

METAS CURRICULARES DO ENSINO BÁSICO

8.º ano

EXEMPLOS DO CADERNO DE APOIO

3.º CICLO

António Bivar

Carlos Grosso

Filipe Oliveira

Maria Clementina Timóteo

EXEMPLOS DO CADERNO DE APOIO 3.º CICLO

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Maria Clementina Timóteo

INTRODUÇÃO

Com este pequeno trabalho, pretendeu a Porto Editora facilitar o acesso, aos professores, a todos os exemplos sugeridos na publicação acima mencionada, da responsabilidade da equipa das Metas Curriculares e divulgada pela Direção-Geral da Educação*, num formato totalmente editável e passível de fácil integração com os diferentes materiais já elaborados (ou a elaborar) pelos docentes da disciplina.

Procedeu-se, igualmente, a uma sugestão de **organização dos diferentes exemplos**, de modo a facilitar o rápido acesso ao correspondente **descriptor** ou **descritores**. Esta organização pode ser sintetizada do seguinte modo:

- O presente documento, em formato *pdf*, está organizado sequencialmente de acordo com o manual **Matemática 8**, contendo a remissão da respetiva parte e página do manual no canto superior direito de cada novo descriptor desenvolvido.
- Cada exemplo/descriptor pode ser consultado num único ficheiro *word*.
- O nome de cada ficheiro *word* identifica, de imediato, o descriptor correspondente. Por exemplo, o ficheiro **fss8_1p5.doc** diz respeito ao descriptor **1.5** do domínio **Funções, Sequências e Sucessões** do **8.º ano**. Esta remissão encontra-se destacada no final da primeira página de cada documento.
- A estrutura de cada ficheiro *word* é sempre a mesma: para cada descriptor é apresentado o respetivo **exemplo** (ou **exemplos**), seguido da **proposta de resolução**, terminando com o **texto de apoio ao professor**.
- Este último é constituído pelas “introduções teóricas” que antecedem certos exemplos e, no caso em que tal é aplicável, pelo correspondente **texto complementar de geometria**, retirado do anexo que complementa o Caderno de Apoio.
- Determinados descritores, por exemplo *Resolver problemas*, surgem associados a descritores que os antecedem, como se pode comprovar no Caderno de Apoio. Essa associação é igualmente concretizada nos ficheiros *word* em que tal se justifica, como se pode ver, por exemplo, no ficheiro **fss8_1p5.doc**.

A utilidade destes ficheiros, assim organizados, pode ir desde a simples projeção em contexto de sala de aula (via *e-Manual*) até à utilização/adaptação dos exemplos apresentados em fichas ou testes para os seus alunos.

Esperando ter contribuído, de alguma forma, para facilitar o trabalho de implementação do **Programa e Metas Curriculares**, desejamos a todos um excelente ano letivo, com votos de grande sucesso tanto pessoal como profissional.

Bom trabalho!

*A utilização do formato editável do Caderno de Apoio não dispensa a consulta do respetivo documento PDF original, disponibilizado pela DGE no respetivo sítio da Internet.

[Parte 1, pág. 12]

1. Considera os números racionais $\frac{13}{2^2}$, $\frac{3}{5^3}$, $\frac{87}{2^3 \times 5}$ e $\frac{121}{40}$.
 - 1.1. Obtém a respetiva representação em dízima começando por transformar cada uma das frações em frações decimais que lhes sejam equivalentes.
 - 1.2. Obtém novamente as representações em dízima das frações dadas recorrendo desta vez ao algoritmo da divisão.
2. Explica, de duas formas distintas, por que razão o número $\frac{11}{30}$ não possui representação em dízima finita:
 - 2.1. Utilizando o algoritmo da divisão.
 - 2.2.** Mostrando que não pode ser dado por uma fração decimal.

NO8-1.1.

Resposta:

$$1.1. \quad \frac{13}{2^2} = \frac{13 \times 5^2}{2^2 \times 5^2} = \frac{325}{(2 \times 5)^2} = \frac{325}{100} = 3,25$$

$$\frac{3}{5^3} = \frac{3 \times 2^3}{5^3 \times 2^3} = \frac{24}{(5 \times 2)^3} = \frac{24}{10^3} = \frac{24}{1000} = 0,024$$

$$\frac{87}{2^3 \times 5} = \frac{87 \times 5^2}{2^3 \times 5 \times 5^2} = \frac{2175}{(2 \times 5)^3} = \frac{2175}{1000} = 2,175$$

Começando por decompor 40 em fatores primos vem $40 = 2^3 \times 5$.

$$\frac{121}{40} = \frac{121}{2^3 \times 5} = \frac{121 \times 5^2}{2^3 \times 5^3} = \frac{3025}{(2 \times 5)^3} = \frac{3025}{1000} = 3,025$$

1.2.

$$\begin{array}{r} 13,00 \mid 4 \\ 10 \quad 3,25 \\ 20 \quad 000 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,000 \mid 125 \\ 0500 \quad 0,024 \\ 500 \\ 200 \\ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 87,000 \mid 40 \\ 070 \quad 2,175 \end{array}$$

$$\frac{13}{4} = 3,25$$

$$\frac{3}{125} = 0,024$$

$$\frac{87}{40} = 2,175$$

$$\begin{array}{r} 121,000 \mid 40 \\ 0100 \quad 3,025 \\ 200 \end{array}$$

00

$$\frac{121}{40} = 3,025$$

2.1. Utilizando o algoritmo da divisão inteira, por forma a obter aproximações na forma de dízima de $\frac{11}{30}$:

$$\begin{array}{r} 11,00 \mid 30 \\ 200 \quad 0,36 \\ 20 \end{array}$$

O resto parcial 20 já foi obtido anteriormente, pelo que o procedimento se repetirá indefinidamente, enquanto continuarmos o algoritmo:

$$\begin{array}{r}
 11,00000 \dots \overline{)30} \\
 \underline{200} \\
 200 \\
 \underline{200} \\
 200 \\
 \underline{200} \\
 20
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 0,36666 \dots
 \end{array}$$

- 2.2. Se a fração « $\frac{11}{30}$ » fosse equivalente a uma fração decimal, ter-se-ia uma igualdade da forma $\frac{11}{30} = \frac{a}{10^n}$, onde a e n são números naturais, de onde resultaria que:

$$11 \times 10^n = 30 \times a, \text{ ou seja, } 11 \times 2^n \times 5^n = 2 \times 3 \times 5 \times a$$

Observando a igualdade anterior verifica-se que a decomposição em fatores primos de $11 \times 2^n \times 5^n$ é igual a uma decomposição que inclui o número 3, o que é absurdo pois a decomposição em fatores primos de um número é única.

Observação: Este raciocínio aplica-se de forma mais geral a qualquer fração irredutível cujo denominador apresente um divisor primo distinto de 2 e de 5. Assim se pode reconhecer que essas frações não admitem representação em dízima finita.

Descritor: 1.1.

No primeiro objetivo geral deste domínio analisa-se a representação em forma de dízima finita ou infinita periódica dos números racionais. O algoritmo da divisão constitui um instrumento extremamente pertinente na definição e justificação das propriedades deste tipo de representação, pelo que é amplamente utilizado nos descritores que se seguem. É importante que os alunos adquiram destreza na conversão de frações em dízima e vice-versa, enriquecendo assim a compreensão conceptual do conjunto dos números racionais.

O segundo objetivo geral é consagrado à apresentação dos números irracionais. Não é à partida intuitivo que existam pontos da reta numérica que não são representados por uma fração, tendo este assunto já sido afluado no 7.º ano (**ALG7-7**) no contexto dos segmentos de reta incomensuráveis. Deverá ficar claro que é o facto de não se poderem medir todas as distâncias com números racionais, fixada uma unidade de comprimento, que motiva a introdução deste novo conjunto de números.

Neste descritor retoma-se de forma mais sistemática a representação sob a forma de dízima dos números racionais que podem ser expressos como frações decimais, assunto que já foi abordado no 1.º ciclo para alguns casos particulares (cf. **NO4-6.3 e NO4-6.4** e respetivos textos de apoio); é também uma boa oportunidade para recordar a estrutura do algoritmo da divisão inteira tal como foi analisada nos textos de apoio relativos aos descritores **NO4-2.1 a NO4-2.4** e aplicada à obtenção de uma representação em dízima dos referidos números racionais no descritor **NO4-6.4**.

[Parte 1, pág. 14]

1. Representa na reta numérica o número racional $1,1(6)$ começando por representá-lo na forma de fração e em seguida como numeral misto.

Resposta:

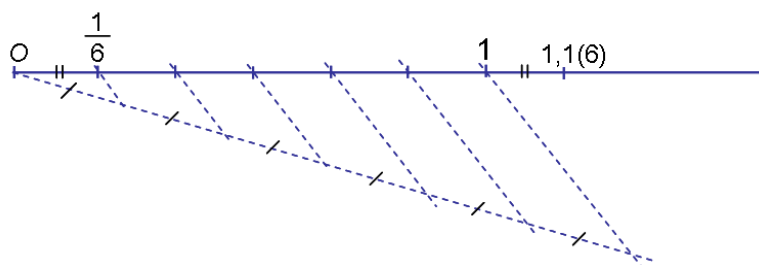
1. Começamos por representar este número na forma de fração:

$$10 \times 1,1(6) - 1,1(6) = 11,666... - 1,166... = 11,6 - 1,1 = 10,5$$

$$\text{Desta forma, } 9 \times 1,1(6) = 10,5 \text{ pelo que } 1,1(6) = \frac{10,5}{9} = \frac{105}{90} = \frac{7}{6}$$

Representando a fração na forma de numeral misto, tem-se $\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$.

Para representar o ponto de abscissa $1,1(6)$ construímos então um segmento de reta de comprimento $\frac{1}{6}$ e justapomo-lo ao segmento de reta cujas extremidades são representadas pelos números 0 e 1 (ver GM7-4.14).



NO8-1.12

1. Representa na forma de fração os números racionais dados pelas seguintes dízimas periódicas:

1.1. $3,(4)$

1.2. $1,(45)$

1.3. $7,226(72)$

1.4. $0,(9)$

Resposta:

1.1. $10 \times 3,(4) - 3,(4) = 34,444... - 3,444... = 31$

Mas $10 \times 3,(4) - 3,(4) = (10 - 1) \times 3,(4) = 9 \times 3,(4)$

pelo que $9 \times 3,(4) = 31$, ou seja, $3,(4) = \frac{31}{9}$.

1.2. $100 \times 1,(45) - 1,(45) = 145,4545... - 1,4545... = 144$

$99 \times 1,(45) = 144$, ou seja, $1,(45) = \frac{144}{99}$

1.3. $100 \times 7,226(72) - 7,226(72) = 722,6727272... - 7,226727272... =$
 $= 722,672 - 7,226 = 715,446$

$99 \times 7,226(72) = 715,446$ pelo que $7,226(72) = \frac{715,446}{99} = \frac{715\ 446}{99\ 000}$

1.4. $10 \times 0,(9) - 0,(9) = 9,99... - 0,99... = 9$

$9 \times 0,(9) = 9$ e $0,(9) = \frac{9}{9}$, ou seja, $0,(9) = 1$

NO8-1.5 e 1.6

Descritor: 1.5

Para obter explicitamente uma fração equivalente a uma dada dízima infinita periódica pode começar por supor-se que esta representa, de facto, um número racional r , o que permite exprimir como dízima o produto de r por uma potência de 10 com expoente igual ao número de algarismos do período da dízima, subtraindo-se ao número assim obtido a dízima inicial; o resultado é uma dízima finita, que pode portanto ser expressa como fração. O número racional r pode agora também ser determinado sob a forma de fração, resolvendo a equação em r a que se chegou por este processo.

Como se supôs à partida que a dízima representa um número racional, o que não foi ainda provado, é necessário verificar que o número racional representado pela fração assim obtida é, de facto, representado pela dízima inicial, questão que será analisada na Informação Complementar para o professor mais adiante, neste mesmo texto de apoio. Este processo encontra-se ilustrado no exemplo 1. As operações aqui utilizadas estão justificadas na Informação Complementar para o professor relativa ao descritor anterior.

Descritor 1.6.

Os procedimentos estudados permitem reconhecer que qualquer número racional não negativo pode ser representado por uma dízima não negativa finita ou infinita periódica e que, inversamente, qualquer dízima não negativa finita ou infinita periódica representa um número racional não negativo. Considerando também as dízimas afetadas de um sinal negativo, estes resultados estendem-se ao conjunto dos números racionais.

Este descritor diz essencialmente que se ignorarmos as dízimas de período «9», e se identificarmos as dízimas finitas com as infinitas cuja parte decimal é identicamente igual a zero a partir de certa ordem (ou seja, as de período «0»), esta correspondência é biunívoca. Uma justificação desta propriedade, ainda que informal, é no entanto difícil de obter neste nível de escolaridade, pelo que apenas pode ser exigido que os alunos conheçam o resultado (cf. Informação Complementar para o professor, 1.2, 1.3 e 1.4, para uma justificação completa).

Informação Complementar para o professor

Como já foi referido, o processo utilizado para se obter explicitamente uma fração que representa o número racional que é também representado por uma dada dízima infinita periódica, parte do pressuposto de que um tal número existe. Assim, em rigor, tal processo apenas garante que se esse número existir tem de ser dado por determinada fração que se obtém de forma explícita. Ficou por provar que o número racional assim determinado é de facto representado pela dízima inicial, ou seja, que cumpre o critério para que a dízima infinita o represente. Para esse efeito começemos por notar que basta analisar as dízimas infinitas periódicas da forma $0,(a_1...a_k)$.

De facto, qualquer outra dízima periódica pode decompor-se na soma de uma dízima finita com o produto de uma dízima como esta por uma potência de $\frac{1}{10}$; então, as manipulações

algébricas que foram justificadas na Informação Complementar para o professor relativa aos descritores **1.2** a **1.4** permitem concluir que se uma qualquer dízima da forma $0,(a_1...a_k)$ representar um número racional, então qualquer dízima infinita periódica também o fará pois obtém-se de uma deste tipo utilizando as operações algébricas que acabámos de referir.

O processo que atrás utilizámos permite-nos concluir que o único número racional que poderá ser representado por $0,(a_1...a_k)$ será:

$$\frac{a_1...a_k}{10^k - 1} = \frac{a_1...a_k}{9...9}$$

(onde no denominador da segunda fração se representa uma sequência de k cópias do algarismo 9). Pretendemos assim mostrar que este número racional é, de facto, representado pela dízima $0,(a_1...a_k)$; para o efeito temos de efetuar as estimativas adequadas para a diferença entre $\frac{a_1...a_k}{10^k - 1}$ e as dízimas finitas que se obtêm de $0,(a_1...a_k)$ por truncaturas de comprimentos sucessivamente maiores.

Começemos com o caso da dízima $0,(9)$; para cada N , número inteiro não negativo, truncando $0,(9)$ depois da N -ésima casa decimal, obtém-se $0,9...9 = \frac{10^N - 1}{10^N}$ (onde se pretende representar, no primeiro membro, a seguir à vírgula decimal, uma sequência de N cópias do algarismo 9). Então é fácil concluir que esta dízima representa de facto o número 1 , pois:

$$1 - 0,9...9 = 1 - \frac{10^N - 1}{10^N} = \frac{1}{10^N}$$

Pelo que fica verificado o critério que justifica ter lugar essa representação.

Resta analisar os casos das dízimas $0,(a_1...a_k)$ para as quais pelo menos um dos a_j

($j = 1, \dots, k$) é distinto do algarismo 9 ; nesse caso, em particular, $\frac{a_1...a_k}{10^k - 1} < 1$ e podemos

obter a representação de $\frac{a_1...a_k}{10^k - 1}$ em dízima finita ou infinita periódica utilizando o algoritmo da divisão inteira (cf. Informação Complementar para o professor relativa aos descritores **1.2** a **1.4**), começando por notar que o quociente da divisão inteira de $a_1...a_k$ por $10^k - 1$ é, neste caso, 0 e o resto, evidentemente, $a_1...a_k$, pelo que a representação em dízima será da forma $0,...$ e a determinação da parte decimal começa pela divisão inteira de $a_1...a_k0$ por $10^k - 1$. O que foi visto acerca deste algoritmo garante que multiplicando o numerador da fração por uma potência adequada de 10 de expoente não superior a k se obtém resto zero na correspondente divisão ou então há repetição de um resto parcial não nulo já obtido com um expoente menor e fica assim determinado o período dessa representação em dízima, que é nesse caso infinita periódica.

Ora:

$$a_1 \dots a_k \times 10^k = a_1 \dots a_k \times (10^k - 1) + a_1 \dots a_k$$

sendo $a_1 \dots a_k < 10^k - 1$, atendendo à hipótese feita. A equação traduz portanto uma divisão inteira, cujo quociente e resto podem assim ser também obtidos aplicando o algoritmo da

divisão a $\frac{a_1 \dots a_k \times 10^k}{10^k - 1}$. Mas o resto agora obtido é igual ao dividendo inicial e portanto ao primeiro resto parcial (por se tratar de uma fração própria, como acima vimos) pelo que podemos parar o processo e concluir que os algarismos do quociente obtido nesta divisão se vão repetir indefinidamente na dízima que representa $\frac{a_1 \dots a_k}{10^k - 1}$, ou seja, $\frac{a_1 \dots a_k}{10^k - 1} = 0,(a_1 \dots a_k)$ como pretendíamos.

[Parte 1, pág. 22]

1. Definição de a^0

1.1. Que valor deve ser atribuído a 5^0 por forma a que seja válida a igualdade $5^{0+3} = 5^0 \times 5^3$?

1.2.* De forma mais geral, dado um número não nulo a , quanto deve valer a^0 por forma a que para todo o inteiro natural n se tenha $a^{0+n} = a^0 a^n$?

2. Definição de a^{-n} , n número natural

2.1. Que valor deve ser atribuído a 7^{-2} por forma a que seja válida a igualdade

$$7^{2+(-2)} = 7^2 \times 7^{-2} ?$$

2.2.* De forma mais geral, dado um número não nulo a e um inteiro natural n , quanto deve valer a^{-n} por forma a que se tenha $a^{n+(-n)} = a^n a^{-n}$?

ALG8-1.1 a 1.3

Descritores: 1.1 e 1.2

Até ao momento não se definiu a^{-n} quando n é um número natural ou nulo.

Pretende-se uma definição que conserve a propriedade

$$a^{m+n} = a^m \times a^n$$

no caso de m e n serem inteiros relativos.

Descritor: 1.3

Tendo em conta as definições que constam nos dois descritores anteriores, os alunos deverão reconhecer que se mantêm válidas, para potências de expoente inteiro, as propriedades descritas em **ALG 6-1.4,1.6 ,1.7 e 1.8.**

[Parte 1, pág. 26](#)

1. Efetua a decomposição decimal do número racional 32,127 .

Resposta

1. $32,127 = 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 7 \times 10^{-3}$

NO8-1.7

1. Considera os números racionais $\frac{12}{105}$ e $\frac{135}{300}$.

[Parte 1, pág. 34]

- 1.1. Indica qual destes números admite uma representação em dízima finita.
- 1.2. Representa-os na forma de dízima finita ou infinita periódica.

Resposta:

- 1.1. Em primeiro lugar vamos obter frações irredutíveis equivalentes às frações dadas:

$$12 = 2^2 \times 3, \quad 105 = 3 \times 5 \times 7, \quad \text{logo} \quad \frac{12}{105} = \frac{2^2 \times 3}{3 \times 5 \times 7} = \frac{2^2}{5 \times 7}$$

O número racional $\frac{12}{105}$ não pode ser representado por uma dízima finita uma vez que o denominador da fração irredutível que o representa tem um divisor primo distinto de 2 e de 5 (o divisor 7).

$$135 = 3^3 \times 5, \quad 300 = 2^2 \times 3 \times 5^2, \quad \text{logo} \quad \frac{135}{300} = \frac{3^3 \times 5}{2^2 \times 3 \times 5^2} = \frac{3^2}{2^2 \times 5}$$

Nesta última fração, os únicos divisores primos do denominador são os números 2 e 5. A fração possui portanto uma representação em dízima finita.

- 1.2.

$$\begin{array}{r} 12,0000000 \mid 105 \\ 150 0,1142857 \\ 0450 \\ 0300 \\ 0900 \\ 0600 \\ 0750 \\ 015 \end{array}$$

Obteve-se o primeiro resto parcial repetido. O período mínimo é pois «142857» :

$$\frac{12}{105} = 0,1(142857)$$

Relativamente à fração $\frac{135}{300}$, tem-se:

$$\frac{135}{300} = \frac{3^2}{2^2 \times 5} = \frac{3^2 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{45}{100} = 0,45$$

NO8-1.2 a 1.4 e 1.11

Informação Complementar para o professor

Uma dízima finita (não negativa e de comprimento N) é uma expressão da forma $a_0, a_1 a_2 \dots a_N$ onde a_0 é a representação decimal de um número natural ou nulo e, para $n = 1, 2, \dots, N$, $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ é um algarismo. Uma dízima finita representa um número racional, de acordo com a identidade

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_N = a_0 + a_1 \times \frac{1}{10^1} + a_2 \times \frac{1}{10^2} + \dots + a_N \times \frac{1}{10^N}$$

Neste ano letivo introduz-se a noção de «dízima infinita», uma expressão do tipo $a_0, a_1 a_2 \dots a_N \dots$ formada pela representação decimal a_0 de um número natural ou nulo e onde, após a vírgula, está representada uma sucessão (isto é, uma "sequência infinita") de algarismos $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, podendo ainda ser afetada de um sinal «-». Nesta Informação Complementar consideraremos apenas dízimas positivas.

Definir em que medida uma dízima infinita representa um número é um processo delicado. Uma primeira ideia consistiria em considerar que $a_0, a_1 a_2 \dots a_N \dots$ representa uma "soma infinita" da forma

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_N \dots = a_0 + a_1 \times \frac{1}{10^1} + a_2 \times \frac{1}{10^2} + \dots + a_N \times \frac{1}{10^N} + \dots$$

Contudo, adicionar uma infinidade de números corresponde matematicamente ao conceito de «série», fora do âmbito do programa do Ensino Básico e do Secundário. Trata-se, de facto, de uma noção difícil de definir e de manipular a este nível. Diga-se, a este propósito, que se não forem feitas certas hipóteses sobre os termos a adicionar, uma "soma infinita" pode até não gozar das propriedades mais elementares da adição, como a comutatividade ou a associatividade! Embora não seja o caso das séries associadas às dízimas infinitas, este facto dá ideia das dificuldades inerentes a esse novo conceito. Esta abordagem não pode, portanto, ser seguida.

Antes de definirmos de que forma se pode, de forma mais elementar, associar de facto uma dízima infinita a um número, recordemos alguns resultados já conhecidos desde o 1.º ciclo, envolvendo a aproximação de números racionais por dízimas, e que permitem motivar essa definição.

Utilizando o algoritmo da divisão para aproximar um número racional (cf. **1.1 e NO4-6.1 a NO4-6.5**), as sucessivas aproximações podem nunca conduzir a um resultado exato.

Determina-se então por esse processo uma sucessão em que cada termo é uma dízima finita obtida da anterior acrescentando-lhe um algarismo à parte decimal. Ou seja, nesse caso, as aproximações constituem uma sucessão crescente (em sentido lato) da forma

a_0
 a_0, a_1
 $a_0, a_1 a_2$
 $\dots$
 $a_0, a_1 a_2 \dots a_N$
 $\dots$

A aproximação de comprimento N difere (por defeito) do número que se pretende aproximar menos que $\frac{1}{10^N}$, como veremos adiante.

Com esta motivação, diremos que a dízima infinita $a_0, a_1 a_2 \dots a_N$ está associada a um dado número x se, para qualquer N , número inteiro não negativo, truncando a dízima após a ordem N (isto é, eliminando todos os algarismos da dízima infinita que se encontram após a_N), a dízima finita assim obtida aproxima x com um erro não superior a $\frac{1}{10^N}$:

$$0 \leq x - a_0, a_1 a_2 \dots a_N \leq \frac{1}{10^N}$$

Ilustremos esta definição: a dízima infinita $0,333\dots$ representa o número racional $x = \frac{1}{3}$ porque se tem:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{3} - 0 \leq 1 \\ 0 &\leq \frac{1}{3} - 0,3 = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30} \leq \frac{1}{10} \\ 0 &\leq \frac{1}{3} - 0,33 = \frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300} \leq \frac{1}{100} \\ 0 &\leq \frac{1}{3} - 0,333 = \frac{1}{3} - \frac{333}{1000} = \frac{1}{3000} \leq \frac{1}{1000} \\ &\dots \end{aligned}$$

podendo escrever-se desigualdades análogas independentemente da ordem da truncatura efetuada à dízima infinita $0,333\dots$.

É óbvio que este critério fica cumprido com uma dízima finita e o número que representa, se acrescentarmos uma sucessão constantemente igual a zero a essa dízima por forma a transformá-la numa dízima infinita.

É também fácil verificar que se uma dada dízima infinita $a_0, a_1 a_2 \dots a_N \dots$ está associada tanto a x como a y , então, forçosamente $x = y$, ou seja, se uma dízima está associada a um número esse número fica determinado de maneira única, o que permite utilizar a própria dízima, sem qualquer ambiguidade, como uma nova forma de representação desse número. Diremos então, naturalmente, que a dízima *representa* o número, podendo escrever-se $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_N$.

Para efetuar essa verificação basta notar que, das desigualdades

$$0 \leq x - a_0, a_1 a_2 \dots a_N \leq \frac{1}{10^N} \quad \text{e} \quad 0 \leq y - a_0, a_1 a_2 \dots a_N \leq \frac{1}{10^N}$$

resulta, supondo que $x \leq y$ (se necessário trocando as designações dos números):

$$0 \leq y - x = y - a_0, a_1 a_2 \dots a_N - (x - a_0, a_1 a_2 \dots a_N) \leq y - a_0, a_1 a_2 \dots a_N \leq \frac{1}{10^N}$$

Então, se fosse $y - x > 0$, teríamos para todo o N , $10^N \leq \frac{1}{y - x}$, o que é absurdo, já que se teria então um majorante para o conjunto dos números naturais $\left(N > 10^N \leq \frac{1}{y - x}\right)$.

Mostremos então como o algoritmo da divisão, enquanto processo de obter aproximações de um número representado por uma fração $\frac{a}{b}$, permite justamente construir uma dízima que representa esse número. Para o efeito basta generalizar o argumento utilizado na Informação Complementar para o professor relativa a NO4-6.5, nesse caso apenas para uma aproximação até às centésimas. Para obter uma aproximação como dízima finita, com erro inferior a $\frac{1}{10^N}$, de um número racional representado por uma fração $\frac{a}{b}$, sendo q e r respetivamente o quociente e o resto da divisão inteira de $10^N \times a$ por b , comecemos por notar que:

$$\frac{a}{b} = \frac{10^N \times a}{b} \times \frac{1}{10^N} = \frac{b \times q + r}{b} \times \frac{1}{10^N} = \left(q + \frac{r}{b}\right) \times \frac{1}{10^N} = \left(q \times \frac{1}{10^N}\right) + \left(\frac{r}{b} \times \frac{1}{10^N}\right)$$

Como a fração $\frac{r}{b}$ é sempre própria (o resto é inferior ao divisor), a diferença entre $\frac{a}{b}$ e a aproximação obtida $q \times \frac{1}{10^N}$, dada por $\frac{r}{b} \times \frac{1}{10^N}$, é um número não negativo inferior a $\frac{1}{10^N}$.

Ora os algarismos da representação decimal de $q \times \frac{1}{10^N}$ podem ser obtidos utilizando o algoritmo da divisão inteira de $10^N \times a$ por b , conduzindo a uma dízima finita da forma $a_0, a_1 a_2 \dots a_N$, após o posicionamento da vírgula que resulta da divisão por 10^N . Como N é arbitrário, este processo conduz a uma sucessão de dízimas finitas, tendo a de ordem N exatamente N algarismos após a vírgula (parte decimal); além disso cada uma delas obtém-se por aplicação do algoritmo da divisão a um dividendo que difere do utilizado na ordem anterior apenas pelo acrescento de um zero à direita e mantendo o divisor. Sendo assim, a dízima na ordem N difere da anterior apenas pelo acrescento do algarismo dessa ordem após a vírgula, pelo que a sucessão de dízimas assim definida determina uma dízima $(a_0, a_1 a_2 \dots a_N \dots)$ finita ou infinita consoante o resto da divisão é ou não igual a zero em algum dos passos, verificando-se portanto para cada N :

$$0 \leq \frac{a}{b} - a_0, a_1 a_2 \dots a_N < \frac{1}{10^N}$$

Tomando agora um número x representado na forma de uma dízima infinita, $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_N \dots$ os alunos poderão, em casos concretos (ver os exemplos relativos ao descritor 1.5) efetuar as seguintes três manipulações algébricas, sem que se peça que as justifiquem:

1. Multiplicação e divisão por uma potência de 10

Fixado um número natural k e multiplicando, para cada $N \geq k$, todos os membros da cadeia de desigualdades $0 \leq x - a_0, a_1 a_2 \dots a_N \leq \frac{1}{10^N}$ por 10^k obtemos a cadeia equivalente de desigualdades (usando NO4-6.1):

$$0 \leq 10^k \times x - a_0 a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} \dots a_N \leq \frac{1}{10^{N-k}}$$

A dízima finita $a_0 a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} \dots a_N$ tem comprimento $N - k$, pelo que as desigualdades acima, verificadas para todos os valores de N não inferiores a k , significam que o número $10^k \times x$ é representado pela dízima infinita $a_0 a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} \dots a_N \dots$

Assim, à multiplicação por 10^k corresponde um deslocamento de k casas para a direita da vírgula decimal:

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots a_N \dots \Rightarrow 10^k \times x = a_0 a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} \dots a_N \dots$$

Ou seja, se um número racional x é representado por uma dízima $a_0, a_1 a_2 \dots a_N \dots$ então a dízima $a_0 a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} \dots a_N \dots$ representa o número racional $10^k \times x$. A recíproca também vale, já que acima foi estabelecida uma equivalência entre as cadeias de desigualdades; ou seja, à divisão por 10^k corresponde um deslocamento de k casas para a esquerda da vírgula decimal.

2. Separação de uma dízima infinita na soma de uma dízima finita com uma dízima infinita

Observando que $0 \leq x - a_0, a_1 a_2 \dots a_N \leq \frac{1}{10^N} \Leftrightarrow (x - a_0) - 0, a_1 a_2 \dots a_N \leq \frac{1}{10^N}$ podemos concluir que se o número x é representado pela dízima infinita $a_0, a_1 a_2 \dots a_N \dots$ então o número $x - a_0$ é representado pela dízima infinita $0, a_1 a_2 \dots a_N \dots$

Ou seja, $x - a_0 = 0, a_1 a_2 \dots a_N \dots$ e portanto, como $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_N \dots$; $a_0, a_1 a_2 \dots a_N \dots = a_0 + 0, a_1 a_2 \dots a_N \dots$

Raciocínio análogo permite observar que se pode "partir" uma dízima infinita em qualquer ordem:

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_N \dots = a_0, a_1 a_2 \dots a_k + 0,00 \dots 0 a_{k+1} a_{k+2} \dots$$

ou seja, se uma das dízimas $a_0, a_1 a_2 \dots a_N \dots$ ou $0,00 \dots 0 a_{k+1} a_{k+2} \dots$ representar um número racional então a outra também representa e vale a igualdade acima.

3. Subtração de dízimas

Como corolário da propriedade anterior, podemos concluir que partes decimais iguais a partir de certa ordem se anulam por subtração, obtendo-se assim uma dízima finita.

Dados dois números representados por dízimas infinitas iguais a partir de uma ordem k

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots \text{ e } y = b_0, b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k b_{k+1} \dots$$

$$\begin{aligned} x - y &= a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots - b_0, b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k b_{k+1} \dots \\ &= a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} + 0,00 \dots 0 a_k a_{k+1} \dots - (b_0, b_1 b_2 \dots b_{k-1} + 0,00 \dots 0 b_k b_{k+1} \dots) \\ &= a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} - b_0, b_1 b_2 \dots b_{k-1} \end{aligned}$$

É relativamente fácil observar que o algoritmo da divisão apenas produz dízimas finitas ou dízimas infinitas periódicas. Com efeito, sabemos que, após cada divisão, o resto obtido é sempre inferior ao divisor. Assim, durante o cálculo da parte decimal do quociente e caso o algoritmo não termine (o algoritmo termina quando se obtém um resto nulo) ocorre obrigatoriamente a repetição de um resto parcial, ao fim de um número de iterações no máximo igual ao valor do divisor: a dízima obtida é periódica e o período tem um número de algarismos inferior ao divisor.

Inversamente, dada uma dízima infinita periódica, as manipulações algébricas efetuadas a propósito do descritor **1.5** (cf. Texto de Apoio), e que utilizam as três propriedades algébricas atrás enunciadas, permitem obter sob a forma de fração um número racional que se verifica ser representado por essa dízima. Ou seja, qualquer dízima infinita periódica representa um número racional.

Desta forma, nesta fase, apenas podemos garantir que as dízimas finitas ou infinitas periódicas representam de facto números conhecidos (os números racionais) e que, inversamente, qualquer número racional pode ser representado por uma dízima finita ou infinita periódica.

Além disso, veremos em seguida que duas dízimas representando o mesmo número racional (com uma exceção que não afeta a conclusão seguinte) têm de ser constituídas por uma mesma parte inteira e iguais sucessões de algarismos após a vírgula (identificando as finitas com as infinitas de período «0»), pelo que dízimas infinitas não periódicas não podem representar números racionais. De facto, estes já admitem sempre uma representação como dízimas finitas ou infinitas periódicas, como acabámos de verificar. A interpretação das dízimas infinitas não periódicas como representações de números (de natureza distinta dos racionais) será tratada no segundo objetivo geral deste domínio.

Convém ainda salientar que a representação em dízima infinita periódica dos números racionais não é biunívoca (exceção atrás referida). Por exemplo, utilizando as operações algébricas justificadas acima e admitindo que $0,(9) = 0,999\dots$ representa de facto um número racional (o que será justificado adiante, a propósito do descritor **1.5**):

$$10 \times 0,999\dots - 0,999 = 9,99\dots - 0,99\dots = 9$$

de onde se deduz que $9 \times 0,999\dots = 9$ e portanto que $0,999\dots = \frac{9}{9}$, ou seja, $0,999\dots = 1$.

O mesmo processo permite mostrar que é possível representar qualquer dízima finita na forma de uma dízima infinita periódica de período 9 :

$$0,45 = 0,44(9) , 0,312 = 0,311(9) , \text{ etc.}$$

Este é o único impedimento à unicidade da representação em dízima infinita periódica dos números racionais (identificando, como atrás foi referido, as dízimas finitas com as infinitas de período «0»). De facto, se k for a mais pequena ordem em que a representação de dois números x e y difere: $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k$ e $y = a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} b_k$ ($a_k \neq b_k$),

$$x = y \Leftrightarrow a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k \dots = a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} b_k \dots \Leftrightarrow a_k, a_{k+1} a_{k+2} \dots = b_k, b_{k+1} b_{k+2} \dots$$

Denotando $z = a_k, a_{k+1} a_{k+2} \dots = b_k, b_{k+1} b_{k+2} \dots$, por definição da representação em dízima infinita, para qualquer número natural N :

$$0 \leq z - a_k, a_{k+1} \dots a_{k+N} \dots \leq \frac{1}{10^N} \text{ e } 0 \leq z - b_k, b_{k+1} \dots b_{k+N} \dots \leq \frac{1}{10^N}$$

de onde se deduz, supondo, sem perda de generalidade, que $a_k > b_k$:

$$0 < a_k, a_{k+1} \dots a_{k+N} - b_k, b_{k+1} \dots b_{k+N} = z - b_k, b_{k+1} \dots b_{k+N} - (z - a_k, a_{k+1} \dots a_{k+N}) \leq z - b_k, b_{k+1} \dots b_{k+N} \leq \frac{1}{10^N}$$

$$\Rightarrow 0 < a_k a_{k+1} \dots a_{k+N} - b_k b_{k+1} \dots b_{k+N} \leq 1$$

$$\Rightarrow a_k a_{k+1} \dots a_{k+N} - b_k b_{k+1} \dots b_{k+N} = 1$$

$$\Rightarrow a_k a_{k+1} \dots a_{k+N} = b_k b_{k+1} \dots b_{k+N} + 1$$

Esta última igualdade, uma vez que $a_k > b_k$, só é possível se $b_{k+1} = b_{k+2} = \dots = b_{k+N} = 9$, $a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = a_{k+N} = 0$ e $a_k = b_k + 1$ (veja-se a justificação adiante). A arbitrariedade de N garante então que $a_0, a_1 a_2 \dots a_N$ tem os algarismos todos nulos a partir da ordem $k+1$, ou seja, é equivalente à dízima finita $a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k$ e $b_0, b_1 b_2 \dots b_N$ é a dízima infinita periódica $a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} b_k(9)$ onde $b_k = a_k - 1$, como pretendíamos provar. Ou seja, quando duas dízimas representam o mesmo número racional e não têm os algarismos correspondentes todos respetivamente iguais então uma delas é uma dízima finita e a outra é a que se obtém diminuindo uma unidade ao último algarismo não nulo da dízima finita e fazendo seguir esse algarismo de uma sucessão de algarismos constantemente iguais a 9.

Para verificarmos que da igualdade $a_k a_{k+1} \dots a_{k+N} = b_k b_{k+1} \dots b_{k+N} + 1$ com $a_k > b_k$ resulta, de facto, $b_{k+1} = b_{k+2} = \dots = b_{k+N} = 9$, $a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = a_{k+N} = 0$ e $b_k < 9$, $a_k = b_k + 1$, notemos que quando se adiciona uma unidade a um número natural, a respetiva representação decimal apenas se altera na ordem das unidades, a menos que o algarismo das unidades seja igual a «9», caso em que passa a ser «0» e, nesse caso, o da ordem seguinte é adicionado de uma unidade, se não for «9», e passa a «0» no caso contrário; repetindo este raciocínio tantas vezes quantas for necessário, conclui-se que o único caso em que há alteração no algarismo de maior ordem ocorre quando os restantes algarismos são todos iguais a nove e, nesse caso, passam todos a zero e o de maior ordem ou é adicionado de uma unidade, se não for «9», ou é substituído pelo grupo «10» se for «9». Esta última alternativa não pode ocorrer, com a hipótese feita, pois implicaria que uma das representações teria mais um algarismo que a outra.

Finalmente, pode observar-se que o algoritmo da divisão não produz dízimas infinitas de período «9» . Com efeito, já referimos que tais dízimas representam sempre um número racional que pode ser alternativamente representado por uma dízima finita, ou seja, um número racional que pode ser representado por uma fração decimal. Ora, aplicando o algoritmo da divisão aos termos de uma fração equivalente a uma fração decimal, somos forçosamente conduzidos a um resto zero ao fim de um número finito de passos (*cf.* Informação Complementar para o professor, CA-1.º Ciclo, **NO4-6.4**); como seriam estes os únicos casos em que poderiam ocorrer dízimas de período «9» , por aplicação do algoritmo da divisão, concluímos que tais dízimas nunca ocorrem nesse processo. Portanto, das duas alternativas para representação de um número racional por dízimas nos casos em que não há unicidade, o algoritmo da divisão conduz sempre à que não é infinita de período «9» .

[Parte 1, pág. 34]

1. Considera os números naturais $n = 48$ e $m = 50$.
 - 1.1. Decompõe n e m em fatores primos.
 - 1.2. Obtém a decomposição em fatores primos de n^2 e m^2 .
2. Calcula a raiz quadrada dos seguintes números naturais começando por decompô-los em fatores primos:
 - 2.1. 2025
 - 2.2. 32 400
- 3* Justifica que a decomposição em fatores primos de um quadrado perfeito apenas apresenta expoentes pares.
- 4.** Mostra que $\sqrt{5}$ é um número irracional.

NO8-2.8

Resposta:

1.1. $n = 48 = 2^4 \times 3$ e $m = 2 \times 5^2$

1.2. $48^2 = (2^4 \times 3)^2 = 2^{4 \times 2} \times 3^2 = 2^8 \times 3^2$

$50^2 = (2 \times 5^2)^2 = 2^2 \times 5^{2 \times 2} = 2^2 \times 5^4$

2.1. $2025 = 3^4 \times 5^2 = (3^2 \times 5)^2 = 45^2$ logo $\sqrt{2025} = 45$

2.2. $32\,400 = 2^4 \times 3^4 \times 5^2 = (2^2 \times 3^2 \times 5)^2 = 180^2$ logo $\sqrt{32\,400} = 180$

3* Um quadrado perfeito é um número da forma n^2 , onde n é um número natural. Para o decompormos em fatores primos, podemos começar por decompor n em fatores primos e em seguida aplicar a regra de potências utilizada nos exemplos anteriores. Todos os expoentes serão multiplicados por 2, logo serão números pares.

4. Se $\sqrt{5}$ fosse um número racional, ter-se-ia $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, onde a e b são números naturais. Desta forma, $5 \times b^2 = a^2$.

Todos os fatores primos de a^2 figuram com expoente par na respetiva decomposição. O mesmo acontece aos fatores primos de b^2 . Assim, o expoente do fator primo 5 na decomposição de $5 \times b^2$ é um número ímpar, o que é absurdo, uma vez que $5 \times b^2 = a^2$. Daqui se conclui que $\sqrt{5}$ não pode ser escrito sob forma de fração, logo trata-se de um número irracional.

Descritor: 2.8

Os alunos podem começar por recordar que na decomposição em fatores primos de um quadrado perfeito apenas figuram expoentes pares, o que terá sido visto no 7.º ano, a propósito do descritor **GM7-7.4**.

Para reconhecer que $\sqrt{2}$ é um número irracional, podemos invocar o descritor **GM7-7.4**, já que o resultado a que se refere significa que não existem números naturais a e b tais que $\frac{a^2}{b^2} = 2$; ou seja, 2 não pode ser o quadrado de um número racional positivo. Como está expresso no descritor **2.7**, existe um único número real positivo cujo quadrado é igual a 2 e que se designa por $\sqrt{2}$, mas, pelo que acabámos de ver, tal número não pode ser racional, ou seja, tem de ser irracional.

Apresenta-se no exemplo 4 esse mesmo raciocínio aplicado à irracionalidade de $\sqrt{5}$.

[Parte 1, pág. 34]

- 1*** Constrói um triângulo retângulo com um dos catetos coincidente com o segmento de extremos na origem O e no ponto R_1 de abcissa 1 de uma reta numérica e o outro cateto também unitário, e em seguida resolve as alíneas seguintes:
- 1.1.** Utilizando um compasso, determina o ponto R_2 da reta numérica com abcissa igual à medida do comprimento da hipotenusa do triângulo.
- 1.2.** Constrói um triângulo retângulo com um dos catetos coincidente com $[OR_2]$ e o outro unitário e, utilizando um compasso, determina o ponto R_3 da reta numérica com abcissa igual à medida do comprimento da hipotenusa do triângulo.
- 1.3.** Utiliza o processo que foi indicado nas alíneas anteriores para construíres o ponto R_2 a partir de R_1 e o ponto R_3 a partir de R_2 por forma a obteres agora, sucessivamente, um ponto R_4 a partir de R_3 e um ponto R_5 a partir de R_4 .
- 1.4.** Mostra que, para cada $n = 1, 2, 3, 4, 5$ o ponto R_n da reta numérica tem abcissa $\sqrt{n}$.
- 1.5.** Constrói numa reta numérica um ponto de abcissa $\sqrt{7}$.

[Parte 1, pág. 42]

- 1.**** Seja a o número real de parte inteira igual a 0 e parte decimal dada por uma sucessão envolvendo apenas os algarismos 1 e 0, começando por 1 e inserindo-se sucessivamente entre cada duas ocorrências do algarismo 1 um número de ocorrências do algarismo 0 começando em um e sucessivamente acrescentado de uma unidade (ou seja: $a = 0,101\ 001\ 000\ 100\ 001\dots$).
- 1.1.** Será um número racional? Porquê?
- 1.2.** Compara a com o número $b = 0,101\ 001\ 000\ 100\ 001\ (000\ 001)$

Resposta:

- 1.1.** A dízima que representa a não pode ser periódica; de facto suponhamos que o era e seja k o comprimento de um período. Pela definição do número a , na respetiva representação decimal, depois de certa ordem, que poderíamos escolher já posterior à primeira ocorrência do período, encontraríamos $2k$ zeros seguidos; mas isso obrigaria o período a ser constituído apenas pela repetição do algarismo zero k vezes, ou seja, a seria dado por uma dízima finita, o que manifestamente não acontece, já que o algarismo 1 ocorre na sucessão dos algarismos de a em ordens arbitrariamente grandes.
- Portanto a não é um número racional, ou seja, é um número irracional.
- 1.2.** Até ao algarismo anterior ao período da representação decimal de b esta coincide com a representação decimal de a ; são também iguais, respetivamente, os algarismos que constituem a primeira ocorrência do período e os correspondentes da representação decimal de a , mas, na segunda ocorrência do período, o último algarismo é igual a 1, ao passo que os correspondentes algarismos da representação decimal de a são todos iguais a 0. Assim, $b > a$.

NO8-3.1 e 3.2

Descritor: 3.1

Tal como para os racionais, podemos agora dizer, estendendo a ordenação dos números a $\mathbb{R}$, que um número real x é maior do que um número real y ($x > y$) se o ponto de abscissa x pertencer à semirreta de sentido positivo com origem no ponto de abscissa y , ou, de maneira equivalente, se a semirreta de sentido positivo associada a x estiver contida na semirreta de sentido positivo associada a y .

Desta caracterização resulta imediatamente que, se $x > y$ e $y > z$, então $x > z$ (propriedade transitiva), muito simplesmente pela transitividade da inclusão aplicada às semirretas de sentido positivo associadas aos referidos números. Além disso, dados números reais x e y , os pontos dos quais são abscissas, ou coincidem e, nesse caso, $x = y$, pelo que acima se viu (a abscissa de um ponto ficou bem definida), ou a semirreta de sentido positivo com origem num deles está contida na semirreta de sentido positivo com origem no outro, já que é essa a definição de semirretas com o mesmo sentido, quando têm a mesma reta suporte; mas isso significa que ou se tem $x > y$ ou $y > x$.

Daqui resulta a chamada propriedade tricotômica: para quaisquer números reais x e y , ou $x = y$ ou $x > y$ ou $y > x$, podendo apenas ter lugar, em cada caso, uma destas relações.

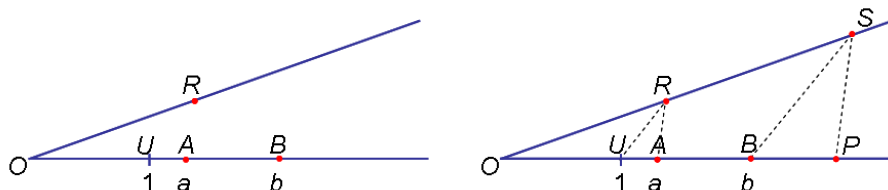
Descritor 3.2

A correspondência estabelecida entre números reais e pontos da reta numérica utilizando as representações em dízima revela que, dados dois números positivos, se tiverem partes inteiras distintas, é maior o que tem maior parte inteira e se tiverem partes inteiras iguais, é maior o que tiver maior o algarismo da maior ordem decimal em que as duas dízimas diferem (excluindo o caso das dízimas de período «9»), ou seja, em qualquer caso, para se compararem dois números reais dados através das respetivas representações em dízima e excluindo as representações em dízima de período «9» há que comparar sucessivamente os algarismos a partir do de maior ordem decimal até se encontrar uma ordem em que as dízimas difiram; então será maior o número para o qual o algarismo dessa ordem for maior.

[Parte 1, pág. 46]

1. Neste exemplo ilustra-se um método geométrico para determinar o produto de dois números reais. Mais precisamente, dada uma reta numérica de origem O , e dois números reais positivos a e b , abcissas respetivamente de dois pontos A e B , pretende-se construir, nessa mesma reta, o ponto P de abcissa $a \times b$.

Com este fim, designemos por U o ponto de abcissa 1 e consideremos uma reta auxiliar OR distinta da reta numérica inicial.



- 1.1. Seja S a interseção de OR com a reta paralela a UR que passa por B .

Mostra que $b = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}}$.

- 1.2. Seja P a interseção de OU com a reta paralela a AR que passa por A .

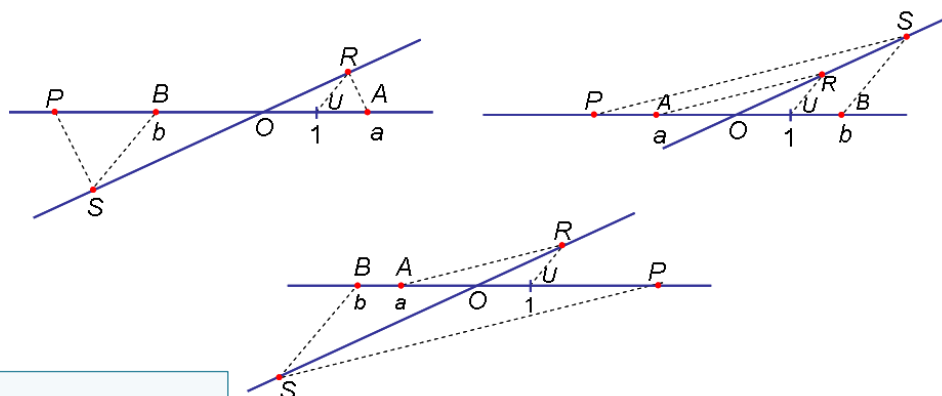
Mostra que $\frac{\overline{OP}}{a} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}}$.

- 1.3. Deduz que $\overline{OP} = a \times b$.

- 1.4. Utiliza este método geométrico para obter aproximadamente o valor do produto $3,8 \times 1,4$, começando por marcar, numa reta numérica com unidade igual a 1 centímetro, os pontos de abcissas 3,8 e 1,4 com o auxílio de uma régua graduada.

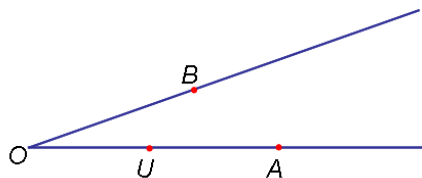
Observação

Na verdade, este método também é aplicável à situação em que a e b são dois quaisquer números reais, não necessariamente positivos, facto ilustrado nas três figuras seguintes.

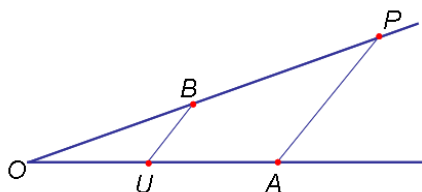


NO8-2.1 a 2.5 e 2.7

2. No livro *A Geometria*, Descartes preconiza um outro método para obter geometricamente o produto de dois números reais positivos a e b . Com efeito, representa igualmente o ponto A de abscissa a , na reta numérica OU (em que U tem por abscissa 1) e B , de abscissa b , numa reta numérica distinta com a mesma origem O e a mesma unidade.



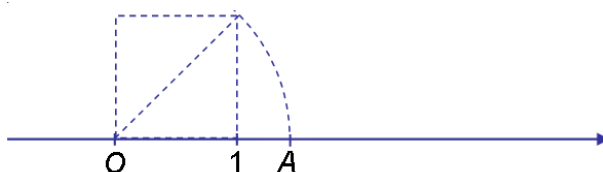
Traçando agora a paralela a UB que passa por A , o ponto de interseção desta reta com OB , designado por P , terá abscissa $a \times b$.



Justifica este resultado.

Descritor: 2.1.

Neste descritor exibe-se pela primeira vez um ponto da reta numérica que não pode ser representado por um número racional, ilustrando-se assim uma limitação fundamental dos números racionais.



Considerando um ponto A da reta numérica tal que $\overline{OA}$ é igual ao comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1, poderá utilizar-se a construção apresentada no descritor **GM7-7.4** para argumentar que não existe nenhum número racional d igual à medida do comprimento de $[OA]$ (e, consequentemente, não existe um número racional que represente o ponto A na reta numérica). A igualdade $d^2 = 2$, que aí é explorada, poderá ser obtida de forma mais expedita caso já tenha sido estudado o teorema de Pitágoras.

Descritores: 2.2 a 2.5

No primeiro objetivo geral deste domínio as dízimas infinitas periódicas foram interpretadas como representações de números racionais. É agora necessário explicar que sentido pode ser dado às dízimas infinitas não periódicas e em que medida representam também números.

É esse o intuito do presente descritor, que fornece uma interpretação geométrica de qualquer dízima, finita ou infinita, periódica ou não periódica. Pretende-se que esta construção seja feita em exemplos concretos:

Consideremos por exemplo o seguinte ponto A da semirreta numérica positiva:



Começamos por justapor, a partir da origem, segmentos de reta de medida de

comprimento igual a $\frac{1}{10^0} = 1$ até que um deles contenha o ponto A .



Neste exemplo, o ponto A encontra-se entre os pontos de abscissa 2 e $2 + 1$, pelo que, com as notações do descritor, $a_0 = 2$.



Justapomos agora, a partir do ponto de abscissa 2, segmentos de reta de medida de comprimento igual a $\frac{1}{10} = 10^{-1}$.



O ponto A encontra-se situado entre os pontos de abscissa $2 + \frac{6}{10}$ e $2 + \frac{7}{10}$: tem-se $a_1 = 6$.



Repete-se este processo com segmentos de reta de medida de comprimento iguais a $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$, ... etc.

Vai-se assim construindo progressivamente uma dízima da forma $a_0, a_1 a_2 \dots$. No presente exemplo, esta dízima é igual a 2,6...

Esta dízima fica associada ao ponto A , podendo ocorrer uma de três possibilidades:

- O processo termina após um número finito de etapas, com a coincidência do ponto A com uma extremidade de um dos intervalos, obtendo-se portanto uma dízima finita. Neste caso, a dízima corresponde à fração decimal que representa o número racional abscissa de A .
- A dízima obtida é infinita periódica. Neste caso, a dízima representa o número racional abscissa de A .
- A dízima obtida é infinita não periódica. Neste caso A é um ponto irracional e a dízima deve ser interpretada como representação de um número, dito «número irracional», medida da distância entre a origem e A e que também designaremos por abscissa de A .

Para os pontos da semirreta negativa procederíamos de modo análogo, obtendo deste modo as abscissas de todos os pontos desta semirreta, representadas por dízimas finitas ou infinitas (periódicas ou não), afetadas de sinal «-», juntando-se assim os números irracionais negativos aos racionais negativos já nossos conhecidos. O próprio processo de construção da dízima associada a um ponto da reta numérica garante que pontos simétricos em relação à origem são representados por dízimas simétricas uma da outra (ou seja, que diferem apenas no sinal); em particular, o simétrico de um ponto irracional é um ponto irracional.

Informação Complementar para o professor

Também se prova, reciprocamente, que cada dízima, finita ou infinita, periódica ou não periódica, representa a abscissa de um ponto da reta numérica e que a correspondência assim estabelecida entre pontos da reta numérica e dízimas (afetadas ou não de sinal menos) é biunívoca, desde que se excluam as dízimas infinitas periódicas de período «9» e utilizando a interpretação acima referida das dízimas finitas como dízimas infinitas periódicas de período «0» (cf. texto de apoio ao descritor 1.6).

Com efeito, no caso de uma dízima finita ou infinita periódica, sabemos construir geometricamente um ponto na reta numérica de abscissa igual ao número racional representado por essa dízima (1.12); se a dízima for infinita não periódica a respetiva truncatura de comprimento N é abscissa de um ponto P_N da reta, já que se trata de dízima finita. Obtemos assim uma sucessão $(P_N)_{N \in \mathbb{N}}$ de pontos na reta numérica tal que as distâncias entre P_m e P_n são números racionais que se tornam "tão pequenos quanto o desejarmos se n e m forem suficientemente grandes" (diz-se que a sucessão é «de Cauchy»).

Qualquer axiomática adequada para a Geometria Euclidiana permite demonstrar que, em consequência, existe um ponto P na reta numérica para o qual os pontos P_N "convergem", no sentido em que as distâncias entre P_N e P se tornam "tão pequenas quanto o desejarmos desde que tomemos N suficientemente grande"; trata-se de propriedade estreitamente relacionada com o chamado «axioma de completude» que, em alguma das possíveis versões equivalentes, é essencial à caracterização do espaço da Geometria Euclidiana. Daí resulta facilmente que a abscissa de P é exatamente o número irracional representado pela dízima infinita não periódica dada, no sentido acima definido.

Além disso, no quadro de uma tal axiomática, também é possível demonstrar que existe apenas um ponto da reta numérica com uma dada abscissa. Esta unicidade resulta da chamada «propriedade arquimediana» que pode formular-se dizendo que, fixada uma unidade de comprimento, qualquer segmento não degenerado (ou seja de extremos distintos) contém um segmento de medida de comprimento igual a $\frac{1}{n}$ para n suficientemente grande; daqui resulta, por exemplo, que, na reta numérica, o único ponto a uma distância da origem inferior a $\frac{1}{n}$ para todo o n é a própria origem, resultado que se estende a qualquer outro ponto da reta numérica. A propriedade arquimediana, em conjunto com a acima utilizada, que garante a existência do ponto P , limite da sucessão $(P_N)_{N \in \mathbb{N}}$ atrás construída, constitui uma das possíveis versões do referido axioma de completude.

Descritor: 2.7

Após se efetuarem as extensões mencionadas neste descritor, deverá notar-se que as funções lineares e afins, definidas no 7.º ano como funções de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, se estendem de forma natural a funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, já que apenas envolvem operações algébricas agora com sentido em $\mathbb{R}$.

[Parte 1, pág. 72]

1. Seja $[ABC]$ um triângulo tal que $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$, $\overline{AC} = 4 \text{ cm}$ e $\overline{BC} = 5 \text{ cm}$.
Mostra que $[ABC]$ é retângulo em A respondendo às seguintes alíneas.
- 1.1. Considera um triângulo $[A'B'C']$ retângulo em A' e tal que $\overline{A'B'} = 3 \text{ cm}$ e $\overline{A'C'} = 4 \text{ cm}$. Calcula $\overline{B'C'}$.
- 1.2. Justifica que os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são iguais.
- 1.3. Conclui que $[ABC]$ é retângulo em A .

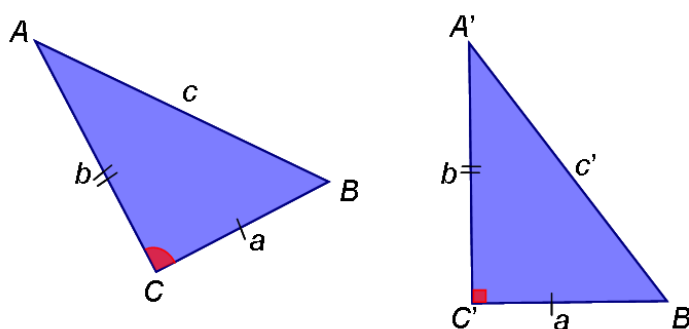
GM8-1.3

Descritor: 1.3

É importante que os alunos saibam e reconheçam que também é válido o recíproco do teorema de Pitágoras, ou seja, que se as medidas a , b e c dos lados de um triângulo verificarem a igualdade $a^2 + b^2 = c^2$ então o triângulo é retângulo no vértice oposto ao lado de medida c . Considera-se que, neste ciclo, é oportuno explorar a diferença entre este resultado e o teorema de Pitágoras.

Texto Complementar de Geometria

Suponhamos agora que é dado um triângulo $[ABC]$ com lados de medida de comprimento a , b , c , de modo que $a^2 + b^2 = c^2$, e consideremos um triângulo $[A'B'C']$, retângulo em B' , de catetos com medidas de comprimento iguais respectivamente a a e b , como assinalado na figura seguinte:



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[A'B'C']$ concluímos que $a^2 + b^2 = c'^2$, pelo que $c'^2 = c^2$, e portanto $c' = c$, atendendo ao resultado expresso em **ALG7-2.4** (sendo c' e c positivos, não poderiam ter quadrados iguais se fossem distintos). Mas então, pelo critério LLL os dois triângulos são iguais, pelo que, em particular, o ângulo interno do triângulo $[ABC]$ oposto ao lado de medida c será igual ao ângulo reto do outro triângulo, o que prova que:

o triângulo $[ABC]$ é reto no vértice oposto ao lado de medida c .

Acabámos de provar o chamado:

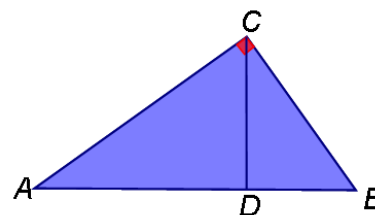
Recíproco do teorema de Pitágoras.

[Parte 1, pág. 76]

- 1.* Dados dois números positivos a e c , designa-se por «meio proporcional entre a e c » o número positivo b tal que $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

Considera o triângulo $[ABC]$ retângulo em C .

Prova que a altura $[CD]$ relativa à hipotenusa é meio proporcional entre os segmentos que nela determina ($[AD]$ e $[DB]$).

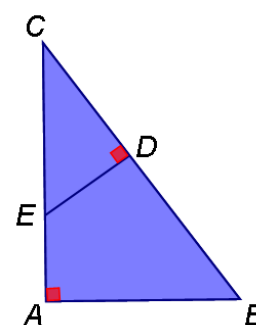


2. Na figura estão representados dois triângulos $[ABC]$ e $[EDC]$ retângulos respetivamente em A e em D , sendo E e D pontos respetivamente dos segmentos $[AC]$ e $[BC]$.

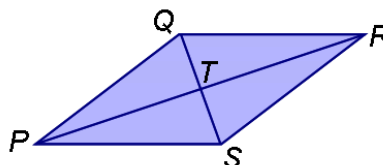
2.1. Justifica que os triângulos são semelhantes.

- 2.2. Supondo que $\overline{CB} = 10$ cm, $\overline{CE} = 5$ cm e que $\overline{DE} = 3$ cm, determina:

- a razão de semelhança que aplica o triângulo $[CDE]$ no triângulo $[CAB]$;
- a medida de $\overline{CD}$;
- as medidas de $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.

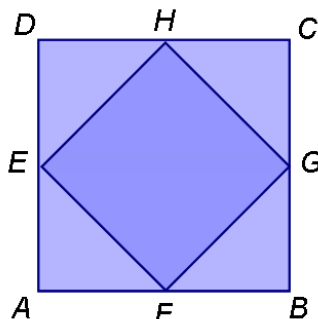


3. Considera um losango $[PQRS]$ de perímetro igual a 1 m cujas diagonais se interseitam no ponto T . Sabendo que $[PT]$ tem 24 cm de comprimento, determina a área do losango.



GM8-2.1 e 2.3

- 4* Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$ e E , F , G e H , pontos médios respetivamente dos lados $[AD]$, $[AB]$, $[BC]$ e $[CD]$.

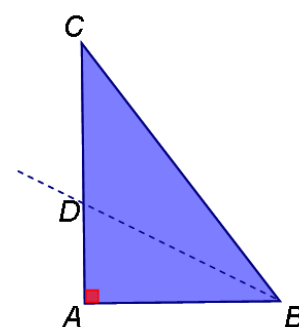


- 4.1. Mostra que $[EFGH]$ é um losango, começando por justificar a igualdade dos triângulos $[DEH]$, $[CHG]$, $[BGF]$ e $[AFE]$.
- 4.2. Mostra que $[EFGH]$ é um quadrado, começando por calcular a amplitude do ângulo EHG .
- 4.3. Decompõe o quadrado $[EFGH]$ através do traçado das respetivas diagonais e deduz o valor do quociente entre as áreas dos quadrados $[ABCD]$ e $[EFGH]$.
- 4.4. Supondo que o lado do quadrado $[ABCD]$ mede a cm, determina uma expressão para a medida de $\overline{EF}$ por dois métodos distintos:
- utilizando a alínea 4.3;
 - aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $[AEF]$.

5. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$ retângulo em A e a bissetriz $\hat{B}D$ do ângulo ABC .

- 5.1. Supondo que $\overline{AB} = 8$ mm e $\overline{BC} = 10$ mm, determina $\overline{AC}$.

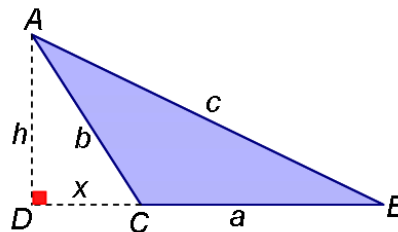
- 5.2. Determina $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ utilizando a proporção $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, ou seja, que os segmentos que a bissetriz de um ângulo determina no lado oposto estão na mesma razão dos outros dois lados do triângulo.



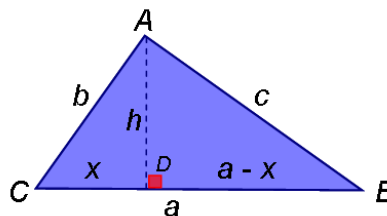
- 6.* Considera um triângulo $[ABC]$ e sejam $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Já se sabe que o ângulo de vértice em C é reto quando e apenas quando $a^2 + b^2 = c^2$. Se o ângulo de vértice em C for obtuso (respetivamente agudo), poderá deduzir-se qual dos números $a^2 + b^2$ e c^2 é maior?

Vais explorar os casos possíveis em cada uma das seguintes situações, considerando primeiro o caso em que o ângulo de vértice em C é obtuso e depois o caso em que é agudo.

- 6.1. Supõe que o ângulo de vértice em C é obtuso e traça a altura relativa a $[BC]$ que intersesta o prolongamento desse lado no ponto D obtendo-se assim dois triângulos retângulos, $[ACD]$ e $[ABD]$. Considera $x = \overline{DC}$ e $h = \overline{AD}$.



- Tendo em conta o teorema de Pitágoras, completa a igualdade $b^2 = \dots$ e utiliza-a para obter uma expressão de $a^2 + b^2$ que apenas envolva a , h e x .
 - Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $[ABD]$ mostra que $c^2 = h^2 + a^2 + 2ax + x^2$.
 - Tendo em conta as igualdades obtidas nas alíneas anteriores, mostra que $c^2 > a^2 + b^2$.
- 6.2. Supondo que o ângulo de vértice em C é agudo, considera o ponto D , pé da perpendicular traçada de A para $[BC]$, e $x = \overline{CD}$.

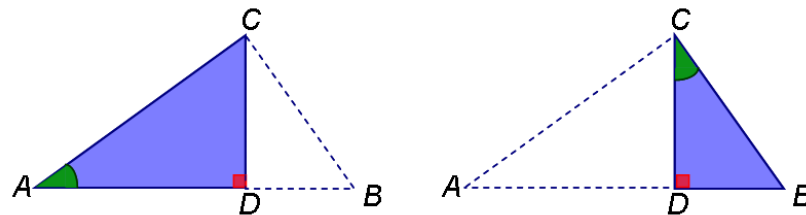


- Tendo em conta o teorema de Pitágoras, completa a igualdade $b^2 = \dots$ e utiliza-a para obter uma expressão de $a^2 + b^2$ que apenas envolva a , h e x .
- Mostra, utilizando o teorema de Pitágoras, que $c^2 = h^2 + a^2 - 2ax + x^2$.
- Tendo em conta as igualdades obtidas nas alíneas anteriores, mostra que $c^2 < a^2 + b^2$.

- 7.** Considera, num referencial cartesiano, os pontos $A(a, 2)$, $B(3, a)$ e $C(7, 5)$ sendo a um número real.
- 7.1.** Sabendo que a reta AB é vertical qual é o valor de a ?
- 7.2.** Haverá algum valor de a para o qual a reta BC seja vertical? Porquê?
- 7.3.** Supondo que a reta AC é vertical, indica uma equação para essa reta.

Resposta:

- 1.** Os triângulos $[ACD]$ e $[CBD]$ são ambos retângulos em D porque $[CD]$ é a altura relativa a $[AB]$. Por outro lado, $\widehat{DAC} = \widehat{DCB}$ pois são ângulos agudos de lados perpendiculares dois a dois (GM5-1.16). Assim, pelo critério AA de semelhança de triângulos (GM7-4.10), os dois triângulos são semelhantes e aos lados $[BD]$ e $[CD]$ do triângulo $[BCD]$ correspondem respetivamente os lados $[CD]$ e $[AD]$ do triângulo $[ACD]$.



Assim, $\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$ pelo que $\overline{CD}$ é o meio proporcional entre $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$.

6.1.

- a)** Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[ACD]$, $b^2 = x^2 + h^2$.

Logo, $a^2 + b^2 = a^2 + x^2 + h^2$.

- b)** Pelo teorema de Pitágoras tem-se $c^2 = (a + x)^2 + h^2 = a^2 + 2ax + x^2 + h^2$.

- c)** Comparando as expressões obtidas para $a^2 + b^2$ e c^2 , como $2ax > 0$ conclui-se que $c^2 > a^2 + b^2$.

6.2.

- a)** Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[ACD]$, $b^2 = x^2 + h^2$.

Logo, $a^2 + b^2 = a^2 + x^2 + h^2$.

- b)** Pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $[ABD]$ tem-se $c^2 = (a - x)^2 + h^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2$.

- c)** Comparando as expressões obtidas para $a^2 + b^2$ e c^2 , como $2ax > 0$ conclui-se que $c^2 < a^2 + b^2$.

Descritor: 2.1

Observações:

1. Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ o número positivo b diz-se «meio proporcional» porque ocupa as posições designados por «meios» da proporção, ocupando a e c as posições designados por «extremos».

Se a , b e c são números positivos tais que $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, tem-se que b é igual a $\sqrt{ac}$, expressão cujo valor também se designa por «média geométrica de a e c ».

2. A propriedade mencionada no exemplo 5.2. foi provada, utilizando o teorema de Tales, no Caderno de Apoio do 7.º ano (cf. **GM7-6.1**).

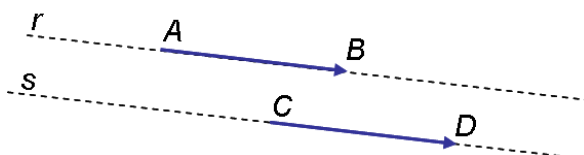
Dado um triângulo $[ABC]$, com lados de dimensões $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, o teorema de Pitágoras e respetivo recíproco estabelecem uma equivalência entre o ângulo de vértice em C ser reto e a , b e c verificarem a igualdade $a^2 + b^2 = c^2$. No exemplo 6. mostra-se que, se o ângulo de vértice em C é obtuso (respetivamente agudo) tem-se $a^2 + b^2 < c^2$ (respetivamente $a^2 + b^2 > c^2$).

Afastada a situação em que o ângulo de vértice em C é reto ($a^2 + b^2 = c^2$), apenas existem duas possibilidades para o ângulo de vértice em C : ser agudo ou obtuso. Por esta razão, as implicações referidas têm como consequência também as implicações recíprocas, ou seja, obtêm-se equivalências.

3. No exemplo 6., partiu-se do princípio de que o pé da perpendicular auxiliar considerado ficava, no primeiro caso, situado fora do lado do triângulo e no último no lado do triângulo, sendo distinto dos vértices; podemos facilmente justificar essa propriedade notando que outras posições para o pé da perpendicular conduziriam a um triângulo retângulo com um ângulo interno obtuso, o que, como sabemos, é impossível.
4. No exemplo 6., alínea 6.2, no caso em que o ângulo de vértice em A é maior do que o ângulo de vértice em C (o que acontece, por exemplo, sempre que o ângulo em A é obtuso), o lado de comprimento a , que se lhe opõe, é maior do que o lado de comprimento c (**GM5-2.15**). Pode então obter-se de forma mais simples que $a > c$, o que implica que $a^2 > c^2$ (**ALG7-2.1**) e portanto que $a^2 + b^2 > c^2$.

1. Considera duas retas distintas r e s e dois segmentos orientados $[A,B]$ e $[C,D]$ tais que $[AB]$ está contido em r e $[CD]$ está contido em s .

[Parte 1, pág. 98]

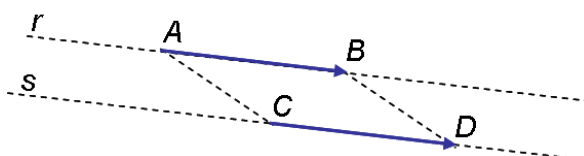


- 1.1. Justifica que se $[A, B]$ e $[C, D]$ forem equipolentes então $[ABDC]$ é um paralelogramo.
- 1.2. Justifica que se $[ABDC]$ é um paralelogramo então $[A, B]$ e $[C, D]$ são equipolentes.

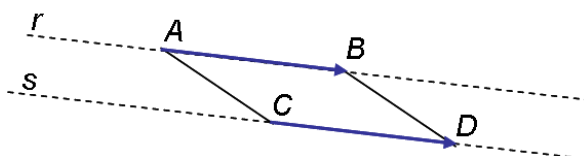
Resposta:

- 1.1. Se os segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ forem equipolentes, então têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Como têm a mesma direção, o quadrilátero $[ABDC]$ tem os lados $[AB]$ e $[CD]$ paralelos; como têm o mesmo sentido, o quadrilátero $[ABDC]$ é simples, uma vez que os pontos B e D pertencem a um mesmo semiplano de fronteira AC , pelo que $[BD]$ não intersesta $[AC]$. Assim, $[ABDC]$ é um trapézio. Finalmente, como $\overline{AB} = \overline{CD}$, $[ABDC]$ é um paralelogramo (GM7-2.24).



- 1.2. Dado que $[ABDC]$ é um paralelogramo então $[A, B]$ e $[C, D]$ têm a mesma direção e o mesmo comprimento já que são lados opostos de um paralelogramo.



Como AC e BD são paralelas, não se intersestam, pelo que B e D estão no mesmo semiplano de fronteira AC , ou seja, as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm o mesmo sentido, logo $[A, B]$ e $[C, D]$ são segmentos orientados com a mesma direção e o mesmo sentido.

Concluimos assim que os segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ são equipolentes.

GM8-3.1, 3.2, 3.4 a 3.6

Descritor: 3.5

Neste ano, após a introdução da noção de vetor, estudam-se finalmente os dois tipos de isometrias do plano sem ponto fixo, as translações e as reflexões deslizantes.

Texto Complementar de Geometria

Descritores: 3.1, 3.2, 3.4 e 3.5

Dois segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ dizem-se «equipolentes» quando têm:

a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

De acordo com o descritor **3.1**, terem:

a mesma direção significa que as retas suporte são coincidentes ou paralelas

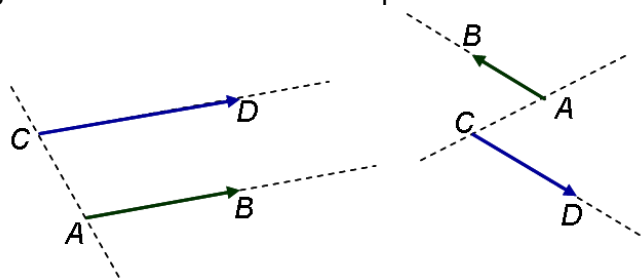
e, nesse caso, terem também *o mesmo sentido*, significa que:

as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm o mesmo sentido (cf. **3.2**),

ou seja,

uma delas está contida na outra, no caso em que as retas suporte coincidirem, ou estão contidas no mesmo semiplano de fronteira passando pelas respectivas origens, se as retas suporte não coincidirem (cf. **GM5-1.8**, **GM5-1.9**).

Nas figuras abaixo representam-se dois pares de segmentos orientados com a mesma direção (no caso em que as retas suporte em cada par não coincidem), na figura da esquerda com o mesmo sentido e na figura da direita com sentidos opostos:



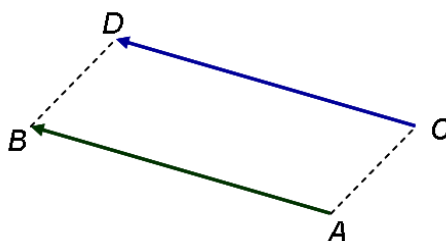
Finalmente, a expressão «comprimento de $[A, B]$ » é sinónima de «comprimento de $[AB]$ » em todos os casos em que ocorre (cf. **3.4**), ou seja, dois segmentos orientados «terem o mesmo comprimento» significa simplesmente que os segmentos de reta respetivamente com os mesmos extremos têm o mesmo comprimento (ou seja, são iguais, ou ainda, são iguais as distâncias entre a origem e a extremidade de cada segmento orientado).

No caso em que os segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ têm a mesma direção mas as respetivas retas suporte não coincidem, a condição de terem o mesmo sentido é equivalente:

a B e D estarem no mesmo semiplano de fronteira AC, pois se uma semirreta tiver origem num reta r que não é a sua reta suporte então está inteiramente contida no semiplano de fronteira r que contenha um qualquer dos seus pontos, distinto da origem.

Esta propriedade das semirretas e semiplanos, muito intuitiva, é demonstrável no quadro de uma axiomática adequada da Geometria e utilizá-la-emos daqui em diante.

Do que precede, resulta que, se os segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ forem equipolentes, no caso em que as retas suporte não coincidem, estas retas serão paralelas; em particular serão paralelos os segmentos de reta $[AB]$ e $[CD]$ e os segmentos ficarão contidos num mesmo semiplano de fronteira AC , estando os pontos B e D fora desta reta (senão uma das retas AB ou CD coincidiria com AC , donde AB e CD não poderiam ser paralelas, pois intersestar-se-iam pelo menos no ponto A ou no ponto C). Então ficará definido um trapézio $[ABDC]$, de bases $[AB]$ e $[CD]$, já que, para além do referido paralelismo, os segmentos $[BD]$ e $[AC]$ não podem intersestar-se, ou os pontos B e D estariam em semiplanos opostos de fronteira AC , contra a hipótese relativa aos sentidos; portanto também fica cumprida a condição definidora de um polígono simples (cf. **GM7-2.5**, atendendo a **GM7-2.3**). Mas, ainda por definição de equipolência, este trapézio também tem as bases $[AB]$ e $[CD]$ iguais, pelo que se trata de um paralelogramo (cf. **GM7-2.24**):



Reciprocamente, se os segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ forem tais que fica definido um paralelogramo $[ABDC]$, então AB e CD são retas paralelas, ou seja, $[A, B]$ e $[C, D]$ têm a mesma direção e retas suporte distintas. Além disso, B e D estão no mesmo semiplano de fronteira AC , senão o lado $[BD]$ do paralelogramo intersestaria a reta AC , o que é impossível, já que BD e AC são retas paralelas, por definição de paralelogramo. Então, pelo que acima se viu acerca de semirretas e semiplanos, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ estão contidas no mesmo semiplano de fronteira AC , pelo que essas semirretas, e portanto, os segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$, também têm o mesmo sentido. Finalmente, $[AB]$ e $[CD]$ têm o mesmo comprimento, já que se trata de lados opostos de um paralelogramo; ficam assim cumpridas todas as condições que garantem que os segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ são equipolentes.

Do que precede conclui-se que:

dois segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ com retas suporte distintas são equipolentes quando e apenas quando $[ABDC]$ é um paralelogramo.

Observação 1**:

No caso em que as retas suporte coincidem, $[A, B]$ e $[C, D]$ e terem o mesmo sentido (ou seja, as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ terem o mesmo sentido), se as origens A e C também coincidirem, é equivalente à coincidência das duas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ pois há apenas duas semirretas com uma mesma origem em determinada reta e nenhuma está contida na outra. Caso as origens sejam distintas, a identidade dos sentidos pode traduzir-se numa propriedade que terá alguma utilidade no que se segue:

LEMA*:

1. *Duas semirretas com a mesma reta suporte e origens distintas têm o mesmo sentido quando e apenas quando a origem de uma das semirretas pertence à outra semirreta mas a origem da segunda não pertence à primeira, ou de maneira equivalente, quando e apenas quando os pontos situados estritamente entre as origens das semirretas pertencem todos a uma delas e nenhum pertence à outra.*
2. *Duas semirretas com a mesma reta suporte têm sentidos opostos quando e apenas quando a interseção das duas semirretas ou é vazia (e nesse caso os pontos situados estritamente entre as origens das semirretas são exatamente os pontos da reta suporte que não pertencem a nenhuma das semirretas) ou igual ao segmento de reta de extremos coincidentes com as origens das semirretas.*

Demonstração:**

1. Para demonstrarmos esta propriedade representemos genericamente por $P - Q - R$ o facto de o ponto Q estar situado entre os pontos P e R , podendo generalizar-se esta notação a mais de três pontos com o significado óbvio (conjunção de todas as relações "situado entre" que se obtêm eliminando na notação, de todas as maneiras possíveis, o número suficiente de pontos para se reduzirem a três). A relação «situado entre» para trios de pontos pode ser tomada para primitiva numa construção axiomática da Geometria e tem algumas propriedades intuitivas, algumas das quais podem ser demonstradas a partir de outras que se tomam para axiomas. Este conjunto de propriedades básicas determina propriedades das semirretas e semiplanos que também são essenciais para algumas demonstrações. Nos argumentos que se seguem seremos levados a utilizar algumas dessas propriedades, as quais serão assim implicitamente admitidas sem demonstração.

Suponhamos então que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são colineares com A distinto de C , e comecemos por supor que têm o mesmo sentido, ou seja, que uma das semirretas está contida na outra; admitindo, sem perda de generalidade, que é $\overrightarrow{CD}$ que está contida em $\overrightarrow{AB}$ então, em particular, o ponto C está na semirreta $\overrightarrow{AB}$ e portanto todo o segmento de reta $[AC]$ está contido em $\overrightarrow{AB}$ (por definição de semirreta).

Por outro lado, temos $A - C - D$, pois, caso contrário seria $A - D - C$ ou $D - A - C$ e, em ambos os casos, os pontos P distintos de A tais que $P - A - C$ estariam, por um lado, na semirreta $\overrightarrow{CD}$ (teríamos $P - A - D - C$ ou $P - D - A - C$ ou $D - P - A - C$) mas, por outro, também na semirreta de origem A oposta a C (consequência imediata de $P - A - C$), ou seja, não estariam na semirreta $\overrightarrow{AB}$, onde supusemos que C se situa. Mas então estaríamos a contradizer a hipótese feita de que $\overrightarrow{CD}$ está contida em $\overrightarrow{AB}$. Esta contradição prova que, de facto, $A - C - D$, pelo que os pontos do segmento de reta $[AC]$ distintos de C (em particular o ponto A) não estão na semirreta $\overrightarrow{CD}$; concluímos então o que pretendíamos: o ponto A não está na semirreta $\overrightarrow{CD}$ e os pontos situados estritamente entre A e C estão todos na semirreta $\overrightarrow{AB}$ e nenhum na semirreta $\overrightarrow{CD}$.

Reciprocamente, supondo que o ponto C está na semirreta $\overrightarrow{AB}$, mas o ponto A não está na semirreta $\overrightarrow{CD}$ ou que, em alternativa, o ponto A está na semirreta $\overrightarrow{CD}$ mas o ponto C não está na semirreta $\overrightarrow{AB}$, mostremos que uma das semirretas tem de estar contida na outra. Sem perda de generalidade, suponhamos que é a primeira propriedade que tem lugar e mostremos que, nesse caso, a semirreta $\overrightarrow{CD}$ está contida na semirreta $\overrightarrow{AB}$. A hipótese implica, em particular, que não podemos ter $A - D - C$ nem $D - A - C$, senão A estaria na semirreta $\overrightarrow{CD}$, pelo que, forçosamente, teremos $A - C - D$. Então, examinando as diversas possibilidades para o ponto B , uma vez que, de acordo com a hipótese, o ponto C está situado na semirreta $\overrightarrow{AB}$, teremos forçosamente (já que $A - C - D$): $A - C - D - B$ ou $A - C - B - D$ ou $A - B - C - D$. Em todos os casos possíveis verificamos que a semirreta $\overrightarrow{CD}$ está contida na semirreta $\overrightarrow{AB}$, como pretendíamos.

Finalmente, se os pontos situados estritamente entre as origens das semirretas pertencerem todos a uma delas e nenhum pertencer à outra, em particular ambas as origens têm de pertencer à primeira das semirretas mas a origem dessa não pode pertencer à outra, senão o segmento de reta com extremos coincidentes com as origens das semirretas também estaria contido na outra semirreta, contra a hipótese. Ficamos assim reduzidos à hipótese que acabámos de examinar e portanto as duas semirretas terão o mesmo sentido.

2. É óbvio que se a interseção de duas semirretas colineares for vazia ou igual a um ponto ou a um segmento de reta então as duas semirretas têm sentidos opostos, já que, se tivessem o mesmo sentido, a respetiva interseção seria uma delas, o que prova uma das implicações desta afirmação do lema.

Reciprocamente, dadas duas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ com a mesma reta suporte, se tiverem sentidos opostos, ou seja, se não tiverem o mesmo sentido, e excluindo já o caso trivial em que as origens coincidem, então por 1) sabemos que ou nenhuma das origens das semirretas pertence à outra ou ambas as origens pertencem às duas semirretas.

No primeiro caso a interseção das semirretas é vazia pois um ponto P que pertencesse às duas estaria na semirreta oposta a C de origem A e na semirreta oposta a A de origem C , ou seja, teria de satisfazer simultaneamente a $P - A - C$ e a $P - C - A$, o que implicaria a coincidência de A e C , contra a hipótese feita de serem distintas as origens.

No segundo caso, o segmento de extremos nas origens teria de estar contido em ambas as semirretas e portanto na respetiva interseção. Por outro lado mais nenhum ponto pode pertencer a essa interseção, pois qualquer ponto P da reta suporte fora deste segmento terá de satisfazer a $P - A - C$ ou $A - C - P$ ora, se P pertencesse simultaneamente a $\overrightarrow{AB}$ e a $\overrightarrow{CD}$ então estas duas semirretas coincidiriam respetivamente com $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{CP}$ e nesse caso, qualquer das duas relações $P - A - C$ ou $A - C - P$ implicaria que uma das semirretas estaria contida na outra, contra a hipótese de se tratar de semirretas com sentidos opostos.

Corolário:

A interseção de duas semirretas colineares só pode ser vazia, um segmento de reta (neste caso coincidente com o segmento de extremos nas origens das semirretas, incluindo o caso em que estas coincidem) ou coincidente com uma das semirretas.

Demonstração:

O corolário resulta imediatamente do ponto 2. do lema, já que duas semirretas colineares, ou têm o mesmo sentido, caso em que, obviamente, a interseção das duas coincide com uma delas, ou têm sentidos opostos e, pelo ponto 2. do lema a respetiva interseção é vazia ou coincidente com o segmento determinado pelas origens.

Observação 2**:

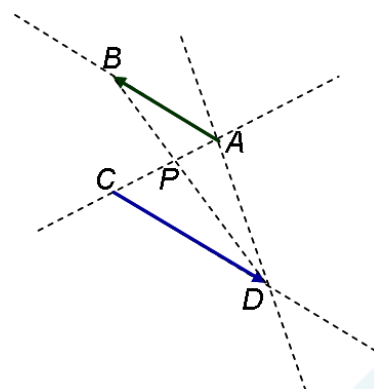
Podemos verificar que:

se dois segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ tiverem a mesma direção, se $[A, B]$ e $[C, D]$ tiverem sentidos opostos então $[A, B]$ terá o mesmo sentido que $[D, C]$ e reciprocamente, se $[A, B]$ tiver o mesmo sentido que $[D, C]$, então $[A, B]$ e $[C, D]$ terão sentidos opostos.

No caso em que os segmentos orientados são colineares, os resultados da observação 1 atrás permitem concluir o que se pretende; com efeito, excluindo o caso mais simples em que os segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ têm origem comum, se tiverem sentidos opostos a interseção das semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ é vazia ou coincidente com o segmento $[AC]$. Então, relativamente a $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$, ficará cumprida a condição do lema para que estas semirretas tenham o mesmo sentido, pois $\overrightarrow{DC}$ coincide com a união de $[DC]$ com a semirreta oposta a $\overrightarrow{CD}$, donde:

- se a interseção de $\overrightarrow{AB}$ com $\overrightarrow{CD}$ for vazia, $\overrightarrow{AB}$ estará contida na semirreta oposta a $\overrightarrow{CD}$ e portanto em $\overrightarrow{DC}$, que a contém;
- se a interseção das semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ coincidir com o segmento $[AC]$, em particular a semirreta $\overrightarrow{AB}$ coincide com a semirreta $\overrightarrow{AC}$ e a semirreta $\overrightarrow{CD}$ com a semirreta $\overrightarrow{CA}$; assim, temos $C - A - D$ ou $C - D - A$ e em ambos os casos a semirreta $\overrightarrow{DC}$ tem o mesmo sentido que a semirreta $\overrightarrow{AC}$, ou seja, que a semirreta $\overrightarrow{AB}$.

Suponhamos então que os segmentos não são colineares; sabemos, por hipótese, que AB e CD são retas paralelas e o facto de $[A, B]$ não ter o mesmo sentido que $[C, D]$ significa, neste caso, que B e D não estão no mesmo semiplano de fronteira AC ; mas isso significa que $[BD]$ intersesta a reta AC , e portanto o segmento $[AC]$, já que $[BD]$ está situado entre as retas paralelas AB e CD , como se representa na figura ao lado.



Seja P o ponto de interseção de $[BD]$ com $[AC]$; então, tanto B como C estão no mesmo semiplano que P de fronteira AD (estão ambos em semirretas de origem na reta AD passando por P), donde B e C estão num mesmo semiplano de fronteira AD , o que significa que $[A, B]$ e $[D, C]$ têm o mesmo sentido, como pretendíamos.

Reciprocamente, se $[A, B]$ tiver o mesmo sentido que $[D, C]$, então B e C estão no mesmo semiplano de fronteira AD ; consideremos um ponto B' na semirreta $\overrightarrow{AB}$ a uma distância de A igual ao comprimento de $[DC]$. Então $[AB'CD]$ é um paralelogramo, pelo que as respetivas diagonais se intersectam num ponto P ; em particular B' e D estão em semiplanos opostos de fronteira AC . Mas, por construção, B' está no mesmo semiplano que B de fronteira AC , pelo que B e D também estarão em semiplanos opostos de fronteira AC , o que prova que $[A, B]$ não pode ter o mesmo sentido que $[C, D]$.

Observação 3**:

Como é evidente, o que se disse para segmentos orientados com a mesma direção vale para semirretas com retas suporte paralelas ou coincidentes.

Quanto ao caso de semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ com a mesma reta suporte ainda podemos observar que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm sentidos opostos se e só se $\overrightarrow{AB}$ tiver o mesmo sentido que a semirreta oposta a $\overrightarrow{CD}$.

Com efeito, mais uma vez excluindo o caso trivial em que A e C coincidem, podemos invocar o Lema da observação 1 acima pois, por esse resultado, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ terem sentidos opostos significa que nenhuma das origens das semirretas pertence à outra ou então ambas pertencem; substituindo $\overrightarrow{CD}$ pela semirreta oposta, em qualquer dos casos ficaremos com uma situação em que uma das origens pertence a ambas as semirretas e a outra apenas a uma delas, o que é equivalente à identidade dos sentidos, sendo idêntica a justificação da recíproca.

Descritor: 3.6

A possibilidade de definir coerentemente o conceito de vetor de modo que:

fique associado um vetor a cada segmento orientado, estando associado o mesmo vetor a segmentos associados equipolentes e vetores distintos a segmentos orientados não equipolentes,

resulta do facto de

não poder existir um segmento orientado que seja simultaneamente equipolente a outros dois que não sejam equipolentes entre si.

Caso contrário os vetores associados a estes dois últimos, por um lado, teriam de ser distintos, por estarem associados a segmentos orientados não equipolentes, mas por outro seriam o mesmo vetor, já que seriam ambos coincidentes com o vetor associado ao primeiro segmento orientado.

A propriedade dos segmentos orientados acima referida pode traduzir-se dizendo que:

se um segmento orientado é equipolente a outros dois então estes são equipolentes entre si;
trata-se de uma das formas da chamada propriedade transitiva da relação de equipolência. Esta relação entre segmentos orientados é também o que se chama:

reflexiva (qualquer segmento orientado é equipolente a si próprio) e simétrica (se um segmento orientado é equipolente a outro, então este é equipolente ao primeiro);

estas duas propriedades são evidentes a partir da definição de equipolência e, em conjunto com a transitividade (que examinaremos na observação abaixo) determinam que a relação de equipolência é o que se chama uma relação de equivalência. A partir desta relação podemos definir, para cada segmento orientado, a respetiva classe de equipolência (classe de equivalência para a relação de equipolência), conjunto de todos os segmentos orientados a ele equipolentes.

O facto de se tratar de uma relação de equivalência tem como consequência, como facilmente se conclui, que o conjunto das classes de equipolência constitui uma chamada partição do conjunto dos segmentos orientados, tanto num plano como no espaço tridimensional; ou seja, que o conjunto dos segmentos orientados é igual à união de todas essas classes de equipolência, sendo estas não vazias e disjuntas duas a duas.

Poderíamos assim identificar o vetor associado a um segmento orientado como a própria classe de equipolência desse segmento orientado (conjunto dos chamados «representantes» do vetor) e, com esta definição, ficaria cumprida a condição acima expressa que pretendemos impor à noção de vetor.

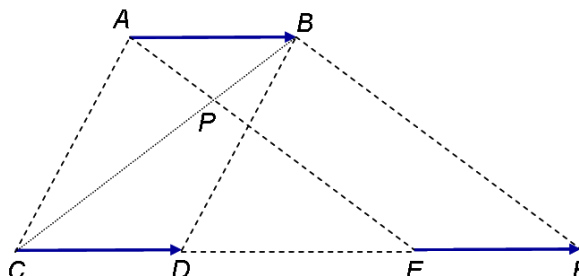
Observação 1**:

Ficou por justificar a propriedade transitiva da noção de equipolência, em que assenta, como acabámos de verificar, a coerência da definição de vetor. Trataremos apenas do caso de segmentos orientados num plano. Nesse caso, é fácil concluir que se duas retas forem paralelas a uma terceira são paralelas entre si, pois, caso contrário intersektar-se-iam, pelo que existiriam duas retas paralelas à terceira passando por um mesmo ponto, o que contradiria o axioma euclidiano de paralelismo, propriedade que é pressuposta, uma vez que nos situamos num plano euclidiano.

Do mesmo modo, a relação de igualdade de comprimento entre pares de segmentos (ou de equidistância entre pares de pontos) goza da propriedade transitiva, o que também é um dos pressupostos básicos da Geometria, que pode ser tomado como axioma. É fácil concluir então que, para provar a transitividade da relação de equipolência, resta apenas demonstrar que,

dados três segmentos orientados com a mesma direção e comprimento, se um deles tiver o mesmo sentido que cada um dos outros dois, então estes também terão o mesmo sentido.

A figura seguinte traduz a propriedade que pretendemos demonstrar, num caso em que, dados três segmentos orientados, dois são colineares (representa-se também um ponto auxiliar P , interseção de BC e AE , que será utilizado no que se segue):



Utilizámos 3.5 para caracterizar a equipolência, por um lado, dos segmentos $[A, B]$ e $[C, D]$ e por outro de $[A, B]$ e $[E, F]$, servindo-nos de paralelogramos adequados, e pretendemos verificar que $[C, D]$ e $[E, F]$ também são equipolentes, bastando para tal verificar que $\vec{CD}$ e $\vec{EF}$ têm o mesmo sentido, ou seja, utilizando o lema da observação 1 do texto de apoio aos descritores 3.1 a 3.5, que uma das origens destas semirretas pertence a ambas e a outra apenas a uma delas.

Suponhamos então, por exemplo, que C não pertence a $\vec{EF}$ e mostremos que nesse caso E tem de pertencer a $\vec{CD}$; com efeito, atendendo à hipótese feita, temos então $C - E - F$ e portanto, em particular C está no semiplano oposto a F de fronteira AE ; como BF é paralela a AE , C também está no semiplano oposto a B de fronteira AE , pelo que CB intersesta AE em certo ponto P . Então B e E estão no mesmo semiplano que P de fronteira AC ; em particular B e E estão no mesmo semiplano de fronteira AC , donde D e E também, já que BD é paralela a AC e portanto B e D estão no mesmo semiplano de fronteira AC .

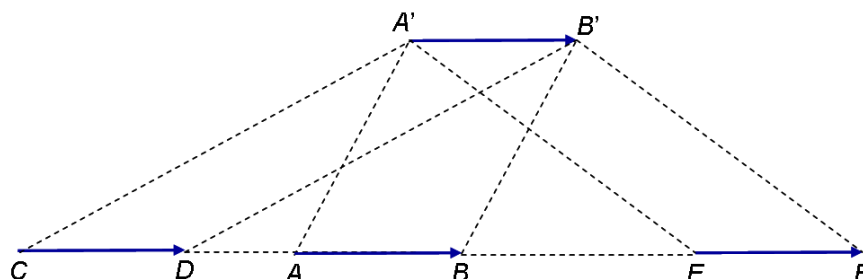
Daí resulta que E está na semirreta $\vec{CD}$, como pretendíamos. Como podemos trocar os papéis das semirretas $\vec{CD}$ e $\vec{EF}$, acabámos de mostrar que se a origem de uma delas não pertencer à outra então a origem da segunda terá de pertencer à primeira.

Resta ver que se a origem de uma pertencer à outra então a origem da outra não pode pertencer à primeira; suponhamos então que E pertence a $\vec{CD}$ e provemos que, nesse caso, C não pode pertencer a $\vec{EF}$. Temos então que E está no mesmo semiplano que D de fronteira CB , pelo que está no semiplano oposto a A com a mesma fronteira (D e A estão em semiplanos opostos de fronteira CB porque as diagonais de um paralelogramo intersestam-se); então AE intersesta CB em certo ponto P , pelo que C está no semiplano oposto a B de fronteira AE , logo também no semiplano oposto a F com essa fronteira, já que BF é paralela a AE . Mas daí resulta que $C - E - F$, ou seja, C não está na semirreta $\vec{EF}$.

Mais uma vez podemos trocar os papéis das semirretas $\vec{CD}$ e $\vec{EF}$, pelo que provámos o que acima ficou referido; em particular não é possível que nenhuma das origens das semirretas pertença à outra nem é possível que ambas as origens das semirretas pertençam às duas semirretas. Então a única possibilidade para as origens das semirretas $\vec{CD}$ e $\vec{EF}$ é que uma delas pertença a ambas as semirretas e a outra apenas a uma delas, o que prova que as semirretas têm o mesmo sentido.

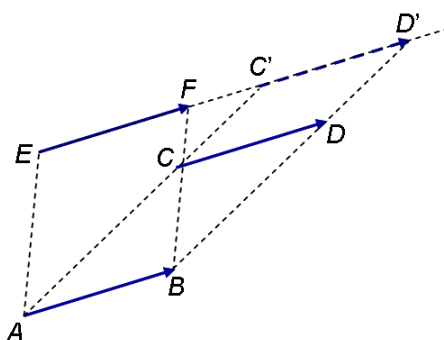
Se as hipóteses forem, por um lado, a equipolência de $[A, B]$ e $[C, D]$ e, por outro, de $[C, D]$ e $[E, F]$, facilmente podemos agora concluir que $[A, B]$ e $[E, F]$ são equipolentes, pois caso contrário, de acordo com o que vimos na observação 2. do texto de apoio aos descritores 3.1 a 3.5, $[A, B]$ e $[F, E]$ seriam equipolentes e então poderíamos aplicar o resultado anterior aos segmentos $[A, B]$, $[C, D]$ e $[F, E]$ para concluirmos que $[C, D]$ e $[F, E]$ seriam equipolentes, o que contradiz a hipótese feita relativamente a estes segmentos, também de acordo com a referida observação.

No caso em que os três segmentos são colineares, podemos utilizar um quarto segmento equipolente com um deles, como se ilustra na seguinte figura:



Admitindo a equipolência, por um lado, dos segmentos $[A, B]$ e $[C, D]$ e por outro de $[A, B]$ e $[E, F]$, podemos construir um segmento orientado $[A', B']$ equipolente a $[A, B]$ mas com reta suporte distinta; então aplicando o resultado anterior a $[A', B']$, $[A, B]$ e $[C, D]$ concluímos que $[A', B']$ e $[C, D]$ são equipolentes e, analogamente $[A', B']$ e $[E, F]$ são equipolentes. Mas, pelo que acima foi visto, resulta daí que $[C, D]$ e $[E, F]$ são equipolentes, como pretendíamos provar.

No caso em que são dados três segmentos orientados de forma que não há dois colineares, supondo um deles equipolente aos outros dois, podemos utilizar um segmento auxiliar colinear com um destes e equipolente aos outros dois, reduzindo-nos assim ao caso inicialmente estudado, como se sugere na figura seguinte:



Admitindo a equipolência, por um lado, dos segmentos $[A, B]$ e $[C, D]$ e por outro de $[A, B]$ e $[E, F]$, podemos construir um segmento orientado $[C', D']$ equipolente a $[A, B]$ e a $[C, D]$, intersecando as retas AC e BD com a reta EF , respetivamente nos pontos C' e D' ; note-se que estas interseções existem, já que, por hipótese, os pontos C e D não podem estar em AB , pelo que nem AC nem BD podem ser paralelas a EF , senão, para além de AB , existiria outra paralela a EF passando por A ou outra paralela a EF passando por B . O critério do paralelogramo (3.5) garante que, de facto, $[C', D']$ é equipolente a $[A, B]$ e a $[C, D]$.

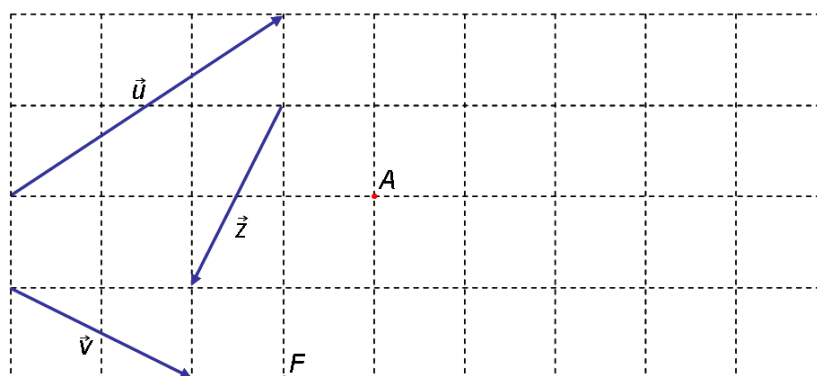
Agora, aplicando os resultados já demonstrados relativos ao caso em que dois dos segmentos são colineares, concluímos em primeiro lugar que $[E, F]$ e $[C', D']$ são equipolentes e em seguida que $[E, F]$ e $[C, D]$ são equipolentes, como pretendíamos provar.

Observação 2*:

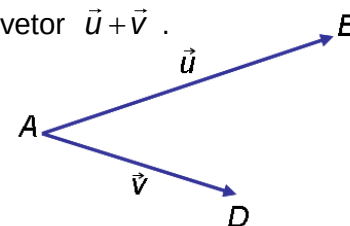
A transitividade da equipolência tem com consequência imediata a transitividade da identidade de sentido para semirretas num plano, pois podemos sempre utilizar segmentos orientados com o mesmo comprimento para tirar conclusões acerca do sentido de semirretas.

[Parte 1, pág. 114]

- 1.* Considera um ponto P e um vetor $\overrightarrow{AB}$. Prova que existe um único ponto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$, considerando os seguintes três casos possíveis:
- 1.1. A e B não coincidentes e P não pertence à reta AB ;
 - 1.2. A e B não coincidentes e P pertence à reta AB ;
 - 1.3. A e B coincidentes.
2. Na figura estão representados três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{z}$, através de segmentos orientados inscritos numa grelha quadriculada e dois vértices A e F dessa grelha.



- 2.1. Determina o transformado de A pela translação de vetor $\vec{u}$ e designa-o por B .
 - 2.2. Determina o transformado de B pela translação de vetor $\vec{v}$ e designa-o por C .
 - 2.3. Qual o transformado de A pela composição das translações $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$?
 - 2.4. Representa o ponto G , transformado de F por $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$.
 - 2.5. Compara os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{FG}$ e identifica um vetor $\vec{w}$ tal que $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{w}}$.
 - 2.6. Representa o vetor $\vec{u} + \vec{z}$, associado à translação $T_{\vec{z}} \circ T_{\vec{u}}$.
3. Na figura estão representados dois vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, através de segmentos orientados com a mesma origem.
- 3.1. Representa o ponto C , transformado de A pela translação de vetor $\vec{u} + \vec{v}$.
 - 3.2. Classifica o quadrilátero $[ABCD]$.
 - 3.3. Qual a imagem do ponto A pela translação de vetor $\vec{v} + \vec{u}$?
 - 3.4. Compara os vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{v} + \vec{u}$.



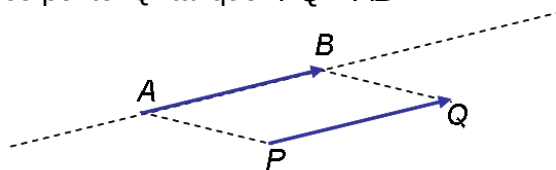
GM8-3.10 a 3.18 e 3.22

Resposta:

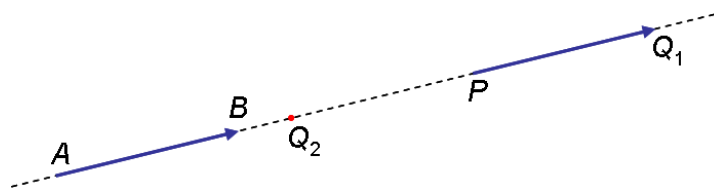
- 1.1. Dado que os pontos A , B e P não são colineares, a reta que passa por P e é paralela a AB intersecta a reta que passa por B e é paralela a AP . Designando por Q o ponto interseção destas duas retas, $[ABQP]$ é por construção um paralelogramo e portanto $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.

Reciprocamente, se $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$, $[ABQP]$ é um paralelogramo pelo que Q tem de coincidir com a interseção das retas acima referidas.

Logo, existe um único ponto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.

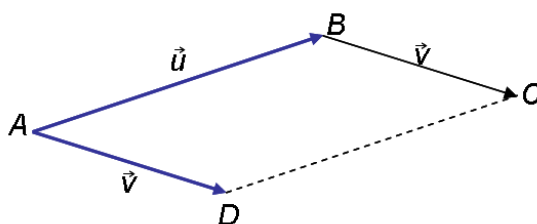


- 1.2. Existem dois (e apenas dois) pontos Q_1 e Q_2 tais que $\overrightarrow{PQ_1} = \overrightarrow{PQ_2} = \overrightarrow{AB}$, um em cada semirreta de reta suporte AB e origem em P . Apenas para um deles (designemo-lo por Q) as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{PQ}$ têm o mesmo sentido, obtendo-se portanto que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.



- 1.3. Se A e B são coincidentes, $\overrightarrow{AB}$ é o vetor nulo. O único ponto Q para o qual $\overrightarrow{PQ}$ é igualmente o vetor nulo, por definição, é o próprio ponto P .

3.1.



- 3.2. Sabemos que o ponto C é obtido como a extremidade do segmento orientado de origem B que representa o vetor $\vec{v}$, ou seja, que é equipolente ao segmento orientado $[A,D]$, pelo que $[ABCD]$ é um paralelogramo (3.5).
- 3.3. Por argumentos análogos aos da alínea anterior, designando por C' a imagem de A por $\vec{v} + \vec{u}$, $[ABC'D]$ é um paralelogramo. C' é pois a interseção da reta paralela a AD que passa por B com a reta paralela a AB que passa por D , ou seja, coincide com o ponto C .
- 3.4. Como as imagens de A pelas translações de vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{v} + \vec{u}$ coincidem, conclui-se que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, já que têm um representante comum de origem A .

Descritor: 3.10

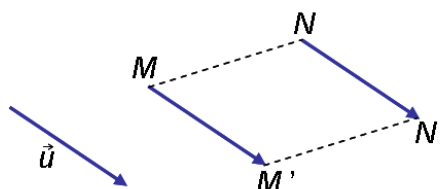
Observação:

O exemplo contemplado da alínea 1.2. do exemplo 1. também poderia ter sido tratado recorrendo à alínea 1.1., começando por considerar um ponto auxiliar P' fora da reta AB e utilizando duas vezes o resultado de 1.1. (cf. TCG-3.10).

Descritor: 3.18

A demonstração pedida é a seguinte:

Seja $\vec{u}$ um vetor e M e N dois pontos. Considerando M' e N' os transformados de M e N pela translação de vetor $\vec{u}$, sabemos que $\vec{u} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$. Logo $[MM'N'N]$ é um paralelogramo. Assim, $[M, N]$ e $[M', N']$ são equipolentes.



Do que precede, concluímos que a translação de vetor $\vec{u}$ é uma isometria ($\overline{MN} = \overline{M'N'}$) que preserva a direção e o sentido dos segmentos orientados.

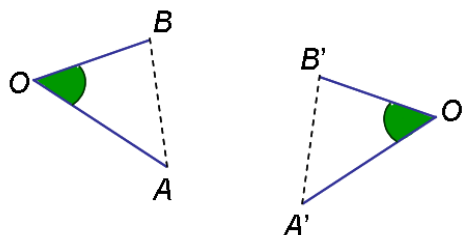
Observações:

1. A prova apresentada, em rigor, não se aplica ao caso em que os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{MN}$ têm a mesma direção. Nessa situação, seria necessário argumentar de forma diferente. Supondo que $\vec{u}$ e $\overrightarrow{MN}$ têm a mesma direção, podemos considerar um qualquer vetor $\vec{v}$ não nulo com outra direção e observar que os transformados de M e N pela translação de vetor $\vec{u}$ podem obter-se pela aplicação sucessiva respetivamente a M e N das translações de vetores $\vec{v}$, $\vec{u}$ e $-\vec{v}$; aplicando a conclusão anterior às translações de vetor $\vec{v} + \vec{u}$ e $-\vec{v}$, concluímos que $[M, N]$ e o respetivo transformado pela translação de vetor $\vec{u}$ são ambos equipolentes a um mesmo segmento orientado e portanto são equipolentes entre si.
2. Com a definição dada no 6.º ano de segmento orientado, em rigor, deveríamos mostrar também que as translações transformam segmentos de reta em segmentos de reta, transformando extremos em extremos; tal propriedade é geral para as isometrias, como foi demonstrado no Texto Complementar de Geometria relativo ao 6º ano (observação final ao descritor 9.21), mas pode ser verificada de forma mais simples para translações, utilizando paralelogramos.

Descritor: 3.22

A justificação pedida é a seguinte:

Dado um ângulo AOB e os transformados A' , O' e B' respetivamente dos pontos A , O e B por uma isometria, sabemos que $\overline{AO} = \overline{A'O'}$, $\overline{OB} = \overline{O'B'}$ e $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Pelo critério de igualdade de ângulos, os ângulos AOB e $A'O'B'$ têm a mesma amplitude.

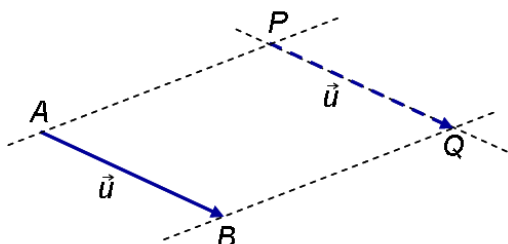


Note-se que este mesmo argumento já foi utilizado, no 2.º Ciclo, para mostrar esta mesma propriedade no caso particular das isometrias então estudadas (reflexões axiais, reflexões centrais e, mais geralmente, rotações).

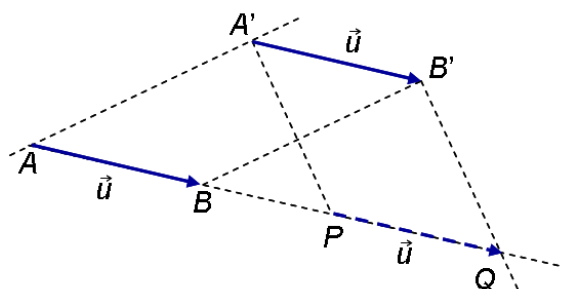
Texto Complementar de Geometria

Descritor: 3.10

Dado um ponto P e um vetor $\vec{u}$, determinado por um segmento orientado $[A, B]$, se $\vec{u}$ não for o vetor nulo, ou seja, se A e B forem pontos distintos, e a reta AB não passar por P podemos construir um paralelogramo $[ABQP]$, ficando o ponto Q determinado de maneira única como o ponto interseção da reta paralela a AB passando por P com a reta paralela a AP passando por B :



Pela propriedade expressa em 3.5, os segmentos orientados $[A, B]$ e $[P, Q]$ são equipolentes, ou seja, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Se P estiver na reta AB podemos construir em primeiro lugar um segmento orientado $[A', B']$ equipolente a $[A, B]$ tal que a reta $A'B'$ não passa por P e a partir de $[A', B']$ construir o ponto Q , como acima:



Repare-se que estas construções permitem apenas concluir que existe um ponto Q com a propriedade requerida, fornecendo um processo construtivo para o obter, mas há que provar a respetiva unicidade, já que poderíamos ter recorrido a outros segmentos orientados que determinassem o mesmo vetor $\vec{u}$. Ora, a unicidade de Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$ pode ser provada, muito simplesmente, notando que se trata do único ponto à distância de P igual ao comprimento do vetor $\vec{u}$, situado na única reta passando por P paralela a (ou coincidente com) qualquer das retas suporte dos segmentos orientados que determinam $\vec{u}$ e na única semirreta de origem P dessa reta com o mesmo sentido que qualquer das semirretas $\overrightarrow{AB}$ tais que $[A, B]$ determina o vetor $\vec{u}$.

Resta apenas examinar o caso trivial do vetor nulo; como é determinado pelos segmentos orientados $[A, A]$ (A ponto arbitrário), e apenas por esses, o único ponto Q tal que $\vec{0} = \overrightarrow{PQ}$ é o próprio ponto P .

Estas propriedades permitem definir sem ambiguidade o que se entende por $P + \vec{u}$ (trata-se exatamente do ponto Q acima definido nos diversos casos); em particular verificámos que $P + \vec{0} = P$.

Descritores: 3.11 a 3.14 e 3.16

A aplicação que a um ponto P associa o ponto $P + \vec{u}$ designa-se «translação de vetor $\vec{u}$ » e representa-se por $T_{\vec{u}}$, pelo que $P + \vec{u}$ também se representa por $T_{\vec{u}}(P)$.

Se as translações $T_{\vec{u}}$ e $T_{\vec{v}}$ forem a mesma aplicação em determinado plano ou no espaço todo, facilmente se conclui que $\vec{u} = \vec{v}$ pois aplicando-as a um qualquer ponto P do domínio comum obtemos o ponto $Q = T_{\vec{u}}(P) = T_{\vec{v}}(P)$ e, por definição, $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \vec{v}$. Estabelecemos assim uma correspondência biunívoca entre vetores e translações em dado plano ou no espaço todo, que a cada vetor $\vec{u}$ associa a translação $T_{\vec{u}}$.

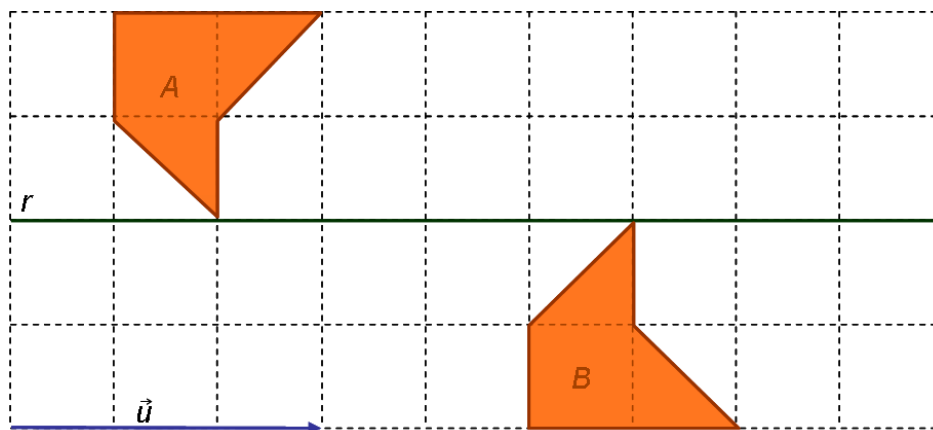
Embora não se explore no 3.º ciclo a noção geral de composição de aplicações, introduz-se este conceito para o caso particular das translações. Neste caso, o domínio e contradomínio das funções a compor é sempre ou o espaço todo ou um plano, consoante o âmbito em que são estudados estes conceitos, o que facilita a definição da função composta. No ensino básico apenas se consideram isometrias num plano pré-fixado, pelo que consideraremos sempre que as translações são definidas por vetores associados a segmentos orientados desse plano e têm domínio igual a esse mesmo plano. Também é fácil concluir que o contradomínio nesse caso coincidirá com o domínio, pois dada uma translação de vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto Q do plano, então $Q = T_{\vec{u}}(P)$ sendo P o ponto do plano tal que $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{BA}$, de acordo com o descritor **3.10**, já que, nesse caso, virá também $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Assim, a aplicação composta $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$ de duas translações num mesmo plano será também uma aplicação com domínio igual ao mesmo plano e facilmente se conclui que é também uma translação cujo vetor pode ser dado pelo segmento orientado $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, sendo os pontos B e C sucessivamente obtidos por aplicação do resultado expresso no descritor **3.10**. O vetor $\vec{w}$ designa-se por «soma do vetor $\vec{u}$ com o vetor $\vec{v}$ » e representa-se por $\vec{u} + \vec{v}$. Em particular, por definição:

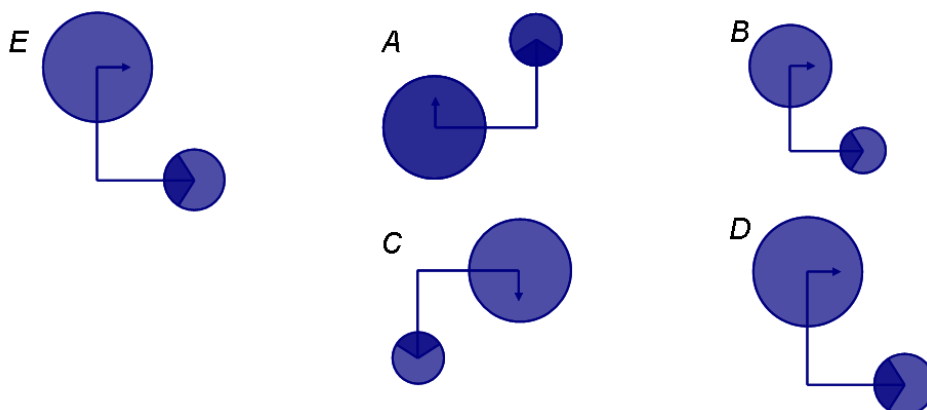
$$(P + \vec{u}) + \vec{v} = T_{\vec{v}}(T_{\vec{u}}(P)) = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}(P) = P + (\vec{u} + \vec{v})$$

[Parte 1, pág. 114]

1. Na figura está representada uma grelha quadriculada onde foram desenhados dois pentágonos iguais A e B , uma reta r e um vetor $\vec{u}$ com a mesma direção da reta r .



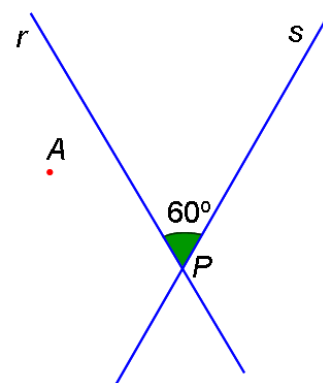
- 1.1. Determina a imagem A' do pentágono A pela reflexão deslizante de eixo r e vetor $\vec{u}$ e depois determina a imagem A'' do pentágono A' pela mesma reflexão deslizante.
- 1.2. Identifica uma isometria (reflexão, rotação, translação ou reflexão deslizante) que transforme o pentágono A em A'' .
- 1.3. O pentágono B é o transformado de A pela reflexão deslizante de eixo r e vetor $\vec{v}$. Identifica o vetor $\vec{v}$.
2. Considera, num mesmo plano, as seguintes cinco figuras



Qual das figuras A , B , C ou D pode ser a transformada de E por uma translação?
Justifica a tua escolha.

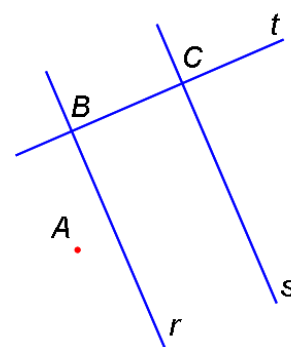
GM8-4.1 e 4.2

2. Na figura está representado um ponto A e duas retas r e s concorrentes em P , formando um ângulo de 60° .



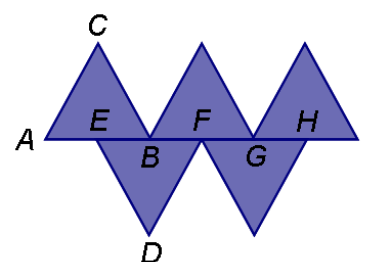
- 2.1. Constrói o transformado do ponto A pela reflexão axial de eixo r e designa-o por A' .
- 2.2. Constrói o transformado do ponto A' pela reflexão axial de eixo s e designa-o por A'' .
- 2.3. Justifica que $\overline{PA} = \overline{PA''}$ e que $\widehat{APA''} = 120^\circ$.
- 2.4. Justifica que A'' é o transformado de A pela rotação de centro P , sentido negativo e amplitude 120° .

3. Na figura está representado um ponto A , duas retas paralelas r e s , uma reta t que lhes é perpendicular e que as intersecta respetivamente em B e em C .



- 3.1. a. Constrói o transformado do ponto A pela reflexão axial de eixo r e designa-o por A' .
- 3.2. Constrói o transformado do ponto A' pela reflexão axial de eixo s e designa-o por A'' .
- 3.3. Justifica que $\overline{AA''} = 2\overline{BC}$.
- 3.4.** Mostra que o resultado da alínea anterior permanece válido seja qual for a localização do ponto A relativamente às retas r e s e identifica uma reflexão, rotação, translação ou reflexão deslizante que transforme qualquer ponto P do plano em que se situam as retas r e s no ponto P'' transformado de P pela aplicação sucessiva das reflexões axiais de eixos r e s .

4. Na figura está representada uma figura composta por triângulos equiláteros iguais. Tem-se ainda que o ponto E é o ponto médio de $[AB]$ e os pontos A , B , F , G , H e I estão alinhados.



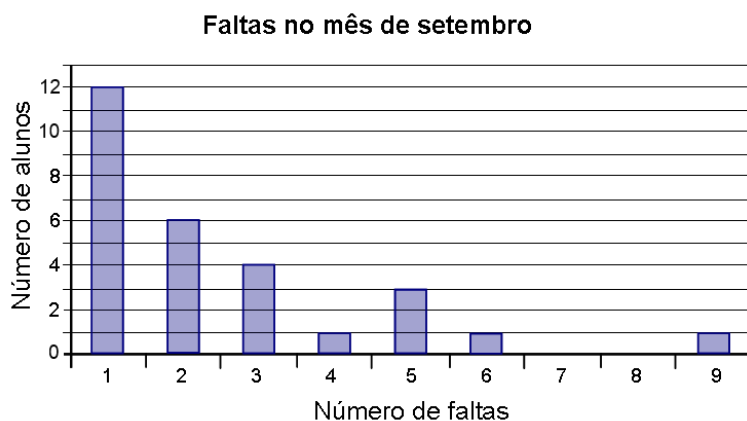
- 4.1. Existe uma reflexão deslizante que transforma o triângulo $[ABC]$ no triângulo $[DEF]$. Identifica o eixo e o vetor associados a uma tal isometria.
- 4.2. Identifica uma reflexão deslizante que transforma o triângulo de lado $[AB]$ no triângulo de lado $[FH]$.
- 4.3. Identifica o vetor que determina uma translação que transforma o triângulo de lado $[AB]$ no triângulo de lado $[GI]$.
- 4.4. Identificas algum eixo de simetria nesta figura? Justifica.

Descritores: 4.1 e 4.2

Sabe-se que a composta de duas translações é uma translação (**3.13**) e pode provar-se que a composta de duas rotações com o mesmo centro é também uma rotação com o mesmo centro mas a composta de duas reflexões axiais não é uma reflexão axial, sendo uma translação no caso em que os eixos de reflexão são paralelos e uma rotação no caso em que os eixos se interseitam num ponto, que é o centro dessa rotação. Embora a demonstração destes teoremas esteja fora do âmbito desta abordagem elementar das isometrias feita no 8.º ano, podemos verificar em exemplos concretos estes factos tal como se sugere nos exemplos **2.** a **4.**

[Parte 2, pág. 139]

1. Observa o gráfico representado abaixo, relativo às faltas dos alunos de uma turma do 8.º ano durante o mês de setembro.

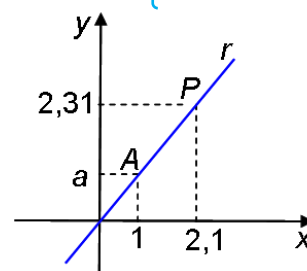


- 1.1. Determina os extremos e os quartis.
- 1.2. Constrói um diagrama de extremos e quartis.

OTD8-2.1

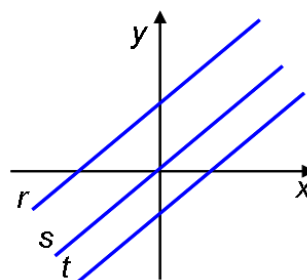
[Parte 2, pág. 12]

1. No referencial cartesiano da figura está representada uma reta r não vertical que passa na origem do referencial e no ponto $P(2,1 ; 2,31)$. Determina uma equação da reta utilizando o teorema de Tales.



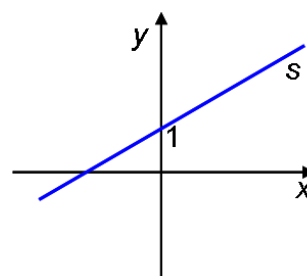
2. Na figura estão representadas três retas paralelas r , s e t que representam graficamente três funções respetivamente f , g e h .

Sabendo que a função g se define algebricamente por $g(x) = 0,8x$, que a reta r passa no ponto $R(0; 1,2)$ e que a reta t passa no ponto $T(0; -0,6)$, indica uma expressão algébrica para cada uma das funções f e h .



3. Na figura está representada uma reta s , gráfico da função f , com declive $\frac{1}{2}$ e que interseja o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 1)$.

Indica uma expressão algébrica para a função f .



- 4.* Prova que o gráfico de uma função de proporcionalidade direta está contido numa reta não vertical que passa na origem do referencial.

Resposta:

4. De acordo com **FSS7-3.1**, uma função de proporcionalidade direta é igual no seu domínio a uma função linear que se define algebricamente por $f(x) = ax$. De acordo com o descritor **1.1** os gráficos das funções lineares são retas não verticais que passam na origem do referencial. Assim, podemos concluir que o gráfico de uma função de proporcionalidade direta está contido numa reta não vertical que passa na origem.

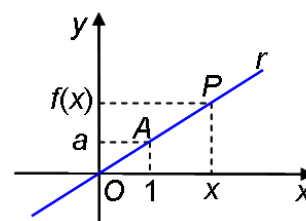
FSS8-1.1 a 1.3 e 2.3

Descritor: 1.1

Apresenta-se em seguida a demonstração solicitada neste descritor. Por comodidade, poderá começar-se por tratar apenas o caso dos pontos do primeiro quadrante de uma reta de declive positivo o que dispensa a utilização do módulo.

Consideremos um referencial cartesiano num plano e uma reta r não vertical que passa na origem do referencial.

Por não ser vertical, r não é paralela a nenhuma reta vertical, pelo que intersesta qualquer uma dessas retas em exatamente um ponto. Assim, para cada x em $\mathbb{R}$ existe um único ponto da reta r que tem x por abcissa. A reta r é portanto o gráfico de uma função f que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ a ordenada y do ponto de r de abcissa x .



Seja $a = f(1)$:

- Se $a = 0$, a reta r passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, 0)$ do eixo das abcissas logo coincide com esse eixo e f é a função nula (função linear de coeficiente igual a $0 = f(1)$).
- Se $a \neq 0$, seja P um ponto qualquer da reta r , de coordenadas $(x, f(x))$.

Pelo teorema de Tales, podemos afirmar que $\frac{|f(x)|}{|a|} = \frac{|x|}{1}$, o que é equivalente a

$|f(x)| = |a| \cdot |x|$. Assim, para cada x em $\mathbb{R}$, apenas existem duas possibilidades: $f(x) = ax$ ou $f(x) = -ax$.

- Se $a > 0$, a reta r passa na origem e por um ponto do primeiro quadrante, pelo que está contida nos primeiro e terceiro quadrantes (que são dois ângulos verticalmente opostos de vértice em O), pelo que x e $f(x)$ têm o mesmo sinal. Neste caso, $f(x) = ax$, para qualquer x em $\mathbb{R}$.
- Se $a < 0$, analogamente, a reta r está contida nos segundo e quarto quadrantes, pelo que x e $f(x)$ têm sinais contrários. Tem-se também nesta situação $f(x) = ax$.

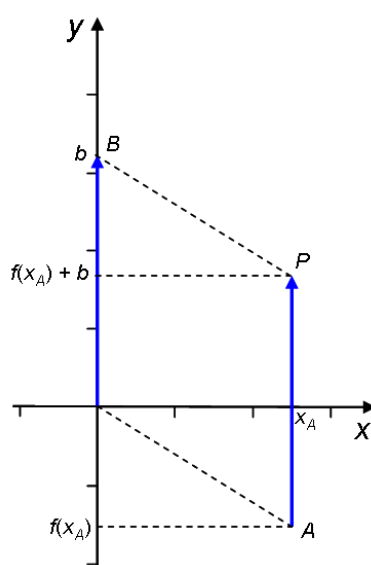
Desta forma, $f(x) = ax$, ou seja f é uma função linear sendo portanto o coeficiente $a = f(1)$ a constante de proporcionalidade entre a ordenada e a abcissa dos pontos da reta.

Reciprocamente, dada uma função f linear, da forma $f(x) = ax$, acabámos de verificar que a reta determinada pelos pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(1, a)$, ou seja, a reta de declive a que passa pela origem, é o gráfico de f , pelo que o gráfico de f é de facto uma reta não vertical que passa pela origem.

Descritor: 1.2

Considerando as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ e tais que para todo x , $g(x) = f(x) + b$, onde b é um dado número real, vamos provar que o gráfico da função g se obtém do gráfico da função f por translação associada ao vetor $\overrightarrow{OB}$ onde O é a origem do referencial, ou seja, o ponto de coordenadas $(0, 0)$, e B é o ponto de coordenadas $(0, b)$.

Considerando um ponto A do gráfico de f de coordenadas $(x_A, f(x_A))$ então a imagem de A pela translação associada ao vetor $\overrightarrow{OB}$ é o ponto $P = A + \overrightarrow{OB}$ de coordenadas (x_P, y_P) tal que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OB}$. Em particular a reta AP é paralela à reta OB , ou seja, ao eixo dos yy , ou com ele coincidente, pelo que P e A têm a mesma abscissa: $x_P = x_A$.



Por outro lado, as ordenadas y_A e y_P dos pontos A e P são os números que no eixo dos yy , considerado como reta numérica, estão associados aos pontos interseção deste eixo com as retas paralelas ao eixo dos xx que passam respetivamente pelos pontos A e P . Pela regra do paralelogramo, o segmento orientado de origem no primeiro destes pontos do eixo dos yy e extremidade no segundo é equipolente a $[A, P]$ e portanto a $[O, B]$.

Atendendo agora à definição de soma de dois números racionais (**NO6-3.3**), estendida posteriormente aos números reais, e utilizando o eixo dos yy como reta numérica, $y_P = f(x_A) + b = f(x_P) + b = g(x_P)$ o que significa que P pertence ao gráfico de g .

Reciprocamente, observando que $f(x) = g(x) - b$, o resultado que acabámos de demonstrar permite concluir que se P for um ponto do gráfico de g então $A = P + (-\overrightarrow{OB})$ é um ponto do gráfico de f , já que o vetor $\overrightarrow{OB'}$ onde B' é o ponto de coordenadas $(0, -b)$ é o simétrico de $\overrightarrow{OB}$ (têm o mesmo comprimento, a mesma direção e sentidos opostos). Então $P = P + (-\overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OB} = A + \overrightarrow{OB}$, de onde qualquer ponto do gráfico de g pode ser obtido por translação de vetor $\overrightarrow{OB}$ de um ponto do gráfico de f .

Descritor: 1.3

O gráfico de uma função linear definida por $f(x) = ax$ é uma reta r que passa na origem (1.1), logo o gráfico de uma função afim da forma $g(x) = ax + b = f(x) + b$ obtém-se a partir da reta r por uma translação (1.2), ou seja, é uma reta paralela a r cuja equação é portanto $y = ax + b$ (consequência imediata do resultado expresso no descritor **GM8-3.19**).

Reciprocamente, dada uma reta r não vertical que intersecta o eixo das ordenadas no ponto $B(0, b)$ a reta imagem de r pela translação de vetor $\overrightarrow{BO}$ passa pela origem (já que a imagem do ponto B é por definição o ponto O). Trata-se pois do gráfico de uma função linear f , dada portanto por uma expressão da forma $f(x) = ax$. Observando que a reta original r se obtém do gráfico de f por translação de vetor $\overrightarrow{OB}$, o resultado mencionado no descritor **1.2** garante que r é o gráfico da função g definida por $g(x) = f(x) + b = ax + b$, que é uma função afim.

1.** Considera duas retas r e s não verticais que, num referencial cartesiano, têm equação respetivamente $y = ax + b$ e $y = cx + d$. Prova que r e s são paralelas quando e apenas quando têm o mesmo declive.

2. Considera as seguintes retas dadas pelas respetivas equações:

reta r : $y = 2x + 5$; reta s : $y = -2x + 7$;

reta t : $y = 2x + 3$; reta v : $y = 1 - 2x$

Determina todos os pares possíveis de retas paralelas que se podem formar com estas retas.

Resposta:

1. Para provar esta propriedade, teremos de provar duas afirmações.

- Se as retas não verticais r e s têm o mesmo declive então são paralelas.
- Se as retas não verticais r e s são paralelas então têm o mesmo declive.

Para provar a primeira afirmação, suponhamos que as retas têm o mesmo declive, ou seja, $a = c$. Então, de acordo com **1.2**, estas retas podem obter-se por translação de uma mesma reta de equação $y = ax$, pelo que são paralelas. Em alternativa, podemos observar que a reta s se obtém da reta r por translação de vetor $\overrightarrow{OC}$, onde $C(0, d - b)$, já que $ax + b + (d - b) = ax + d$.

Para provar a segunda afirmação basta considerar as funções f e g dadas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. De acordo com **1.2**, o gráfico da função f obtém-se por translação do gráfico da função $h(x) = ax$ e o gráfico de g obtém-se por translação do gráfico da função j definida por $j(x) = cx$. Como as retas r e s são paralelas então também as retas de equação $y = ax$ e $y = cx$ o são e como têm um ponto em comum (a origem) são coincidentes, pelo que $a = c$, o que quer dizer que as retas r e s têm o mesmo declive.

[Parte 2, pág. 16]

- 1.**** Considera uma reta definida pelos pontos A e B de coordenadas respetivamente (x_A, y_A) e (x_B, y_B) .
- 1.1.** Prova que a reta AB é não vertical quando e apenas quando $x_A \neq x_B$.
- 1.2.** Justifica que se uma reta é não vertical então o seu declive é igual a $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- 2.*** Considera os pontos $A(2, 4)$ e $B(6, 7)$. Justifica que determinam uma reta não vertical e calcula o declive da reta AB .
- 3.** Indica dois pontos de entre $A(2, 3)$, $B(4, 5)$ e $C(2, 7)$ que determinem uma reta não vertical e justifica.
- 4.** Determina o declive da reta EF sabendo que, num determinado referencial ortogonal e monométrico, se tem:
- 4.1.** $E(2, 5)$ e $F(4, 5)$
- 4.2.** $E(2, 5)$ e $F(-3, 3)$

FSS8-1.5, 1.6 e 2.3

Resposta:

- 1.1.** a. Se $x_A \neq x_B$, a reta AB tem pontos com abcissas distintas, logo não é vertical. Por outro lado, se $x_A = x_B$, a reta AB tem dois pontos em comum com a reta vertical formada pelos pontos de abcissa x_A , coincidindo portanto com essa reta.
- 1.2.** Pelo descritor **1.3**, a reta não vertical AB tem uma equação da forma $y = ax + b$, onde a e b são números reais. Em particular, $y_A = ax_A + b$ e $y_B = ax_B + b$, de onde se conclui que $y_B - y_A = ax_B + b - (ax_A + b) = a(x_B - x_A)$. Então podemos dividir ambos os membros da igualdade pela expressão $x_B - x_A \neq 0$ (já que $x_B \neq x_A$) obtendo-se
- $$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ sendo } a \text{ o declive da reta } AB.$$

- 2.** A reta AB não é vertical pois passa por dois pontos com diferentes abcissas, não sendo portanto paralela ao eixo dos yy , pelo que tem equação da forma $y = ax + b$, sendo o declive dado pelo valor de a . Como o ponto A pertence à reta AB então as suas coordenadas satisfazem a equação da reta logo $4 = a \times 2 + b$ e como B também pertence à reta então $7 = a \times 6 + b$.

Subtraindo as duas equações membro a membro, obtém-se:

$$7 - 4 = a \times 6 - a \times 2 = a(6 - 2) \Leftrightarrow a = \frac{7 - 4}{6 - 2} = \frac{3}{4}$$

Outro processo para determinar o declive consistiria em resolver ambas as equações em ordem a b , tendo-se então $4 - 2a = b$ e $7 - 6a = b$ logo

$$4 - 2a = 7 - 6a \Leftrightarrow -2a + 6a = 7 - 4 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$$

Descritores: 1.5 e 1.6

Dado um plano munido de um referencial cartesiano, uma reta vertical é por definição uma reta paralela ao eixo das ordenadas. Uma tal reta é constituída pelos pontos com uma mesma abcissa (pela própria definição de abcissa).

1. Indica a parte numérica, a parte literal e o grau de cada um dos seguintes monómios:

1.1. $4x^2$, variável x .

1.2. $37y^3$, variável y .

1.3. $3ax^4$, variável x , a número real não nulo.

1.4. $2yx^2y^2$, variáveis x e y .

1.5. $3c$, c número real não nulo.

1.6. $21ax^2b^2cx^2y^5$, variáveis x e y , a , b e c números reais não nulos.

2. Indica uma forma canónica para cada um dos seguintes monómios e identifica os que são semelhantes e os que são iguais:

2.1. $3xyx^2$, variáveis x e y .

2.2. $37zxxy^3$, variáveis x , y e z .

2.3. $3ayx^3$, variáveis x e y , a número real não nulo.

2.4. $2y^2xy^3$, variáveis x e y .

2.5. $\frac{c}{5}$, c número real não nulo.

2.6. $37xzyxy^2$, variáveis x , y e z .

2.7. 13,4

Resposta:

1.

	monómio	parte numérica	parte literal	Grau
1.1.	$4x^2$	4	x^2	2
1.2.	$37y^3$	37	y^3	3
1.3.	$3ax^4$	3a	x^4	4
1.4.	$2yx^2y^2$	2	x^2y^3	5
1.5.	$3c$	3c	Não tem	0
1.6.	$21ax^2b^2cx^2y^5$	$21ab^2c$	x^4y^5	9

2.

	monómio	forma canónica	Igual a	Semelhante a
2.1.	$3xyx^2$	$3x^3y$	–	2.3.
2.2.	$37zxxy^3$	$37x^2y^3z$	2.6.	2.6.
2.3.	$3ayx^3$	$3ax^3y$	–	2.1.
2.4.	$2y^2xy^3$	$2xy^5$	–	–
2.5.	$\frac{c}{5}$	$\frac{c}{5}$	–	2.7.
2.6.	$37xzyxy^2$	$37x^2y^3z$	2.2.	2.2.
2.7.	13,4	13,4	–	2.5.

Descritores: 2.1 a 2.9

Uma das dificuldades na manipulação de monómios prende-se com o facto de, à imagem das variáveis, os coeficientes poderem igualmente envolver letras, neste caso representando valores numéricos constantes. Sugere-se, numa fase inicial, que se designe por t , x , y , w , z ... as variáveis e por a , b , c , d , ... valores numéricos representados por letras, envolvidos nos coeficientes. Nos exemplos que se seguem, quando não houver indicação em contrário, para efeito de determinar a parte literal dos monómios, adotar-se-á para as variáveis a ordem alfabética.

[Parte 2, pág. 46]

1. Nos monómios seguintes, as variáveis designam-se por x , y e z e as constantes por a , b e c .

Escreve na forma canónica o produto dos seguintes monómios e, caso os monómios sejam semelhantes, determina igualmente a respetiva soma.

- 1.1. $3x^2$ e $7x^3$
- 1.2. $2y$ e $5ay$
- 1.3. $4x^2y$ e $8yx^2$
- 1.4. $12abcx^2y^3z^4$ e $3ba^2xyz$
- 1.5. $(3 + 2b)x^2$ e $7axy$

Resposta:

1.1. $3x^2 \times 7x^3 = 3 \times 7 \times x^5 = 21x^5$

1.2. $2y \times 5ay = 2 \times 5a \times y^2 = 10ay^2$

Os monómios são semelhantes: $2y + 5ay = (2 + 5a)y$

1.3. $4x^2y \times 8yx^2 = 4 \times 8 \times x^4y^2 = 32x^4y^2$

Os monómios são semelhantes: $4x^2y + 8yx^2 = 12x^2y$

1.4. $12abcx^2y^3z^4 \times 3ba^2xyz = 12abc \times 3ba^2 \times x^3y^4z^5 = 36a^3b^2cx^3y^4z^5$

1.5. $(3 + 2b)x^2 \times 7axy = (3 + 2b) \times 7a \times x^3y = 7a(3 + 2b)x^3y$

ALG8-2.10 a 2.14

Descritores: 2.10 a 2.12

Tal como nos exemplos dos descritores anteriores, poderá, salvo menção em contrário, adotar-se a ordem alfabética para ordenar as variáveis de um dado monómio.

Descritores: 2.13 e 2.14

Trata-se aqui simplesmente de reconhecer que a soma algébrica e o produto de monómios anteriormente definidos são coerentes com o valor numérico das diferentes expressões uma vez concretizadas as variáveis. São propriedades bastante óbvias, uma vez que as operações e o conceito de igualdade entre monómios foram definidos tendo esse fim em vista, levando em conta as propriedades algébricas da multiplicação e das potências. Deve-se no entanto chamar a atenção para estes factos simples uma vez que legitimam as operações apresentadas. Por exemplo, observando a igualdade

$$8xy \times 2x^3y^2 = 16x^4y^3$$

poderão atribuir-se diferentes valores às variáveis e observar que se obtêm dessa forma igualdades verdadeiras, o que se pode prever com toda a generalidade, aplicando simplesmente as propriedades comutativa e associativa da multiplicação e a regra para o produto de potências com a mesma base.

[Parte 2, pág. 50]

1. Obtém uma forma reduzida de cada um dos seguintes polinómios (variáveis x e y), indicando o respetivo grau e identificando duas alíneas em que se representem polinómios iguais:
 - 1.1. $3x^2 + 8 + 5x - 13x^2 + 7$
 - 1.2. $3x^2y^2 + 4x + 4xy - x^2y^2 + y^2 + 2xy + x - 2x^2y^2$
 - 1.3. $3ax^2 + 2by - y^2 - 3by + ax^2$
 - 1.4. $2x^2y^2 + 5x + 3xy - x^2y^2 + y^2 + 3xy - x^2y^2$
 - 1.5. Polinómio soma dos representados nas alíneas 1.2. e 1.3..

ALG8-3.3 a 3.10

Descritores: 3.8 e 3.9

Tal como para as operações com monómios, as operações com polinómios e o conceito de igualdade de polinómios são definidos, levando em conta as propriedades algébricas das operações de adição e multiplicação e as regras para operar com potências, com o objetivo de garantir que as igualdades envolvendo resultados dessas operações se mantêm quando se substituem as variáveis por números. Assim, por exemplo, a definição de produto de polinómios traduz simplesmente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, pelo que o produto de números obtidos pela substituição das variáveis de dois polinómios por valores numéricos concretos será sempre igual ao valor obtido pela substituição pelos mesmos valores das variáveis do polinómio produto, como se prova aplicando a referida propriedade e o que já se sabe acerca do produto de monómios.

Descritor: 3.10

Uma vez que está definido o produto de polinómios, podemos utilizar a notação das potências de expoente natural para representar o produto de certo número de fatores polinomiais iguais entre si. Pretende-se então que os alunos provem as igualdades:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

e

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

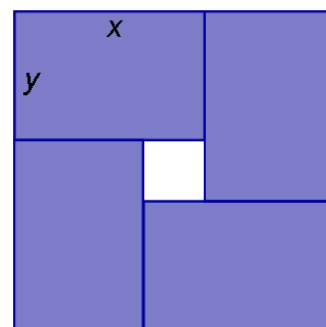
Tendo em conta o presente objetivo geral, pretende-se que os alunos elaborem demonstrações algébricas, utilizando as definições das operações e o conceito de igualdade entre polinómios; por exemplo:

$$(x + y)^2 = (x + y) \times (x + y) = x \times x + x \times y + y \times x + y \times y = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

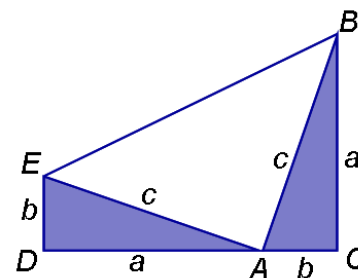
No entanto, o professor poderá também apresentar construções geométricas que ilustrem estas igualdades, proporcionando assim aos alunos uma compreensão mais ampla do seu significado.

[Parte 2, pág. 62]

- 1.* Na seguinte figura um quadrado de lado $x + y$ foi dividido em quatro retângulos iguais e um quadrilátero central.
- 1.1. Justifica que o quadrilátero central é um quadrado e indica uma expressão para o lado desse quadrado como um polinómio de variáveis x e y .
- 1.2. Exprime a área dos retângulos e do quadrado central através de polinómios nas variáveis x e y .
- 1.3. Utilizando a alínea anterior, mostra que $(x + y)^2 = 4xy + (x - y)^2$.
- 1.4. Prova algebricamente a igualdade da alínea anterior.



- 2.* Na figura estão representados dois triângulos $[ABC]$ e $[DEA]$, retângulos respetivamente em C e em D , de tal forma que os pontos D , A e C estão alinhados e tais que $\overline{DA} = \overline{CB} = a$, $\overline{DE} = \overline{AC} = b$ e $\overline{AE} = \overline{AB} = c$.



- 2.1. Justifica que o triângulo $[EAB]$ é retângulo.
- 2.2. Exprime a área de cada um dos triângulos através de polinómios nas variáveis a , b e c e determina a respetiva soma designando-a por A_1 .
- 2.3. Justifica que os três triângulos formam um trapézio retângulo $[EBCD]$, exprime a área desse trapézio através de um polinómio nas variáveis a e b , e designa-o por A_2 .
- 2.4. Levando em conta os resultados das alíneas anteriores e sem utilizares o teorema de Pitágoras prova que $a^2 + b^2 = c^2$.

3. Se três números naturais m , n e p verificarem a igualdade $m^2 + n^2 = p^2$ diz-se que (m, n, p) é um terno pitagórico.
- 3.1. Mostra que se (m, n, p) é um terno pitagórico e k é um número natural então (km, kn, kp) é também um terno pitagórico.
- 3.2. Prova que, sendo a e b números naturais tais que $a > b$ então os números inteiros $m = a^2 - b^2$, $n = 2ab$ e $p = a^2 + b^2$ formam um terno pitagórico.
- 3.3. Utiliza a alínea 3.2. para obteres diferentes triângulos retângulos de lados inteiros.

ALG8-4.1

Resposta:

3.1. Tem-se $(km)^2 + (kn)^2 = k^2m^2 + k^2n^2 = k^2(m^2 + n^2) = k^2p^2 = (kp)^2$, pelo que (km, kn, kp) é um terno pitagórico.

3.2. $m^2 + n^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 = p^2$
de onde se conclui que (m, n, p) é um terno pitagórico.

1.* Fatoriza os seguintes polinómios, começando por colocar em evidência fatores comuns e observando, em seguida, a eventual ocorrência de casos notáveis que permitam prosseguir a fatorização.

1.1. $3xy^2 - 12x^3$

1.2. $a^4b^2 - a^2b^2$

1.3. $(x - y)^2 - 4$

1.4. $(a - b)^3 - 9(a - b)$

1.5. $3x(x - y)^3 - 12x^3(x - y)$

1.6. $(x - 2)^4 - 16$

1.7. $5x^2 - 10x + 20$

1.8. $3ax^2 + 6ax + 3a$

1.9. $4xy^2 + 24xy + 36x$

1.10 $-xy^2 + 2xy - x$

1.11 $4x^2y^4 - 4xy^3z + y^2z^2$

1.12 $4x^4y^2 - 4x^3yz + x^2z^2$

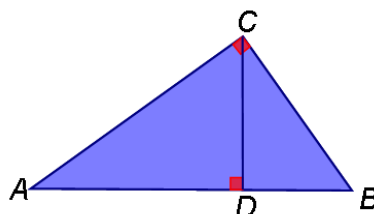
1.13 $4x^2y^4 - 4xy^3z + y^2z^2 - 4x^4y^2 - 4x^3yz + x^2z^2$

Descritor: 4.2

Entende-se pela expressão «fatorizar um polinómio» a operação que consiste em escrever um dado polinómio como produto de polinómios, sendo pelo menos um dos fatores não constante e de grau inferior ao polinómio inicial. Fica subentendido, no exemplo seguinte, que se deve prosseguir a fatorização tanto quanto possível.

ALG8-4.2

- 1.* O triângulo $[ABC]$ é retângulo em C e $[CD]$ é a altura do triângulo relativa à hipotenusa.

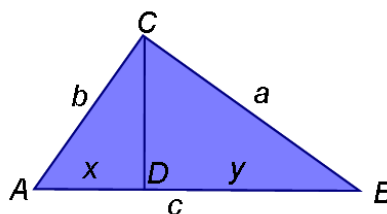


- 1.1. Justifica que os triângulos $[ABC]$ e $[ACD]$ são semelhantes.

- 1.2. Justifica que $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$.

- 1.3. Justifica que $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$.

- 2.* O triângulo $[ABC]$ é retângulo em C e $[CD]$ é a altura do triângulo relativa à hipotenusa. Sejam $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $x = \overline{AD}$ e $y = \overline{DB}$.



- 2.1. Justifica que $b^2 = xc$.

- 2.2. Justifica que $a^2 = yc$.

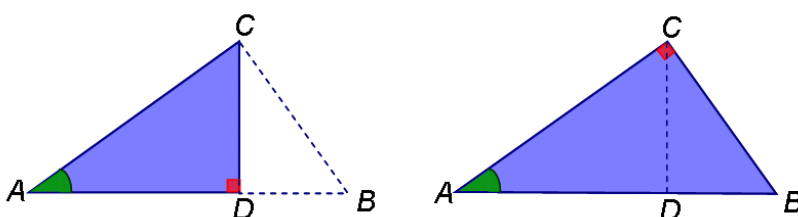
- 2.3. Prova que $a^2 + b^2 = c^2$ tendo em conta as conclusões tiradas em 1.1. e 1.2. e as condições da figura.

Resposta:

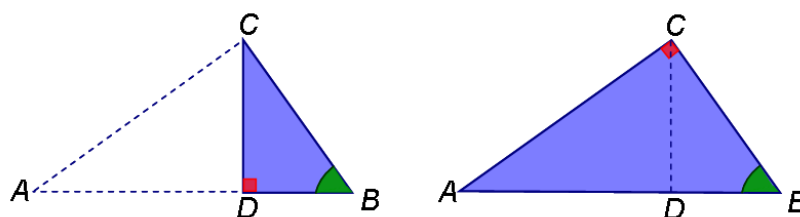
- 1.1.** Os triângulos $[ABC]$ e $[ACD]$ são ambos retângulos, o primeiro por hipótese e o segundo porque $[CD]$ é a altura relativa a $[AB]$ e, por outro lado, o ângulo interno de vértice em A é comum aos dois triângulos. Assim, pelo critério AA de semelhança de triângulos (GM7-4.10) pode concluir-se que os dois triângulos são semelhantes.

- 1.2.** A hipotenusa do triângulo $[ABC]$ corresponde à hipotenusa do triângulo $[ACD]$, ou seja, $[AB]$ corresponde a $[AC]$. O ângulo de vértice A é comum aos dois triângulos, logo os lados que se lhe opõem são correspondentes, ou seja, $[BC]$ corresponde a $[CD]$. Finalmente $[AC]$ corresponde a $[AD]$. Como, em triângulos semelhantes, os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente

proporcionais, tem-se que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$$


- 1.3.** Os triângulos $[ABC]$ e $[CBD]$ são ambos retângulos, o primeiro por hipótese e o segundo porque $[CD]$ é a altura relativa a $[AB]$ e, por outro lado, o ângulo interno de vértice em B é comum aos dois triângulos. Assim, pelo critério AA de semelhança de triângulos (GM7-4.10), os dois triângulos são semelhantes.



A hipotenusa do triângulo $[ABC]$ corresponde à hipotenusa do triângulo $[CBD]$, isto é, $[AB]$ corresponde a $[BC]$. O ângulo de vértice B é comum aos dois triângulos, logo os lados que se lhe opõem são correspondentes, ou seja, $[AC]$ corresponde a $[CD]$. Finalmente $[BC]$ corresponde a $[BD]$. Como, em triângulos semelhantes, os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente proporcionais, tem-se que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$$

- 2.1.** Nesta situação geométrica sabemos que (descritor 1.1) $\frac{b}{c} = \frac{x}{b}$, de onde se conclui que $b^2 = xc$.

- 2.2.** Analogamente, $\frac{a}{c} = \frac{y}{a}$, pelo que podemos concluir que $a^2 = yc$.

- 2.3.** Uma vez que $a^2 = yc$ e $b^2 = xc$ então $a^2 + b^2 = yc + xc = (y + x) \times c = c \times c = c^2$, ou seja, $a^2 + b^2 = c^2$.

Descritor: 1.1

Neste objetivo geral o teorema de Tales e a semelhança de triângulos são aplicados a uma partição do triângulo retângulo que por sua vez é utilizada para a demonstração do teorema de Pitágoras.

Descritor: 1.2

Apresenta-se neste descritor uma sugestão para a demonstração do teorema de Pitágoras a partir da semelhança dos triângulos determinados pela altura relativa à hipotenusa. No Texto Complementar de Geometria indica-se a razão pela qual se optou por encarar o teorema de Pitágoras como uma consequência do teorema de Tales.

Esta demonstração deve ser trabalhada tendo presentes os resultados expressos no descritor 1.1.

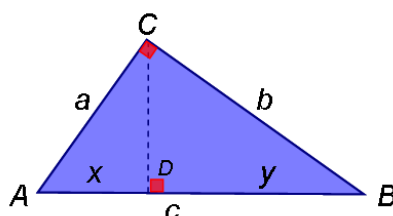
Observação:

No exemplo 1., partiu-se do princípio de que o pé da perpendicular auxiliar considerado ficava situado no lado do triângulo, sendo distinto dos vértices; podemos facilmente justificar essa propriedade notando que outras posições para o pé da perpendicular conduziram a um triângulo retângulo com um ângulo interno obtuso ou com um segundo ângulo interno reto, o que, como sabemos, é impossível.

Texto Complementar de Geometria

Descritores: 1.1 e 1.2

Dado um triângulo $[ABC]$ retângulo em C consideremos a altura traçada do vértice C para a hipotenusa e designemos por D o pé dessa perpendicular:



Essa altura divide o triângulo $[ABC]$ em dois triângulos retângulos, cada um deles partilhando um ângulo interno não reto com o triângulo $[ABC]$; pelo critério AA, os três triângulos são semelhantes entre si (cf. **GM7-4.10**). Podemos então concluir que são proporcionais os lados correspondentes em cada par de triângulos. É fácil identificar os lados correspondentes através dos ângulos opostos; em particular, notando, por exemplo, que, no triângulo $[ADC]$, o ângulo D é reto e os ângulos em A dos triângulos $[ADC]$ e $[ABC]$ coincidem, concluímos que o ângulo em C do triângulo $[ADC]$ é igual ao ângulo em B do triângulo $[ABC]$, e, analogamente, são iguais o ângulo em C do triângulo $[BDC]$, e o ângulo em A do triângulo $[ABC]$.

Temos portanto, utilizando as semelhanças entre o triângulo $[ABC]$ e cada um dos triângulos da decomposição:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \text{ e } \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}}$$

Ou seja, representando as medidas dos comprimentos dos lados pelas letras indicadas na figura:

$$\frac{a}{c} = \frac{x}{a} \text{ e } \frac{b}{c} = \frac{y}{b}$$

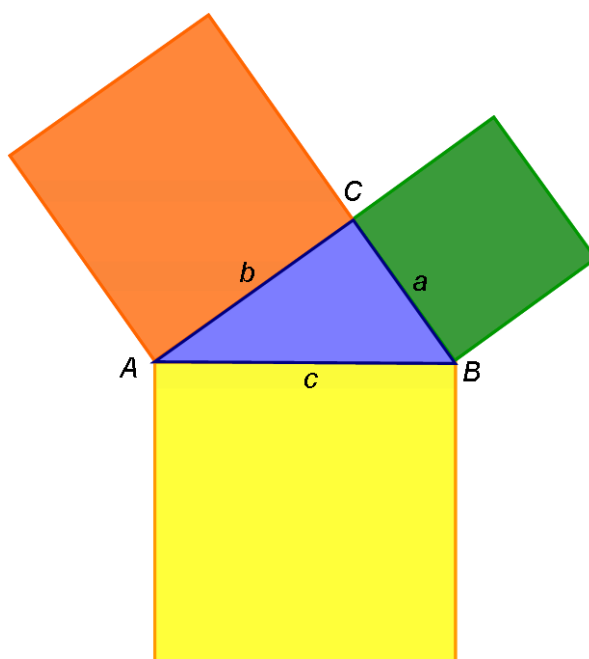
o que é equivalente à conjunção das duas igualdades $a^2 = xc$ e $b^2 = yc$; adicionando-as membro a membro obtemos $a^2 + b^2 = xc + yc = (x + y)c = c^2$, ou seja, num triângulo retângulo o quadrado da medida do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos comprimentos dos catetos, o que costuma abreviar-se em «num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos», designando-se esta proposição por teorema de Pitágoras.

Observações:

- 1.* Para levar a cabo a demonstração acima é essencial garantir que o ponto D , pé da perpendicular traçada para a hipotenusa a partir do vértice oposto, fica estritamente situado entre os vértices A e B . Embora este facto pareça geometricamente óbvio, carece de demonstração. Em primeiro lugar D não pode coincidir com nenhum dos vértices, pois, caso contrário, o triângulo teria dois ângulos internos retos; por outro lado, se o ponto D estivesse situado na reta AB fora do segmento $[AB]$, por exemplo, se B estivesse entre A e D , o ângulo CBD seria um ângulo externo do triângulo $[ABC]$ não adjacente ao ângulo reto e portanto teria de ser um ângulo obtuso (já que é igual à soma de um ângulo reto com um ângulo agudo). Mas, nesse caso, o triângulo $[CBD]$ teria um ângulo interno reto e outro obtuso, o que é absurdo (cf. **GM5-2.3**); de modo análogo chegaríamos a um absurdo supondo que A estaria entre D e B , pelo que apenas resta a hipótese de D estar estritamente situado entre A e B .
2. Na abordagem seguida anteriormente para a demonstração do teorema de Pitágoras evitou-se recorrer a propriedades da noção de área, já que uma teoria rigorosa da medida de área é conceptualmente mais complexa, pressupondo, nas abordagens mais correntes, o conhecimento prévio de teoremas como o de Tales e de Pitágoras (cf. comentários análogos nas observações finais dos textos de apoio do TCG aos descritores **GM7-4.7** e **GM6- 1.7**). No entanto, o teorema de Pitágoras, na sua versão clássica, encontra-se expresso nos Elementos de Euclides na seguinte forma:

Livro I - Proposição 47

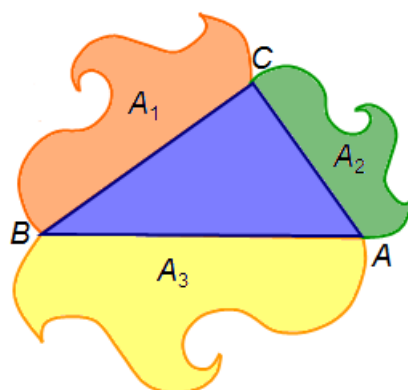
Em triângulos retângulos, o quadrado no lado subtenso ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados nos lados que contêm o ângulo reto.



No Livro VI desta mesma obra, podemos encontrar uma aparente generalização deste resultado:

Livro VI - Proposição 31

«Em triângulos retângulos, a figura traçada no lado subtenso ao ângulo reto é igual à soma das figuras semelhantes desenhadas nos lados em torno do ângulo reto».



Em linguagem atual, a Proposição 31 diz simplesmente que se considerarmos três figuras semelhantes, cada uma contendo um dos lados de um triângulo retângulo e de tal forma que a semelhança que transforma uma em outra transforme também o respetivo lado do triângulo no outro, então a soma das áreas das figuras correspondentes aos catetos é igual à área da figura correspondente à hipotenusa.

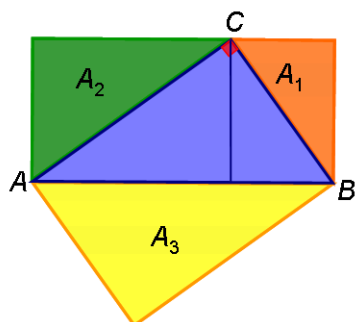
O teorema de Pitágoras é uma consequência desta propriedade, já que basta escolher para figuras semelhantes quadrados de lados iguais aos lados do triângulo. Na verdade, os dois resultados são equivalentes: reciprocamente, se considerarmos três figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo $[ABC]$, as razões das semelhanças que transformam a figura construída sobre a hipotenusa naquelas que estão construídas sobre os catetos são respetivamente iguais a $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{c}$. Temos

assim $A_1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 A_3$ e $A_2 = \left(\frac{b}{c}\right)^2 A_3$, a relação $A_1 + A_2 = A_3$, implica que

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 A_3 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 A_3 = A_3, \text{ ou seja, que } \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \text{ de onde se conclui que } a^2 + b^2 = c^2.$$

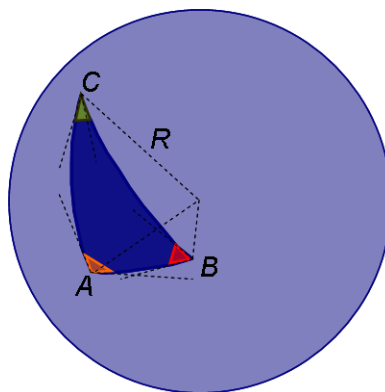
Podemos pois, para provar o teorema de Pitágoras, admitindo o resultado básico relativo a áreas de figuras semelhantes, seleccionar uma qualquer figura em particular e mostrar a aditividade das áreas. A escolha natural recai sobre triângulos semelhantes ao inicial. O facto de que a altura relativa ao ângulo reto divide o triângulo $[ABC]$ em dois triângulos semelhantes ao primeiro constitui já uma demonstração do teorema de Pitágoras.

De facto, se chamarmos A_1 e A_2 às áreas desses dois triângulos e A_3 à área do triângulo inicial, temos $A_1 + A_2 = A_3$ por construção.



Assim, também nesta abordagem, o teorema de Pitágoras aparece de forma natural como um teorema de semelhança de triângulos, ou seja, como uma consequência do teorema de Tales. A demonstração do teorema de Pitágoras proposta nas Metas Curriculares baseia-se unicamente nas proporções do teorema de Tales, sem qualquer referência à noção de área.

É interessante observar que o teorema de Pitágoras apenas é válido em geometria euclidiana, e que apenas nesta geometria existem triângulos semelhantes. Em conjunto com o que foi explicado, este facto deixa adivinhar uma ligação mais profunda entre a existência de triângulos semelhantes e o teorema de Pitágoras. Por exemplo, em Geometria esférica, o teorema de Pitágoras é falso e, nesta Geometria, os únicos triângulos semelhantes que existem são os triângulos iguais.



A área de um triângulo esférico $[ABC]$ é dada por:

$$A_{[ABC]} = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi) R^2$$

onde R é o raio da superfície esférica e $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ designam as medidas em radianos dos ângulos internos do triângulo. Uma consequência imediata deste resultado é que se dois triângulos têm ângulos iguais então têm a mesma área. É possível demonstrar, utilizando ferramentas próprias à geometria esférica, que dois tais triângulos são então iguais.

3. A demonstração do teorema de Pitágoras constante do Livro I dos Elementos de Euclides, Proposição 47, referida na observação anterior, utiliza as áreas de certos triângulos de forma extremamente interessante e que pode fornecer pistas para futuras estratégias de resolução de problemas.

Dado um triângulo $[ABC]$ retângulo em C e de altura $[CK]$, consideremos os quadrados $[ACFG]$, $[BCDE]$ e $[ABIH]$, construídos sobre os respectivos lados, e o ponto J , interseção das retas (perpendiculares) HI e CK .

O triângulo $[ABE]$ tem altura, relativa à base $[BE]$, igual a $[BC]$ logo a área do quadrado $[BCDE]$ é igual ao dobro da área do triângulo $[ABE]$.

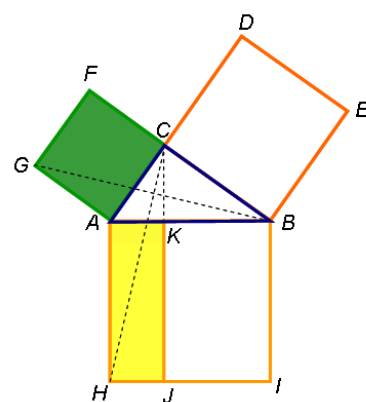
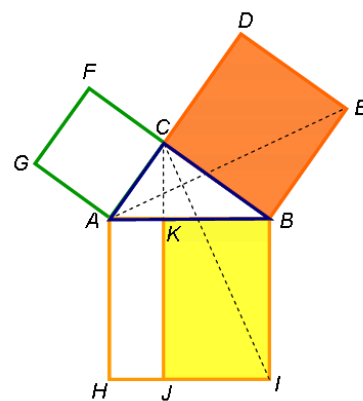
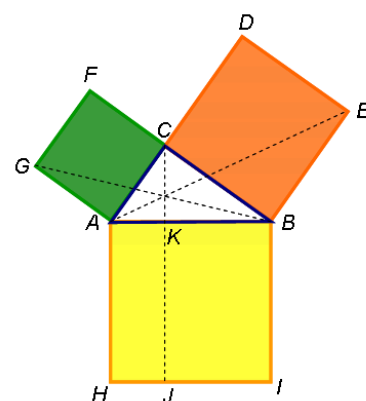
Pelo caso LAL de igualdade de triângulos prova-se que os triângulos $[ABE]$ e $[IBC]$ são iguais pois $\overline{AB} = \overline{BI}$, $\overline{BE} = \overline{BC}$ e $\widehat{ABE} = \widehat{IBC}$ (ângulos que são iguais à soma de um ângulo reto com o ângulo ABC). Assim, podemos afirmar que a área do quadrado $[BCDE]$ é igual ao dobro da área do triângulo $[IBC]$.

Por outro lado, o triângulo $[IBC]$ tem altura relativa à base $[BI]$ igual a $[IJ]$, logo a área do retângulo $[IJKB]$ é também igual ao dobro da área do triângulo $[IBC]$. Podemos portanto concluir que a área do quadrado $[BCDE]$ é igual à área do retângulo $[IJKB]$.

De forma análoga se conclui, utilizando os triângulos $[ABG]$ e $[CAH]$ que a área do retângulo $[AHJK]$ é igual à área do quadrado $[ACFG]$.

Assim se conclui a demonstração:

$$A_{[ABIH]} = A_{[AHJK]} + A_{[IJKB]} = A_{[BCDE]} + A_{[ACFG]}$$



[Parte 2, pág. 76]

1. Resolve as seguintes equações:

1.1. $4x^2 - 49 = 0$

1.2. $2x^2 - 50 = 0$

1.3. $(x + 4)^2 - 9 = 0$

1.4. $(x - 3)^2 + 4 = 0$

1.5. $3x^2 + 4 = x^2 + 4$

1.6. $4x^2 - (x + 1)^2 = 0$

ALG8-5.3 e 5.4

Descritor: 5.3

Demonstração da lei de anulamento do produto:

Sejam dois números x e y tais que $x \times y = 0$.

Se $x \neq 0$, multiplicando ambos os membros da igualdade por $\frac{1}{x}$ vem $\frac{1}{x} \times x \times y = \frac{1}{x} \times 0$, ou seja, $y = 0$.

Desta forma, $x = 0$ ou $y = 0$.

Descritor: 5.4

Considerando a equação $x^2 = k$ na incógnita x :

- Se $k < 0$, como $x^2 \geq 0$ independentemente do valor de x , a equação não tem solução.
- Se $k = 0$, $x^2 = 0 \Leftrightarrow x \times x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, pela lei de anulamento do produto.
- Se $k > 0$, $x^2 = k \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{k}^2 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{k}^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x - \sqrt{k} = 0 \vee x + \sqrt{k} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{k} \vee x = -\sqrt{k}$

[Parte 2, pág. 76]

1. Resolve em ordem a x a equação $4x^2 = ax$, onde a é um número real.
- 2.* Um quadrado de lado x tem perímetro p e área a ($p > 0$ e $a > 0$).
- 2.1. Escreve uma igualdade que relacione x e p e outra que relacione x e a .
- 2.2. Resolve cada uma das equações em ordem a x e deduz que $p^2 = 16a$.
- 2.3. Existe algum quadrado de perímetro 20 cm e de área 24 cm^2 ?

Resposta:

1. $4x^2 = ax \Leftrightarrow 4x^2 - ax = 0 \Leftrightarrow (4x - a) \times x = 0$

Pela lei do anulamento do produto, $x = 0 \vee 4x - a = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{a}{4}$.

2.1. $p = 4x$; $x^2 = a$

2.2. $x = \frac{p}{4}$ e $x = \sqrt{a}$, de onde se conclui que $\frac{p}{4} = \sqrt{a}$, ou ainda que $p^2 = (4\sqrt{a})^2 = 16a$.

2.3. $20^2 = 400$ e $24 \times 16 = 384$. Como $400 \neq 384$, não existe nenhum quadrado com essas características.

ALG8-7.2

[Parte 2, pág. 132]

1. Considera o seguinte conjunto de dados numéricos:

23 , 13 , 14 , 25 , 26 , 14 , 12 , 20 , 15 , 13 , 23 , 26 , 26 , 12 , 17 .

Indica os valores do primeiro e do terceiro quartil.

2. Indica o primeiro e o terceiro quartil do seguinte conjunto de dados:

8 , 14 , 14 , 10 , 7 , 2 , 10 , 6 , 7 , 13 , 16 , 16 , 4 , 7 , 15 , 11 , 3 .

3. Indica o primeiro e o terceiro quartil do seguinte conjunto de dados:

3 , 4 , 15 , 16 , 4 , 2 , 10 , 5 , 4 , 13 , 16 , 16 , 2 , 7 , 5 , 2 .

4. Indica o primeiro, o segundo e o terceiro quartis do seguinte conjunto de dados:

33 , 34 , 45 , 47 , 34 , 32 , 40 , 35 , 33 , 43 , 47 , 47 , 32 , 37 .

OTD8-1.1 e 1.2

Resposta:

1. Dados ordenados:

12, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 17, 20, 23, 23, 25, 26, 26, 26.

Como são 15 dados e 15 é ímpar, a ordem de referência para o cálculo dos quartis é a ordem $\frac{15+1}{2} = 8$.

12, 12, 13, 13, 14, 14, 15, **17**, 20, 23, 23, 25, 26, 26, 26.

Para calcular o primeiro quartil temos que determinar a mediana dos dados de ordem menor que 8:

12, 12, 13, **13**, 14, 14, 15.

O primeiro quartil é 13.

Para calcular o terceiro quartil temos que determinar a mediana dos dados de ordem maior que 8:

20, 23, 23, **25**, 26, 26, 26.

O terceiro quartil é 25.

2. Dados ordenados:

2, 3, 4, 6, 7, 7, 7, 8, 10, 10, 11, 13, 14, 14, 15, 16, 16.

Como o n.º de dados é ímpar, a ordem de referência para o cálculo dos quartis é a ordem $\frac{17+1}{2} = 9$.

2, 3, 4, 6, 7, 7, 7, 8, **10**, 10, 11, 13, 14, 14, 15, 16, 16.

Para calcular o primeiro quartil temos que determinar a mediana dos dados de ordem inferior à ordem assinalada:

2, 3, 4, **6**, **7**, 7, 7, 8.

O primeiro quartil é 6,5.

Para calcular o terceiro quartil temos que determinar a mediana dos dados a partir da ordem assinalada, correspondente à mediana:

10, 11, 13, **14**, **14**, 15, 16, 16.

O terceiro quartil é 14.

3. Sequência ordenada dos dados:

2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 10, 13, 15, 16, 16, 16.

Uma vez que este conjunto tem 16 dados (n° par), para calcular o primeiro quartil temos que determinar a mediana dos dados de ordem menor ou igual a $8 \left(\frac{16}{2} \right)$:

2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5.

O primeiro quartil é 3,5.

Para o terceiro quartil, temos:

5, 7, 10, 13, 15, 16, 16, 16.

O terceiro quartil é 14.

4. Dados ordenados:

32, 32, 33, 33, 34, 34, 35, 37, 40, 43, 45, 47, 47, 47.

Uma vez que o número de dados é par, existem duas ordens centrais, a ordem 7 e a ordem 8. Assim, a mediana é igual à média dos valores dessas ordens, ou seja, a mediana é 36. O segundo quartil é também 36 pois, por definição, é igual ao valor da mediana.

Para calcular o primeiro quartil, devemos ter em conta os dados até à ordem $7 \left(\frac{14}{2} \right)$.

Calculando a mediana dos primeiros 7 dados da sequência ordenada, temos que o primeiro quartil é 33.

32, 32, 33, 33, 34, 34, 35.

Calculando a mediana dos últimos 7 dados da sequência ordenada, verifica-se que o terceiro quartil é 45.

37, 40, 43, 45, 47, 47, 47.

Assim, $Q_1 = 33$; $Q_2 = 36$; $Q_3 = 45$.

Descritores: 1.1 e 1.2

Informação Complementar para o professor

Observação sobre os quartis

No Ensino Básico e Secundário o termo «quartis» é associado de uma maneira geral à divisão em quatro partes de um conjunto de dados sem que se apresente uma definição mais precisa, recorrendo-se muitas vezes a exemplos relativamente aos quais são indicados os procedimentos para os obter. Analisando a literatura especializada, verifica-se a existência de uma grande diversidade de processos que não conduzem aos mesmos resultados para o primeiro e para o terceiro quartil (o segundo quartil, invariavelmente, é definido como sendo igual à mediana). Em suma, não existe uma definição universalmente aceite nem para o primeiro nem para o terceiro quartil.

A título de exemplo, observe-se o cálculo do primeiro quartil (Q_1) tomando um conjunto com 23 dados ($x_1, x_2, \dots, x_{23}$) recorrendo a diferentes métodos que podem ser encontrados correntemente na literatura e repare-se como cada um dos processos apresentados pode conduzir a diferentes valores de Q_1 .

1.º processo:

Divide-se o número de dados por quatro. Uma vez que $\frac{23}{4}$ não é inteiro, consideram-se os números inteiros imediatamente inferior e superior (5 e 6) e os dados correspondentes a essas ordens na sequência ordenada dos dados, tomando-se para primeiro quartil a média aritmética desses dois dados. Neste caso, tem-se $Q_1 = \frac{x_5 + x_6}{2}$.

2.º processo:

Depois de ordenados os dados e de encontrada a mediana (x_{12}), o primeiro quartil (Q_1) é obtido como a mediana dos dados de ordem inferior à ordem da mediana (x_1 a x_{11}). Assim, tem-se $Q_1 = x_6$. É este o processo utilizado por grande parte das calculadoras.

3.º processo:

Depois de ordenados os dados e de encontrada a mediana (x_{12}), o primeiro quartil (Q_1) é obtido como a mediana dos dados de ordem inferior ou igual à ordem da mediana (x_1 a x_{12}), obtendo-se o valor $Q_1 = \frac{x_6 + x_7}{2}$.

No entanto, os diferentes autores parecem concordar que a definição deveria ser tal que:

a percentagem de dados não superiores ao primeiro (respetivamente terceiro) quartil é pelo menos 25% (respetivamente 75%) e a percentagem de dados não inferiores ao primeiro (respetivamente terceiro) quartil é pelo menos 75% (respetivamente 25%),

embora, com frequência, esta propriedade seja apresentada de um modo menos exigente, mencionando-se apenas a primeira parte:

a percentagem de dados não superiores ao primeiro (respetivamente terceiro) quartil é pelo menos 25% (respetivamente 75%).

Porém, com esta simplificação, apenas se restringem os valores possíveis para os quartis a intervalos que não são limitados à direita, o que é claramente inconveniente. Para que uma condição deste tipo implique que os quartis pertencem a intervalos de extremos iguais aos valores de dois dados consecutivos na respetiva sequência ordenada (com determinados índices que apenas dependem da dimensão da amostra), é necessário que se refira tanto à percentagem de dados menores ou iguais a um determinado quartil, como à percentagem de dados maiores ou iguais a esse valor.

Curiosamente, não existe uma definição simples nem para o primeiro nem para o terceiro quartil, que, independentemente do número de dados em análise, implique a veracidade desta propriedade, mesmo na versão mais simples acima referida. É o caso, por exemplo, dos três processos acima descritos, que, como veremos mais adiante, falham em certas situações. Pode no entanto garantir-se que, nessas situações, as percentagens mínimas dos dados em questão se aproximam dos limiares considerados (respetivamente 25% e 75%) tanto quanto o desejarmos, desde que se considerem amostras com dimensões suficientemente elevadas.

Generalizando para um conjunto com n dados cada um dos três processos em análise, convém distinguir os casos correspondentes aos diferentes restos resultantes da divisão de n por 4. Repare-se ainda que quando n é ímpar existe um dado cujo valor é igual à mediana ao passo que, quando n é par, a mediana pode não coincidir com o valor de nenhum dos dados já que é calculada como média dos valores de dois dados. Nos casos em que n é par, tanto o 2.º como o 3.º processo fazem intervir no cálculo de Q_1 os valores das ordens até à ordem $\frac{n}{2}$ (inclusive).

Considerem-se então os quatro casos: $n = 4k$; $n = 4k + 1$; $n = 4k + 2$; $n = 4k + 3$.

Na tabela seguinte, apresenta-se o valor de Q_1 , calculado pelo método apresentado em cada um dos três processos.

	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
1.º processo	$Q_1 = x_k$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$
2.º processo	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = x_{k+1}$	$Q_1 = x_{k+1}$
3.º processo	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = x_{k+1}$	$Q_1 = x_{k+1}$	$Q_1 = \frac{x_{k+1} + x_{k+2}}{2}$

Passemos agora à verificação da propriedade no que respeita ao primeiro quartil, que exige que a percentagem de dados menores ou iguais a Q_1 deve ser pelo menos 25% e a percentagem de dados maiores ou iguais a Q_1 deve ser pelo menos 75%.

1.º processo (Q_1)

N.º de dados	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
Valor do primeiro quartil	$Q_1 = x_k$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$
N.º de dados de valor garantidamente menor ou igual a Q_1	k	k	k	k
Verificação da propriedade	$\frac{k}{4k} = 25\%$	$\frac{k}{4k+1} < 25\%$	$\frac{k}{4k+2} < 25\%$	$\frac{k}{4k+3} < 25\%$
N.º de dados de valor garantidamente maior ou igual a Q_1	$n - (k - 1) = 3k + 1$	$n - k = 3k + 1$	$n - k = 3k + 2$	$n - k = 3k + 3$
Verificação da propriedade	$\frac{3k+1}{4k} > 75\%$	$\frac{3k+1}{4k+1} > 75\%$	$\frac{3k+2}{4k+2} > 75\%$	$\frac{3k+3}{4k+3} > 75\%$

Nos casos assinalados a vermelho não se pode garantir a propriedade.

2.º processo (Q_1)

N.º de dados	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
Valor do primeiro quartil	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = x_{k+1}$	$Q_1 = x_{k+1}$
N.º de dados de valor garantidamente menor ou igual a Q_1	k	k	$k + 1$	$k + 1$
Verificação da propriedade	$\frac{k}{4k} = 25\%$	$\frac{k}{4k+1} < 25\%$	$\frac{k+1}{4k+2} > 25\%$	$\frac{k+1}{4k+3} > 25\%$
N.º de dados de valor garantidamente maior ou igual a Q_1	$n - k = 3k$	$n - k = 3k + 1$	$n - k = 3k + 2$	$n - k = 3k + 3$
Verificação da propriedade	$\frac{3k}{4k} = 75\%$	$\frac{3k+1}{4k+1} > 75\%$	$\frac{3k+2}{4k+2} > 75\%$	$\frac{3k+3}{4k+3} > 75\%$

No caso assinalado a vermelho não se pode garantir a propriedade. No entanto, verifica-se que para $n \geq 53$, o valor obtido é arredondado à unidade percentual para 25%, uma vez que a diferença é menor que 0,5%.

3.º processo (Q_1)

N.º de dados	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
Valor do primeiro quartil	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = x_{k+1}$	$Q_1 = x_{k+1}$	$Q_1 = \frac{x_{k+1} + x_{k+2}}{2}$
N.º de dados de valor garantidamente menor ou igual a Q_1	k	$k + 1$	$k + 1$	$k + 1$
Verificação da propriedade	$\frac{k}{4k} = 25\%$	$\frac{k+1}{4k+1} > 25\%$	$\frac{k+1}{4k+2} > 25\%$	$\frac{k+1}{4k+3} > 25\%$
N.º de dados de valor garantidamente maior ou igual a Q_1	$n - k = 3k$	$n - k = 3k + 1$	$n - k = 3k + 2$	$n - (k + 1) = 3k + 2$
Verificação da propriedade	$\frac{3k}{4k} = 75\%$	$\frac{3k+1}{4k+1} > 75\%$	$\frac{3k+2}{4k+2} > 75\%$	$\frac{3k+2}{4k+3} < 75\%$

Mais uma vez, o caso assinalado a vermelho é o problemático. Todavia, verifica-se que para $n \geq 51$, o valor obtido é arredondado à unidade percentual para 75%, já que a diferença é menor que 0,5%.

Como acabámos de verificar, nenhum dos processos apresentados garante que:

a percentagem de dados não superiores (respetivamente não inferiores) ao primeiro quartil é pelo menos 25% (respetivamente 75%).

Para que isso acontecesse, seria necessário que se estabelecessem regras específicas para o cálculo dos quartis que dependessem do resto da divisão do número de dados (n) por 4, tornando-se o procedimento fastidioso e pouco interessante para os alunos deste ciclo de estudos.

Rejeitando o 1.º processo, dado que não verifica uma das propriedades em três quartos dos casos e comparando os 2.º e 3.º processos nos casos em que não garantem a propriedade, verifica-se que se encontram em igualdade de circunstâncias quanto à opção de preferência, quando se efetua a verificação da versão completa da propriedade.

	Para n ímpar	
	Processo que não inclui a ordem da mediana no cálculo dos quartis 2.º processo $n = 4k + 1$	Processo que inclui a ordem da mediana no cálculo dos quartis 3.º processo $n = 4k + 3$
Percentagem de dados de valor menor ou igual a Q_1 é maior ou igual a 25%	Não garantido	Garantido
Percentagem de dados de valor maior ou igual a Q_1 é maior ou igual a 75%	Garantido	Não garantido
Percentagem de dados de valor menor ou igual a Q_3 é maior ou igual a 75%	Garantido	Não garantido
Percentagem de dados de valor maior ou igual a Q_3 é maior ou igual a 25%	Não garantido	Garantido

Atendendo a estas questões, optou-se, nas Metas Curriculares, pelo 2.º processo de cálculo dos quartis (**OTD8-1.1 e OTD8-1.2**) uma vez que é o mais amplamente utilizado, sendo em particular o que está programado na grande maioria das calculadoras. Em conformidade com esta escolha, o descritor **OTD8-1.4** refere apenas as propriedades que de facto são válidas com a definição adotada. É no entanto aconselhável referir a importância das propriedades enunciadas na primeira e na última linha do quadro anterior, ainda que, pelo processo de cálculo adotado, apenas se verifiquem aproximadamente, tal como foi explicado.

Relativamente a estes descritores é conveniente que se deem exemplos em que os quartis sejam iguais a algum dos dados apresentados bem como exemplos em que isso não acontece.

[Parte 2, pág. 136]

1. Calcula a amplitude e a amplitude interquartil do seguinte conjunto de dados:

120, 135, 128, 140, 115, 127, 150, 144, 131, 126, 132, 129, 142.

Resposta

- 1.** Datos ordenados:

115 , 120 , 126 , 127 , 128 , 129 , **131** , 132 , 135 , 140 , 142 , 144 , 150 .
mediana

Q_1 : 115, 120, **126**, **127**, 128, 129

Q_3 : 132, 135, **140**, **142**, 144, 150

mínimo: 115

máximo: 150

$$150 - 115 = 35$$

$$Q_1 = 126,5$$
$$Q_3 = 141$$

$$141 - 126,5 = 14,5$$

A amplitude é 35 e a amplitude interquartil é 14,5 .

OTD8-1.6