

SEMELHANÇA DE FIGURAS



APOIO INTERNET
www.projectos.TE.pt/links

Escher
Matemáticos notáveis
Curiosidades e aplicações da Geometria



M.C. Escher's «Smaller and Smaller» ©2005 The M.C. Escher Company. All rights reserved. www.mcescher.com

A Geometria

«Por toda a parte existe a Geometria (...)»

Platão, grego (428 ou 427 a.C. – 348 ou 347 a.C.)

«(...) mas são precisos olhos para vê-la (...)»

Leonhard Euler, suíço (1707–1783)

«(...) e inteligência para compreendê-la (...)»

Lagrange, franco-italiano (1755–1819)

«(...) e alma de artista para admirá-la.»

Malba Tahan, brasileiro (1895–1974)

ACTIVIDADE DE INTRODUÇÃO

Medir alturas

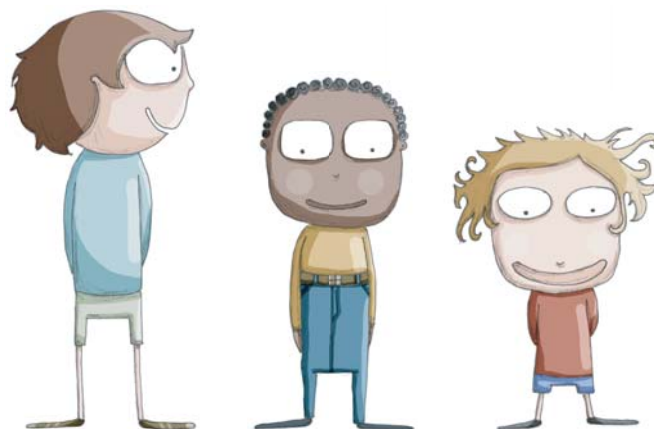
O Júlio, o Pedro e o Lourenço têm alturas muito próximas. No entanto, só o Júlio é que sabe quanto mede exactamente. Discutiam e faziam suposições, mas não chegavam a um acordo.

Entretanto, apareceu o Professor Pimenta, que logo disse:

— Eu tenho uma fita métrica e podia desde já resolver esse problema, mas aproveitemos o Sol que hoje faz para fazemos um pouco de Matemática.

Os três amigos olharam-se, surpreendidos, mas nada disseram, pois a excentricidade do Professor Pimenta era conhecida entre todos.

O Professor colocou os três amigos em fila, primeiro o Pedro, depois o Lourenço e por fim o Júlio, seguindo uma ordem decrescente de alturas.



Como estava um dia de Sol, aparecia a sombra de cada um deles no chão. Os três amigos repararam que o Professor Pimenta teve o cuidado de fazer coincidir a sombra da cabeça do Júlio com o local onde o Lourenço tinha os pés e o mesmo aconteceu entre o Lourenço e o Pedro.

O Professor perguntou:

— Júlio quanto medes? — Enquanto media no chão os comprimentos das sombras do Júlio, do Lourenço e do Pedro.

— 1,25 metros, Professor. Eh, Professor, a minha sombra tem a mesma medida que a minha altura? — Perguntou o Júlio.

O Professor começou a fazer umas contas e disse:

— Nem sempre, depende da hora do dia e da incidência dos raios solares. Por exemplo, agora a tua sombra é maior que a tua altura. Pronto já está. O Pedro mede $\psi\zeta\chi$ e o Lourenço mede $\xi\psi\delta$. Adeus meninos.

Os três amigos olharam-se, admirados, e o Pedro afirmou:

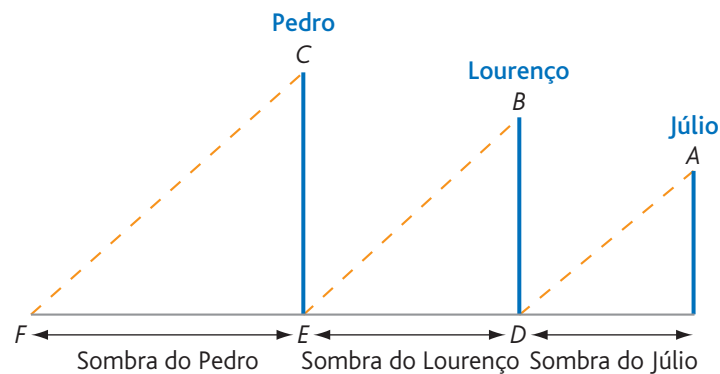
— É mesmo do Professor Pimenta, foi-se embora e não nos disse como é que conseguiu saber a nossa altura.

— Penso que foi de propósito para nós tentarmos descobrir. E por que não o fazemos? Repetimos o que ele fez e tentamos raciocinar. — Disse o Lourenço.

Começaram por esboçar no caderno um desenho para marcarem as medidas, mas como o Professor Pimenta se foi embora, a tua ajuda é muito importante.

Após algumas medições, apontaram os seguintes dados numa tabela:

	Medidas das sombras	Medidas das alturas
Júlio	1,5 m	1,25 m
Lourenço	1,68 m	?
Pedro	1,8 m	?



- Com uma régua une a tracejado os pontos A e D , os pontos B e E e os pontos C e F . Que figuras geométricas obtiveste?
- Compara as três figuras obtidas e diz qual destas frases se ajusta melhor ao que observas:
«As três figuras geométricas são iguais.»
«As três figuras geométricas são parecidas.»

- Determina o quociente:

$$\frac{\text{Medida da sombra do Júlio}}{\text{Medida da altura do Júlio}}$$

- O que representa o valor obtido? Escolhe a frase que melhor se ajusta ao que observas:
«O número de vezes que a medida da sombra do Júlio é maior que a sua altura.»
«O número de vezes que a altura do Júlio é maior que a sua sombra.»
- Divide o comprimento da sombra do Júlio pelo valor obtido no quociente anterior. Que valor obtiveste?
- À medida que as alturas dos meninos vão aumentando, o que acontece à sua sombra, aumenta ou diminui?
- Pelo facto de todas as medições terem sido feitas à mesma hora do dia, podemos concluir que a relação existente entre as sombras e as alturas do Lourenço e do Pedro mantém-se constante. Determina a altura de cada um.
- Será que existe uma relação entre as semelhanças das figuras geométricas e o valor calculado anteriormente que resulta de uma operação de divisão entre as medidas dos seus lados? Expõe algumas ideias sobre o que acabaste de ler.



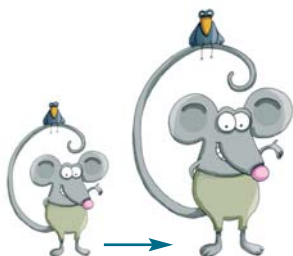
Em Matemática, as palavras «semelhante», «parecido» ou «idêntico» não são sinónimos. A única comparação de figuras que tem significado matemático é a **semelhança**.



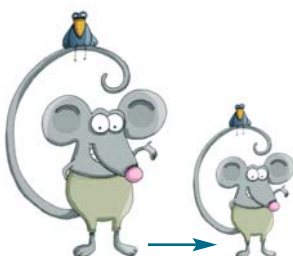
Figuras semelhantes:



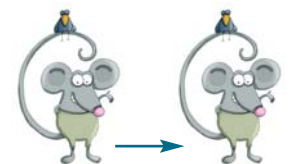
Ampliação



Redução



Igualdade geométrica



Figuras não semelhantes

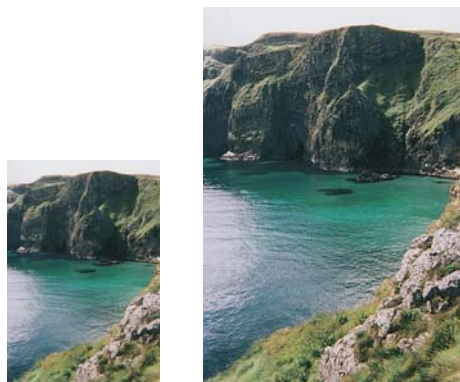


Figuras semelhantes

Figuras semelhantes

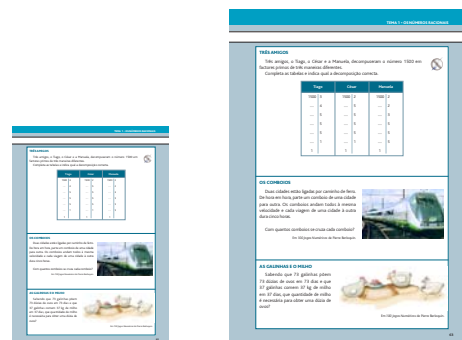
Já deves ter usado inúmeras vezes no dia-a-dia a palavra **semelhantes** para comparar figuras parecidas. No entanto, em Matemática definimos de forma muito precisa figuras semelhantes:

Duas figuras são **semelhantes** se têm a mesma forma.



Se tiveres uma fotografia e quiseres fazer um quadro para o teu quarto, amplias a fotografia. Estás perante figuras semelhantes.

Quando tiras uma fotocópia, esta é uma figura semelhante à original, podendo ser **igual**, uma **redução** ou uma **ampliação**.

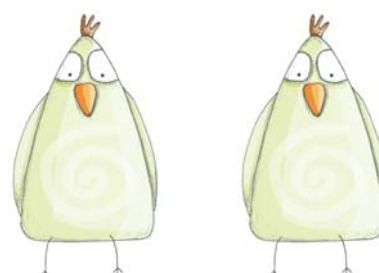


Estas duas figuras são realmente parecidas. No entanto, não têm exactamente a mesma forma. Logo, não são semelhantes.

Estamos perante uma **ampliação** quando aumentamos uma figura, mantendo a sua forma. Pelo contrário, se a diminuirmos, mantendo a forma, temos uma **redução**. No caso de serem mantidas a forma e a dimensão, estamos perante uma **isometria**, isto é, temos duas **figuras geometricamente iguais**. Dizemos então:

Duas figuras são **geometricamente iguais** se têm a mesma forma e o mesmo tamanho.

Podemos então classificar uma semelhança de três formas: ou se trata de uma ampliação, ou de uma redução ou as figuras são geometricamente iguais.



Exercícios propostos

1. Analisa, justificando, se as situações seguintes relacionam figuras semelhantes.

1.1 Dois irmãos gémeos.

1.2 Um texto e uma sua fotocópia reduzida.

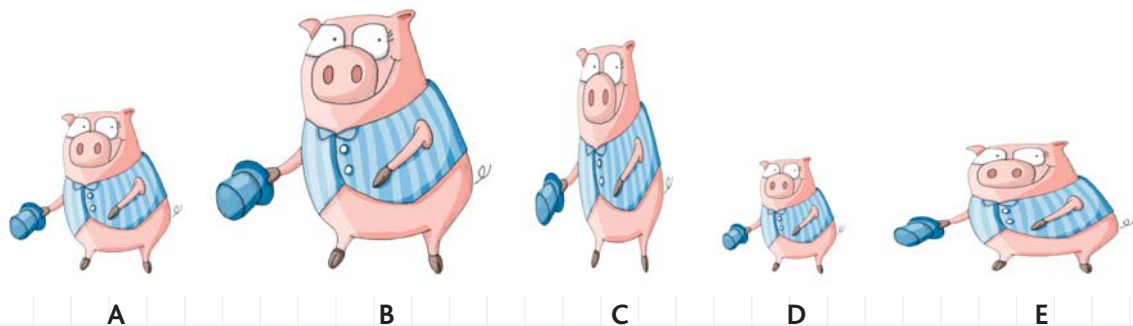
1.3 Um monumento e a sua maquete.

1.4 Uma fotografia de uma criança com cinco anos e uma fotografia da mesma criança com oito anos.

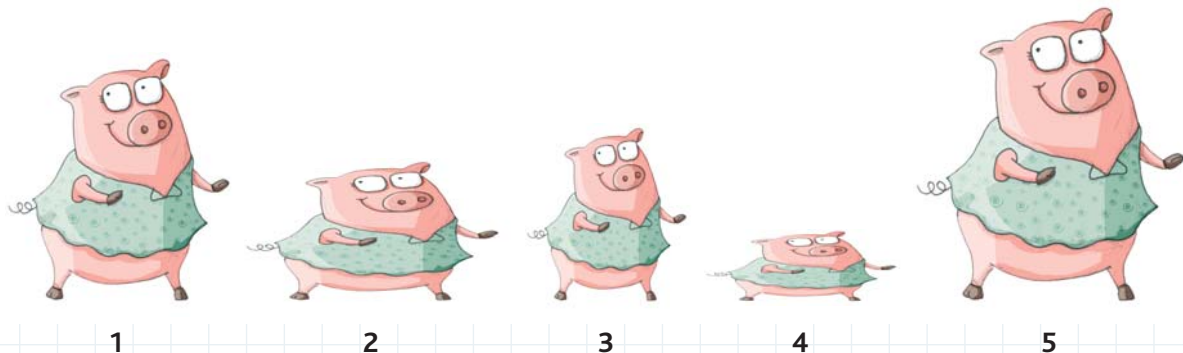
1.5 Uma imagem no ecrã do computador e essa imagem projectada na parede por um projector de vídeo, colocando o projector perpendicular à parede.

1.6 Tu e a tua imagem reflectida num espelho.

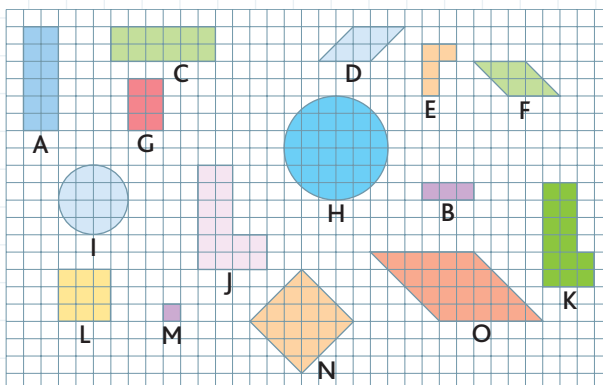
2. Do seguinte conjunto de figuras, indica as que são semelhantes à A.



3. Das seguintes imagens, indica quais são semelhantes a 1 e quais são semelhantes a 2.



4. Observa as figuras seguintes:



4.1 Indica três figuras com forma diferente.

4.2 Indica todos os conjuntos de figuras semelhantes.

4.3 Indica uma figura que seja uma redução da figura J.

4.4 Como classificas a semelhança de E para J?

4.5 Encontras figuras geometricamente iguais? Quais? Porquê?

4.6 Quais destas figuras são polígonos?

**DICA**

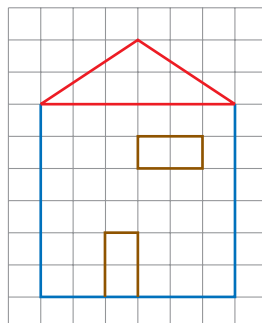
Quando constróis figuras semelhantes debes ter atenção a todos os pormenores. Por exemplo:

- No caso da construção da extremidade do telhado, debes considerar a sua altura e não a medida do segmento oblíquo, que não consegues medir com base nas quadrículas.
- A porta da casa dista de uma das paredes duas quadrículas. Logo, quando a reduzimos para metade, deverá estar a uma quadrícula de distância dessa parede. Por outro lado, se a porta original tem uma quadrícula de largura, a transformada deverá ter meia quadrícula de largura.

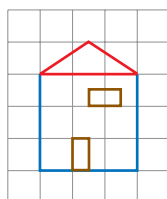
Construção de figuras semelhantes

Método da quadrícula

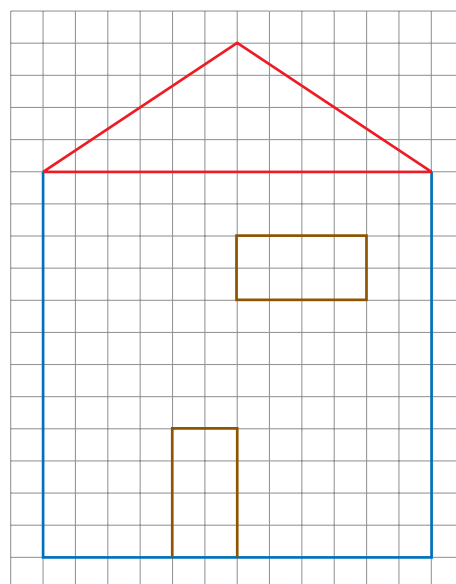
Podes usar o teu caderno quadriculado para construíres figuras semelhantes a uma figura original, reduzindo-a ou ampliando-a.



1



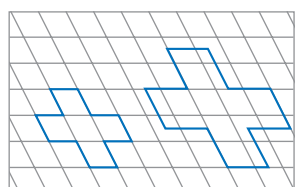
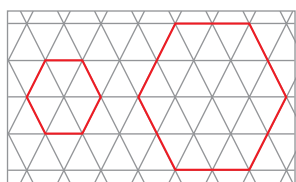
2



3

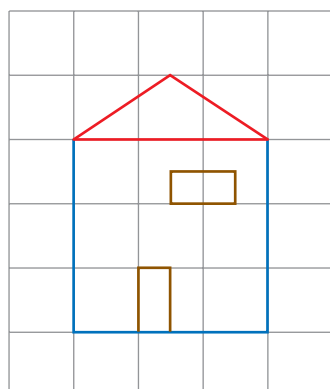
**CURIOSIDADE**

Existem vários padrões, além das quadrículas, que nos permitem construir figuras semelhantes. Repara nas seguintes ampliações:



Repara que existe uma proporção entre as quadrículas da figura original e do seu transformado. No caso da redução, têm metade das quadrículas. No caso da ampliação, todos os lados da figura têm o dobro das quadrículas.

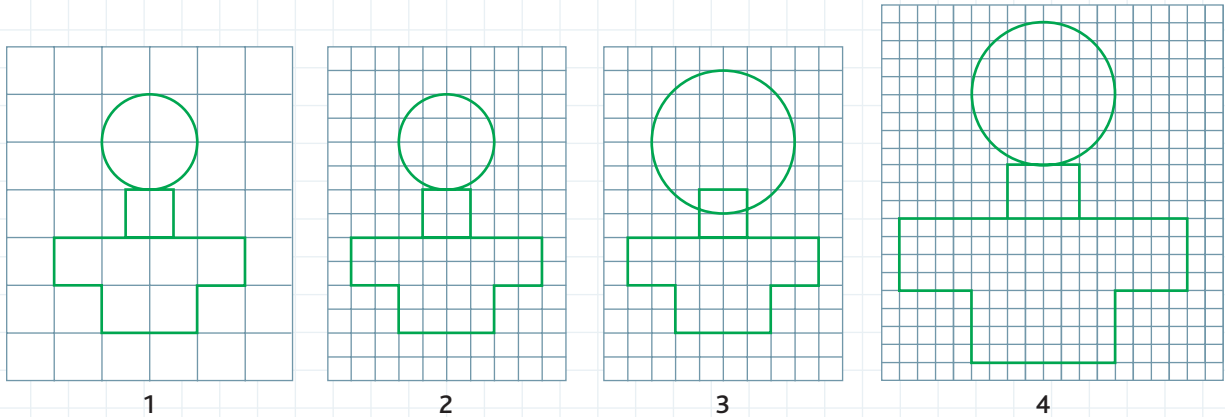
Outra forma de reduzir ou ampliar figuras com este método é utilizar quadrículas de tamanhos diferentes.



Repara que, neste caso, temos de novo uma ampliação da figura 2. No entanto, foram as quadrículas a serem ampliadas para o dobro.

Exercícios propostos

5. Observa as figuras seguintes:



Classifica as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas e corrige as falsas:

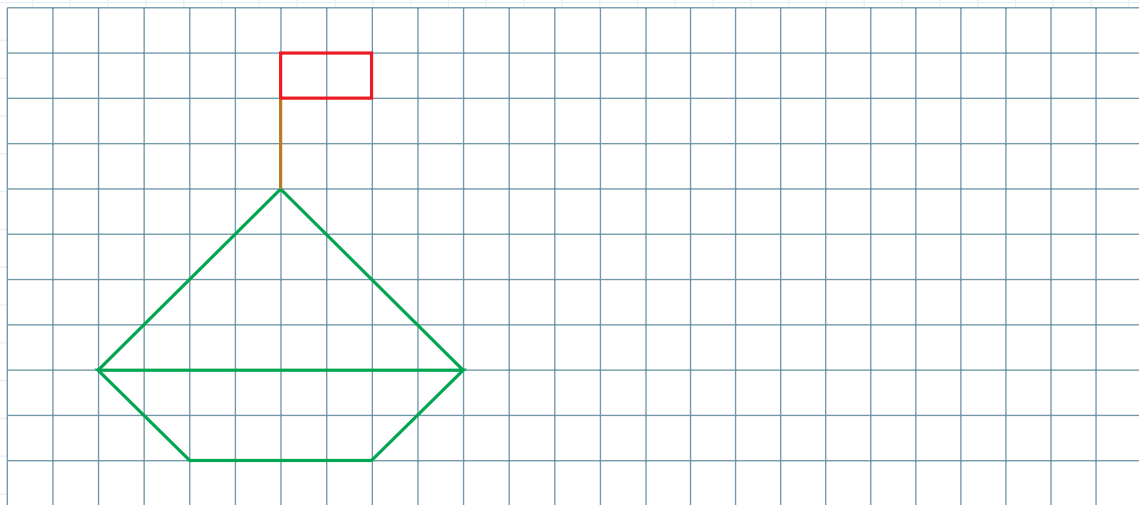
5.1 A figura 1 é uma ampliação da figura 2.

5.3 As figuras 1 e 2 são geometricamente iguais.

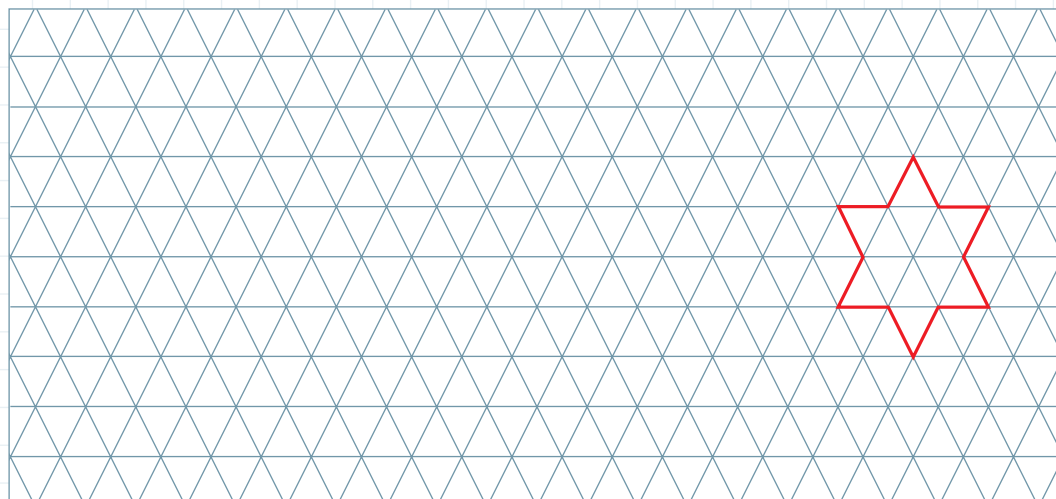
5.2 A figura 2 é uma redução da figura 4.

5.4 A figura 3 é semelhante à figura 4.

6. Constrói, utilizando o método da quadrícula, uma figura semelhante à seguinte, com metade do tamanho.



7. Desenha uma ampliação, com o dobro das medidas dos lados, da figura seguinte:

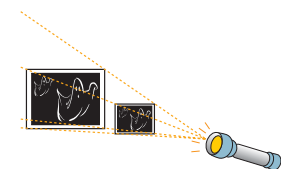




CURIOSIDADE

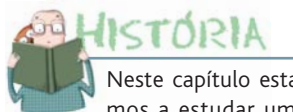
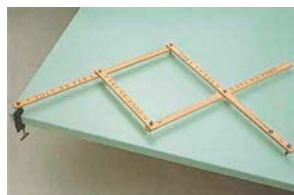
Faz homotetias em casa: numa cartolina preta desenha uma figura a teu gosto e recorta-a.

No escuro, aponta uma lanterna à figura e projecta-a na parede (podes fazer figuras fantasmagóricas).



APLICAÇÕES

O **pantógrafo** é um instrumento utilizado para fazer ampliações e reduções e, por esse motivo, muito utilizado na indústria.



HISTÓRIA

Neste capítulo estamos a estudar uma área específica da Matemática, a Geometria, concretamente a Geometria Euclidiana, em homenagem a Euclides, um dos primeiros estudiosos das maravilhas geométricas, assim como Pitágoras, Arquimedes ou Tales de Mileto.



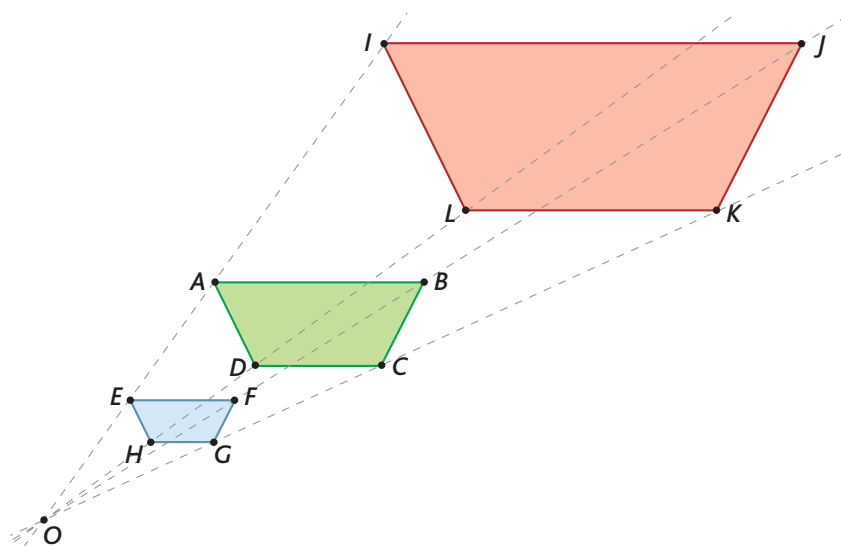
Construção de figuras semelhantes e exemplos

Método da homotetia

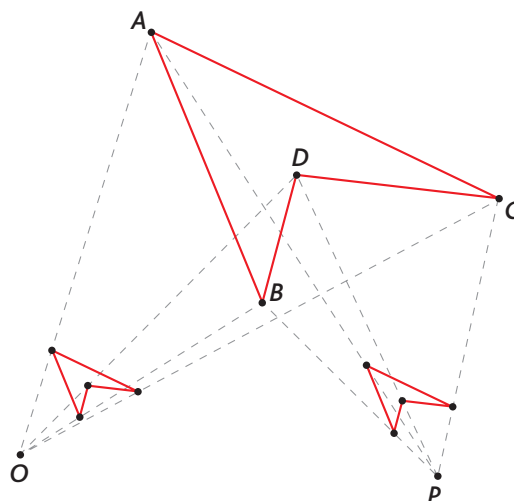
Utilizaremos o método da **homotetia** para efectuarmos uma redução e uma ampliação da figura geométrica $[ABCD]$.

Procedimento:

- Primeiro, marcamos um ponto O , ao qual chamamos **centro da homotetia**.
- Marcamos segmentos de recta desde O até todos os vértices da figura: $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ e $[OD]$.
- Seguidamente, sobre cada um dos segmentos, marcamos pontos de acordo com a semelhança que queremos fazer. Se, por exemplo, quisermos reduzir a figura para metade do tamanho, marcamos os pontos médios dos segmentos $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ e $[OD]$, que são os pontos E , F , G e H , respectivamente. Se quisermos ampliar a figura, por exemplo para o dobro, duplicamos a medida dos segmentos e marcamos pontos nas extremidades desses segmentos: I , J , K e L .
- Por fim, basta unir os pontos resultantes em cada um dos casos e obtemos a semelhança pretendida.



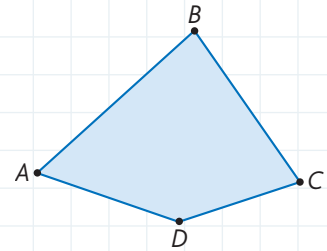
A homotetia é independente do ponto que consideramos para seu centro. As figuras resultantes continuam a ser iguais mudando somente a sua posição em relação à figura original. Neste caso, a figura original foi reduzida para um quarto do seu tamanho por duas homotetias de centros diferentes. No entanto, as figuras resultantes são geometricamente iguais.



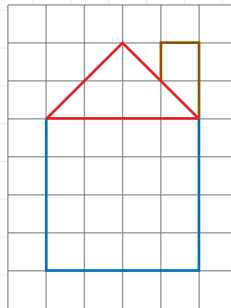
Exercícios propostos

Para a resolução dos exercícios que se seguem é necessário o uso de régua graduada.

8. Copia a figura ao lado para o teu caderno e desenha, pelo método da homotetia, uma ampliação e uma redução com o dobro e metade do tamanho, respectivamente.



9. Constrói duas figuras semelhantes à seguinte, ampliando-a ou reduzindo-a, recorrendo ao método da homotetia.

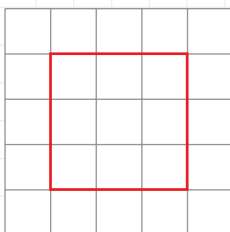


10. Desenha o rectângulo seguinte no teu caderno e marca dois centros de homotetia diferentes. Constrói, relativamente a cada um dos centros, a respectiva homotetia de igual razão. O que concluis do seu transformado?



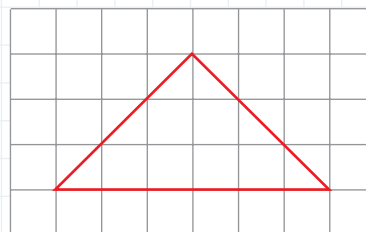
11. Neste exercício deves construir figuras semelhantes às seguintes. Junto a cada uma é indicado se a deves ampliar ou reduzir e a variação de tamanho que se deverá verificar.

11.1



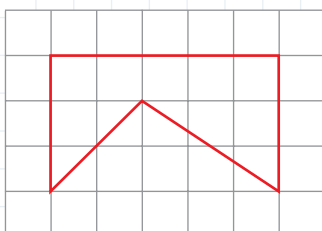
Redução: $\frac{1}{3}$

11.3



Ampliação: 2

11.2



Ampliação: 1,5

11.4



Redução: $\frac{1}{4}$



Um **polígono** é uma figura geométrica plana limitada por segmentos de recta – lados – e em cujos vértices se encontram exactamente dois lados.

Polígonos convexos (polígonos cujos prolongamentos dos lados pertencem ao seu exterior):



Polígonos côncavos (polígonos em que o prolongamento de um ou mais lados intersectam o seu interior):



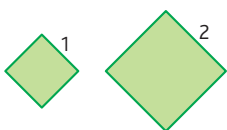
Não são polígonos:



Para verificar a proporcionalidade entre os lados de dois polígonos, dividimos as medidas dos lados do transformado pelas medidas do original e verificamos se o resultado é igual. Confirmamos assim se aumentaram ou diminuíram na mesma proporção.

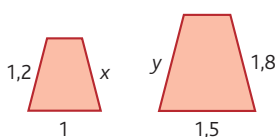
Exemplo:

Quadrados semelhantes



$$r = \frac{2}{1} = 2$$

Temos, então, uma ampliação. Se soubermos a razão de semelhança entre dois polígonos, podemos determinar medidas desconhecidas (que se representam usualmente por letras). Vejamos estes quadriláteros semelhantes:



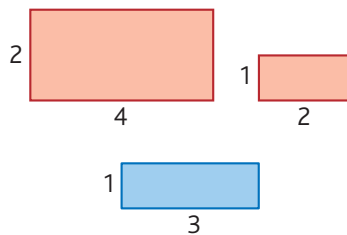
$$r = \frac{1,5}{1} = 1,5$$

$$x = \frac{1,8}{1,5} = 1,2$$

$$y = 1,2 \times 1,5 = 1,8$$

Polígonos semelhantes. Razão de semelhança

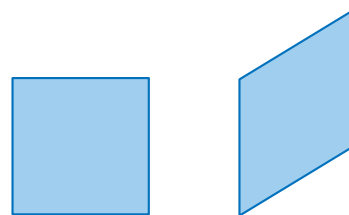
Para que dois polígonos sejam semelhantes têm de ter a mesma forma.



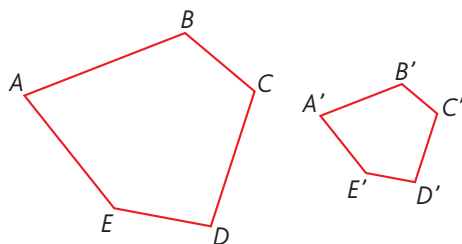
Neste caso é fácil verificar que os dois primeiros rectângulos são semelhantes, pois têm a mesma forma, e que o terceiro não é semelhante a nenhum dos outros dois.

O comprimento e a largura do segundo rectângulo são metade dos do primeiro. Mantém-se, portanto, a proporcionalidade entre os lados correspondentes.

No exemplo ao lado estamos perante polígonos com os lados iguais. No entanto, não têm a mesma forma pois têm ângulos diferentes. Não são, portanto, semelhantes.



Dois polígonos são **semelhantes** se têm os ângulos correspondentes iguais e os lados correspondentes proporcionais.



Aparentemente, estes polígonos são semelhantes. Podemos comprová-lo comparando os ângulos e verificando a proporcionalidade dos lados correspondentes.

	Amplitudes dos ângulos				
[ABCDE]	$\hat{A} = 74^\circ$	$\hat{B} = 117^\circ$	$\hat{C} = 113^\circ$	$\hat{D} = 97^\circ$	$\hat{E} = 139^\circ$
[A'B'C'D'E']	$\hat{A}' = 74^\circ$	$\hat{B}' = 117^\circ$	$\hat{C}' = 113^\circ$	$\hat{D}' = 97^\circ$	$\hat{E}' = 139^\circ$
	Comprimentos dos lados (em cm)				
[ABCDE]	$\overline{AB} = 4,4$	$\overline{BC} = 2,4$	$\overline{CD} = 3,6$	$\overline{DE} = 2,5$	$\overline{EA} = 3,7$
[A'B'C'D'E']	$\overline{A'B'} = 2,2$	$\overline{B'C'} = 1,2$	$\overline{C'D'} = 1,8$	$\overline{D'E'} = 1,25$	$\overline{E'A'} = 1,85$

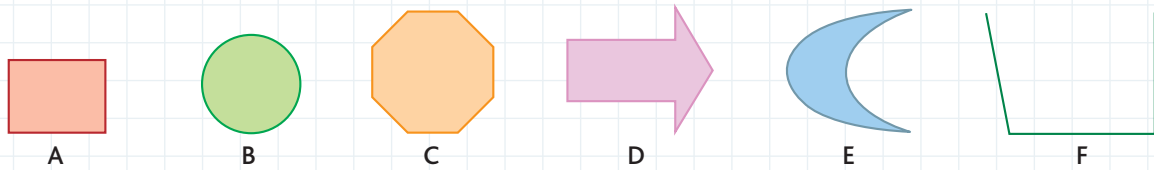
$$\text{Temos que: } \frac{2,2}{4,4} = \frac{1,2}{2,4} = \frac{1,8}{3,6} = \frac{1,25}{2,5} = \frac{1,85}{3,7} = 0,5.$$

Como a razão entre os lados correspondentes é igual, os lados são proporcionais. Logo, como os ângulos são todos iguais, concluímos que os polígonos são semelhantes. À razão obtida, neste caso 0,5, chamamos **razão de semelhança** que designamos por r .

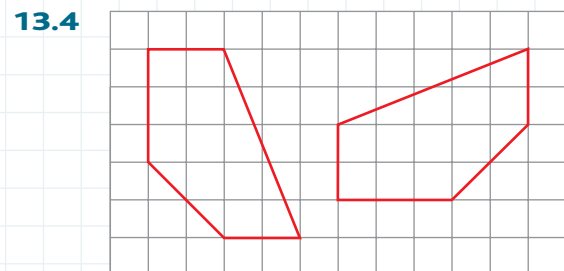
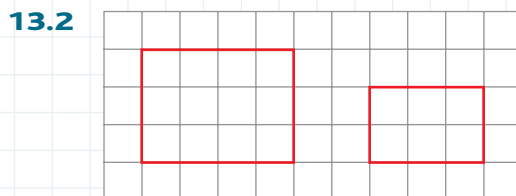
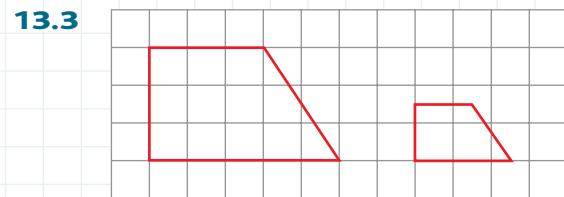
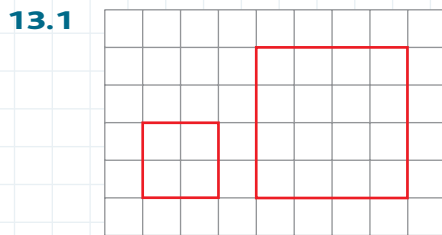
$r > 1 \Rightarrow$ ampliação
 $0 < r < 1 \Rightarrow$ redução
 $r = 1 \Rightarrow$ igualdade geométrica

Exercícios propostos

- 12.** Das figuras geométricas seguintes, indica as que são polígonos, classificando-os de convexos ou côncavos.



- 13.** Verifica se os pares de polígonos seguintes são semelhantes e, em caso afirmativo, determina a razão de semelhança, classificando-a.



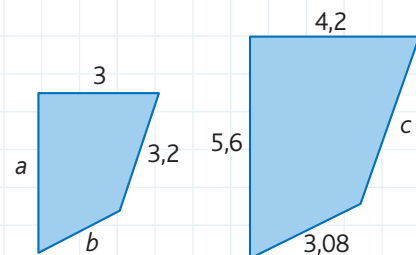
- 14.** Os polígonos A e B são semelhantes de razão $\frac{1}{3}$, sendo A o original e B o transformado.

14.1 A semelhança é uma ampliação ou uma redução? Justifica.

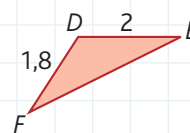
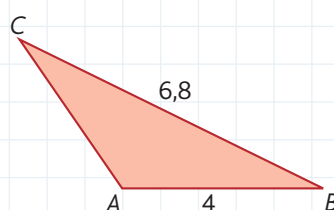
14.2 Se o polígono A for um quadrado, que forma terá o polígono B ?

14.3 Se um lado do polígono B medir 3 cm, qual será o comprimento do lado correspondente no polígono A ?

- 15.** Sabendo que os quadriláteros ao lado são semelhantes, determina a razão de semelhança e os comprimentos desconhecidos.



- 16.** Considera os triângulos semelhantes $[ABC]$ e $[DEF]$:



16.1 Determina, justificando, a amplitude de $\widehat{CAB}$, sabendo que $\widehat{EDF} = 124^\circ$.

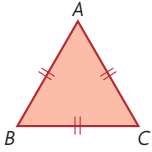
16.2 Calcula $\overline{AC}$ e $\overline{EF}$.



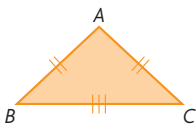
Classificação de triângulos:

Quanto aos lados

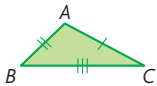
Equilátero (tem todos os lados iguais):



Isósceles (tem dois lados iguais e um diferente):

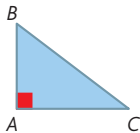


Escaleno (tem os lados todos diferentes):

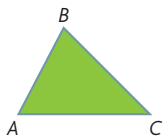


Quanto aos ângulos

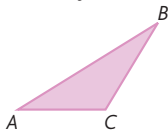
Retângulo (tem um ângulo recto, ou seja, de amplitude igual a 90°):



Acutângulo (tem todos os ângulos agudos, ou seja, com amplitudes menores que 90°):



Obtusângulo (tem um ângulo obtuso, ou seja, maior que 90°):



A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Por vezes, para se indicar a igualdade de ângulos entre triângulos, usam-se símbolos ou cores em vez dos valores das amplitudes:

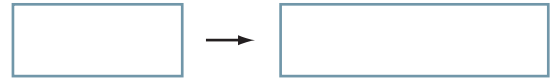


Semelhança de triângulos

O triângulo também é um polígono, neste caso de três lados. Como tal, para que dois triângulos sejam semelhantes, têm de ter os ângulos iguais e os lados correspondentes proporcionais.

Analisemos as seguintes situações.

Podemos obter o segundo rectângulo aumentando o comprimento do primeiro.



Os ângulos dos polígonos continuam iguais (rectos), no entanto, por só aumentarmos o comprimento sem alterarmos a largura, os lados não são proporcionais e as figuras não são semelhantes. Ou seja, podemos deformar um quadrilátero sem alterar os ângulos.

Experimenta agora construir um quadrado com quatro canetas iguais. Consegues deformá-lo, transformando-o num losango, com os ângulos diferentes do quadrado, mas com o mesmo comprimento de lados.



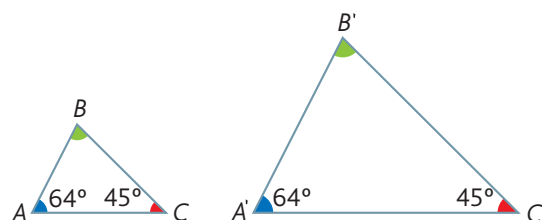
Portanto, é possível deformar um quadrilátero, mantendo os lados e alterando os ângulos.

Experimenta agora fazer o mesmo com um triângulo. Para isso, constrói um triângulo com palhinhas. Não conseguimos fazer o mesmo que fizemos para o quadrado, ou seja, se tentarmos aumentar um dos lados, alteramos obrigatoriamente as amplitudes dos ângulos.



A única hipótese que temos para aumentar um lado sem alterar os ângulos é aumentar todos os lados na mesma proporção.

Concluimos que: **para dois triângulos serem semelhantes basta que tenham os ângulos iguais** (o que garante a proporcionalidade dos lados). Os dois triângulos seguintes têm dois ângulos correspondentes iguais. Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° , não existe outra hipótese senão ter-se $\hat{B} = \hat{B}' = 71^\circ$. Portanto, os triângulos são semelhantes porque têm todos os ângulos correspondentes iguais.

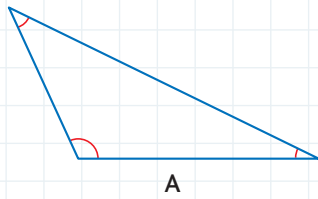


Logo:

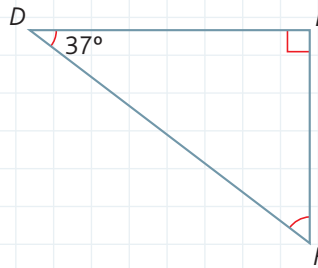
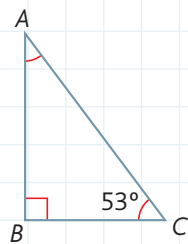
Dois triângulos são **semelhantes** se têm dois ângulos correspondentes iguais.

Exercícios propostos

17. Classifica os triângulos seguintes quanto aos lados e quanto aos ângulos.



18. Considera os triângulos rectângulos da figura.

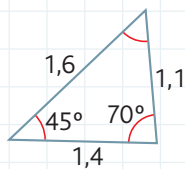
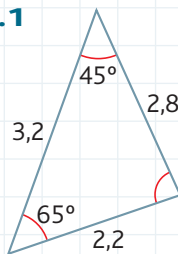


18.1 Calcula $\hat{BAC}$ e $\hat{EFD}$.

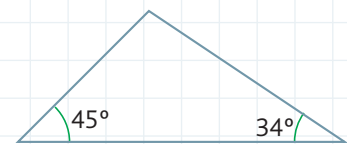
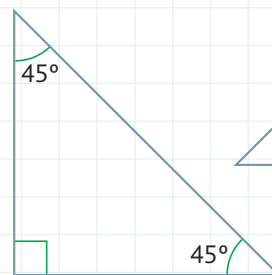
18.2 Os dois triângulos são semelhantes? Porquê?

19. Indica, justificando, se os seguintes pares de triângulos são semelhantes:

19.1



19.2

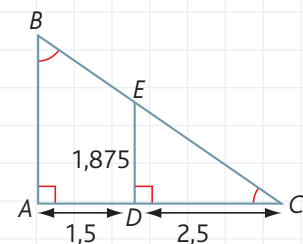


20. Considera os triângulos $[ABC]$ e $[DEC]$ na figura ao lado.

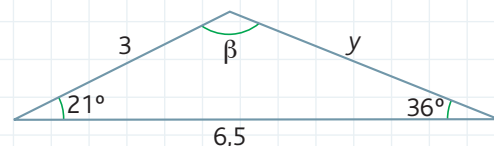
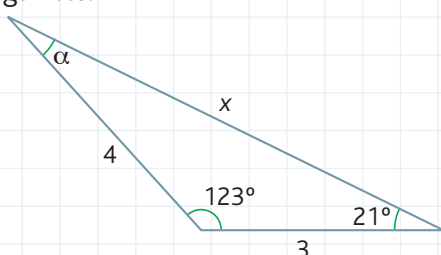
20.1 Indica, justificando, se os triângulos são semelhantes.

20.2 Calcula a razão de semelhança.

20.3 Determina $\overline{AB}$.



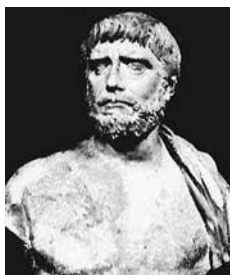
21. Calcula, justificando, as medidas desconhecidas nos triângulos seguintes:





HISTÓRIA

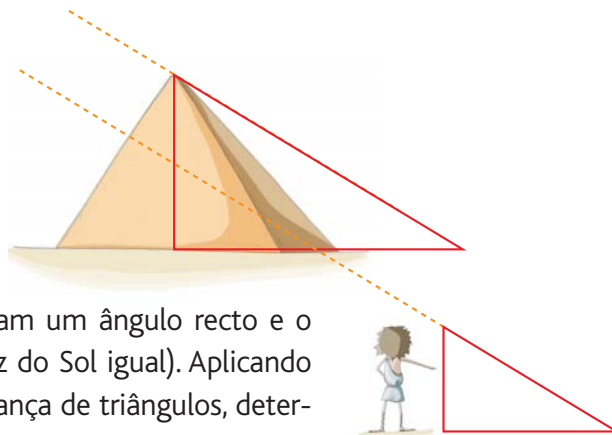
Tales de Mileto é considerado o primeiro filósofo e o primeiro dos sete sábios. Recebeu o título de «primeiro Matemático verdadeiro» por ter tentado organizar a Geometria de forma dedutiva. Presume-se que nasceu em 624 a.C. em Mileto, Ásia Menor (agora Turquia), e que terá morrido em 547 a.C.



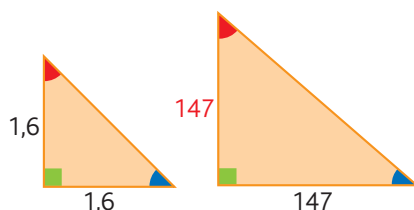
Aplicações da semelhança de triângulos

Tales de Mileto, fabuloso geômetra, ainda jovem, determinou a altura da maior pirâmide do Egito, a pirâmide de Queóps, usando somente os conhecimentos de semelhança de triângulos que agora também possuímos. Apresentamos-te uma das versões de como procedeu.

Tales espetou na areia uma estaca na vertical e aguardou por um momento em que a sombra da estaca medisse o mesmo que a sua altura. Imaginou então dois triângulos semelhantes (que tinham um ângulo recto e o ângulo de incidência da luz do Sol igual). Aplicando as propriedades da semelhança de triângulos, determinou a altura da pirâmide.



Utilizando medidas fictícias para a altura de Tales, a situação é a seguinte: os triângulos têm dois ângulos iguais (e, consequentemente, três) sendo, portanto, semelhantes.



Como a semelhança de polígonos implica a proporcionalidade entre os lados correspondentes, temos que a altura da pirâmide é 147 m.

Sendo assim, é possível calcular qualquer altura inacessível. Repara como fez o Lourenço para calcular a altura da Torre Eiffel aproveitando as sombras.

A sombra do monumento tem 243 m de comprimento, o Lourenço tem 1,6 m de altura e a sua sombra 1,2 m de comprimento.

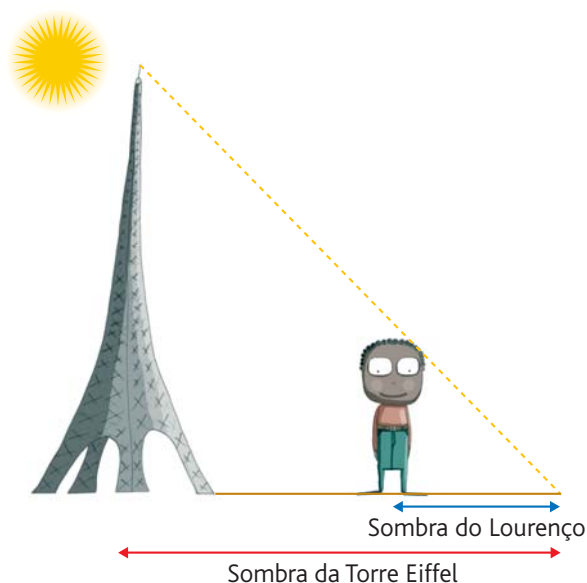
Os dois triângulos têm dois ângulos iguais (o ângulo recto e o ângulo que partilham). Como são semelhantes, os lados correspondentes são proporcionais. Então:

$$r = \frac{243}{1,2} = 202,5$$

Assim, para obtermos a altura do monumento efectuamos:

$$1,6 \times 202,5 = 324$$

Logo, a Torre Eiffel tem 324 m de altura.



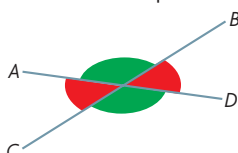
CURIOSIDADE

Igualdades de ângulos.



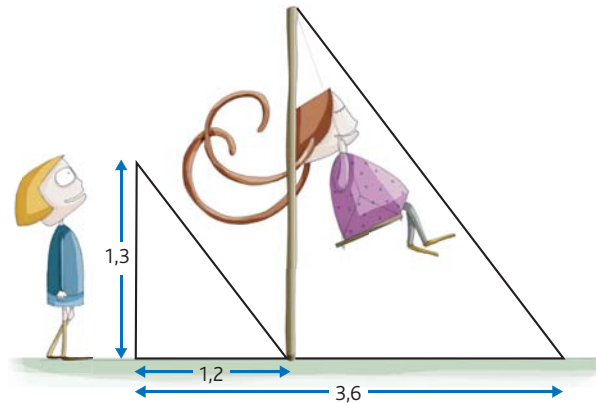
Num espelho, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Duas rectas ao cruzarem-se num ponto, originam ângulos verticalmente opostos, que têm a mesma amplitude.

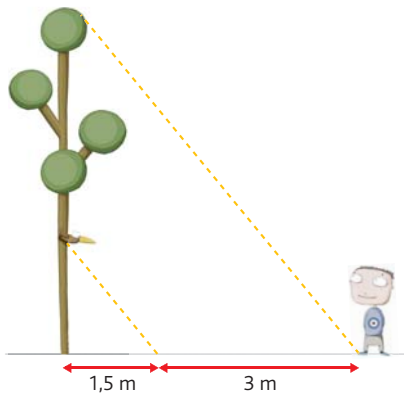
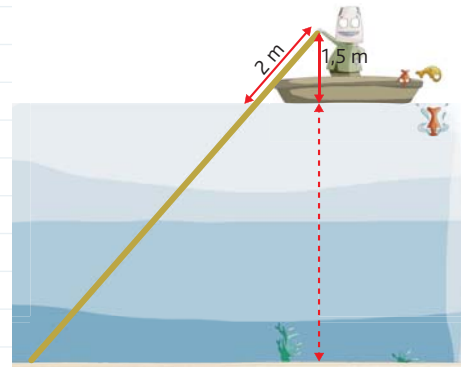


Exercícios propostos

22. Observa a seguinte situação e determina a altura do baloiço (medidas em metros).

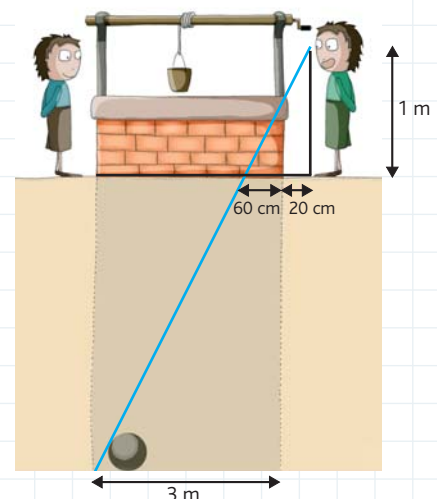


23. O Sr. Aníbal Ferreira, pescador de ofício, quer saber a profundidade do rio onde costuma pescar. Com esse objectivo, usou a sua vara de 10 metros de comprimento. Ajuda-o!



24. O Bruno quis medir a altura de uma árvore. Como um pica-pau tinha feito o seu ninho a 2 metros de altura, o Bruno aguardou que a sombra do pica-pau ficasse projectada no chão. A distância da árvore à sombra do pica-pau é 1,5 metros e o Bruno encontra-se a 3 metros do fim da sombra do pica-pau. Ajuda-o a calcular a altura da árvore.

25. O Tiago e o David, irmãos gémeos, adoram jogar futebol. Certo dia a bola caiu num poço sem água. Ajuda-os a determinar a profundidade do poço, sabendo que é medida a partir da superfície do solo.



PROBLEMAS GLOBAIS

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

Nas questões que se seguem, só uma das alíneas corresponde à resposta correcta. Descobre qual.

1. Duas figuras semelhantes são:

- (A) Duas figuras com a mesma forma. (C) Duas figuras parecidas.
(B) Duas figuras com o mesmo comprimento. (D) Duas figuras com poucas diferenças.

2. Se tivermos uma figura e quisermos desenhar outra semelhante a essa, o que **não** podemos fazer?

- (A) Aumentar proporcionalmente todas as suas dimensões.
(B) Reduzi-la.
(C) Aumentar o comprimento e diminuir a largura.
(D) Ampliá-la.

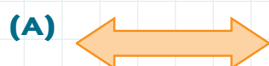
3. Dois polígonos são geometricamente iguais quando:

- (A) Têm a mesma forma. (C) Têm os mesmos ângulos.
(B) Têm lados com as mesmas medidas. (D) Têm a mesma forma e o mesmo tamanho.

4. Qual das figuras geométricas seguintes não é um polígono?

- (A) Circunferência. (C) Triângulo.
(B) Pentágono. (D) Quadrilátero.

5. Uma das seguintes figuras não é um polígono. Qual?



6. Só uma das seguintes afirmações é verdadeira. Qual?

- (A) Se entre dois polígonos a razão de semelhança é 1,01, estamos perante uma redução.
(B) Para que dois polígonos sejam geometricamente iguais, a razão de semelhança tem de ser 2.
(C) Se uma semelhança for uma ampliação, temos de ter $r > \frac{11}{11}$.
(D) A razão de semelhança resulta do produto das medidas de duas figuras semelhantes.

7. Observa a figura ao lado e considera o lado da quadrícula como unidade de medida.

A razão de semelhança entre estes paralelogramos é:



- (A) $\frac{4}{3}$
(B) $\frac{3}{4}$

- (C) 1
(D) Não existe, pois os polígonos não são semelhantes.

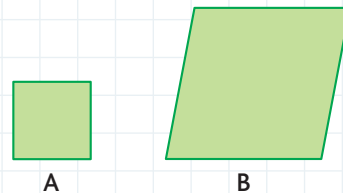
8. Na figura, o quadrilátero A tem de lado 2 unidades enquanto todos os lados do quadrilátero B medem 4 unidades. Então:

(A) Estamos perante uma ampliação.

(B) A razão de semelhança é 2.

(C) A razão de semelhança é 0,5.

(D) Não existe razão de semelhança porque os quadriláteros não são semelhantes.



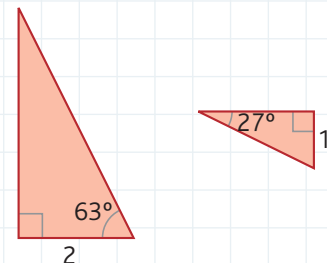
9. Relativamente aos triângulos da figura, podemos afirmar que:

(A) São semelhantes e a razão é $\frac{1}{2}$.

(B) Não são semelhantes.

(C) São geometricamente iguais.

(D) São semelhantes e a razão é 2.



10. Só uma das afirmações seguintes é verdadeira. Qual?

(A) Um quadrado é semelhante a qualquer quadrilátero.

(B) Um quadrilátero pode ser semelhante a um quadrado.

(C) Todos os rectângulos são semelhantes.

(D) Um quadrado é sempre semelhante a um rectângulo.

11. Só uma das afirmações seguintes é falsa. Qual?

(A) Não existe nenhum par de triângulos que tenha somente dois ângulos iguais.

(B) Dois triângulos rectângulos com um ângulo agudo igual são semelhantes.

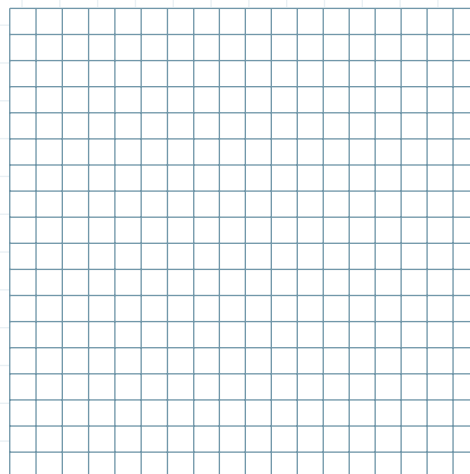
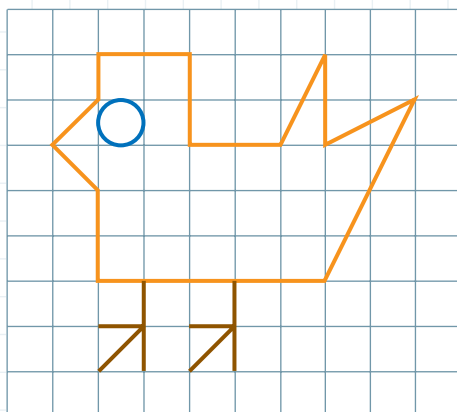
(C) Dois triângulos rectângulos com um ângulo obtuso igual são semelhantes.

(D) Quaisquer dois triângulos equiláteros são semelhantes.

PROBLEMAS GLOBAIS (continuação)

QUESTÕES DE DESENVOLVIMENTO

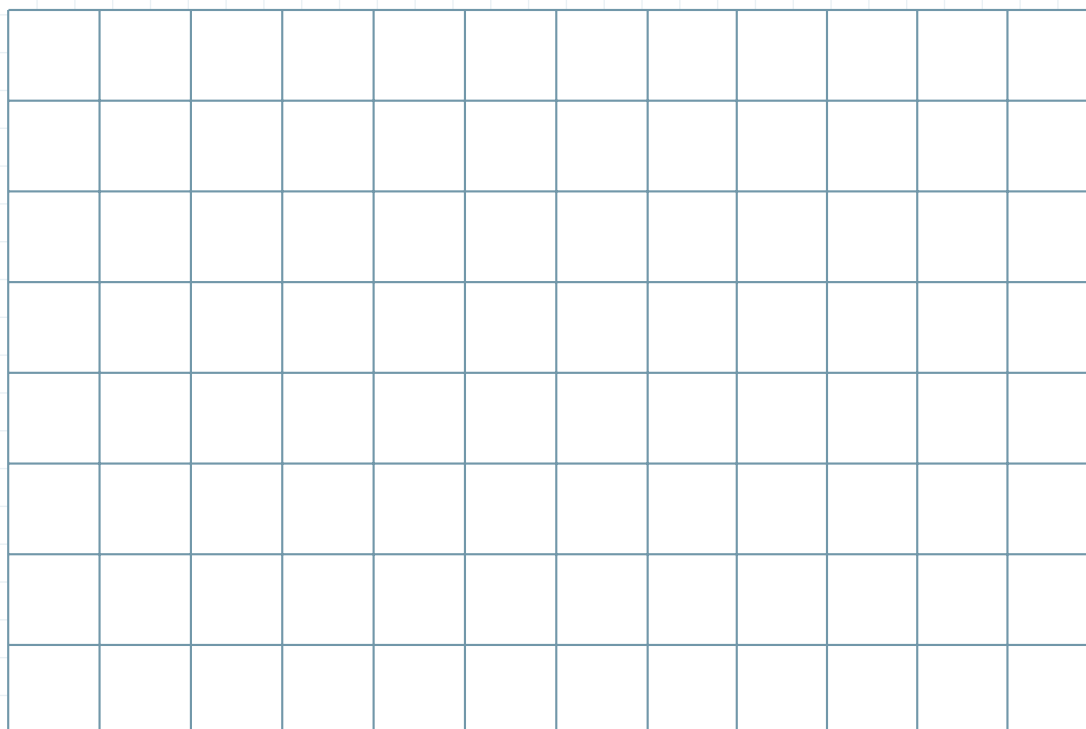
1. Desenha na grelha da direita a figura original mantendo o mesmo número de quadrículas.



- 1.1 O que aconteceu à figura?

- 1.2 Comparando a figura transformada com a original, indica qual a razão de semelhança usada na alteração feita nas quadrículas.

2. Desenha na grelha seguinte a figura original da questão anterior mantendo o mesmo número de quadrículas. O que aconteceu à figura? Qual a razão de semelhança usada na alteração da quadrícula?



3. Os pontos de cor amarela e de cor vermelha são centros da homotetia.



3.1 Efectua uma homotetia da ampulheta, duplicando as suas medidas, usando o centro de homotetia amarelo.

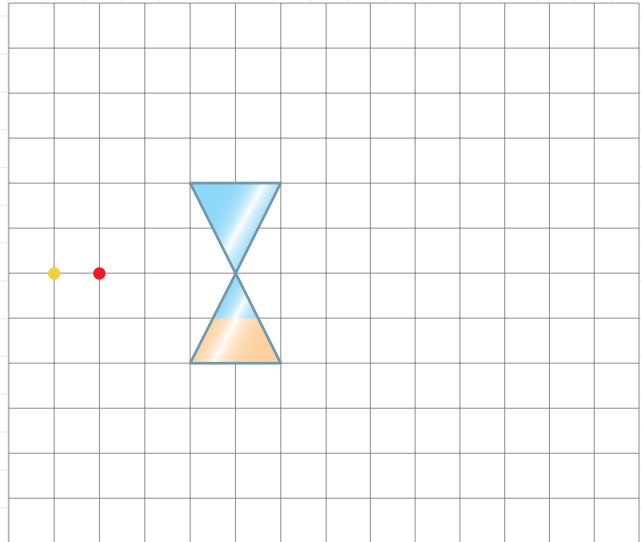
3.2 Seria possível efectuar a homotetia da ampulheta sem o fundo quadriculado? Justifica.

3.3 Efectua uma homotetia da ampulheta, duplicando as suas medidas, usando o centro de homotetia vermelho.

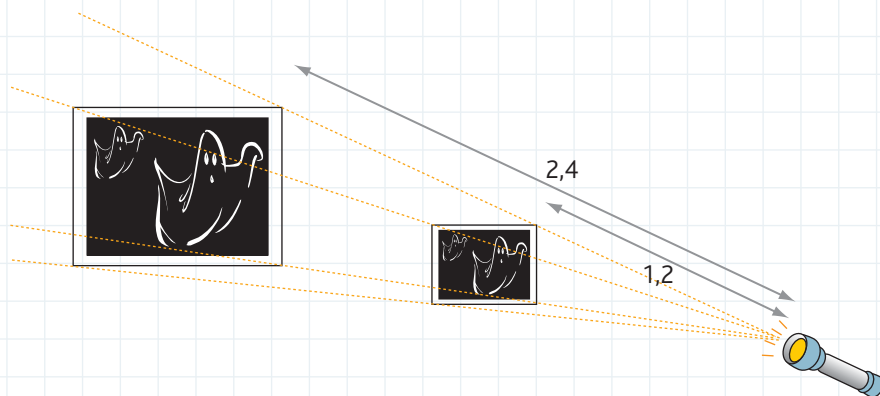
3.4 As dimensões das ampulhetas resultantes das duas homotetias são iguais? As ampulhetas transformadas serão semelhantes entre si? Que justificação encontras para esse facto?

3.5 Na segunda grelha, amplia para o dobro a ampulheta usando o método da quadrícula.

3.6 Que diferença existe entre a ampulheta obtida na alínea 3.5 e as obtidas anteriormente?



4. No Dia das Bruxas, o Ambrósio resolveu assustar a sua irmã mais nova. Numa cartolina preta desenhou e recortou um fantasma e projectou-o na parede do quarto com uma lanterna.

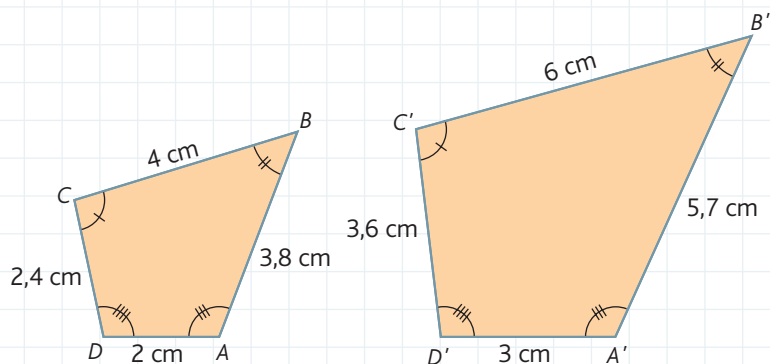


4.1 Que método foi utilizado na ampliação da imagem do fantasma?

4.2 Qual a razão de semelhança?

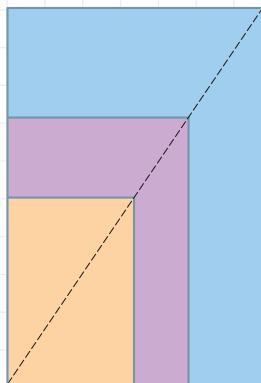
PROBLEMAS GLOBAIS (continuação)

5. Na figura seguinte estão representados dois quadriláteros. Serão semelhantes? Justifica.



6. Os lados de um triângulo medem 3,6 cm, 6,4 cm e 8 cm. Esse triângulo é semelhante a um outro, cujo perímetro é 45 cm. Calcula os lados do segundo triângulo.

7. Observa a disposição dos três rectângulos da figura.

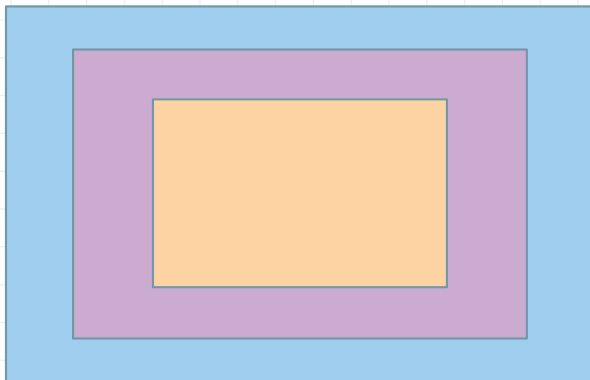


Traçando as diagonais dos rectângulos que unem os vértices inferiores esquerdos aos vértices superiores direitos, observamos que as diagonais se sobrepõem.

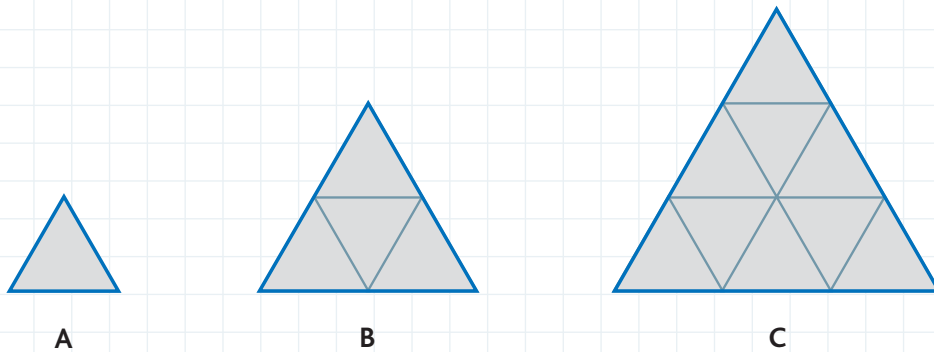
Cortando a figura pela diagonal, obtemos três triângulos sobrepostos com pelo menos dois ângulos comuns entre eles.

Prova-se assim, pelo método da diagonal, que os três rectângulos são semelhantes.

Estabelece o mesmo método para provar que os três rectângulos seguintes são semelhantes.



8. Observa as seguintes figuras semelhantes construídas com base em triângulos equiláteros:



8.1 Calcula:

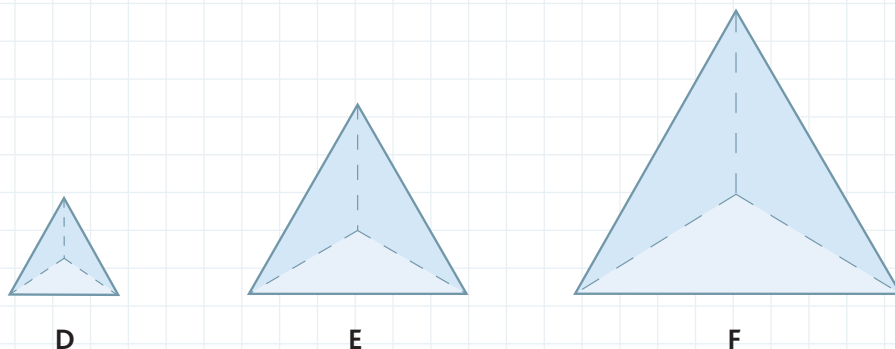
- i) A razão de semelhança entre a figura **A** e a figura **B**.
- ii) A razão de semelhança entre a figura **A** e a figura **C**.

8.2 Supondo que cada lado do triângulo da figura **A** mede 1 cm, calcula:

- i) A razão entre o perímetro da figura **A** e o perímetro da figura **B**.
- ii) A razão entre o perímetro da figura **A** e o perímetro da figura **C**.

8.3 Que relação existe entre a razão de semelhança entre o comprimento dos lados destes triângulos e a razão de semelhança entre os respectivos perímetros?

8.4 Com base nestes triângulos podemos construir figuras no espaço que se denominam tetraedros.



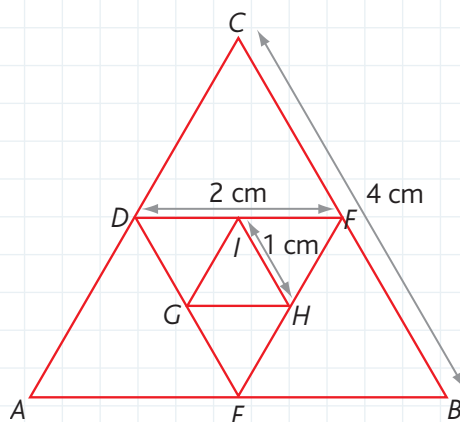
Completa as frases seguintes:

- i) A face do tetraedro da figura **E** é ao triângulo da figura **B**.
- ii) O tetraedro da figura **E** é do tetraedro da figura **D**.
- iii) O tetraedro da figura **E** é do tetraedro da figura **F**.



PROBLEMAS GLOBAIS (continuação)

9. Analisa a figura seguinte:



9.1 Quantos triângulos estão representados?

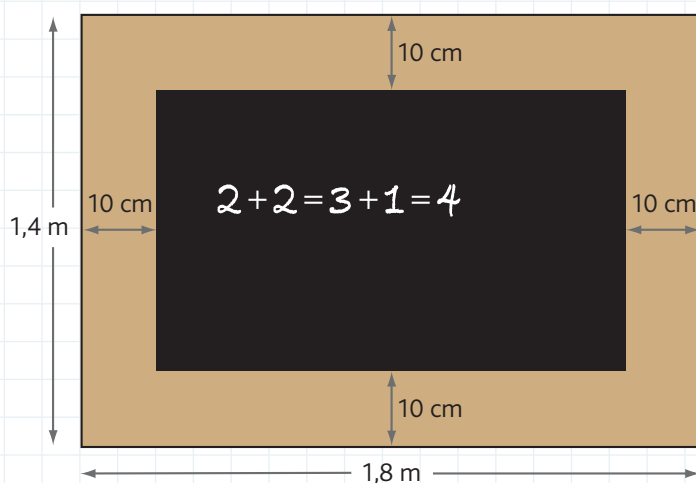
9.2

i) Calcula os quocientes: $\frac{\text{lado do } \Delta [DEF]}{\text{lado do } \Delta [ABC]}$ e $\frac{\text{lado do } \Delta [GHI]}{\text{lado do } \Delta [DEF]}$.

ii) O que significa o valor obtido pelo quociente entre os lados dos triângulos?

iii) Com base nos resultados anteriores, diz se os triângulos são semelhantes e, em caso afirmativo, se resultaram de uma ampliação, de uma redução ou se são geometricamente iguais.

10. Observa a figura que representa o quadro da sala da Beatriz:

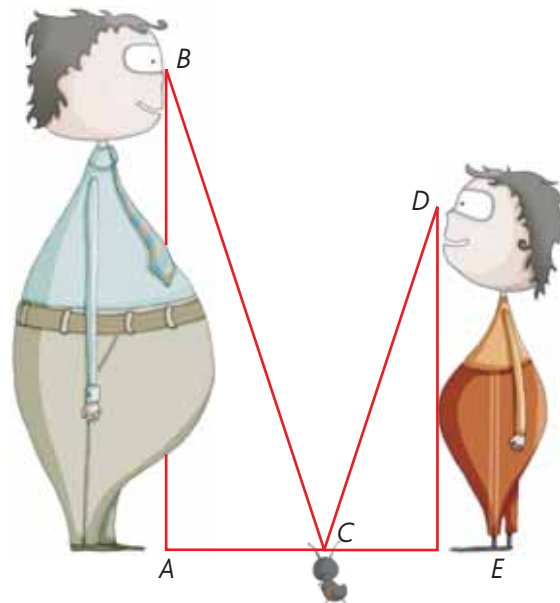


Será que os rectângulos interior e exterior são semelhantes? Justifica.

- 11.** O Tibúrcio e o filho estavam a conversar de frente um para o outro. Aproveitando o facto de estarem nesta posição, a formiga Papa Migalhas passou entre eles. Olhando para um lado e para o outro, disse:

— Ora esta! Deste ponto, consigo ver o nariz do pai e do filho através de linhas imaginárias que formam com o chão ângulos iguais.

O esquema seguinte ilustra o que a Papa Migalhas viu:



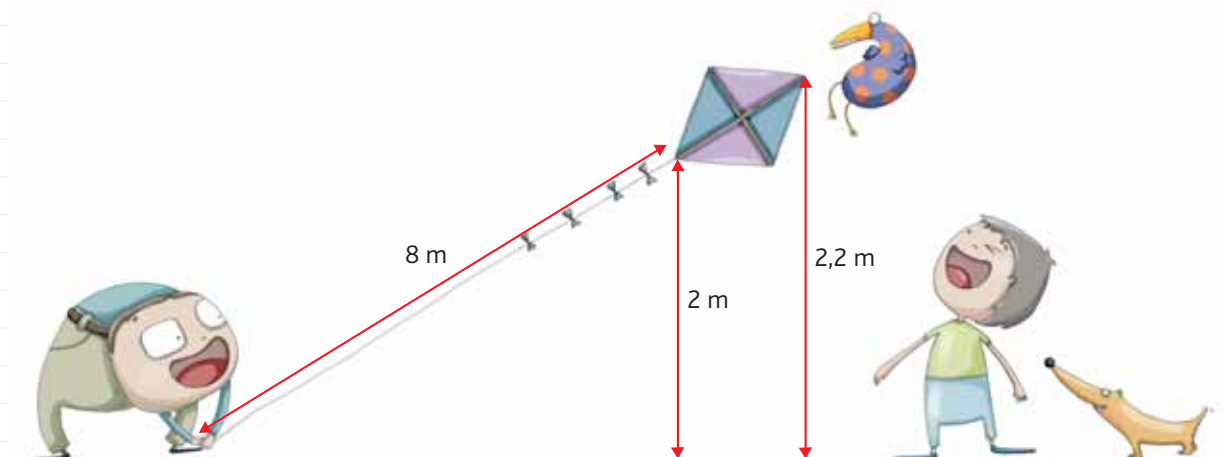
11.1 Os triângulos que a Papa Migalhas viu serão semelhantes? Porquê?

11.2 Sabendo que o Tibúrcio mede 1,75 metros e que a razão existente entre a sua altura e a do seu filho é de 0,8, quanto mede o seu filho?

- 12.** O Agripino resolveu lançar o seu papagaio. O Dionísio disse-lhe:

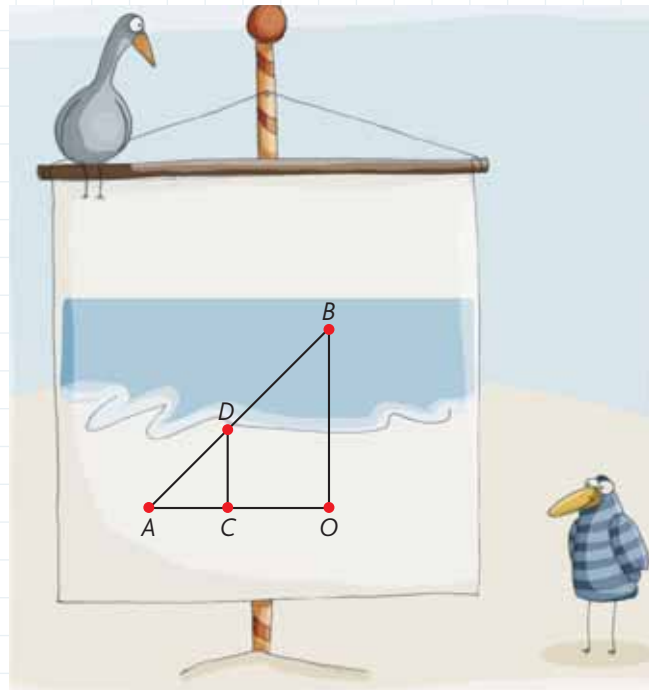
— O teu papagaio tem a forma de um losango. Quanto mede a diagonal maior?

O Agripino não sabia. No entanto, sabia que o fio que o prendia à sua mão media 8 metros de comprimento, que um dos vértices da diagonal maior do losango se encontrava a 2,2 metros de altura e o vértice oposto estava a 2 metros de altura. Ajuda os dois amigos a descobrirem o comprimento da diagonal maior do losango.



PROBLEMAS GLOBAIS (continuação)

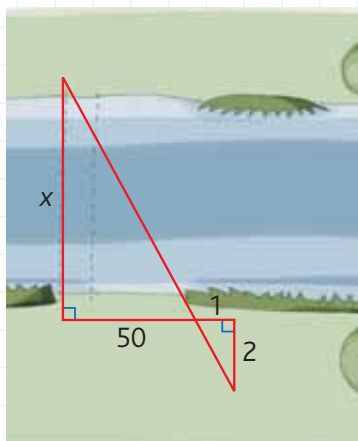
- 13.** O nosso conhecido Tales de Mileto também ficou famoso por calcular a distância dos barcos à praia. Pensa-se que procedia imaginando o seguinte esquema:



No desenho, B representa o ponto de localização do barco e A , C , D e O são pontos na praia, convenientemente marcados para serem úteis ao cálculo.

Poderá este esquema permitir o cálculo da distância desejada? Explica porquê.

- 14.** Para prever o comprimento de uma ponte, um engenheiro esboçou a seguinte figura:



Sabendo que as medidas estão em metros, qual é o comprimento da ponte?

2 | Semelhança de figuras

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 1.1 Não. 1.3 Sim. 1.5 Sim.
1.2 Sim. 1.4 Não. 1.6 Sim.
2. B e D.
3. Semelhante a 1: 3, 5; semelhante a 2: 4.
- 4.1 —
4.2 A, B e C; D, F e O; E e J; H e I; L, M e N.
4.3 E
4.4 Ampliação.
4.5 A e C; D e F. São geometricamente iguais porque têm a mesma forma e o mesmo tamanho.
4.6 Todas excepto a H e a I.
- 5.1 Falso. As figuras são geometricamente iguais.
5.2 Verdadeiro.
5.3 Verdadeiro.
5.4 Falso. Não são semelhantes porque não têm a mesma forma.
6. — 8. — 10. —
7. — 9. — 11. —
12. A: polígono convexo; B: não é polígono; C: polígono convexo; D: polígono côncavo; E: não é polígono; F: não é polígono.
- 13.1 São semelhantes, tratando-se de uma ampliação de razão 2.
13.2 Não são semelhantes.
13.3 São semelhantes, tratando-se de uma redução de razão 0,5.
13.4 São geometricamente iguais, logo, a razão de semelhança é 1.
- 14.1 Redução, pois $\frac{1}{3} < 1$. 14.2 Quadrado. 14.3 9 cm
15. $r = 1,4$; $a = 4$; $b = 2,2$; $c = 4,48$
- 16.1 Como os triângulos são semelhantes, $\widehat{CAB} = \widehat{EDF} = 124^\circ$.
16.2 $\overline{AC} = 3,6$; $\overline{EF} = 3,4$
- 17.1 A: escaleno, obtusângulo; B: escaleno, rectângulo;
C: isósceles, acutângulo; D: equilátero, acutângulo.
- 18.1 $\widehat{BAC} = 37^\circ$; $\widehat{EFD} = 53^\circ$
18.2 São semelhantes porque têm os ângulos correspondentes iguais.
- 19.1 São semelhantes, pois têm os ângulos correspondentes iguais.
19.2 Não são semelhantes pois os ângulos correspondentes não são iguais.
- 20.1 São porque têm os ângulos correspondentes iguais.
20.2 $r = 1,6$ 20.3 $AB = 3$
- 21.1 $\alpha = 36^\circ$; $\beta = 123^\circ$. Os triângulos são geometricamente iguais, logo, $x = 6,5$ e $y = 4$.
22. 2,6 m 23. 6 m 24. 6 m 25. 3 m e 75 cm

PROBLEMAS GLOBAIS

ESCOLHA MÚLTIPLA

1. (A) 3. (D) 5. (D) 7. (A) 9. (A) 11. (C)
2. (C) 4. (A) 6. (C) 8. (D) 10. (B)

QUESTÕES DE DESENVOLVIMENTO

- 1.1 Manteve a forma original mas com metade do tamanho.
1.2 $r = 0,5$

2. Manteve-se semelhante à original mas com o dobro do tamanho; $r = 2$.

3.1 —

3.2 Sim, a homotetia é feita com base nos segmentos de recta.

3.3 —

3.4 São geometricamente iguais. O tamanho das figuras transformadas é independente do centro de homotetia.

3.5 —

3.6 Não existem quaisquer diferenças. São geometricamente iguais.

4.1 Homotetia.

4.2 2

5. Sim, porque têm os ângulos iguais e os lados correspondentes proporcionais.

6. 9, 16 e 20 cm.

7. —

8.1 i) 2

ii) 3

8.3 São iguais.

8.2 i) 2

ii) 3

8.4 Igual; uma ampliação; uma redução.

9.1 9

9.2 i) 0,5; 0,5

ii) É a razão de semelhança entre os triângulos.

iii) São semelhantes. $[DEF]$ é uma redução de $[ABC]$ e $[GHI]$ é uma redução de $[DEF]$.

10. Não são semelhantes pois $\frac{1,8}{1,6} \neq \frac{1,4}{1,2}$.

11.1 Sim, porque têm pelo menos dois ângulos iguais: $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{ACB} = \hat{DCE}$.

11.2 1,4 m

12. 80 cm

13. Sim, porque os triângulos originados são semelhantes. As medidas do triângulo menor podem ser determinadas por simples medição, procedendo-se depois ao cálculo da distância, fazendo:

$$\overline{OB} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}} \times \overline{CD}$$

14. 100 m

DESAFIOS

O JARDINEIRO

1. Sim, sendo a razão 0,5.

2. Teoricamente sim, mas na prática não.

M.C. ESCHER

Não há diferenças nos palhaços, têm a mesma forma e o mesmo tamanho;

INFINITAMENTE...

572 triângulos e 126 quadrados.

PADRÕES

—

O TAPETE DE SIERPINSKI

1. i) 17

ii) Redução; ampliação; geometricamente iguais.

2. i) 53

ii) Ampliação; ampliação;
geometricamente igual;
geometricamente iguais.

3.

