

Xis

CADERNO DE APOIO AO PROFESSOR

Matemática 7.º Ano

NOVA EDIÇÃO:
De acordo com as Metas Curriculares
e o Novo Programa de 2013.

Paula Pinto Pereira
Pedro Pimenta

Índice

1. Introdução.....	3
2. Apresentação do Projeto	4
2.1 <i>Manual / Programa / Metas de aprendizagem</i>	4
2.2 <i>Caderno de Tarefas</i>	10
3. Estrutura do <i>Caderno de Apoio ao Professor</i>	11
4. Números racionais	12
4.1 Teste de diagnóstico de conhecimentos 1	12
Soluções do teste de diagnóstico de conhecimentos 1	14
4.2 Metas curriculares	15
4.3 Proposta de planificação	16
4.4 Propostas de resolução +RRC.....	18
4.5 Sugestões de exploração das tarefas de investigação	21
4.6 Outra tarefa.....	23
Indicações metodológicas/resolução da tarefa.....	24
5. Expressões algébricas. Potenciação. Raízes quadradas e cúbicas	25
5.1 Metas curriculares	25
5.2 Proposta de planificação	27
5.3 Propostas de resolução +RRC.....	29
5.4 Sugestões de exploração das tarefas de investigação	30
5.5 Outra tarefa.....	31
Indicações metodológicas/resolução da tarefa.....	32
6. Funções	33
6.1 Teste de diagnóstico de conhecimentos 2	33
Soluções do teste de diagnóstico de conhecimentos 2	35
6.2 Metas curriculares	36
6.3 Proposta de planificação	38
6.4 Propostas de resolução +RRC.....	40
6.5 Sugestões de exploração da tarefa de investigação	43
6.6 Outras tarefas	44
Indicações metodológicas/resolução das tarefas.....	47
7. Equações algébricas	50
7.1 Teste de diagnóstico de conhecimentos 3	50
Soluções do teste de diagnóstico de conhecimentos 3	52
7.2 Metas curriculares	53

7.3 Proposta de planificação	54
7.4 Propostas de resolução +ARC.....	56
7.5 Sugestões de exploração das tarefas de investigação	60
7.6 Outra tarefa.....	61
Indicações metodológicas/resolução da tarefa.....	62
8. Sequências e sucessões.....	63
8.1 Teste de diagnóstico de conhecimentos 4	63
Soluções do teste de diagnóstico de conhecimentos 4	65
8.2 Metas curriculares	66
8.3 Proposta de planificação	67
8.4 Propostas de resolução +ARC.....	69
8.5 Sugestões de exploração das tarefas de investigação	72
8.6 Outra tarefa.....	73
Indicações metodológicas/resolução da tarefa.....	74
9. Figuras geométricas. Medida	76
9.1 Teste de diagnóstico de conhecimentos 5	76
Soluções do teste de diagnóstico de conhecimentos 5	78
9.2 Metas curriculares	79
9.3 Proposta de planificação	82
9.4 Propostas de resolução +ARC.....	85
9.5 Sugestões de exploração das tarefas de investigação	89
9.6 Outra tarefa.....	91
Indicações metodológicas/resolução da tarefa.....	92
10. Paralelismo, congruência e semelhança. Medida.....	93
10.1 Teste de diagnóstico de conhecimentos 6	93
Soluções do teste de diagnóstico de conhecimentos 6	95
10.2 Metas curriculares	96
10.3 Proposta de planificação.....	99
10.4 Propostas de resolução +ARC.....	101
10.5 Sugestões de exploração da tarefa de investigação	106
11. Medidas de localização.....	107
11.1 Teste de diagnóstico de conhecimentos 7	107
Soluções do teste de diagnóstico de conhecimentos 7	109
11.2 Metas curriculares	110
11.3 Proposta de planificação.....	111
11.4 Propostas de resolução +ARC.....	112
11.5 Outra tarefa	114
Indicações metodológicas/resolução da tarefa.....	115

1. Introdução

Caro(a) colega:

Apresentamos-lhe o projeto *Xis 7*, reformulado no âmbito do **novo Programa de Matemática do Ensino Básico**, homologado a 17 de junho de 2013, que inclui as **Metas Curriculares de Matemática**, homologadas a 3 de agosto de 2012.

Tendo em conta os reajustes na organização curricular da disciplina, que têm no Programa e nas Metas Curriculares o respetivo normativo legal, tivemos necessidade de proceder à reformulação do manual, para que este pudesse ir ao encontro do processo ensino-aprendizagem a implementar nas escolas, proporcionando, assim, condições pedagógicas e didáticas que permitam aos alunos atingir as metas previstas.

Recomendamos, no entanto, que leiam o Programa da disciplina e, em particular, a secção referente às Metas Curriculares, para prepararem esta nova fase de trabalho com os alunos. É também importante complementar a análise das Metas Curriculares com a consulta dos respetivos Cadernos de Apoio publicados pelo MEC (tanto do 3.º ciclo como dos ciclos anteriores), uma vez que, em vários temas, é fundamental ter bem presente a forma como foram abordados certos conteúdos que são pré-requisitos para o estudo no 7.º ano.

O projeto *Xis* integra uma vasta equipa de colaboradores, investigadores, revisores pedagógicos e científicos, que, juntamente connosco, traçaram as linhas orientadoras de um projeto em que um dos objetivos principais é proporcionar ao professor diversas ferramentas de exploração dos conteúdos do Programa.

A Sociedade Portuguesa de Matemática é a entidade certificadora do manual, atestando a sua correção científica e concordância com os conteúdos curriculares.

O contributo de todos é essencial e é necessário um esforço conjunto para cumprirmos esta tão nobre missão: ensinar Matemática!

Contamos consigo e estamos sempre disponíveis para as suas solicitações.

Paula Pinto Pereira
Pedro Pimenta

2. Apresentação do Projeto

O projeto *Xis 7* é composto por: *Manual*, *Caderno de Tarefas* e *Caderno de Apoio ao Professor*. É, ainda, apoiado por uma forte componente multimédia.

2.1 *Manual / Programa / Metas de aprendizagem*

O principal recurso do projeto *Xis 7* é o manual. É claramente um manual para o aluno, que será o seu leitor por excelência, organizado de forma a colmatar a falta de autonomia que os alunos deste nível ainda têm e escrito para que seja um instrumento de trabalho frequente, com uma componente prática muito forte.

Para apoiar o professor, disponibilizamos a versão do professor que, além das soluções e de sugestões metodológicas, tem indicação constante das metas a desenvolver em cada parte do manual.

2.1.1 Metas de aprendizagem

No novo Programa destacam-se três grandes finalidades para o ensino da Matemática: a estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade. Para alcançar estes propósitos, o Programa estabelece os objetivos que traduzem os desempenhos fundamentais que os alunos deverão evidenciar em cada um dos três ciclos de escolaridade básica. Esses desempenhos são explicitados por verbos, a que se atribuem significados específicos em cada ciclo e que servem de base à leitura dos descritores elencados nas Metas Curriculares. Com efeito, cada descritor inicia-se por um verbo, na quase totalidade dos casos constante da lista abaixo.

«**3.º Ciclo** – Neste ciclo requerem-se os sete desempenhos seguintes, com o sentido que se especifica:

- (1) **Identificar/Designar:** O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.
- (2) **Reconhecer:** O aluno deve apresentar uma argumentação coerente ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.
- (3) **Reconhecer, dado...:** O aluno deve justificar o enunciado em casos concretos, sem que se exija que o prove com toda a generalidade.
- (4) **Saber:** O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.
- (5) **Provar/Demonstrar:** O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.
- (6) **Estender:** Este verbo é utilizado em duas situações distintas:
 - (a) Para estender a um conjunto mais vasto uma definição já conhecida. O aluno deve definir o conceito como se indica, ou de forma equivalente, reconhecendo que se trata de uma generalização.
 - (b) Para estender uma propriedade a um universo mais alargado. O aluno deve reconhecer a propriedade, podendo por vezes esse reconhecimento ser restrito a casos concretos.
- (7) **Justificar:** O aluno deve justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.»

Citando o Programa:

«No seu conjunto, e de modo integrado, estes desempenhos devem concorrer, a partir do nível mais elementar de escolaridade, para a aquisição de **conhecimentos de factos e de procedimentos**, para a **construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático**, para uma **comunicação (oral e escrita)** adequada à Matemática, para a **resolução de problemas** em diversos contextos e para uma visão da Matemática como um todo articulado e coerente.»

Neste *Caderno de Apoio ao Professor*, no início da secção dedicada a cada capítulo, elencamos os descritores referentes a esse capítulo.

2.1.2 Domínios

No 3.º ciclo, os domínios de conteúdos são cinco:

- Números e Operações (NO)
- Geometria e Medida (GM)
- Funções, Sequências e Sucessões (FSS)
- Álgebra (ALG)
- Organização e Tratamento de Dados (OTD)

Neste manual adota-se uma estrutura curricular sequencial, em que a ordem dos tópicos foi fixada atendendo a que a aquisição de certos conhecimentos e o desenvolvimento de certas capacidades depende de outros a adquirir e a desenvolver previamente. Promove-se, desta forma, uma aprendizagem progressiva, na qual se caminha etapa a etapa.

2.1.3 Conteúdos

DOMÍNIO	CONTEÚDOS
NO7 18 tempos	Números racionais • Simétrico da soma e da diferença de racionais. • Extensão da multiplicação a todos os racionais. • Extensão da divisão ao caso em que o dividendo é um racional qualquer e o divisor um racional não nulo.
GM7 66 tempos	Alfabeto grego • As letras α, β, γ, δ, π, ρ e σ do alfabeto grego. Figuras geométricas Linhas poligonais e polígonos • Linhas poligonais; vértices, lados, extremidades, linhas poligonais fechadas e simples; parte interna e externa de linhas poligonais fechadas simples. • Polígonos simples; vértices, lados, interior, exterior, fronteira, vértices e lados consecutivos. • Ângulos internos de polígonos. • Polígonos convexos e côncavos; caracterização dos polígonos convexos através dos ângulos internos. • Ângulos externos de polígonos convexos. • Soma dos ângulos internos de um polígono. • Soma de ângulos externos de um polígono convexo. • Diagonais de um polígono. Quadriláteros • Diagonais de um quadrilátero. • Paralelogramos: caracterização através das diagonais e caracterização dos retângulos e losangos através das diagonais. • Papagaios: propriedade das diagonais; o losango como papagaio. • Trapézios: bases; trapézios isósceles, escalenos e retângulos; caracterização dos paralelogramos. • Problemas envolvendo triângulos e quadriláteros. Paralelismo, congruência e semelhança • Isometrias e semelhanças. • Critério de semelhança de polígonos envolvendo os respetivos lados e diagonais. • Teorema de Tales. • Critérios de semelhança de triângulos (LLL, LAL e AA); igualdade dos ângulos correspondentes em triângulos semelhantes. • Semelhança dos círculos. • Critério de semelhança de polígonos envolvendo os respetivos lados e ângulos internos. • Divisão de um segmento num número arbitrário de partes iguais utilizando régua e compasso, com ou sem esquadro. • Homotetia direta e inversa. • Construção de figuras homotéticas. • Problemas envolvendo semelhanças de triângulos e homotetias. Medida Mudanças de unidade de comprimento e incomensurabilidade • Conversões de medidas de comprimento por mudança de unidade. • Invariância do quociente de medidas. • Segmentos de reta comensuráveis e incomensuráveis. • Incomensurabilidade da hipotenusa com os catetos de um triângulo retângulo isósceles. Áreas de quadriláteros • Área do papagaio e do losango. • Área do trapézio. Perímetros e áreas de figuras semelhantes • Razão entre perímetros de figuras semelhantes. • Razão entre áreas de figuras semelhantes. • Problemas envolvendo perímetros e áreas de figuras semelhantes.

DOMÍNIO	CONTEÚDOS
FSS7 25 tempos	Funções Definição de função • Função ou aplicação f de A em B; domínio e contradomínio; igualdade de funções. • Pares ordenados; gráfico de uma função; variável independente e variável dependente. • Funções numéricas. • Gráficos cartesianos de funções numéricas de variável numérica; equação de um gráfico cartesiano. Operações com funções numéricas • Adição, subtração e multiplicação de funções numéricas e com o mesmo domínio; exponenciação de expoente natural de funções numéricas. • Operações com funções numéricas de domínio finito dadas por tabelas, diagramas de setas ou gráficos cartesianos. • Funções constantes, lineares e afins; formas canônicas, coeficientes e termos independentes; propriedades algébricas e redução à forma canônica. • Funções de proporcionalidade direta. • Problemas envolvendo funções de proporcionalidade direta. Sequências e sucessões • Sequências e sucessões como funções. • Gráficos cartesianos de sequências numéricas. • Problemas envolvendo sequências e sucessões.
ALG7 28 tempos	Expressões algébricas • Extensão a $\mathbb{Q}$ das propriedades associativa e comutativa da adição e da multiplicação. • Extensão a $\mathbb{Q}$ da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração. • Extensão a $\mathbb{Q}$ das regras de cálculo do inverso de produtos e quocientes e do produto e do quociente de quocientes. • Extensão a $\mathbb{Q}$ da definição e propriedades das potências de expoente natural; potência do simétrico de um número. • Simplificação e cálculo do valor de expressões numéricas envolvendo as quatro operações aritméticas, a potenciação e a utilização de parênteses. Raízes quadradas e cúbicas • Monotonia do quadrado e do cubo. • Quadrado perfeito e cubo perfeito. • Raiz quadrada de quadrado perfeito e raiz cúbica de cubo perfeito. • Produto e quociente de raízes quadradas e cúbicas. • Representações decimais de raízes quadradas e cúbicas. Equações algébricas • Equação definida por um par de funções; primeiro e segundo membro, soluções e conjunto-solução. • Equações possíveis e impossíveis. • Equações equivalentes. • Equações numéricas; princípios de equivalência. • Equação linear com uma incógnita; simplificação e caracterização do conjunto-solução; equações lineares impossíveis, possíveis, determinadas e indeterminadas; equação algébrica de 1.º grau. • Soluções exatas e aproximadas de equações algébricas de 1.º grau. • Problemas envolvendo equações lineares.
OTD7 10 tempos	Medidas de localização • Sequência ordenada dos dados. • Mediana de um conjunto de dados; definição e propriedades. • Problemas envolvendo tabelas, gráficos e medidas de localização.

2.1.4 Níveis de desempenho

Transcreve-se a seguir o texto do Programa relativo aos níveis de desempenho:

«Tal como indicado na Introdução dos Cadernos de Apoio às Metas Curriculares, para vários descritores consideraram-se diferentes níveis de desempenho, materializados, nesses Cadernos, em exercícios ou problemas que podem ser propostos aos alunos. Aqueles que aí foram assinalados com um ou dois asteriscos estão associados a níveis de desempenho progressivamente mais avançados. **Tais desempenhos mais avançados não são exigíveis a todos os alunos, tendo portanto, carácter opcional.** No caso de outros descritores, embora não se tenham apresentado exemplos que permitissem distinguir níveis de desempenho, considera-se que o seu total cumprimento exige, só por si, um nível de desempenho avançado.» (ver Programa, págs. 27/28)

Neste manual optamos por propor alguns problemas e/ou por apresentar várias demonstrações que dizem respeito as estes níveis de desempenho avançado, para que os professores possam adaptar o trabalho às turmas que têm. No Programa escreve-se «(...) **as condições em que são abordados os níveis de desempenho mais avançados ficam ao critério do professor, em função das circunstâncias (tempo, características dos alunos ou outros fatores) em que decorre a sua prática letiva.**»

No quadro abaixo indicam-se os descritores correspondentes aos níveis de desempenho mais avançado, «(...) que se enquadram em três tipos distintos:

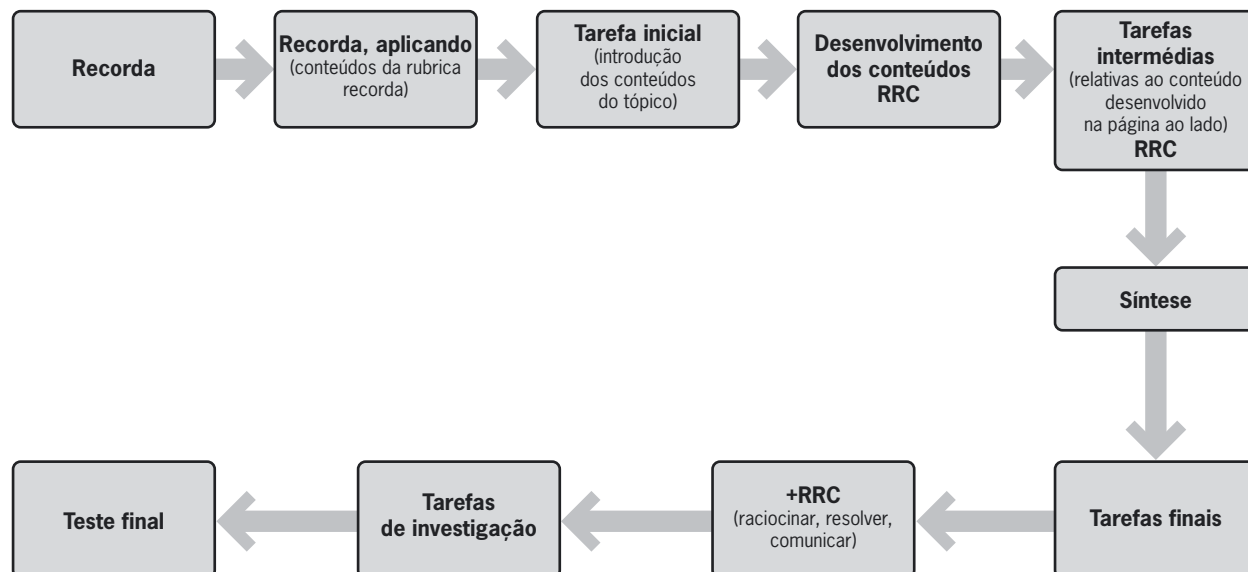
- Uns descritores mencionam **propriedades que devem ser reconhecidas**. Ainda que esse reconhecimento com níveis de desempenho que ultrapassem o considerado regular seja, tal como foi explicado acima, opcional, os alunos deverão, em todos os casos, conhecer pelo menos o enunciado destas propriedades, podendo utilizá-las quando necessário, por exemplo na resolução de problemas;
- Outros descritores envolvem **procedimentos**. Todos devem ser trabalhados ao nível mais elementar, ficando ao critério do professor o grau de desenvolvimento com que aborda situações mais complexas, correspondentes a níveis de desempenho superiores;
- Os restantes descritores referem-se a **propriedades que devem ser provadas ou demonstradas**; o facto de se incluírem alguns descritores deste tipo na lista dos que podem envolver níveis de desempenho avançados significa que as demonstrações a que se referem, embora devam ser requeridas para se atingirem esses níveis de desempenho, não são exigíveis à generalidade dos alunos, devendo todos eles, em qualquer caso, conhecer o enunciado das propriedades e estar aptos a utilizá-las quando necessário.»

7.º ano	NO7 1.1, 1.2, 1.3, 1.4
	GM7 2.13, 2.16, 2.17, 2.18, 2.20, 2.24, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 7.1, 7.2, 7.4, 7.5, 7.6, 8.1, 8.3, 9.1, 9.2
	FSS7 2.2, 2.6, 2.7, 3.1
	ALG7 1.5, 2.4
	OTD7 1.4

Neste *Caderno de Apoio ao Professor*, no ponto referente às metas curriculares de cada capítulo, assinalam-se estes descritores com asterisco.

2.1.5 Organização do Manual

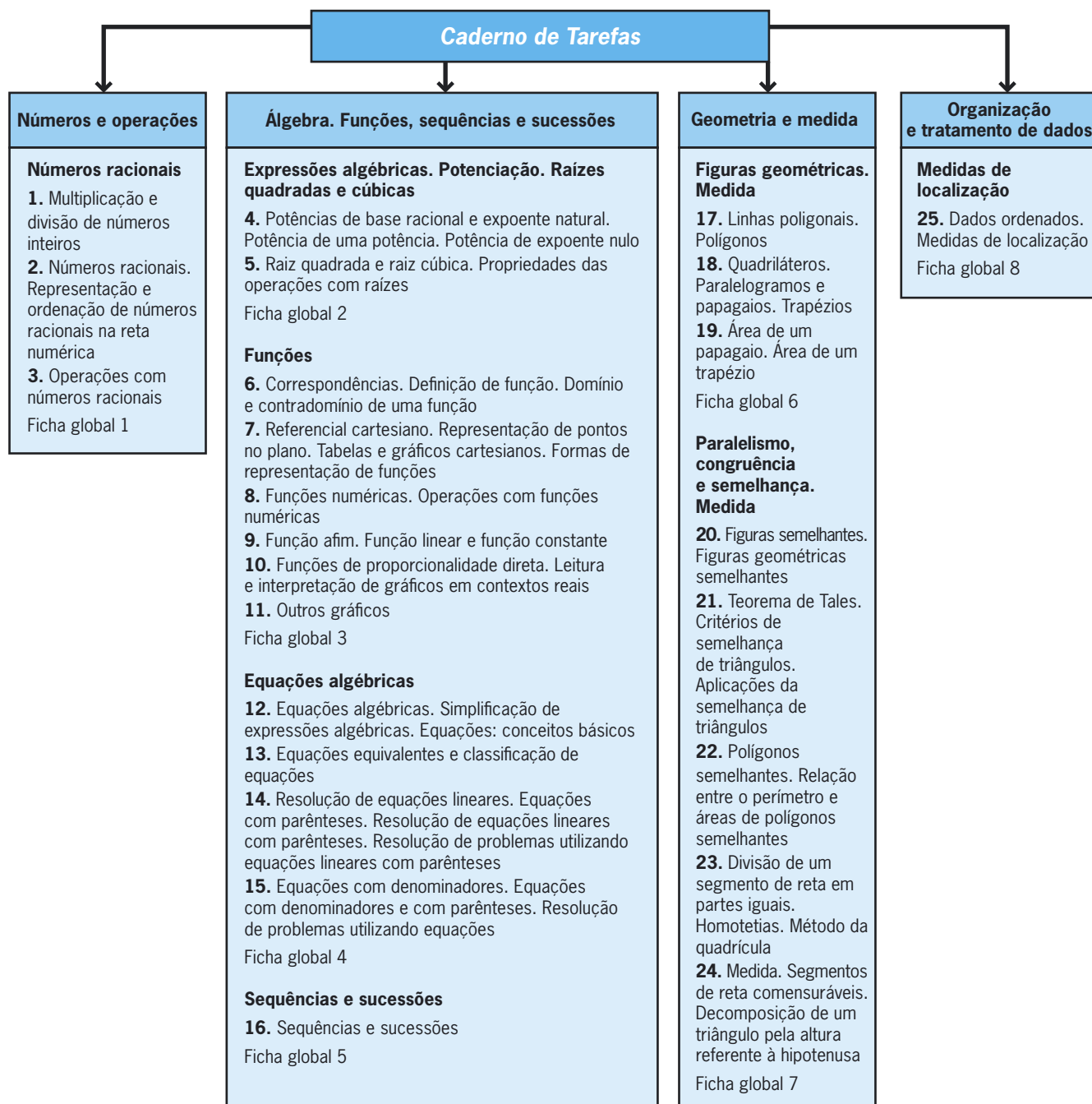
Cada capítulo do *Manual* é desenvolvido da seguinte forma:



- **Recorda:** esta rubrica permite recordar conhecimentos adquiridos no 2.º Ciclo.
- **Recorda, aplicando:** tarefas envolvendo os conteúdos da rubrica «Recorda».
- **Tarefa inicial:** tarefa introdutória que permite fazer a exploração de novos conteúdos.
- Os **conteúdos** são apresentados em dupla página: a uma página de desenvolvimento de conteúdos corresponde uma página de tarefas intermédias; as tarefas intermédias terminam sempre com um exercício RRC – Raciocinar, resolver, comunicar.
- **Síntese:** sistematização dos conceitos mais importantes do capítulo estudado.
- **Tarefas finais:** aqui encontram-se mais tarefas para o aluno consolidar os conhecimentos adquiridos.
- **+RRC:** no final de cada capítulo, encontra-se uma secção pensada para conduzir o aluno a desenvolver as suas capacidades de raciocínio matemático, resolução de problemas e comunicação matemática.
- **Tarefas de investigação:** tarefas que permitem valorizar as atividades experimentais, a criatividade, a interdisciplinaridade e a utilização das tecnologias de informação e comunicação.
- **Teste final:** surge no fim de cada capítulo.

2.2 Caderno de Tarefas

O *Caderno de Tarefas* está estruturado da seguinte forma:

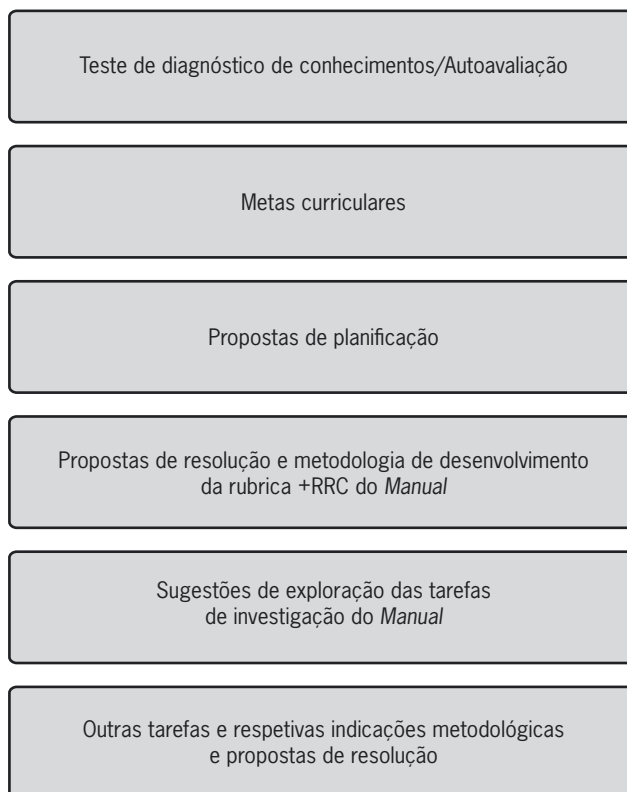


Note-se que:

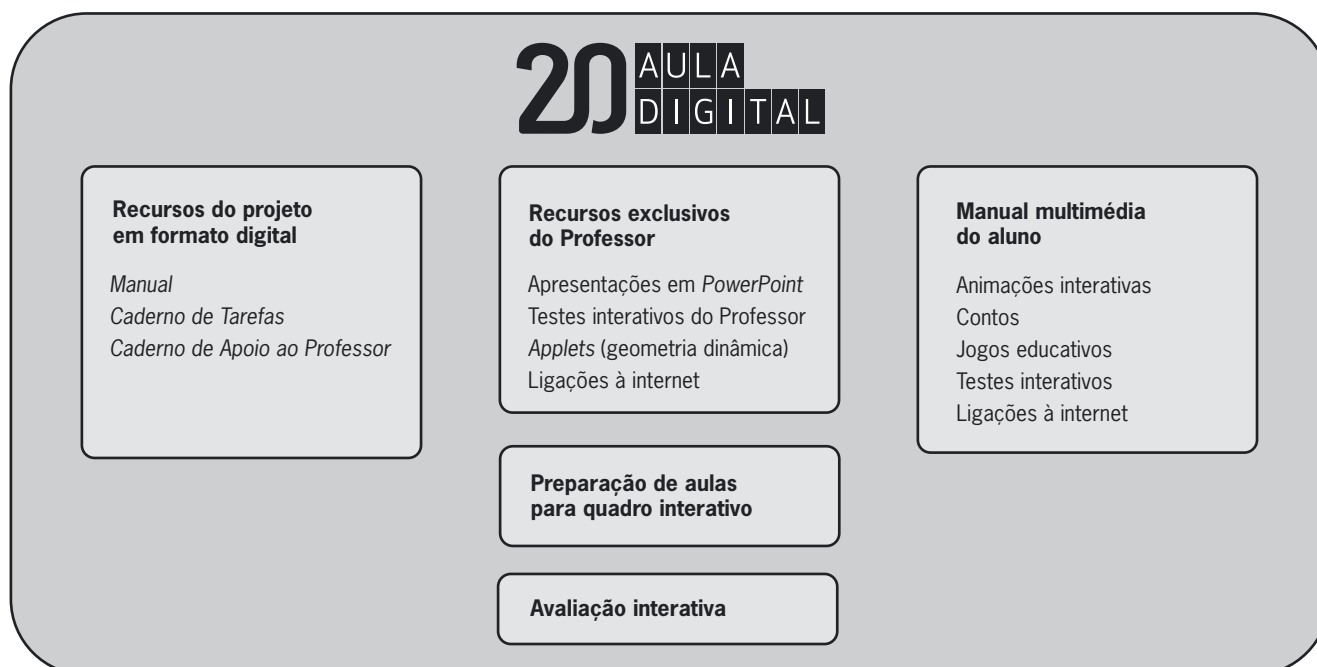
- as fichas contêm uma pequena **síntese** e um **exercício resolvido**, de forma a promover a autonomia;
- todas as páginas têm picotado, de forma a poderem, se assim se entender, ser retiradas, permitindo a sua organização de acordo com a sequência de conteúdos escolhida pelo professor;
- pode ser usado qualquer que seja a sequência de conteúdos seguida pelo professor.

3. Estrutura do *Caderno de Apoio ao Professor*

Para cada capítulo do *Manual*, neste *Caderno de Apoio ao Professor* apresentam-se:



A atividade letiva do professor será ainda apoiada em **20 AULA DIGITAL**.



4. Números racionais

4.1 Teste de diagnóstico de conhecimentos 1

Parte 1

COTAÇÃO

Nos itens que se seguem, só uma das alíneas corresponde à resposta correta. Indica-a.

1. A fração que representa a parte de mulheres existente no grupo é:

5

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{5}{3}$



2. Escrevi uma fração que representa o número 7 e que tem numerador 21. Essa fração é:

5

A. $\frac{7}{21}$

B. $\frac{3}{21}$

C. $\frac{21}{7}$

D. $\frac{21}{3}$

3. Uma fração equivalente a $\frac{4}{5}$ é:

5

A. $\frac{5}{4}$

B. $\frac{12}{20}$

C. $\frac{16}{20}$

D. $\frac{8}{15}$

4. $\frac{1}{2} : \frac{4}{5}$ é igual a:

5

A. $\frac{8}{5}$

B. $\frac{4}{10}$

C. $\frac{4}{7}$

D. $\frac{5}{8}$

5. O inverso de $\frac{2}{3}$ é:

5

A. $-\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $-\frac{3}{2}$

D. 1

6. $\frac{4^2}{2}$ é o mesmo que:

5

A. 2^2

B. $\frac{4}{2 \times 2}$

C. $\frac{4 \times 4}{2}$

D. $\left(\frac{4}{2}\right)^2$

7. $5^3 \times 2^3$ é:

5

A. 7^3

B. 10^6

C. 10^3

D. 7^6

8. A expressão $n + 2 + n - 4$ é equivalente a:

5

A. $6n$

B. $2n + 6$

C. $n - 2$

D. $2n - 2$

Parte 2

COTAÇÃO

1. O André e a Matilde semearam relva no jardim. No final da tarde, a Matilde tinha semeado um quinto do jardim e o André dois quintos do jardim.
Que porção de terreno semeou o André a mais do que a Matilde? 10
2. A Francisca já pintou dois sétimos do cenário da peça de teatro da escola e a Maria três sétimos.
- a. Qual é o significado de $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$? 6
- b. Escreve uma expressão que represente a porção de cenário que ainda lhes falta pintar. 8
3. Completa as seguintes igualdades, indicando em cada caso a(s) propriedade(s) da adição aplicada(s).
- a. $1 + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 1 + \underline{\hspace{2cm}}$ 5
- b. $\frac{7}{11} + \underline{\hspace{2cm}} = 0 + \frac{7}{11} = \frac{7}{11}$ 5
- c. $2 + 0,3 + 8 + 0,7 = \underline{\hspace{2cm}} + 1$ 5
- d. $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$ 5
4. Escreve na forma de uma única potência.
- a. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^5$ 10
- b. $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^8 : \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
5. Completa o seguinte quadro.

	Expressões algébricas	
	$3n + 1$	$n + 3 + n$
$n = 1$		
$n = 2$		
$n = 3$		

6

AUTOAVALIAÇÃO

Pontuação	Os teus conhecimentos são:	Então:
90%-100%	Excelentes	Continua a estudar para manteres ou melhoraes o teu desempenho.
70%-89%	Bons	
50%-69%	Razoáveis	Continua a trabalhar, pois podes melhorar.
20%-49%	Pouco satisfatórios	Tens de estudar muito para melhorar o teu desempenho.
0%-19%	Insatisfatórios	

Soluções do teste de diagnóstico de conhecimentos 1

Parte 1

1. (B)
2. (D)
3. (C)
4. (D)
5. (B)
6. (C)
7. (C)
8. (D)

Parte 2

1. $\frac{1}{5}$

2. a. A porção de cenário pintado pela Francisca e pela Maria.

b. $1 - \left(\frac{2}{7} + \frac{3}{7}\right); \frac{2}{7}$ (ou equivalente)

3. a. $\frac{3}{5}$; propriedade associativa da adição.

b. 0; propriedade do elemento neutro da adição.

c. 10; propriedade comutativa da adição e propriedade associativa da adição.

d. $1 + 1$; propriedade comutativa da adição e propriedade associativa da adição.

4. a. 2^5 b. 3^{10}

5.

	Expressões algébricas	
	$3n + 1$	$n + 3 + n$
$n = 1$	4	5
$n = 2$	7	7
$n = 3$	10	9

4.2 Metas curriculares

Números racionais

1. Multiplicar e dividir números racionais relativos

- *1. Provar, a partir da caracterização algébrica (a soma dos simétricos é nula), que o simétrico da soma de dois números racionais é igual à soma dos simétricos e que o simétrico da diferença é igual à soma do simétrico do aditivo com o subtrativo: $-(q + r) = (-q) + (-r)$ e $-(q - r) = (-q) + r$.
- *2. Estender dos racionais não negativos a todos os racionais a identificação do produto de um número natural n por um número q como a soma de n parcelas iguais a q , representá-lo por $n \times q$ e por $q \times n$, e reconhecer que $n \times (-q) = (-q) \times n = -(n \times q)$.
- *3. Estender dos racionais não negativos a todos os racionais a identificação do quociente entre um número q e um número natural n como o número racional cujo produto por n é igual a q e representá-lo por $q : n$ e por $\frac{q}{n}$ e reconhecer que $\frac{(-q)}{n} = -\frac{q}{n}$.
- *4. Estender dos racionais não negativos a todos os racionais a identificação do produto de um número q por $r = \frac{a}{b}$ (onde a e b são números naturais) como o quociente por b do produto de q por a , representá-lo por $q \times r$ e $r \times q$ e reconhecer que $(-q) \times r = r \times (-q) = -(q \times r)$.
- 5. Estender dos racionais não negativos a todos os racionais a identificação do produto de -1 por um número q como o respetivo simétrico e representá-lo por $(-1) \times q$ e por $q \times (-1)$.
- 6. Identificar, dados dois números racionais positivos q e r , o produto $(-q) \times (-r)$ como $q \times r$, começando por observar que $(-q) \times (-r) = (q \times (-1)) \times (-r)$.
- 7. Saber que o produto de dois quaisquer números racionais é o número racional cujo valor absoluto é igual ao produto dos valores absolutos dos fatores, sendo o sinal positivo se os fatores tiverem o mesmo sinal e negativo no caso contrário, verificando esta propriedade em exemplos concretos.
- 8. Estender dos racionais não negativos a todos os racionais a identificação do quociente entre um número q (o dividendo) e um número não nulo r (o divisor) como o número racional cujo produto pelo divisor é igual ao dividendo e reconhecer que $\frac{-q}{r} = \frac{q}{-r} = -\frac{q}{r}$.
- 9. Saber que o quociente entre um número racional e um número racional não nulo é o número racional cujo valor absoluto é igual ao quociente dos valores absolutos, sendo o sinal positivo se estes números tiverem o mesmo sinal e negativo no caso contrário, verificando esta propriedade em exemplos concretos.

4.3 Proposta de planificação

AULA	TAREFAS PROPOSTAS PARA AS AULAS	TEMPO	RECURSOS
1	Teste de diagnóstico de conhecimentos 1	90'	CAP
2	Tarefa A – Temperaturas • Explicação da tarefa. • Execução individual da tarefa. • Discussão em grupo. Tarefa B – Um piquenique fracionado • Explicação da tarefa. • Execução da tarefa em grupo. • Discussão em grande grupo. Os alunos devem recorrer à rubrica Recorda ou efetuar antecipadamente uma análise da mesma em conjunto com o professor, de forma a prevenir dificuldades durante a execução das tarefas propostas.	5' 25' 15' 5' 25' 15'	Manual
3	Tarefa 1 – Quem ganhou o concurso? • Explicação da tarefa. • Execução da tarefa em grupo. • Discussão em grande grupo. Multiplicação de números inteiros • Tarefas intermédias	5' 25' 15' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
4	Divisão de números inteiros • Tarefas intermédias Números racionais • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
5	Tarefa 2 – Uma escalada ao monte Everest • Explicação da tarefa. • Execução individual da tarefa. • Discussão em grupo. Simétrico da soma e da diferença de números racionais • Tarefas intermédias	5' 25' 15' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
6	Tarefa 3 – Problemas históricos • Explicação da tarefa. • Execução da tarefa em grupo. • Discussão em grande grupo.	15' 25' 15'	Manual

AULA	TAREFAS PROPOSTAS PARA AS AULAS	TEMPO	RECURSOS
7	Multiplicação e divisão de números racionais • Tarefas intermédias	30' 60'	Manual 20 AULA DIGITAL
8	Tarefas Finais Para as Tarefas Finais, o professor pode disponibilizar uma ou duas aulas práticas de forma a que os alunos consolidem as matérias lecionadas.	90' ou 180'	Manual 20 AULA DIGITAL
9	+RRC Sugere-se a formação de grupos de trabalho para a execução desta rubrica. A discussão das resoluções das questões colocadas deve ser efetuada em grande grupo.	90'	Manual
10	Teste Final	90'	Manual 20 AULA DIGITAL
11	Tarefas de investigação • Explicação das tarefas. • Execução das tarefas em grupo. • Discussão em grande grupo. Sugere-se que sejam criados grupos de trabalho e que as diversas tarefas de investigação deste capítulo sejam distribuídas pelos grupos consoante as suas preferências.	10' 60' 20'	Manual 20 AULA DIGITAL
12	Outra tarefa: Áreas e quadriláteros Esta tarefa suplementar que aqui é proposta efetua uma conexão entre as aprendizagens adquiridas ao longo do capítulo e no ciclo anterior, mostrando assim uma aplicação das mesmas em conceitos já adquiridos.	90'	CAP

4.4 Propostas de resolução +RRC

A rubrica «+RRC, Raciocinar, Resolver e Comunicar» surge no desenvolvimento do tema, em momentos de reflexão e análise, e no final das tarefas intermédias, assumindo um espaço próprio no final de cada capítulo.

Neste espaço, sugerimos a execução de uma diversidade de tarefas que estão ligadas ao desenvolvimento de raciocínios e à busca de estratégias eficientes de resolução, para que os alunos desenvolvam algum desembaraço a lidar com problemas matemáticos e que efetuem generalizações a partir de casos particulares ou contraexemplos. É importante que os alunos percebam quando é que um problema tem solução ou não, se existem dados suficientes para a sua resolução e que estratégias podem ser desenvolvidas com vista a atingir este objetivo.

1. A fuga da prisão

Objetivo principal: Desenvolver uma estrutura de raciocínio utilizando os números naturais.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

Nas alíneas a) e b) pretende-se que os alunos organizem os prisioneiros nas celas de forma a que a soma do número de prisioneiros nas duas linhas e duas colunas do quadrado seja sempre 9. Para tal, o professor deve promover uma metodologia de trabalho que recorra a esquemas. Na alínea c) dá-se continuidade a este processo; no entanto, aqui os alunos devem «libertar-se» dos esquemas e efetuar cálculos para determinar o número mínimo de prisioneiros que têm de ficar na prisão para que não se sinta a falta dos prisioneiros em fuga e, sobretudo, se perceba o «segredo» da contagem.

Estratégia de resolução possível:

a.

1.ª fuga

2	5	2
5		5
2	5	2

b.

2.ª fuga

3	3	3
3		3
3	3	3

c.

3.ª fuga

4	1	4
1		1
4	1	4

Ainda se pode planear uma outra fuga, como se propõe a seguir:

4	0	5
1		0
4	1	4

4	0	5
0		0
5	0	4

O mínimo de prisioneiros que devem permanecer na prisão será 18, para que o guarda continue a ser enganado. O «segredo» está no facto de os números dos cantos serem contados duas vezes, motivo pelo qual o guarda é sempre enganado.

2. Três marinheiros, um bando de macacos e um monte de cocos

Objetivo principal: Desenvolver uma estrutura de raciocínio utilizando algumas das operações com números naturais.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

Como o aluno sabe com quantos cocos cada marinheiro ficou no final das divisões, deve, a partir daí, desenvolver uma estratégia que lhe permita saber quantos cocos os três marinheiros apanharam inicialmente.

Estratégia de resolução possível:

O número total de cocos da divisão final é igual à soma do número de cocos de dois dos marinheiros da terceira divisão. Esta relação repete-se pelas restantes divisões:

$$11 + 11 = 7 + 7 + 7 + 1; \quad 17 + 17 = 11 + 11 + 11 + 1; \quad 26 + 26 = 17 + 17 + 17 + 1$$

	Marinheiro 1	Marinheiro 2	Marinheiro 3	Macacos	Total
Divisão final	7	7	7	1	22
Terceira divisão	11	11	11	1	34
Segunda divisão	17	17	17	1	52
Primeira divisão	26	26	26	1	79

3. As mangas da realeza

Objetivo principal: Aplicar a multiplicação de números racionais.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

Sugere-se que a alínea a) seja resolvida em grande grupo com o professor para que este proponha um esquema de raciocínio e cálculo como é sugerido nas propostas de resolução ou outro esquema similar. Assim, o registo de dados será o mais organizado possível.

Estratégia de resolução possível:

- a. Não sabemos o número de mangas existentes na taça. Vamos propor um número e experimentar.

Como o rei começou por comer $\frac{1}{6}$ das mangas, vamos experimentar um número divisível por 6. Por exemplo, o 18 (ver tabela ao lado).

Se o número de mangas fosse 18, sobrariam três mangas. Temos de diminuir o valor inicial.

Número de mangas	Mangas retiradas	
18	$\frac{1}{6} \times 18 = 3$	Rei
$18 - 3 = 15$	$\frac{1}{5} \times 15 = 3$	Rainha
$15 - 3 = 12$	$\frac{1}{4} \times 12 = 3$	1.º príncipe
$12 - 3 = 9$	$\frac{1}{3} \times 9 = 3$	2.º príncipe
$9 - 3 = 6$	$\frac{1}{2} \times 6 = 3$	3.º príncipe
$6 - 3 = 3$		

Por exemplo, suponhamos que o número de mangas inicial era seis.

Sendo seis o número inicial de mangas, sobra um manga para os criados, como pretendíamos.

Número de mangas	Mangas retiradas	
6	$\frac{1}{6} \times 6 = 1$	Rei
$6 - 1 = 5$	$\frac{1}{5} \times 5 = 1$	Rainha
$5 - 1 = 4$	$\frac{1}{4} \times 4 = 1$	1.º príncipe
$4 - 1 = 3$	$\frac{1}{3} \times 3 = 1$	2.º príncipe
$3 - 1 = 2$	$\frac{1}{2} \times 2 = 1$	3.º príncipe
$2 - 1 = 1$		

- b. Para sobrares duas mangas, sabemos que o número inicial não pode ser 18 nem 6. Experimentemos o número 12, também divisível por 6 (ver tabela ao lado).

Se o número inicial de mangas for 12, sobram duas mangas.

Número de mangas	Mangas retiradas	
12	$\frac{1}{6} \times 12 = 2$	Rei
$12 - 2 = 10$	$\frac{1}{5} \times 10 = 2$	Rainha
$10 - 2 = 8$	$\frac{1}{4} \times 8 = 2$	1.º príncipe
$8 - 2 = 6$	$\frac{1}{3} \times 6 = 2$	2.º príncipe
$6 - 2 = 4$	$\frac{1}{2} \times 4 = 2$	3.º príncipe
$4 - 2 = 2$		

c.

Número de mangas no cesto	Número de mangas que sobram
6	1
12	2
18	3
24	4

Tudo indica que, se o número de mangas no cesto for 24, sobrarão 4 mangas.

Vamos testar:

Número de mangas	Mangas retiradas	
24	$\frac{1}{6} \times 24 = 4$	Rei
$24 - 4 = 20$	$\frac{1}{5} \times 20 = 4$	Rainha
$20 - 4 = 16$	$\frac{1}{4} \times 16 = 4$	1.º príncipe
$16 - 4 = 12$	$\frac{1}{3} \times 12 = 4$	2.º príncipe
$12 - 4 = 8$	$\frac{1}{2} \times 8 = 4$	3.º príncipe
$8 - 4 = 4$		

Fica, assim, confirmada a regularidade encontrada.

4.5 Sugestões de exploração das tarefas de investigação

Nas tarefas «Sistema numérico do povo Yoruba» e «Código numérico» pretende-se que o aluno, após ter conhecimento dos conceitos, os articule com outros conceitos matemáticos e não matemáticos presentes no seu dia a dia. Nestas tarefas também se pretende que o aluno veja os diferentes aspetos com que se apresenta a matemática e tenha apreço pelo seu contributo para a cultura e para o desenvolvimento da sociedade contemporânea.

Sistema numérico do povo Yoruba

Proposta de resolução:

1. $45 = 20 \times 2 + 5$

2. Por exemplo, $108 = 20 \times 5 + 10 - 2$ ou $108 = 20 \times 6 - 10 - 2$

Para a resolução da questão 3. é importante que o professor averigüe se a turma percebeu a introdução à questão. Para que valores se devem usar os múltiplos de 20? E de 400? E de 8000? Este raciocínio deve ser feito em conjunto com os alunos, sem, no entanto, requerer que se estipulem padrões rígidos de comportamento dos valores.

3. $1824 = (400 \times 5) - (20 \times 9) + 4$ e $15\,067 = (8000 \times 2) - (400 \times 2) - (7 \times 20) + 7$

4.

$(10 - 1)$	$\times$	1	=	$(10 - 1)$
$(10 - 1)$	$\times$	2	=	$(1 \times 20) - 2$
$(10 - 1)$	$\times$	3	=	$(2 \times 20) - 10 - 3$
$(10 - 1)$	$\times$	4	=	$(2 \times 20) - 4$
$(10 - 1)$	$\times$	5	=	$(3 \times 20) - 10 - 5$
$(10 - 1)$	$\times$	$(10 - 4)$	=	$(3 \times 20) - 5 - 1$
$(10 - 1)$	$\times$	$(10 - 3)$	=	$(4 \times 20) - 10 - 5 - 2$
$(10 - 1)$	$\times$	$(10 - 2)$	=	$(4 \times 20) - 5 - 3$
$(10 - 1)$	$\times$	$(10 - 1)$	=	$(5 \times 20) - 10 - 5 - 4$
$(10 - 1)$	$\times$	10	=	$(5 \times 20) - 5 - 5$

5. Seria importante que os alunos indicassem algumas das muitas regularidades que se podem estabelecer entre números pares, números ímpares e, ainda, no seu conjunto. Esta questão é obviamente de resposta livre e será muito importante tentar estabelecer um clima de comunicação e participação, para que ela possa realmente ser desenvolvida e explorada ao máximo.

6. Entre 11 e 20, os números não mantêm a mesma regularidade; no entanto, pode estabelecer-se entre eles outro tipo de regularidade que seria importante também tentar encontrar na discussão em grande grupo.

Código numérico

Proposta de resolução:

Esta é uma das tarefas em que se recomenda a utilização da calculadora elementar, para que os alunos se familiarizem com a sua utilização. Na realidade, os códigos numéricos constituem uma realidade do dia a dia de um cidadão e com esta tarefa pensamos contribuir para o enriquecimento de uma cultura matemática.

1. Verifica se o ISBN do Caderno de Tarefas Xis7 está correto.

ISBN 978-9-72-47-4783-5

O aluno deve concluir que o ISBN está correto.

2. Determina o dígito de verificação do livro com o ISBN 978-9-72-47-2239-A

R: $A = 9$

3. Supõe que acabaste de editar um livro na Leya e te pedem que completes o seguinte ISBN, com o qual o teu manual será comercializado. Que sugestão darias à editora?

ISBN 978-9-72 – AB-CDEF-G

É uma questão de resposta aberta. O aluno poderá construir um ISBN para uma pretensa publicação e seria interessante a partilha dos vários registos, para que todos vissem se foram ou não bem construídos.

Multiplicação e divisão de números inteiros numa folha de cálculo

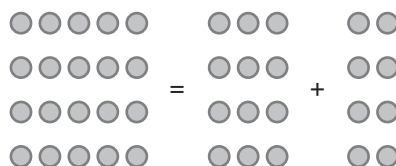
Esta tarefa é de natureza diferente, pois recorre à utilização do computador e *software* específico. Com esta tarefa pretende-se que os alunos vejam a aplicabilidade dos conceitos, façam conjeturas e aprendam a gerir estes recursos, recorrendo a eles para situações semelhantes onde o tempo de construção da tarefa com material de escrita comprometeria o tempo necessário para a sua exploração e reflexão.

4.6 Outra tarefa

Áreas de quadriláteros

Através de um esquema, recorda a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números naturais.

$$4 \times (3 + 2) = 4 \times 3 + 4 \times 2$$



Esta propriedade é válida para todos os números inteiros, por exemplo:

$$5 \times (10 - 4) = 5 \times [10 + (-4)] = 5 \times 10 + 5 \times (-4)$$

isto é,

$$5 \times 6 = 5 \times 10 - 5 \times 4$$

Esta propriedade pode ser usada, por exemplo, para resolver problemas de cálculo de áreas e a relação existente entre essas áreas.

- Utilizando a propriedade distributiva e considerando as medidas das figuras, determina a área do quadrilátero que resulta:

- da composição dos seguintes quadriláteros;



- da decomposição dos quadriláteros que se seguem.

a.



b.



Indicações metodológicas/resolução da tarefa

Natureza da tarefa

A tarefa estabelece a conexão entre os números e operações e os triângulos e quadriláteros.

Pré-requisitos

Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição com números inteiros.

Objetivos

- Usar adequadamente as propriedades dos algoritmos, incluindo a terminologia.
- Estabelecer conexão entre números e geometria e averiguar a sua aplicabilidade na resolução de problemas mais complexos.

Organização da turma

Sugere-se que a tarefa seja desenvolvida individualmente e discutida no final em grande grupo.

Metodologia da aula

A tarefa deve ser acompanhada por uma pequena apresentação oral que pretenderá, por um lado, clarificar a tarefa e, por outro, explicitar o tipo de trabalho que se quer desenvolver, criando um ambiente favorável ao desenvolvimento do trabalho individual dos alunos. É importante realçar a importância deste processo na decomposição ou composição de figuras geométricas.

Proposta de resolução:

1.

$$1.1 \ 5 \times 6 + 5 \times 4 = 5 \times (6 + 4) = 5 \times 10 = 50$$

$$1.2 \text{ a. } 5 \times 10 - 5 \times 4 = 5 \times (10 - 4) = 5 \times 6 = 30$$

$$\text{b. } 5 \times 10 - 5 \times 6 = 5 \times (10 - 6) = 5 \times 4 = 20$$

5. Expressões algébricas. Potenciação. Raízes quadradas e cúbicas

5.1 Metas curriculares

Expressões algébricas

1. Estender a potenciação e conhecer as propriedades das operações

1. Estender dos racionais não negativos a todos os racionais as propriedades associativa e comutativa da adição e da multiplicação e as propriedades distributivas da multiplicação relativamente à adição e à subtração.
2. Estender dos racionais não negativos a todos os racionais, a identificação do 0 e do 1 como os elementos neutros respetivamente da adição e da multiplicação de números, do 0 como elemento absorvente da multiplicação e de dois números como «inversos» um do outro quando o respetivo produto for igual a 1.
3. Estender dos racionais não negativos a todos os racionais o reconhecimento de que o inverso de um dado número não nulo q é igual a $\frac{1}{q}$, o inverso do produto é igual ao produto dos inversos, o inverso do quociente é igual ao quociente dos inversos e de que, dados números q, r, s e t , $\frac{q}{r} \times \frac{s}{t} = \frac{q \times s}{r \times t}$ (r e t não nulos) e $\frac{\frac{q}{r}}{\frac{s}{t}} = \frac{q \times t}{r \times s}$ (r, s e t não nulos).
4. Estender dos racionais não negativos a todos os racionais a definição e as propriedades previamente estudadas das potências de expoente natural de um número.
- *5. Reconhecer, dado um número racional q e um número natural n , que $(-q)^n = q^n$ se n for par e $(-q)^n = -q^n$ se n for ímpar.
6. Reconhecer, dado um número racional não nulo q e um número natural n , que a potência q^n é positiva quando n é par e tem o sinal de q quando n é ímpar.
7. Simplificar e calcular o valor de expressões numéricas envolvendo as quatro operações aritméticas, a potenciação e a utilização de parênteses.

Raízes quadradas e cúbicas

2. Operar com raízes quadradas e cúbicas racionais

1. Saber, dados dois números racionais positivos q e r com $q < r$, que $q^2 < r^2$, verificando esta propriedade em exemplos concretos, considerando dois quadrados de lados com medida de comprimento respetivamente iguais a q e r em determinada unidade, o segundo obtido do primeiro por prolongamento dos respetivos lados.

2. Saber, dados dois números racionais positivos q e r com $q < r$, que $q^3 < r^3$, verificando esta propriedade em exemplos concretos, considerando dois cubos de arestas com medida de comprimento respetivamente iguais a q e r em determinada unidade, o segundo obtido do primeiro por prolongamento das respetivas arestas.
3. Designar por «quadrados perfeitos» (respetivamente «cubos perfeitos») os quadrados (respetivamente cubos) dos números inteiros não negativos e construir tabelas de quadrados e cubos perfeitos.
- *4. Reconhecer, dado um quadrado perfeito não nulo ou, mais geralmente, um número racional q igual ao quociente de dois quadrados perfeitos não nulos, que existem exatamente dois números racionais, simétricos um do outro, cujo quadrado é igual a q , designar o que é positivo por «raiz quadrada de q » e representá-lo por $\sqrt{q}$.
5. Reconhecer que 0 é o único número racional cujo quadrado é igual a 0, designá-lo por «raiz quadrada de 0» e representá-lo por $\sqrt{0}$.
6. Provar, utilizando a definição de raiz quadrada, que para quaisquer q e r respetivamente iguais a quocientes de quadrados perfeitos, que também o são $q \times r$ e (para $r \neq 0$) $\frac{q}{r}$, e que $\sqrt{q \times r} = \sqrt{q} \times \sqrt{r}$ e (para $r \neq 0$) $\sqrt{\frac{q}{r}} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}$.
7. Reconhecer, dado um cubo perfeito ou, mais geralmente, um número racional q igual ao quociente de dois cubos perfeitos ou ao respetivo simétrico, que existe um único número racional cujo cubo é igual a q , designá-lo por «raiz cúbica de q » e representá-lo por $\sqrt[3]{q}$.
8. Provar, utilizando a definição de raiz cúbica, que para quaisquer q e r respetivamente iguais a quocientes ou a simétricos de quocientes de cubos perfeitos não nulos, que também o são $q \times r$ e (para $r \neq 0$) $\frac{q}{r}$, que $\sqrt[3]{-q} = -\sqrt[3]{q}$, $\sqrt[3]{q \times r} = \sqrt[3]{q} \times \sqrt[3]{r}$ e (para $r \neq 0$) $\sqrt[3]{\frac{q}{r}} = \frac{\sqrt[3]{q}}{\sqrt[3]{r}}$.
9. Determinar, na forma fracionária ou como dízimas, raízes quadradas (respetivamente cúbicas) de números racionais que possam ser representados como quocientes de quadrados perfeitos (respetivamente quocientes ou simétrico de quocientes de cubos perfeitos) por inspeção de tabelas de quadrados (respetivamente cubos) perfeitos.
10. Reconhecer, dado um número racional representado como dízima e tal que deslocando a vírgula duas (respetivamente três) casas decimais para a direita obtemos um quadrado (respetivamente cubo) perfeito, que é possível representá-lo como fração decimal cujos termos são quadrados (respetivamente cubos) perfeitos e determinar a representação decimal da respetiva raiz quadrada (respetivamente cúbica).
11. Determinar as representações decimais de raízes quadradas (respetivamente cúbicas) de números racionais representados na forma de dízimas, obtidas por deslocamento da vírgula para a esquerda um número par de casas decimais (respetivamente um número de casas decimais que seja múltiplo de três) em representações decimais de números retirados da coluna de resultados de tabelas de quadrados (respetivamente cubos) perfeitos.

5.2 Proposta de planificação

AULA	TAREFAS PROPOSTAS PARA AS AULAS	TEMPO	RECURSOS
1	Tarefa A – Potências • Explicação da tarefa. • Execução individual da tarefa. • Discussão em grupo. Tarefa B – Operações com potências • Explicação da tarefa. • Execução individual da tarefa. • Discussão em grupo. Os alunos devem recorrer à rubrica Recorda ou efetuar antecipadamente uma análise da mesma em conjunto com o professor, de forma a prevenir dificuldades durante a execução das tarefas propostas.	5' 25' 15' 5' 25' 15'	Manual
2	Tarefa 1 • Explicação da tarefa. • Execução da tarefa em grupo. • Discussão em grande grupo. Potências de base racional e expoente natural • Tarefas intermédias	5' 25' 15' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
3	Potência de uma potência e potência de expoente nulo • Tarefas intermédias Raiz quadrada • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
4	Quadrados perfeitos • Tarefas intermédias Raiz cúbica e cubos perfeitos • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
5	Propriedades das operações com raízes quadradas • Tarefas intermédias Propriedades das operações com raízes cúbicas • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual
6	Tarefas Finais Para as Tarefas Finais, o professor pode disponibilizar uma ou duas aulas práticas de forma a que os alunos consolidem as matérias lecionadas.	90' ou 180'	Manual 20 AULA DIGITAL

AULA	TAREFAS PROPOSTAS PARA AS AULAS	TEMPO	RECURSOS
7	+RRC Sugere-se a formação de grupos de trabalho para a execução desta rubrica. A discussão das resoluções das questões colocadas deve ser efetuada em grande grupo.	90'	Manual
8	Teste Final	90'	Manual 20 AULA DIGITAL
9	Tarefas de investigação • Explicação das tarefas. • Execução das tarefas em grupo. • Discussão em grande grupo. Sugere-se que sejam criados grupos de trabalho e que as diversas tarefas de investigação deste capítulo sejam distribuídas pelos grupos consoante as suas preferências.	10' 60' 20'	Manual
10	Outra tarefa: Potências e regularidades Esta tarefa suplementar que aqui é proposta efetua uma conexão entre algumas aprendizagens adquiridas ao longo do capítulo e no ciclo anterior.	90'	CAP

5.3 Propostas de resolução +RRC

1. Pulgas e mais pulgas...

Objetivo principal: Aplicar as potências de expoente natural na resolução de um problema de contagem.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho: Os alunos devem efetuar uma primeira leitura para se inteirarem do assunto do problema e adaptarem uma estratégia possível de resolução. Em seguida, devem fazer uma segunda leitura para que apliquem essa estratégia. Obviamente, após a discussão das várias produções dos alunos, o professor deve apontar as potências como possível estratégia de resolução, no caso de esta não ter surgido como proposta dos alunos.

Estratégia de resolução possível:

O que se pede é a soma das pulgas, isto é, $2 + 4 + 8 + 16 = 30$ e eu.

2. Quadrados

Objetivo principal: Recorrer às regularidades para encontrar quadrados perfeitos.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho: Sugere-se que a alínea a) seja efetuada em grande grupo com a orientação do professor. Para chegar à expressão $144 - n^2$, sugere-se que seja primeiramente efetuada uma tabela, para valores $n = 1, 2$ e 3 , e que depois, em conjunto, se chegue à generalização. As restantes alíneas devem ser efetuadas individualmente pelos alunos e corrigidas em grande grupo.

Estratégia de resolução possível:

a. $144 - 4 = 140$; 140 não é um quadrado perfeito. $144 - 16 = 128$; 128 não é um quadrado perfeito.

$144 - 36 = 108$; 108 não é um quadrado perfeito. (...)

$144 - 4n^2$ nunca é quadrado perfeito, pelo que se conclui que não é possível construir um quadrado nestas condições.

b. $144 - 121 = 23$; $121 - 100 = 21$. Tem de se subtrair um número ímpar de quadrículas imediatamente inferior ao número ímpar que se subtraiu anteriormente.

c. De 11 para 12 adicionam-se 23 quadrículas e, por isso, de 12 para 13 adicionam-se 25 quadrículas.

3. Os guardanapos da Matilde

Objetivo principal: Recorrer aos padrões para o enquadramento de valores entre raízes quadradas.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho: Após a leitura em grupo do problema, cada aluno deve organizar a sua resposta utilizando esquemas e cálculos, que depois serão discutidos em grande grupo.

Estratégia de resolução possível:

Situação 1	6	Situação 2	31	Situação 3	30	Situação 4	60
------------	---	------------	----	------------	----	------------	----

Sendo assim, só na situação 4 é que o número de molas necessárias é um número compreendido entre $\sqrt{3481}$ e $\sqrt{3721}$, respetivamente 59 e 61.

5.4 Sugestões de exploração das tarefas de investigação

As tarefas de investigação propostas são de naturezas diferentes. Na tarefa «Soma de ímpares» é proposta uma atividade com vista a desenvolver no aluno o conhecimento e a cultura matemática. Nesta atividade mostra-se também que a Matemática tem um carisma dinâmico, onde as estratégias de resolução não são únicas. A tarefa «Potências das potências» é de natureza investigativa, mas está associada a aspetos lúdicos. Pretende desenvolver o raciocínio dedutivo, dando grande importância ao cálculo mental. Por esta razão, estas duas tarefas devem ser desenvolvidas na sala de aula, promovendo a discussão de resultados em grupo.

Soma de ímpares

Proposta de resolução:

- O aluno, depois de analisar os exemplos dados, deve evidenciar uma estratégia de resolução da questão. Por exemplo, pode contabilizar o número de quadrículas existentes na última figura (36) ou o número de quadrículas de um dos lados do último quadrado (6) e calcular a sua área (6×6). Pode também fazer $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$, se for sensível ao exemplo apresentado.
- Nesta alínea já se apela diretamente à lei de formação: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$.
- Mudando o exemplo, mas recorrendo a raciocínios análogos, pretende-se que o aluno responda que mantendo a lei de formação terá $13 + 15 + 17 + 19 = 64$.

Potências das potências

Proposta de resolução:

Nível 1

A bola que contém o menor número é a que contém o número 10^4 , ou seja, a última bola.

Pista 1: expoente da 3.^a bola + 5 = 7

Logo:

Expoente da 3.^a bola = 2

Pista 2: $2 + 1 = 3$

Expoente da 2.^a bola = 3

Bolas: 10^5 10^3 10^2 10^4

Nível 2

Pista 1: $10^8 : (10^2)^3 = 10^8 : 10^6 = 10^{8-6} = 10^2$

Primeira bola: 10^2

Pista 2: $\frac{1}{2} \times 2 = 1$

Última bola: 10^1

Bolas: 10^2 10^8 $(10^2)^3$ 10

Nível 3

Expoente da 1.^a bola = x

Expoente da 2.^a bola = x

Expoente da 3.^a bola = 4

$x + x + 4 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

Logo, os expoentes da 1.^a e 2.^a bolas são iguais a 2.

Expoente da 4.^a bola = $(10^2)^2 = 10^4$

Bolas: 10^2 10^2 10^4 10^4

5.5 Outra tarefa

Potências e regularidades

1. O número 729 pode ser escrito como uma potência de base 3. Para o verificar, basta escrever as sucessivas potências de base 3:

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

$$3^4 = 81$$

$$3^5 = 243$$

$$3^6 = 729$$

- 1.1 Sempre que possível, escreve os números que se seguem como uma potência de base 2.

a. 32

c. 128

e. 256

g. 1000

b. 64

d. 200

f. 512

h. 1024

- 1.2 Que conjeturas podes fazer acerca dos números que podem ser escritos como potências de base 2? E como potências de base 3?

- 1.3 O número 212 pode ser escrito como uma potência de base 2? E o número 4096? O que recomendarias a alguém que procurasse um critério para averiguar se um número pode ou não escrever-se como potência de base 2?

2. Observa as potências de base 5 que se seguem.

$$5^1 = 5$$

$$5^2 = 25$$

$$5^3 = 125$$

$$5^4 = 625$$

- a. O último algarismo de cada uma destas potências é sempre 5. Será que isso também se verifica para as potências de base 5 seguintes?
- b. Investiga o que se passa com as potências de base 6.
- c. Investiga também as potências de base 7 e as de base 9.
- d. Define um critério para averiguar se um número se pode escrever como uma potência de base 10 e, nesse caso, qual o valor do seu expoente, sem recorrer a cálculos ou à calculadora.

Indicações metodológicas/resolução da tarefa

Natureza da tarefa

Esta tarefa faz a conexão entre os números e operações e a álgebra.

Pré-requisitos

Regularidades, potências de expoente natural.

Objetivos

- Formular e investigar conjecturas matemáticas.
- Reconhecer regularidades e compreender relações.

Organização da turma

Sugere-se que a tarefa seja desenvolvida em pequeno grupo e discutida no final em grande grupo.

Metodologia da aula

Pode ser feita uma leitura acompanhada por alguns comentários do professor. Aconselha-se que no final da leitura o professor explique o significado de conjectura, de uma forma simples e concisa.

No caso de os alunos não conseguirem efetuar conjecturas com os valores que são fornecidos, o professor deve sugerir outros valores.

Proposta de resolução:

1.

1.1 a. 2^5 b. 2^6 c. 2^7 d. Não é possível. e. 2^8 f. 2^9 g. Não é possível. h. 2^{10}

1.2 As potências de base 2 terminam em 2, 4, 6 ou 8. As potências de base 3 terminam em 1, 3, 7 e 9.

1.3 Não, pois não existe nenhuma potência de base 2 e expoente natural que seja igual a 212, dado que $2^7 = 128$ e $2^8 = 256$. $2^{12} = 4096$. Apesar de as potências de base 2 terminarem em 2, 4, 6 ou 8, nem todos os números que tenham esta terminação se podem escrever como potências de base 2, motivo pelo qual todos devem ser analisados individualmente.

2. a. Sim, todas terminam em 5.

b. As potências de base 6 terminam sempre em 6.

c. As potências de base 7 terminam em 3, 7 ou 9. As potências de base 9 terminam em 1 ou 9.

d. Os números que se podem escrever como potências de base 10 são 10, 100, 1000, ... , sendo que o número de zeros é igual ao expoente da potência: $10^1 = 10$; $100 = 10^2$, ...

6. Funções

6.1 Teste de diagnóstico de conhecimentos 2

Parte 1

COTAÇÃO

Nos itens que se seguem, só uma das alíneas corresponde à resposta correta. Indica-a.

1. O valor de x na proporção $\frac{15}{5} = \frac{x}{2}$ é: 5

A. 7

C. 5

B. 6

D. 4

2. A escala de um mapa é 1: 20 000. Uma estrada com 1 km é representada no mapa com um comprimento de: 5

A. 2 cm

B. 10 cm

C. 5 cm

D. 20 cm

3. Quando se diz que 53 % de uma piza é massa, isto significa que: 5

A. em cada 100 g de piza, 53 g são de massa.

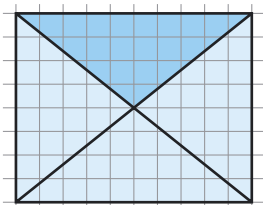
B. em cada 53 g de piza, 100 g são de massa.

C. a piza pesa 53 g.

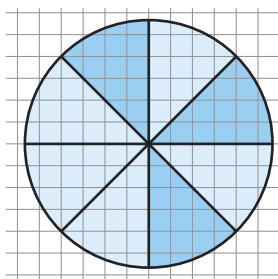
D. em cada 1000 g de piza, 53 g são de massa.

4. Qual é a figura cuja parte colorida a azul-escuro corresponde a 25 % do total? 5

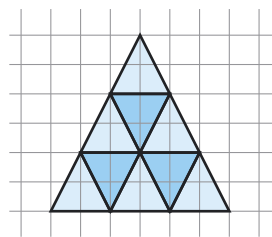
A.



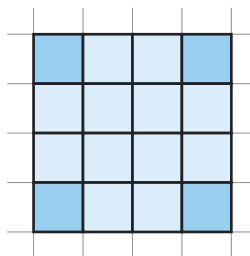
C.



B.



D.



5. O Manuel poupou 2 € na compra de um livro, pois fizeram-lhe um desconto de 16%. Qual era o preço do livro? 5

A. 8 €

B. 30 €

C. 18 €

D. 12,50 €

Parte 2

COTAÇÃO

1. O terreno onde está instalado o circo é retangular.
À escala de 1: 6000 , a planta do terreno tem 5 cm de comprimento e 2 cm de largura.
 - 1.1 Quais as dimensões, em metros, do terreno onde está instalado o circo? 7
 - 1.2 A tenda do circo ocupa uma área de 2880 m². Que percentagem do terreno corresponde à área ocupada pela tenda? 10
 - 1.3 O recinto onde se encontram os animais ocupa uma área de 2% da área do terreno. Qual é, em metros quadrados, a sua área? 8

2. Num grupo de 3000 pessoas, 32% são do grupo sanguíneo A e 15% do grupo sanguíneo B. 10
Determina o número de pessoas deste grupo que não são do grupo sanguíneo A nem do grupo sanguíneo B.

3. Num mapa, 2,5 cm correspondem a 30 km.
 - 3.1 Qual é a escala do mapa? 5
 - 3.2 Qual é a distância real correspondente a 7,5 cm no mapa? 7
 - 3.3 Para representar 36 km no mapa, qual seria o comprimento necessário? 8

4. Uma lojista, aquando da venda de uma peça de roupa a uma cliente, que custava 50 €, disse-lhe que faria um desconto de 10%. Desta forma, a cliente pagaria 45 € pela peça.
A cliente reclamou, afirmando que tinha visto a mesma peça, com o mesmo preço inicial, numa outra loja, com um desconto de 15%.
Perante isto, a lojista afirmou que retiraria 5% aos 45€ para que a cliente levasse a peça, ao que esta acedeu.
Indica, justificando, qual das seguintes afirmações é correta.
 - (A) A cliente não ficou prejudicada, uma vez que o preço da peça nesta loja ficou igual ao da outra loja onde lhe fariam um desconto de 15%. 10
 - (B) A cliente ficou prejudicada, uma vez que a peça de roupa ficaria mais barata na loja onde lhe fariam um desconto de 15%. 10

AUTOAVALIAÇÃO

Pontuação	Os teus conhecimentos são:	Então:
90%-100%	Excelentes	Continua a estudar para manteres ou melhoraes o teu desempenho.
70%-89%	Bons	
50%-69%	Razoáveis	Continua a trabalhar, pois podes melhorar.
20%-49%	Pouco satisfatórios	Tens de estudar muito para melhorar o teu desempenho.
0%-19%	Insatisfatórios	

Soluções do teste de diagnóstico de conhecimentos 2

Parte 1

1. (B)
2. (C)
3. (A)
4. (D)
5. (D)

Parte 2

1.

1.1 300 m de comprimento e 120 m de largura.

1.2 8%

1.3 720 m²

2. 1590 pessoas.

3.

3.1 $\frac{1}{1\,200\,000}$

3.2 90 km

3.3 3 cm

4. 15% de 50 € = 7,5 € ; 50 € – 7,5 € = 42,50 €

10% de 50 € = 5 € ; 50 € – 5 € = 45 € ; 5% de 45 € = 2,25 € ; 45 – 2,25 = 42,75 €

A afirmação verdadeira é a (B).

6.2 Metas curriculares

Funções

1. Definir funções

1. Saber, dados os conjuntos A e B , que fica definida uma «função f (ou aplicação) de A em B », quando a cada elemento x de A se associa um elemento único de B representado por $f(x)$ e utilizar corretamente os termos «objeto», «imagem», «domínio», «conjunto de chegada» e «variável».
2. Designar uma função f de A em B por « $f: A \rightarrow B$ » ou por « f » quando esta notação simplificada não for ambígua.
3. Saber que duas funções f e g são iguais ($f = g$) quando (e apenas quando) têm o mesmo domínio e o mesmo conjunto de chegada e cada elemento do domínio tem a mesma imagem por f e g .
4. Designar, dada uma função $f: A \rightarrow B$, por «contradomínio de f » o conjunto das imagens por f dos elementos de A e representá-lo por CD_f , D'_f ou $f(A)$.
5. Representar por « (a, b) » o «par ordenado» de «primeiro elemento» a e «segundo elemento» b .
6. Saber que pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais quando (e apenas quando) $a = c$ e $b = d$.
7. Identificar o gráfico de uma função $f: A \rightarrow B$ como o conjunto dos pares ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y = f(x)$ e designar neste contexto x por «variável independente» e y por «variável dependente».
8. Designar uma dada função $f: A \rightarrow B$ por «função numérica» (respetivamente «função de variável numérica») quando B (respetivamente A) é um conjunto de números.
9. Identificar, fixado um referencial cartesiano num plano, o «gráfico cartesiano» de uma dada função numérica f de variável numérica como o conjunto G constituído pelos pontos P do plano cuja ordenada é a imagem por f da abscissa e designar o gráfico cartesiano por «gráfico de f » quando esta identificação não for ambígua e a expressão « $y = f(x)$ » por «equação de G ».
10. Identificar e representar funções com domínios e conjuntos de chegada finitos em diagramas de setas, tabelas e gráficos cartesianos e em contextos variados.

2. Operar com funções

1. Identificar a soma de funções numéricas com um dado domínio A e conjunto de chegada $\mathbb{Q}$ como a função de mesmo domínio e conjunto de chegada tal que a imagem de cada $x \in A$ é a soma das imagens e proceder de forma análoga para subtrair, multiplicar e elevar funções a um expoente natural.
- *2. Efetuar operações com funções de domínio finito definidas por tabelas, diagramas de setas ou gráficos cartesianos.
3. Designar, dado um número racional b , por «função constante igual a b » a função $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que $f(x) = b$ para cada $x \in \mathbb{Q}$ e designar as funções com esta propriedade por «funções constantes» ou apenas «constantes» quando esta designação não for ambígua.

4. Designar por «função linear» uma função $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ para a qual existe um número racional a tal que $f(x) = ax$, para todo o $x \in \mathbb{Q}$, designando esta expressão por «forma canónica» da função linear e a por «coeficiente de f ».
5. Identificar uma função afim como a soma de uma função linear com uma constante e designar por «forma canónica» da função afim a expressão « $ax + b$ », onde a é o coeficiente da função linear e b o valor da constante, e designar a por «coeficiente de x » e b por «termo independente».
- *6. Provar que o produto por constante, a soma e a diferença de funções lineares são funções lineares de coeficientes respetivamente iguais ao produto pela constante, à soma e à diferença dos coeficientes das funções dadas.
- *7. Demonstrar que o produto por constante, a soma e a diferença de funções afins são funções afins de coeficientes da variável e termos independentes respetivamente iguais ao produto pela constante, à soma e à diferença dos coeficientes e dos termos independentes das funções dadas.
8. Identificar funções lineares e afins reduzindo as expressões dadas para essas funções à forma canónica.

3. Definir funções de proporcionalidade direta

- *1. Reconhecer, dada uma grandeza diretamente proporcional a outra, que, fixadas unidades, a «função de proporcionalidade direta f » que associa à medida m da segunda a correspondente medida $y = f(m)$ da primeira satisfaz, para todo o número positivo x , $f(xm) = xf(m)$ (ao multiplicar a medida m da segunda por um dado número positivo, a medida $y = f(m)$ da primeira fica também multiplicada por esse número) e, considerando $m = 1$, que f é uma função linear de coeficiente $a = f(1)$.
2. Reconhecer, dada uma grandeza diretamente proporcional a outra, que a constante de proporcionalidade é igual ao coeficiente da respetiva função de proporcionalidade direta.
3. Reconhecer que uma função f é de proporcionalidade direta quando (e apenas quando) é constante o quociente entre $f(x)$ e x , para qualquer x não nulo pertencente ao domínio de f .

4. Resolver problemas

1. Resolver problemas envolvendo funções de proporcionalidade direta em diversos contextos.

6.3 Proposta de planificação

AULA	TAREFAS PROPOSTAS PARA AS AULAS	TEMPO	RECURSOS
1	Teste de diagnóstico de conhecimentos 2	90'	CAP
2	Tarefa A – Queijos frescos • Explicação da tarefa. • Execução a pares/individual da tarefa. • Discussão em grupo. Tarefa B – O tesouro escondido • Explicação da tarefa. • Execução em grupo da tarefa. • Discussão em grupo. Os alunos devem recorrer à rubrica Recorda ou efetuar antecipadamente uma análise da mesma em conjunto com o professor, de forma a prevenir dificuldades durante a execução das tarefas propostas.	5' 25' 15' 5' 25' 15'	Manual
3	Tarefa 1 – Uma turma irrequieta • Explicação da tarefa. • Execução da tarefa em grupo. • Discussão em grande grupo. Correspondências. Definição de função • Tarefas intermédias	5' 25' 15' 15' 30'	Manual
4	Domínio e contradomínio de uma função • Tarefas intermédias Referencial cartesiano. Representação de pontos no plano • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
5	Tabelas e gráficos cartesianos • Tarefas intermédias Formas de representação de funções • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
6	Funções numéricas • Tarefas intermédias Operações com funções numéricas • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
7	Tarefa 2 – Encomenda de lenha • Explicação da tarefa. • Execução individual da tarefa. • Discussão em grupo. Tarefa 3 – Pintura da habitação • Explicação da tarefa. • Execução individual da tarefa. • Discussão em grupo.	5' 25' 15' 5' 25' 15'	Manual

AULA	TAREFAS PROPOSTAS PARA AS AULAS	TEMPO	RECURSOS
8	Função afim • Tarefas intermédias Função afim linear e função afim constante • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
9	Tarefa 4 – Produção de ovos • Explicação da tarefa. • Execução individual da tarefa. • Discussão em grupo.	15' 60' 15'	Manual
10	Funções de proporcionalidade direta • Tarefas intermédias Leitura e interpretação de gráficos em contextos reais • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
11	Outros gráficos • Tarefas intermédias Exercícios da remissão de fim de página	15' 30' 45'	Manual
12	Tarefas Finais Para as Tarefas Finais, o professor pode disponibilizar uma ou duas aulas práticas de forma a que os alunos consolidem as matérias lecionadas.	90' ou 180'	Manual 20 AULA DIGITAL
13	+RRC Sugere-se a formação de grupos de trabalho para a execução desta rubrica. A discussão das resoluções das questões colocadas deve ser efetuada em grande grupo.	90'	Manual
14	Teste Final	90'	Manual 20 AULA DIGITAL
15	Tarefa de investigação • Explicação da tarefa. • Execução da tarefa em grupo. • Discussão em grande grupo. Sugere-se que sejam criados grupos de trabalho para a execução desta tarefa.	10' 60' 20'	Manual
16	Outras tarefas: Será que a gasolina chega? Referenciais cartesianos, quadriláteros e sequências Máquina de letras e números Estas tarefas suplementares que aqui são propostas efetuam uma conexão entre algumas aprendizagens adquiridas ao longo do capítulo e no ciclo anterior.	90'	CAP

6.4 Propostas de resolução +RRC

Tarefas 1 a 5

Objetivos principais: Análise de situações e adequação de gráficos.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

Para cada uma das tarefas, é essencial que o aluno perceba a situação que lhe é colocada. Para tal, o professor deve ajudar na interpretação da mesma, esclarecendo eventuais dúvidas.

Estratégia de resolução possível:

Em «**O farol**», por análise da sequência de traços do gráfico, o aluno deve chegar à conclusão de que a sequência se repete ao fim de 5 segundos.

A situação correta é a (C).

Em «**O baloiço**», a escolha do gráfico correto deve ser feita começando por rejeitar o gráfico que descreve uma situação impossível, no caso, o gráfico (B). Os gráficos seguintes devem ser eliminados, sugerindo em que situações seriam adaptáveis.

O gráfico que traduz a situação descrita é o gráfico (A).

Em «**O reservatório de água**», o aluno tem de ter em consideração a forma do reservatório, o que lhe permitirá eliminar de imediato (A), (C) e (E). O facto de a forma do reservatório ser um cone encimado por um cilindro pressupõe que o seu enchimento será mais rápido inicialmente, para depois ser mais lento, devendo escolher-se, assim, a opção (B).

O item «**As marés**» tem dificuldade variável, pois pressupõe que os alunos tenham alguma familiaridade com o assunto em questão. No caso de não a terem, pode ser difícil resolver esta questão sem que haja antes uma explicação por parte do professor.

A situação correta é a (A).

No caso de «**O burro e a árvore**», não é visível, de imediato, a descrição da situação no gráfico. A escolha do gráfico deve ser feita atendendo ao facto de que só o gráfico (A) pode representar a distância do burro à árvore, pois não existem distâncias negativas e estas aparecem representadas nos gráficos (B), (C) e (D).

6. Tarifários

Objetivos principais: Interpretação, análise e comparação de gráficos, adequados a uma situação específica. Adequação de valores.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

Sugere-se que o professor faça uma leitura prévia desta tarefa, acrescida do significado de tarifário, se este assunto não for do conhecimento dos alunos.

Estratégia de resolução possível:

6.1 Analisando os gráficos, é observável que o tarifário *Mais segundos* tem um custo de chamada superior ao tarifário praticado por *Fale mais*, no caso de o seu utilizador falar durante pouco segundos. No caso de falar muito, já seria mais vantajoso a utilização do tarifário praticado por *Fale mais*, por razões económicas. A escolha de um tarifário está, pois, dependente da duração de chamada mais frequente.

6.2 a. Independentemente dos valores utilizados, parece ser possível ver que a diferença de preço de uma chamada com a duração de 30 segundos nestes dois tarifários é de 2 cêntimos.

b. De acordo com o que foi dito na alínea 6.1, podemos observar que no caso do se falar mais de 24 segundos, aproximadamente, já seria mais vantajosa a utilização do tarifário *Fale Mais*.

7. Na terra dos cangurus

Objetivo principal: Associação e adequação de representações.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho:

É essencial que o aluno perceba a situação em causa para que possa dar uma resposta com sucesso, daí que a ajuda do professor na sua interpretação seja recomendada.

Estratégia de resolução possível:

O aluno deve associar as curvas de nível (pontos da montanha com a mesma altitude) às regularidades ou irregularidades da forma da montanha.

Neste caso, a opção correta é a (C).

8. Apostas no totobola

Objetivo principal: Aplicação das funções em situações reais.

Organização da turma: Grupos de pares.

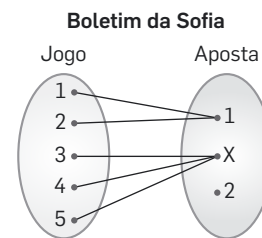
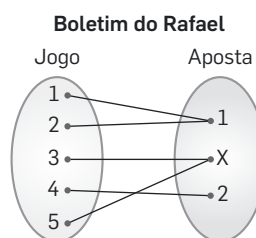
Metodologia de trabalho:

Esta tarefa cativa facilmente o interesse dos alunos, mas, no entanto, promove o relato de acontecimentos conhecidos por parte dos alunos, desviando-os da tarefa em causa. Daí que se recomende uma atenção especial do professor para que isso não aconteça.

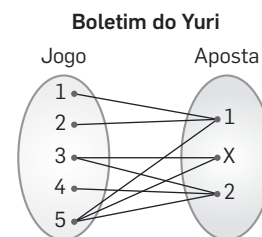
Estratégia de resolução possível:

Nestas duas correspondências ao lado, todos os elementos do primeiro conjunto estão envolvidos na correspondência.

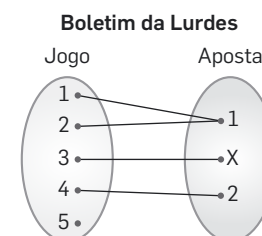
Cada elemento do primeiro conjunto tem **um e um só** correspondente no segundo conjunto. Cada uma destas correspondências é uma função.



Na correspondência ao lado existem elementos do primeiro conjunto com **vários correspondentes** no segundo conjunto. A correspondência não é uma função.



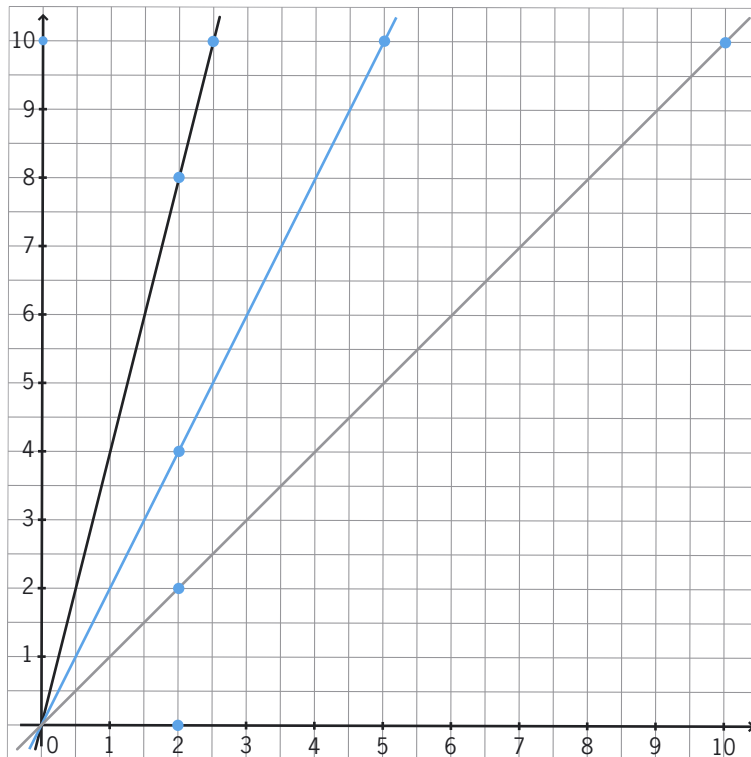
Nesta correspondência nem todos os elementos do primeiro conjunto estão envolvidos, porque um dos elementos do primeiro conjunto **não tem correspondência** no segundo conjunto. A correspondência não é uma função.



6.5 Sugestões de exploração da tarefa de investigação

funções na folha de cálculo

Pretende-se com esta tarefa de investigação que o aluno elabore gráficos utilizando a folha de cálculo, com o intuito de resolver uma situação que lhe é colocada. Posteriormente, o aluno utilizará os gráficos construídos para efetuar algumas comparações entre os mesmos. O aluno poderá elaborar um relatório, em que registre as comparações pedidas entre os gráficos das três situações e uma previsão de tempo de enchimento para as mesmas, no caso de o depósito ter capacidade para 20 litros.



Em alternativa ao uso da folha de cálculo, esta tarefa pode ser desenvolvida no *Geogebra*. Para tal, o aluno terá de começar por analisar cada uma das situações, propondo uma expressão analítica para cada uma delas. Introduzirá as mesmas na caixa de entrada do *Geogebra* e os gráficos serão apresentados no mesmo referencial, possibilitando a sua comparação.

6.6 Outras tarefas

Será que a gasolina chega?

O pai da Paula esqueceu-se de abastecer o automóvel com gasolina e a próxima estação de serviço fica a 80 km. O medidor de combustível indica que só tem 6 litros.

Será que ele consegue chegar à estação?

Ajuda o pai da Paula, sabendo que:

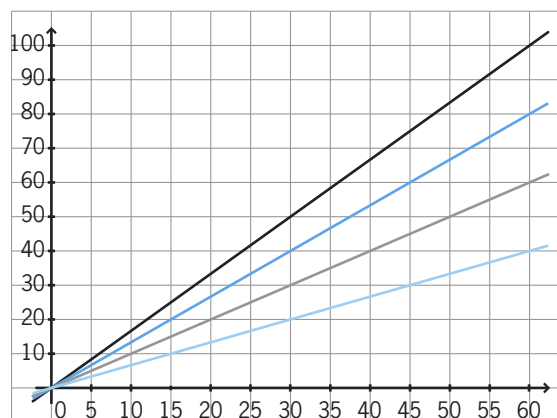
- a uma velocidade média de 40 km/h, o automóvel consome 4 litros em cada 100 km e, por cada 20 km a mais de velocidade, consome mais 1 litro;
- são 23 h 10 min e a estação de serviço fecha às 0 h 00 min.



Para averiguares se o pai da Paula tem ou não possibilidade de alcançar a estação de serviço no tempo que lhe resta, percorre as seguintes etapas.

a) Determina o tempo que resta ao pai da Paula até que a estação de serviço encerre.

Faz corresponder a cada uma das velocidades uma reta do gráfico abaixo, onde se representam algumas funções que relacionam a distância percorrida em função do tempo, fazendo variar a velocidade do automóvel para 40 km/h, 60 km/h, 80 km/h e 100 km/h.



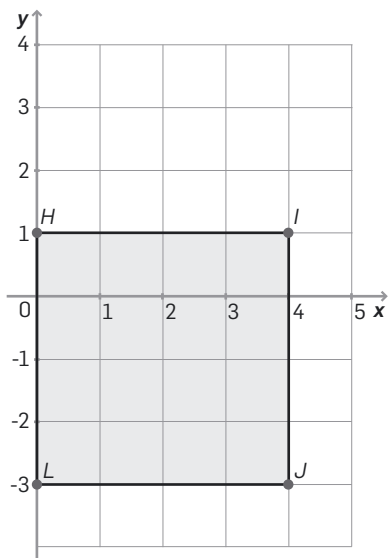
b) Averigua qual das velocidades permitiria percorrer 80 km no tempo que resta até a estação encerrar.

c) Verifica se em alguma dessas situações o consumo de gasolina é compatível com a que resta no depósito do automóvel.

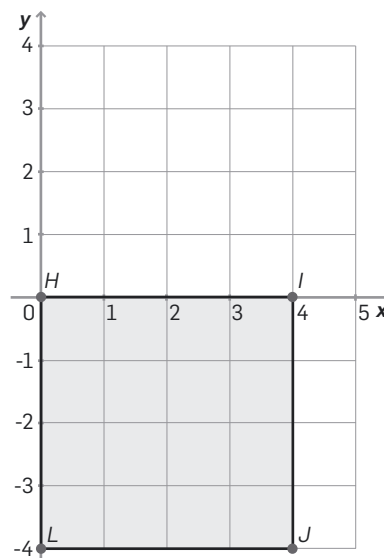
Referenciais cartesianos, quadriláteros e sequências

1. Indica as coordenadas dos vértices do quadrado $[HIJL]$ nos seguintes referenciais.

a.



b.



2. Representa o quadrado $[HIJL]$ num novo referencial, de modo que nenhum dos seus vértices tenha coordenadas positivas.
3. Responde às seguintes questões.
- a. Completa a seguinte tabela que relaciona a medida do lado de um quadrado com o seu perímetro e área.

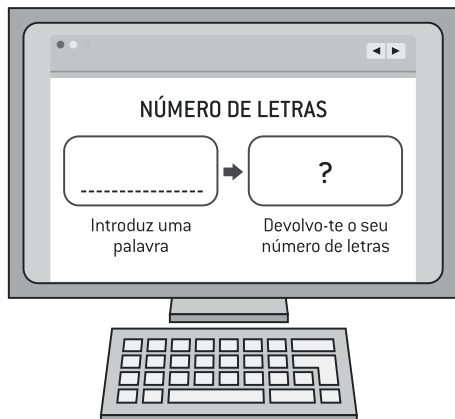
Lado (u.c.)	Perímetro (u.c.)	Área (u.c. ²)
1		
2		
3		
4		
5		

- b. Os números que exprimem as medidas dos perímetros e áreas desta sequência de quadrados formam uma sucessão. Descobre o termo geral.
- c. Qual das sucessões representa uma relação de proporcionalidade direta?

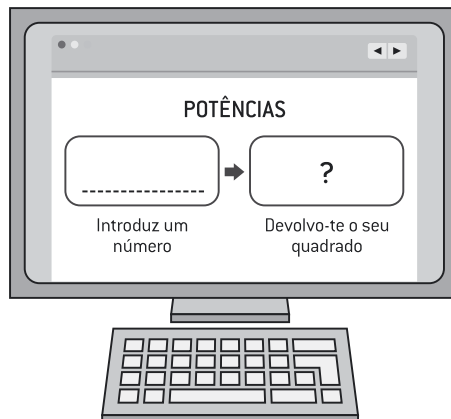
Máquina de letras e números

1. Os ecrãs seguintes mostram quatro temas: Número de letras, Potências, Raízes e Números menores.

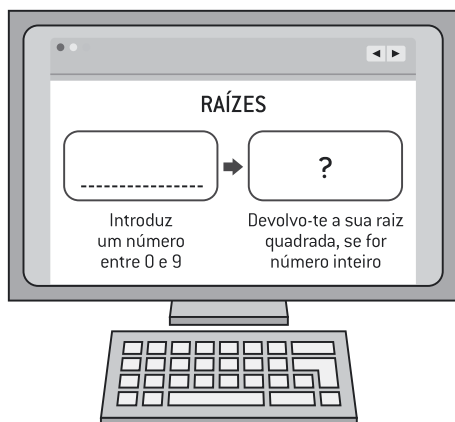
(A)



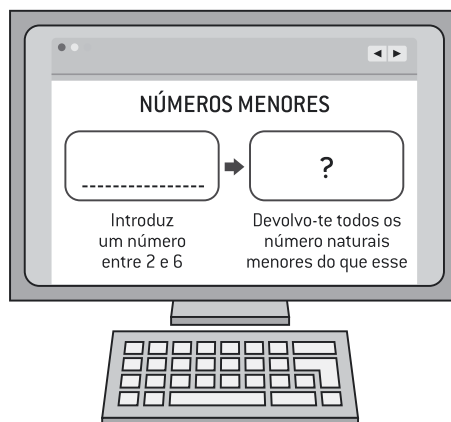
(C)



(B)



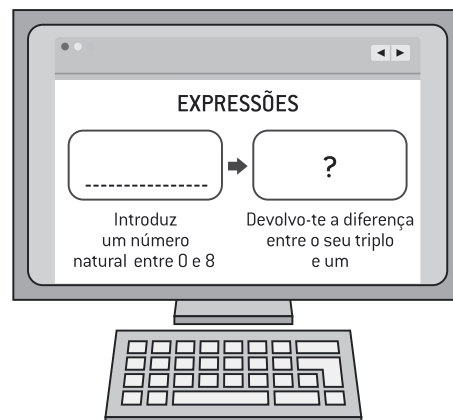
(D)



- Para cada um dos temas apresentados, indica três elementos diferentes que o João pode introduzir e as respostas que esperas que o computador lhe devolva. Representa cada uma das correspondências usando diagramas de setas.
- Indica quais destas correspondências são funções. Justifica a tua resposta.
- Para as funções que identificaste na alínea anterior, indica o seu domínio e contradomínio.

2. Num outro ecrã havia um novo tema, Expressões.

- Escreve a expressão analítica que traduz a função representada.
- Determina as imagens de todos os objetos do seu domínio.
- Existe algum objeto cuja imagem seja 18? E 29? Explica a tua resposta.



Indicações metodológicas/resolução das tarefas

Será que a gasolina chega?

Natureza da tarefa

Estabelecer relações entre gráficos, números e grandezas diretamente proporcionais.

Pré-requisitos

Representação gráfica de grandezas diretamente proporcionais.

Objetivo

- Aplicar as noções trabalhadas no capítulo com situações do quotidiano.

Organização da turma

Trabalho individual.

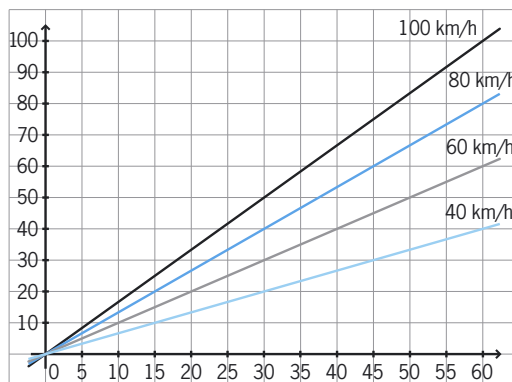
Metodologia da aula

O professor deve deixar que os alunos desenvolvam esta tarefa, promovendo, no final, a discussão em grande grupo.

Proposta de resolução:

- a. Restam 50 minutos até que a estação de serviço encerre.

Para fazer a correspondência entre as retas representadas no gráfico e as velocidades é necessário, unicamente, que o aluno observe a distância percorrida pelo automóvel ao fim de 60 minutos, isto é, se a distância ao fim de 60 minutos for de 100 km, então a sua velocidade será de 100 km/h.



- b. Analisando as representações, observa-se que só à velocidade de 100 km/h é possível percorrer 80 km em 50 minutos.
- c. Sabendo que a uma média de 40 km/h o automóvel consome 4 litros em cada 100 km e que por cada 20 km a mais de velocidade consome mais 1 litro, então, a uma velocidade de 100 km/h, o consumo do automóvel seria de 7 litros em cada 100 km. Mas, como o automóvel não precisa de percorrer 100 km, mas sim 80 km, recorrendo a uma proporção, teríamos que:

$$\frac{100}{7} = \frac{80}{?} \Leftrightarrow \frac{80 \times 7}{100} = 5,6 \ell$$

A uma velocidade de 100 km/h, o pai da Paula estaria na estação de serviço antes das 0 h 00 min e precisaria de 5,6 litros para percorrer a distância desejada.

Referenciais cartesianos, quadriláteros e sequências

Natureza da tarefa

Tarefa de conexão entre sequências, referenciais cartesianos e quadriláteros.

Pré-requisitos

Referenciais cartesianos.

Objetivo

- Determinar as coordenadas de um quadrilátero colocado num referencial do plano.

Organização da turma

Sugere-se que a tarefa seja desenvolvida em pares.

Metodologia da aula

Nesta tarefa pretende-se que os alunos, ao colocarem um polígono num referencial, se apercebam da possibilidade de determinar as coordenadas dos seus vértices ou outros pontos de interesse. Por isso, pode pedir-se, por exemplo, que indiquem as coordenadas da interseção das suas diagonais, caso se pretenda explorar esta tarefa com mais profundidade.

Proposta de resolução:

1. a. $H(0, 1)$; $I(4, 1)$; $J(4, -3)$ e $L(0, -3)$.

b. $H(0, 0)$; $I(4, 0)$; $J(4, -4)$ e $L(0, -4)$.

2. Há infinitas hipóteses, desde que se garanta que todos os vértices do quadrado se situam no 3.º quadrante do referencial. Por exemplo: $H(-5, -1)$; $I(-1, -1)$; $J(-5, -5)$ e $L(-1, -5)$.

3. a.

Lado (u.c.)	Perímetro (u.c.)	Área (u.c. ²)
1	4	1
2	8	4
3	12	9
4	16	16
5	20	25

b. $P = 4l$; $A = l^2$

c. O perímetro.

Máquina de letras e números

Natureza da tarefa

Tarefa de conexão entre funções, equações e números e operações.

Pré-requisitos

Números e operações.

Objetivo

- Relacionar as funções e as equações através da noção de transformação e equilíbrio.

Organização da turma

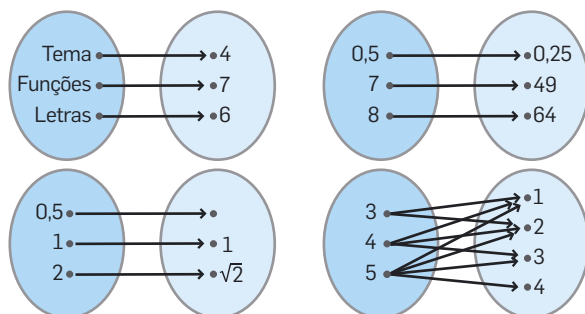
Sugere-se que a tarefa seja desenvolvida em grande grupo.

Metodologia da aula

Os alunos devem ver a função como um processo de transformação que está em permanente equilíbrio entre partes. Também para as equações é importante ter presente esse sentido de equilíbrio entre membros. Na questão 2, pretende-se introduzir as primeiras noções de equação, que mais tarde irão permitir a resolução algébrica destas.

Proposta de resolução:

1. a.



b. A e C são funções porque a cada objeto corresponde uma e uma só imagem. B e D não são funções: em B porque podem existir objetos sem imagem; em D, a cada objeto pode corresponder mais do que uma imagem.

c. A: $D = \{\text{Tema, Funções, Letras}\}$; $D' = \{4, 6, 7\}$

C: $D = \{0,5; 7; 8\}$; $D' = \{0,25; 49; 64\}$

2. a. $f(x) = 3x - 1$

b. $f(1) = 2$; $f(2) = 5$; $f(3) = 8$; $f(4) = 11$; $f(5) = 14$; $f(6) = 17$; $f(7) = 20$

c. Não, pois $f(6) = 17$; $f(7) = 20$. Não, pois apesar de a imagem de 10 ser 29, 10 não pertence ao domínio.

7. Equações algébricas

7.1 Teste de diagnóstico de conhecimentos 3

Parte 1

COTAÇÃO

Nos itens que se seguem, só uma das alíneas corresponde à resposta correta. Indica-a.

1. Qual é a expressão que traduz a área do triângulo?

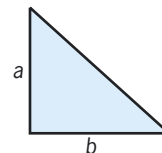
6

A. $a \times b$

C. $\frac{a \times b}{2}$

B. $2a \times 2b$

D. $a + 2b$



2. Qual é o valor da expressão $2x + 1$, para $x = 2$?

6

A. 2

B. 5

C. 23

D. 10

3. A expressão $3a + 2b$ é igual a 18, se:

6

A. $a = 1$ e $b = 5$

B. $a = 2$ e $b = 4$

C. $a = 3$ e $b = 4$

D. $a = 4$ e $b = 3$

4. Qual é a expressão que traduz o perímetro do retângulo ao lado?

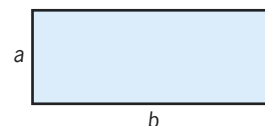
6

A. $a \times b$

C. $2a \times 2b$

B. $2a + 2b$

D. $a + a + b$



5. Qual é a expressão que traduz «A soma da metade de 10 com o triplo de 2»?

6

A. $\frac{10}{2} + 3 \times 2$

B. $10 + 5$

C. $\frac{10 + 3 \times 2}{2}$

D. $\frac{12}{2} \times 3$

6. O leão equilibra dois veados com a mesma massa. Qual a massa de cada um dos veados?

6



A. 20 kg e 30 kg.

B. 40 kg cada um.

C. 50 kg cada um.

D. 60 kg cada um.

7. Quantas maçãs estão no saco?

6



A. 3

B. 2

C. 4

D. Nenhuma.

Parte 2

COTAÇÃO

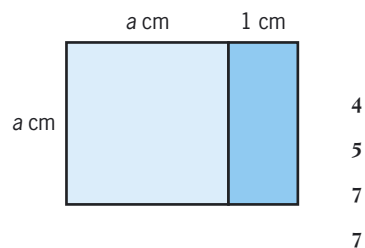
1. Observa o quadrado ao lado, cujo lado mede a cm.

1.1 Escreve uma expressão que traduza o perímetro do quadrado.

1.2 Sabendo que $a = 3$ cm, determina o perímetro do quadrado.

1.3 Escreve uma expressão que traduza o comprimento do retângulo.

1.4 O que significa a expressão $(a + 1) \times a$?



2. A seguinte sequência apresenta prismas constituídos por cubos brancos e azuis.



2.1 Completa a seguinte tabela.

10

Prisma	Número de cubos azuis	Número de cubos brancos	Total de cubos de cada prisma
1			
2			
3			
4			
5			

2.2 Verifica se existe um prisma com 40 cubos no total. Caso exista, diz qual o número desse prisma.

6

2.3 Seguindo-se a lei de formação sugerida pelos primeiros termos, indica a expressão que traduz o número de cubos azuis do prisma n .

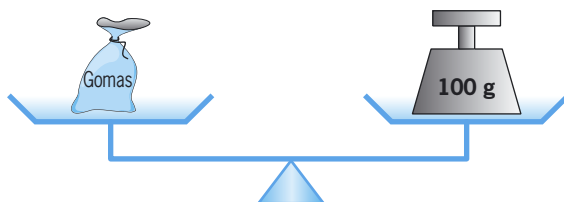
6

2.4 Seguindo-se a lei de formação sugerida pelos primeiros termos, indica a expressão que traduz o total de cubos do prisma n .

6

3. A Joana pesou um saco com 20 gomas. Quanto pesa cada goma?

7



AUTOAVALIAÇÃO

Pontuação	Os teus conhecimentos são:	Então:
90%-100%	Excelentes	Continua a estudar para manteres ou melhorares o teu desempenho.
70%-89%	Bons	
50%-69%	Razoáveis	Continua a trabalhar, pois podes melhorar.
20%-49%	Pouco satisfatórios	Tens de estudar muito para melhorar o teu desempenho.
0%-19%	Insatisfatórios	

Soluções do teste de diagnóstico de conhecimentos 3

Parte 1

1. (C)
2. (B)
3. (D)
4. (B)
5. (A)
6. (C)
7. (C)

Parte 2

1.

1.1 $P = 4A$

1.2 12 cm

1.3 $(a + 1)$ cm

1.4 A área do retângulo.

2.

2.1

Prisma	Número de cubos azuis	Número de cubos brancos	Total de cubos de cada prisma
1	4	8	12
2	8	8	16
3	12	8	20
4	16	8	24
5	20	8	28

2.2 Sim, o prisma 8.

2.3 $4n$

2.4 $4n + 8$

3. 5 gramas.

7.2 Metas curriculares

Equações algébricas

3. Resolver equações do 1.º grau

1. Identificar, dadas duas funções f e g , uma «equação» com uma «incógnita x » como uma expressão da forma « $f(x) = g(x)$ », designar, neste contexto, « $f(x)$ » por «primeiro membro da equação», « $g(x)$ » por «segundo membro da equação», qualquer a tal que $f(a) = g(a)$ por «solução» da equação e o conjunto das soluções por «conjunto-solução».
2. Designar uma equação por «impossível» quando o conjunto-solução é vazio e por «possível» no caso contrário.
3. Identificar duas equações como «equivalentes» quando tiverem o mesmo conjunto-solução e utilizar corretamente o símbolo « $\Leftrightarrow$ ».
4. Identificar uma equação « $f(x) = g(x)$ » como «numérica» quando f e g são funções numéricas, reconhecer que se obtém uma equação equivalente adicionando ou subtraindo um mesmo número a ambos os membros, ou multiplicando-os ou dividindo-os por um mesmo número não nulo e designar estas propriedades por «princípios de equivalência».
5. Designar por «equação linear com uma incógnita» ou simplesmente «equação linear» qualquer equação « $f(x) = g(x)$ » tal que f e g são funções afins.
6. Simplificar ambos os membros da equação e aplicar os princípios de equivalência para mostrar que uma dada equação linear é equivalente a uma equação em que o primeiro membro é dado por uma função linear e o segundo membro é constante ($ax = b$).
7. Provar, dados números racionais a e b , que a equação $ax = b$ é impossível se $a = 0$ e $b \neq 0$, que qualquer número é solução se $a = b = 0$ (equação linear possível indeterminada), que se $a \neq 0$ a única solução é o número racional $\frac{b}{a}$ (equação linear possível determinada) e designar uma equação linear determinada por «equação algébrica de 1.º grau».
8. Resolver equações lineares distinguindo as que são impossíveis das que são possíveis e entre estas as que são determinadas ou indeterminadas, e apresentar a solução de uma equação algébrica de 1.º grau na forma de fração irredutível ou numeral misto ou na forma de dízima com uma aproximação solicitada.

4. Resolver problemas

1. Resolver problemas envolvendo equações lineares.

7.3 Proposta de planificação

AULA	TAREFAS PROPOSTAS PARA AS AULAS	TEMPO	RECURSOS
1	Teste de diagnóstico de conhecimentos 3 Apesar de o teste de diagnóstico de conhecimentos 1 já conter questões sobre as expressões algébricas, aconselha-se que se efetue este teste para um diagnóstico mais pormenorizado.	90'	CAP
2	Tarefa A – A máquina dos números • Explicação da tarefa. • Execução individual da tarefa. • Discussão em grupo. Tarefa B – O porco e os amigos • Explicação da tarefa. • Execução individual da tarefa. • Discussão em grupo. Os alunos devem recorrer à rubrica Recorda ou efetuar antecipadamente uma análise da mesma em conjunto com o professor, de forma a prevenir dificuldades durante a execução das tarefas propostas.	5' 25' 15' 5' 25' 15'	Manual
3	Tarefa 1 – O balancé • Explicação da tarefa. • Execução da tarefa em grupo. • Discussão em grande grupo. Expressões com variáveis • Tarefas intermédias	5' 25' 15' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
4	Expressões com variáveis (continuação) • Tarefas intermédias Simplificação de expressões algébricas • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
5	Equações: conceitos básicos • Tarefas intermédias Equações equivalentes • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
6	Classificação de equações • Tarefas intermédias Resolução de equações lineares • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
7	Equações com parênteses • Tarefas intermédias Resolução de equações lineares com parênteses • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL

AULA	TAREFAS PROPOSTAS PARA AS AULAS	TEMPO	RECURSOS
8	Equações com denominadores • Tarefas intermédias Equações com denominadores e parênteses • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
9	Resolução de problemas utilizando equações • Tarefas intermédias Exercícios da remissão de fim de página	15' 75'	Manual 20 AULA DIGITAL
10	Tarefas Finais Para as Tarefas Finais, o professor pode disponibilizar uma ou duas aulas práticas de forma a que os alunos consolidem as matérias lecionadas.	90' ou 180'	Manual 20 AULA DIGITAL
11	+RRC Sugere-se a formação de grupos de trabalho para a execução desta rubrica. A discussão das resoluções das questões colocadas deve ser efetuada em grande grupo.	90'	Manual
12	Teste Final	90'	Manual 20 AULA DIGITAL
13	Tarefas de investigação • Explicação das tarefas. • Execução das tarefas em grupo. • Discussão em grande grupo. Sugere-se que sejam criados grupos de trabalho e que as diversas tarefas de investigação deste capítulo sejam distribuídas pelos grupos consoante as suas preferências.	10' 60' 20'	Manual
14	Outra tarefa: Vinho do Porto Esta tarefa suplementar que aqui é proposta efetua uma conexão entre algumas aprendizagens adquiridas ao longo do capítulo e no ciclo anterior.	90'	CAP

7.4 Propostas de resolução +RRC

1. O caracol

Objetivo principal: Equacionar e resolver um problema.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

Sugere-se que os dados sejam organizados numa tabela, de acordo com o que é proposto na resolução do problema.

Estratégia de resolução possível:

1.º dia	2.º dia	3.º dia	4.º dia	5.º dia	6.º dia	7.º dia
15 cm	30 cm	45 cm	60 cm	75 cm	90 cm	Quando chega ao topo já não desliza.

2. Um problema de Aryabhata

Objetivo principal: Equacionar e resolver um problema.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

O problema deve ser lido em grande grupo pelo professor ou aluno à escolha e deve ser traduzido em linguagem matemática por etapas.

Estratégia de resolução possível:

Equacionar o problema e resolver:

$$\begin{aligned} [(x+4) : 2] \times 5 - 6 = 29 &\Leftrightarrow [(x : 2) + 2] \times 5 - 6 = 29 \Leftrightarrow 5x : 2 + 10 - 6 = 29 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5x : 2 = 29 - 10 + 6 \Leftrightarrow 5x : 2 = 25 \Leftrightarrow 5x = 25 \times 2 \Leftrightarrow 5x = 50 \Leftrightarrow x = 10 \end{aligned}$$

3. Diofanto de Alexandria

Objetivo principal: Equacionar e resolver um problema.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

O problema é da mesma natureza do anterior e, por isso, não deve suscitar grande dificuldade de execução.

Estratégia de resolução possível:

Idade de Diofanto: x

Sexta parte foi a sua bela infância: $x : 6$

Mais uma duodécima parte de sua vida: $x : 12$

A sétima parte da sua existência decorreu com um casamento estéril: $x : 7$

Passaram mais cinco anos: 5

Existência durou apenas metade da de seu pai: $x : 2$

À sepultura quatro anos depois do enterro de seu filho: 4

$$(x : 6) + (x : 12) + (x : 7) + 5 + (x : 2) + 4 = x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 84$$

4. Uma história de Anania

Objetivo principal: Equacionar e resolver um problema.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

O professor deve realçar que realmente o que interessa saber é o número de peixes que estão na rede, pois, como o texto diz, todos deslizaram para o cesto.

Estratégia de resolução possível:

Consideremos que x é o número de peixes do cardume.

«Apanhámos metade e um quarto do cardume»: $(x : 2) + (x : 4)$

$$(x : 2) + (x : 4) = 45 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 60$$

5. A bela

Objetivo principal: Equacionar e resolver um problema.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

O problema deve ser traduzido em linguagem matemática por etapas. Sugerir aos alunos que considerem x o número total de lótus.

Estratégia de resolução possível:

Consideremos x o número total de lótus.

$$(x : 3) + (x : 5) + (x : 6) + (x : 4) + 6 = x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 120$$

6. Persas

Objetivo principal: Equacionar e resolver um problema.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

Sugerir aos alunos, caso seja necessário, que considerem x o número total de Persas. No entanto, dado este item ser semelhante ao anterior, evitar esta situação.

Estratégia de resolução possível:

Consideremos x o número total de Persas.

$$(x : 2) + (x : 4) + (x : 12) + 280 = x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 1760$$

7. O chá dos Açores

Objetivo principal: Equacionar e resolver um problema.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

O problema deve ser lido em grande grupo por um aluno e interpretado em conjunto com o professor.

Estratégia de resolução possível:

7.1 Temos que $270 \text{ g} = 0,270 \text{ kg}$. A qualidade da mistura pressupõe a existência de uma proporção entre as diferentes qualidades de chá. Sendo assim:

$$\frac{18}{15} = \frac{0,270}{?} \quad ? = \frac{15 \times 0,270}{18} = 0,225 \text{ kg} = 225 \text{ g}$$

7.2

$$\frac{225}{270} \times 100 \approx 83,33\%$$

7.3 O preço de cada quilograma da mistura pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\frac{18}{90} = \frac{1}{?} \quad ? = \frac{90 \times 1}{18} = 5 \text{ €}$$

7.4 Se cada quilograma custa 5 €, com 15 € podemos comprar 3 kg.

7.5 a. $a + 4a = 10$ é uma equação que traduz a quantidade das duas misturas de chá existente em 10 kg.

b. Resolvendo a equação $a + 4 \times a = 20$, concluímos que Orange Pekoe será igual a 4 kg.

7.6 A equação que traduz a situação descrita é: $x + 4x + 5x = 50$

Resolvendo a equação, a conclusão é a seguinte: Orange Pekoe – 5 kg; Pekoe – 20 kg; Broken Leaf – 25 kg.

8. Equatrex

Objetivo principal: Equações.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

Sugere-se o desenvolvimento das tarefas 8, 9 e 10 numa aula, proporcionando assim um momento de descontração, em que, de forma lúdica, os alunos aplicam os conhecimentos adquiridos e têm a oportunidade de se autocorrigirem.

Estratégia de resolução possível:

Propõe-se ao aluno a resolução de equações (ver tabela ao lado) que são apresentadas de uma forma diferente da habitual.

Horizontais	Verticais
$5x = 50 \Leftrightarrow x = 10$	$-3x = -33 \Leftrightarrow x = 11$
$x - 400 = -150 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 250$	$2x - 5 = 395 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 200$
$3x = 300 \Leftrightarrow x = 100$	$x + 30 = 80 \Leftrightarrow x = 50$
$\frac{x}{2} = 11 \Leftrightarrow x = 22$	$x + 25 = 150 \Leftrightarrow x = 125$
$\frac{x}{2} = 10 \Leftrightarrow x = 20$	$\frac{x}{2} - 5 = 55 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 120$
$x - 70 = 75 \Leftrightarrow x = 145$	$\frac{x}{3} = 80 \Leftrightarrow x = 240$
$5x = 1050 \Leftrightarrow x = 210$	$2x = 240 \Leftrightarrow x = 120$
$x - 200 = 20 \Leftrightarrow x = 220$	$x - 125 = 100 \Leftrightarrow x = 225$
$\frac{x}{7} = 4 \Leftrightarrow x = 28$	$4x = 72 \Leftrightarrow x = 18$
$x + 80 = 260 \Leftrightarrow x = 180$	$x - 8 = 80 \Leftrightarrow x = 88$
$x + 1 = 50 \Leftrightarrow x = 49$	$\frac{x}{3} = 33 \Leftrightarrow x = 99$

9. Zeca e os cromos

Objetivo principal: Equacionar e resolver um problema.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

Sugere-se o desenvolvimento das tarefas 8, 9 e 10 numa aula, proporcionando assim um momento de descontração, em que, de forma lúdica, os alunos aplicam os conhecimentos adquiridos e têm a oportunidade de se autocorrigirem.

Estratégia de resolução possível:

«Comecei-a com uns quantos (x) ; o Nico deu-me outros tantos (x) e mais três; o Toni deu-me sete e o Juca metade dos que eu tinha no início ($x : 2$) . Agora tenho 100.»

$$x + x + 3 + 7 + (x : 2) = 100$$

Não é mentiroso! Ele começou a coleção com 36 cromos.

10. O cofre do tio Patinhas

Objetivos principais: Proporcionalidade; expressões algébricas; equações e sequências.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

Sugere-se o desenvolvimento das tarefas 8, 9 e 10 numa aula, proporcionando assim um momento de descontração, em que, de forma lúdica, os alunos aplicam os conhecimentos adquiridos e têm a oportunidade de se autocorrigirem.

Estratégia de resolução possível:

- $2(x - 3) - 5x = 3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = -3$
- Sendo x a idade do António: $x + (x - 5) = 29 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 17$;
logo o irmão do António tem $17 - 5 = 12$ anos.
- $3x = 2x + 4 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 4$
- $4 \times 4 - 6 = 10$
- $4 \times 1 + 3 = 7$; $4 \times 2 + 3 = 11$; $4 \times 3 + 3 = 15$, ...
- Sendo x o primeiro desses números consecutivos: $x + (x + 1) + (x + 2) = 9 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 2$;
logo os números são 2, 3 e 4.
- $6y = 24 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y = 4$
- $\frac{2x}{5} + 2x + 12 = 24 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 5$
- Sendo x o número que calçava o primeiro assaltante: $x + (x - 2) + (x - 4) = 126 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 44$

7.5 Sugestões de exploração das tarefas de investigação

As laranjas douradas

O facto de sabermos o valor final permite-nos efetuar o raciocínio contrário, de forma a saber o número de laranjas que a princesa tinha no início.

Repare-se que os duendes exigem sempre da princesa metade das laranjas que ela traz, mais uma, ou seja, ela vai sempre ficando com metade das que trazia menos uma. Fazendo o raciocínio ao contrário, teremos primeiro de adicionar uma laranja para depois calcular o seu dobro, em cada uma das paragens que a princesa é obrigada a fazer. Sendo assim:

$$[[[(2 + 1) \times 2] + 1] \times 2] + 1] \times 2 = x$$

$(2 + 1) \times 2 = 6$ – Número de laranjas que trazia quando chegou junto ao guarda.

$[(2 + 1) \times 2] + 1] \times 2 = 14$ – Número de laranjas que trazia quando chegou junto do segundo duende.

$[[[(2 + 1) \times 2] + 1] \times 2] + 1] \times 2 = 30$ – Número de laranjas que trazia quando chegou junto do primeiro duende.

História da Álgebra

Esta tarefa de investigação proporciona um momento de pesquisa sobre a Álgebra e alguns dos aspetos que nesta altura seriam importantes focar, dado que se relacionam com a matéria lecionada em História. Esta tarefa de investigação está muito direcionada para as aulas de Estudo Acompanhado, onde os alunos, organizados em pequenos grupos, podem efetuar recolha de informação. No entanto, não deixamos de salientar que, dada a importância do assunto em questão, se deve estimular a apresentação oral dos trabalhos de pesquisa efetuados pelos grupos, promovendo a discussão na turma e, se possível, juntando-lhe informação que o professor determine como relevante para a construção do saber e da cultura matemática.

7.6 Outra tarefa

Vinho do Porto

O vinho do Porto, símbolo de Portugal no mundo, contém a história de um país e de um povo e tornou-se ao longo dos anos num património cultural coletivo de trabalho e experiências, saberes e arte, acumulados de geração em geração.

A qualidade do vinho que é produzido anualmente depende da qualidade da uva, que, por sua vez, depende da Natureza. Por vezes, e para que o vinho do Porto nunca perca a qualidade a que já nos habituou, é necessário misturar vinho de anos menos bons com outros de anos melhores.

Quando se efetuam estas misturas é necessário recalcular a idade do vinho.

Por exemplo, queremos juntar 100 litros de vinho com 12 anos e 300 litros de vinho com 6 anos. Como recalcular a idade desta mistura de vinhos? Para tal faz-se:

$$\frac{100 \times 12 + 300 \times 6}{100 + 300} = 7,5, \text{ donde resultam } 400 \ell \text{ de vinho com } 8 \text{ anos.}$$

No caso de o resultado ser um número decimal, arredondamos este valor à unidade.



1. Determina a idade do vinho que resulta da mistura de 200 ℓ de um vinho com 18 anos e 300 ℓ de um vinho com 10 anos, aplicando um método equivalente ao exemplificado em cima.
2. Queremos obter 800 ℓ de mistura de um vinho com 7 anos com outro com 14 anos, em que a proporção das quantidades de vinho de cada um é 1 para 3.
 - 2.1 Que quantidade de vinho com 7 anos e 14 anos devemos colocar para tal mistura?
 - 2.2 Calcula a idade do vinho resultante da mistura.
3. Juntamos 100 ℓ de vinho com uma certa idade com outros 500 ℓ de um vinho com o dobro da idade do primeiro. Desta mistura resultou um vinho com 11 anos de idade.
 - 3.1 Traduz através de uma equação o problema proposto.
 - 3.2 Resolve a equação de forma a encontrar as idades dos vinhos que entraram nesta mistura.

Indicações metodológicas/resolução da tarefa

Natureza da tarefa

Relacionar expressões algébricas com equações e proporcionalidade.

Pré-requisitos

Resolução de equações e noção de proporcionalidade entre duas grandezas.

Objetivo

- Aplicar os conhecimentos adquiridos a uma situação real.

Organização da turma

Trabalho em pares.

Metodologia da aula

A turma deve ser organizada em pares para o desenvolvimento da tarefa e deve ser promovida, no final, uma discussão em grupo.

Proposta de resolução:

1.

$$\frac{200 \times 18 + 300 \times 10}{200 + 300} = 13,2$$

Resposta: 500 ℓ de vinho com 13 anos.

2.1 Para a mistura de 800 ℓ teremos 200 ℓ de um vinho com 7 anos e 600 ℓ de um outro com 14 anos.

$$\frac{800}{4} = \frac{?}{1} \quad \text{e} \quad \frac{800}{4} = \frac{?}{3}$$

2.2

$$\frac{200 \times 7 + 600 \times 14}{800} = 12,25$$

12 anos de idade.

3.1 A equação que traduz o problema proposto é:

$$\frac{100 \times x + 500 \times 2x}{600} = 11$$

3.2 100 ℓ de um vinho com 6 anos e 500 ℓ de vinho com 12 anos.

8. Sequências e sucessões

8.1 Teste de diagnóstico de conhecimentos 4

Parte 1

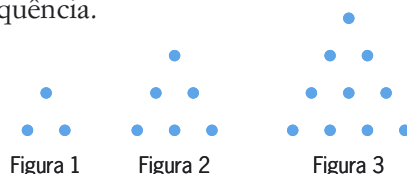
COTAÇÃO

Nos itens que se seguem, só uma das alíneas corresponde à resposta correta. Indica-a.

1. Ao lado estão representadas as três primeiras figuras de uma sequência.

O número de pontos que formam a figura 4 é:

- A. 11 C. 10
B. 12 D. 15



8

2. O sr. Manuel, da loja de informática, está a decorar a montra.

Já fez três montes com embalagens de CD, como podes observar na figura ao lado.



8

Se o sr. Manuel continuar a fazer montes, seguindo o mesmo padrão, de quantas embalagens precisa para fazer o 5.º monte da sequência?

- A. 15 B. 12 C. 21 D. 28

3. O Pedro tem uma fita com autocolantes pretos e azuis, dispostos segundo um padrão que se repete, pela mesma ordem. A figura mostra essa fita, da qual o Pedro já retirou três autocolantes. Qual opção tem os autocolantes que o Pedro tirou, seguindo a ordem da esquerda para a direita?

8



A.



B.



C.



D.



4. Joaninhas grandes e pequenas entram e saem de um buraco. Seguem dispostas segundo um padrão que se repete. Quantas joaninhas grandes e pequenas estão no buraco?

8



A. 3 pequenas e 5 grandes.

C. 4 pequenas e 5 grandes.

B. 4 pequenas e 4 grandes.

D. 5 pequenas e 5 grandes.

5. Supondo que a regularidade verificada se mantém, o 8.º termo da sucessão formada pelos números 1; 4; 7; 10; 13;... é:

8

A. 16

B. 19

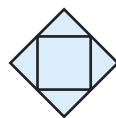
C. 21

D. 22

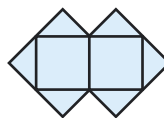
Parte 2

COTAÇÃO

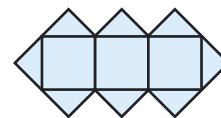
1. Observa a seguinte sequência de figuras.

1.1 Quantos triângulos tem a 5.^a figura?1.2 Quantos quadrados tem a 9.^a figura?

1.ª figura



2.ª figura



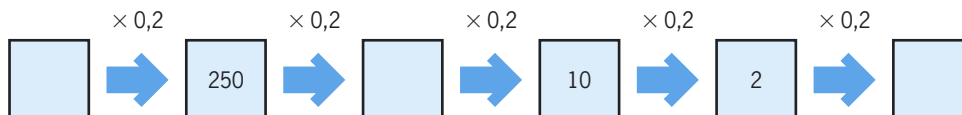
3.ª figura

5

5

2. Escreve, nos , os três números que faltam na sequência.

10



3. Nesta sequência de figuras, o primeiro quadrado (em cima) tem 12 cm de lado.

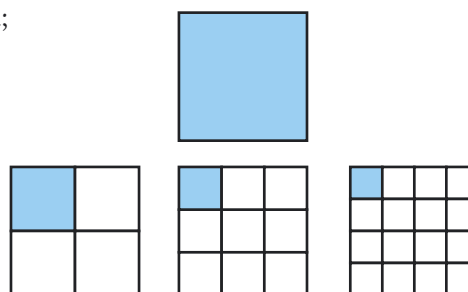
Escreve os primeiros cinco termos das sequências seguintes:

3.1 número de quadrados pequenos de cada figura;

3.2 medida dos lados dos quadrados azuis;

3.3 área dos quadrados azuis;

3.4 perímetro dos quadrados azuis.



4

5

8

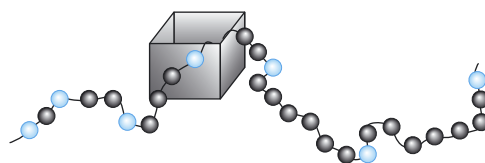
8

4. A Elisa está a fazer um colar com contas azuis e contas pretas, seguindo sempre um esquema inventado por ela.

15

Uma parte do colar está dentro da caixa da figura.

Desenha ou descreve a parte do colar que está dentro da caixa, explicando o teu raciocínio.

Adaptado de *Prova de Aferição de Matemática*, 2.º Ciclo, 2004.

AUTOAVALIAÇÃO

Pontuação	Os teus conhecimentos são:	Então:
90%-100%	Excelentes	Continua a estudar para maneres ou melhoraes o teu desempenho.
70%-89%	Bons	
50%-69%	Razoáveis	Continua a trabalhar, pois podes melhorar.
20%-49%	Pouco satisfatórios	Tens de estudar muito para melhorar o teu desempenho.
0%-19%	Insatisfatórios	

Soluções do teste de diagnóstico de conhecimentos 4

Parte 1

1. (D)
2. (C)
3. (A)
4. (C)
5. (D)

Parte 2

1.

1.1 12 triângulos.

1.2 9 quadrados.

2. 1250; 50; 0,4

3.

3.1 1; 4; 9; 16; 25

3.2 12; 6; 4; 3; 2,4

3.3 144; 36; 16; 9; 5,76

3.4 48; 24; 16; 12; 9,6

4. O esquema inventado pela Elisa é: 1a; 1p; 1a; 2p; 1a; 3p; 1a; 4p; 1a; 5p; 1a; 6p...

Sendo assim, as contas que estão na caixa são uma conta azul e sete contas pretas, dado que da sequência de cinco pretas, duas delas são visíveis.

8.2 Metas curriculares

5. Definir sequências e sucessões

1. Identificar, dado um número natural N , uma «sequência de N elementos» como uma função de domínio $\{1, 2, \dots, N\}$ e utilizar corretamente a expressão «termo de ordem n da sequência» e «termo geral da sequência».
2. Identificar uma «sucessão» como uma função de domínio $\mathbb{N}$, designando por u_n a imagem do número natural n por u e utilizar corretamente a expressão «termo de ordem n da sucessão» e «termo geral da sucessão».
3. Representar, num plano munido de um referencial cartesiano, gráficos de sequências.

6. Resolver problemas

1. Resolver problemas envolvendo sequências e sucessões e os respetivos termos gerais.

8.3 Proposta de planificação

AULA	TAREFAS PROPOSTAS PARA AS AULAS	TEMPO	RECURSOS
1	Teste de diagnóstico de conhecimentos 4	90'	CAP
2	Tarefa A – Sequências de figuras • Explicação da tarefa. • Execução a pares/individual da tarefa. • Discussão em grupo. Tarefa B – Regularidades • Explicação da tarefa. • Execução em grupo da tarefa. • Discussão em grupo. Os alunos devem recorrer à rubrica Recorda ou efetuar antecipadamente uma análise da mesma em conjunto com o professor, de forma a prevenir dificuldades durante a execução das tarefas propostas.	5' 25' 15' 5' 25' 15'	Manual
3	Tarefa 1 – Descobrir regularidades • Explicação da tarefa. • Execução da tarefa em grupo. • Discussão em grande grupo. Sequências e sucessões • Tarefas intermédias	5' 25' 15' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
4	Sequências e sucessões – definições e representação gráfica • Tarefas intermédias Termo geral de uma sucessão • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
5	Termo geral de uma sucessão (continuação) • Tarefas intermédias Exercícios da remissão de fim de página	15' 30' 45'	Manual 20 AULA DIGITAL
6	Tarefas Finais Para as Tarefas Finais, o professor pode disponibilizar uma ou duas aulas práticas de forma a que os alunos consolidem as matérias lecionadas.	90' ou 180'	Manual 20 AULA DIGITAL

AULA	TAREFAS PROPOSTAS PARA AS AULAS	TEMPO	RECURSOS
7	+RRC Sugere-se a formação de grupos de trabalho para a execução desta rubrica. A discussão das resoluções das questões colocadas deve ser efetuada em grande grupo.	90'	Manual
8	Teste Final	90'	Manual 20 AULA DIGITAL
9	Tarefas de investigação • Explicação das tarefas. • Execução das tarefas em grupo. • Discussão em grande grupo. Sugere-se que sejam criados grupos de trabalho e que as diversas tarefas de investigação deste capítulo sejam distribuídas pelos grupos consoante as suas preferências.	10' 60' 20'	Manual
10	Outra tarefa: Padrões numéricos Esta tarefa suplementar que aqui é proposta efetua uma conexão entre algumas aprendizagens adquiridas ao longo do capítulo e no ciclo anterior.	90'	CAP

8.4 Propostas de resolução +RRC

1. Segmentos

Objetivo principal: Padrões na geometria.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

Sugere-se a utilização do geoplano para apoiar a resolução deste problema.

Estratégia de resolução possível:

Sugere-se que a resposta seja organizada numa tabela, de forma a ser explícita a regularidade na contagem dos segmentos.

Tamanho do quadrado	Número de segmentos de diferentes comprimentos: anteriores + novo	Número total de comprimentos diferentes
1×1	2	2
2×2	$2 + 3$	5
3×3	$2 + 3 + 4$	9
4×4	$2 + 3 + 4 + 5$	14

2. Painel

Objetivo principal: Padrões na geometria.

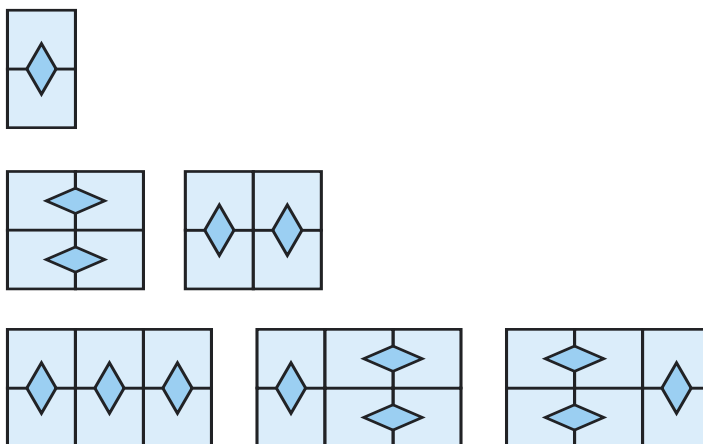
Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

Sugerimos a construção prévia das figuras em cartolina ou em suporte digital para facilitar a visualização da situação proposta pelos alunos com maiores dificuldades de abstração.

Estratégia de resolução possível:

Pretende-se que o aluno efetue sucessivas construções das diversas formas de cobrir o painel, como aqui é exemplificado, até que encontre a regularidade de números 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... que fazem parte da sequência de Fibonacci. Os azulejos podem ser colocados no painel de 21 formas diferentes.



Esta tarefa pode ser explorada, experimentalmente, nas turmas que apresentem mais dificuldades de aprendizagem.

3. Os números de granizo

Objetivo principal: Padrões numéricos.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

O professor deve fazer uma explicação prévia para que os alunos percebam o processo de investigação a desenvolver.

Estratégia de resolução possível:

Considerando a sugestão que é feita:

a. 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

A partir de certa altura surge a sequência «1, 4, 2», que se repete indefinidamente.

Antes de cair no «ciclo fatal» encontramos 109 termos.

b. 17 termos: 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

4. Infinitamente...

Objetivo principal: Padrões numéricos.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

Sugere-se a construção de uma tabela para organizar os dados.

Estratégia de resolução possível:

Esta tarefa já foi explorada na semelhança de figuras e aqui torna a ser nomeada na procura de uma lei de formação para os quadrados e triângulos.

a.

Fila	Número de quadrados	Número de triângulos
1	2	6
2	4	12
3	8	24
4	16	48

b. Sendo assim, temos que o termo geral dos quadrados é 2^n .

c. O termo geral dos triângulos é 3×2^n .

5. Retângulos, perímetros e áreas

Objetivo principal: Padrões numéricos.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

O preenchimento da tabela da primeira alínea é fundamental na resolução do problema.

Estratégia de resolução possível:

Com o preenchimento da tabela, espera-se que o aluno chegue à lei de formação, depois de atribuir valores à 6.^a figura, no sentido de se averiguar se o aluno se apropriou da regularidade em questão (Altura = 6; base = 7; perímetro = 26; área = 42).

Retângulo da figura	Medida da altura	Medida da base	Medida do perímetro	Medida da área
1	1	2	6	2
2	2	3	10	6
3	3	4	14	12
4	4	5	18	20
5	5	6	22	30
			$2[n + (n + 1)]$	$n(n + 1)$

6. Caixa de bombons

Objetivo principal: Padrões geométricos.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho:

Sugere-se que o professor alerte os alunos para o facto de estes terem de descobrir a relação existente entre as dimensões da caixa, o número de bolachas e o número de caramelos.

Estratégia de resolução possível:

Existe uma relação entre as dimensões da caixa, o número de bolachas e o número de caramelos, que se regista no seguinte quadro.

Dimensões da caixa	Número de bolachas	Número de caramelos
2×2	4	1
2×4	8	3
3×5	15	8
...		
$c \times l$	$c \times l$	$(c - 1) \times (l - 1)$

8.5 Sugestões de exploração das tarefas de investigação

Sequências pitagóricas no geoplano

Recorrendo uma vez mais ao geoplano, pretende-se que o aluno comece por estudar algumas regularidades geométricas, de forma a aplicar os conhecimentos matemáticos na compreensão de fenómenos científicos e a conjecturar sobre a sua aplicação.

O recurso ao geoplano permite a manipulação de materiais didáticos e conduz à estruturação de raciocínios, mostrando que a matemática é uma ciência dinâmica.

	Uma regra de formação	Expressão geradora
Números triangulares	1; 1 + 2; 3 + 3; 6 + 4; 10 + 5; ...	$\frac{n(n+1)}{2}$
Números quadrangulares	1; 1 + 3; 4 + 5; 9 + 7; 16 + 9; ...	n^2
Números pentagonais	1; 1 + 4; 5 + 7; 12 + 10; 22 + 13; ...	$\frac{n(3n-1)}{2}$
Números hexagonais	1; 1 + 5; 6 + 9; 15 + 13; 28 + 17; ...	$n(2n-1)$
Números octogonais	1; 1 + 7; 8 + 13; 21 + 19; 40 + 25; ...	$n(3n-2)$

Fibonacci e o número de ouro

Esta tarefa de investigação proporciona um momento de pesquisa sobre o número de ouro, sequência de Fibonacci, relações entre ambos e as suas aplicações.

Esta tarefa de investigação está muito direcionada para as aulas de Estudo Acompanhado, onde os alunos, organizados em pequenos grupos, podem efetuar recolha de informação. No entanto, não deixamos de salientar que, dada a importância do assunto em questão, se deve promover a apresentação oral dos trabalhos de pesquisa efetuados pelos grupos, promovendo a discussão na turma e, se possível, juntando-lhe informação que o professor determine como relevante para a construção do saber e da cultura matemática.

Jogos lógicos

1.

1	1	8
2	5	13
3	21	?

$1 + 1 = 2$; $2 + 1 = 3$; $3 + 2 = 5$; $5 + 3 = 8$;
 $8 + 5 = 13$; $13 + 8 = 21$; $21 + 13 = 34$

2.

2	7	9	16
4	3	7	10
6	10	16	26
10	13	23	

8.6 Outra tarefa

Padrões numéricos

1. Descobre o maior número possível de relações entre os números na tabela.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. Que padrão identificas nos números que estão na diagonal que começa em 1?

3. Como variam os números quando saltas de linha em linha? E de coluna em coluna?

4. Descobre diferentes maneiras de contar que te levem a parar no número 24 e no número 35.

5. Observa a tabela abaixo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Investiga os:

- números em forma de L;
- números em forma de T;
- números em forma de C;
- números em forma de P;
- números em forma de O.

Faz uma generalização para cada caso.

Indicações metodológicas/resolução da tarefa

Natureza da tarefa

Descobrir padrões numéricos.

Pré-requisitos

Sequências numéricas.

Objetivo

- Desenvolver o raciocínio matemático e a relação entre os números.

Organização da turma

Trabalho em grupo-turma.

Metodologia da aula

A tarefa deve ser desenvolvida em grande grupo, motivando a participação dos alunos com mais dificuldades.

Proposta de resolução:

Para se iniciar a execução da tarefa, pode propor-se que os alunos utilizem tabelas com menos de 10 números por linha (como no exemplo seguinte).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50

O desafio consiste em ver como variam os números nas novas tabelas e a concluir que as respostas vão dependendo das dimensões da tabela.

O professor deve ir anotando no quadro as sugestões dadas pelos alunos de padrões encontrados nas duas primeiras tabelas e averiguar em conjunto com eles o que se passa na tabela de dimensões maiores.

Na alínea **d)** pode sugerir que se procurem padrões segundo outras letras do alfabeto e deve discutir na turma as conclusões a que chegam.

Por exemplo, para formar a letra T precisamos de uma coluna e de uma linha. Os números na coluna diferem em dez unidades enquanto em linha a sua diferença é de uma unidade.

3	4	5
	14	
	24	
	34	
	44	

Nos números em P temos duas colunas e duas linhas. Em coluna, a diferença entre dois números consecutivos é 10, mas em linha a diferença é 1.

8	9	10
18		20
28	29	30
38		
48		

Esta formação parece ser idêntica em todas as letras, que se efetuem numa tabela deste tipo.

É importante que a exploração desta tarefa chegue o mais longe possível, tendo-se, no entanto, em consideração, que a sua exploração é inesgotável.

9. Figuras geométricas. Medida

9.1 Teste de diagnóstico de conhecimentos 5

Parte 1

COTAÇÃO

Nos itens que se seguem, só uma das alíneas corresponde à resposta correta. Indica-a.

1. O que representa a figura seguinte?

5

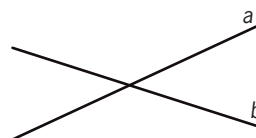


- A. A reta AB : AB .
 B. A semirreta com origem em A e que passa por B : $\overrightarrow{AB}$.
 C. O segmento AB : $[AB]$.
 D. A semirreta com origem em B e que passa por A : $\overrightarrow{BA}$.

2. Qual é a posição relativa das duas retas representadas na figura?

5

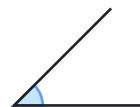
- A. Concorrentes.
 B. Perpendiculares.
 C. Paralelas.
 D. Coincidentes.



3. Estima a amplitude do ângulo assinalado na figura.

5

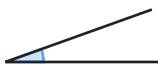
- A. 15° C. 120°
 B. 90° D. 45°



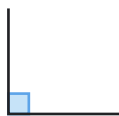
4. Qual dos seguintes ângulos representa um ângulo obtuso?

5

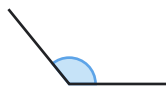
A.



B.



C.



D.



5. Classifica o triângulo seguinte quanto aos ângulos.

5

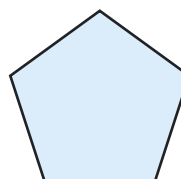
- A. Reto.
 B. Obtusângulo.
 C. Agudo.
 D. Retângulo.



6. Um polígono com cinco lados designa-se por:

5

- A. heptágono.
 B. pentágono.
 C. hexágono.
 D. triângulo.



Parte 2

COTAÇÃO

1. Considera os ângulos a , b e c , assinalados no triângulo representado na figura.

1.1 Que designação têm os ângulos a , b e c em relação ao triângulo?

5

1.2 Ordena, por ordem crescente, os ângulos, tendo em consideração a sua amplitude.

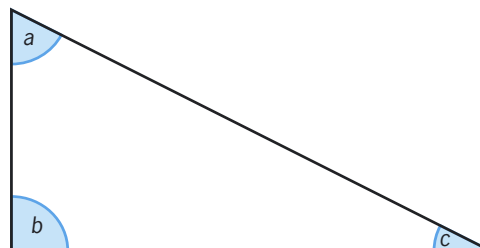
5

1.3 Como classificas o triângulo quanto aos ângulos?

5

1.4 Este polígono é regular? Justifica.

5



2. Na figura está representado um polígono regular com sete lados.

2.1 Classifica o polígono quanto aos lados.

5

2.2 Quantos vértices tem o polígono?

5

2.3 Quantas diagonais tem o polígono?

8

2.4 Como se designa o ângulo b em relação ao polígono?

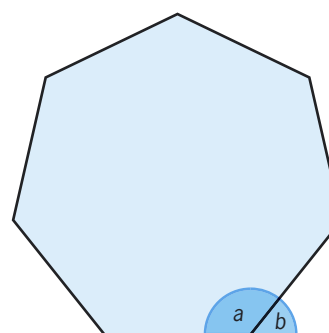
5

2.5 Sabendo que o ângulo b tem de amplitude 52° , qual é a amplitude do ângulo a ?

7

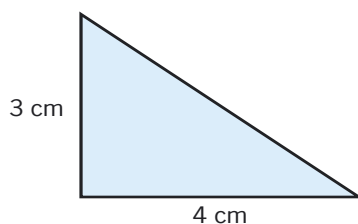
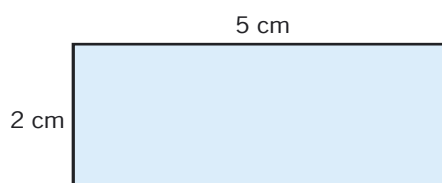
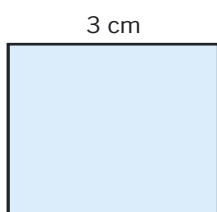
2.6 Um dos lados do polígono mede 2 cm. Qual é o seu perímetro?

8



3. Calcula a área, em cm^2 , dos seguintes polígonos.

12



AUTOAVALIAÇÃO

Pontuação	Os teus conhecimentos são:	Então:
90%-100%	Excelentes	Continua a estudar para manteres ou melhoraes o teu desempenho.
70%-89%	Bons	
50%-69%	Razoáveis	Continua a trabalhar, pois podes melhorar.
20%-49%	Pouco satisfatórios	Tens de estudar muito para melhorar o teu desempenho.
0%-19%	Insatisfatórios	

Soluções do teste de diagnóstico de conhecimentos 5

Parte 1

1. (B)
2. (A)
3. (D)
4. (C)
5. (B)
6. (B)

Parte 2

1.
 - 1.1 Ângulos internos do triângulo.
 - 1.2 $c < a < b$
 - 1.3 Triângulo acutângulo.
 - 1.4 Não, porque os ângulos e lados que o formam são todos diferentes.
2. Heptágono.
 - 2.1 Sete vértices.
 - 2.2 28 diagonais.
 - 2.3 Ângulo interno.
 - 2.4 128°
 - 2.5 14 cm
3. $A_{\text{quadrado}} = 9 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{retângulo}} = 10 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{triângulo}} = 6 \text{ cm}^2$

9.2 Metas curriculares

Alfabeto grego

1. Conhecer o alfabeto grego

1. Saber nomear e representar as letras gregas minúsculas α , β , γ , δ , π , ρ e σ .

Figuras geométricas

2. Classificar e construir quadriláteros

1. Identificar uma «linha poligonal» como uma sequência de segmentos de reta num dado plano, designados por «lados», tal que pares de lados consecutivos partilham um extremo, lados que se intersejam não são colineares e não há mais do que dois lados partilhando um extremo, designar por «vértices» os extremos comuns a dois lados e utilizar corretamente o termo «extremidades da linha poligonal».



2. Identificar uma linha poligonal como «fechada» quando as extremidades coincidem.



3. Identificar uma linha poligonal como «simples» quando os únicos pontos comuns a dois lados são vértices.



4. Reconhecer informalmente que uma linha poligonal fechada simples delimita no plano duas regiões disjuntas, sendo uma delas limitada e designada por «parte interna» e a outra ilimitada e designada por «parte externa» da linha.



5. Identificar um «polígono simples», ou apenas «polígono», como a união dos lados de uma linha poligonal fechada simples com a respetiva parte interna, designar por «vértices» e «lados» do polígono respetivamente os vértices e os lados da linha poligonal, por «interior» do polígono a parte interna da linha poligonal, por «exterior» do polígono a parte externa da linha poligonal e por «fronteira» do polígono a união dos respetivos lados, e utilizar corretamente as expressões «vértices consecutivos» e «lados consecutivos».

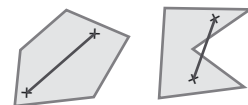
6. Designar por $[A_1A_2 \dots A_n]$ o polígono de lados $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, $\dots$, $[A_nA_1]$.

7. Identificar um «quadrilátero simples» como um polígono simples com quatro lados, designando-o também por «quadrilátero» quando esta simplificação de linguagem não for ambígua, e utilizar corretamente, neste contexto, o termo «lados opostos».

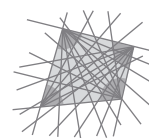
8. Identificar um «ângulo interno» de um polígono como um ângulo de vértice coincidente com um vértice do polígono, de lados contendo os lados do polígono que se encontram nesse vértice e que intersesta o interior do polígono e utilizar corretamente, neste contexto, os termos «ângulos adjacentes» a um lado.



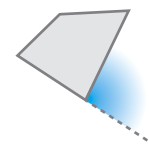
9. Designar um polígono por «convexo» quando qualquer segmento de reta que une dois pontos do polígono está nele contido e por «côncavo» no caso contrário.



10. Saber que um polígono é convexo quando (e apenas quando) os ângulos internos são todos convexos e que, neste caso, o polígono é igual à interseção dos respectivos ângulos internos.



11. Identificar um «ângulo externo» de um polígono convexo como um ângulo suplementar e adjacente a um ângulo interno do polígono.



12. Demonstrar que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a um ângulo giro.

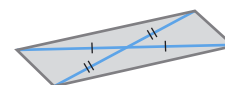
- *13. Reconhecer, dado um polígono, que a soma das medidas das amplitudes, em graus, dos respectivos ângulos internos é igual ao produto de 180 pelo número de lados diminuído de duas unidades e que associando a cada ângulo interno um externo adjacente a soma destes é igual a um ângulo giro.

14. Designar por «diagonal» de um dado polígono qualquer segmento de reta que une dois vértices não consecutivos.

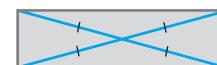


15. Reconhecer que um quadrilátero tem exatamente duas diagonais e saber que as diagonais de um quadrilátero convexo se intersectam num ponto que é interior ao quadrilátero.

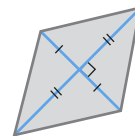
- *16. Reconhecer que um quadrilátero é um paralelogramo quando (e apenas quando) as diagonais se bissectam.



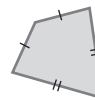
- *17. Reconhecer que um paralelogramo é um retângulo quando (e apenas quando) as diagonais são iguais.



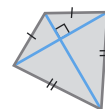
- *18.** Reconhecer que um paralelogramo é um losango quando (e apenas quando) as diagonais são perpendiculares.



- 19.** Identificar um «papagaio» como um quadrilátero que tem dois pares de lados consecutivos iguais e reconhecer que um losango é um papagaio.



- *20.** Reconhecer que as diagonais de um papagaio são perpendiculares.

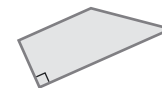


- 21.** Identificar «trapézio» como um quadrilátero simples com dois lados paralelos (designados por «bases») e justificar que um paralelogramo é um trapézio.

- 22.** Designar um trapézio com dois lados opostos não paralelos por «trapézio isósceles» quando esses lados são iguais e por «trapézio escaleno» no caso contrário.



- 23.** Designar um trapézio por «trapézio retângulo» quando tem um lado perpendicular às bases.



- *24.** Demonstrar que todo o trapézio com bases iguais é um paralelogramo.

3. Resolver problemas

- 1.** Resolver problemas envolvendo congruências de triângulos e propriedades dos quadriláteros, podendo incluir demonstrações geométricas.

9.3 Proposta de planificação

AULA	TAREFAS PROPOSTAS PARA AS AULAS	TEMPO	RECURSOS
1	Teste de diagnóstico de conhecimentos 5	90'	CAP
2	Tarefa A – Elementos de um polígono • Explicação da tarefa. • Execução a pares/individual da tarefa. • Discussão em grupo. Tarefa B – Ângulos de triângulos • Explicação da tarefa. • Execução em grupo da tarefa. • Discussão em grupo. Os alunos devem recorrer à rubrica Recorda ou efetuar antecipadamente uma análise da mesma em conjunto com o professor, de forma a prevenir dificuldades durante a execução das tarefas propostas.	5' 25' 15' 5' 25' 15'	Manual
3	Tarefa C – Critérios de igualdade LLL • Explicação da tarefa. • Execução a pares/individual da tarefa. • Discussão em grupo. Tarefa D – Critério de igualdade LAL • Explicação da tarefa. • Execução a pares/individual da tarefa. • Discussão em grupo. Os alunos devem recorrer à rubrica Recorda ou efetuar antecipadamente uma análise da mesma em conjunto com o professor, de forma a prevenir dificuldades durante a execução das tarefas propostas.	5' 25' 15' 5' 25' 15'	Manual
4	Tarefa E – Critério de igualdade ALA • Explicação da tarefa. • Execução a pares/individual da tarefa. • Discussão em grupo. Tarefa F – Não existência de um critério LLA • Explicação da tarefa. • Execução em grupo da tarefa. • Discussão em grupo. Os alunos devem recorrer à rubrica Recorda ou efetuar antecipadamente uma análise da mesma em conjunto com o professor, de forma a prevenir dificuldades durante a execução das tarefas propostas.	5' 25' 15' 5' 25' 15'	Manual

AULA	TAREFAS PROPOSTAS PARA AS AULAS	TEMPO	RECURSOS
5	Tarefa 1 • Explicação da tarefa. • Execução da tarefa em grupo. • Discussão em grande grupo. Figuras geométricas • Tarefas intermédias	5' 25' 15' 15' 30'	Manual
6	Polígonos • Tarefas intermédias Tarefa 2 • Explicação da tarefa. • Execução da tarefa em grupo. • Discussão em grande grupo.	15' 30' 5' 25' 15'	Manual 20 AULA DIGITAL
7	Quadriláteros • Tarefas intermédias Paralelogramos e papagaios • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
8	Trapézios • Tarefas intermédias Área de um papagaio • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
9	Área do trapézio • Tarefas intermédias Exercícios da remissão de fim de página	15' 30' 45'	Manual 20 AULA DIGITAL
10	Tarefas Finais Para as Tarefas Finais, o professor pode disponibilizar uma ou duas aulas práticas de forma a que os alunos consolidem as matérias lecionadas.	90' ou 180'	Manual 20 AULA DIGITAL
11	+RRC Sugere-se a formação de grupos de trabalho para a execução desta rubrica. A discussão das resoluções das questões colocadas deve ser efetuada em grande grupo.	90'	Manual

AULA	TAREFAS PROPOSTAS PARA AS AULAS	TEMPO	RECURSOS
12	Teste Final	90'	Manual 20 AULA DIGITAL
13	Tarefas de investigação • Explicação das tarefas. • Execução das tarefas em grupo. • Discussão em grande grupo. Sugere-se que sejam criados grupos de trabalho e que as diversas tarefas de investigação deste capítulo sejam distribuídas pelos grupos consoante as suas preferências.	10' 60' 20'	Manual
14	Outra tarefa: Ângulos e polígonos Esta tarefa suplementar que aqui é proposta efetua uma conexão entre as aprendizagens adquiridas ao longo do capítulo e no ciclo anterior.	90'	CAP

9.4 Propostas de resolução +RRC

1. Dominó

Objetivo principal: Desenvolver uma estrutura de raciocínio e pensamento geométrico.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho: Cortando 32 pedaços de papel, o aluno pode distribuí-los por um tabuleiro desenhado numa folha com quadrículas. Chegará, assim, à conclusão que essa situação não é possível, pois sobram sempre duas quadrículas pretas. Nesta altura, as suas tentativas devem ser suspensas, pensando que no tabuleiro nunca existem duas quadrículas pretas lado a lado, o que impedirá a colocação da última peça, dado que esta, tal como as outras, necessita de uma quadrícula branca e outra preta.

Estratégia de resolução possível:

Não, porque sobram sempre duas quadrículas pretas. Como no tabuleiro não existem duas quadrículas pretas lado a lado, a última peça não será colocada.

2. Uma dança de ângulos

Objetivo principal: Amplitude de ângulos.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho: Os alunos devem efetuar uma primeira leitura para se inteirarem do problema.

Estratégia de resolução possível:

Pretende-se que numa segunda leitura cheguem à conclusão que se trata de dois ângulos de 45° e outros dois de 60° ; um ângulo giro, 360° .

3. Descobre o ângulo

Objetivo principal: Amplitude de ângulos suplementares.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho: Este exercício torna-se muito simples se o aluno observar que tem dados a mais.

Estratégia de resolução possível:

O ângulo de 59° é completamente desnecessário na resolução do exercício, assim como as retas a vermelho e a cor de laranja: $180^\circ - 57^\circ = 123^\circ$.

4. Ângulos e quadriláteros

Objetivo principal: Amplitude de ângulos internos.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho: Nas figuras 3 e 4 contaram-se os ângulos criados com a divisão efetuada, que não são ângulos internos do quadrilátero. Para que se determine a soma das amplitudes dos quatro ângulos internos, basta unir dois vértices não adjacentes do quadrilátero e verificar que se originam dois triângulos.

Estratégia de resolução possível:

A partir do raciocínio mencionado na metodologia, o aluno deve conseguir dizer que a soma dos ângulos internos de um pentágono = 540° ; hexágono = 720° ; dodecágono = 1800° .

5. Polígono côncavo

Objetivo principal: Soma dos ângulos internos de um polígono côncavo. Diagonais.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho: É importante que se siga a sugestão dada na resolução do problema.

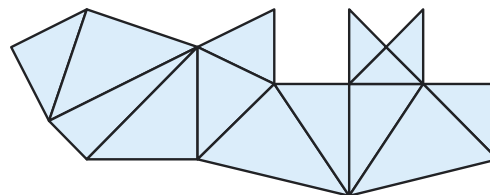
Estratégia de resolução possível:

Dividir o polígono em 14 triângulos e fazer $14 \times 180^\circ = 2520^\circ$.

Essa divisão tem formas distintas de ser efetuada e é importante que o aluno veja qual a melhor estratégia de resolução. Repare-se que os vértices dos triângulos devem ser vértices dos polígonos, para que a soma dos ângulos internos dos triângulos corresponda à soma dos ângulos internos do polígono.

Seguidamente, e antes de desenhar todas as diagonais possíveis

do polígono, era importante que o aluno propusesse uma forma de as contabilizar sem as desenhar, isto é, o polígono tem 16 vértices. Ao unirmos cada um dos vértices aos restantes 13 vértices (retiram-se os dois vértices que se encontram sobre o mesmo lado do vértice assinalado), teremos $16 \times 13 = 208$ diagonais. Como cada diagonal foi contada duas vezes, teremos 104 diagonais.



6. Soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono

Objetivo principal: Amplitude dos ângulos externos de um polígono.

Organização da turma: Pequenos grupos de trabalho.

Metodologia de trabalho: Na resolução do problema deve ser tida em conta a sugestão feita.

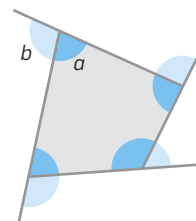
Estratégia de resolução possível:

$$a + b = 180^\circ$$

Soma das amplitudes dos ângulos internos: $(n - 2) \times 180$

Soma das amplitudes de todos os ângulos internos e externos: $n \times 180$.

Soma das amplitudes dos ângulos externos: $n \times 180 - (n - 2) \times 180 = n \times 180 - n \times 180 + 360 = 360$



7. Construção de paralelogramos

Objetivo principal: Construção de paralelogramos.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho: Sugere-se que se efetue uma leitura prévia do problema para minimizar erros de construção.

Estratégia de resolução possível:

- Construir um retângulo com comprimento 4 cm e largura 2 cm.
- Traçar um segmento com 3 cm ($[AB]$); em A marca-se um ângulo com 60° ; o ponto D distará 5 cm de A . Traçar o segmento $[AD]$ e a paralela a este que passa por B . Unir C a D .
- Desenhar um retângulo ou um quadrado.
- Traçar dois segmentos perpendiculares com 7 cm, que se intersectem nos pontos médios; unir as extremidades.
- Traçar um segmento $[AC]$ com 7 cm. Traçar a mediatriz de $[AC]$ (perpendicular que passa no ponto médio); traçar o segmento $[BD]$, com 7 cm, que é bissetado por $[AC]$. $[ABCD]$ é o quadrado que se queria construir.

8. Demonstrações de propriedades de quadriláteros

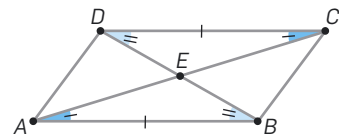
Objetivo principal: Propriedades dos quadriláteros.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho: Para efetuar as provas solicitadas, o aluno deve seguir os passos recomendados nas diversas etapas do problema.

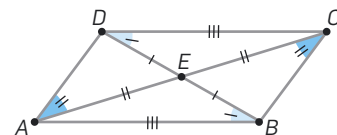
Estratégia de resolução possível:

8.1 b. Como $[ABCD]$ é um paralelogramo, os lados opostos são paralelos e iguais. Logo, $\overline{DC} = \overline{AB}$ e, como DC é paralela a AB , os ângulos alternos-internos DCA e BAC são iguais, assim como os ângulos CDB e ABD . Então, pelo critério ALA de igualdade de triângulos, os triângulos $[DEC]$ e $[BEA]$ são iguais.



c. Os segmentos de reta $[CE]$ e $[AE]$ são iguais uma vez que se opõem a ângulos iguais de triângulos iguais, pelo que E é ponto médio de $[AC]$. Da mesma forma se conclui que também é o ponto médio de $[DB]$.

8.2 b. Como $[ABCD]$ é um quadrilátero cujas diagonais se bisseçam, ou seja, tal que $\overline{DE} = \overline{EB}$ e $\overline{AE} = \overline{EC}$, então, na reflexão de centro E , os pontos A e C são imagens um do outro bem como os pontos B e D .



c. Tendo em conta a alínea anterior e sabendo que numa reflexão central as amplitudes dos ângulos são conservadas, podemos concluir que os ângulos ABD e CDB são iguais.

d. O mesmo argumento de conservação das amplitudes permite afirmar que os ângulos DAC e BCA são iguais.

e. Como os ângulos alternos-internos determinados em cada par de lados opostos por uma secante são iguais, os lados opostos do quadrilátero são paralelos, pelo que $[ABCD]$ é um paralelogramo.

9. Propriedades de um papagaio e de um paralelogramo

Objetivo principal: Propriedades do papagaio e do paralelogramo.

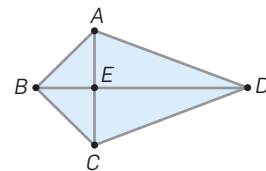
Organização da turma: Trabalho em grande grupo.

Metodologia de trabalho:

Esta tarefa deve ser feita em grande grupo, pois a sua dificuldade reside não no facto de o aluno encontrar justificação para as respostas solicitadas, mas sim em não saber concretizar a sua escrita.

Estratégia de resolução possível:

9.1 a. Um papagaio é um quadrilátero que tem dois pares de lados consecutivos iguais; como, por hipótese, $\overline{BA} = \overline{BC}$, também se tem $\overline{DA} = \overline{DC}$. Assim, os pontos B e D são ambos equidistantes dos pontos A e C , pelo que pertencem à mediatriz do segmento $[AC]$. Logo, a reta BD é a mediatriz do segmento de reta $[AC]$.



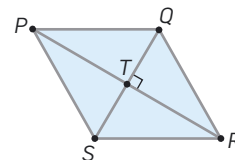
b. $[AC]$ e $[BD]$ são perpendiculares, pois a mediatriz de um segmento de reta é uma reta perpendicular a esse segmento de reta.

c. Basta observar que um losango é, em particular, um papagaio.

9.2 a. Como $[PQRS]$ é um paralelogramo, as diagonais bisseçam-se.

b. QS é a mediatriz de $[PR]$, pois é perpendicular a $[PR]$ no seu ponto médio T .

c. Sabe-se que lados opostos de um paralelogramo são iguais, ou seja, que $\overline{PQ} = \overline{SR}$ e que $\overline{SP} = \overline{RQ}$. Como QS é a mediatriz de $[PR]$, então $\overline{PQ} = \overline{QR}$; logo, os quatro lados do paralelogramo são iguais, pelo que este é um losango.



10. Propriedades de quadrados I

Objetivo principal: Algumas propriedades dos quadrados e dos losangos.

Organização da turma: Trabalho de pares.

Metodologia de trabalho:

Sugere-se que o aluno efetue a sua construção com régua e compasso e concretize em escrita matemática as suas justificações.

Estratégia de resolução possível:

Se um paralelogramo tem as diagonais iguais, então é um retângulo, ou seja, os ângulos internos são retos; como as diagonais são perpendiculares, então é um losango, ou seja, tem os lados iguais. Então, tem-se um paralelogramo com os lados iguais e os ângulos retos, ou seja, um quadrado. Inversamente, um quadrado é um losango, logo tem as diagonais perpendiculares. Como é também um retângulo, as diagonais são iguais.

11. Propriedades de quadrados II

Objetivo principal: Algumas propriedades dos quadrados e dos losangos.

Organização da turma: Trabalho de pares.

Metodologia de trabalho:

Sugere-se que o aluno efetue a sua construção com régua e compasso e concretize em escrita matemática as suas justificações.

Estratégia de resolução possível:

O quadrado é o único quadrilátero paralelogramo (diagonais bissetam-se), retângulo (diagonais são iguais) e papagaio (diagonais perpendiculares).

12. Propriedades de losangos

Objetivo principal: Algumas propriedades dos quadrados e dos losangos.

Organização da turma: Trabalho de pares.

Metodologia de trabalho:

Sugere-se que o aluno efetue a sua construção com régua e compasso e concretize em escrita matemática as suas justificações.

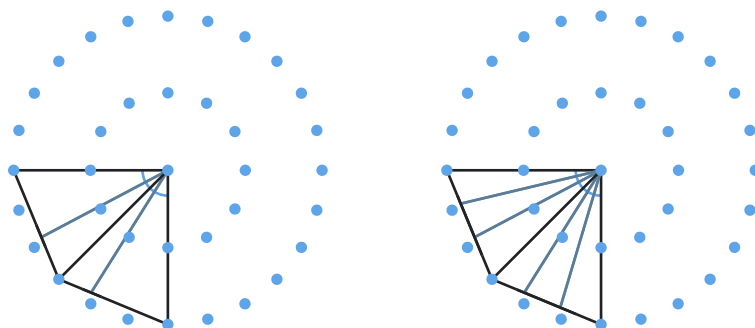
Estratégia de resolução possível:

Cada diagonal de um losango decompõe-no em dois triângulos iguais (critério LLL) e, portanto, com os ângulos correspondentes iguais. Assim, os ângulos internos que têm vértices nos extremos das diagonais ficam divididos em dois ângulos iguais, sendo, portanto, bissetados pelas diagonais.

9.5 Sugestões de exploração das tarefas de investigação

Ângulos no geoplano

1. Pretende-se que o aluno veja algumas formas de dividir em partes iguais um ângulo reto, para que depois veja qual a amplitude dos ângulos que obteve em cada um dos casos.



2. O aluno, desta forma, vai criar uma unidade de medida, o que lhe permitirá medir a amplitude aproximada de cada um dos ângulos desenhados no geoplano.
3. Neste item, o aluno vai assumir como referência a amplitude de um ângulo reto para que assim possa determinar a amplitude dos ângulos desenhados no geoplano.
4. Neste item, o aluno já terá de propor um processo de resolução, o que poderá ser diferente de aluno para aluno, originando, assim, procedimentos diferentes.

Paralelogramos

Com *software* geométrico, pretende explorar-se as propriedades dos quadriláteros, estabelecendo relações entre as mesmas.

Essa exploração conduz ao preenchimento das seguintes tabelas.

	Lados	Ângulos
Paralelogramo não retângulo	Iguais dois a dois	Iguais dois a dois
Retângulo	Iguais dois a dois	Retos
Losango	Todos iguais	Iguais dois a dois
Quadrado	Todos iguais	Retos

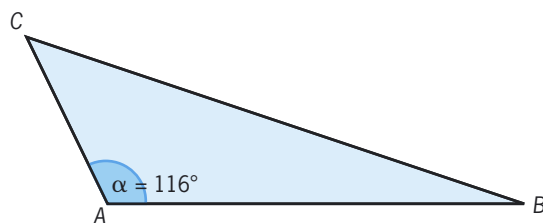
	As diagonais bissetam-se sempre	As diagonais têm sempre o mesmo comprimento	As diagonais são sempre perpendiculares
Paralelogramo não retângulo	Sim	Não	Não
Retângulo	Sim	Sim	Não
Losango	Sim	Não	Sim
Quadrado	Sim	Sim	Sim

Pretende-se, desta forma, proporcionar ao aluno contacto com *software* geométrico, ao mesmo tempo que lhe propomos que investigue algumas das propriedades dos quadriláteros.

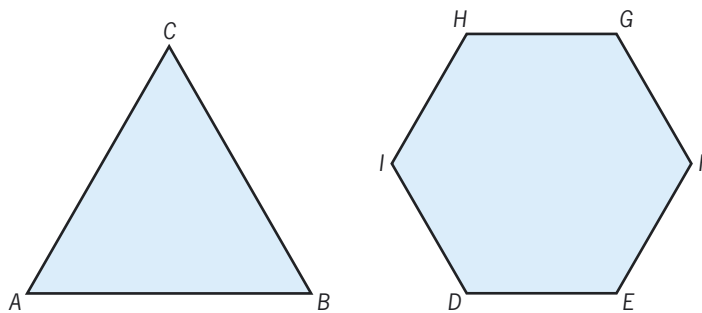
9.6 Outra tarefa

Ângulos e polígonos

- Como sabes, podes usar a expressão algébrica $180(n - 2)$ para determinar a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados.
 - Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um decágono (polígono de 10 lados)?
 - Quantos lados tem um polígono cuja soma das amplitudes dos seus ângulos internos é 3420° ? E 8460° ? Mostra como chegaste à resposta.
 - Será que existe algum polígono cuja soma das amplitudes dos ângulos internos seja 4830° ? Justifica.
- Na figura, sabe-se que a amplitude do ângulo ACB é tripla da do ângulo CBA .



- Escreve uma equação que permita determinar a amplitude do ângulo CBA .
 - Resolve a equação que escreveste na questão anterior e indica a amplitude dos ângulos CBA e ACB .
- Na figura estão representados um triângulo equilátero e um hexágono regular. A medida dos lados do triângulo tem mais 1 cm do que a dos lados do hexágono e o perímetro do hexágono é o duplo do perímetro do triângulo.



- Enuncia o problema por meio de uma equação.
 - Resolve a equação. O que podes concluir?

Indicações metodológicas/resolução da tarefa

Natureza da tarefa

Tarefa de conexão.

Pré-requisitos

Ângulos, amplitudes e perímetros.

Objetivo

- Relacionar ângulos, amplitudes de ângulos, ângulos internos de um polígono, perímetros com as equações.

Organização da turma

Trabalho individual.

Metodologia da aula

Os alunos devem começar por ler a tarefa toda e as dúvidas existentes devem ser expostas em grande grupo, pois as dúvidas de um aluno poderão ser as dúvidas de outros.

Proposta de resolução:

1.

1.1 1440°

1.2 21 e 49 lados. Adicionando ao ângulo dado 360° e dividindo este valor por 180° ou, ainda:

$$180(n - 2) = 8460 \Leftrightarrow 180n - 360 = 8460 \Leftrightarrow 180n = 8460 + 360 \Leftrightarrow n = \frac{8820}{180} = 49$$

1.3 Não, porque utilizando o mesmo processo da alínea anterior não se obtém um resultado inteiro.

2.

2.1 $3x + x + 116 = 180$

2.2 Resolvendo a equação, obtemos que a amplitude do ângulo CBA é de 16° e que a amplitude do ângulo ACB é de 48° .

3.

3.1 $6x = 2 \times [3 \times (x + 1)]$, ou seja, $6 \times (x + 1)$.

3.2 Resolvendo esta equação, obtemos $0x = 6$. Sendo esta uma equação impossível, podemos dizer que não existe uma situação que verifique as condições do problema enunciado.

- A. Agudo** **B. Obtuso** **C. Reto** **D. Raso**

Parte 2

COTAÇÃO

1. Determina as amplitudes desconhecidas em cada uma das figuras seguintes.

a. 2

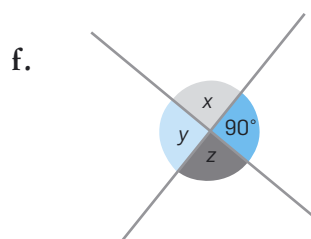
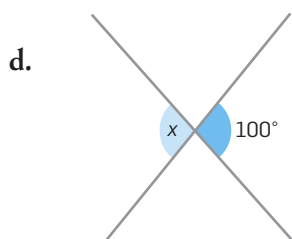
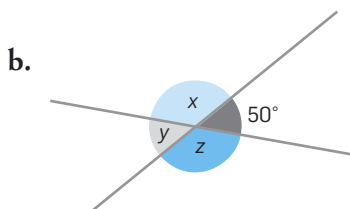
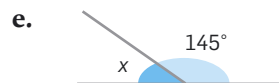
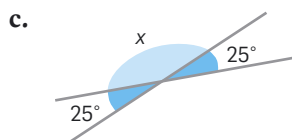
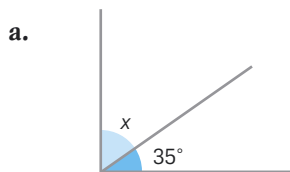
b. 6

c. 2

d. 2

e. 2

f. 6



2. Para cada uma das situações seguintes, determina a amplitude dos ângulos representados por letras, referindo a propriedade aplicada.

a. 5

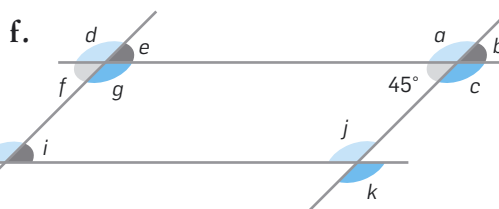
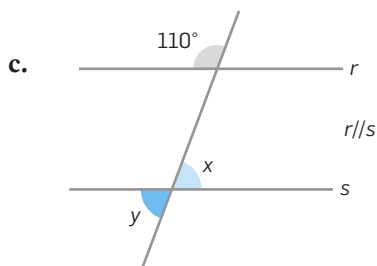
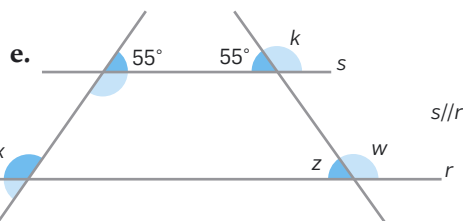
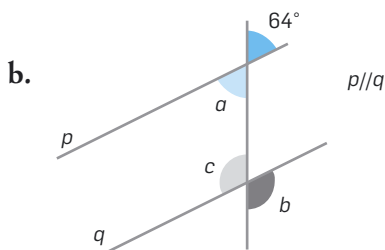
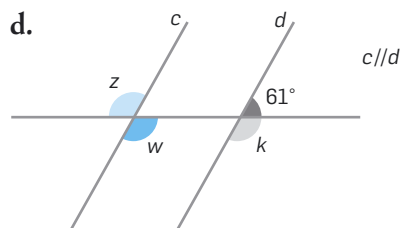
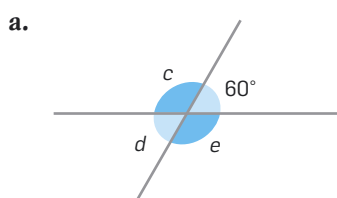
b. 5

c. 5

d. 7

e. 8

f. 8



AUTOAVALIAÇÃO

Pontuação	Os teus conhecimentos são:	Então:
90%-100%	Excelentes	Continua a estudar para maneres ou melhoraes o teu desempenho.
70%-89%	Bons	
50%-69%	Razoáveis	Continua a trabalhar, pois podes melhorar.
20%-49%	Pouco satisfatórios	Tens de estudar muito para melhorar o teu desempenho.
0%-19%	Insatisfatórios	

Soluções do teste de diagnóstico de conhecimentos 6

Parte 1

1. (C)
2. (B)
3. (D)
- 4.

- 4.1 (A)
- 4.2 (B)
- 4.3 (D)
- 4.4 (C)

Parte 2

1. a. $x = 55^\circ$
 b. $y = 50^\circ$; $x = z = 130^\circ$
 c. $x = 155^\circ$
 d. $x = 100^\circ$
 e. $x = 35^\circ$
 f. $x = y = z = 90^\circ$
2. a. $d = 60^\circ$, porque é um ângulo verticalmente oposto ao ângulo de 60° ;
 $c = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, porque os ângulos de 60° e c são suplementares;
 $c = e = 120^\circ$, porque são ângulos verticalmente opostos.
 b. $a = 64^\circ$, porque é um ângulo verticalmente oposto ao ângulo de 64° ;
 $c = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$, porque os ângulos de 64° e c são suplementares;
 $c = b = 116^\circ$, porque são ângulos verticalmente opostos.
 c. $x = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$, porque os ângulos de 110° e x são ângulos de lados paralelos (suplementares);
 $x = y = 70^\circ$, porque são ângulos verticalmente opostos.

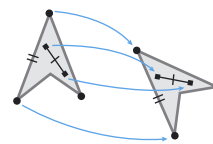
- d. $z = 61^\circ$, porque os ângulos de 61° e z são ângulos de lados paralelos;
 $k = 180^\circ - 61^\circ = 119^\circ$, porque os ângulos de 61° e k são suplementares;
 $z = w = 61^\circ$, porque são ângulos verticalmente opostos.
- e. $k = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$, porque os ângulos de 55° e k são suplementares;
 $w = k = 125^\circ$, porque são ângulos de lados paralelos;
 $z = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$, porque os ângulos de 125° e z são suplementares;
 $y = 55^\circ$, porque os ângulos de 55° e y são alternos-externos;
 $x = 125^\circ$, porque os ângulos x e o ângulo suplementar ao ângulo de 55° são alternos-internos;
- f. $b = 45^\circ$, porque os ângulos de 45° e b são ângulos verticalmente opostos;
 $a = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, porque a e b são ângulos suplementares;
 $a = c = 135^\circ$, porque são ângulos verticalmente opostos;
 $a = j = 135^\circ$ e $c = k = 135^\circ$, porque são pares de ângulos de lados paralelos;
 $d = a = 135^\circ$, $e = b = 45^\circ$, $g = c = 135^\circ$, $f = 45^\circ$, $i = e = 45^\circ$ e $h = d = 135^\circ$, porque são ângulos de lados paralelos.

10.2 Metas curriculares

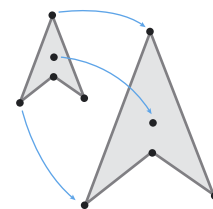
Paralelismo, congruência e semelhança

4. Identificar e construir figuras congruentes e semelhantes

1. Identificar duas figuras geométricas como «isométricas» ou «congruentes» quando é possível estabelecer entre os respetivos pontos uma correspondência um a um de tal modo que pares de pontos correspondentes são equidistantes e designar uma correspondência com esta propriedade por «isometria».

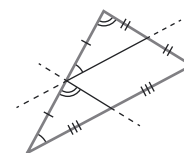


2. Identificar duas figuras geométricas como «semelhantes» quando é possível estabelecer entre os respetivos pontos uma correspondência um a um de tal modo que as distâncias entre pares de pontos correspondentes são diretamente proporcionais, designar a respetiva constante de proporcionalidade por «razão de semelhança», uma correspondência com esta propriedade por «semelhança» e justificar que as isometrias são as semelhanças de razão 1.

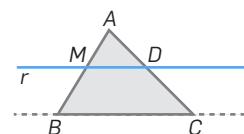


3. Saber que toda a figura semelhante a um polígono é um polígono com o mesmo número de vértices e que toda a semelhança associada faz corresponder aos vértices e aos lados de um respetivamente os vértices e os lados do outro.
4. Saber que dois polígonos convexos são semelhantes quando (e apenas quando) se pode estabelecer uma correspondência entre os vértices de um e do outro de tal modo que os comprimentos dos lados e das diagonais do segundo se obtêm multiplicando os comprimentos dos correspondentes lados e das diagonais do primeiro por um mesmo número.

5. Decompor um dado triângulo em dois triângulos e um paralelogramo traçando as duas retas que passam pelo ponto médio de um dos lados e são respetivamente paralelas a cada um dos dois outros, justificar que os dois triângulos da decomposição são iguais e concluir que todos os lados do triângulo inicial ficam assim bisetados.

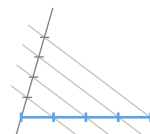


- *6 Reconhecer, dado um triângulo $[ABC]$, que se uma reta r intersestar o segmento $[AB]$ no ponto médio M e o segmento $[AC]$ no ponto D , que $\overline{AD} = \overline{DC}$ quando (e apenas quando) r é paralela a BC e que, nesse caso, $\overline{BC} = 2\overline{MD}$.



- *7. Enunciar o teorema de Tales e demonstrar as condições de proporcionalidade nele envolvidas por argumentos geométricos em exemplos com constantes de proporcionalidade racionais.
- *8. Reconhecer que dois triângulos são semelhantes quando os comprimentos dos lados de um são diretamente proporcionais aos comprimentos dos lados correspondentes do outro e designar esta propriedade por «critério LLL de semelhança de triângulos».
- *9. Reconhecer, utilizando o teorema de Tales, que dois triângulos são semelhantes quando os comprimentos de dois lados de um são diretamente proporcionais aos comprimentos de dois dos lados do outro e os ângulos por eles formados em cada triângulo são iguais e designar esta propriedade por «critério LAL de semelhança de triângulos».

- *10. Reconhecer, utilizando o teorema de Tales, que dois triângulos são semelhantes quando dois ângulos internos de um são iguais a dois dos ângulos internos do outro e designar esta propriedade por «critério AA de semelhança de triângulos».
- *11. Reconhecer, utilizando o teorema de Tales, que dois triângulos semelhantes têm os ângulos correspondentes iguais.
- *12. Reconhecer que dois quaisquer círculos são semelhantes, com razão de semelhança igual ao quociente dos respectivos raios.
- *13. Saber que dois polígonos são semelhantes quando (e apenas quando) têm o mesmo número de lados e existe uma correspondência entre eles tal que os comprimentos dos lados do segundo são diretamente proporcionais aos comprimentos dos lados do primeiro e os ângulos formados por lados correspondentes são iguais e reconhecer esta propriedade em casos concretos por triangulações.
- *14. Dividir, dado um número natural n , um segmento de reta em n segmentos de igual comprimento utilizando régua e compasso, com ou sem esquadro.



5. Construir e reconhecer propriedades de homotetias

1. Identificar, dado um ponto O e um número racional positivo r , a «homotetia de centro O e razão r » como a correspondência que a um ponto M associa o ponto M' da semirreta $\overrightarrow{OM}$ tal que $\overline{OM'} = r \overline{OM}$.
2. Identificar, dado um ponto O e um número racional negativo r , a «homotetia de centro O e razão r » como a correspondência que a um ponto M associa o ponto M' da semirreta oposta a $\overrightarrow{OM}$ tal que $\overline{OM'} = -r \overline{OM}$.
3. Utilizar corretamente os termos «homotetia direta», «homotetia inversa», «ampliação», «redução» e «figuras homotéticas».
4. Reconhecer que duas figuras homotéticas são semelhantes, sendo a razão de semelhança igual ao módulo da razão da homotetia.
5. Construir figuras homotéticas utilizando quadrículas ou utilizando régua e compasso.

6. Resolver problemas

1. Resolver problemas envolvendo semelhanças de triângulos e homotetias, podendo incluir demonstrações geométricas.

Medida

7. Medir comprimentos de segmentos de reta com diferentes unidades

- *1. Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, um segmento de reta $[AB]$ de medida m e um segmento de reta $[CD]$ de medida m' , que a medida de $[CD]$ tomando o comprimento de $[AB]$ para unidade de medida é igual a $\frac{m'}{m}$.

- *2. Reconhecer que o quociente entre as medidas de comprimento de dois segmentos de reta se mantém quando se altera a unidade de medida considerada.
- 3. Designar dois segmentos de reta por «comensuráveis» quando existe uma unidade de comprimento tal que a medida de ambos é expressa por números inteiros.
- *4. Reconhecer que se existir uma unidade de comprimento tal que a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo isósceles têm medidas naturais respetivamente iguais a a e a b então $a^2 = 2b^2$, decompondo o triângulo em dois triângulos a ele semelhantes pela altura relativa à hipotenusa, e utilizar o Teorema fundamental da aritmética para mostrar que não existem números naturais a e b nessas condições, mostrando que o expoente de 2 de na decomposição em números primos do número natural a^2 teria de ser simultaneamente par e ímpar.
- *5. Justificar que a hipotenusa e um cateto de um triângulo retângulo isósceles não são comensuráveis e designar segmentos de reta com esta propriedade por «incomensuráveis».
- *6. Reconhecer que dois segmentos de reta são comensuráveis quando (e apenas quando), tomando um deles para unidade de comprimento, existe um número racional positivo r tal que a medida do outro é igual a r .

8. Calcular medidas de áreas de quadriláteros

- *1. Provar, fixada uma unidade de comprimento, que a área de um papagaio (e, em particular, de um losango), com diagonais de comprimentos D e d unidades, é igual a $\frac{D \times d}{2}$ unidades quadradas.
- 2. Identificar a «altura» de um trapézio como a distância entre as bases.
- *3. Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, que a área de um trapézio de bases de comprimentos B e b unidades e altura a unidades é igual a $\frac{B+b}{2} \times a$ unidades quadradas.

9. Relacionar perímetros e áreas de figuras semelhantes

- *1. Provar, dados dois polígonos semelhantes ou dois círculos que o perímetro do segundo é igual ao perímetro do primeiro multiplicado pela razão da semelhança que transforma o primeiro no segundo.
- *2. Provar que dois quadrados são semelhantes e que a medida da área do segundo é igual à medida da área do primeiro multiplicada pelo quadrado da razão da semelhança que transforma o primeiro no segundo.
- 3. Saber, dadas duas figuras planas semelhantes, que a medida da área da segunda é igual à medida da área da primeira multiplicada pelo quadrado da razão da semelhança que transforma a primeira na segunda.

10. Resolver problemas

- 1. Resolver problemas envolvendo o cálculo de perímetros e áreas de figuras semelhantes.

10.3 Proposta de planificação

AULA	TAREFAS PROPOSTAS PARA AS AULAS	TEMPO	RECURSOS
1	Teste de diagnóstico de conhecimentos 6	90'	CAP
2	Tarefa A – Números e operações • Explicação da tarefa. • Execução a pares/individual da tarefa. • Discussão em grupo. Tarefa B – Proporcionalidade direta e geometria • Explicação da tarefa. • Execução em grupo da tarefa. • Discussão em grupo. Os alunos devem recorrer à rubrica Recorda ou efetuar antecipadamente uma análise da mesma em conjunto com o professor, de forma a prevenir dificuldades durante a execução das tarefas propostas.	5' 25' 15' 5' 25' 15'	Manual
3	Tarefa 1 • Explicação da tarefa. • Execução da tarefa em grupo. • Discussão em grande grupo. Figuras semelhantes • Tarefas intermédias	5' 25' 15' 15' 30'	Manual
4	Figuras geométricas semelhantes • Tarefas intermédias Teorema de Tales • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
5	Teorema de Tales (continuação) • Tarefas intermédias Critérios de semelhança de triângulos • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
6	Aplicações da semelhança de triângulos • Tarefas intermédias Polígonos semelhantes • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
7	Relação entre perímetros e áreas de polígonos semelhantes • Tarefas intermédias Divisão de um segmento de reta em partes iguais • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual

AULA	TAREFAS PROPOSTAS PARA AS AULAS	TEMPO	RECURSOS
8	Homotetias • Tarefas intermédias Método da quadricula • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
9	Medida • Tarefas intermédias Segmentos de reta comensuráveis. Decomposição de um triângulo pela altura referente à hipotenusa • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual
10	Tarefas Finais Para as Tarefas Finais, o professor pode disponibilizar uma ou duas aulas práticas de forma a que os alunos consolidem as matérias lecionadas.	90' ou 180'	Manual 20 AULA DIGITAL
11	+RRC Sugere-se a formação de grupos de trabalho para a execução desta rubrica. A discussão das resoluções das questões colocadas deve ser efetuada em grande grupo.	90' ou 180'	Manual 20 AULA DIGITAL
12	Teste Final	90'	Manual 20 AULA DIGITAL
13	Tarefa de investigação • Explicação da tarefa. • Execução da tarefa em grupo. • Discussão em grande grupo. Sugere-se que sejam criados grupos de trabalho para a execução desta tarefa.	10' 60' 20'	Manual

10.4 Propostas de resolução +RRC

1. Teorema de Tales

Objetivo principal: Relacionar medidas de segmento. Semelhança de figuras.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho: Sugere-se que o aluno efetue a construção solicitada com o rigor necessário para que possa fazer medições precisas.

Estratégia de resolução possível:

b. As razões devem ser iguais.

c. Os triângulos são semelhantes, porque têm ângulos correspondentes iguais.

2. Sangaku

Objetivo principal: Aplicar a semelhança de triângulos.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho: O aluno, com o apoio da descrição da figura, deve começar por encontrar ângulos iguais para relacionar os triângulos.

Estratégia de resolução possível:

Triângulos $[BGA]$ e $[DCB]$; triângulos $[EFD]$ e $[DCB]$, pois têm ângulos iguais.

3. Semelhança de triângulos no século XVI

Objetivo principal: Aplicar a semelhança de triângulos.

Organização da turma: Trabalho de pares.

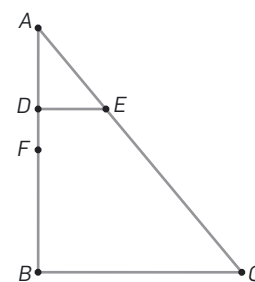
Metodologia de trabalho: Pretende-se que o aluno arranje estratégias para a resolução do problema e as discuta posteriormente em grande grupo.

Estratégia de resolução possível:

A imagem ao lado esquematiza a situação. Os triângulos $[ADE]$ e $[ABC]$ são semelhantes. Portanto, os comprimentos dos lados correspondentes são proporcionais. O construtor de minas pode saber o comprimento da corda $[AC]$ e ainda o comprimento de $[AE]$.

Calculando $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$ obtém-se a razão de semelhança, r . Como também é fácil ao

mineiro saber os comprimentos $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$, os lados $[AB]$ e $[BC]$ calculam-se a partir da razão de semelhança: $\overline{BC} = \overline{DE} \times r$ e $\overline{AB} = \overline{AD} \times r$. Ora, $\overline{BC}$ é o comprimento do túnel a escavar na horizontal. Para se calcular o comprimento do túnel escavado na vertical, $\overline{BF}$, mede-se $[DF]$, também ao alcance do mineiro, e faz-se $\overline{BF} = \overline{BA} - \overline{AD} - \overline{DF}$.



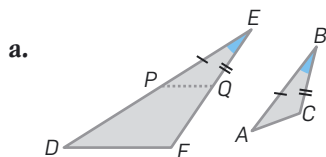
4. Demonstração do critério de semelhança LAL

Objetivo principal: Demonstrar o critério de semelhança LAL.

Organização da turma: Trabalho de pares.

Metodologia de trabalho: É fundamental cumprir as diversas etapas de construção para ser possível resolver a situação proposta.

Estratégia de resolução possível:



b. São iguais pelo critério de igualdade LAL.

c. $\frac{ED}{EP} = \frac{EF}{EQ}$

d. O teorema de Tales justifica o paralelismo.

e. $\frac{ED}{EP} = \frac{DF}{PQ}$ e $\frac{EF}{EQ} = \frac{DF}{PQ}$, pelo que $\frac{ED}{BA} = \frac{DF}{AC}$ e $\frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}$.

f. Pode-se concluir que os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são semelhantes.

5. Demonstração do critério de semelhança AA

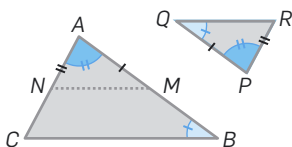
Objetivo principal: Demonstrar o critério de semelhança AA.

Organização da turma: Trabalho de pares.

Metodologia de trabalho: É fundamental cumprir as diversas etapas de construção para ser possível resolver a situação proposta.

Estratégia de resolução possível:

5.1



a. São iguais pelo critério de igualdade LAL.

b. Como os triângulos $[PQR]$ e $[AMN]$ são iguais, os ângulos NMA e PQR são iguais, pelo que o ângulo NMA também é igual ao ângulo CBA , o que comprova o paralelismo de MN e BC .

5.2 Permite concluir que os comprimentos dos lados correspondentes nos triângulos $[AMN]$ e $[ABC]$ são diretamente proporcionais.

5.3 Pela alínea anterior e como $[PQR]$ e $[AMN]$ são iguais, concluímos que os comprimentos dos lados correspondentes nos triângulos $[PQR]$ e $[ABC]$ são proporcionais, pelo que, por LLL, os triângulos são semelhantes.

6. Triângulos semelhantes têm ângulos correspondentes iguais

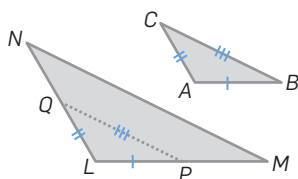
Objetivo principal: Estudar relações entre triângulos semelhantes.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho: Nesta altura já é possível que o aluno desenvolva um trabalho autónomo, ainda que este tenha de ser supervisionado.

Estratégia de resolução possível:

a.



b. $\frac{\overline{LN}}{\overline{LQ}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{LP}}$

c. A proporção anterior garante o paralelismo.

d. $\overline{PQ}$

e. $\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{AB}}$ e $\overline{AB} = \overline{LP} \Rightarrow \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{LP}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}}$. Logo, $\overline{BC} = \overline{PQ}$.

f. São iguais pelo critério de igualdade LLL.

g. O ângulo $\angle CAB$ corresponde a $\angle LNM$; o ângulo $\angle ABC$ corresponde a $\angle LMN$; o ângulo $\angle ACB$ corresponde a $\angle LNM$. Como $\angle LNM = \angle QLP$, $\angle LMN = \angle LPQ$ e $\angle LNM = \angle LQP$, então $\angle LNM = \angle CAB$, $\angle LMN = \angle ABC$ e $\angle LNM = \angle ACB$.

7. Hexágonos semelhantes

Objetivo principal: Averiguar algumas propriedades de polígonos semelhantes.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho: Após o desenvolvimento individual desta tarefa deve ser feita uma discussão em grande grupo.

Estratégia de resolução possível:

a. São semelhantes pelo critério LAL.

b. Os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são semelhantes e, como tal, os lados correspondentes são proporcionais.

c. Como $\angle BCA = \angle C'A'B'$ e $\angle CBD = \angle C'D'B'$ tem de ser $\angle DCA = \angle D'C'A'$. Analogamente, $\angle CAD = \angle C'A'D'$ e, pelo critério AA, $[DCA]$ e $[D'C'A']$ são semelhantes.

d. Porque os triângulos são semelhantes e, portanto, os lados correspondentes são proporcionais.

e. Análoga às alíneas anteriores.

f. Os triângulos correspondentes em cada hexágono seriam semelhantes.

g. Os hexágonos são semelhantes porque os comprimentos dos lados e das diagonais seriam proporcionais.

8. Razão entre perímetros de polígonos semelhantes

Objetivo principal: Relacionar o perímetro de polígonos semelhantes.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho: Efetuar uma discussão em grande grupo após a resolução individual do problema.

Estratégia de resolução possível:

a. $a + b + c + d + e$

b. Como o pentágono P_2 é semelhante, de razão r , ao pentágono P_1 , então o perímetro do segundo pentágono é: $ra + rb + rc + rd + re = r(a + b + c + d + e)$

c. Como $P_2 = rP_1$, então o quociente indicado é igual a r .

d. $? = r$

9. Homotetia

Objetivo principal: Construir homotetias.

Organização da turma: Trabalho individual.

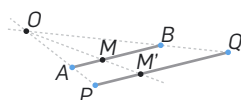
Metodologia de trabalho: Se possível, sugere-se a utilização de *software* de geometria dinâmica.

Estratégia de resolução possível:

Considerando o ponto O interseção das retas AP e BQ , a homotetia de centro O e razão $r = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}$ transforma o segmento de reta $[AB]$ no segmento de reta $[PQ]$.

De facto, considerando uma semirreta entre $\dot{O}P$ e $\dot{O}Q$ e os respetivos pontos de interseção M e M' com $[AB]$ e $[PQ]$, a imagem de M pela homotetia é o ponto M' . Basta observar que M' pertence à semirreta $\dot{O}M$ e que, pelo teorema de Tales, $\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = r$.

Note-se que, pelo teorema de Tales, $r = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{3}{2}$.



10. Comensuráveis

Objetivo principal: Relacionar medidas.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho: Esta tarefa apresenta alguma dificuldade na sua resolução, pois o aluno está mais familiarizado com valores numéricos. No entanto, isto deve ser desmistificado no início da resolução do problema.

Estratégia de resolução possível:

a. $\frac{m'}{m}$

d. $4m$ e $4m'$; $\frac{m'}{m}$

b. $2m$ e $2m'$; $\frac{m'}{m}$

e. $\frac{m}{k}$ e $\frac{m'}{k}$; $\frac{m'}{m}$

c. $3m$ e $3m'$; $\frac{m'}{m}$

11. O triângulo de Sierpinski

Tarefa de cariz histórico, onde se exploram algumas das propriedades das figuras geométricas. Nesta tarefa é, também, possível analisar as fases de construção de uma figura e constatar que algumas das suas propriedades são inalteráveis.

Objetivo principal: Triângulos semelhantes.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho: Esta tarefa não apresenta qualquer dificuldade na sua resolução, pelo que os alunos conseguirão resolvê-la facilmente.

Estratégia de resolução possível:

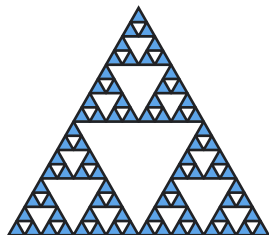
11.1

- a. 17 triângulos.
- b. A – redução; B – ampliação; C – congruentes.

11.2

- a. 53 triângulos.
- b. D – ampliação; E – ampliação; F – congruente; G – congruentes.

11.3



O processo consiste em dividir sucessivamente cada triângulo azul em quatro triângulos equiláteros, sendo três azuis e o triângulo central branco.

12. Árvore pitagórica

Objetivo principal: Polígonos e triângulos semelhantes.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho: Efetuar uma leitura conjunta para que a interpretação do problema seja feita corretamente.

Estratégia de resolução possível:

- a. Quadrados, triângulos e um heptágono.
- b. São, porque têm pelo menos dois ângulos iguais (logo, têm os ângulos todos iguais).
- c. São. Os seus lados correspondem aos dois lados iguais do triângulo 5, pois os ângulos opostos são iguais.
- d. A – 5; B – 1; C – 9; D – ampliação; E – redução; F – ampliação; G – congruentes.
- e. A 6.^a geração terá 32 quadrados. O número de quadrados de cada uma das gerações é dado pela sequência numérica: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$

5. Infinitamente...

Objetivo principal: Critérios de semelhança.

Organização da turma: Trabalho individual.

Organização da turma: Recordar os alunos de que a tarefa já foi resolvida anteriormente e, sobretudo, recordar as conclusões a que se chegou.

Estratégia de resolução possível:

Todos os triângulos têm pelo menos dois ângulos iguais. Pelo critério AA, podemos afirmar que os triângulos são todos semelhantes entre si. Esta tarefa volta a ser recordada nas sequências, para que se determine a lei de formação que origina a formação dos triângulos e quadrados.

10.5 Sugestões de exploração da tarefa de investigação

Homotetia dinâmica

Para além de efetuar a construção de uma homotetia no *Geogebra*, o aluno pode efetuar as tarefas que se encontram no *Manual Multimédia*, onde se encontram exercícios interativos.

11. Medidas de localização

11.1 Teste de diagnóstico de conhecimentos 7

Parte 1

Nos itens que se seguem, só uma das alíneas corresponde à resposta correta. Indica-a.

COTAÇÃO

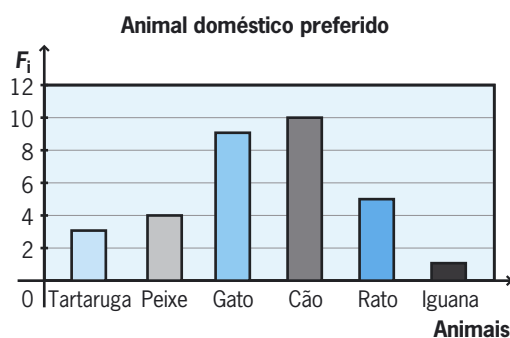
1. Fez-se um inquérito sobre a cor dos olhos de um grupo de pessoas. Os resultados obtidos encontram-se registados na tabela seguinte. 8

Cor dos olhos	Azul	Verde	Castanho	Preto
Número de pessoas	2	4	6	3

A moda da cor dos olhos deste grupo de pessoas é:

- A. azul. B. verde. C. castanho. D. preto.

2. Efetuou-se um inquérito a um grupo de crianças sobre o animal doméstico preferido. Os resultados estão representados no gráfico seguinte. 8



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- A. O animal preferido é o gato e o menos preferido é a iguana.
 B. O animal preferido é o peixe e o menos preferido é o rato.
 C. O animal preferido é o cão e o menos preferido é a iguana.
 D. O animal preferido é o cão e o menos preferido é a tartaruga.

3. Num inquérito feito a um grupo de adolescentes sobre os doces mais consumidos, registaram-se os seguintes dados. 8



A percentagem de gelados consumidos é de:

- A. 20% B. 25% C. 35% D. 30%

Parte 2

COTAÇÃO

1. Os membros de um clube de modelismo têm as seguintes idades:

30 39 37 35 39 31 31 32 37 38
31 36 31 32 37 38 37 37 39 30

1.1 Quantos membros tem o clube?

8

1.2 Completa a tabela seguinte.

10

Idades	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
Número de pessoas										

1.3 Qual é a moda de idades?

8

1.4 Quantas destas pessoas têm idade superior a 35 anos?

10

2. Na tabela seguinte encontram-se as temperaturas registadas nos primeiros dez dias de agosto, numa dada localidade.

15

Dias	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperaturas	31 °C	27 °C	33 °C	32 °C	29 °C	27 °C	29 °C	30 °C	35 °C	32 °C

Determina a temperatura média destes primeiros dez dias de agosto naquela localidade.

3. A Gracinda registou no caderno as classificações que obteve na disciplina de Matemática ao longo do ano.

48%, 54%, 82%, 64%, 72%, 56%

3.1 Qual é a classificação mais alta? E a mais baixa?

8

3.2 Qual é a amplitude das classificações obtidas pela Gracinda?

7

3.3 Determina a média das classificações nos testes de Matemática da Gracinda. Apresenta o resultado aproximado às unidades.

10

AUTOAVALIAÇÃO

Pontuação	Os teus conhecimentos são:	Então:
90%-100%	Excelentes	Continua a estudar para maneres ou melhoraes o teu desempenho.
70%-89%	Bons	
50%-69%	Razoáveis	Continua a trabalhar, pois podes melhorar.
20%-49%	Pouco satisfatórios	Tens de estudar muito para melhorar o teu desempenho.
0%-19%	Insatisfatórios	

Soluções do teste de diagnóstico de conhecimentos 7

Parte 1

1. (C)
2. (C)
3. (D)

Parte 2

1.

1.1 20

1.2

Idades	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
Número de pessoas	2	4	2	0	0	1	1	5	2	3

1.3 37 anos.

1.4 11 pessoas.

2. 30,5 °C

3.

3.1 82% ; 48%

3.2 34%

3.3 $\approx 63\%$

11.2 Metas curriculares

Medidas de localização

1. *Representar, tratar e analisar conjuntos de dados*

1. Construir, considerado um conjunto de dados numéricos, uma sequência crescente em sentido lato repetindo cada valor um número de vezes igual à respetiva frequência absoluta, designando-a por «sequência ordenada dos dados» ou simplesmente por «dados ordenados».
2. Identificar, dado um conjunto de n dados numéricos, a «mediana» como o valor central no caso de n ser ímpar (valor do elemento de ordem $\frac{n+1}{2}$ da sequência ordenada dos dados), ou como a média aritmética dos dois valores centrais (valores dos elementos de ordens $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$ da sequência ordenada dos dados) no caso de n ser par e representar a mediana por « $\tilde{x}$ » ou « Me ».
3. Determinar a mediana de um conjunto de dados numéricos.
- *4. Reconhecer, considerado um conjunto de dados numéricos, que pelo menos metade dos dados têm valores não superiores à mediana.
5. Designar por «medidas de localização» a média, a moda e a mediana de um conjunto de dados.

2. *Resolver problemas*

1. Resolver problemas envolvendo a análise de dados representados em tabelas de frequência, diagramas de caule-e-folhas, gráficos de barras e gráficos circulares.

11.3 Proposta de planificação

AULA	TAREFAS PROPOSTAS PARA AS AULAS	TEMPO	RECURSOS
1	Teste de diagnóstico de conhecimentos 7	90'	CAP
2	Tarefa A – Marca de consolas • Explicação da tarefa. • Execução a pares/individual da tarefa. • Discussão em grupo. Tarefa B – O nosso planeta • Explicação da tarefa. • Execução em grupo da tarefa. • Discussão em grupo. Os alunos devem recorrer à rubrica Recorda ou efetuar antecipadamente uma análise da mesma em conjunto com o professor, de forma a prevenir dificuldades durante a execução das tarefas propostas	5' 25' 15' 5' 25' 15'	Manual
3	Tarefas • Explicação das tarefas. • Execução das tarefas em grupo. • Discussão em grande grupo. Dados ordenados • Tarefas intermédias	5' 25' 15' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
4	Mediana. • Tarefas intermédias Média, moda ou mediana? • Tarefas intermédias	15' 30' 15' 30'	Manual 20 AULA DIGITAL
5	Tarefas Finais Para as Tarefas Finais, o professor pode disponibilizar uma ou duas aulas práticas de forma a que os alunos consolidem as matérias lecionadas.	90' ou 180'	Manual 20 AULA DIGITAL
6	+RRC Sugere-se a formação de grupos de trabalho para a execução desta rubrica. A discussão das resoluções das questões colocadas deve ser efetuada em grande grupo.	90'	Manual
7	Teste Final	90'	Manual 20 AULA DIGITAL
8	Outra tarefa: Área ardida Esta tarefa suplementar que aqui é proposta efetua uma conexão entre as aprendizagens adquiridas ao longo do capítulo e no ciclo anterior.	90'	CAP

11.4 Propostas de resolução +RRC

1. O lanche do João

Objetivo principal: Análise de gráficos de barras.

Organização da turma: Trabalho individual ou em pequeno grupo.

Metodologia de trabalho: Relacionar esta situação com a vivência real dos alunos.

Estratégia de resolução possível:

Através da análise de um gráfico de barras, o aluno concluirá que o João necessita de pedalar durante 19 minutos e 12 segundos para gastar as calorias correspondentes aos alimentos ingeridos ao lanche.

2. *Alnia* e *Belnia*

Objetivo principal: Análise de gráficos de barras e gráficos circulares.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho: O professor deve assegurar-se de que os alunos conseguem relacionar gráficos de naturezas diferentes.

Estratégia de resolução possível:

De acordo com o gráfico de barras (jornal *Alnia*), o valor aproximado do consumo médio diário de água é de 250 ℓ.

Por exemplo, a partir do gráfico de barras, calcula-se a frequência relativa e obtém-se: banhos (40%); W.C. (20%); roupa (12%); loiça (10%); comida (6%); outros (12%), que não são iguais nos dois gráficos.

3. Mochilas

Objetivo principal: Fazer a correspondência entre gráficos de barras e gráficos circulares.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho: Sugere-se que o professor realce a importância de os alunos associarem esta situação à sua experiência pessoal com mochilas.

Estratégia de resolução possível:

O gráfico A não está correto porque a barra correspondente aos «pés e tornozelos» tem altura superior à barra correspondente ao item «outros», contrariamente ao que é indicado no gráfico circular. O gráfico C não está correto porque, por exemplo, as barras correspondentes às «mãos, punhos e cotovelos» e «ombros e costas» têm altura inferior à barra correspondente ao item «cabeça e face», contrariamente ao que é indicado no gráfico circular.

4. Em busca do erro

Objetivo principal: Análise de gráficos de barras, circulares e pictogramas.

Organização da turma: Trabalho em grupos de pares.

Metodologia de trabalho: Com esta tarefa pretende-se, essencialmente, desenvolver as capacidades de observação e de crítica dos alunos.

Estratégia de resolução possível:

- a. Tipo de sangue de 32 alunos da turma: o total de alunos no gráfico é de 30 em vez de 32.
- b. Tempo de leitura semanal da Joana: o pictograma dá-nos a quantidade de livros lidos durante uma semana e não o tempo de leitura, como o seu título diz.
- c. e f. Estes gráficos não são pictogramas, pois correspondem a gráficos de barras onde se substituíram as barras verticais por desenhos alusivos ao tema.
- d. Iogurtes consumidos: devia ser um histograma em vez de um gráfico de barras.
- e. Número de sandes vendidas: na quinta-feira tem o símbolo da chávena em vez do da sandes.

5. Produção de fruta tropical

Objetivo principal: Análise de gráficos de barras e gráficos de linhas.

Organização da turma: Trabalho individual.

Metodologia de trabalho: O professor deve assegurar-se de que os alunos conseguem relacionar gráficos de naturezas diferentes.

Estratégia de resolução possível:

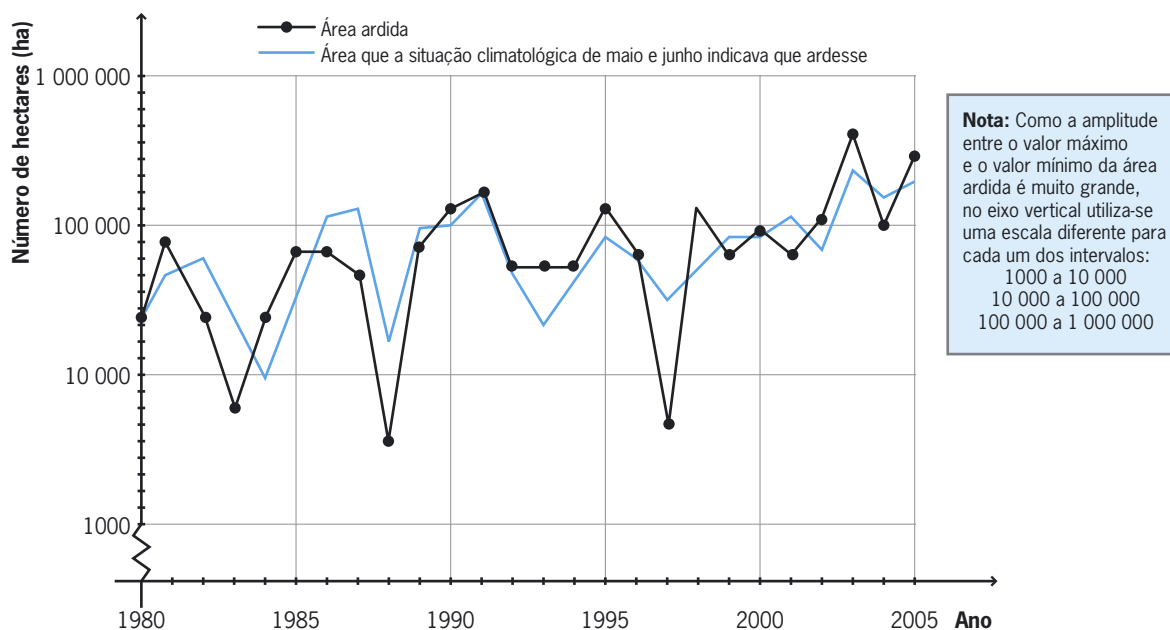
Quantidade média de cada cultura, em milhões de frutos, que foi produzida no período de 1995 a 2000: tangerina = 5250; abacaxi = 1080; mamão = 1470; laranja = 107 550.

O gráfico que apresenta a produção e que representa a moda entre os anos de 1995 e 2000 é o gráfico da produção de laranja, com 645 300 milhões de frutos.

11.5 Outra tarefa

Área ardida

Os gráficos seguintes mostram a área ardida nos meses de julho e agosto, entre 1980 e 2005, em Portugal, e a previsão da área que arderia, segundo um modelo.



1. Qual é o valor da área ardida no ano de 2000? E no ano de 2005?
2. Qual foi o ano em que se registou maior área ardida? E menor?
3. Determina a diferença entre o número de hectares ardidos em 1980 e o número de hectares ardidos em 2005.
4. Em que anos a previsão de área ardida feita pelo modelo é aproximadamente igual à área efetivamente ardida?
5. Qual foi o ano em que a previsão se afastou mais da área efetivamente ardida?

Adaptado de *Projeto 1001 Itens*, GAVE.

Indicações metodológicas/resolução da tarefa

Natureza da tarefa

Representação gráfica, análise de gráficos.

Pré-requisitos

Análise de gráficos.

Objetivo

- Aplicar os conhecimentos adquiridos na análise de situações reais.

Organização da turma

Trabalho individual.

Metodologia da aula

Assegurar-se inicialmente de que os alunos efetuam uma análise correta do gráfico em questão e estabelecem comparações entre as linhas representadas.

Proposta de resolução:

1. 100 000 ha e 500 000 ha.
2. 2003. 1988.
3. Cerca de 465 000.
4. Nos anos de 1991, 1992, 1996 e 2000.
5. Em 1997.

