara no exemplo: $1 + 3 = 4$).



- 16.1** Copia o triângulo de Pascal e acrescenta as linhas 7, 8 e 9.
16.2 Quantos números tem a linha 21?
16.3 Qual é o segundo número da linha 25?
16.4 Qual é a soma dos últimos dois números da linha 38?
16.5 Calcula a soma dos números das primeiras nove linhas do triângulo de Pascal. Copia e completa a tabela:

Linha	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Soma dos números	1	2	4	...	...	...	...	...	...

- 16.6** Sem escrever a 10.^a linha, determina a soma dos números dessa linha. Explica o teu raciocínio.



CANGURU MATEMÁTICO SEM FRONTEIRAS



- 17** No lado esquerdo da Rua Principal, as casas estão numeradas com todos os números ímpares de 1 a 39. No lado direito da rua, as casas estão numeradas com todos os números pares de 2 a 34. Quantas casas há na Rua Principal?

A. 8 **B.** 36 **C.** 37 **D.** 38 **E.** 73

Prova «Benjamim», 2006



OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA



- 18** O pomar do Senhor Anastácio tem cerejeiras, limoeiros, pereiras, ameixeiras e macieiras, dispostas em cinco filas paralelas, cada uma com uma única variedade de árvores.

- As cerejeiras estão ao lado dos limoeiros.
- As pereiras não estão ao lado das cerejeiras nem dos limoeiros.
- As macieiras estão ao lado das pereiras, mas não dos limoeiros nem das cerejeiras.

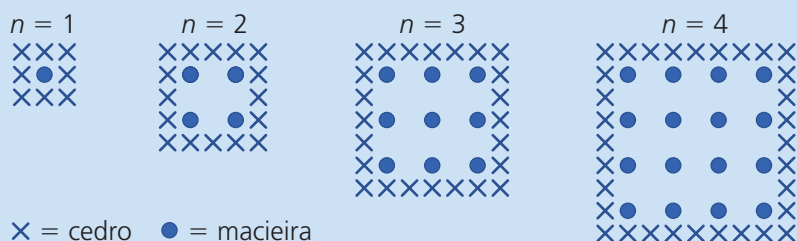
Em que fila estão as ameixeiras?

A. 1.^a **B.** 2.^a **C.** 3.^a **D.** 4.^a **E.** 5.^a

XXIII OPM, pré-olimpíadas

CONVIVER COM A MATEMÁTICA

- 19** Um lavrador planta macieiras num padrão quadrangular. A fim de proteger as árvores do vento, planta cedros à volta do pomar. Esta situação está representada no diagrama seguinte, no qual se pode ver a disposição das macieiras e dos cedros para um número qualquer (n) de filas de macieiras:



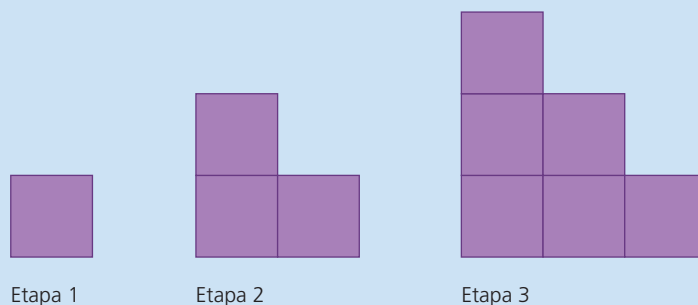
19.1 Copia e completa a tabela:

Ordem	Número de macieiras	Número de cedros
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		
...	...	...
n		

19.2 Se existirem 30 filas de macieiras, quantas macieiras terá plantado o lavrador?

19.3 Se as macieiras estiverem dispostas em 50 filas, quantos cedros estarão à volta do pomar?

- 20** O Zito constrói um padrão em escada, utilizando quadrados. Aqui estão as etapas que ele segue:



Como se pode ver, o Zito utiliza um quadrado na etapa 1, três na etapa 2 e seis na etapa 3.

20.1 Quantos quadrados deverá utilizar na quarta etapa?

20.2 A Joana observou o padrão e disse ao Zito:

«Não é difícil saber qual é o número de quadrados em cada etapa: na etapa 1, é só 1 quadrado; na etapa 2, é $1 + 2 = 3$ quadrados; na etapa 3, é $1 + 2 + 3 = 6$ quadrados, etc.»

Seguindo o mesmo raciocínio, determina o número de quadrados na 10.^a etapa.

AUTOAVALIAÇÃO

EM CADA UMA DAS TRÊS QUESTÕES SEGUINTE,
ESCOLHE A OPÇÃO CORRETA.



Pág. 114

- 1** O Zito e o Diogo vão participar num torneio de rãguebi e sabem que é fundamental a forma como se passa a bola. No primeiro dia de treino, fizeram 50 passes. Em cada dia seguinte, fizeram sempre mais 15 passes do que no dia anterior. Quantos passes fizeram no 6.º dia de treino?

A. 125 **B.** 130 **C.** 135 **D.** 140

Pág. 119

- 2** Qual é o termo geral da sucessão 3, 6, 9, 12, 15, ...?

A. $3 + n$ **B.** $2n + 1$ **C.** $3n$ **D.** $3n + 1$

Pág. 123

- 3** Qual é o 4.º termo da sucessão cujo termo geral é $2n - 10$?

A. -8 **B.** -6 **C.** -4 **D.** -2

APRESENTA TODOS OS CÁLCULOS QUE TIVERES DE EFETUAR.

Págs. 114 e 115

- 4** Em cada sequência numérica, indica o termo que falta.

a) 5, 1, ?, -7, -11, -15 **c)** 5, 4, 2, -1, -5, ?
b) 3, 9, 15, 21, 27, ? **d)** 1, 4, 9, 16, ?, 36

Págs. 114 e 115

- 5** Indica a lei de formação de cada uma das sucessões que se seguem.

a) 2, 5, 8, 11, ... **c)** 76, 59, 42, 25, ...
b) 64, 32, 16, 8, ... **d)** 14, 70, 350, 1750, ...

Págs. 114 e 115

- 6** Escreve os quatro primeiros termos da sucessão:

a) cujo primeiro termo é -9 e em que a lei de formação é adicionar 4 ao termo anterior;
b) que começa por 5 e em que a lei de formação é multiplicar o termo anterior por 2 e subtrair-lhe 1.

Págs. 118 e 119

- 7** Copia e completa as tabelas de modo a determinares o termo geral de cada sucessão.

a) 5, 6, 7, 8, 9, ... **b)** 5, 10, 15, 20, 25, ... **c)** 2, 4, 8, 16, 32, ...

Ordem	Termo
1	$5 = 1 + 4$
2	$6 = 2 + 4$
3	$7 =$
4	$8 =$
5	$9 =$
...	...
n	

Ordem	Termo
1	$5 = 5 \times 1$
2	$10 = 5 \times 2$
3	$15 =$
4	$20 =$
5	$25 =$
...	...
n	

Ordem	Termo
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 =$
4	$16 =$
5	$32 =$
...	...
n	

- 8** Determina o termo geral das sucessões que se seguem.
- a)** 6, 12, 18, 24, 30, ... **c)** 5, 9, 13, 17, 21, ...
- b)** -2, -1, 0, 1, 2, ... **d)** 1, 4, 7, 10, 13, ...
- 9** Determina os quatro primeiros termos da sucessão cujo termo geral é:
- a)** $8n$ **b)** $2n + 5$ **c)** $\frac{2n}{n+1}$
- 10** O número de quadrados em cada figura forma uma sequência numérica.



10.1 Quantos quadrados têm as três figuras seguintes?

10.2 Qual é o termo geral da sequência?

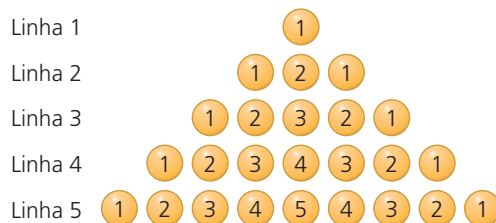
10.3 Quantos quadrados terá a 50.^a figura?

- 11** Representa graficamente as seguintes sequências.

a) $2n + 1$ para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;

b) $-\frac{n^2}{2} + 1$ para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- 12** Observa este triângulo numérico. Na 3.^a linha há 5 números. Na 4.^a linha há 7 números. Quantos números haverá na 112.^a linha? Explica a tua resposta.



GRELHA DE AVALIAÇÃO

Exercício	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.1	10.2	10.3	11	12
Cotação ¹ (pontos)	4	4	4	8	12	8	12	12	9	3	4	3	10	7

¹ Para saberes a cotação de cada alínea, basta dividires a cotação do exercício pelo número de alíneas.



SE TENS MENOS DE 50 PONTOS: É MELHOR VOLTARES A ESTUDAR ESTA UNIDADE!

SE TENS ENTRE 50 PONTOS E 69 PONTOS: REVÊ AS PARTES EM QUE ERRASTE E FAZ MAIS ALGUNS EXERCÍCIOS.

SE TENS ENTRE 70 PONTOS E 89 PONTOS: ESTÁS NO BOM CAMINHO.

SE TENS 90 PONTOS OU MAIS: PARABÉNS!

Pág. 119

Págs. 122 e 123

Págs. 114, 118, 119 e 123

Pág. 123

Pág. 119

Estratégias para a resolução de problemas e jogos

Alguns jogos ajudam a desenvolver vários tipos de raciocínios. Um bom jogador, para ganhar, usa o mesmo tipo de **estratégias** que se usam para resolver problemas de Matemática.

Jogo O jogo 3 em Linha

Jogos de alinhamento

Os jogos de alinhamento estão entre os mais antigos do Mundo. São jogos de posição, tal como o **Solitário**, as **Damas** e o **Xadrez**.

Um dos mais conhecidos é o **Jogo do Galo**. Este jogo é muito popular por ser simples, mas não é muito estimulante: termina num empate, a não ser que um dos jogadores cometa um erro. Existem versões semelhantes, mas que requerem mais estratégias: é o caso do jogo **3 em Linha**, que se descreve a seguir.

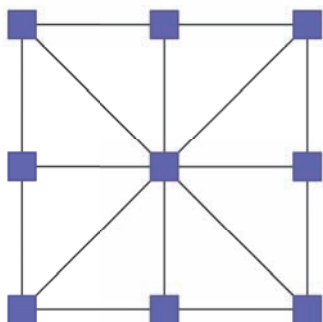


NÚMERO DE JOGADORES: 2.

MATERIAL: Um tabuleiro com nove pontos (ver figura seguinte) e três peças para cada jogador.

REGRAS:

1. O primeiro jogador coloca uma das suas peças num ponto livre do tabuleiro, **sem ser no centro**.
2. O segundo a jogar coloca uma peça num ponto livre do tabuleiro (já pode ser no centro).
3. Alternadamente, os jogadores colocam as restantes peças nos pontos livres do tabuleiro. Se um deles conseguir alinhar as três peças, ganha a partida. Caso contrário, uma vez que as seis peças estão no tabuleiro, os jogadores, à vez, movimentam uma das suas peças para um ponto livre adjacente (ou seja, um ponto imediatamente a seguir, na horizontal, na vertical ou na diagonal).
4. Ganha o jogador que alinhar as suas três peças.



Este jogo tem sido apreciado em todo o Mundo, ainda que com nomes diferentes e, por vezes, algumas diferenças.

Encontram-se exemplos deste tipo de tabuleiro no Egito, gravados nas pedras do templo de Kurna (c. 1400 a. C.).

Problema Os casais de coelhos

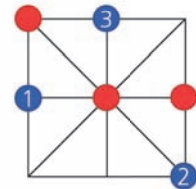
Coloca-se um casal de coelhos num pátio do qual não pode sair. No primeiro mês de vida, o casal de coelhos é ainda muito novo para se reproduzir. A partir do segundo mês, esse casal torna-se fértil e dá origem a um novo casal de coelhos (macho e fêmea), que nasce no mês seguinte. O processo repete-se todos os meses com cada casal.

Ao fim de cinco meses, quantos casais de coelhos haverá no pátio?



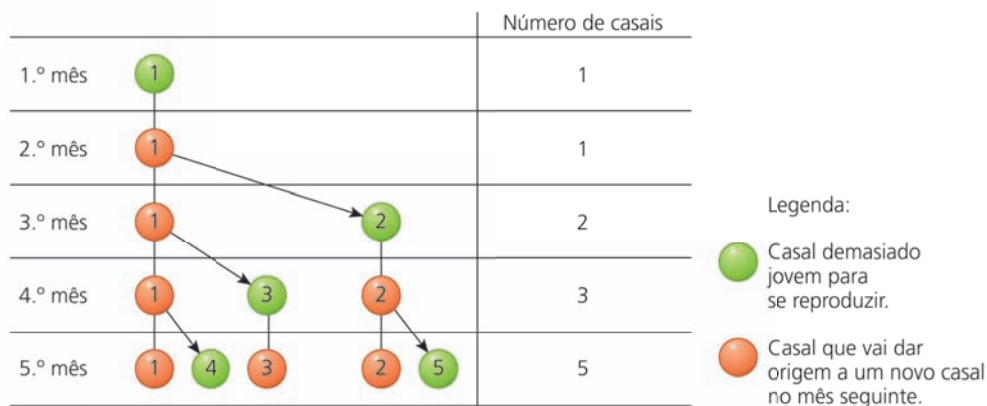
EXPLICAÇÃO DA ESTRATÉGIA DO JOGO E RESOLUÇÃO DO PROBLEMA:

- No jogo 3 em Linha, cada jogador faz uma **sequência** de jogadas. Para vencer, é útil **simular** o que vai acontecer a seguir. Por exemplo, na figura ao lado, o jogador das peças azuis pensa: «Se movimentar a peça 1, ele faz uma linha no meio. Se deslocar a peça 2, ele faz uma linha na diagonal. Por isso, só posso mover a peça 3.»
- Para resolver o problema dos coelhos, também é necessário fazer uma **simulação** do que vai acontecer em cada mês. Além disso, a elaboração de um **diagrama** ajuda sempre a visualizar o problema.



ESTRATÉGIA: Fazer uma simulação. Fazer um diagrama.

O diagrama que corresponde aos primeiros cinco meses é apresentado a seguir. Repara que a utilização de duas **cores** torna o diagrama mais compreensível.



Nos primeiros dois meses, existe apenas o casal 1. No terceiro mês, o casal 1 continua presente e nasce o casal 2. No quarto mês, nasce o casal 3. Por fim, no quinto mês, além desses três casais, nascem os casais 4 e 5.

RESPOSTA: Ao fim de cinco meses, estão no pátio cinco casais de coelhos.

Quantos coelhos estarão no pátio ao fim de seis meses? E ao fim de sete meses? O número de casais de coelhos em cada mês forma uma **sequência numérica**: 1, 1, 2, 3, 5, ... Qual é a sua lei de formação?

A sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa (1175-1250)

Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci (filho de Bonaccio), era um comerciante e matemático italiano. Leonardo acompanhava muitas vezes o pai nos seus negócios no Médio Oriente e estudou com um professor muçulmano. Nessa altura, na Europa, ainda era usada a numeração romana (I, II, III, IV, V...), mas Fibonacci conhecia bem a numeração indo-arábica. Em 1202, escreveu o livro *Liber Abaci*, onde descreveu os nove **algarismos** (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), juntamente com o símbolo 0 (chamado «*zephirum*», em árabe), e explicou as vantagens do sistema indo-arábico. Com o tempo, esse sistema acabou por ser aceite na Europa.



A sequência

O nome de Fibonacci ficou famoso devido a um problema do seu livro *Liber Abaci*: o problema dos casais de coelhos. Nesse problema (apresentado na página 135), o matemático observou que o número de casais de coelhos em cada mês forma uma sequência numérica. Trata-se da famosa sequência de Fibonacci, em que, a partir do terceiro termo, cada termo é igual à soma dos dois termos anteriores:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

$8 + 13 = 21$ →

Pinhas, girassóis e árvores

Os números da sequência de Fibonacci aparecem, por vezes, na Natureza. Por exemplo, quando se olha para a base de uma pinha, pode observar-se que existem dois tipos de espirais: as que vão para a direita e as que vão para a esquerda.

É curioso reparar que o número de espirais para a direita e o número de espirais para a esquerda são dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci (8/13 ou 13/21, etc.). O mesmo fenómeno ocorre com as sementes do girassol.



Oito espirais para a direita.



Treze espirais para a esquerda.



Sugestões de trabalho

- A sequência de Fibonacci é construída a partir dos dois primeiros termos (1 e 1), que, somados, dão o terceiro termo, e assim sucessivamente. Escolhe agora dois outros números e constrói uma sequência do mesmo tipo da de Fibonacci. Verifica que a soma dos dez primeiros termos é igual a onze vezes o sétimo termo. Depois, experimenta com outros dois números.
- Pesquisa uma relação entre a sequência de Fibonacci e o triângulo de Pascal (ex. 16 da pág. 130).

Investigar sequências com a calculadora

Quando se escreve uma sequência, repetindo um cálculo simples, podem acontecer fenómenos interessantes.

Sugestões de trabalho

Realiza esta atividade em grupo.

Investigação 1:

- Escolhe um número e insere-o na calculadora. Regista-o no caderno.
- Pressiona a tecla $=$. Pressiona $+$ 2 $\times$ 3 $=$. Regista o resultado.
- Continua a pressionar $=$ e regista os números que obténs.
- Uma vez obtida a sequência, descobre a sua lei de formação.
- Altera o valor que inseriste inicialmente (1.º termo) e repete o processo. Confirma se a tua lei de formação continua válida. Discute os resultados com os teus colegas.

Investigação 2:

- Escolhe um número e insere-o na calculadora. Regista-o no caderno.
- Pressiona a tecla $=$. Pressiona $\div$ 2 $+$ 3 $=$. Regista o resultado.
- Continua a pressionar $=$ e regista os números que obténs. O que observas de curioso?
- Faz variar o valor inicial que inseriste na calculadora e repete o processo. O mesmo fenómeno curioso continua a acontecer? Discute os resultados com os teus colegas.

Páginas da Internet

- *Completar sequências*: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_185_g_2_t_1.html
- *Sequências de números*: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm31/sequencias.htm>
- *Fichas de trabalho*: <http://www.malhatlantica.pt/mat/sequenci.htm>
- *Sequência de Fibonacci*: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/numeros.htm>

SOLUÇÕES



REVISÕES
E CÁLCULO MENTAL

Págs. 10 a 17

1. A — 4; B — 1; C — 3; D — 2

2. a) 18 e) 49 i) 32
b) 9 f) 8 j) 7
c) 15 g) 40 k) 36
d) 4 h) 0 l) 8

3. CHILE

4. a) 75 b) 150 c) 146

5. MORCEGO

6. a) $4 \times 4 + 4 \times 4 = 32$ d) $6 : 6 + 6 : 6 = 2$
b) $9 \times 9 + 9 = 90$ e) $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
c) $7 : 7 + 7 - 7 = 1$ f) $8 - 8 : 8 = 7$

7. 7.1 a)

8	13	7
12	1	9
6	14	10

b)

2	15	5
4	11	1
8	3	7

c)

17	9	19
18	3	11
4	5	16

d)

23	19	20
14	22	16
27	18	25

7.2 Não, porque $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, que não é divisível por 2.

8. 8.1 30; 36; 125; 42; 81; 300

- 8.2 a) 24 de janeiro; 12 de fevereiro; 8 de março; 6 de abril; 4 de junho; 3 de agosto; 2 de dezembro.
b) 31 de outubro; 28, 29 e 30 de novembro; 26, 27, 28, 29, 30 e 31 de dezembro.
c) 2, 3, 5, 7, 11

9. a) 810, 60, 12, 1402, 8, 216, 72, 4, 68, 44, 6, 720, 36, 80, 3552
b) 810, 60, 123, 12, 9, 15, 216, 72, 6, 720, 435, 3, 45, 36, 51, 3552
c) 60, 12, 8, 216, 72, 4, 68, 44, 720, 36, 80, 3552
d) 810, 60, 5, 95, 15, 720, 435, 45, 80
e) 810, 9, 216, 72, 720, 45, 36
f) 810, 60, 720, 80

10. a)

2	3
×	×
7	5
14	15

b)

5	9
×	×
8	4
40	36

c)

3	7
×	×
9	6
27	42

d)

4	3
×	×
6	1
24	3

e)

1	8	9
×	×	×
3	4	5
×	×	×
7	6	2
21	192	90

f)

6	8	1
×	×	×
5	4	9
×	×	×
2	3	7
60	96	63

g)

5	6	4
×	×	×
9	3	2
×	×	×
1	7	8
45	126	64

11. a) ALENTEJO c) PORTIMÃO
b) VISEU d) FLORES

12. 12.1

1 : 3	2 : 3	3 : 3	4 : 3	5 : 3	6 : 3
0,333...	0,666...	1	1,333...	1,666...	2
7 : 3	8 : 3	9 : 3	10 : 3	11 : 3	12 : 3
2,333...	2,666...	3	3,333...	3,666...	4

12.2 Quando o dividendo é múltiplo de 3, obtém-se um número inteiro. A seguir, vêm sempre duas dízimas, uma que repete o 3 e outra que repete o 6.

12.3 7; 7,333...; 7,666...

13. Possível estimativa: 346 €
($37 + 15 + 6 + 8 + 7 + 13 + 260 = 346$)

14. a) 4,4 c) 7,7 e) 0,5
b) 5,2 d) 23,9 f) 4,0
15. a) 8,36 c) 0,33 e) 0,14
b) 2,55 d) 1,67 f) 10,30

16. A — 3; B — 4; C — 5; D — 1; E — 2

17. 20 pernas e patas.

18. 81 pétalas.

19. 16 €

20. 50 dias.

21. 44 jogadores.

22. 95 €

23. 26 pessoas.

24. 15 ovos.

25. 6 horas.

26. 5 horas e trinta minutos.

27. 18 kg

FICHA DE DIAGNÓSTICO

Pág. 17

1. a) 110 c) 9 e) 14
b) 48 d) 15 f) -1

2. 7^5

3. 24

4.

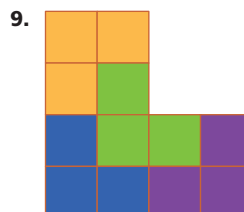
--	--	--	--	--

5. a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{17}{20}$ c) $\frac{40}{27}$

6. a) 16 b) 64

7. 40°

8. Oito cubos.



10.

N.º de grupos	2	3	4	6	8	12	16	24
N.º de carneiros por grupo	24	16	12	8	6	4	3	2

11. 36 minutos.

12. $3 + 3 - 3 - 3 = 0$; $3 : 3 + 3 - 3 = 1$; $3 : 3 + 3 : 3 = 2$;
 $3 \times 3 - 3 - 3 = 3$; $(3 \times 3 + 3) : 3 = 4$; $3 + 3 - 3 : 3 = 5$

1

NÚMEROS RACIONAIS

Págs. 18 a 69

Atividades iniciais

Pág. 19

1. 1.1 ; ;

1.2 

1.3 XVII; XXIX; XC; MCCXXXIV. Nos séculos, em alguns relógios, etc.

2. Primeiros Jogos Olímpicos; Morte de Viriato; Início da ocupação romana de Conímbriga; Início da construção do Coliseu de Roma.

3. 3.1 A: +9; B: -5; C: +3; D: -9; E: 0; F: +7; G: -2.

3.2 Menor: -9,5. Maior: -2.

3.3 Números simétricos.

3.4 9 metros.

4. $\frac{3}{40}$; $\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

1.1

Adição algébrica de racionais

Págs. 20 a 27

BD: +3 °C; -1 °C; -5 °C; 0 °C.

1. a) tenho 33 €. b) ainda tenho 9 €. c) ficou a -16 m.
d) devo 14 €. e) perdi 2 vidas. f) saí no piso 9.

2. A - 3; B - 4; C - 1; D - 2

3. a) +3 d) 0 g) -7
b) -4 e) +8 h) +7
c) -11 f) -8

4. a) 2 d) $-\frac{16}{3}$ g) -129
b) $\frac{1}{2}$ e) -10 h) $\frac{8}{15}$
c) 11 f) $-\frac{1}{2}$

5. a) +1 d) -9 g) -19
b) -4 e) 0 h) -9
c) +11 f) -2

6. a) -5 d) $\frac{1}{2}$ g) 16
b) $-\frac{44}{7}$ e) -70 h) $-\frac{37}{56}$
c) 21 f) $\frac{53}{40}$

7. a) +5 d) +18 g) 2
b) -7 e) 2 h) $\frac{5}{8}$
c) +23 f) -2 i) $-\frac{1}{3}$

8. a) $-2 + 0,5$ d) $-0,25 + 8$ g) $-6 - \frac{1}{2}$ j) $-\frac{3}{15} - \frac{4}{5}$

b) $-1,2 - 1$ e) $-2 + \frac{1}{2}$ h) $-\frac{1}{4} + 2$ k) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$

c) $-7,2 - 0,8$ f) $-\frac{7}{4} - 3$ i) $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}$ l) $-\frac{1}{10} + \frac{2}{5}$

9. a) 1 c) -12 e) 4 g) 0 i) 0,1
b) -1 d) 6 f) -3 h) 11 j) $\frac{43}{6}$

10. a) 3 c) -2 e) 12 g) $-\frac{7,4}{6}$
b) -1 d) 12 f) 0 h) $\frac{35}{6}$

11. 11.1 Números inteiros: 8; -4; 0; -106; -5; +9; $\frac{12}{4}$

Números racionais: todos

11.2 $-106 < -5 < -4 < 0 < \frac{1}{3} < \frac{5}{2} < \frac{12}{4} < 7,5 < 8 < +9$

11.3 8; 4; 7,5; 0; $\frac{5}{2}$; 106; $\frac{1}{3}$; 5; 9; 3

12. 8 passageiros.

13. $-3 + 2 + 7 - 2 - 4 - 6$; -6°C

14. a) -5 d) -19 g) -1,8 j) 0,9 m) $(-5) + (-3)$
b) -9 e) -2 h) 9,4 k) $\frac{2}{3}$ n) $(+7) + (-2)$

c) +16 f) +72 i) 1,3 l) $\frac{4}{7}$

15. a) $-4 + 2 + 6 = 4$ e) $+4 - 3 - 2 - 1 = -2$

b) $+9 - 7 - 5 = -3$ f) $-3 + 8 - 2 + 6 = 9$

c) $-8 + 7 - 6 = -7$ g) $-2 + 1 - 4 - 3 + 8 = 0$

d) $+2 - 3 - 4 + 5 = 0$ ou $+2 - 1 + 4 + 3 - 8 = 0$
ou $-2 + 3 + 4 - 5 = 0$

16. 16.1 Sinais posicionais a vermelho e operacionais a azul:
 $-2 + (-5) - (-4)$.

16.2 Ao cuidado do aluno.

16.3 Carregou na tecla  em vez de na tecla , antes do 2.

17.

		-5	
	-4	-1	
4	-8	7	
7	-3	-5	12

18. Ao cuidado do aluno.

19. 19.1 $\frac{1}{24}$ 19.2 $\frac{5}{24}$ 19.3 $\frac{24}{24} = 1$

20. Ao cuidado do aluno.

21. Ao cuidado do aluno.

1.2

Multiplicação

Págs. 28 a 33

BD: O resultado (-16,5) é negativo.

1. a) +15 h) -54 o) +60 v) $\frac{18}{25}$

b) +49 i) -37 p) -8 w) 6,3

c) -18 j) +48 q) -0,6 x) $-\frac{5}{3}$

d) -16 k) -1600 r) -1 y) $-\frac{5}{12}$

e) +45 l) +125 s) $-\frac{15}{8}$ z) 0,03

f) 0 m) -72 t) $\frac{8}{7}$

g) +16 n) +24 u) $\frac{8}{7}$

2. A - 5; B - 3; C - 2; D - 6; E - 1; F - 4

3. D

SOLUÇÕES

4. A

5. a) -28 b) 1 c) 1370 d) -3900 e) -4 f) -9

6. a) 55 d) 39 g) -5 j) -0,64 m) 2 p) 1,47
b) -90 e) 38 h) -11 k) 1,92 n) 5,25 q) -11
c) -36 f) 1 i) 1 l) -13 o) 13 r) $\frac{28}{3}$

7. a) -3 d) $-\frac{8}{3}$ g) $-\frac{1}{2}$

b) 26 e) $\frac{7}{4}$ h) $\frac{2}{5}$

c) -0,3 f) 0 i) $-\frac{1}{2}$

8. a) Verdadeiro. c) Verdadeiro.
b) Falso. d) Falso.

9. a) $-6 \times (-7) = 42$

b) $-2 \times |-8| = -2 \times 8 = -16$

c) $-8 + (-14) = -22$

d) $2 \times 25 - 8 \times (-9) = 50 + 72 = 122$

10. 10.1 a) 24 000 c) 42 000 000

b) -360 000 d) -70 000

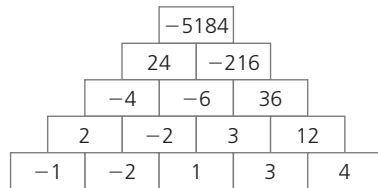
10.2 a) 495 b) 792 c) 2997 d) -5994

11. a) $\frac{5}{8}$ d) $-\frac{7}{30}$ g) $\frac{11}{5}$ j) $\frac{49}{6}$

b) $-\frac{58}{15}$ e) $\frac{9}{8}$ h) $\frac{92}{15}$

c) $-\frac{13}{24}$ f) $-\frac{7}{5}$ i) $-\frac{7}{6}$

12.



13. a) Positivo. b) Positivo. c) Negativo.

14. 24 pessoas.

1.3 Divisão _____ Págs. 34 a 37

BD: 15 000 €.

1. 9 € por pessoa.

2. 7 bolos.

3. 6 mesas.

4. a) 6; 6 b) 3; 3 c) $\frac{6}{5}; \frac{6}{5}$ d) 3; 3

5. a) +2 d) -1 g) -50 j) +12

b) -10 e) -3 h) 0 k) -520

c) -9 f) +8 i) 1 l) -23

6. $0 : 3 = 0$; $3 : 0$ é impossível.

7. a) -10 b) 2 c) 3

8. a) $-\frac{3}{5}$ c) -48 e) 6 g) 10

b) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{1}{6}$ f) -8 h) 1

9. a) $-\frac{2}{7} = \frac{2}{-7} = -\frac{2}{7}$ b) $-\frac{2}{-7} = \frac{2}{7}$

10. a) $\frac{2}{13}$ d) $\frac{3}{16}$ g) $-\frac{31}{30}$

b) $-\frac{1}{34}$ e) $-\frac{4}{21}$ h) $\frac{5}{6}$

c) $\frac{10}{273}$ f) 1 i) $\frac{2}{5}$

11. a) 5 b) $-\frac{42}{27} = -\frac{14}{9}$ c) 0,3

12. a) $\frac{7}{6}$ b) $-\frac{72}{5}$ c) $\frac{3}{5}$

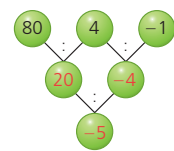
13. a) $\frac{43}{8}$ b) $\frac{80}{91}$ c) $\frac{61}{280}$

14. a) $-\frac{1}{4}$ d) -10 g) $\frac{61}{20}$ j) $-\frac{79}{9}$

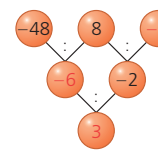
b) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{5}{3}$ h) $-\frac{26}{5}$

c) $\frac{7}{2}$ f) -32 i) -6

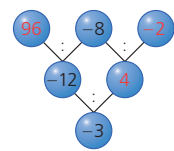
15. a)



b)



c)



16. a) Falso. b) Falso. c) Verdadeiro. d) Verdadeiro.

17. 17.1 a) -12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12

b) -21, -7, -3, -1, 1, 3, 7, 21

c) -36, -18, -12, -9, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

d) -100, -50, -25, -20, -10, -5, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100

17.2 -14, -7, -2, -1, 1, 2, 7, 14

18. 8 grupos, cada um com 3 rapazes e 2 raparigas.

19. Não, porque, por exemplo, o número 6 é divisível por 3 e não é por 9.

20. Os números são 7350 e 7380.

21. 130,4 €; $\frac{3000}{23}$ €

22. 22.1 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

22.2 Ao cuidado do aluno.

1.4 Potências de base racional e expoente natural _____ Págs. 38 a 41

BD: Negativo, positivo, negativo, positivo e positivo.

1. a) 3^2 b) 5^4 c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$

2. a) A base é 2 e o expoente é 4. $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

b) A base é 1 e o expoente é 6.

$1^6 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

c) A base é $\frac{1}{3}$ e o expoente é 3. $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

d) A base é $\frac{2}{7}$ e o expoente é 2. $\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$

e) A base é 10 e o expoente é 6.

$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000$

3. a) 36 b) 64 c) 121 d) 5 e) 9

4. a) 8 b) 64 c) 1000 d) 1 e) 5

5. a) 10 000 b) 10 c) 1 000 000 000

d) 2 e) 8

6. Base positiva $\rightarrow$ A potência é um número **positivo**.

Base negativa e expoente par $\rightarrow$ A potência é um número **positivo**.

Base negativa e expoente ímpar $\rightarrow$ A potência é um número **negativo**.

negativo.

7. a) Negativo. c) Positivo. e) Negativo.
b) Positivo. d) Positivo. f) Positivo.
8. a) 25 e) -1 i) -13 m) $\frac{1}{4}$
b) -8 f) 49 j) $\frac{81}{16}$ n) 0,04
c) 32 g) $\frac{1}{9}$ k) -100 000 o) $-\frac{8}{27}$
d) 1 h) -64 l) 144
9. 9.1 $1 = 1^2, 4 = 2^2, 9 = 3^2, 16 = 4^2$
9.2 25 pontos (5^2).

10. A

11. a) > b) > c) = d) < e) > f) =

12. a) $\frac{1}{729}$ d) $-\frac{125}{343}$
b) 537 824 e) A calculadora não consegue.
c) 256

13. 20 736 palavras.

Semana	1	2	3	4	5	10
N.º de membros	3	9	27	81	243	59 049
Potência	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^{10}

15. 15.1 655,34 €
15.2 10 737 418,24 € (30 dias) ou 21 474 836,48 € (31 dias).
16. 16.1 Ao cuidado do aluno.
16.2 10 000

1.5

Operações com potências — Págs. 42 a 47

BD: 2^{10} .

1. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{17}$ c) $(-4,1)^{25}$ e) $(-2)^8$
b) 10^{15} d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{24}$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^9$
2. a) 4^3 d) $(-7)^9$ g) $(-9)^{11}$
b) 20^9 e) 15^1 h) $(-6)^4$
c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{12}$ f) $(-2)^{19}$ i) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$
3. a) 15^{10} d) 7^2 g) 1^3
b) 2^7 e) $(-8)^5$ h) $(-10)^9$
c) 42^{11} f) 100^4 i) 30^6
4. a) 5^6 b) $\left(\frac{3}{8}\right)^{28}$ c) 7^{18} d) $\left(\frac{4}{9}\right)^{50}$
5. $q^{n \times m}$
6. a) $\left(\frac{4}{3}\right)^{12}$ b) 8^{35} c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{36}$ d) 30^{49} e) 40^{100}
7. a) 53 d) 11 g) -51
b) 22 e) -4 h) 0
c) 0 f) -4 i) 24
8. 3^9
9. 2^9
10. a) $(18^4)^3$ c) 3^2 e) 10^6
b) $(-7)^4$ d) $(-6)^4$ f) $(5^4)^6$
11. a) 10 b) -8
12. a) 5^2 c) 5^4
b) 5^{42} d) 5^{20}
13. a) 3^3 c) 3^{12}

b) 3^1 d) 3^7

14. 14.1 14

14.2 A calculadora não respeita as prioridades e efetua em primeiro lugar a adição. Tirando partido da propriedade comutativa da adição, pode escrever-se $3 \times 4 + 2$.

14.3 Ao cuidado do aluno.

15. a) 0 d) -1101 g) 1 j) 7
b) -5 e) 9 h) 27 k) 36
c) 0 f) 216 i) $\frac{1}{16}$ l) 9

16. 16.1 27 maneiras diferentes.

16.2 3^3

17. 17.1 729

17.2 6561

18. 18.1 Ao cuidado do aluno.

18.2 A calculadora deu prioridade a $20 : 2$. O Zito esqueceu-se de acrescentar parênteses: $(-12 + 20) : (2 - 4)$.

19. 2^{99}

1.6

Raiz quadrada — Págs. 48 a 53

BD: 13 jogadores.

1. a) $1^2 = 1$ f) $6^2 = 36$ k) $11^2 = 121$
b) $2^2 = 4$ g) $7^2 = 49$ l) $12^2 = 144$
c) $3^2 = 9$ h) $8^2 = 64$ m) $13^2 = 169$
d) $4^2 = 16$ i) $9^2 = 81$ n) $14^2 = 196$
e) $5^2 = 25$ j) $10^2 = 100$ o) $15^2 = 225$
2. a) 3 (porque $3^2 = 3 \times 3 = 9$) f) 0
b) 5 (porque $5^2 = 5 \times 5 = 25$) g) 1
c) 7 (porque $7^2 = 49$) h) 11
d) 9 (porque $9^2 = 81$) i) 36
e) 4 (porque $4^2 = 16$) j) 64
3. a) 18 b) 25 c) 37
4. 1,43 metros.
5. a) 169 cm^2 b) 4 cm c) 16 cm d) 24 mm
6. 20 metros.
7. 7.1 49 garrafas.
7.2 15 novos alunos.
8. a), b) e c) Os resultados são iguais.
9. a) 63 b) 8 c) 6 d) $\frac{7}{5}$ e) 4 0
10. 10.1 O lado da zona A é de 15 metros e o lado da zona B é de 16 metros.
10.2 116 metros
11. 11.1 82,8 €
11.2 243 000 litros

1.7

Raiz cúbica — Págs. 54 a 59

BD: -3

1. a) 1 d) 64 g) 343 j) 1000
b) 8 e) 125 h) 512
c) 27 f) 216 i) 729
2. a) 2 (porque $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$) f) 0
b) 3 (porque $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$) g) 1
c) 5 (porque $5^3 = 125$) h) -1
d) -5 (porque $(-5)^3 = -125$) i) $\sqrt[3]{1331} = 11$

SOLUÇÕES

- e) 10 (porque $10^3 = 1000$) j) $\sqrt[3]{-3375} = -15$
3. a) 13 b) 9 c) -4
4. a) $< ; <$ b) $> ; >$ c) $< ; <$
5. A afirmação é verdadeira, são operações inversas.
Por exemplo: $\sqrt[3]{2^3} = 2$.
6. a) 12 b) 5 c) -16 d) 27
7. 7.1 1000 cm^3
7.2 18 cm
8. 8.1 12 cm
8.2 720 cm^2
9. a), b) e c) Os resultados são iguais.
10. a) 15 c) 0,5 e) 3 g) 11
b) -6 d) 0,5 f) -8 h) 49
11. 4 dm
12. $40\,500 \text{ cm}^2$
13. $3 \times \sqrt[3]{125} - 2 \times \sqrt{64}$

Atividades globais

Págs. 62 a 65

1. D
2. D
3. B
4. C
5. D
6. A
7. C
8. B
9. C
10. a) $-\frac{72}{13}$ d) 0 g) 169 j) 8
b) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{17}{6}$ h) 36
c) $-\frac{1}{6}$ f) -30 i) 41
11. a) $2 \times 7 + 2 \times 5$ f) $4 \times 2 \times (9 - 6)$
b) $(5 + 1) \times (7 - 3)$ g) $4 \times (7 + 1 + (-2))$
c) $3 \times 2 \times (8 - 4)$ h) $8 \times (2 - 1 \times (-1))$
d) $6 \times (9 - 8 + 3)$ i) $4 \times (2 - (-1 - 3))$
e) $6 \times (8 - 5 + 1)$
12. 9 maneiras.
13. 16 saias e 16 camisas.
14. Sim. De um lado, os 3 cubos menores e, do outro, o cubo maior.
15. 15.1 Cabem na vertical (visto que a caixa não tem tampa).
15.2 26 CD.
16. 27 cubos.
17. Por exemplo, $134 + 276 + 589$.
18. $(1 + 2 - 3) \times 4 = 0$ $1 - 2 + 3 + 4 = 6$
 $1 \times 2 + 3 - 4 = 1$ $1 \times (2 + 3 + \sqrt{4}) = 7$
 $1 \times 2 \times 3 - 4 = 2$ $(1 - 2 + 3) \times 4 = 8$
 $1 \times 2 - 3 + 4 = 3$ $1 \times 2 + 3 + 4 = 9$
 $1 + 2 - 3 + 4 = 4$ $1 + 2 + 3 + 4 = 10$
 $(1 + 2) \times 3 - 4 = 5$

19. a)

5	0	7
6	4	2
1	8	3

b)

-3	4	-1
2	0	-2
1	-4	3

c)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

20. C
21. D
22. B
23. 23.1 14 mm
23.2 Se o valor de t for inferior a 12, obtém-se a raiz quadrada de um número negativo, o que é impossível.

AUTOAVALIAÇÃO

Págs. 66 e 67

1. D
2. D
3. D
4. Por exemplo, em temperaturas e pisos (parques de estacionamento subterrâneos).
5. a) 8 d) 0
b) $-\frac{25}{18}$ e) $\frac{7}{10}$
c) $-\frac{7}{5}$ f) -10
6. a) Positivo. c) Positivo.
b) Negativo.
7. a) $\frac{16}{25}$ d) $\frac{81}{256}$
b) $\frac{4}{-8}$ e) 1
c) -8 f) $-\frac{10\,000\,000}{2187}$
8. a) 4^7 d) 8^{14}
b) 11^{18} e) 2^{14}
c) $(-5)^4$ f) $(-28)^{15}$
9. a) $\sqrt{36} = 6$, porque $6^2 = 36$ e 6 é positivo.
b) $\sqrt{81} = 9$, porque $9^2 = 81$ e 9 é positivo.
c) 14. A raiz quadrada e o quadrado anulam-se.
d) $\sqrt[3]{8} = 2$, porque $2^3 = 8$ e 2 é positivo.
e) $\sqrt[3]{-1000} = -10$, porque $(-10)^3 = -1000$.
f) 15. A raiz cúbica e o cubo anulam-se.
10. a) 60 c) 2
b) 3 d) $\frac{1}{5}$
11. 4 metros.
12. $\sqrt[3]{1000\,000} = 100$. A gaiola deve ter 100 cm de aresta.

2

FUNÇÕES

Págs. 72 a 111

Atividades iniciais

Pág. 72

1. 1.1 0,70 €
1.2 0,12 €
1.3 A compra mais acertada é a embalagem de 375 g.
Na embalagem de 375 g, com 1 € compram-se 187,5 g de cereais, enquanto na embalagem de 500 g, com 1 €, só se compram, aproximadamente, 154 g de cereais.
2. 2.1 Dentro das localidades, a velocidade máxima permitida para os quadriciclos é de 40 km/h.

2.2 2.2.1

Tempo gasto/horas	1	2	3
Distância percorrida/km	40	80	120

2.2.2 1h30

2.3 2.3.1 7,5 km

2.3.2 O motociclo. 30 minutos.

3. Os dois amigos aproveitaram bem o tempo a nadar porque

$$\frac{30}{45} = \frac{20}{30}$$

2.1 Conceito de função

Págs. 74 a 79

BD: «O preço que pago pela fruta depende do seu peso.»;
«A distância que já percorri depende da velocidade a que vou.»;
«A minha média de notas depende de cada nota.»; etc.

1. a) Sim.
- b) Não, porque duas pessoas com a mesma idade podem ter alturas diferentes.
- c) Não, pois, se assim fosse, dois livros com o mesmo número de páginas custariam sempre o mesmo, o que é falso.
- d) Não. O empregado recebe sempre o mesmo.
2. a) É função, porque a cada clube corresponde uma, e uma só, cidade.
- b) É função, porque a cada x corresponde um, e um só, $f(x)$.
- c) Não é função do conjunto «Género de música» para o conjunto «Cantor», porque ao jazz não corresponde nenhum cantor.
- d) É função, porque a cada x corresponde um, e um só, y .
- e) É função, porque a cada nome corresponde um, e um só, meio de transporte.
- f) É função, porque a cada x corresponde um, e um só, $g(x)$.

3. 3.1 $D_f = \{1; 2; 3; 4\}$ e $D'_f = \{4; 7; 10; 13\}$;
 $D_g = \{2; 4; 8; 10\}$ e $D'_g = \{13; 27; 55; 69\}$

3.2 13

3.3 2

3.4 a) $f(2) = 7$ c) $f(1) = 4$ e) $f(3) = 10$
b) $g(2) = 13$ d) $g(8) = 55$ f) $g(10) = 69$

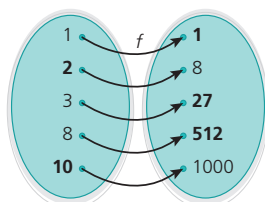
4. B

5. 5.1 Sim, porque a cada velocidade corresponde uma, e uma só, distância de paragem.

5.2 64,9 m. 180 km/h.

5.3 Não, porque necessita de 104,2 m para parar e só tem 100 m.

6. 6.1 Aresta de um cubo Volume do cubo



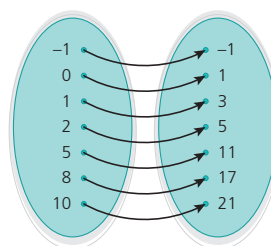
6.2 É uma função, porque a cada medida da aresta corresponde um e um só volume do cubo.

6.3 27

6.4 2

6.5 a) $f(1) = 1$ b) $f(8) = 512$ c) $f(3) = 27$

7. 7.1



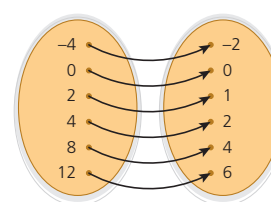
7.2 Sim, trata-se de uma função, pois a cada elemento do conjunto de partida associa um, e um só, elemento do conjunto de chegada.

7.3 A imagem de 2 é 5.

7.4 O objeto é 8.

x	-1	0	1	2	5	8	10
y	-1	1	3	5	11	17	21

8. 8.1



8.2 Sim, trata-se de uma função, pois a cada elemento do conjunto de partida associa um, e um só, elemento do conjunto de chegada.

8.3 8

8.4 0

x	-4	0	2	4	8	12
y	-2	0	1	2	4	6

9. 9.1 $D_f = D_g = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

9.2 $f(2) = 6$; $f(4) = 12$; $g(2) = 1$; $g(4) = 2$

9.3 É 3.

9.4 É 1.

9.5 $f(6) + g(6) = 18 + 3 = 21$

x	1	2	3	4	6
$f(x) - g(x)$	$\frac{5}{2}$	5	$\frac{15}{2}$	10	15

x	1	2	3	4	6
$-f(x)$	-3	-6	-9	-12	-18

x	1	2	3	4	6
$2g(x)$	1	2	3	4	6

x	1	2	3	4	6
$f(x) \times g(x)$	$\frac{3}{2}$	6	$\frac{27}{2}$	24	54

x	1	2	3	4	6
$g^3(x)$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8	27

10. 10.1

Medida do lado de um quadrado/cm	2	3	4	5	8
Perímetro do quadrado/cm	8	12	16	20	32

Medida do lado de um quadrado/cm	2	3	5	6	10
Área do quadrado/cm ²	4	9	25	36	100

10.2 As correspondências anteriores são funções, porque a cada medida de comprimento do lado do quadrado associa um, e um só, valor de medida de perímetro (tabela1) ou um, e um só valor, de área (tabela2).

11. 11.1 $D'_f = \{\text{San Juan; Cabul; Phnom Penh; Kuala Lumpur; Catmandu; Quito; Lima; Onagadougou; Yamoussoukro; Lomé}\}$

11.2 Ao cuidado do aluno.

2.2

Gráfico de uma função

Págs. 80 a 83

BD: A7, A8, A9; C1, C2, C3, C4; C8, D8, E8, F8, G8; F2, G2, H2; J9, J10.

1. 1.1 a) $A(2; 4); B(4; 2); C(3; 0); D(0; 3,5); E(6; 5)$
 b) 2; 4; 3
 c) 3,5; 5

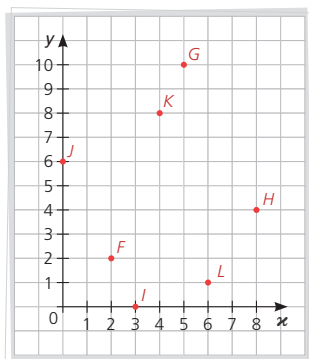
1.2 Origem do referencial.

1.3 C

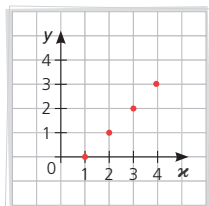
1.4 D

1.5 Sim, altera a posição do ponto se trocarmos a ordem da abscissa e da ordenada.

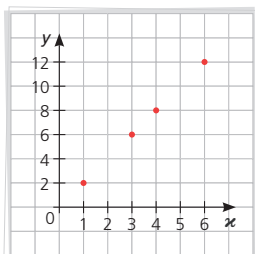
2.



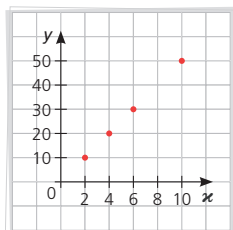
3. a)



b)



c)



4. 4.1 É função, porque a cada abscissa corresponde uma, e uma só, ordenada.

4.2 1

4.3 4

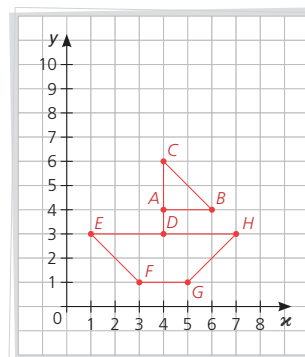
4.4 5

4.5 1 e 4.

4.6 $D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

4.7 $D' = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

5. 5.1 e 5.2



6. 6.1 Variável independente: tempo.
 Variável dependente: custo da chamada.

6.2 1,14 €

6.3 8 minutos.

6.4 0,19 €

6.5 6,08 €

6.6

Tempo/minutos	2	4	6	8	10
Custo da chamada/€	0,38	0,76	1,14	1,52	1,90

7. 10; 14; 1

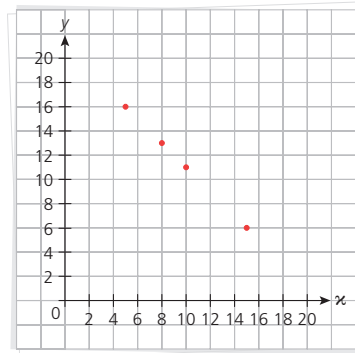
8. 8.1

Base (x/cm)	5	8	10	15
Altura (y/cm)	16	13	11	6

8.2 É função, porque a cada medida da base corresponde uma, e uma só, medida da altura.

8.3 Não, a maior medida inteira para a base é 20 cm.

8.4



8.5 Por exemplo: (2; 19); (3; 18); (17; 4); etc.

2.3

Função linear e função afim

Págs. 84 a 89

1. C

2. 2.1 $f(-2) = 4$
 $f(0,3) = -0,6$
 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$
 $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

2.2 Sim, porque é da forma $y = ax$ com $a = -2$.

2.3 O objeto é -5.

3. $y = 80x + 20$

4. 4.1 A e F.
4.2 C e H.
4.3 A. $(a = 8, b = 0)$ E. $(a = -9, b = -11)$
B. $(a = 3, b = 7)$ F. $(a = -1, b = 0)$
C. $(a = 0, b = 14)$ H. $(a = 0, b = -6)$
D. $(a = 2,5, b = -4)$
5.

x	-5	-3,25	-2	0	3	6,3
y	-27	-20	-15	-7	5	18,2
6. 6.1 É uma função afim, porque é do tipo $y = ax + b$ ($a = 2, b = 12$), mas não é linear, porque o valor de b não é zero.
6.2 32 €
7. 7.1 240
7.2 $y = 30x$
7.3 30 minutos.
8. $g(x) = -7x$ com $a = -7$
 $h(x) = \frac{1}{2}x$ com $a = \frac{1}{2}$
 $s(x) = 0,6x$ com $a = 0,6$
9. 9.1 $y = 2,5x$
9.2 20 €
9.3 20 dias.
10. 10.1 $y = 2x$
10.2 732 comprimidos.
11. 11.1 $f(x) = -2x$ e $g(x) = \frac{1}{4}x$
11.2 a)

x	-1	0	1	2	3
$f(x) + g(x)$	$\frac{7}{4}$	0	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{21}{4}$

b)

x	-1	0	1	2	3
$2g(x)$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

c)

x	-1	0	1	2	3
$g(x) - f(x)$	$-\frac{9}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{27}{4}$

d)

x	-1	0	1	2	3
$f(x) \times g(x)$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$

e)

x	-1	0	1	2	3
$[f(x)]^2$	4	0	4	16	36
12. a) $f(x) = -4x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	12	8	4	0	-4	-8	-12

b) $g(x) = 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	2	2	2	2	2	2

c) $f(x) + g(x)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) + g(x)$	14	10	6	2	-2	-6	-10
- 12.1 $f(x) + g(x) = -4x + 2$ é uma função afim uma vez que é da forma $y = ax + b$.
13. 13.1 114 €

13.2 11 semanas.

13.3 $y = 2x + 100$

14. 14.1 $f(1) = 3; g(-1) = -9$

14.2 5

14.3 6

14.4	x	-1	0	1	2	3
	$f + g$	-10	-3	4	11	18
	$f \times g$	9	-4	3	30	77

14.5 $(f - g)(x) = -3x + 5$ e $2g(x) = 10x - 8$

2.4 Proporcionalidade direta

Págs. 90 a 93

BD: Quem teve a pontaria mais afinada foi o Zito.

- Ao cuidado do aluno.
- O Diogo é o mais rápido, porque num minuto percorre, aproximadamente, 67 m, enquanto o Zito só percorre 62,5 m.
- 6
- Não, porque $3 \times 35 \neq 18 \times 5$.
- a) $x = 10$ b) $x = 3$ c) $x = 21$
- 10
- 5 pacotes custariam 5,75 €. Com 8,05 €, teria comprado 7 pacotes.
- 21L
- a) 129 s b) 4,2 minutos.
- a) Existe proporcionalidade direta, porque a razão entre o custo e o peso é sempre a mesma e representa o preço de cada quilo de quivis.
b) Não existe proporcionalidade direta, porque à medida que a idade aumenta, a altura de uma pessoa não aumenta na mesma razão.
c) Existe proporcionalidade direta, porque o número de orelhas é sempre o dobro do número de gatos.
- a) As grandezas são diretamente proporcionais. A constante entre y e x é 4.
b) Não são diretamente proporcionais, porque $\frac{3}{7} \neq \frac{6}{12}$.
c) Não são diretamente proporcionais, porque $\frac{11}{33} \neq \frac{0}{3}$.
- A Joana deve dar 7,50 €.
- A
- 14.1 4. 9.
14.2 50
14.3 Número de gramas de arroz = $50 \times$ número de gemas
- 15.1

Lado do quadrado/cm	3	5	6	8	11
Perímetro do quadrado/cm	12	20	24	32	44
Área do quadrado/cm ²	9	25	36	64	121

15.2 A razão entre o perímetro de um quadrado e o comprimento do seu lado é constante, logo, são grandezas diretamente proporcionais. A constante é 4.
15.3 Não, porque, por exemplo, $\frac{9}{3} \neq \frac{25}{5}$.
- Ao cuidado do aluno.

2.5 Proporcionalidade direta como função

Págs. 94 a 99

BD: A constante de proporcionalidade direta é 7,50.

A expressão é: Preço = $7,50 \times n.$ º de bilhetes

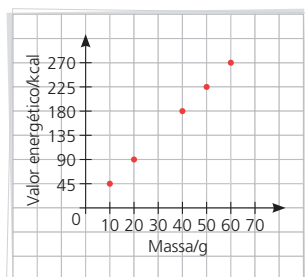
1. A — 3; B — 2; C — 1

2. D

3. 3.1

Massa/g	10	20	40	50	70
Valor energético/kcal	45	90	180	225	315

3.2



3.3 450 kcal

3.4 $c = 4,5m$, em que c representa o valor energético, em quilocalorias e m , a massa, em gramas.

4. A.

a	1	4	2,5	21
b	4	16	10	84

B.

x	2	1	6	12
y	4	2	12	24

C.

t	4	8	10	48
v	1	2	2,5	12

D.

a	0	2	5	6	12
b	0	6	15	18	36

5. 5.1 Sim, porque a razão entre o volume de água e o tempo é constante (2,5).

5.2 $k = 2,5$ e corresponde ao número de litros de água vertidos por minuto.

5.3 2,5; 0,4

5.4 22,5 litros.

5.5 18 minutos.

6. 6.1

Distância percorrida/km	15	30	45	50	80
Custo do transporte/€	90	180	270	300	480

6.2 A razão entre o custo do transporte e a distância percorrida é constante, por isso, existe proporcionalidade direta. A constante de proporcionalidade direta é 6 e representa o custo de cada quilómetro.

6.3 $c = 6d$

7. 7.1 0,5 s

7.2 1024

7.3 Representa o número de KB transferidos em cada segundo.

7.4 6 s

8. 8.1 Sim, porque a razão entre o preço e o seu diâmetro é constante e igual a 0,17.

8.2 $p = 0,17d$

8.3 8,50 €

8.4 O preço é o mesmo, então, é preferível uma piza com 50 cm de diâmetro porque a sua área é igual à de 4 pizzas com 25 cm de diâmetro.

8.5 Ao cuidado do aluno.

9. 9.1

x	1	2	3	4	7
C(x)	4	8	12	16	28

9.2 Sim, trata-se de uma situação de proporcionalidade direta porque em cada caso é constante o valor de $\frac{C(x)}{x}$.

9.3 Custam 72 centimos (0,72 €).

9.4

x	10	20	30	40	70
C(x)/€	0,40	0,80	1,20	1,60	2,80

10. 10.1

Peso/kg	0	1	2	4	15
Custo/€	0	0,20	0,40	0,80	3,00

10.2 $C = 0,20x$, em que C é o valor a pagar (em euros) e x o número de quilogramas de batatas vendidas.

10.3 4,40 €

10.4 250 kg

10.5

Peso/kg	10	20	30	40
Custo/€	2	4	6	8

11. 11.1 $\frac{70}{0,5} = \frac{280}{2} = \frac{420}{3} = \frac{630}{4,5} = 140$

Sim, as grandezas são diretamente proporcionais, porque, se dividirmos os valores da distância pelos correspondentes valores do tempo, obtemos uma constante. A constante é 140 e representa a distância percorrida pelo comboio numa hora.

11.2 $d = 140t$

11.3 3,5 horas.

12. 12.1 $k = \frac{1,05}{3} = 0,35$

12.2

N.º de lápis comprados (n)	Custo (C)/€
2	0,70
3	1,05
5	1,75
7	2,45
15	5,25

12.3 8,05 €

12.4 15 lápis.

13. Ao cuidado do aluno.

Atividades globais

Págs. 102 a 105

1. C

2. D

3. B

4. B

5. D

6. 6.1 Sim, porque para cada idade existe um, e um só, comprimento.

6.2 47 cm

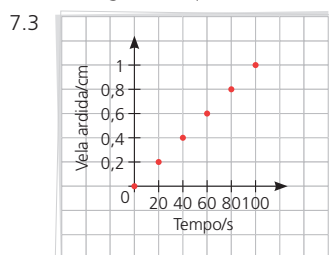
6.3 17 cm

6.4	Idade/meses	0	2	4	6	8	9
	Comprimento/cm	47	53	59	64	68	70

6.5 Não, porque, por exemplo, $\frac{53}{2} \neq \frac{59}{4}$.

7. 7.1 Sim, porque a razão entre a porção de vela ardida e o tempo é constante.

7.2 A constante é 100 e corresponde ao tempo, em segundos, que demora a arder 1 cm da vela.

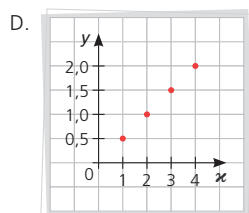
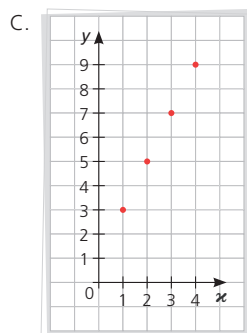
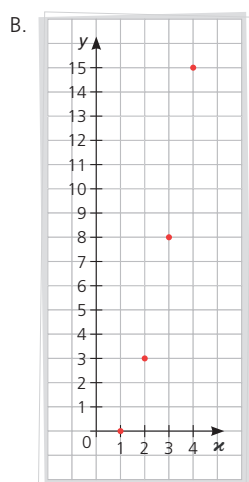
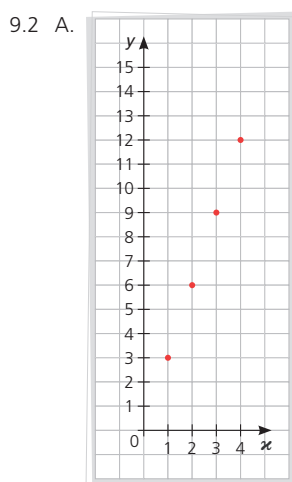


7.4 Sim, porque o tempo toma qualquer valor.

7.5 1,8 cm

8. Vermelho = internacional; verde = nacional; azul = regional; laranja = local.

9. 9.1 A.	x	1	2	3	4
	y = 3x	3	6	9	12
B.	x	1	2	3	4
	y = x² - 1	0	3	8	15
C.	x	1	2	3	4
	y = 2x + 1	3	5	7	9
D.	x	1	2	3	4
	y = 0,5x	0,5	1	1,5	2



9.3 Lineares: A e D. Afins: A, C e D.

10. 10.1 12 €

10.2 28 €

10.3 A afirmação é verdadeira, porque os pontos pertencem a uma mesma reta que passa pela origem do referencial.

10.4 Novo preço = **0,75** × preço antigo

11. D

12. D

13. C

14. 14.1 11 955 NOK

14.2 250 EUR

14.3 Não foi vantajoso, porque, se a taxa se tivesse mantido, a D. Marta teria recebido 254 EUR.

15. Pagará 102 000 €.

AUTOAVALIAÇÃO

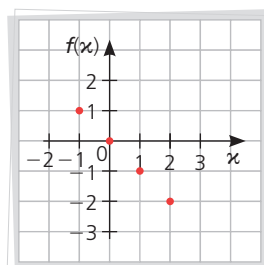
Págs. 106 e 107

1. B

2. B

3. C

4. 4.1



4.2	x	-1	0	1	2
	f(x) × g(x)	-5	0	-5	-20

4.3	x	-1	0	1	2
	[f(x)]³	1	0	-1	-8

4.4 $f(x) = -x$ e $g(x) = 5x$, logo, $f(x) - g(x) = -6x$ (função linear; coeficiente -6).

5. 5.1 Sim, porque a cada profundidade corresponde uma, e uma só, pressão.

5.2 1 atm

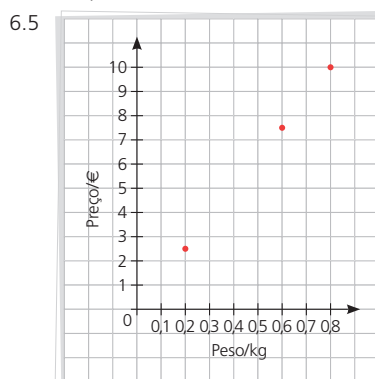
5.3 O gráfico é representado por uma reta que não passa na origem do referencial.

6. 6.1 Sim, porque: $\frac{2,5}{0,2} = 12,5$; $\frac{7,5}{0,6} = 12,5$; $\frac{10}{0,8} = 12,5$

6.2 Representa o preço, em euros, de 1 kg de caramelos.

6.3 Preço = **12,5** × peso da embalagem

6.4 A variável independente é o peso e a variável dependente é o preço.



6.6 6.6.1	Peso/kg	0,2	0,6	0,8
	Preço/€	1,75	6,75	9,25

6.6.2 O preço a pagar não é diretamente proporcional ao peso, porque $\frac{1,75}{0,2} = 8,75$ e $\frac{6,75}{0,6} = 11,25$.

6.6.3 Usando regras de três simples:

$$0,2 \text{ ————— } 1,75$$

$$0,6 \text{ ————— } x$$

$$x = \frac{1,75 \times 0,6}{0,2} = 5,25$$

$$0,2 \text{ ————— } 1,75$$

$$0,8 \text{ ————— } x$$

$$x = \frac{1,75 \times 0,8}{0,2} = 7$$

O pacote de 0,6 kg custaria 5,25 € e o pacote de 0,8 kg custaria 7 €.

7. A. Falso. A cada objeto tem de corresponder uma, e uma só, imagem, mas objetos diferentes podem ter a mesma imagem.
 B. Falso. Podem existir elementos do segundo conjunto sem correspondência no primeiro conjunto (não pertencem ao contradomínio da função).
 C. Falso. Para representar uma proporcionalidade direta, a expressão algébrica tem de ser do tipo $y = kx$ (k positivo).

3 SEQUÊNCIAS E SUCESSÕES

Págs. 112 a 137

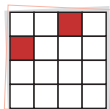
Atividades iniciais

Pág. 113

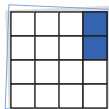
1. Todos os dias as marés ocorrem com regularidade. Pelas 20h, diariamente, começam os noticiários. Uma pessoa pode ter de pagar 500 € em cada mês por um empréstimo ao banco. Uma pessoa pode ter de carregar o telemóvel de 2 em 2 meses. Etc.

2. 1992

3. a)



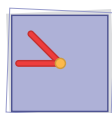
b)



4. 4.1 4.º lugar.

4.2 2.º lugar.

5.



3.1

Sequências e sucessões Págs. 114 a 117

BD: 8h36min

1. a) 10 pontos. b) 10 pontos.
 2. a) Adicionar 6 ao termo anterior; 36.
 b) Subtrair 4 ao termo anterior; -3.
 c) Multiplicar por 2 o termo anterior; 64.
 d) Subtrair 7 ao termo anterior; -25.
 e) Dividir por 2 o termo anterior; 2,5.
 f) Subtrair 9 ao termo anterior; 40.
 g) Adicionar 3 ao termo anterior; -7.
 h) Multiplicar por 2 e adicionar 1; 63.

3. a) Adicionar 14 ao termo anterior; 83.
 b) Adicionar 26 ao termo anterior; 122.
 c) Multiplicar por 4 o termo anterior; 4096.
 d) Multiplicar por 5 o termo anterior; 14 375.
 4. a) 6, 9, 12, 15, 18
 b) 10, 4, -2, -8, -14
 c) 60 000, -6000, 600, -60, 6
 d) -3, -7, -11, -15, -19
 e) 4, 11, 25, 53, 109
 5. A
 6. 91,5 km
 7. a) 25 c) 33 e) 1
 b) 20 d) 27 f) 720
 8. a) 6, 23, 40, 57, 74
 b) 8, 48, 288, 1728, 10368
 c) 972, -324, 108, -36, 12
 d) 4, 23, 156, 1087, 7604
 9. 15
 10. 3125 células. A lei de formação é multiplicar o termo anterior por 1,25.
 11. Ao cuidado do aluno.

3.2

Termo geral Págs. 118 a 121

BD: 46 pessoas.

1. a)

Ordem	Termo
1	$3 = 1 + 2$
2	$4 = 2 + 2$
3	$5 = 3 + 2$
4	$6 = 4 + 2$
5	$7 = 5 + 2$
...	...
n	$n + 2$

b)

Ordem	Termo
1	$-1 = 1 - 2$
2	$0 = 2 - 2$
3	$1 = 3 - 2$
4	$2 = 4 - 2$
5	$3 = 5 - 2$
...	...
n	$n - 2$

c)

Ordem	Termo
1	$11 = 1 + 10$
2	$12 = 2 + 10$
3	$13 = 3 + 10$
4	$14 = 4 + 10$
5	$15 = 5 + 10$
...	...
n	$n + 10$

d)

Ordem	Termo
1	$4 = 4 \times 1$
2	$8 = 4 \times 2$
3	$12 = 4 \times 3$
4	$16 = 4 \times 4$
5	$20 = 4 \times 5$
...	...
n	$4n$

e)

Ordem	Termo
1	$-5 = -5 \times 1$
2	$-10 = -5 \times 2$
3	$-15 = -5 \times 3$
4	$-20 = -5 \times 4$
5	$-25 = -5 \times 5$
...	...
n	$-5n$

f)

Ordem	Termo
1	$10 = 10 \times 1$
2	$20 = 10 \times 2$
3	$30 = 10 \times 3$
4	$40 = 10 \times 4$
5	$50 = 10 \times 5$
...	...
n	$10n$

g)

Ordem	Termo
1	$3 = 2 \times 1 + 1$
2	$5 = 2 \times 2 + 1$
3	$7 = 2 \times 3 + 1$
4	$9 = 2 \times 4 + 1$
5	$11 = 2 \times 5 + 1$
...	...
n	$2n + 1$

h)

Ordem	Termo
1	$3 = 3^1$
2	$9 = 3^2$
3	$27 = 3^3$
4	$81 = 3^4$
5	$243 = 3^5$
...	...
n	3^n

i)

Ordem	Termo
1	$1 = 1^2$
2	$4 = 2^2$
3	$9 = 3^2$
4	$16 = 4^2$
5	$25 = 5^2$
...	...
n	n^2

2. a) $3n$ d) $n - 4$
 b) $n + 5$ e) n
 c) $6n$ f) $9n$
3. a) $2n$ e) $\frac{n}{2}$
 b) $n + 7$ f) $4n$
 c) $5n$ g) $n + 1$
 d) $n - 12$ h) $n - 1$
4. a) 2 c) 6 e) $2n$
 b) 4 d) 20
5. a) 7 c) 21 e) $7n$
 b) 14 d) 56
6. D
7. 7.1 $3n$
 7.2 Não, porque 103 não é múltiplo de 2.
8. a) $2 + n$ b) $1 + 3n$
9. n^3
10. Ao cuidado do aluno.

3.3 Termos de uma sequência

BD: 80 pessoas.

1. a) 8, 9, 10, 11, 12 d) -3, 2, 7, 12, 17
 b) -2, -1, 0, 1, 2 e) 1, -2, -5, -8, -11
 c) 6, 12, 18, 24, 30 f) 3, 5, 9, 15, 23
2. B
3. a) 2, 4, 6, 8, 10
 b) 3, 5, 7, 9, 11
 c) 4, 6, 8, 10, 12
 A lei de formação é a mesma: adicionar 2 ao termo anterior.
4. a) 3, 6, 9, 12, 15
 b) 7, 10, 13, 16, 19
 c) 2, 5, 8, 11, 14
 A lei de formação é a mesma: adicionar 3 ao termo anterior.

5. a) 7, 13, 19, 25, 31
 b) -4, -1, 2, 5, 8
 c) 3, 1, -1, -3, -5
6. a) $2n$; 100 d) $2n + 3$; 103
 b) $6n$; 300 e) $3n + 1$; 151
 c) $n + 3$; 53 f) $4n - 1$; 199
7. a) Termo geral: $2n + 4$; a 20.^a figura tem 44 fósforos.
 b) Termo geral: $4n + 1$; a 20.^a figura tem 81 fósforos.

8.

Mês	1	2	3	4	n	24
Total de dinheiro dado	15	20	25	30	$5n + 10$	130

9. a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$
 b) $1, \frac{3}{2}, \frac{9}{5}, 2, \frac{15}{7}$
 c) $-1, -\frac{4}{5}, -1, -\frac{16}{11}, -\frac{16}{7}$
10. a) $\frac{3n}{7}, \frac{300}{7}$ c) $\frac{2n}{n+1}, \frac{200}{101}$ e) $\frac{n^2}{4n}; 25$
 b) $\frac{n+2}{n+3}, \frac{102}{103}$ d) $\frac{5n}{2n-1}, \frac{500}{199}$ f) $\frac{n}{2}; 50$
11. A
12. C (de cinco)
13. 13.1 21
 13.2 Ao cuidado do aluno.

Atividades globais

Págs. 128 a 131

1. C
 2. D
 3. C
 4. A
 5. A
 6. C
 7. B
 8. D
 9. 9.1 C
 9.2 D
 10. 18 minutos.
 11. A ordem é 12.
 12. A ordem é 3.
 13. A. a) 7 cubos.
 b) Adicionar 2 ao termo anterior.
 c) $2n - 1$
 d) 59 cubos.
 B. a) 13 cubos.
 b) Adicionar 4 ao termo anterior.
 c) $4n - 3$
 d) 117 cubos.
 C. a) 10 cubos.
 b) Adicionar 3 ao termo anterior.
 c) $3n - 2$
 d) 88 cubos.
 D. a) 16 cubos.
 b) Adicionar 5 ao termo anterior.
 c) $5n - 4$
 d) 146 cubos.

SOLUÇÕES

14. a) 6, 7, 8, 9, 10
 b) 4, 10, 16, 22, 28
 c) 5, 8, 13, 20, 29
 d) 3, 8, 15, 24, 35
 e) $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{7}, -\frac{2}{5}, -\frac{5}{13}$
 f) $-1, 5, -7, 17, -31$

15. 15.1 81 triângulos.

15.2 Multiplicar por 3 o termo anterior.

15.3 Ao cuidado do aluno.

16. 16.1 Linha 7: 1 6 15 20 15 6 1

Linha 8: 1 7 21 35 35 21 7 1

Linha 9: 1 8 28 56 70 56 28 8 1

16.2 21

16.3 24

16.4 38

16.5 8, 16, 32, 64, 128, 256

16.6 512, porque as somas formam a sequência das potências de 2.

17. C

18. C

19. 19.1

n	Número de macieiras	Número de cedros
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40
n	n^2	$8n$

19.2 900 macieiras.

19.3 400 cedros.

20. 20.1 10 quadrados.

20.2 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ quadrados.

AUTOAVALIAÇÃO

Págs. 90 e 91

1. A

2. C

3. D

4. a) -3

b) 33

c) -10

d) 25

5. a) Adicionar 3 ao termo anterior.

b) Dividir por 2 o termo anterior.

c) Subtrair 17 ao termo anterior.

d) Multiplicar por 5 o termo anterior.

6. a) $-9, -5, -1, 3$

b) 5, 9, 17, 33

7. a)

Ordem	Termo
3	$7 = 3 + 4$
4	$8 = 4 + 4$
5	$9 = 5 + 4$
...	...
n	$n + 4$

b)

Ordem	Termo
3	$15 = 5 \times 3$
4	$20 = 5 \times 4$
5	$25 = 5 \times 5$
...	...
n	$5n$

c)

Ordem	Termo
3	$8 = 2^3$
4	$16 = 2^4$
5	$32 = 2^5$
...	...
n	2^n

8. a) $6n$

b) $n - 3$

c) $4n + 1$

d) $3n - 2$

9. a) 8, 16, 24, 32

b) 7, 9, 11, 13

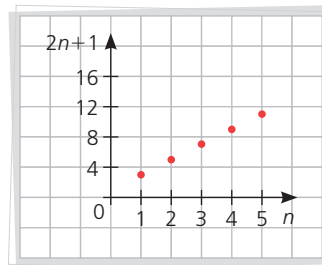
c) $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}$

10. 10.1 11, 13 e 15 quadrados.

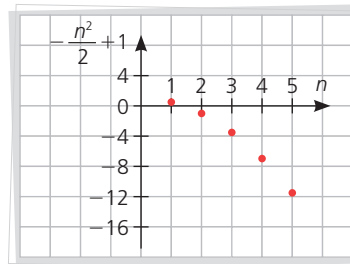
10.2 $2n + 1$

10.3 101 quadrados.

11. a)



b)



12. O número de valores em cada linha forma a sequência dos números ímpares (1, 3, 5, 7, 9, ...) cujo termo geral é $2n - 1$. Assim, a 112.ª linha tem $2 \times 112 - 1 = 223$ números.

ANEXOS

Tabela de quadrados e cubos

n	n^2	n^3
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1000
11	121	1331
12	144	1728
13	169	2197
14	196	2744
15	225	3375
16	256	4096
17	289	4913
18	324	5832
19	361	6859
20	400	8000
21	441	9261
22	484	10 648
23	529	12 167
24	576	13 824
25	625	15 625
26	676	17 576
27	729	19 683
28	784	21 952
29	841	24 389
30	900	27 000
31	961	29 791
32	1024	32 768
33	1089	35 937
34	1156	39 304
35	1225	42 875
36	1296	46 656
37	1369	50 653
38	1444	54 872
39	1521	59 319
40	1600	64 000
41	1681	68 921
42	1764	74 088
43	1849	79 507
44	1936	85 184
45	2025	91 125
46	2116	97 336
47	2209	103 823
48	2304	110 592
49	2401	117 649
50	2500	125 000

n	n^2	n^3
51	2601	132 651
52	2704	140 608
53	2809	148 877
54	2916	157 464
55	3025	166 375
56	3136	175 616
57	3249	185 193
58	3364	195 112
59	3481	205 379
60	3600	216 000
61	3721	226 981
62	3844	238 328
63	3969	250 047
64	4096	262 144
65	4225	274 625
66	4356	287 496
67	4489	300 763
68	4624	314 432
69	4761	328 509
70	4900	343 000
71	5041	357 911
72	5184	373 248
73	5329	389 017
74	5476	405 224
75	5625	421 875
76	5776	438 976
77	5929	456 533
78	6084	474 552
79	6241	493 039
80	6400	512 000
81	6561	531 441
82	6724	551 368
83	6889	571 787
84	7056	592 704
85	7225	614 125
86	7396	636 056
87	7569	658 503
88	7744	681 472
89	7921	704 969
90	8100	729 000
91	8281	753 571
92	8464	778 688
93	8649	804 357
94	8836	830 584
95	9025	857 375
96	9216	884 736
97	9409	912 673
98	9604	941 192
99	9801	970 299
100	10 000	1 000 000

Tabela dos números primos menores que 1000

2	47	109	191	269	353	439	532	617	709	811	907
3	53	113	193	271	359	443	541	619	719	821	911
5	59	127	197	277	367	449	547	631	727	823	919
7	61	131	199	281	373	457	557	641	733	827	929
11	67	137	211	283	379	461	563	643	739	829	937
13	71	139	223	293	383	463	569	647	743	839	941
17	73	149	227	307	389	467	571	653	751	853	947
19	79	151	229	311	397	479	577	659	757	857	953
23	83	157	233	313	401	487	587	661	761	859	967
29	97	163	239	317	409	491	593	673	769	863	971
31	89	167	241	331	419	499	599	677	773	877	977
37	101	173	251	337	421	503	601	683	787	881	983
41	103	179	257	347	431	509	607	691	797	883	991
43	107	181	263	349	433	521	613	701	809	887	997

Alfabeto grego

	Maiúscula	Minúscula
Alfa	A	α
Beta	B	β
Gama	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Épsilon	E	ε
Zeta	Z	ζ
Eta	H	η
Teta	Θ	θ
Iota	I	ι
Capa	K	κ
Lambda	Λ	λ
Miú	M	μ
Niú	N	ν
Csi	Ξ	ξ
Ómicron	O	ο
Pi	Π	π
Ró	P	ρ
Sigma	Σ	σ
Tau	T	τ
Ípsilon	Υ	υ
Fi	Φ	φ
Qui	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Ómega	Ω	ω

FONTES FOTOGRÁFICAS

Casa da Imagem

P. 6 Praça em Lagos; P. 7 Cubo mágico;
P. 92 Tigela com quivis; P. 136 Gravura
de Fibonacci.

Corbis

P. 112 Menina com blocos numerados.

GettyImages

P. 6 Papiro de Rhind; P. 18 Pannel com números
inteiros; P. 72 Estradas com veículos.

Maurício Abreu

P. 20 Rua Augusta, Lisboa.

Agência LUSA

P. 117 Ciclistas na Volta a Portugal.

Vários

P. 6 Jornal com tabelas, Sanja Gjenero;
P. 7 Comando para jogos,
Michal Zacharzewski; P. 7 PDA, Brano Hudak;
P. 7 Astronauta, NASA; P. 11 Lua cheia,
Michelle Kwajaja; P. 19 Estátua de Viriato,
Jorge Vicente; P. 27 Cartas de jogar,
Paul Leach; P. 41 Cachorros, Vee Bee;
P. 46 Skate, Eduardo Piél; P. 65 Foca,
Marlon Paul Bruin; P. 65 Líquenes,
Karin Lindstrom; P. 66 Telemóvel, Bruno Huoak;
P. 67 Papagaio, Johannes Brenner; P. 71 Ábaco,
Klaus Post; P. 71 Calculadora, John Peke;
P. 71 Computador, Manu Mohan; P. 73 Moto 4,
Michal Zacharzewski; P. 102 Airbus A-380,
Philip MacKenzie; P. 103 Mulher com criança,
Simona Balint; P. 107 Caramelos, Chris Chidsey;
P. 113 Metropolitano, Metro do Porto;
P. 131 Cesto com maçãs, Max Mitenkov;
P. 135 Coelho, Jannes Pockelel.

O Projeto **Desafios** de Matemática
destinado ao 7.º ano de escolaridade,
3.º Ciclo do Ensino Básico, é uma obra coletiva,
concebida e criada pelo Departamento de Investigações
e Edições Educativas da Santillana-Constância,
sob a direção de Sílvia Vasconcelos.

EQUIPA TÉCNICA

Chefe de Equipa Técnica: Patrícia Boleto

Modelo Gráfico e Capa: Carla Julião

Ilustrações: Ana Mesquita e Félix

Paginação: Catarina Martins, Célia Neves e Leonor Ferreira

Documentalista: Paulo Ferreira

Revisão: Ana Abranches, Ana Catarina Martins,
Elisabete Rodrigues e Eva Arim

EDITORA

Paula Inácio

**A edição revista de acordo com as novas metas curriculares
é da responsabilidade de Daniel Azevedo.**



© 2013

Rua Mário Castelhan, 40 – Queluz de Baixo
2734-502 Barcarena, Portugal

APOIO AO PROFESSOR

Tel.: 214 246 901

apoioaoprofessor@santillana.com

APOIO AO LIVREIRO

Tel.: 214 246 906

apoioaolivreiro@santillana.com

Internet: www.santillana.pt

Impressão e Acabamento: Lidergraf

ISBN: 978-989-708-448-5

C. Produto: 410 110 205

2.ª Edição

5.ª Tiragem

Depósito Legal: 361031/13



A cópia ilegal viola os direitos dos autores.
Os prejudicados somos todos nós.