



Manuel Marques e Paula Ferreira

Componentes do projeto:

- Manual do aluno
- Caderno de atividades
- Livromédia



A Santillana publicou a obra Projeto **Desafios** Matemática 8.º ano em dois volumes para reduzir o peso a transportar pelos alunos. Os dois volumes não podem ser vendidos separadamente.



EDIÇÃO REVISTA  
DE ACORDO COM AS NOVAS  
M E T A S  
CURRICULARES

MANUAL CERTIFICADO pela Faculdade  
de Ciências da Universidade de Lisboa,  
nos termos da legislação em vigor



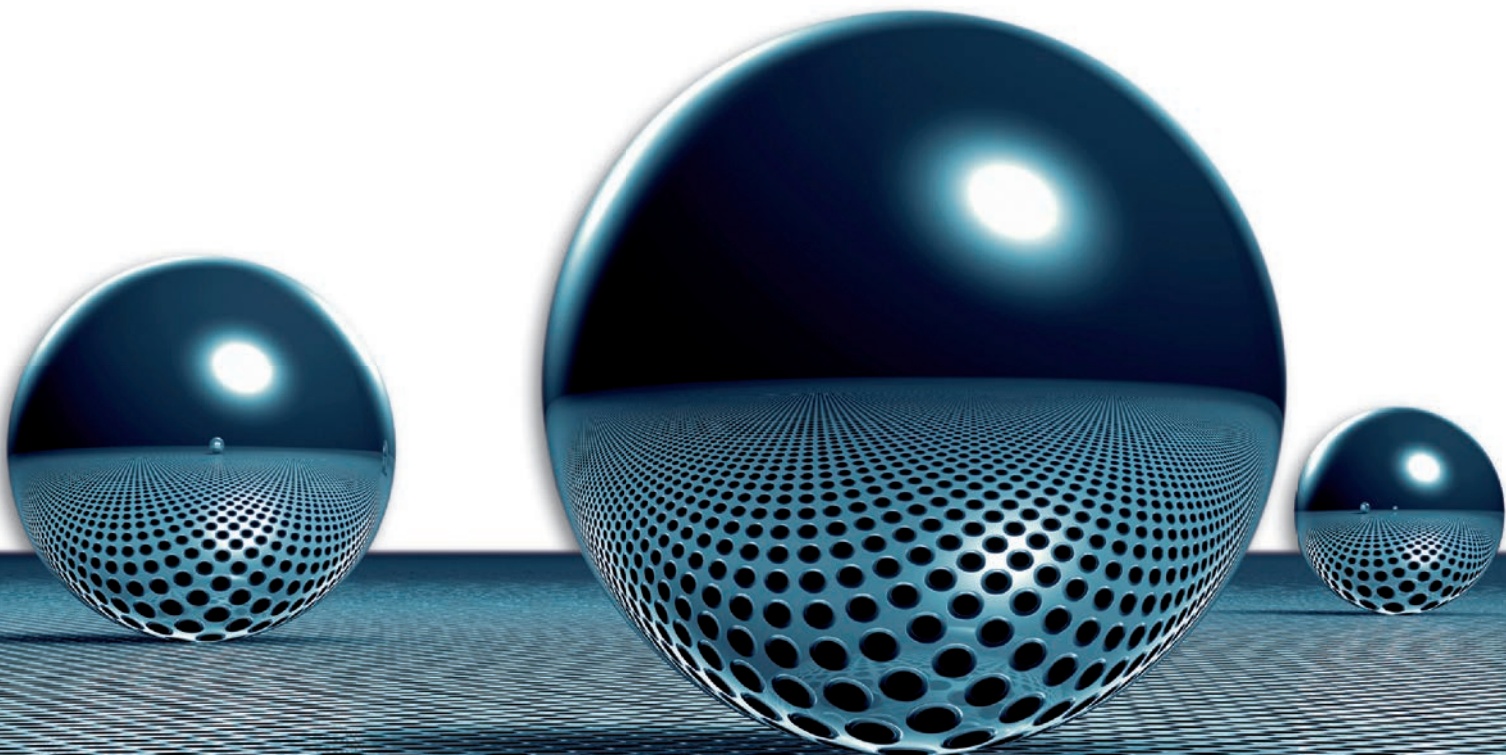
Conforme o novo  
Acordo Ortográfico  
da língua portuguesa

Projeto **Desafios**

Matemática Volume 1

Projeto **Desafios**

SANTILLANA



EDIÇÃO REVISTA  
DE ACORDO COM AS NOVAS  
M E T A S  
CURRICULARES

MANUAL CERTIFICADO  
pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa



Projeto **Desafios**



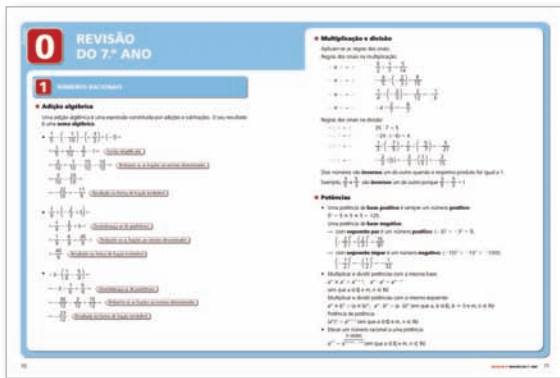
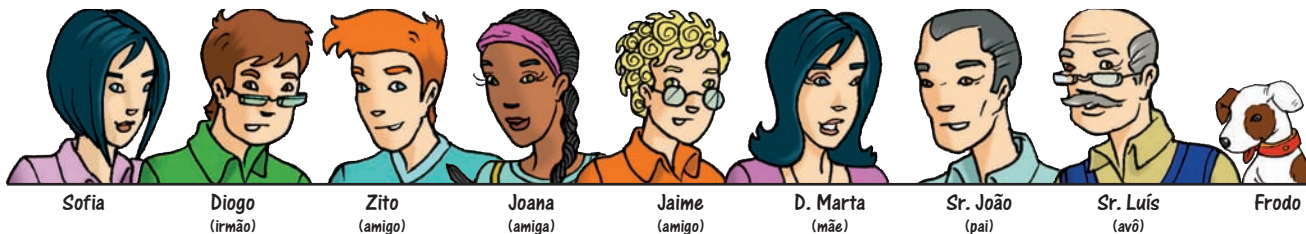


# Matemática

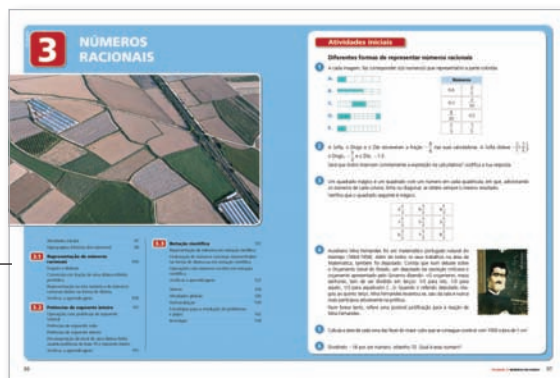
Volume 1

8<sup>o</sup>

Estas são as personagens do teu manual.



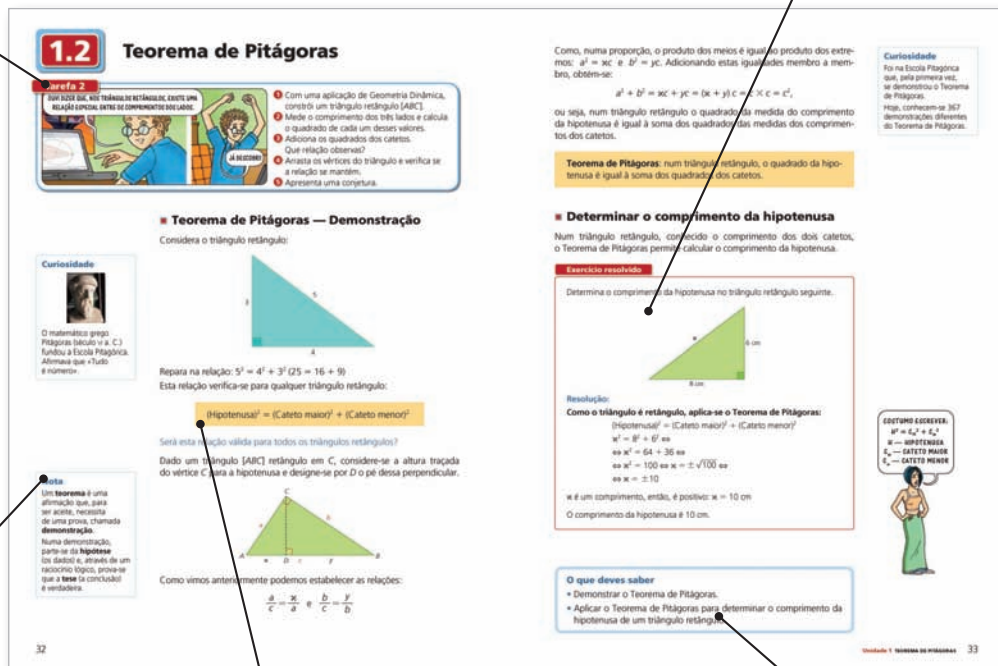
**Unidade 0** Revisão dos conteúdos de 7.º ano. Inclui ficha de diagnóstico.



**Abertura de unidade e atividades iniciais**  
Índice da unidade e atividades para relembra os conceitos necessários para a aprendizagem da matéria nova.

Tarefa inicial que te permitirá chegar a várias conclusões que serão importantes na construção dos teus conhecimentos.

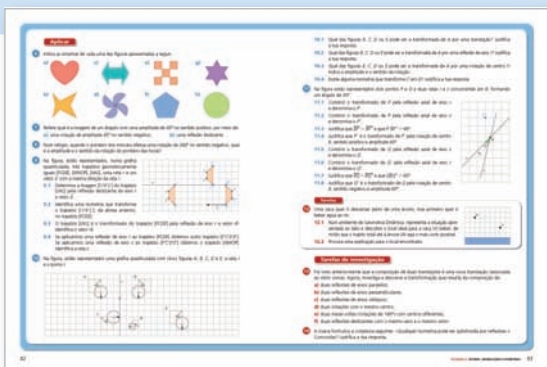
Exercícios resolvidos passo a passo.



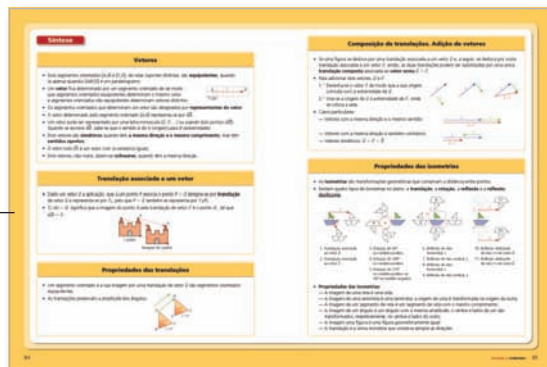
Na parte lateral de cada página de teoria, existem caixas com notas, observações sobre a matéria dada, chamadas de atenção e curiosidades.

Conteúdos teóricos destacados.

Destaque para o essencial da subunidade.

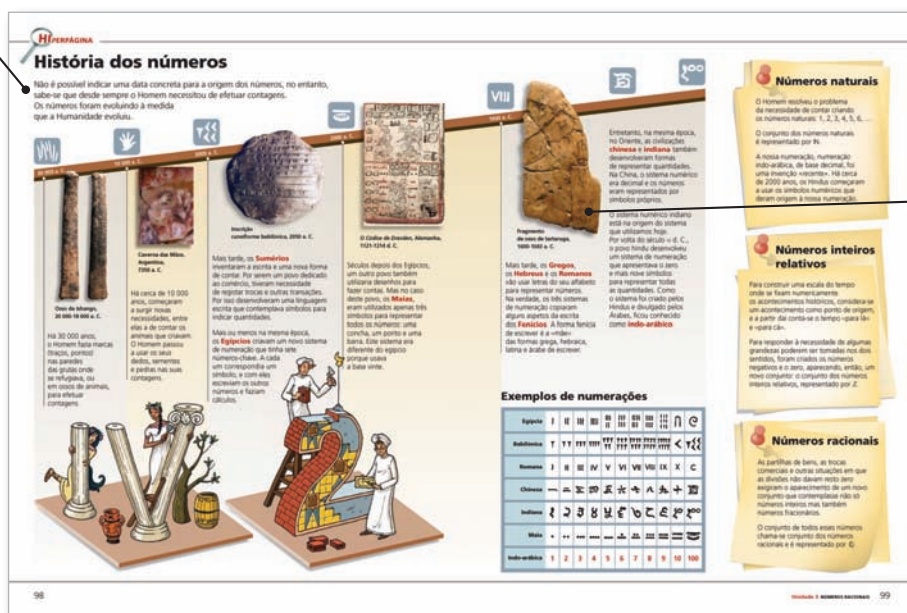


**Verificar a aprendizagem, aplicar e tarefas de investigação** Exercícios de verificação de conhecimentos e de aplicação e, ainda, tarefas diversas e tarefas de investigação.

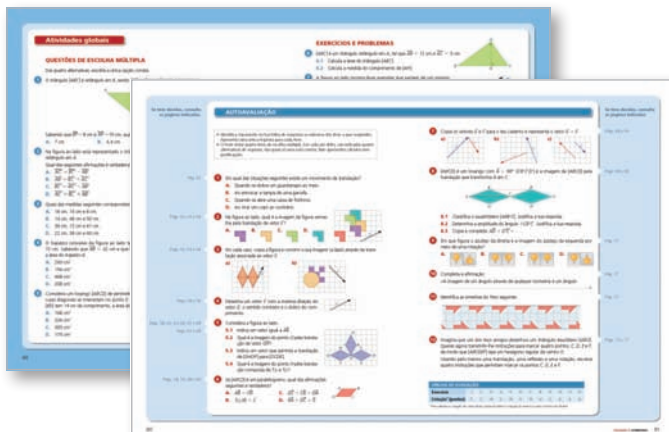


**Síntese** Síntese dos conceitos fundamentais acompanhada de exemplos que te facilitam o estudo e a consulta.

Nas hiperpáginas é feita a apresentação de um tema de uma forma diferente.



A apresentação dos conteúdos é feita partindo de imagens.



**Atividades globais** Para poderes praticar e relacionar todos os conceitos que aprendeste, aqui encontras atividades variadas.

**Autoavaliação** Permite que, com a ajuda da grelha de avaliação, faças uma apreciação dos teus conhecimentos.

**Estratégias para a resolução de problemas e jogos** Apresenta-se um jogo e um problema matemático cuja resolução é semelhante.

**Investigar** Propostas de trabalhos de investigação e de projeto. Encontrarás também endereços da Internet e informação de software relacionados com a unidade.

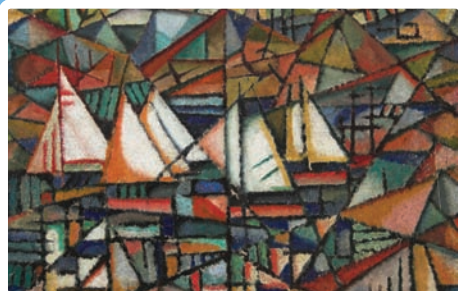


|                                |   |
|--------------------------------|---|
| A linguagem matemática .....   | 6 |
| Como estudar Matemática? ..... | 8 |

## 0 REVISÃO DO 7.º ANO 10

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| Números racionais .....        | 10 |
| Funções .....                  | 12 |
| Sequências e sucessões .....   | 15 |
| Polígonos. Quadriláteros ..... | 16 |
| Tratamento de dados .....      | 18 |
| Equações .....                 | 19 |
| Congruência e semelhança ..... | 22 |
| Ficha de diagnóstico .....     | 24 |

## 1 TEOREMA DE PITÁGORAS 26



|                           |    |
|---------------------------|----|
| Atividades iniciais ..... | 27 |
|---------------------------|----|

### 1.1 Decomposição de um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa 28

|                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| Decomposição de um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa ..... |    |
| Verificar a aprendizagem .....                                                  | 30 |

### 1.2 Teorema de Pitágoras 32

|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| Teorema de Pitágoras — Demonstração .....    |    |
| Determinar o comprimento da hipotenusa ..... |    |
| Verificar a aprendizagem .....               | 34 |

### 1.3 Teorema de Pitágoras (continuação) 36

|                                             |    |
|---------------------------------------------|----|
| Determinar o comprimento de um cateto ..... |    |
| Recíproco do Teorema de Pitágoras .....     |    |
| Verificar a aprendizagem .....              | 39 |
| Hiperpágina (A vida de Pitágoras) .....     | 42 |
| Síntese .....                               | 44 |
| Atividades globais .....                    | 46 |
| Autoavaliação .....                         | 48 |
| Investigar .....                            | 50 |

## 2 VETORES, TRANSLAÇÕES E ISOMETRIAS 52



|                           |    |
|---------------------------|----|
| Atividades iniciais ..... | 53 |
|---------------------------|----|

### 2.1 Segmentos orientados e vetores 54

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| Segmentos orientados .....     |    |
| Noção de vetor .....           |    |
| Verificar a aprendizagem ..... | 60 |

### 2.2 Translação 62

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| Noção de translação .....      |    |
| Verificar a aprendizagem ..... | 65 |

### 2.3 Composição de translações e adição de vetores 67

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| Composição de translações .....        |    |
| Adição de vetores e propriedades ..... |    |
| Propriedades das translações .....     |    |
| Aplicações das propriedades .....      |    |
| Verificar a aprendizagem .....         | 72 |

### 2.4 Reflexão deslizante. Propriedades das isometrias 75

|                                                         |    |
|---------------------------------------------------------|----|
| Reflexão deslizante .....                               |    |
| Propriedades das isometrias .....                       |    |
| Frisos e simetrias .....                                |    |
| Verificar a aprendizagem .....                          | 81 |
| Síntese .....                                           | 84 |
| Atividades globais .....                                | 86 |
| Autoavaliação .....                                     | 90 |
| Estratégias para a resolução de problemas e jogos ..... | 92 |
| Investigar .....                                        | 94 |

## 3

## NÚMEROS RACIONAIS

96



|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| Atividades iniciais                | 97 |
| Hiperpágina (História dos números) | 98 |

## 3.1

## Representação de números racionais 100

|                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Frações e dízimas                                                            |     |
| Conversão em fração de uma dízima infinita periódica                         |     |
| Representação na reta numérica de números racionais dados na forma de dízima |     |
| Verificar a aprendizagem                                                     | 109 |

## 3.2

## Potências de expoente inteiro 111

|                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Operações com potências de expoente natural                                              |     |
| Potências de expoente nulo                                                               |     |
| Potências de expoente inteiro                                                            |     |
| Decomposição decimal de uma dízima finita usando potências de base 10 e expoente inteiro |     |
| Verificar a aprendizagem                                                                 | 115 |

## 3.3

## Notação científica 117

|                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Representação de números em notação científica                                           |     |
| Ordenação de números racionais representados na forma de dízima ou em notação científica |     |
| Operações com números escritos em notação científica                                     |     |
| Verificar a aprendizagem                                                                 | 122 |
| Síntese                                                                                  | 124 |
| Atividades globais                                                                       | 126 |
| Autoavaliação                                                                            | 130 |
| Estratégias para a resolução de problemas e jogos                                        | 132 |
| Investigar                                                                               | 134 |

## 4

## DÍZIMAS INFINITAS NÃO PERIÓDICAS E NÚMEROS REAIS

136



|                     |     |
|---------------------|-----|
| Atividades iniciais | 137 |
|---------------------|-----|

## 4.1

## Conjunto dos números reais 138

|                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Dízimas infinitas não periódicas e «pontos irracionais». Representação na reta numérica |     |
| Conjunto dos números reais                                                              |     |
| Números irracionais                                                                     |     |
| Verificar a aprendizagem                                                                | 145 |

## 4.2

## Operações com números reais 147

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| Propriedades                                                      |     |
| Adição e subtração                                                |     |
| Multiplicação e divisão                                           |     |
| Potenciação                                                       |     |
| Método geométrico para determinar o produto de dois números reais |     |
| Verificar a aprendizagem                                          | 151 |

## 4.3

## Relação de ordem em IR 155

|                                                |     |
|------------------------------------------------|-----|
| Comparar e ordenar números reais               |     |
| Verificar a aprendizagem                       | 158 |
| Hiperpágina (As aproximações do número $\pi$ ) | 160 |
| Síntese                                        | 162 |
| Atividades globais                             | 164 |
| Autoavaliação                                  | 168 |
| Retrato de um matemático Paul Erdős            | 170 |
| Problemas famosos                              | 171 |
| A irracionalidade de $\sqrt{2}$                |     |
| Investigar                                     | 172 |

|          |     |
|----------|-----|
| SOLUÇÕES | 174 |
|----------|-----|

|                     |     |
|---------------------|-----|
| FONTES FOTOGRÁFICAS | 191 |
|---------------------|-----|

# A linguagem matemática

## 1 Quando começaste a aprender Matemática?

A Matemática surge naturalmente. Ainda antes de entrares para a escola, deves ter começado por fazer comparações (menor/maior), ordenar (primeiro, segundo, terceiro, ...), reconhecer formas geométricas, contar, etc. Depois, já na escola, aprendeste a efetuar operações, completar sequências, usar frações, trabalhar com figuras planas e sólidos geométricos, recorrer à estatística, resolver equações, etc. Repara no caminho que já percorreste!

## 2 O que é para ti a Matemática?

• PARA MIM, A MATEMÁTICA É UMA LINGUAGEM CONHECIDA EM TODO O MUNDO. UM QUADRADO, POR EXEMPLO, TEM AS MESMAS PROPRIEDADES EM PORTUGAL OU NO JAPÃO.

• EM QUALQUER PAÍS, MESMO NÃO FALANDO A LÍNGUA, POSSO PERCEBER PREÇOS, DISTÂNCIAS E TEMPOS, PORQUE SÃO NÚMEROS. OS SÍMBOLOS MATEMÁTICOS TAMBÉM SÃO UNIVERSAIS, COMO, POR EXEMPLO,  $>$  (MAIOR) E  $<$  (MENOR).

• TENHO UM PRIMO QUE VIVE NOS ESTADOS UNIDOS. O QUE ELE ESTUDOU NO ANO PASSADO É MUITO PARECIDO COM O QUE EU ESTUDEI!



A MATEMÁTICA É UMA MANEIRA DE PENSAR. MUITAS VEZES, UTILIZO OS RACIOCÍNIOS QUE APRENDI NAS AULAS EM SITUAÇÕES QUE PARECEM NÃO TER NADA A VER.



CALCULO A ÁREA DO QUADRADO TODO E RETIRO A ÁREA DO QUADRADO PEQUENO (QUE ESTÁ EM CIMA).  
 $10 \times 10 - 2 \times 2 = 96$



SOFIA, PRECISO DE SABER RAPIDAMENTE O NÚMERO DE PESSOAS.

SÃO 12 FILAS DE 10 CADEIRAS E HÁ 6 LUGARES VAZIOS:  
 $12 \times 10 - 6 = 114$

SÃO 114 PESSOAS!





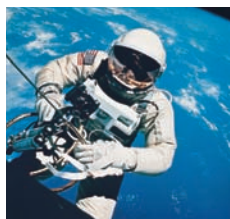
- A MATEMÁTICA É UMA «FERRAMENTA» QUE UTILIZO NO DIA A DIA.
- POR EXEMPLO, QUANDO FAÇO COMPRAS, GOSTO DE FAZER ESTIMATIVAS DO QUE VOU PAGAR, CALCULAR OS DESCONTOS NOS ARTIGOS EM SALDO, CONFIRMAR OS TROCOS, ETC.
- TER UM BOM CÁLCULO MENTAL PERMITE-ME MUITAS VEZES POUPAR DINHEIRO. PARA MIM, O CÁLCULO MENTAL É COMO UM DESPORTO: APRENDEM-SE NOVAS TÉCNICAS E É PRECISO ESTAR SEMPRE A TREINAR, MAS VALE A PENA!



- A MATEMÁTICA É A CIÊNCIA QUE ESTUDA OS NÚMEROS E AS FIGURAS GEOMÉTRICAS.
- COMO TENHO «QUEDA» PARA AS ARTES, GOSTO DE CONSTRUIR FIGURAS, RESPEITAR AS PROPORÇÕES, ESTUDAR PROPRIEDADES, DESCOBRIR SIMETRIAS E PADRÕES.
- GOSTO MUITO DE FAZER INVESTIGAÇÕES UTILIZANDO SOFTWARE DE GEOMETRIA. ATÉ COSTUMO PROCURAR ATIVIDADES DO MEU MANUAL PARA IR ALÉM DO QUE FAZEMOS NAS AULAS!



- PARA MIM, A MATEMÁTICA É A LINGUAGEM DA CIÊNCIA E DO PROGRESSO TECNOLÓGICO.
- É A CIÊNCIA QUE ESTÁ NA BASE DE OUTRAS CIÊNCIAS E SEM A QUAL OS AVANÇOS TECNOLÓGICOS TERIAM SIDO IMPOSSÍVEIS.
- A ESTATÍSTICA, POR EXEMPLO, É CADA VEZ MAIS IMPORTANTE NA ECONOMIA, NA BIOLOGIA, NA ASTRONOMIA, NA GEOGRAFIA, NAS CIÊNCIAS SOCIAIS, ETC.



E para ti, o que é a Matemática?

# Como estudar Matemática?

## 1 Mantém uma atitude positiva

A atitude certa é a de querer aprender. Seja fácil ou difícil, acredita sempre que tudo está ao teu alcance. Nem sempre uma atitude de vencedor é suficiente para ter sucesso, mas uma atitude negativa leva sempre ao insucesso. Mesmo quando sentes dificuldades, tem confiança!

## 2 Participa nas aulas

Existem muitas formas de participar: respondendo a uma questão do professor, pedindo a palavra para esclarecer uma dúvida, indo ao quadro, resolvendo uma tarefa, etc. Aproveita todas as oportunidades para mostrar ao teu professor que estás a participar na aula.

É importante saber participar corretamente e respeitar a opinião dos outros. Se o professor, ou um colega teu, já estiverem a falar, não interrompas: espera que terminem e fala a seguir.

Quando o professor faz uma pergunta, mas não tens ideia nenhuma da resposta, é preferível não intervires. Contudo, se pensas que a resposta pode estar correta — apesar de não teres a certeza —, debes arriscar e responder. No final da aula, podes perguntar ao professor se a tua participação foi boa ou se debes melhorar.



## 3 Está atento nas aulas e empenha-te

É difícil estar concentrado durante toda uma aula, por isso, tens de aprender a ter uma atenção especial nos momentos importantes (uma explicação por parte do professor, por exemplo) e manter uma atenção regular no resto da aula. Qualquer aula exige esforço, principalmente quando estás a resolver uma atividade sozinho. Por vezes, é necessário fazer várias tentativas até acertar, mas é assim que se aprende Matemática: é preciso ser persistente e nunca desistir!

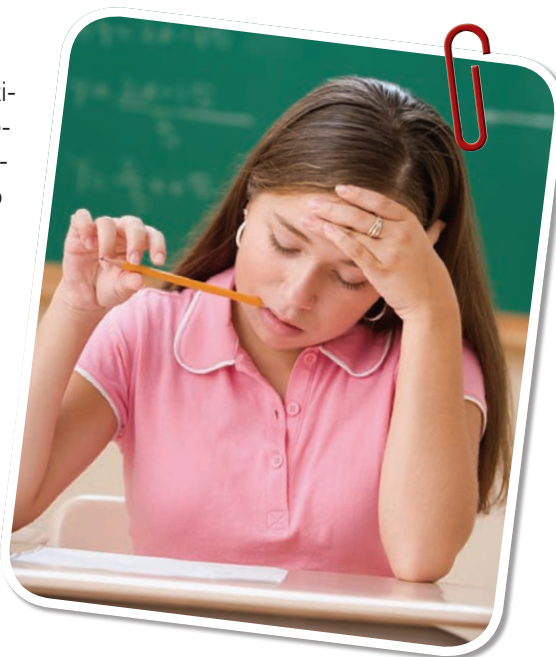
Quando te escapa alguma coisa, pergunta ao teu professor: não saias da aula antes de teres esclarecido todas as dúvidas.





#### 4 **Aprende com os erros**

É normal cometer erros, mas não é desejável repeti-los. Muitas vezes, em vez de apagar um erro, é preferível assinalá-lo (sublinhando a vermelho, por exemplo) e escrever a correção ao lado. Assim, o erro não fica esquecido e, da próxima vez, terás o cuidado particular de não te enganares novamente.



#### 5 **Sê organizado**

Quer tenhas um caderno ou um dossiê, tenta ser o mais organizado possível e ter sempre o material necessário. Durante a aula, destaca as frases e as fórmulas mais importantes (a utilização de cores pode ser uma boa ideia). Num caderno bem organizado encontrarás rapidamente qualquer informação quando precisares dela.

#### 6 **Estuda com regularidade**

Depois das aulas, nos dias em que tiveste Matemática, começa por rever o que aprendeste (podes também ler a matéria no teu manual). Se, na aula, sentiste dificuldade em alguma tarefa, tenta fazê-la de novo. Finalmente, se tiveres trabalhos de casa, resolve-os. Na véspera de uma aula de Matemática, relê a tua última aula, para estares preparado. Quando faltares a uma aula, pede a um colega para te emprestar o caderno. Copia e tenta perceber o que foi feito; se não conseguires entender, informa o teu professor para que este te possa ajudar.



#### 7 **Prepara-te bem para as avaliações**

Quando tiveres uma ficha de avaliação, começa a estudar alguns dias antes. Lê, mais uma vez, todas as lições, resolve algumas tarefas que já tenhas feito nas aulas (ou em casa) e, por fim, resolve alguns exercícios e problemas novos.



### Adição algébrica

Uma adição algébrica é uma expressão constituída por adições e subtrações. O seu resultado é uma **soma algébrica**.

$$\bullet \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{10}\right) - \left(+\frac{3}{2}\right) + (-1) =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{3}{2} - 1 = \text{Escrita simplificada}$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{1}{10} - \frac{15}{10} - \frac{10}{10} = \text{Reduzem-se as frações ao mesmo denominador}$$

$$= \frac{3}{10} - \frac{25}{10} =$$

$$= -\frac{22}{10} = -\frac{11}{5} \quad \text{Resultado na forma de fração irredutível}$$

$$\bullet \frac{1}{9} + \left(-\frac{2}{3} + 5\right) =$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{2}{3} + 5 = \text{Desembaraça-se de parênteses}$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{6}{9} + \frac{45}{9} = \text{Reduzem-se as frações ao mesmo denominador}$$

$$= \frac{40}{9} \quad \text{Resultado na forma de fração irredutível}$$

$$\bullet -3 - \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{4}\right) =$$

$$= -3 - \frac{1}{6} + \frac{5}{4} = \text{Desembaraça-se de parênteses}$$

$$= -\frac{36}{12} - \frac{2}{12} + \frac{15}{12} = \text{Reduzem-se as frações ao mesmo denominador}$$

$$= -\frac{23}{12} \quad \text{Resultado na forma de fração irredutível}$$

## ■ Multiplicação e divisão

Aplicam-se as regras dos sinais.

Regras dos sinais na multiplicação:

$$\begin{array}{ll} + \times + = + & \frac{5}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{5}{14} \\ - \times - = + & -\frac{4}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{15} \\ + \times - = - & \frac{1}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6} \\ - \times + = - & -4 \times \frac{2}{7} = -\frac{8}{7} \end{array}$$

Regras dos sinais na divisão:

$$\begin{array}{ll} + : + = + & 35 : 7 = 5 \\ - : - = + & -24 : (-6) = 4 \\ + : - = - & \frac{1}{3} : \left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{5}{21} \\ - : + = - & -\frac{2}{3} : 5 = -\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{2}{15} \end{array}$$

Dois números são **inversos** um do outro quando o respetivo produto for igual a 1.

Exemplo,  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{5}{3}$  são **inversos** um do outro porque  $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1$ .

## ■ Potências

- Uma potência de **base positiva** é sempre um número **positivo**:

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125.$$

Uma potência de **base negativa**:

— com **expoente par** é um número **positivo**:  $(-3)^2 = +3^2 = 9$ ;

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

— com **expoente ímpar** é um número **negativo**:  $(-10)^3 = -10^3 = -1000$ ;

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\left(\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$$

- Multiplicar e dividir potências com a mesma base:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n}$$

(em que  $a \in \mathbb{Q}$  e  $m, n \in \mathbb{N}$ )

Multiplicar e dividir potências com o mesmo expoente:

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m; \quad a^m : b^m = (a : b)^m \text{ (em que } a, b \in \mathbb{Q}, b \neq 0 \text{ e } m, n \in \mathbb{N})$$

Potência de potência:

$$(a^m)^n = a^{m \times n} \text{ (em que } a \in \mathbb{Q} \text{ e } m, n \in \mathbb{N})$$

- Elevar um número racional a uma potência:

$$a^m = \overbrace{a^{m \times m \times \dots \times m}}^{n \text{ vezes}} \text{ (em que } a \in \mathbb{Q} \text{ e } m, n \in \mathbb{N})$$

## ■ Prioridades das operações

Operações com potências → Multiplicação e divisão → Adição e subtração

Se a expressão tiver parênteses, deve começar-se por calcular as operações dentro de parênteses, respeitando as prioridades.

## ■ Raiz quadrada de quadrados perfeitos e raiz cúbica de cubos perfeitos

**Quadrados perfeitos** (0, 1, 4, 9, 16, 25, ...) são números que podem ser expressos como quadrados de números inteiros não negativos.

A **raiz quadrada** de um quadrado perfeito não nulo (ou de um quociente de quadrados perfeitos não nulos) é o **número positivo**  $y$ , cujo quadrado é  $x$ . A raiz quadrada de zero é zero.

Escreve-se:  $\sqrt{x} = y$

- $\sqrt{25} = 5$ , porque  $5^2 = 5 \times 5 = 25$
- $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ , porque  $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$

Se  $a$  é não negativo  $\sqrt{a^2} = a$ ; se  $a$  é um quadrado perfeito  $(\sqrt{a})^2 = a$ :

$$\sqrt{6^2} = 6 \quad ; \quad (\sqrt{9})^2 = 9$$

A **raiz cúbica** de um cubo perfeito (ou de um quociente de cubos perfeitos ou simétrico)  $x$  é o número  $y$  cujo cubo é  $x$ .

Escreve-se:  $\sqrt[3]{x} = y$

- $\sqrt[3]{8} = 2$ , porque  $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ .
- $\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3}$ , porque  $\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{64}{27}$ .

Temos  $\sqrt[3]{a^3} = a$ ; se  $a$  é um cubo perfeito  $(\sqrt[3]{a})^3 = a$

- $\sqrt[3]{5^3} = 5$
- $(\sqrt[3]{8})^3 = 8$

| Raiz quadrada e raiz cúbica de um produto                                                                                                                                                | Raiz quadrada e raiz cúbica de um quociente                                                                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"><li>• <math>\sqrt{q \times r} = \sqrt{q} \times \sqrt{r}</math></li><li>• <math>\sqrt[3]{q \times r} = \sqrt[3]{q} \times \sqrt[3]{r}</math></li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>• <math>\sqrt{\frac{q}{r}} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}} \quad (r \neq 0)</math></li><li>• <math>\sqrt[3]{\frac{q}{r}} = \frac{\sqrt[3]{q}}{\sqrt[3]{r}} \quad (r \neq 0)</math></li></ul> |



## FUNÇÕES

### ■ Conceito de função

Dá-se o nome de **função** ou aplicação,  $f$ , a toda a correspondência entre um conjunto  $A$  e um conjunto  $B$  que a cada elemento  $x$  do conjunto  $A$  faz corresponder **um, e um só**, elemento  $y$  do conjunto  $B$ .



Simbolicamente, representa-se por  $f: A \rightarrow B$

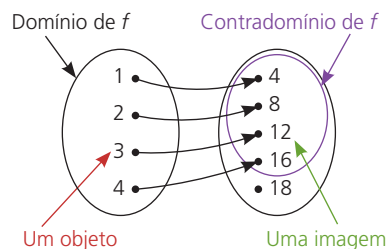
O conjunto  $A$  denomina-se **domínio da função** e representa-se por  $D_f$ . Os elementos do domínio chamam-se **objetos**. O conjunto  $B$  designa-se por **conjunto de chegada**.

Os elementos do conjunto  $B$  que são imagens por  $f$  dos elementos de  $A$  formam o **contradomínio da função**, que é representado por  $D'_f$ ,  $CD_f$  ou  $f(A)$ . Os elementos do contradomínio designam-se por **imagens**.

Uma função  $f: A \rightarrow B$  é uma **função de variável numérica** se  $A$  é um conjunto de números e diz-se uma **função numérica** se  $B$  é um conjunto de números.

- $D_f = \{1, 2, 3, 4\}$ ; os objetos são 1, 2, 3 e 4.
- $D'_f = \{4, 8, 12, 16\}$ ; as imagens são 4, 8, 12 e 16.
- Conjunto de chegada =  $\{4, 8, 12, 16, 18\}$ .

**No exemplo ao lado**,  $f(3) = 12$  (lê-se « $f$  de 3 é igual a 12» e significa que a imagem do objeto 3 é 12).



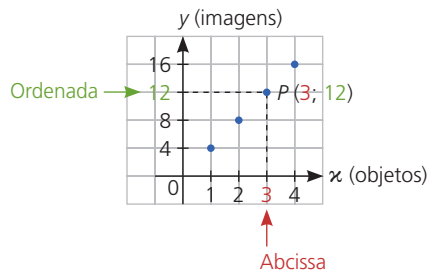
## ■ Operações com funções

Dadas as funções  $f: A \rightarrow \mathbb{Q}$  e  $g: A \rightarrow \mathbb{Q}$ , é possível definir  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \times g$ ,  $\lambda f$  e  $f^n$  ( $\lambda \in \mathbb{Q}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) como sendo as funções de domínio  $A$  e conjunto de chegada  $\mathbb{Q}$ , tais que para qualquer  $x \in A$ :

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
- $\lambda f(x) = \lambda \times f(x)$
- $(f^n)(x) = [f(x)]^n$

## ■ Representação gráfica de funções

- Num referencial cartesiano, um ponto é localizado por duas **coordenadas**: uma **abscissa** (que se lê no eixo horizontal) e uma **ordenada** (que se lê no eixo vertical).
- A **variável independente**,  $x$ , representa cada **objeto** do domínio.
- A **variável dependente**,  $y$ , representa a **imagem** do objeto  $x$ .
- No eixo das abscissas colocam-se os valores que a variável independente toma.
- No eixo das ordenadas colocam-se os valores que a variável dependente toma.
- A função do exemplo anterior pode ser representada por um gráfico; o ponto  $P(3; 12)$  significa que o objeto 3 tem por imagem 12.



## ■ Função constante

- Uma função  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  diz-se uma **função constante** se existe um número racional,  $a$ , tal que  $f(x) = a$ , para todo o  $x \in \mathbb{Q}$ .
- Todos os pontos do seu gráfico pertencem a uma reta horizontal, ou seja, paralela ao eixo das abscissas.

## ■ Função linear

- Uma função  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  diz-se uma **função linear** se existe um número racional,  $a$ , tal que  $f(x) = ax$ , para todo o  $x \in \mathbb{Q}$ . Diz-se que  $a$  é o **coeficiente da função linear  $f$** .  
 $f(x) = ax$  é a **forma canónica** da função linear.
- O **produto** de uma função linear por uma constante é uma função linear.
- A **soma e a diferença** de duas funções lineares são funções lineares.

## ■ Função afim

- Uma função  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  diz-se uma **função afim** se existem números racionais,  $a$  e  $b$ , tais que  $f(x) = ax + b$ , para todo o  $x \in \mathbb{Q}$ . Diz-se que  $a$  é o **coeficiente de  $x$**  e que  $b$  é o **termo independente**.  
 $f(x) = ax + b$  é a forma **canónica da função afim**.
- Qualquer **função afim** é a **soma de uma função linear com uma constante**.
- O **produto** de uma constante por uma função afim é uma função afim.
- A **soma e a diferença** de duas funções afins são funções afins.

## ■ Proporcionalidade direta

- Duas **grandezas**,  $x$  e  $y$ , são **diretamente proporcionais** quando a razão entre os valores de  $y$  e os valores correspondentes de  $x$  é constante.

No exemplo, a constante de proporcionalidade direta entre  $y$  e  $x$  é 3 (divide-se  $y$  por  $x$ ).

|     |   |   |   |    |
|-----|---|---|---|----|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4  |
| $y$ | 3 | 6 | 9 | 12 |

$$\frac{3}{1} = 3; \frac{6}{2} = 3; \frac{9}{3} = 3; \frac{12}{4} = 3$$

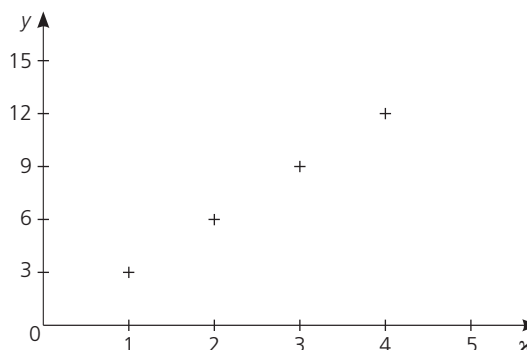
$x$  e  $y$  são diretamente proporcionais.

## ■ Função de proporcionalidade direta

- A **expressão algébrica** de uma função de proporcionalidade direta é  $y = kx$  em que  $k$  é a constante de proporcionalidade direta ( $k$  é positivo).

No exemplo anterior, a expressão é  $y = 3x$ .

- Numa situação de proporcionalidade direta, os pontos do gráfico estão numa **reta que passa pela origem do referencial**.



### ■ Sequências

- Dado um número natural  $p$ , uma **sequência de  $p$  elementos** é uma função de domínio  $\{1, 2, 3, \dots, p\}$ .
- Cada imagem pela função é denominada **termo da sequência** (1.º termo, 2.º termo, ..., último termo).

Exemplo: 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... 297, 300 é uma sequência.

- A **lei de formação** é uma regra que permite passar de um termo para o termo seguinte. No exemplo anterior, a lei de formação é «adicionar 3 ao termo anterior».
- O **termo geral** de uma sequência é uma expressão com uma variável  $n$  que permite obter a sequência substituindo a variável  $n$  por 1, 2, 3, ...,  $p$ , em que  $p$  é a ordem do último termo da sequência.

Por exemplo, a sequência 3, 6, 9, 12, 15, 18, ..., 297, 300 (múltiplos positivos de três) tem por termo geral  $3n$  (ou seja,  $3 \times n$ ), com  $n \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ .

Conhecendo o termo geral, pode obter-se o valor de qualquer termo da sequência substituindo a letra  $n$  pela ordem do termo que se quer.

Por exemplo, o 8.º termo da sequência de termo geral  $3n$  é igual a  $3 \times 8 = 24$ .

### ■ Sucessão

- Uma **sucessão** é uma função de domínio  $\mathbb{N}$ , em que cada imagem é designada por termo da sucessão.

Exemplo: A sucessão dos múltiplos naturais de três: 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...

- O **termo geral de uma sucessão** é uma expressão com uma variável que permite obter, para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ , o termo de ordem  $k$ , substituindo a variável por  $k$ .

O termo geral de uma sucessão representa-se por  $u_n$ .

Por exemplo, a sucessão 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... pode ser definida como uma função  $u$  que a cada número natural  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) faz corresponder  $3n$ . O seu termo geral é  $3n$ .

- Tanto a sequência como a sucessão anteriores têm o mesmo termo geral, diferem apenas no domínio.

### Da linha poligonal ao polígono

- Uma **linha poligonal** é uma sequência de segmentos de reta designados por lados, tal que pares de lados consecutivos partilham um extremo, lados que se intersectam não são colineares e não há mais do que dois lados partilhando um extremo. Designam-se por **vértices** os extremos comuns a dois lados.

- Uma **linha poligonal diz-se fechada** se as extremidades coincidirem.

- Uma **linha poligonal diz-se simples** quando os únicos pontos comuns a dois lados são vértices.

Designa-se por **polígono simples**, ou apenas por **polígono**, a união de uma linha poligonal fechada simples com a sua parte interna.

- Um polígono é **convexo** se qualquer segmento de reta que une dois pontos do polígono está nele contido.

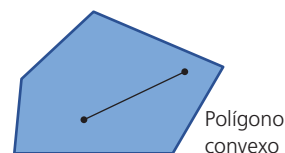
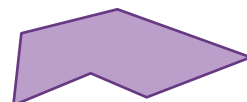
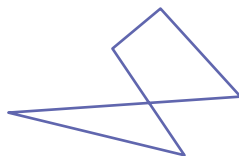
Um polígono que não é convexo designa-se por **côncavo**.

- **Ângulo interno de um polígono** é um ângulo de vértice coincidente com um vértice do polígono, de lados contendo os lados do polígono que se encontram nesse vértice, tal que o setor circular determinado por esse ângulo está contido no polígono.

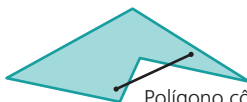
- A **soma das medidas das amplitudes**, em graus, **dos respectivos ângulos internos** de um polígono convexo é igual a  $S_i = (n - 2) \times 180^\circ$ , em que  $n$  representa o número de lados do polígono.

- **Ângulo externo de um polígono convexo** é um ângulo suplementar e adjacente a um ângulo interno do polígono.

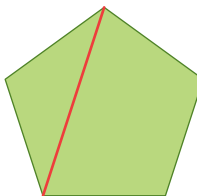
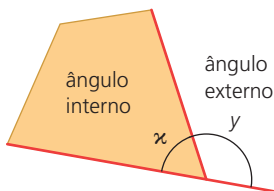
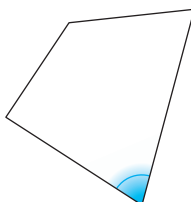
- Diagonal de um polígono é qualquer segmento de reta que une dois vértices não consecutivos.



Polígono convexo



Polígono côncavo

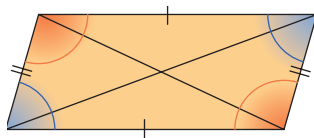




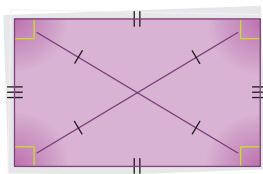
## ■ Quadriláteros

A soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero é  $360^\circ$ .

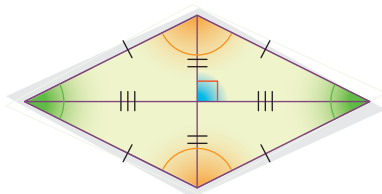
- Um quadrilátero é um paralelogramo, quando, e apenas quando, as diagonais se bissejam.



- Um paralelogramo é um retângulo, quando, e apenas quando, as diagonais são iguais.



- Um paralelogramo é um losango, quando, e apenas quando, as diagonais são perpendiculares.

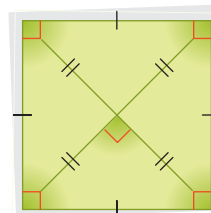


- Como o quadrado é losango e retângulo, as diagonais de um quadrado bissejam-se, são iguais e perpendiculares.

Um papagaio é um quadrilátero com dois pares de lados consecutivos iguais.

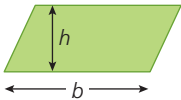
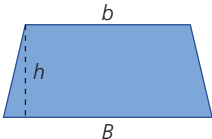
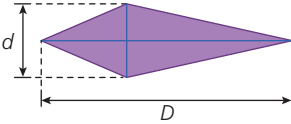
Num papagaio, as diagonais são perpendiculares.

Um losango é um papagaio.



- Um trapézio é um quadrilátero simples com dois lados paralelos. Um trapézio com bases iguais é um paralelogramo.

## ■ Fórmulas de áreas de quadriláteros

| Paralelogramo                                                                       | Trapézio                                                                            | Papagaio                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |
| $\text{Área}_{\square} = b \times h$                                                | $\text{Área}_{\square} = \frac{B+b}{2} \times h$                                    | $\text{Área}_{\diamond} = \frac{D \times d}{2}$                                      |

### ■ Recolha e classificação de dados

- Num **censo**, estuda-se toda a **população**. Numa **sondagem**, estuda-se uma **amostra**.

#### Tipos de variáveis estatísticas:

- Quantitativas** ou **numéricas**: quando estão associadas a uma característica suscetível de ser medida ou contada (por exemplo: idade em anos, número de irmãos, peso, altura)
- Qualitativas**: no caso contrário (por exemplo: cor dos olhos, animal de estimação, código postal)

### ■ Organização e representação

- Para organizar os dados, constroem-se **tabelas de frequências absolutas** (número de dados que pertencem a uma categoria ou classe) e de **frequências relativas** (quociente entre a frequência absoluta e o número total de dados).

Exemplo:

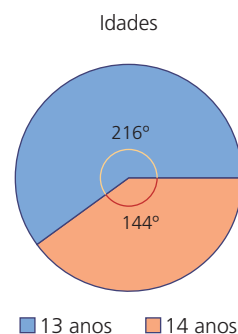
| Idade | Frequência absoluta | Frequência relativa         |
|-------|---------------------|-----------------------------|
| 13    | 6                   | $\frac{6}{10} = 0,6$ ou 60% |
| 14    | 4                   | $\frac{4}{10} = 0,4$ ou 40% |
| Total | 10                  | 1 ou 100%                   |

- Exemplos de gráficos:

**Gráfico de barras:** deve ter um título e uma legenda em cada um dos eixos; as barras têm a mesma largura, são separadas pelo mesmo espaço e o seu comprimento é proporcional à frequência que representam.



**Gráfico circular:** cada setor corresponde à frequência da categoria ou classe a que se refere e a sua amplitude é diretamente proporcional à frequência da categoria ou classe a que se refere.



## ■ Interpretação: medidas de localização central

- A **moda** é a classe ou categoria com maior frequência absoluta.
- A **média** de um conjunto de dados numéricos é o quociente entre a soma de todos os dados e o número total de dados.
- A **mediana** é o valor que divide ao meio os dados da amostra, estando estes ordenados. Se o número de dados é ímpar, a mediana é o valor central; se o número de dados é par, a mediana é a média dos dois valores centrais.

A mediana divide os dados em dois grupos. Pelo menos 50 % dos dados são menores ou iguais à mediana e pelo menos 50 % dos dados são superiores ou iguais à mediana.

Exemplo:

Considera os dados seguintes: 6, 10, 8, 9, 10, 11

A moda deste conjunto de dados é 10.

A média deste conjunto de dados é 9, porque  $\frac{6 + 8 + 9 + 2 \times 10 + 11}{6} = \frac{54}{6} = 9$ .

A mediana deste conjunto de dados é 9,5, porque ordenando a amostra obtém-se 6, 8, 9, 10, 10, 11 e a mediana é  $\frac{9 + 10}{2} = \frac{19}{2} = 9,5$ .

Unidade

6

## EQUAÇÕES

### ■ Noção de equação

- Uma **equação** com uma incógnita é uma expressão da forma  $f(x) = g(x)$ , em que  $f$  e  $g$  são funções.

Diz-se que  $f(x)$  é o primeiro membro da equação e que  $g(x)$  é o segundo membro.

Por exemplo,  $3x + 1 = x - 5$ . As parcelas  $3x$ ,  $1$ ,  $x$  e  $-5$  são os **termos**.

1.º membro    2.º membro

- A letra (neste caso,  $x$ ) é a **incógnita**. O objetivo é descobrir o seu valor.
- Uma **equação linear** é uma expressão da forma  $f(x) = g(x)$ , em que  $f$  e  $g$  são funções afins.

### ■ Resolução de equações

- Resolver uma equação é encontrar o valor ou os valores que tornam a igualdade verdadeira. A cada um desses valores chama-se **solução (ou raiz)** da equação. O conjunto das soluções designa-se por conjunto-solução e representa-se por C. S. ou S.
- Duas **equações são equivalentes** se têm as mesmas soluções. Escreve-se o símbolo  $\Leftrightarrow$  entre duas equações equivalentes.
- Para resolver equações recorreremos a algumas regras:

**Regra da adição:** pode mudar-se um termo de um membro para o outro trocando-lhe o sinal.

$$x + 7 = 5 \Leftrightarrow x = 5 - 7 \Leftrightarrow x = -2 \quad \text{C. S.} = \{-2\}$$

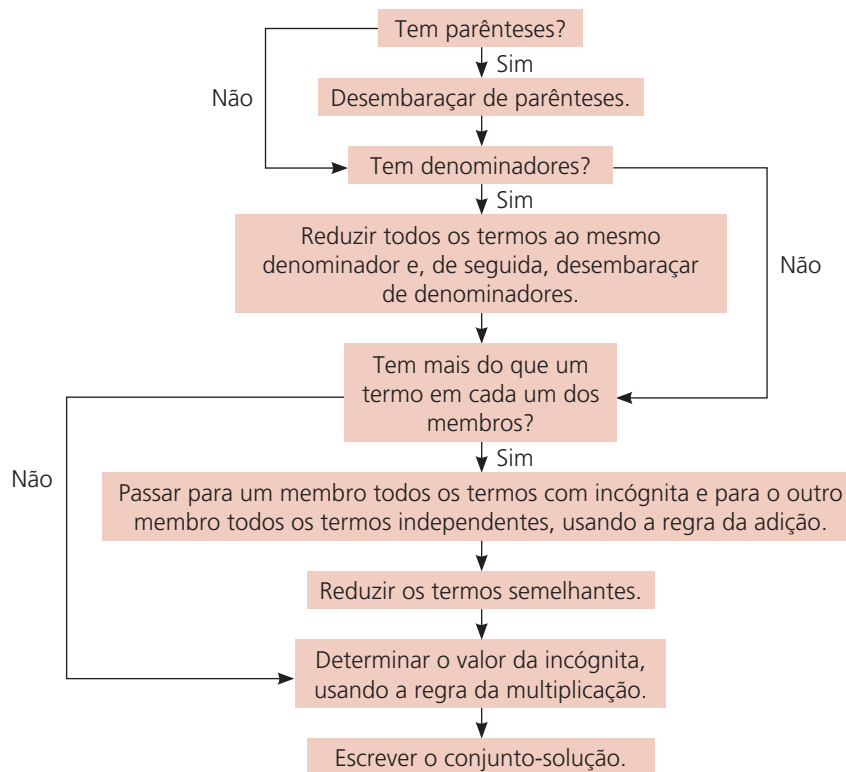
$$x - 8 = 2 \Leftrightarrow x = 2 + 8 \Leftrightarrow x = 10 \quad \text{C. S.} = \{10\}$$

**Regra da multiplicação:** pode multiplicar-se ou dividir-se ambos os membros de uma equação pelo mesmo número (diferente de zero).

$$-3x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{-3} \Leftrightarrow x = -4 \quad \text{C. S.} = \{-4\}$$

$$\frac{x}{5} = 6 \Leftrightarrow x = 6 \times 5 \Leftrightarrow x = 30 \quad \text{C. S.} = \{30\}$$

- Numa equação, podem **trocar-se os membros**:  
 $3 = x - 7 \Leftrightarrow x - 7 = 3$ .
- Numa equação, podem **mudar-se todos os sinais**:  $-x = -6 \Leftrightarrow x = 6$ .
- **Passos a seguir na resolução de uma equação:**



Exemplo 1:

1.º Desembaraçar de parênteses:

$$2(3x - 5) = 4 - (x - 7) \Leftrightarrow 6x - 10 = 4 - x + 7$$

Mudam os sinais

2.º Agrupar os termos usando a regra da adição: passam-se todos os termos com incógnita para o 1.º membro (por exemplo) e os termos independentes para o outro membro:

$$\underbrace{6x + x}_{\text{Termos com incógnita}} = \underbrace{4 + 7 + 10}_{\text{Termos independentes}}$$

3.º Reduzir os termos semelhantes:  $7x = 21$

4.º Aplicar a regra da multiplicação:  $x = \frac{21}{7}$



5.º Indicar a solução da equação:  $x = 3$  C. S. = {3}

**Nota:** Para verificar que 3 é solução da equação, **substitui-se** a incógnita por 3 na equação inicial:  
 $2(3 \times 3 - 5) = 4 - (3 - 7) \Leftrightarrow 2(9 - 5) = 4 - (-4) \Leftrightarrow 8 = 8$ , é uma igualdade verdadeira.

Exemplo 2:

$$\frac{2(x-1)}{3} = \frac{3}{2} - \frac{x+1}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-2}{3} = \frac{3}{2} - \frac{x+1}{6} \Leftrightarrow \text{Desembaraçar de parênteses}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-4}{6} = \frac{9}{6} - \frac{x+1}{6} \Leftrightarrow \text{Reduzir todos os termos ao mesmo denominador}$$

$$\Leftrightarrow 4x-4 = 9-x-1 \Leftrightarrow \text{Desembaraçar de denominadores}$$

$$\Leftrightarrow 4x+x = 9-1+4 \Leftrightarrow \text{Isolar os termos com incógnita num dos membros}$$

$$\Leftrightarrow 5x = 12 \Leftrightarrow \text{Reduzir os termos semelhantes}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12}{5} \Leftrightarrow \text{Determinar o valor da incógnita}$$

$$\text{C. S.} = \left\{ \frac{12}{5} \right\} \Leftrightarrow \text{Indicar o conjunto-solução}$$

## ■ Classificação de equações

- Uma equação que tem apenas uma solução é **possível e determinada**.

$$2 - (x+1) = 7 \Leftrightarrow 2 - x - 1 = 7 \Leftrightarrow -x = 7 - 2 + 1 \Leftrightarrow -x = 6 \Leftrightarrow x = -6$$

$$\text{C. S.} = \{-6\}$$

- Uma equação que tem mais do que uma solução diz-se **possível e indeterminada**.

$$3x + 6 = 3(2+x) \Leftrightarrow 3x + 6 = 6 + 3x \Leftrightarrow 3x - 3x = 6 - 6 \Leftrightarrow 0x = 0$$

Todos os números são soluções, porque qualquer número multiplicado por zero dá zero.

- Uma equação que não tem solução é uma equação **impossível**.

$$2x - 3 = 2x - 5 \Leftrightarrow 2x - 2x = -5 + 3 \Leftrightarrow 0x = -2$$

$$\text{C. S.} = \emptyset$$

Não existe qualquer solução porque nenhum número multiplicado por zero dá -2.

## ■ Resolução de problemas

As equações servem essencialmente para resolver problemas.

Na resolução de um problema seguem-se os passos seguintes:

- 1.º Identificar a incógnita;
- 2.º Traduzir o problema por uma equação;
- 3.º Resolver a equação;
- 4.º Verificar se a solução da equação é adequada ao problema e dar a resposta.

### Figuras semelhantes

- Duas figuras são **semelhantes** quando existe uma correspondência um a um entre os respectivos pontos tal que as distâncias entre pares de pontos correspondentes são diretamente proporcionais. Uma tal correspondência denomina-se **semelhança**.

A constante de proporcionalidade denomina-se **razão de semelhança** e representa-se por  $r$ .

Exemplo:



Considere-se a figura A como a figura original e as restantes obtidas a partir da figura A.

A figura C é uma **ampliação** da figura A.

Numa **ampliação**, a razão de semelhança é maior do que 1.

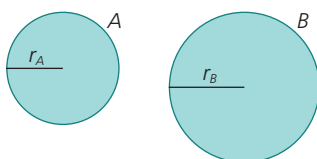
A figura D é uma **redução** da figura A.

Numa **redução**, a razão de semelhança é menor do que 1.

Se a razão de semelhança for igual a 1, estamos perante uma **isometria**.

A figura B e a figura A são **congruentes** ou **isométricas**.

- Dois quaisquer círculos A e B são semelhantes e a razão de qualquer semelhança que transforme A em B é igual ao quociente dos respectivos raios: a razão de semelhança é  $\frac{r_B}{r_A}$ .

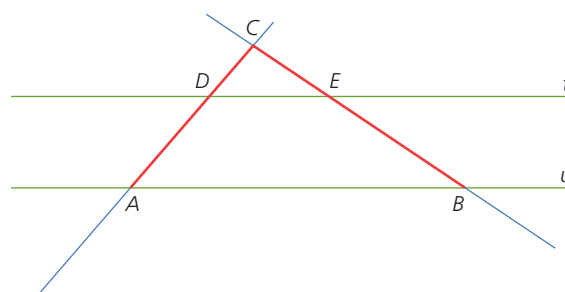


### Teorema de Tales e recíproco

#### Teorema de Tales

Dadas duas retas concorrentes, se traçarmos retas paralelas  $t$  e  $u$  que intersectam as retas concorrentes, então, os segmentos nelas determinados têm comprimentos proporcionais:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$$



#### Recíproco do Teorema de Tales

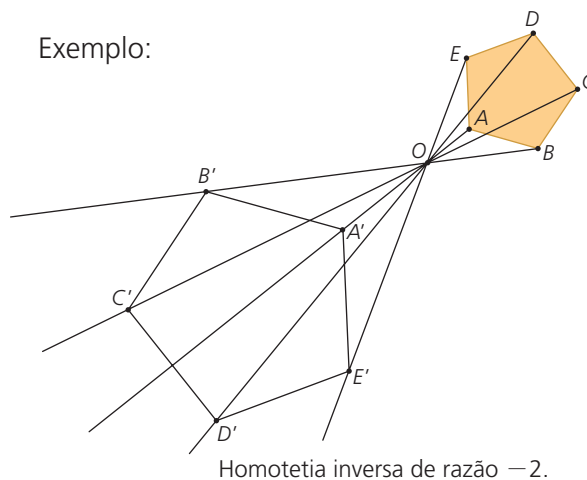
Sejam  $r$  e  $s$  duas retas que se intersectam no ponto C e sejam  $t$  e  $u$  duas retas que intersectam as retas  $r$  e  $s$  nos pontos D, A, E e B, respetivamente.

Se  $\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$ , então,  $t$  é paralela a  $u$ .

## ■ Método da homotetia

- Dado um ponto  $O$  e um número racional positivo  $r$ , a **homotetia de centro  $O$  e razão  $r$**  ou **homotetia direta** é a correspondência que a um ponto  $M$  associa o ponto  $M'$  da semirreta  $\overrightarrow{OM}$  tal que  $\overline{OM'} = r \times \overline{OM}$ .
- Dado um ponto  $O$  e um número racional negativo  $r$ , a **homotetia de centro  $O$  e razão  $r$**  ou **homotetia inversa** é a correspondência que a um ponto  $M$  associa o ponto  $M'$  da semirreta oposta a  $\overrightarrow{OM}$  tal que  $\overline{OM'} = -r \times \overline{OM}$ .
- Duas figuras homotéticas são semelhantes e a razão de semelhança é igual ao módulo da razão da homotetia.

Exemplo:



Homotetia inversa de razão  $-2$ .

## ■ Critérios de semelhança de triângulos

Para provar que dois triângulos são semelhantes, aplica-se um dos **três critérios**:

- Critério **AA**: dois triângulos são semelhantes se há uma correspondência entre os ângulos de um e outro de modo que dois ângulos de um são iguais, respectivamente, aos que lhes correspondem no outro.
- Critério **LLL**: dois triângulos são semelhantes se há uma correspondência entre os lados de um e outro de modo que os lados de um são diretamente proporcionais aos lados correspondentes do outro.
- Critério **LAL**: dois triângulos são semelhantes se há uma correspondência entre os lados de um e outro de modo que dois lados de um são diretamente proporcionais, respectivamente, aos que lhes correspondem no outro, e o ângulo desses dois lados é igual ao ângulo dos seus correspondentes.

## ■ Propriedades de figuras semelhantes

Considera duas figuras semelhantes  $A$  e  $B$ . O perímetro da segunda é igual ao perímetro da primeira multiplicado pela razão de semelhança que transforma a primeira na segunda:  $P_B = r \times P_A$ .

Dadas duas figuras semelhantes  $A$  e  $B$ , a medida da área da segunda é igual à medida da área da primeira multiplicada pelo quadrado da razão de semelhança que transforma a primeira na segunda:  $A_B = r^2 \times A_A$ .

## ■ Segmentos de retas comensuráveis e incommensuráveis

Dois segmentos de reta dizem-se **comensuráveis** quando existe uma unidade de comprimento tal que a medida de ambos é expressa em números inteiros. Caso contrário, dizem-se **incommensuráveis**.

Dois segmentos de reta são comensuráveis quando (e apenas quando), tomando um deles para unidade de comprimento, existe um número racional positivo  $n$ , tal que a medida do outro é igual a  $n$ .

A hipotenusa e um cateto de um triângulo retângulo isósceles são incommensuráveis.

## FICHA DE DIAGNÓSTICO

- Identifica claramente, na tua folha de respostas, os números dos itens a que respondes. Apresenta uma única resposta para cada item.
- A ficha inclui três itens de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correta. Não apresentes cálculos nem justificações.

Págs. 10 e 11

- 1** Calcula, apresentando cada passo do cálculo:

**a)**  $\frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{9}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)$

**c)**  $\frac{4 - 8^2}{-2}$

**b)**  $\frac{2}{7} - \frac{3}{5} \times \frac{5}{3} + 1$

**d)**  $\sqrt{36} - \sqrt[3]{1000}$

Pág. 11

- 2** O valor da potência  $(-5)^{300}$  é positivo ou negativo? Justifica a tua resposta.

Pág. 15

- 3** Observa a sequência de figuras.



**3.1** Quantas estrelas são necessárias para fazer a 4.<sup>a</sup> figura?

**3.2** O número de estrelas em cada figura forma uma sequência numérica. Qual é a lei de formação da sequência?

**3.3** Quantas estrelas são necessárias para construir a figura número  $n$  desta sequência?

Pág. 15

- 4** Dada a sucessão de termo geral  $u_n = 2n - 7$ .

**4.1** Determina o 6.<sup>o</sup> termo da sucessão.

**4.2** Averigua se 50 é termo da sucessão.

Pág. 15

- 5** A Joana esteve na Feira de São Mateus, em Viseu, onde reparou num carrossel que deu 15 voltas completas em 3 minutos, sempre à mesma velocidade. Quantas voltas completas tinha dado ao fim de 2 minutos? Escolhe a opção correta.

**A.** 10

**B.** 11

**C.** 12

**D.** 13

Págs. 12, 13 e 14

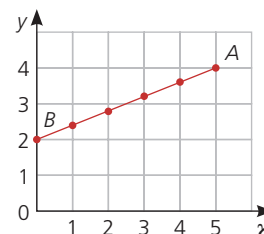
- 6** Observa o gráfico apresentado à direita.

**6.1** Indica as coordenadas dos pontos:

**a)** A

**b)** B

**6.2** Por que razão o gráfico não representa uma função de proporcionalidade direta?



**7** Resolve cada uma das equações e apresenta o conjunto-solução.

**a)**  $2x - 9 = 8x + 15$  **c)**  $\frac{2x+7}{5} = -4\left(x - \frac{1}{4}\right)$

**b)**  $3(2x - 6) = 7x + 2$

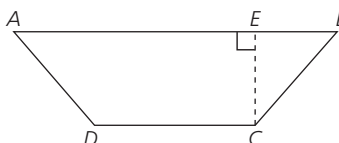
**8** Uma loja de animais tem 6 cães, 10 gatos, 18 pássaros e 26 peixes. Qual é a percentagem de pássaros na loja? Escolhe a opção correta.

- A.** 3% **C.** 30%  
**B.** 18% **D.** 60%

**9** Durante uma manhã, um grupo de cinco amigos esteve a jogar futebol. Um deles lesionou-se e teve de se ir embora após 15 minutos, mas os outros ficaram a jogar. Cada um dos cinco amigos jogou, em média, 59 minutos. Qual foi o tempo de jogo de cada um deles?

**10** O trapézio da figura é isósceles. Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 20$  cm
- $\overline{CD} = \frac{3}{5} \overline{AB}$
- $\overline{CE} = \frac{1}{4}(\overline{AB} + \overline{CD})$



**10.1** Prova que a área do trapézio é  $128 \text{ cm}^2$ .

**10.2** Determina o comprimento de um retângulo equivalente ao trapézio, sabendo que a largura do retângulo é 8 cm.

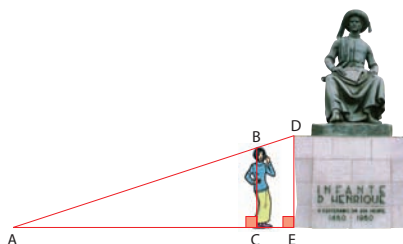
**11** Qual dos seguintes quadriláteros tem diagonais perpendiculares? Escolhe a opção correta.

- A.** Trapézio **C.** Retângulo (não quadrado)  
**B.** Paralelogramo **D.** Losango

**12** Na figura ao lado, estão representados dois triângulos retângulos,  $[ABC]$  e  $[ADE]$ .

Sabe-se ainda que:

- $\overline{BC} = 1,6$  m
- $\overline{AC} = 4,8$  m
- $\overline{CE} = 0,6$  m



**12.1** Prova que os triângulos  $[ABC]$  e  $[ADE]$  são semelhantes.

**12.2** Determina o comprimento, em metros, de  $[DE]$ .

#### GRELHA DE AVALIAÇÃO

| Exercício                     | 1  | 2 | 3  | 4 | 5 | 6.1 | 6.2 | 7  | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-------------------------------|----|---|----|---|---|-----|-----|----|---|---|----|----|----|
| Cotação <sup>1</sup> (pontos) | 12 | 4 | 12 | 4 | 4 | 8   | 4   | 18 | 4 | 8 | 8  | 4  | 10 |

<sup>1</sup> Para saberes a cotação de cada alínea, basta dividires a cotação do exercício pelo número de alíneas.

Págs. 19, 20 e 21

Pág. 18

Pág. 19

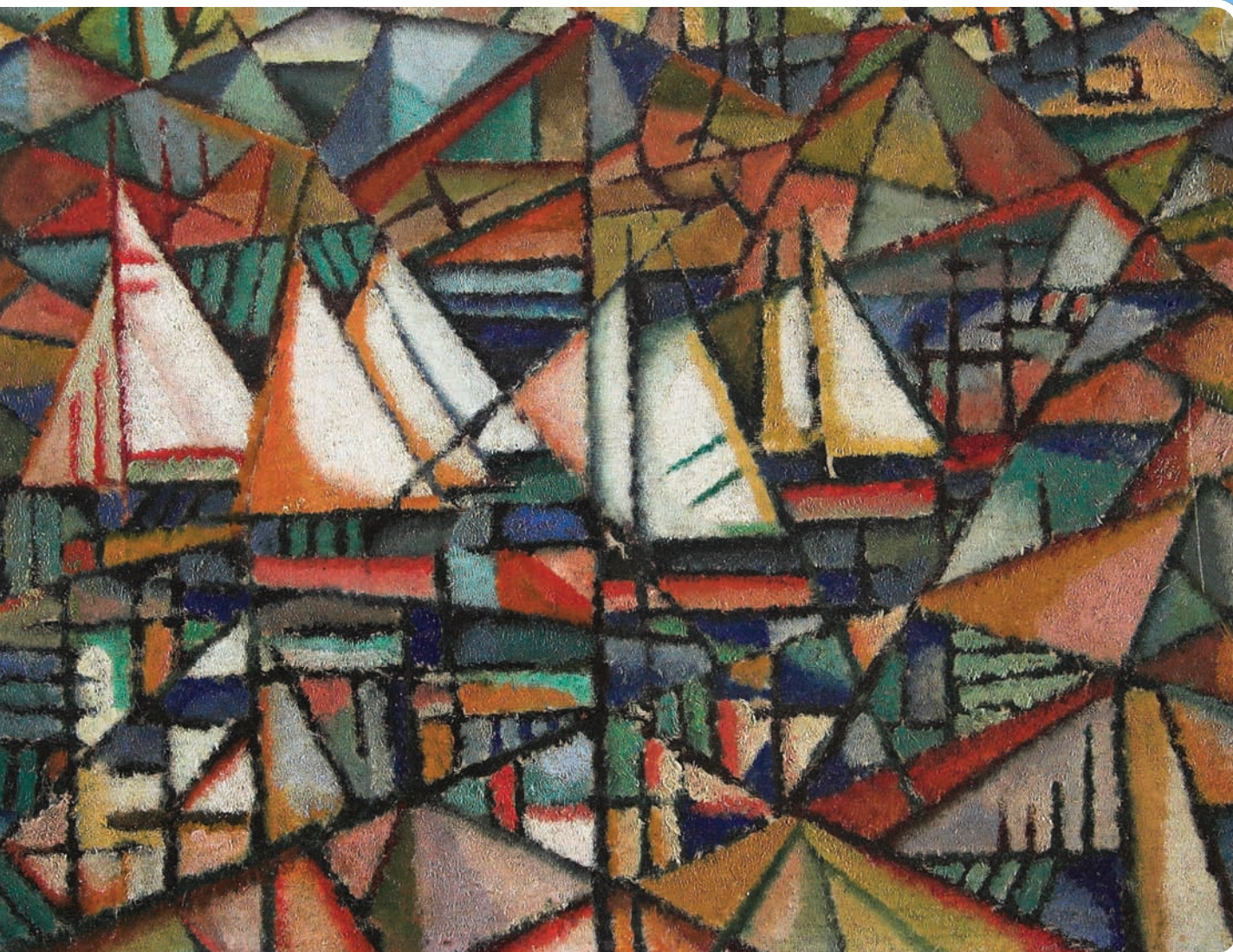
Pág. 17

Pág. 17

Pág. 23



## TEOREMA DE PITÁGORAS



Atividades iniciais ..... 27

## 1.1

**Decomposição de um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa**

28

Decomposição de um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa

Verificar a aprendizagem ..... 30

## 1.2

**Teorema de Pitágoras**

32

Teorema de Pitágoras — Demonstração

Determinar o comprimento da hipotenusa

Verificar a aprendizagem ..... 34

## 1.3

**Teorema de Pitágoras (continuação)**

36

Determinar o comprimento de um cateto

Recíproco do Teorema de Pitágoras

Verificar a aprendizagem ..... 39

Hiperpágina (A vida de Pitágoras) ..... 42

Síntese ..... 44

Atividades globais ..... 46

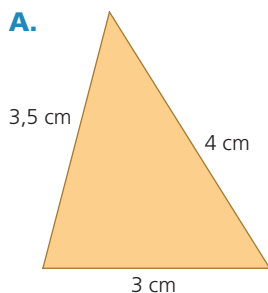
Autoavaliação ..... 48

Investigar ..... 50

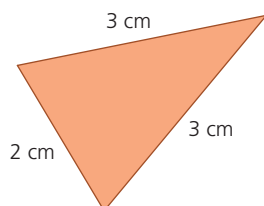
## Atividades iniciais

- 1 Classifica os triângulos que se seguem quanto aos lados e quanto aos ângulos.

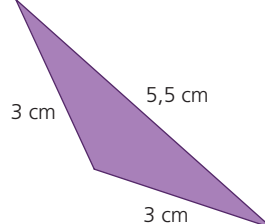
A.



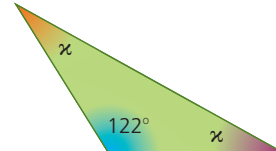
C.



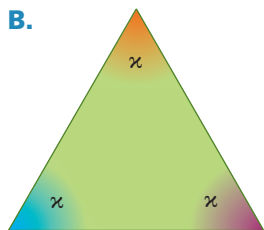
E.



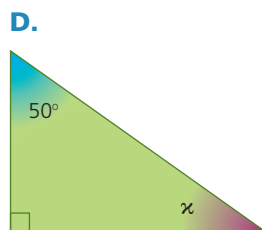
G.



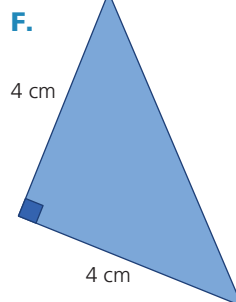
B.



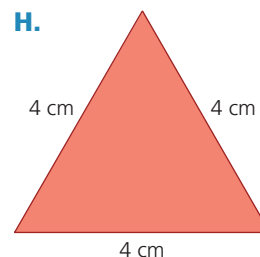
D.



F.

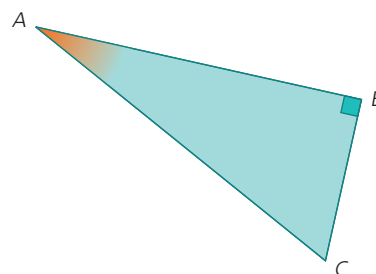


H.

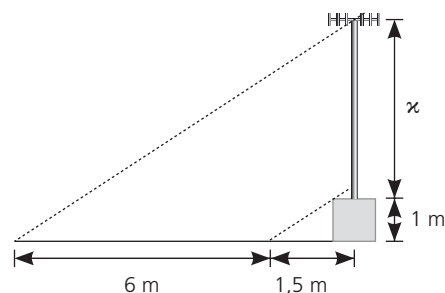


- 2 Na figura está representado o triângulo  $[BAC]$ , retângulo em  $B$ .

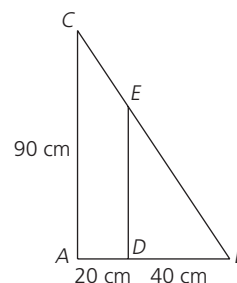
- 2.1 Quantos ângulos agudos tem o triângulo?  
 2.2 Qual é o lado do triângulo que se designa por hipotenusa?  
 2.3 Quais são os catetos do triângulo  $[BAC]$ ?  
 2.4 Qual é o maior lado do triângulo?



- 3 Uma antena de televisão foi colocada sobre um bloco de cimento. Esse bloco tem 1 m de altura. A determinada hora do dia, a antena projeta uma sombra de 7,5 m, enquanto o bloco projeta uma sombra de 1,5 m. Nestas condições, qual é a altura da antena?



- 4 Na figura ao lado o segmento  $[AC]$  representa um poste e o segmento  $[DE]$  representa uma bandeira. De acordo com os dados da figura, determina a altura da bandeira e apresenta o resultado em metros.



# 1.1

## Decomposição de um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa

### Tarefa 1



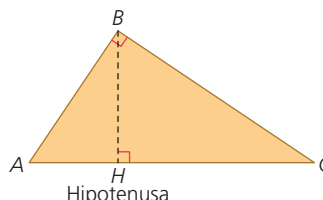
- 1 Como deve a Sofia cortar o bolo?
- 2 Qual é a relação que há entre as duas fatias?
- 3 Qual é a relação que há entre a fatia inicial e as que se obtiveram depois da divisão?

### Recorda

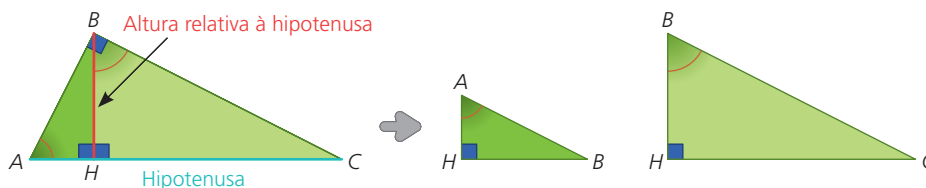
Num triângulo retângulo, os lados adjacentes ao ângulo reto designam-se por catetos e o lado oposto ao ângulo reto designa-se por hipotenusa.

### Decomposição de um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa

Dado um triângulo  $[ABC]$  retângulo em  $B$ , considere-se a altura traçada do vértice  $B$  para a hipotenusa e designe-se por  $H$  o pé dessa perpendicular:



Quando se decompõe um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa, obtêm-se dois triângulos que têm uma particularidade.



Repara que, no triângulo  $[ABH]$ ,  $\widehat{ABH} = 180^\circ - 90^\circ - \widehat{A} = 90^\circ - \widehat{A}$ .

Como o triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $B$ , então,  $\widehat{HBC} = 90^\circ - \widehat{ABH} = 90^\circ - (90^\circ - \widehat{A}) = 90^\circ - 90^\circ + \widehat{A} = \widehat{A}$ .

Assim, o triângulo  $[ABC]$  e os dois triângulos obtidos na decomposição têm dois ângulos correspondentes iguais. Pelo critério de semelhança AA, os três triângulos  $[ABH]$ ,  $[BCH]$  e  $[ABC]$  são **semelhantes**, tendo-se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} \text{ e } \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{BC}}$$

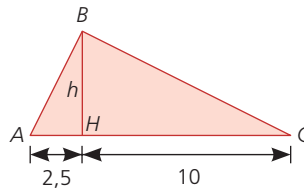
A **altura referente à hipotenusa** de um triângulo retângulo divide-o em dois triângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo inicial.

Observa que há outras igualdades que resultam do facto de os triângulos  $[ABH]$  e  $[BCH]$  serem semelhantes:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$$



Assim, sabendo, por exemplo que  $\overline{AH} = 2,5$  cm e  $\overline{CH} = 10$  cm, é possível calcular a medida da altura ( $h$ ) do triângulo  $[ABC]$ , relativa à hipotenusa.



De facto,

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{BH}} \Leftrightarrow \frac{x}{10} = \frac{2,5}{x} \Leftrightarrow x^2 = 25$$

### Quais são as soluções da equação $x^2 = 25$ ?

Uma delas é evidente: 5, pois  $5^2 = 5 \times 5 = 25$ . Mas existe outra solução, que é negativa:  $-5$ , visto que  $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = +25$ .

A equação resolve-se, então, usando a noção de raiz quadrada:

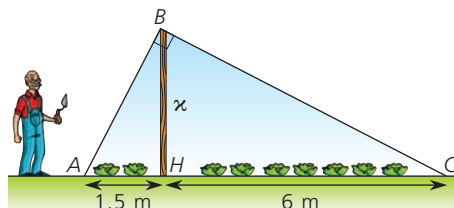
$$x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow x = \pm 5 \quad \text{C. S.} = \{-5; 5\}$$

Nota:

O símbolo  $\pm$  significa «mais ou menos» (positivo ou negativo).

### Exercícios resolvidos

- O Sr. Luís protegeu as suas alfaces, como se vê na figura. Descobre a altura da tábua,  $x$ .



#### Resolução:

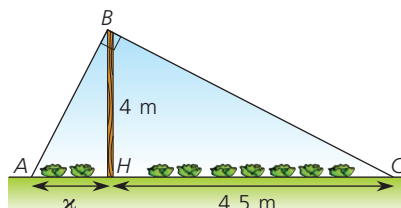
- Os triângulos  $[AHB]$  e  $[BHC]$  são semelhantes, logo, os comprimentos dos seus lados são diretamente proporcionais.

$$\frac{x}{1,5} = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x \times x = 1,5 \times 6 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9}$$

Neste caso,  $x$  é um comprimento, então, é positivo:  $x = \sqrt{9} = 3$ .

A tábua tem 3 m de altura.

- O Sr. José quer construir uma estrutura para proteger as suas alfaces com o mesmo formato da do Sr. Luís, como mostra a figura. Sabendo que vai usar uma tábua com 4 m de comprimento, a que distância do ponto A deve colocar a tábua?



#### Resolução:

- Como vimos anteriormente, os triângulos  $[ABH]$  e  $[BHC]$  são semelhantes, então, podemos dizer que:

$$\frac{4}{x} = \frac{4,5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{4 \times 4}{4,5} \Leftrightarrow x = \frac{16}{4,5}$$

A tábua deve ser colocada a, aproximadamente, 3,6 m do ponto A.

### Recorda

Numa proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

(com  $b \neq 0$  e  $d \neq 0$ ), tem-se sempre:

$$b \times c = a \times d$$

### O que deves saber

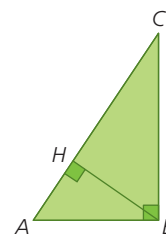
- Decompor um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa.

## Verificar a aprendizagem

### ALTURA REFERENTE À HIPOTENUSA DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

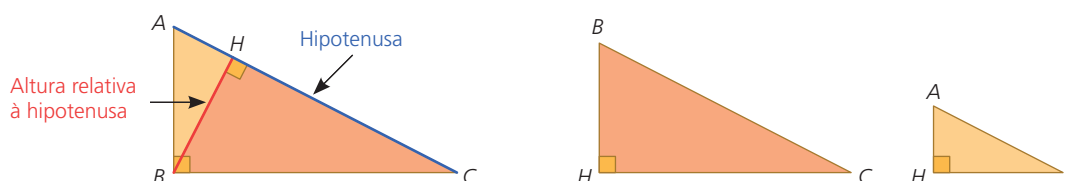
1 Em relação ao triângulo  $[ABC]$  representado à direita, copia e completa:

- a) Se escolhermos  $[AB]$  como base, então, a altura do triângulo é...
- b) Se escolhermos  $[BC]$  como base, então, a altura é...
- c) A hipotenusa é o lado..., então, a altura referente à hipotenusa é...



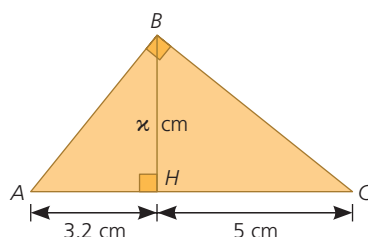
2 Numa folha de cartolina, recorta dois triângulos iguais,  $[ABC]$ , retângulos em  $B$ .

2.1 Em ambos os triângulos, traça a altura  $[BH]$  referente à hipotenusa. Corta um dos triângulos segundo a altura  $[BH]$ . Ao todo, obténs três triângulos.



2.2 Compara os três triângulos quanto à sua forma e justifica a tua conclusão.

3 O triângulo  $[ABC]$  apresentado abaixo é retângulo em  $B$ .



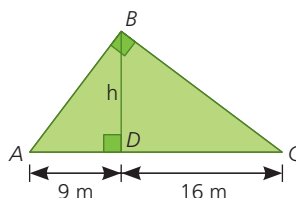
O segmento de reta  $[BH]$  é a altura referente à hipotenusa.

O comprimento de  $[BH]$  designa-se por  $x$ .

3.1 Mostra que  $\frac{3,2}{x} = \frac{x}{5}$ .

3.2 Calcula o valor de  $x$ .

4 Na figura seguinte  $h$  é a altura do triângulo retângulo  $[ABC]$  relativa à hipotenusa. Determina:



- a) a área do triângulo  $[ABD]$ ;
- b) o perímetro do triângulo  $[ABC]$ .

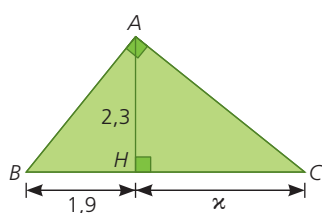
**AUTOAVALIAÇÃO** Sei decompor um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa e usar a relação entre os triângulos obtidos?



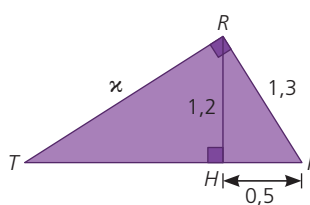
## Aplicar

- 5 Em cada triângulo, calcula o valor de  $x$  (com 1 c. d.). As medidas estão indicadas em centímetros.

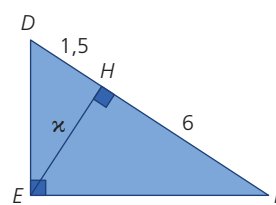
a)



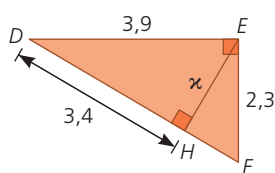
c)



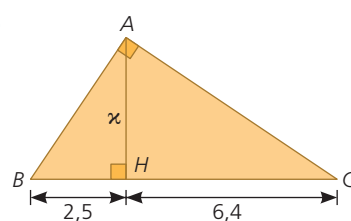
e)



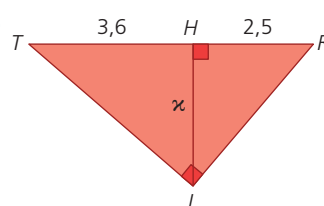
b)



d)

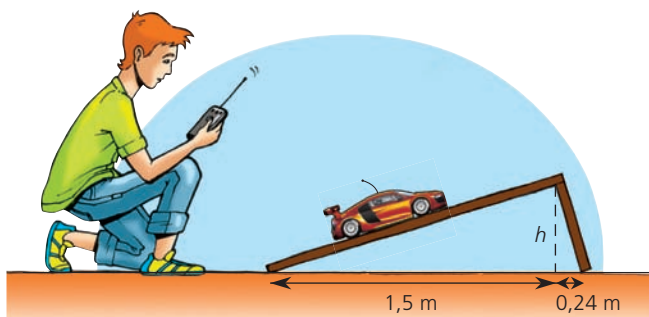


f)

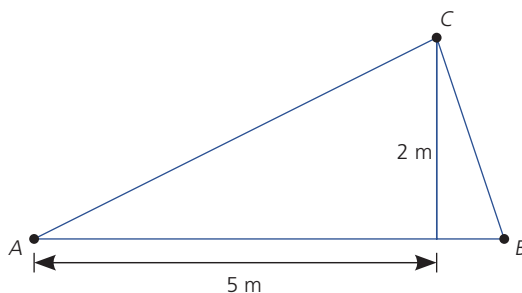


- 6 O Zito usa uma velha mesa de madeira (da qual retirou uma das tábuas laterais) como rampa de lançamento para o seu carro telecomandado.

Usando as medidas indicadas na figura, calcula a altura da rampa,  $h$ . Apresenta o resultado em centímetros.



- 7 A Sofia vai utilizar uma tenda como a representada na figura seguinte e sabe que a sua altura tem de ser de 2 metros. A que distância do ponto B deve ser colocada a base da barra que vai suportar a parte superior da lona da tenda?



# 1.2

## Teorema de Pitágoras

### Tarefa 2

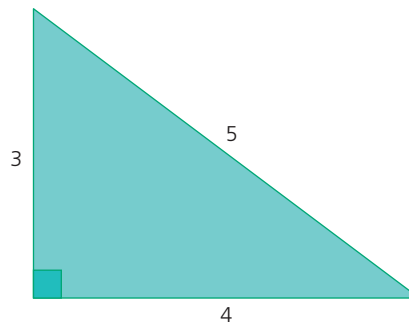
OUVI DIZER QUE, NOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS, EXISTE UMA RELAÇÃO ESPECIAL ENTRE OS COMPRIMENTOS DOS LADOS.



- 1 Com uma aplicação de Geometria Dinâmica, constrói um triângulo retângulo  $[ABC]$ .
- 2 Mede o comprimento dos três lados e calcula o quadrado de cada um desses valores.
- 3 Adiciona os quadrados dos catetos. Que relação observas?
- 4 Arrasta os vértices do triângulo e verifica se a relação se mantém.
- 5 Apresenta uma conjectura.

### Teorema de Pitágoras — Demonstração

Considera o triângulo retângulo:



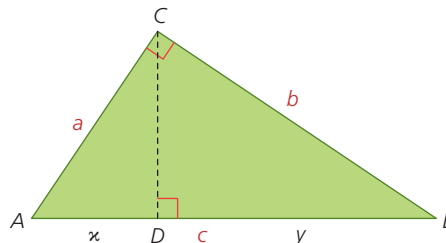
Repara na relação:  $5^2 = 4^2 + 3^2$  ( $25 = 16 + 9$ )

Esta relação verifica-se para qualquer triângulo retângulo:

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{Cateto maior})^2 + (\text{Cateto menor})^2$$

Será esta relação válida para todos os triângulos retângulos?

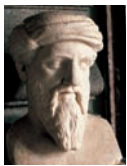
Dado um triângulo  $[ABC]$  retângulo em  $C$ , considere-se a altura traçada do vértice  $C$  para a hipotenusa e designe-se por  $D$  o pé dessa perpendicular.



Como vimos anteriormente podemos estabelecer as relações:

$$\frac{a}{c} = \frac{x}{a} \quad \text{e} \quad \frac{b}{c} = \frac{y}{b}$$

#### Curiosidade



O matemático grego Pitágoras (século VI a. C.) fundou a Escola Pitagórica. Afirmava que «Tudo é número».

#### Nota

Um **teorema** é uma afirmação que, para ser aceite, necessita de uma prova, chamada **demonstração**.

Numa demonstração, parte-se da **hipótese** (os dados) e, através de um raciocínio lógico, prova-se que a **tese** (a conclusão) é verdadeira.

Como, numa proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos:  $a^2 = xc$  e  $b^2 = yc$ . Adicionando estas igualdades membro a membro, obtém-se:

$$a^2 + b^2 = xc + yc = (x + y)c = c \times c = c^2,$$

ou seja, num triângulo retângulo o quadrado da medida do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos comprimentos dos catetos.

**Teorema de Pitágoras:** num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

### Curiosidade

Foi na Escola Pitagórica que, pela primeira vez, se demonstrou o Teorema de Pitágoras.

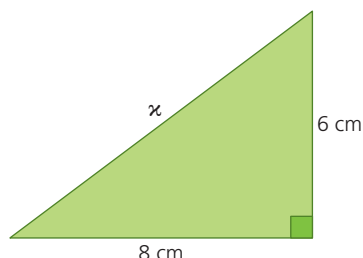
Hoje, conhecem-se 367 demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras.

## ■ Determinar o comprimento da hipotenusa

Num triângulo retângulo, conhecido o comprimento dos dois catetos, o Teorema de Pitágoras permite calcular o comprimento da hipotenusa.

### Exercício resolvido

Determina o comprimento da hipotenusa no triângulo retângulo seguinte.



### Resolução:

Como o triângulo é retângulo, aplica-se o Teorema de Pitágoras:

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{Cateto maior})^2 + (\text{Cateto menor})^2$$

$$x^2 = 8^2 + 6^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 64 + 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 10$$

$x$  é um comprimento, então, é positivo:  $x = 10$  cm

O comprimento da hipotenusa é 10 cm.

### COSTUMO ESCREVER:

$$H^2 = C_M^2 + C_m^2$$

$H$  — HIPOTENUSA

$C_M$  — CATETO MAIOR

$C_m$  — CATETO MENOR

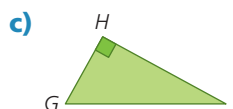
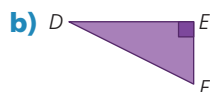
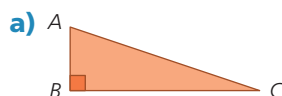


### O que deves saber

- Demonstrar o Teorema de Pitágoras.
- Aplicar o Teorema de Pitágoras para determinar o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo.

## Verificar a aprendizagem

- 1 Para cada triângulo retângulo, indica a hipotenusa, o cateto maior e o cateto menor.



- 2 Nas figuras I e II, está representado um mesmo quadrado  $[ABCD]$  decomposto de duas maneiras diferentes.

As medidas dos lados do triângulo retângulo azul são designadas por  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

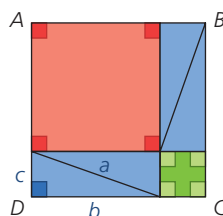
2.1 Prova que, na figura I,  $A_{[ABCD]} = b^2 + c^2 + 2bc$ .

2.2 Demonstra que, na figura II, o quadrilátero amarelo é um quadrado e prova que  $A_{[ABCD]} = a^2 + 2bc$ .

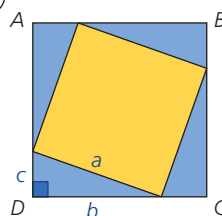
2.3 Usando as alíneas anteriores, prova que  $a^2 = b^2 + c^2$ .

O Teorema de Pitágoras fica, assim, comprovado.

(I)



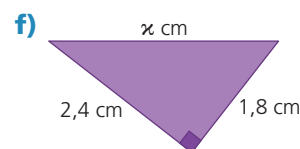
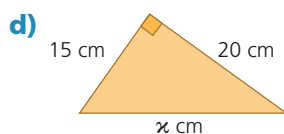
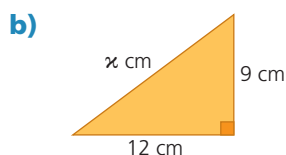
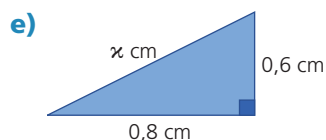
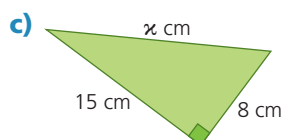
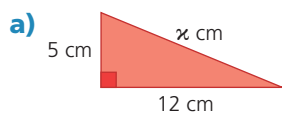
(II)



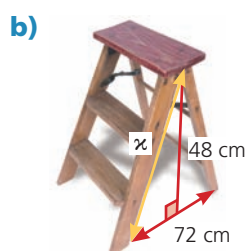
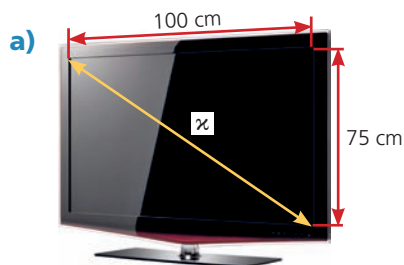
## AUTOAVALIAÇÃO Sei demonstrar o Teorema de Pitágoras?

### DETERMINAR O COMPRIMENTO DA HIPOTENUSA

- 3 Em que tipo de triângulos se pode usar o Teorema de Pitágoras?
- 4 Em cada caso, determina o comprimento da hipotenusa.



- 5 Em cada caso, determina o valor de  $x$ .

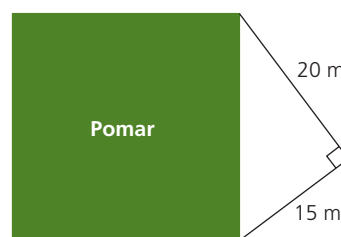


## AUTOAVALIAÇÃO Sei determinar o comprimento da hipotenusa?

## Aplicar

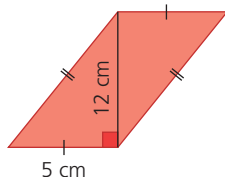
- 6 A figura ao lado representa a horta do Sr. Manuel, na qual a zona onde se cultivam os legumes está representada por um triângulo retângulo e a zona de pomar está representada por um quadrado. Determina:

- a) a área destinada ao cultivo de legumes;  
b) a área de pomar.

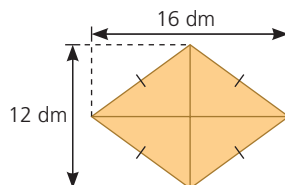


- 7 Determina o perímetro de cada quadrilátero.

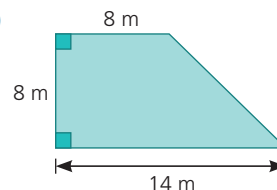
a)



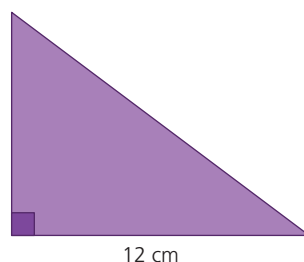
b)



c)



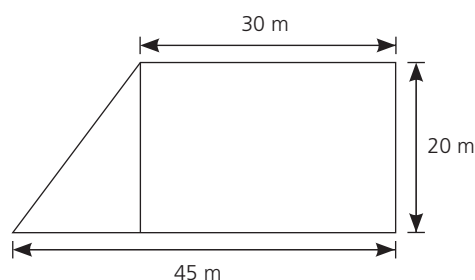
- 8 Considera o triângulo retângulo seguinte, com  $54 \text{ cm}^2$  de área. Determina o perímetro do triângulo.



- 9 O Sr. João tem um terreno com a forma de um trapézio retângulo com  $750 \text{ m}^2$  de área, com as dimensões da figura.

9.1 O Sr. João vendeu a parte do terreno correspondente ao triângulo retângulo a 25 euros cada  $\text{m}^2$ . Quanto dinheiro fez o Sr. João com a venda?

9.2 O novo proprietário do terreno decidiu colocar uma vedação nova no seu terreno. Que quantidade de rede deve comprar?



## Tarefas de investigação

- 10 Investiga outras demonstrações do Teorema de Pitágoras.

SUGESTÃO: [http://www.prof2000.pt/users/pf\\_vieira/java/pytha/pitagoras.htm](http://www.prof2000.pt/users/pf_vieira/java/pytha/pitagoras.htm)

- 11 Num ambiente de Geometria Dinâmica, constrói um triângulo retângulo dinâmico  $[ABC]$ .

11.1 Sobre os lados, constrói triângulos equiláteros e mede as suas áreas.

11.2 Que relação existe entre as áreas? Verifica se a relação se mantém, arrastando  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

11.3 Formula uma conjectura.

11.4 Substitui os triângulos equiláteros por outros polígonos regulares. O que observas?

11.5 Apresenta uma formulação geral da tua conjectura inicial.



# 1.3

## Teorema de Pitágoras (continuação)

### Tarefa 3



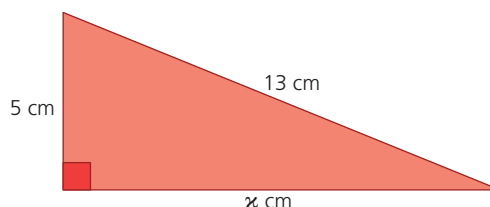
- 1 Justifica que se pode aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo  $[ABC]$ .
- 2 O lado  $[AB]$  é a hipotenusa ou um cateto?
- 3 Determina a altura do ponto A do avião, em relação ao chão.

### Repara

Antes de usar o Teorema de Pitágoras, deve confirmar-se que o triângulo é retângulo e perguntar-se: «Quero calcular o comprimento da **hipotenusa** ou de um **cateto**?»

### Determinar o comprimento de um cateto

Num triângulo retângulo, conhecendo o comprimento da hipotenusa e de um cateto, o Teorema de Pitágoras permite calcular o comprimento do outro cateto. Por exemplo:



Como o triângulo é retângulo, aplica-se o Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
 (\text{Hipotenusa})^2 &= (\text{Cateto maior})^2 + (\text{Cateto menor})^2 \\
 13^2 &= x^2 + 5^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 13^2 - 5^2 &= x^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 169 - 25 &= x^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 144 &= x^2 \Leftrightarrow & \text{Trocando os dois membros da equação} \\
 \Leftrightarrow x &= \pm\sqrt{144} \\
 \Leftrightarrow x &= \pm 12
 \end{aligned}$$

$x$  é um comprimento, então, é positivo:  $x = 12$

O comprimento do cateto maior é 12 cm.

Para determinar o comprimento de um cateto, também se pode usar o Teorema de Pitágoras do seguinte modo:

$$(\text{Cateto})^2 = (\text{Hipotenusa})^2 - (\text{Outro cateto})^2$$

Assim, no exemplo anterior, poderia escrever-se diretamente:

$$\begin{aligned}
 x^2 &= 13^2 - 5^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x^2 &= 169 - 25 \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

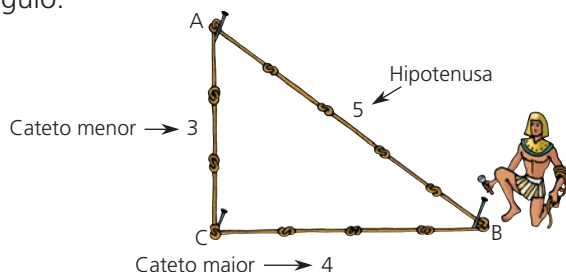
Para calcular o comprimento do cateto menor de um triângulo retângulo, segue-se o mesmo procedimento.

PARA DETERMINAR  
O COMPRIMENTO DO CATETO  
MAIOR, FAÇO:  
 $C_m^2 = H^2 - C_m^2$   
PARA O CATETO MENOR, FAÇO:  
 $C_m^2 = H^2 - C_m^2$



## Recíproco do Teorema de Pitágoras

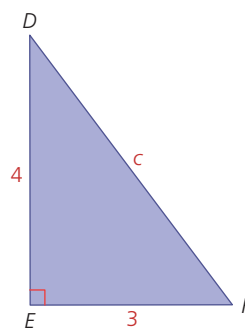
Para garantir a perpendicularidade na construção das pirâmides, os Egípcios utilizavam uma corda com 12 nós (igualmente espaçados) para obter um triângulo retângulo:



Repara na relação:  $5^2 = 4^2 + 3^2$

Os Egípcios sabiam que o triângulo assim construído era retângulo.

Considera um triângulo  $[DEF]$ , retângulo em  $E$ , de catetos com medidas de comprimento iguais respetivamente a 3 e 4, como assinalado na figura ao lado.



Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo  $[DEF]$ , conclui-se que  $3^2 + 4^2 = c^2$ , pelo que  $c^2 = 25$  e, portanto,  $c = 5$ . Mas, então, pelo critério de igualdade de triângulos LLL os dois triângulos são geometricamente iguais, pelo que, em particular, o ângulo  $ACB$  será igual ao ângulo  $DEF$ , reto, o que prova que o triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $C$ . Acabou de se reconhecer o recíproco do Teorema de Pitágoras.

### Recíproco do Teorema de Pitágoras

Num triângulo, **se** o quadrado do lado maior é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, **então, o triângulo é retângulo** no vértice oposto ao lado maior.

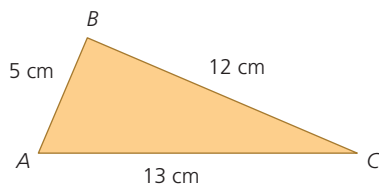
Assim, conhecendo a medida do comprimento dos três lados de um triângulo, é possível saber se o triângulo é retângulo.

Observa os exemplos:

$$13^2 = 169 \text{ e } 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169.$$

$$\text{Logo, } 13^2 = 12^2 + 5^2$$

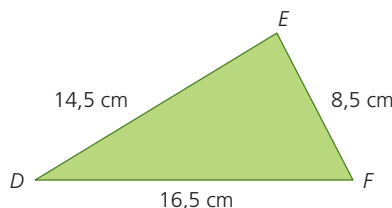
Portanto, **o triângulo é retângulo em B**.



$$16,5^2 = 272,25 \text{ e } 14,5^2 + 8,5^2 = 210,25 + 72,25 = 282,5.$$

$$\text{Logo, } 16,5^2 \neq 14,5^2 + 8,5^2$$

Portanto, **o triângulo não é retângulo**.



### Repara

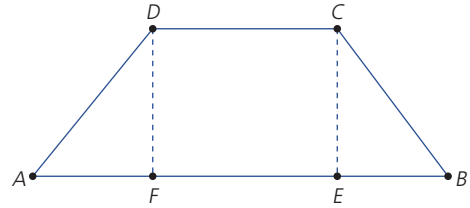
No triângulo  $[ABC]$ , o lado  $[AC]$  é inicialmente «candidato a hipotenusa», por ser o maior.

Uma vez provado que o triângulo é retângulo, sabe-se que o ângulo reto se opõe ao maior lado (que, só então, pode ser designado por hipotenusa).

## Exercícios resolvidos

1. Na figura ao lado, está representado o trapézio  $[ABCD]$ , e sabe-se que:

- $\overline{DC} = \overline{CB} = 20$  cm
- $\overline{EB} = 12$  cm
- $[DCEF]$  é um retângulo.



A área do trapézio  $[ABCD]$  é  $520 \text{ cm}^2$ .

- Determina a altura do trapézio.
- Mostra que o comprimento do lado  $[AD]$  não pode ser 21 cm.

### Resolução:

- a) Como o triângulo  $[CBE]$  é retângulo, aplica-se o Teorema de Pitágoras para determinar o comprimento do cateto  $[CE]$  do seguinte modo:

$$\overline{CE}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{BE}^2, \quad \overline{CE}^2 = 20^2 - 12^2 \Leftrightarrow \overline{CE} = \pm 16$$

$$\overline{CE} > 0, \text{ logo, } \overline{CE} = 16;$$

A altura do trapézio é 16 cm.

- b) A área do trapézio pode ser obtida pela soma das áreas dos triângulos  $[CBE]$ ,  $[ADF]$  com a área do retângulo  $[DCEF]$ .

Área do triângulo  $[CBE]$ :  $\frac{12 \times 16}{2} = 96$ . A área do triângulo  $[CBE]$  é  $96 \text{ cm}^2$ .

Área do retângulo  $[DCEF]$ :  $20 \times 16 = 320$ . A área do retângulo  $[DCEF]$  é  $320 \text{ cm}^2$ .

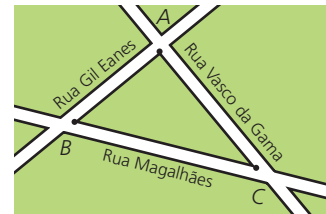
Se ao valor da área do trapézio se retirar os valores das áreas do triângulo  $[CBE]$  e do retângulo  $[DCEF]$  obtém-se a área do triângulo  $[ADF]$ :  $520 - (96 + 320) = 104$ . Logo:

$$\text{Área do triângulo } [ADF]: \frac{\overline{AF} \times 16}{2} = 104 \Leftrightarrow \overline{AF} = 13.$$

Como o triângulo  $[ADF]$  é retângulo, usa-se o Teorema de Pitágoras para verificar se o lado  $[AD]$  pode ou não ter 21 cm de comprimento:  $21^2 = 441$  e  $13^2 + 16^2 = 425$ , logo, o lado  $[AD]$  não pode ter 21 cm de comprimento.

2. No mapa da cidade apresentado ao lado, sabe-se que:  $\overline{AB} = 420$  m;  $\overline{AC} = 560$  m;  $\overline{BC} = 700$  m.

Prova que a Rua Gil Eanes é perpendicular à Rua Vasco da Gama.



### Resolução:

Usa-se o Recíproco do Teorema de Pitágoras:

$$700^2 = 490\,000 \text{ e } 560^2 + 420^2 = 490\,000$$

Logo,  $700^2 = 560^2 + 420^2$ , Portanto, o triângulo  $[ABC]$  é retângulo em A.

Assim, a Rua Gil Eanes é perpendicular à Rua Vasco da Gama.

NEM SEMPRE PODEMOS  
CONFIAR NA OBSERVAÇÃO!  
SÓ USANDO O RECÍPROCO  
DO TEOREMA DE PITÁGORAS  
É QUE TEMOS A CERTEZA  
DE QUE UM TRIÂNGULO  
É RETÂNGULO.



### O que deves saber

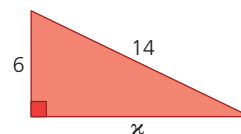
- Usar o Teorema de Pitágoras.
- Utilizar o recíproco do Teorema de Pitágoras.

## Verificar a aprendizagem

### USAR O TEOREMA DE PITÁGORAS

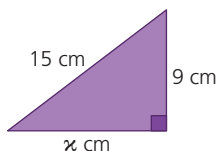
- 1 Em relação ao triângulo retângulo representado ao lado, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- A.  $x^2 = 14^2 + 6^2$       C.  $14^2 = x^2 + 6^2$   
B.  $x^2 = 6^2 - 14^2$       D.  $14 = x + 6$

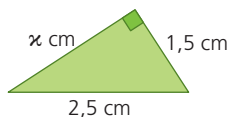


- 2 Em cada caso, determina o comprimento do cateto desconhecido.

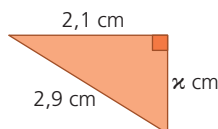
a)



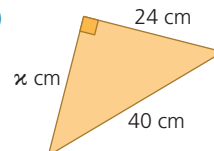
b)



c)



d)

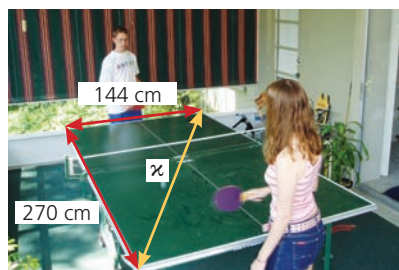


- 3 Em cada caso, determina o valor de  $x$  arredondado às unidades.

a)



b)

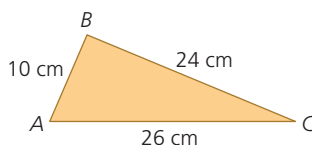


### AUTOAVALIAÇÃO Sei usar o Teorema de Pitágoras?

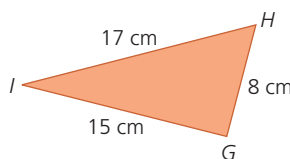
### RECÍPROCO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

- 4 Para que serve o recíproco do Teorema de Pitágoras?
- 5 Verifica, justificando, se os triângulos seguintes são triângulos retângulos. Em caso afirmativo, indica o ângulo reto.

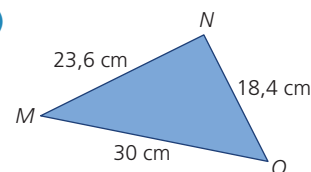
a)



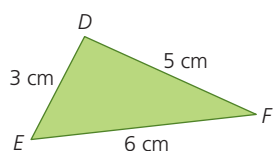
c)



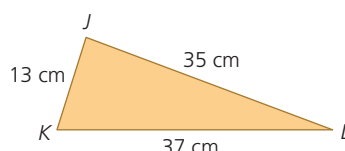
e)



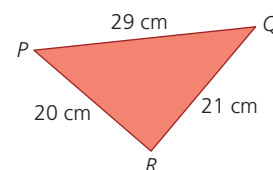
b)



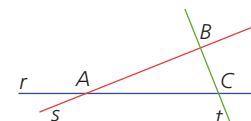
d)



f)



- 6 Na figura ao lado, as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  interseitam-se em três pontos,  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Sabe-se que  $\overline{AB} = 4,2$  cm,  $\overline{AC} = 4,55$  cm e  $\overline{BC} = 1,75$  cm. Prova que as retas  $s$  e  $t$  são perpendiculares.



### AUTOAVALIAÇÃO Sei usar o recíproco do Teorema de Pitágoras?

## Aplicar

- 7 O Zito e uns amigos marcaram um campo de futebol de praia, traçando duas linhas laterais com 36 m e duas linhas de fundo com 27 m. Para confirmar que o campo era retangular, o Zito mediu a diagonal e obteve 45 m. Informou, então, os amigos de que o campo estava bem construído.

Explica como chegou o Zito a essa conclusão.

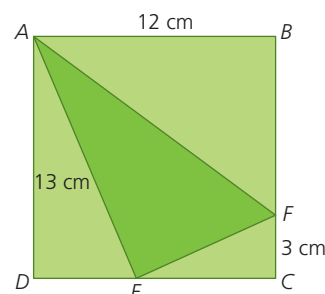


- 8 Sobre a figura ao lado, sabe-se que:

- $[ABCD]$  é um quadrado com 12 cm de lado;
- $\overline{AE} = 13$  cm
- $\overline{FC} = 3$  cm

Calcula o comprimento dos segmentos de reta:

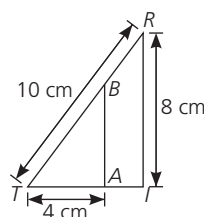
- $[AF]$
- $[DE]$



- 9 Na figura estão representados dois triângulos retângulos. Sabe-se que  $RI \parallel AB$ .

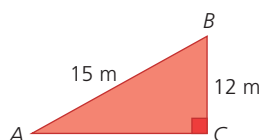
Determina:

- $\overline{TI}$
- a área do triângulo  $[TAB]$ .

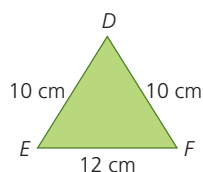


- 10 Determina a área das figuras seguintes. Escreve o resultado arredondado com 2 c. d.

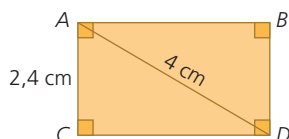
a)



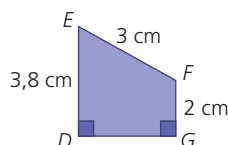
c)



b)



d)

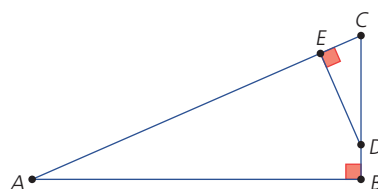


- 11 Na figura estão representados dois triângulos  $[ABC]$  e  $[EDC]$  retângulos respetivamente em  $B$  e em  $E$ , sendo  $E$  e  $D$  pontos respetivamente dos segmentos  $[AC]$  e  $[BC]$ .

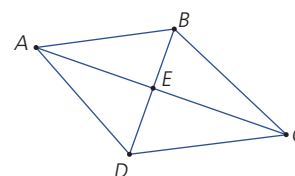
11.1 Justifica que os triângulos  $[ABC]$  e  $[EDC]$  são semelhantes.

11.2 Supondo que  $\overline{CB} = 6$  cm,  $\overline{CE} = 3$  cm e  $\overline{DE} = 4$  cm, determina:

- a razão de semelhança que aplica o triângulo  $[CDE]$  no triângulo  $[CAB]$ ;
- a medida de  $\overline{CD}$ ;
- as medidas de  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ .

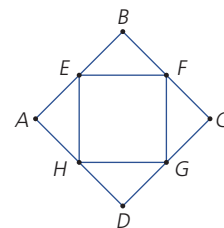


- 12 Considera um losango  $[ABCD]$  de perímetro igual a 2 m cujas diagonais se intersectam no ponto  $E$ . Sabendo que  $[AE]$  tem 40 cm de comprimento, determina a área do losango.



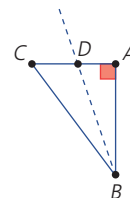


- 13** Na figura está representado um quadrado  $[ABCD]$  e  $E, F, G$  e  $H$ , pontos médios dos lados  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  e  $[AD]$ .



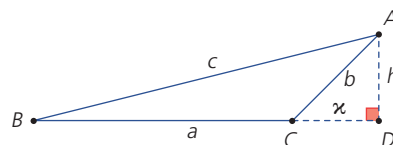
- 13.1** Mostra que  $[EFGH]$  é um losango, começando por justificar a igualdade dos triângulos  $[AEH]$ ,  $[DGH]$ ,  $[CFG]$  e  $[BEF]$ .
- 13.2** Mostra que  $[EFGH]$  é um quadrado, começando por calcular a amplitude do ângulo  $EHG$ .
- 13.3** Decompõe o quadrado  $[EFGH]$  através do traçado das respectivas diagonais e deduz o valor do quociente entre as áreas dos quadrados  $[ABCD]$  e  $[EFGH]$ .

- 14** Na figura está representado um triângulo  $[ABC]$  retângulo em  $A$  e a bissetriz  $\hat{B}D$  do ângulo  $ABC$ .



- 14.1** Supondo que  $\overline{AB} = 12$  cm e  $\overline{BC} = 15$  cm, determina  $\overline{AC}$ .
- 14.2** Sabe-se que  $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ , ou seja, os segmentos que a bissetriz de um ângulo determina no lado oposto estão na mesma razão dos outros dois lados do triângulo.  
Determina  $\overline{AD}$  e  $\overline{DC}$ .

- 15** Considera o triângulo  $[ABC]$  e sejam  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ .  
Supõe que o ângulo de vértice em  $C$  é obtuso e traça a altura relativa a  $[BC]$  que intersecta o prolongamento desse lado no ponto  $D$ , obtendo-se assim dois triângulos retângulos,  $[ACD]$  e  $[ABD]$ . Considera  $\kappa = \overline{DC}$  e  $h = \overline{AD}$ .



- 15.1** Tendo em conta o Teorema de Pitágoras, completa a igualdade  $b^2 = \dots$
- 15.2** Utilizando a igualdade da alínea anterior, obtém uma expressão de  $a^2 + b^2$  que apenas envolva  $a$ ,  $h$  e  $\kappa$ .
- 15.3** Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo  $[ABD]$ , mostra que:  
$$c^2 = h^2 + a^2 + 2a\kappa + \kappa^2$$
- 15.4** Tendo em conta as igualdades obtidas nas questões anteriores, mostra que  $c^2 > a^2 + b^2$ .

### Tarefa de investigação

- 16** Textos provenientes da Babilónia (c. 1750 a. C.) mostram que os Babilónios descobriram conjuntos de três números, como (3; 4; 5) e (5; 12; 13), que eram as medidas dos lados de triângulos retângulos. Embora Pitágoras e os seus discípulos só tivessem vivido mais de mil anos depois, tais conjuntos de números ficaram conhecidos como «ternos pitagóricos».

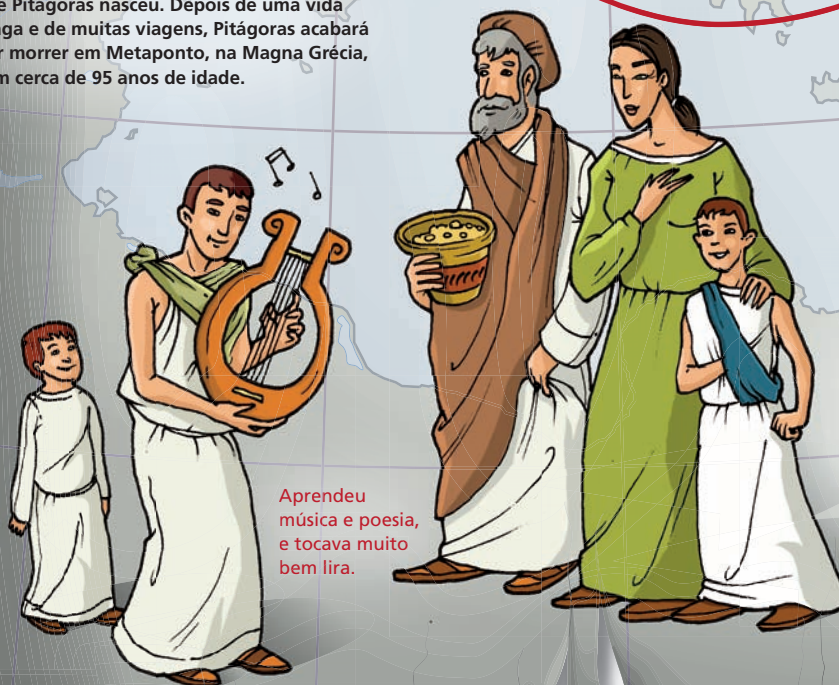
- 16.1** Qual dos ternos seguintes não é um terno pitagórico? Escolhe a opção correta.
- A. (9; 12; 15)
  - B. (11; 60; 61)
  - C. (40; 42; 58)
  - D. (12; 16; 18)
- 16.2** Prova que se  $(a; b; c)$  é um terno pitagórico, então,  $(2a; 2b; 2c)$  também é um terno pitagórico.
- 16.3** Investiga outras formas de criar ternos pitagóricos.

# A vida de Pitágoras

Pitágoras é uma figura extremamente importante no desenvolvimento da Matemática. Ao contrário de muitos matemáticos gregos posteriores, que nos deixaram escritos, Pitágoras não escreveu nenhum livro. Da sua história sabem-se apenas alguns pormenores. O que se apresenta a seguir é o resumo do que se julga serem os principais acontecimentos da sua vida.

## As suas viagens

Foi na ilha de Samos, na antiga Grécia, que Pitágoras nasceu. Depois de uma vida longa e de muitas viagens, Pitágoras acabará por morrer em Metaponto, na Magna Grécia, com cerca de 95 anos de idade.



Aprendeu música e poesia, e tocava muito bem lira.

Filho de Mnesarchus (pai) e Pythais (mãe), é provável que tenha tido dois irmãos, embora algumas fontes apontem para três.

570 a. C.

Pitágoras nasceu em Samos, na antiga Grécia, por volta do ano 570 a. C. O seu pai era comerciante e Pitágoras terá viajado muito com ele. Pouco se sabe da sua infância, apenas que teve uma educação de acordo com a tradição daquele tempo.

550 a. C.

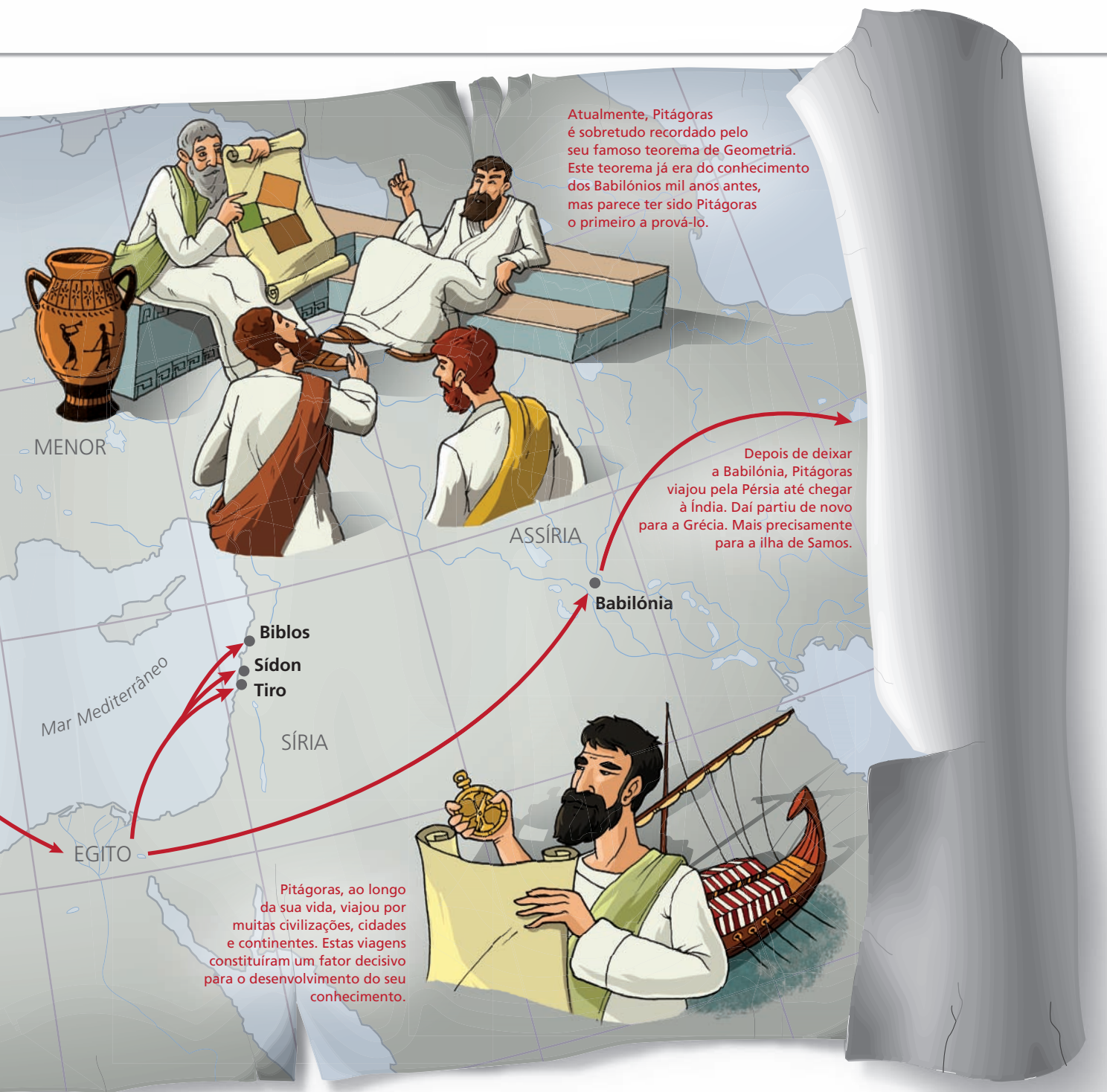
Sofreu a influência de três filósofos na sua juventude. Um foi Ferécides de Siro, o seu primeiro professor. Os outros dois foram Tales e o seu pupilo, Anaximandro de Mileto. Tales foi decisivo para o interesse de Pitágoras pela Matemática e pela Astronomia.

535 a. C.

Por volta do ano 535 a. C., alguns anos após o início da tirania de Polícrates sobre a cidade de Samos, Pitágoras foi para o Egito. Algumas evidências sugerem que os dois foram no início amigos e que Pitágoras foi para o Egito com uma carta de apresentação escrita por Polícrates.

525 a. C.

Em 525 a. C., Cambises II, rei da Pérsia, invadiu o Egito. Pitágoras foi feito prisioneiro e levado para a Babilónia. Enquanto lá esteve, estudou a adoração mística a muitos deuses e foi instruído em Aritmética, Música e outras ciências matemáticas.



520 a. C.

Em cerca de 520 a. C., Pitágoras deixou a Babilônia e retornou a Samos, onde fundou uma escola chamada Semicírculo. Polícrates tinha sido morto por volta de 522 a. C., no mesmo ano que Cambises. A morte dos dois pode ter influenciado o retorno de Pitágoras a Samos; contudo, ainda hoje não se sabe como obteve Pitágoras a sua liberdade.

518 a. C.

Pitágoras saiu de Samos e foi para Crotona, por volta de 518 a. C., onde fundou uma escola filosófica e religiosa que teve muitos seguidores. Pitágoras estava interessado nos princípios da Matemática: no conceito de número e nas suas propriedades, nas figuras matemáticas, bem como na ideia abstrata de prova.

508 a. C.

Em seguida, por volta de 508 a. C., a Sociedade Pitagórica em Crotona foi atacada por Cílon, um nobre da cidade. Pitágoras fugiu para Metaponto e a maioria dos autores dizem que ele morreu ali.

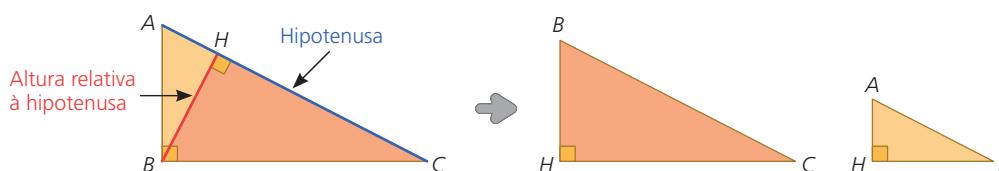
475 a. C.

A evidência da sua morte é incerta, não se sabendo ao certo como, quando e onde ocorreu. Pensa-se que terá sido por volta de 475 a. C.

## Síntese

### Decomposição de um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa

- Num triângulo retângulo, ao lado maior chama-se **hipotenusa** (opõe-se ao ângulo reto). Os outros dois lados são os **catetos**.
- A altura referente à hipotenusa de um triângulo retângulo divide o triângulo em dois triângulos **semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo inicial**.



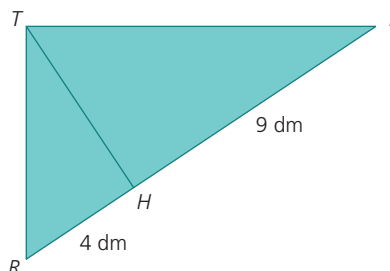
Os três triângulos são semelhantes, ou seja, os ângulos correspondentes são iguais e as medidas dos lados correspondentes são diretamente proporcionais.

Assim, podem estabelecer-se as seguintes relações:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} \text{ e } \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{BC}}$$

Exemplo:

Na figura, está representado um triângulo retângulo em  $T$ , decomposto pela altura referente à hipotenusa.



São válidas as seguintes relações entre os comprimentos dos lados correspondentes:

$$\frac{\overline{RT}}{\overline{TI}} = \frac{\overline{HT}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{RH}}{\overline{HT}}$$

Para determinarmos a altura  $\overline{HT}$  do triângulo  $[TRI]$ , basta fazer:

$$\frac{\overline{HT}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{RH}}{\overline{HT}} \Leftrightarrow \frac{\overline{HT}}{9} = \frac{4}{\overline{HT}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{HT}^2 = 36 \Leftrightarrow \overline{HT} = \pm\sqrt{36} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{HT} = \pm 6$$

como se trata de um comprimento,

$$\overline{HT} = 6 \text{ dm}$$

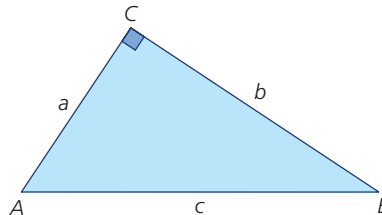


## Teorema de Pitágoras

Num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{cateto})^2 + (\text{outro cateto})^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$



- O Teorema de Pitágoras aplica-se num **triângulo retângulo**, para determinar o comprimento de um lado, quando são conhecidos os comprimentos dos outros dois lados.

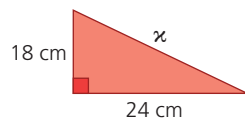
### Recíproco do Teorema de Pitágoras

Num triângulo, **se** o quadrado do lado maior for igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, **então, o triângulo é retângulo** no vértice oposto ao lado maior.

O Teorema de Pitágoras e o seu recíproco servem para verificar se um triângulo (cujas medidas são conhecidas) **é, ou não, um triângulo retângulo**.

### Exemplos

#### Exemplo 1:

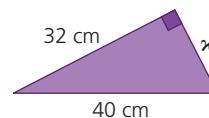


$$\begin{aligned} x^2 &= 24^2 + 18^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 &= 576 + 324 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 &= 900 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{900} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \pm 30 \end{aligned}$$

Como  $x$  é um comprimento, então, é positivo:

$$x = 30 \text{ cm}$$

#### Exemplo 2:

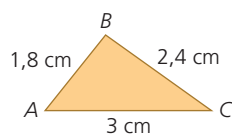


$$\begin{aligned} x^2 &= 40^2 - 32^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 &= 1600 - 1024 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 &= 576 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{576} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \pm 24 \end{aligned}$$

Como  $x$  é um comprimento, então é positivo:

$$x = 24 \text{ cm}$$

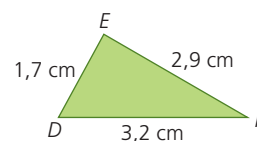
#### Exemplo 3:



$$3^2 = 2,4^2 + 1,8^2$$

Então, o triângulo **é** retângulo em B.

#### Exemplo 4:



$$3,2^2 \neq 2,9^2 + 1,7^2$$

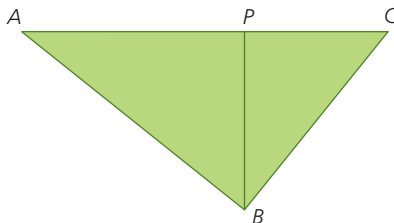
Então, o triângulo **não é** retângulo.

## Atividades globais

### QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

Das quatro alternativas, escolha a única opção correta.

- 1 O triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $B$ , sendo  $[BP]$  a altura referente à hipotenusa.



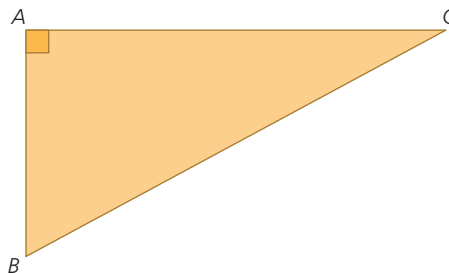
Sabendo que  $\overline{BP} = 8$  cm e  $\overline{AP} = 10$  cm, qual é o comprimento de  $[CP]$ ?

- A. 7 cm      B. 6,4 cm      C. 10 cm      D. 8,2 cm

- 2 Na figura ao lado está representado o triângulo  $[BAC]$ , retângulo em  $A$ .

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- A.  $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$   
B.  $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$   
C.  $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$   
D.  $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$



- 3 Quais das medidas seguintes correspondem aos lados de um triângulo retângulo?

- A. 18 cm, 15 cm e 8 cm.  
B. 14 cm, 48 cm e 50 cm.  
C. 39 cm, 13 cm e 41 cm.  
D. 22 cm, 38 cm e 60 cm.

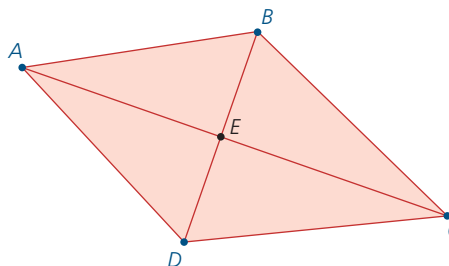
- 4 O trapézio isósceles da figura ao lado tem perímetro 72 cm. Sabendo que  $\overline{AB} = 32$  cm e que  $\overline{CD} = 20$  cm, a área do trapézio é:

- A.  $260 \text{ cm}^2$   
B.  $156 \text{ cm}^2$   
C.  $468 \text{ cm}^2$   
D.  $208 \text{ cm}^2$



- 5 Considera um losango  $[ABCD]$  de perímetro igual a 1 m cujas diagonais se intersectam no ponto  $E$ . Sabendo que  $[BD]$  tem 14 cm de comprimento, a área do losango é:

- A.  $168 \text{ cm}^2$   
B.  $336 \text{ cm}^2$   
C.  $300 \text{ cm}^2$   
D.  $175 \text{ cm}^2$



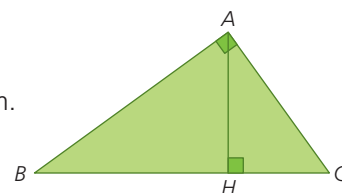


## EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

- 6**  $[ABC]$  é um triângulo retângulo em  $A$ , tal que  $\overline{AB} = 12$  cm e  $\overline{AC} = 5$  cm.

**6.1** Calcule a área do triângulo  $[ABC]$ .

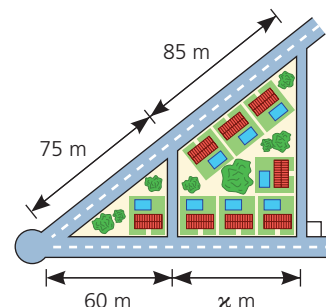
**6.2** Calcule a medida do comprimento de  $[AH]$ , com uma casa decimal.



- 7** A figura ao lado mostra duas avenidas que partem de um mesmo ponto  $A$  e cortam duas ruas paralelas. Na primeira avenida, os quarteirões determinados pelas ruas têm 75 m e 85 m de comprimento, respectivamente. Na segunda avenida, um dos quarteirões determinados mede 60 m.

**7.1** Por questões de segurança o quarteirão triangular vai ser vedado durante um curto período de tempo. Quantos metros de fita serão necessários?

**7.2** Determine a área do quarteirão com a forma de trapézio.



- 8** Acerca do triângulo  $[MAR]$  sabe-se que:

$$\overline{AM} = 6 \text{ m}; \overline{AR} = 8 \text{ m}; \overline{MR} = 10 \text{ m}$$

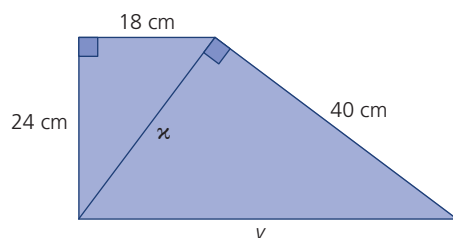
**8.1** Mostre que o triângulo  $[MAR]$  é retângulo.

**8.2** Determine a área do triângulo  $[MAR]$ .

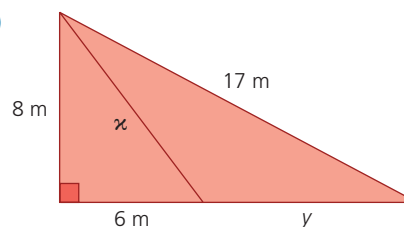
**8.3** O João tem um jardim retangular, cujas dimensões são iguais às dimensões dos catetos do triângulo  $[MAR]$ . Qual é a área do jardim do João?

- 9** Determine os valores de  $x$  e  $y$  nas figuras seguintes:

**a)**



**b)**



### Tarefas

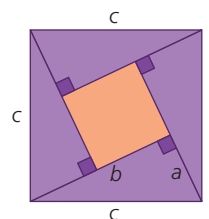
- 10** Um matemático indiano do século XII, Bhaskara, inventou uma demonstração para o Teorema de Pitágoras baseada na figura ao lado.

A figura é constituída por quatro triângulos retângulos iguais, tendo os catetos comprimento  $a$  e  $b$  e a hipotenusa comprimento  $c$ .

**10.1** Justifica que o quadrilátero que se obteve no centro é um quadrado.

**10.2** Determine o comprimento do lado do quadrado interior.

**10.3** Com base na figura, prova o Teorema de Pitágoras.

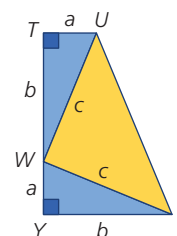


- 11** O presidente Garfield dos Estados Unidos da América inventou, em 1876, uma demonstração do Teorema de Pitágoras baseando-se na figura à direita.

Os triângulos retângulos  $[UTW]$  e  $[WYZ]$  são iguais. Os catetos têm de comprimento  $a$  e  $b$  e a hipotenusa tem de comprimento  $c$ .

**11.1** Justifica que o triângulo  $[UWZ]$  é um triângulo retângulo.

**11.2** Com base na figura, prova o Teorema de Pitágoras.



## AUTOAVALIAÇÃO

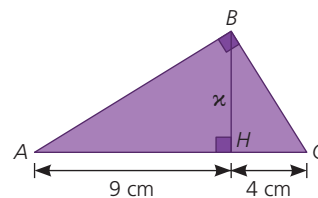
- Identifica claramente, na tua folha de respostas, os números dos itens a que respondes. Apresenta uma única resposta para cada item.
- O teste inclui três itens de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correta. Não apresentes cálculos nem justificações.

Págs. 28 e 29

- 1** Na figura ao lado, o triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $B$  e  $[BH]$  é uma altura.

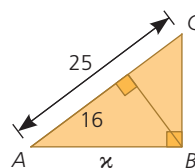
**1.1** Refere os triângulos semelhantes da figura.

**1.2** Calcula a medida do comprimento do segmento de reta  $[BH]$ .



Págs. 28 e 29

- 2** Na figura seguinte,  $x$  representa a medida de um cateto do triângulo retângulo  $[ABC]$ . Determina o valor de  $x$ .

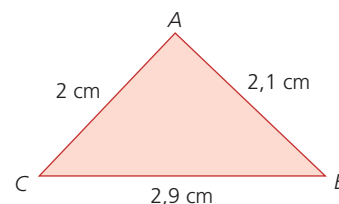


Pág. 37

- 3** Na figura ao lado está representado o triângulo  $[ABC]$ .

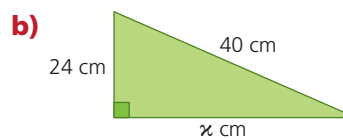
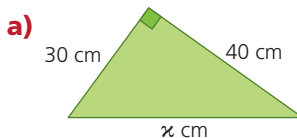
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- A.** O triângulo  $[ABC]$  é isósceles.  
**B.** O triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $B$ .  
**C.** O triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $A$ .  
**D.** O triângulo  $[ABC]$  não é retângulo.



Págs. 33 e 36

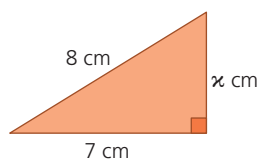
- 4** Em cada caso, determina o valor de  $x$ .



Pág. 33

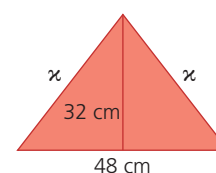
- 5** Em relação ao triângulo seguinte, qual das afirmações é verdadeira?

- A.**  $x^2 = 7^2 - 8^2$   
**B.**  $x^2 = 8^2 + 7^2$   
**C.**  $8^2 = 7^2 - x^2$   
**D.**  $8^2 = 7^2 + x^2$

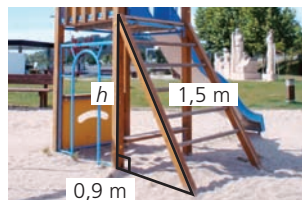


Pág. 33

- 6** O triângulo isósceles da figura tem 32 cm de altura e um dos lados mede 48 cm, como mostra a figura. Determina o perímetro do triângulo.

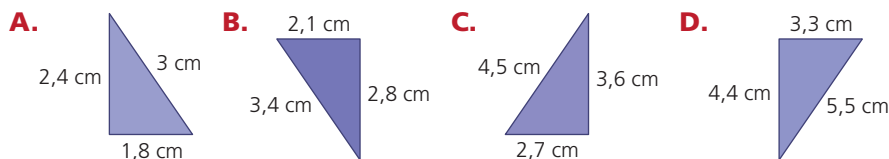


- 7** Na fotografia apresentada à direita, calcula a altura,  $h$ , da escada.



Pág. 36

- 8** Qual dos triângulos seguintes não é um triângulo retângulo? (As figuras não estão construídas à escala.)

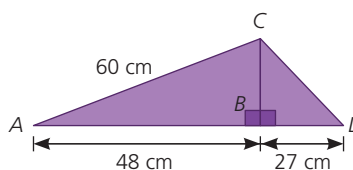


Pág. 37

- 9** Na figura ao lado,  $[ABC]$  e  $[DBC]$  são dois triângulos retângulos em  $B$ .

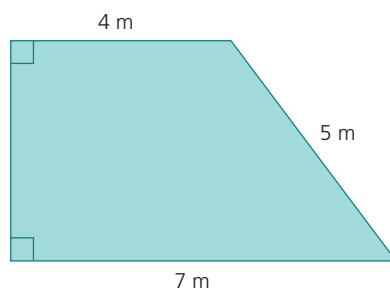
Calcula:

- a)** a área do triângulo  $[ABC]$ ;  
**b)** o perímetro do triângulo  $[ACD]$ .



Pág. 36

- 10** O Sr. Manuel tem um terreno como o representado na figura. Determina o perímetro e a área do terreno.



Pág. 36

- 11** Mostra que o triângulo  $[ABC]$  em que  $\overline{AB} = 12$  cm,  $\overline{BC} = 5$  cm e  $\overline{AC} = 13$  cm é retângulo e indica o ângulo reto.

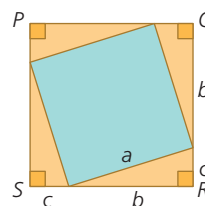
Pág. 37

- 12** O Diogo e o Jaime determinaram a área do quadrado  $[PQRS]$  de dois modos diferentes:

— Diogo:  $A = (b + c)^2$

— Jaime:  $A = a^2 + 2bc$

Com base nesses dados, demonstra o Teorema de Pitágoras.



Pág. 33

#### GRELHA DE AVALIAÇÃO

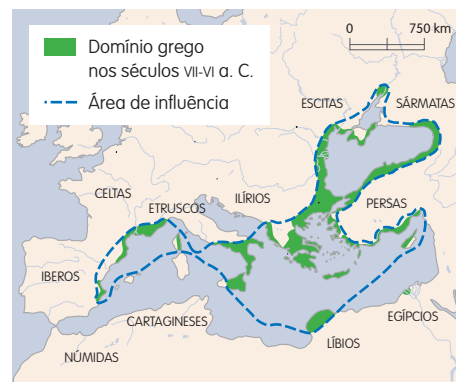
| Exercício                     | 1  | 2  | 3 | 4  | 5 | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 | 12 |
|-------------------------------|----|----|---|----|---|---|---|---|----|----|----|----|
| Cotação <sup>1</sup> (pontos) | 12 | 10 | 5 | 12 | 5 | 7 | 6 | 5 | 12 | 8  | 8  | 10 |

<sup>1</sup> Para saberes a cotação de cada alínea, basta divides a cotação do exercício pelo número de alíneas.

## A Geometria na Grécia Antiga

A palavra «geometria» vem do grego «*geometrein*», que significa medição de terra. Segundo o historiador grego Heródoto (século v a. C.), a Geometria tem origem na medição de terrenos no Egito Antigo.

Em tempos remotos, no Egito e na Babilónia, a Geometria era apenas uma coleção de regras práticas. Os Gregos viajaram por esses países, adquiriram os conhecimentos e deram-lhes uma organização lógica. Considera-se, por isso, que foi na Grécia que a Geometria se tornou uma das maiores criações do espírito humano.



- **Tales** (c. 624-547 a. C.)

Tales de Mileto é, por vezes, chamado o «primeiro matemático», pela sua preocupação em provar as suas afirmações. São-lhe atribuídos quatro teoremas.

- **Pitágoras** (c. 572-497 a. C.)

O trabalho iniciado por Tales de Mileto foi continuado, nos séculos seguintes, pelos pitagóricos. Pitágoras fundou um culto religioso e filosófico, a «Escola Pitagórica», que estudava Matemática e cujo lema era: «Tudo é número.» O teorema que tem hoje o seu nome vem, muito provavelmente, dos Babilónios, mas pensa-se que foram os pitagóricos que, pela primeira vez, apresentaram a sua demonstração. É provável que nem tenha sido Pitágoras a demonstrá-lo, visto que as descobertas de qualquer pitagórico eram sempre atribuídas ao mestre da Escola.

- **Euclides** (c. 325-265 a. C.)

Por volta de 300 a. C., Euclides de Alexandria publicou *Os Elementos*, constituídos por 13 livros, que reuniam toda a Geometria da época, incluindo as descobertas dos pitagóricos. No livro I, Euclides começa por escrever as definições: o que é um ponto, uma linha, um ângulo, etc. A seguir, apresenta 5 *Postulados* (proposições que Euclides pede ao leitor para aceitar) e 5 *Noções Comuns* (proposições supostamente do conhecimento geral, como, por exemplo, «coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si»). Seguem-se 48 proposições, para as quais Euclides apresenta demonstrações usando apenas as definições, os postulados, os axiomas e os teoremas já demonstrados. O livro I termina com as proposições 47 e 48: o famoso Teorema de Pitágoras e o seu recíproco.

*Os Elementos* de Euclides são o texto matemático mais influente de todos os tempos.

### Sugestão de trabalho

- Elabora um trabalho sobre Tales, Pitágoras ou Euclides. Apresenta um resumo da sua vida e explica o seu contributo para a evolução da Matemática.
- Em grupo, escreve um diálogo entre Pitágoras e os seus discípulos, no qual o matemático lhes explique o teorema e as suas aplicações. Depois, procede à sua dramatização.

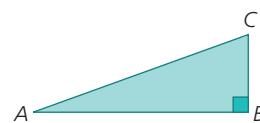


## Trigonometria

A Trigonometria é um ramo da Matemática que trata das relações entre lados e ângulos de um triângulo. No 9.º ano, irás estudar Trigonometria no triângulo retângulo.

### Sugestão de trabalho

Num ambiente de Geometria Dinâmica, constrói um triângulo  $[ABC]$ , retângulo em  $B$ , e investiga a soma  $\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\right)^2$ .  
Formula uma conjectura e prova-a.



## Teoremas famosos

A Matemática é uma disciplina dinâmica que contribui para o desenvolvimento de inúmeras áreas da ciência. Anualmente, são provados milhares de novos teoremas. Os mais famosos são os mais úteis (como o Teorema de Pitágoras), mas também os que são mais difíceis de demonstrar (como o **Teorema das Quatro Cores**).

Em 1852, enquanto pintava um mapa, o matemático F. Guthrie reparou que só precisava de quatro cores e perguntou-se: «Serão suficientes quatro cores para pintar qualquer mapa plano, de modo que dois países vizinhos não tenham a mesma cor?» A questão parecia simples, mas passaram mais de cem anos antes que fosse encontrada uma demonstração. O teorema só foi provado em 1976 e é famoso por ter sido usado um computador para efetuar um número imenso de cálculos (durante cerca de duas mil horas).



### Sugestão de trabalho

- Verifica que são suficientes quatro cores para pintar o mapa da Europa.
- Pierre de Fermat, um advogado francês do século XVII cujo passatempo era a Matemática, formulou um dos mais famosos teoremas da história da Matemática, enquanto estava a pensar em ternos pitagóricos. Pesquisa informações sobre o **Teorema de Fermat**.

## Páginas da Internet

- Jogos matemáticos: [http://nautilus.fis.uc.pt/mn/p\\_index.html](http://nautilus.fis.uc.pt/mn/p_index.html)
- Teorema de Pitágoras: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2001/icm32/index.html>  
e <http://www.prof2000.pt/users/hjco/PITAGORA/pg000006.htm>
- Os Elementos de Euclides: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euclides/elementoseuclides.htm>



# VETORES, TRANSLAÇÕES E ISOMETRIAS



Atividades iniciais ..... 53

## 2.1 Segmentos orientados e vetores ..... 54

Segmentos orientados  
Noção de vetor ..... 60  
Verificar a aprendizagem ..... 60

## 2.2 Translação ..... 62

Noção de translação ..... 62  
Verificar a aprendizagem ..... 65

## 2.3 Composição de translações e adição de vetores ..... 67

Composição de translações  
Adição de vetores e propriedades  
Propriedades das translações  
Aplicações das propriedades  
Verificar a aprendizagem ..... 72

## 2.4 Reflexão deslizante. Propriedades das isometrias ..... 75

Reflexão deslizante  
Propriedades das isometrias  
Frisos e simetrias  
Verificar a aprendizagem ..... 81  
Síntese ..... 84  
Atividades globais ..... 86  
Autoavaliação ..... 90  
Estratégias para a resolução  
de problemas e jogos ..... 92  
Investigar ..... 94

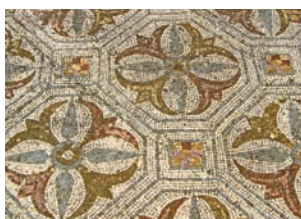
## Atividades iniciais

### As isometrias nas artes

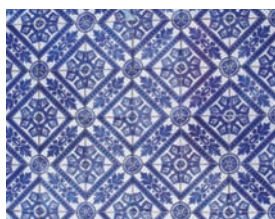
- 1** Desde a Antiguidade que a repetição de um mesmo motivo tem sido usada nos mais variados contextos, dando lugar a composições de grande beleza estética. Esse efeito visual pode ser observado em edifícios, painéis de azulejos, pavimentos de calçada portuguesa, vitrais de igrejas, tecidos, papéis de parede e quadros de artistas famosos.



Calçada (Lisboa)



Mosaico na vila romana de Pisões (Beja)



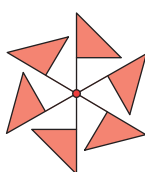
Painel de azulejos (Lisboa)



Mosteiro da Batalha

Uma vez escolhido o motivo, existem formas diferentes de o repetir, usando transformações geométricas chamadas isometrias (rotação e reflexão).

Observa os exemplos:



Rotação

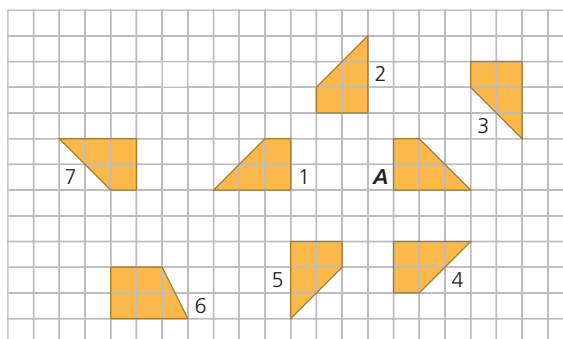


Reflexão

Descreve situações do teu quotidiano em que sejam visíveis isometrias.

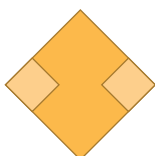
### Identificar isometrias

- 2** Descobre as figuras que podem ser obtidas a partir da figura A por meio de uma isometria. Em cada caso, identifica a isometria.

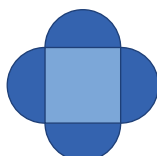


- 3** Determina o número de eixos de simetria das figuras seguintes.

a)



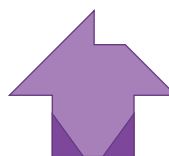
b)



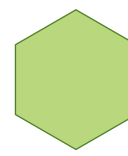
c)



d)



e)



# 2.1

## Segmentos orientados e vetores

### Tarefa 1



- 1 Para cada fotografia, reproduz o motivo mínimo que se repete por reflexões sucessivas.
- 2 Para descrever uma reflexão, quantas informações são necessárias?
- 3 Desenha um motivo e a sua imagem por uma rotação de modo que se toquem em dois pontos.

### Recorda

Dados dois pontos  $A$  e  $B$ , o segmento de reta  $[AB]$  é o conjunto dos pontos  $A$  e  $B$  e de todos os pontos da reta  $AB$  compreendidos entre  $A$  e  $B$ .

A reta  $AB$  designa-se por reta suporte do segmento de reta  $[AB]$ .

Os pontos  $A$  e  $B$  designam-se por extremos do segmento de reta  $[AB]$ .

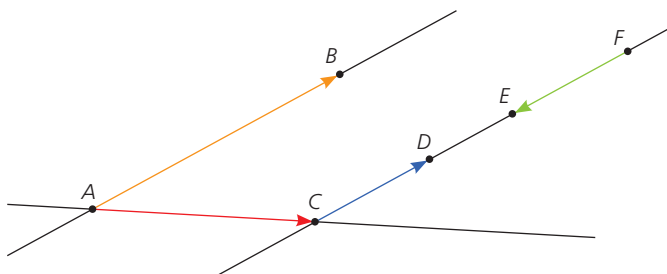
Ao escolhermos no segmento de reta  $[AB]$  uma origem de entre os dois extremos definimos um **segmento orientado**.

O segmento orientado  $[A,B]$  tem **origem**  $A$  e **extremidade**  $B$ .

A reta  $AB$  é a **reta suporte** do segmento orientado  $[A,B]$ .

### Segmentos orientados

Vamos estabelecer comparações entre segmentos orientados. Na figura seguinte as retas  $AB$  e  $CD$  são paralelas. Os pontos  $E$  e  $F$  pertencem à reta  $CD$ .



A reta suporte do segmento orientado  $[A,B]$  é paralela à reta suporte do segmento orientado  $[C,D]$  e também do segmento orientado  $[F,E]$ . A reta suporte do segmento orientado  $[F,E]$  é coincidente com a reta suporte do segmento orientado  $[C,D]$ . Pode afirmar-se que os segmentos orientados  $[A,B]$ ,  $[C,D]$  e  $[F,E]$  têm a mesma direção.

O segmento orientado  $[A,C]$  não tem a mesma direção do segmento orientado  $[A,B]$  porque as suas retas suportes não são paralelas nem coincidentes.

Dois segmentos orientados têm a mesma **direção** quando as respetivas retas suportes forem paralelas ou coincidentes.

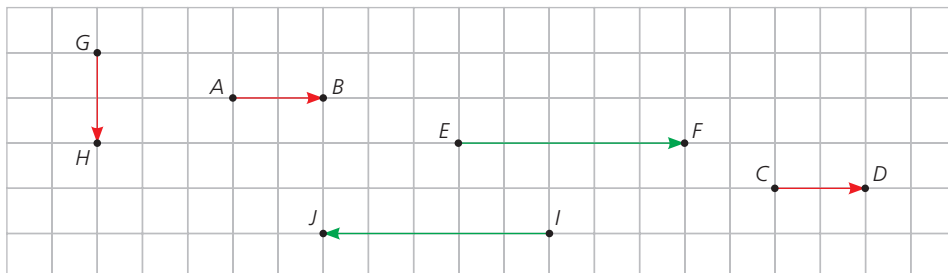
Quando dois segmentos orientados têm a mesma direção, podem ter o mesmo sentido ou sentidos opostos. Considerando a figura anterior, pode verificar-se que o segmento orientado  $[A,B]$  tem o mesmo sentido que o segmento orientado  $[C,D]$ , porque as semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  têm o mesmo sentido. Os segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[F,E]$  têm sentidos opostos porque as semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{FE}$  têm a mesma direção mas não o mesmo sentido.

Dois segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[C,D]$  têm a **mesma direção e sentido** ou simplesmente **o mesmo sentido** quando as semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  têm o mesmo sentido.

Dois segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[C,D]$  têm **sentidos opostos** quando as semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  têm a mesma direção, mas não o mesmo sentido.

Ainda na figura anterior podem identificar-se os segmentos orientados  $[C,D]$  e  $[F,E]$  com sentidos opostos. Os segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[A,C]$  não têm a mesma direção, pelo que não têm o mesmo sentido e também não têm sentidos opostos.

Na figura seguinte estão representados cinco segmentos orientados  $[A,B]$ ,  $[C,D]$ ,  $[E,F]$ ,  $[G,H]$  e  $[I,J]$ .



Os segmentos de reta  $[AB]$ ,  $[CD]$  e  $[GH]$  têm o mesmo comprimento, assim, os segmentos orientados  $[A,B]$ ,  $[C,D]$  e  $[G,H]$  também terão o mesmo comprimento. Os segmentos orientados  $[E,F]$  e  $[I,J]$  também têm o mesmo comprimento.

Dados dois pontos  $A$  e  $B$ , o **comprimento** do segmento orientado  $[A,B]$  é o comprimento do segmento de reta  $[AB]$ , ou seja, é a distância entre  $A$  e  $B$ .

Considerando na figura anterior a grelha constituída por quadrados com uma unidade de lado, pode dizer-se que o comprimento dos segmentos orientados  $[A,B]$ ,  $[C,D]$  e  $[G,H]$  é duas unidades. O comprimento dos segmentos orientados  $[E,F]$  e  $[I,J]$  é cinco unidades.

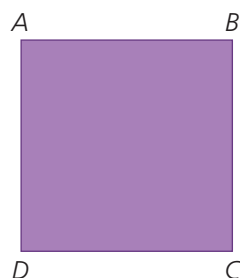
Dado um ponto  $A$ , o segmento de reta  $[AA]$  e o **segmento orientado**  $[A,A]$  de extremos ambos iguais a  $A$  coincidem com o ponto  $A$ . A medida do comprimento de  $[AA]$  e a distância de  $A$  a ele próprio é 0 unidades (em qualquer unidade de medida). O segmento orientado  $[A,A]$  tem direção e sentido indefinidos.

Exemplo:

Na figura, está representado o quadrado  $[ABCD]$ .

Os segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[D,C]$ :

- têm a mesma direção, pois as suas retas suporte são paralelas;
- têm o mesmo sentido, pois as semirretas  $\dot{A}B$  e  $\dot{D}C$  têm o mesmo sentido;
- têm o mesmo comprimento, pois os segmentos de reta  $[AB]$  e  $[DC]$  têm o mesmo comprimento ( $\overline{AB} = \overline{DC}$ ).



Dois **segmentos orientados** dizem-se **equipolentes** quando têm a **mesma direção**, o **mesmo sentido** e o **mesmo comprimento**.

Considera a última figura da página anterior. Os segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[D,C]$  são equipolentes. Também são equipolentes os segmentos orientados:

- $[A,D]$  e  $[B,C]$ ;
- $[B,A]$  e  $[C,D]$ ;
- $[D,A]$  e  $[C,B]$ .

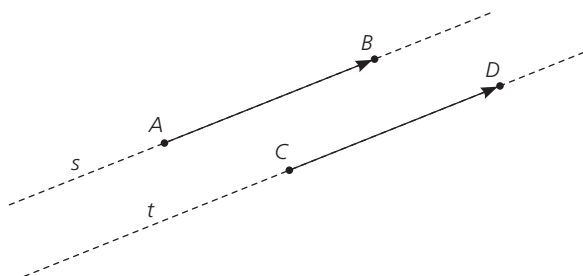
Não são equipolentes os segmentos orientados:

- $[A,B]$  e  $[C,D]$ , porque não têm o mesmo sentido;
- $[A,B]$  e  $[A,D]$ , porque não têm a mesma direção;
- $[A,B]$  e  $[A,A]$ , porque não têm o mesmo comprimento.

Dois segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[C,D]$ , de retas suportes distintas, são equipolentes quando (e apenas quando)  $[ABDC]$  é um paralelogramo.

### Demonstração:

Consideremos duas retas distintas  $s$  e  $t$  e dois segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[C,D]$ , tais que  $[AB]$  está contido em  $s$  e  $[CD]$  está contido em  $t$ .



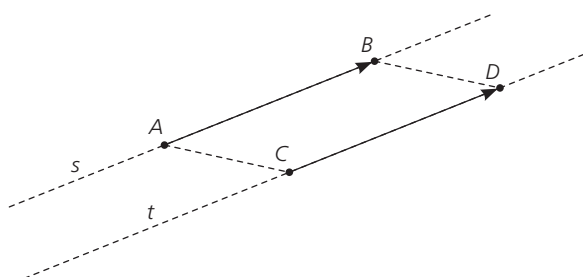
Pretende começar-se por provar que se  $[A,B]$  e  $[C,D]$  são equipolentes, então,  $[ABDC]$  é um paralelogramo.

Se os segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[C,D]$  são equipolentes, então têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Como  $[A,B]$  e  $[C,D]$  têm a mesma direção, o quadrilátero  $[ABDC]$  tem os lados  $[AB]$  e  $[CD]$  paralelos. Assim,  $[ABDC]$  é um trapézio. Como  $[A,B]$  e  $[C,D]$  têm o mesmo comprimento, o trapézio tem as bases iguais, pelo que  **$[ABDC]$  é um paralelogramo.**

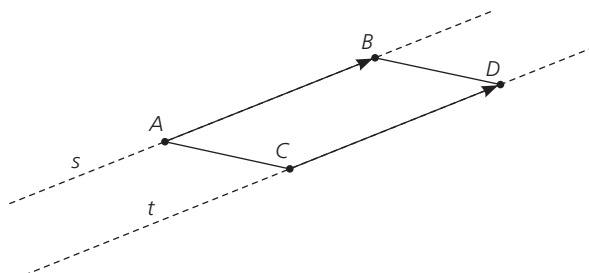
### Recorda

Todo o trapézio com bases iguais é um paralelogramo.



Para terminar a demonstração, vamos provar o recíproco, isto é, que se  $[ABDC]$  é um paralelogramo, então,  $[A,B]$  e  $[C,D]$  são equipolentes.

Dado que  $[ABDC]$  é um paralelogramo, então,  $[A,B]$  e  $[C,D]$  têm a mesma direção e o mesmo comprimento, já que são lados opostos de um paralelogramo.



Como  $AC$  e  $BD$  são paralelas, não se intersectam, pelo que  $B$  e  $D$  estão no mesmo semiplano de fronteira  $AC$ , ou seja, as semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  têm o mesmo sentido, logo, os segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[C,D]$  são segmentos orientados com a mesma direção e o mesmo sentido. **Conclui-se assim que os segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[C,D]$  são equipolentes.**

#### Exercícios resolvidos

Na figura, está representado o retângulo  $[ABCD]$ .



1. Quantos segmentos orientados diferentes, com os extremos distintos, podes definir com os quatro vértices da figura?
2. Identifica dois pares de segmentos orientados:
  - a) com a mesma direção;
  - b) com o mesmo sentido;
  - c) com o mesmo comprimento;
  - d) com a mesma origem;
  - e) equipolentes.

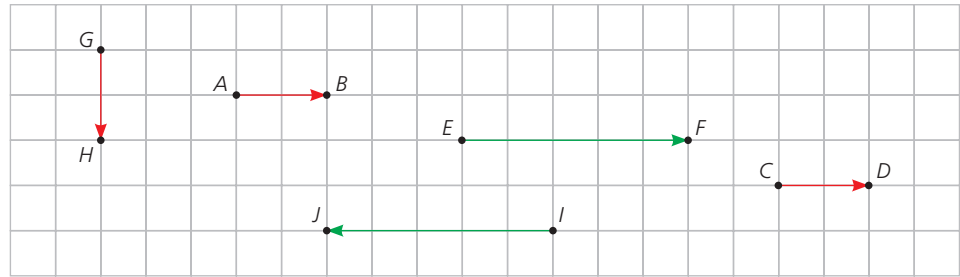
#### Resolução:

1. Dois vértices distintos definem dois segmentos orientados. Por exemplo,  $A$  e  $B$  definem  $[A,B]$  e  $[B,A]$ . Assim, com as letras da figura podem ser definidos 12 segmentos orientados diferentes.
2.
  - a) Por exemplo, os segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[B,A]$  têm a mesma direção, tal como  $[A,D]$  e  $[B,C]$ .
  - b) Por exemplo, os segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[D,C]$  têm o mesmo sentido, tal como  $[B,A]$  e  $[C,D]$ .
  - c) Por exemplo, os segmentos orientados  $[A,C]$  e  $[D,B]$  têm o mesmo comprimento, tal como  $[A,D]$  e  $[C,B]$ .
  - d) Por exemplo, os segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[A,C]$  têm a mesma origem, tal como  $[D,A]$  e  $[D,C]$ .
  - e) Por exemplo, os segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[D,C]$  são equipolentes, pois têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento, tal como os segmentos orientados  $[D,A]$  e  $[C,B]$ .



## ■ Noção de vetor

Consideremos novamente a figura:



Os segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[C,D]$  são equipolentes. Dizemos que determinam o mesmo vetor.

Os segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[E,F]$  não são equipolentes. Dizemos que determinam vetores distintos.

Um **vetor** fica determinado por um segmento orientado de tal modo que segmentos orientados equipolentes determinam o mesmo vetor e segmentos orientados não equipolentes determinam vetores distintos.

Os segmentos orientados que determinam um vetor são designados por **representantes do vetor**.

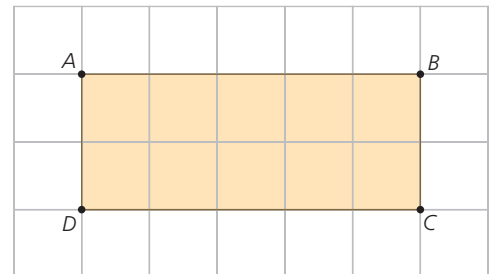
O vetor determinado pelo segmento orientado  $[A,B]$  representa-se por  $\vec{AB}$ .

A **direção**, o **sentido** e o **comprimento** de um vetor é a direção, o sentido e o comprimento de qualquer um dos seus representantes.

Exemplo:

Na figura ao lado, está representado o retângulo  $[ABCD]$ .

Os segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[D,C]$  são equipolentes, logo, determinam o mesmo vetor que pode ser representado por  $\vec{AB}$  ou por  $\vec{DC}$  ( $\vec{AB} = \vec{DC}$ ).



Os segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[A,D]$  não são equipolentes, logo, determinam vetores distintos. Assim, são distintos os vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{AD}$  ( $\vec{AB} \neq \vec{AD}$ ).

Também são distintos os vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{BA}$ , porque os segmentos orientados  $[A,B]$  e  $[B,A]$  têm sentidos opostos, logo, não são equipolentes.

Os segmentos orientados de extremos iguais determinam o **vetor nulo**, que pode ser representado por  $\vec{0}$ .

No exemplo anterior, os segmentos orientados  $[A,A]$ ,  $[B,B]$ ,  $[C,C]$  e  $[D,D]$  são todos representantes do vetor nulo  $\vec{0}$  ( $\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{CC} = \vec{DD} = \vec{0}$ ).

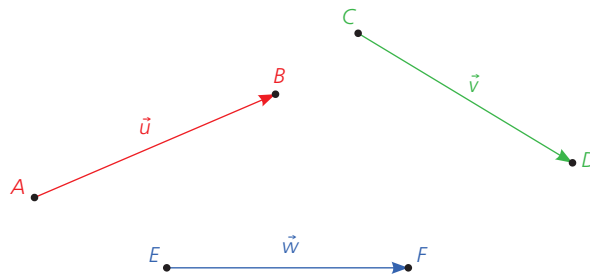
Um vetor também pode ser representado por uma letra minúscula, por exemplo,  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$ . A seta por cima da letra aponta sempre para a direita.

Exemplo:

O vetor  $\overrightarrow{AB}$  também está representado por  $\vec{u}$ .

O vetor  $\overrightarrow{CD}$  também está representado por  $\vec{v}$ .

O vetor  $\overrightarrow{EF}$  também está representado por  $\vec{w}$ .



Dois vetores, não nulos, dizem-se:

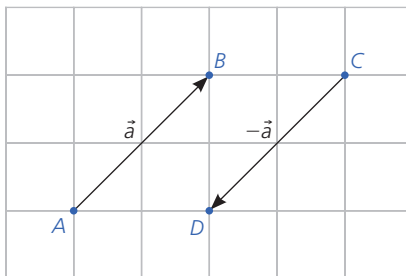
- **colineares**, quando têm a mesma direção;
- **simétricos**, quando têm a mesma direção, o mesmo comprimento e sentidos opostos.

O vetor simétrico de um vetor  $\vec{u}$  representa-se por  $-\vec{u}$ .

Considera-se que o vetor nulo  $\vec{0}$  é colinear com qualquer outro vetor e simétrico dele próprio.

Exemplo:

Os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  são simétricos. Se se representar o vetor  $\overrightarrow{AB}$  por  $\vec{a}$ , então, pode representar-se o vetor  $\overrightarrow{CD}$  por  $-\vec{a}$ . Também se pode escrever  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ .



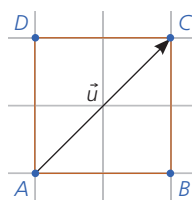
Nota ainda que dados dois pontos  $P$  e  $Q$ , os vetores  $\overrightarrow{PQ}$  e  $\overrightarrow{QP}$  são simétricos:

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}.$$

### Exercício resolvido

Na figura está representado o quadrado  $[ABCD]$  e o vetor  $\vec{u}$ . Utilizando os vértices do quadrado representado, indica:

- dois vetores, diferentes, não colineares com o vetor  $\vec{u}$ ;
- um vetor com o mesmo comprimento do vetor  $\vec{u}$ , mas com direção diferente;
- o vetor simétrico do vetor  $\vec{u}$ ;
- dois representantes do vetor nulo.



### Resolução:

- Por exemplo, o vetor  $\overrightarrow{AB}$  e o vetor  $\overrightarrow{AD}$ .
- Por exemplo, o vetor  $\overrightarrow{BD}$ .
- O vetor  $\overrightarrow{CA}$ .
- Por exemplo,  $[A,A]$  e  $[B,B]$ .

### O que deves saber

- Compreender as noções de segmento orientado e de vetor.
- Identificar, representar e utilizar os termos «direção», «sentido» e «comprimento» de um segmento orientado e de um vetor.

## Verificar a aprendizagem

### NOÇÃO DE SEGMENTO ORIENTADO

- 1 Certos movimentos podem ser representados por segmentos orientados, em que a direção e o sentido são representados pela direção e pelo sentido do segmento orientado e o comprimento do deslocamento representado pelo comprimento do mesmo segmento orientado. Em que situação não ocorre um movimento que se possa representar por um segmento orientado? Escolhe a opção correta.

A. Elevador

B. Janela deslizante

C. Prego

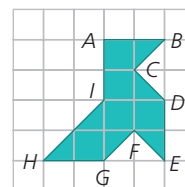
D. Ponteiros



- 2 Considera a imagem ao lado.

Indica dois segmentos orientados com:

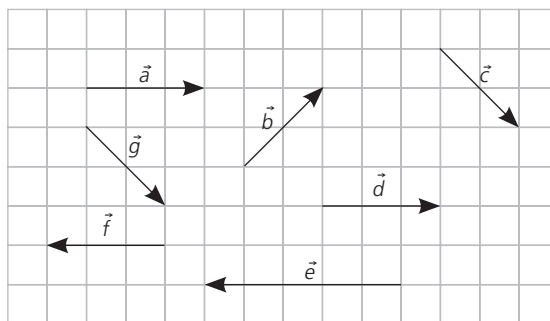
- a) a mesma direção, mas comprimentos diferentes.
- b) a mesma direção e o mesmo comprimento, mas sentidos opostos.
- c) direções diferentes, mas com o mesmo comprimento.
- d) a mesma origem e direções diferentes.



### AUTOAVALIAÇÃO Compreendo a noção de segmento orientado?

### NOÇÃO DE VETOR

- 3 Desenha um vetor com 3 cm de comprimento e direção vertical, sentido de baixo para cima. Designa a origem por A e a extremidade por B.
- 4 Considera os vetores da figura seguinte.



- 4.1 Os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{e}$  têm a mesma direção?
- 4.2 Os vetores  $\vec{d}$  e  $\vec{f}$  têm o mesmo sentido?
- 4.3 Os vetores  $\vec{b}$  e  $\vec{g}$  têm o mesmo comprimento?
- 4.4 Indica um vetor com a mesma direção e o mesmo sentido que  $\vec{e}$ .
- 4.5 Indica um vetor igual a  $\vec{g}$ .

- 5 Se M é o ponto médio do segmento de reta [AB], o que se pode dizer sobre  $\vec{AM}$  e  $\vec{BM}$ ?

### AUTOAVALIAÇÃO Compreendo a noção de vetor?

## Aplicar

- 6 As forças que atuam sobre um corpo (peso, resistência do ar, etc.) não se veem, mas representam-se por vetores cujo comprimento indica a intensidade da força.

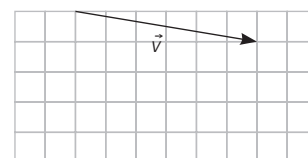
Em cada caso, descreve a direção e o sentido de cada uma das forças.



- 7 Considera o vetor  $\vec{v}$  representado na grelha quadriculada.

Copia a figura e desenha um vetor com:

- a) o dobro do comprimento do vetor  $\vec{v}$ ;  
b) o sentido oposto ao do vetor  $\vec{v}$ .



- 8 No centro de uma página, constrói um retângulo  $[ABCD]$  com  $\overline{AB} = 4$  cm e  $\overline{BC} = 3$  cm.

Com os vértices da figura, indica todos os vetores:

- a) colineares com  $\overline{AB}$ ;  
b) com comprimento igual a 4 cm;  
c) com o mesmo sentido do vetor  $\overline{CB}$ .



- 9 Num ambiente de Geometria Dinâmica, desenha um triângulo equilátero  $[ABC]$ .

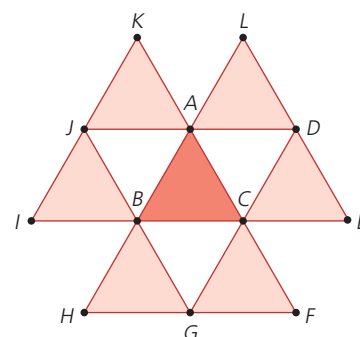
9.1 Recorrendo apenas a reflexões, constrói os nove triângulos à volta do triângulo  $[ABC]$ .

9.2 Com os vértices dos triângulos da figura, quantos segmentos orientados equipolentes ao segmento orientado  $[I, K]$  se podem definir?

9.3 Com os vértices dos triângulos da figura, quantos vetores colineares com o vetor  $\overline{AB}$  se podem definir?

9.4 Quantas direções diferentes são visíveis na figura?

NOTA: Sobre Geometria Dinâmica, consulta a página 94.



## Tarefas de investigação

- 10 Dois pontos, A e B, permitem criar dois vetores diferentes:  $\overline{AB}$  e  $\overline{BA}$ .

10.1 Mostra que três pontos permitem criar, no máximo, 6 vetores diferentes e, no mínimo (dependendo da posição dos pontos), 4 vetores diferentes.

10.2 Quantos vetores diferentes se podem criar com 4 pontos, no máximo e no mínimo?

10.3 Copia e completa a tabela e procura uma regularidade no número máximo de vetores.

| N.º de pontos         | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----------------------|---|---|---|---|---|
| N.º máximo de vetores | 2 | 6 |   |   |   |

- 11 Faz uma recolha de fotografias que ilustrem vetores no dia a dia.

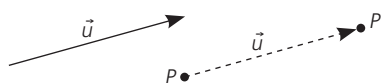
## Tarefa 2



- 1 Identifica o que a ampliação altera, mas a reflexão preserva.
- 2 O que ambas preservam?
- 3 Através de uma reflexão axial, refere qual é a imagem de:
  - a) um segmento de reta;
  - b) um ângulo.

### ■ Noção de translação

Dado um ponto  $P$  e um vetor  $\vec{u}$ , pode encontrar-se um representante do vetor  $\vec{u}$  com origem no ponto  $P$  e extremidade num ponto  $P'$ .

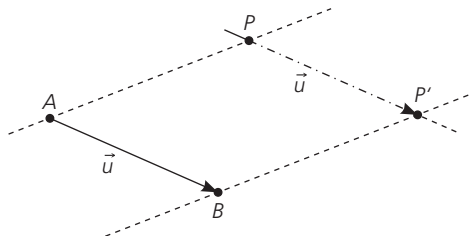


Estes dois pontos definem assim um segmento orientado  $[P, P']$  que é um representante do vetor  $\vec{u}$ ; pode escrever-se  $\vec{u} = \overrightarrow{PP'}$ .

Dados um ponto  $P$  e um vetor  $\vec{u}$ , existe um único ponto  $P'$  tal que  $\vec{u} = \overrightarrow{PP'}$ ; designa-se  $P'$  por  $P + \vec{u}$ .

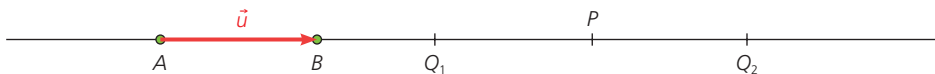
#### Demonstração:

Dado um ponto  $P$  e um vetor  $\vec{u}$ , determinado por um segmento orientado  $[A, B]$ , se  $\vec{u}$  não for o vetor nulo, ou seja, se  $A$  e  $B$  forem pontos distintos, e a reta  $AB$  não passar por  $P$ , pode construir-se um paralelogramo  $[ABP'P]$ , ficando o ponto  $P'$  determinado de maneira única como o ponto interseção da reta paralela a  $AB$  passando por  $P$  com a reta paralela a  $AP$  passando por  $B$ .



Como  $[ABP'P]$  é um paralelogramo, os segmentos orientados  $[A, B]$  e  $[P, P']$  são equipolentes, ou seja,  $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$ .

Se  $P$  estiver na reta  $AB$ , existem exatamente dois pontos  $Q_1$  e  $Q_2$  tais que  $\overrightarrow{PQ_1} = \overrightarrow{PQ_2} = \overrightarrow{AB}$ , um em cada semirreta da reta suporte  $AB$  e origem em  $P$ , como mostra a figura seguinte.



No entanto, só para um deles, neste caso,  $Q_2$ ,  $\vec{AB}$  e  $\vec{PQ}_2$  têm o mesmo sentido, obtendo-se portanto,  $\vec{u} = \vec{PQ}_2$ .

Concluiu-se que existe um ponto  $P'$  com a propriedade requerida. Porém, é necessário provar ainda que  $P'$  é único. Ora, a unicidade de  $P'$ , tal que  $\vec{PP'} = \vec{u}$ , pode ser provada, muito simplesmente, notando que se trata do único ponto à distância de  $P$  igual ao comprimento do vetor  $\vec{u}$ , situado na única reta passando por  $P$  paralela (ou coincidente com) a reta  $AB$  e na única semirreta de origem  $P$  dessa reta com o mesmo sentido de  $\vec{AB}$ .

Resta apenas examinar o caso do vetor nulo. Como o vetor nulo é determinado pelos segmentos orientados  $[A,A]$  (sendo  $A$  um ponto arbitrário), e apenas por esses, o único ponto  $P'$ , tal que  $\vec{0} = \vec{PP'}$  é o próprio ponto  $P$ .

Estas propriedades permitem definir sem ambiguidade o que se entende por  $P + \vec{u}$  (trata-se exatamente do ponto  $P'$  acima definido nos diversos casos); em particular, verificámos que  $P + \vec{0} = P$ .

**Dado um vetor  $\vec{u}$ , a um ponto  $P$  corresponde-lhe um único ponto  $P + \vec{u}$ .** Temos assim uma nova aplicação.

Dado um vetor  $\vec{u}$  a aplicação, que a um ponto  $P$  associa o ponto  $P + \vec{u}$ , designa-se por **translação de vetor  $\vec{u}$**  e representa-se por  $T_{\vec{u}}$ . A imagem do ponto  $P$  representa-se por  $T_{\vec{u}}(P)$ .

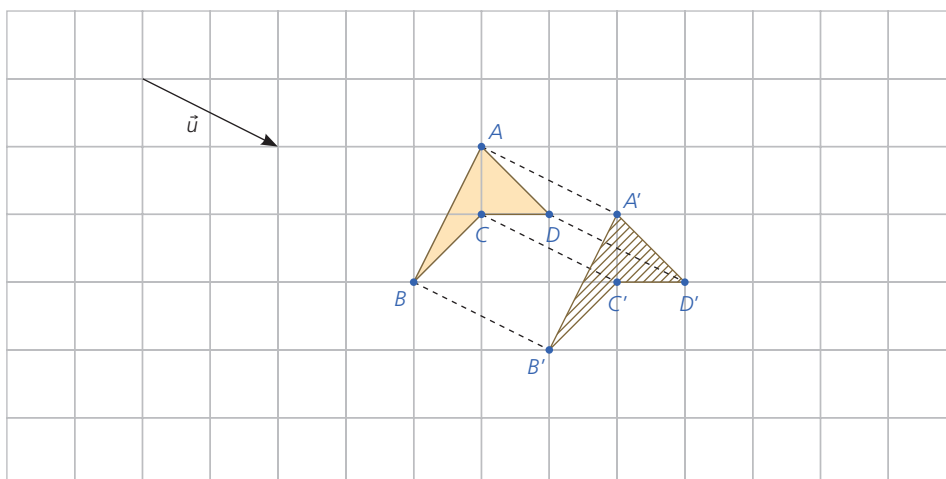
$$T_{\vec{u}}(P) = P + \vec{u}$$

Exemplo:

Considere-se o vetor  $\vec{u}$  e o quadrilátero  $[ABCD]$  da figura seguinte.

A imagem do ponto  $A$  pela translação de vetor  $\vec{u}$  é o ponto  $A'$ , tal que  $\vec{AA'} = \vec{u}$ , isto é,  $A' = A + \vec{u}$ .

Da mesma forma,  $B'$  é a imagem de  $B$ ,  $C'$  é a imagem de  $C$  e  $D'$  é a imagem de  $D$ .





Escreve-se:

$$T_{\vec{u}}(A) = A + \vec{u} = A'$$

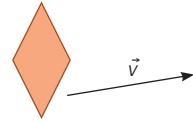
$$T_{\vec{u}}(B) = B + \vec{u} = B'$$

$$T_{\vec{u}}(C) = C + \vec{u} = C'$$

$$T_{\vec{u}}(D) = D + \vec{u} = D'$$

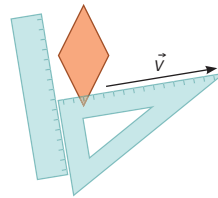
### Exercícios resolvidos

Desenha as imagens dos vértices do losango apresentado ao lado, através da translação de vetor  $\vec{v}$ .

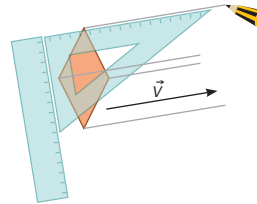


#### Resolução:

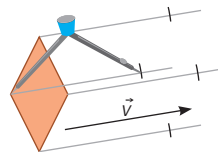
1.º Com a régua e o esquadro, fixa-se a direção do vetor.



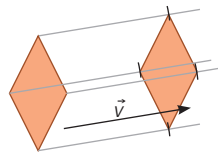
2.º Faz-se deslizar o esquadro e traçam-se paralelas a partir de cada vértice.



3.º Abre-se o compasso com o comprimento do vetor e marcam-se os pontos transformados dos vértices.



4.º Se unirmos os vértices, obtemos um novo losango.



### O que deves saber

- Noção de translação.
- Efetuar a translação de vetor  $\vec{u}$ .

## Verificar a aprendizagem

### NOÇÃO DE TRANSLAÇÃO

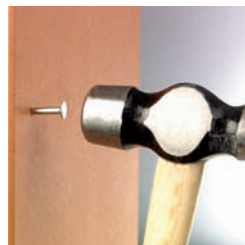
- 1 Em que situação não ocorre um movimento de translação? Escolhe a opção correta.

A. Passadeira

B. Comboio

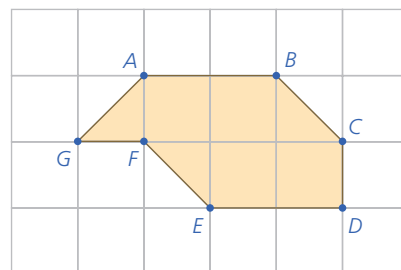
C. Pregos

D. Baloço

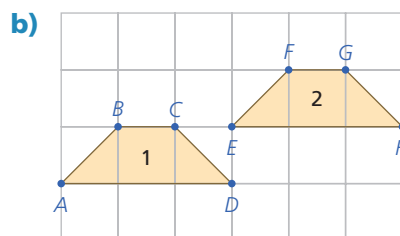
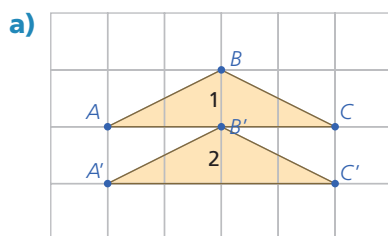


- 2 Reproduz a figura ao lado no centro de uma página do teu caderno. Desenha a imagem dessa figura através de uma translação:

- a) de 8 unidades para a direita;  
b) de 5 unidades para baixo;  
c) de sete unidades para a esquerda e de 3 para cima;  
d) que leve o ponto  $B$  até à posição ocupada pelo ponto  $E$ .



- 3 Para cada par de figuras, identifica as translações que permitem passar da figura 1 para a figura 2.



- 4 Desenha um vetor com 4 unidades de comprimento e direção horizontal, sentido da direita para a esquerda. Designa a origem por  $A$  e a extremidade por  $B$ . Indica o ponto:

a)  $A + \overrightarrow{AB}$

b)  $B + (-\overrightarrow{AB})$

c)  $T_{\overrightarrow{AB}}(A)$

d)  $T_{\vec{0}}(B)$

- 5 Copia para o centro de uma folha quadriculada os quatro vetores e o ponto  $P$  da figura.

5.1 Desenha as imagens do ponto  $P$  pelas translações de vetor  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  e  $\vec{d}$ , respetivamente. Que figura obtiveste com os quatro pontos imagem?

5.2 Desenha sucessivamente:

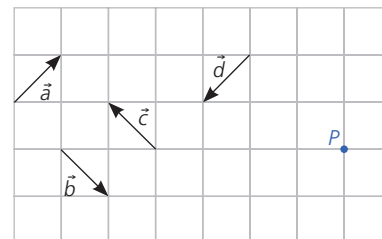
a)  $P_1 = P + \vec{a}$ .

b)  $P_2 = T_{\vec{b}}(P_1)$ .

c)  $P_3 = T_{\vec{c}}(P_2)$ .

d)  $P_4 = T_{\vec{d}}(P_3)$ .

5.2.1 Qual é a relação entre os pontos  $P_4$  e  $P$ ?



- 6 Se  $M$  é o ponto médio do segmento de reta  $[AB]$ , o que podes dizer sobre os pontos  $A + \overrightarrow{MB}$  e  $T_{\overrightarrow{MA}}(B)$ ?

**AUTOAVALIAÇÃO** Compreendo a noção de translação e sei efetuar translações?

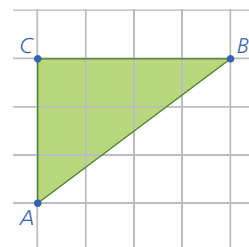
## Aplicar

- 7 A Sofia deslocou um cartaz, efetuando uma translação de vetor  $\vec{v}$ . Copia a figura e desenha o cartaz deslocado.



- 8 No centro de uma página, constrói um triângulo retângulo  $[ABC]$  com  $\overline{AB} = 5$  cm e  $\overline{AC} = 3$  cm. Desenha as imagens dos vértices do triângulo pela translação de vetor:

- $\vec{AB}$
- $\vec{AC}$
- $\vec{CB}$



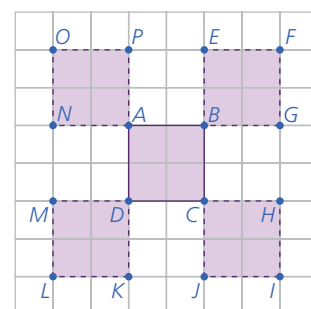
- 9 Num ambiente de Geometria Dinâmica, desenha um quadrado  $[ABCD]$ .

- 9.1 Recorrendo apenas a translações, constrói os vértices dos quatro quadrados em torno do quadrado  $[ABCD]$ , conforme indicado na figura ao lado.

- 9.2 Para cada um dos quatro quadrados, indica o vetor da translação que transforma os vértices do quadrado  $[ABCD]$  nos vértices desse quadrado. (Indica um vetor para cada um dos quatro quadrados.)

- 9.3 Indica quatro vetores iguais a  $\vec{CD}$ .

- 9.4 Para cada um dos quatro quadrados, em torno do quadrado  $[ABCD]$ , indica o vetor da translação que transforma cada um desses quadrados no quadrado  $[ABCD]$ .

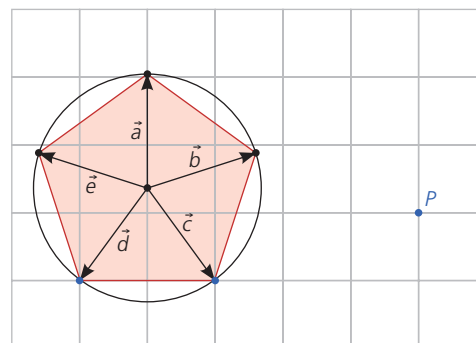


NOTA: Sobre Geometria Dinâmica, consulta a página 94.

## Tarefas de investigação

- 10 Num ambiente de Geometria Dinâmica, constrói um pentágono regular e com o centro e os vértices define os vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  e  $\vec{e}$  como na figura.

- 10.1 Constrói a imagem  $P_1$  do ponto  $P$  pela translação de vetor  $\vec{a}$ . Constrói a imagem  $P_2$  do ponto  $P_1$  pela translação de vetor  $\vec{b}$  e, assim sucessivamente, constrói os pontos  $P_3$ ,  $P_4$  e  $P_5$  aplicando as translações de vetores  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  e  $\vec{e}$ , respetivamente. Que figura se obtém com os 5 pontos construídos? Qual é a relação entre os pontos  $P$  e  $P_5$ ?



- 10.2 Constrói um hexágono regular e verifica o que ocorre quando repetes o procedimento da questão anterior. Que figura obténs com os 6 pontos construídos? Que relação há entre os pontos  $P$  e  $P_6$ ?

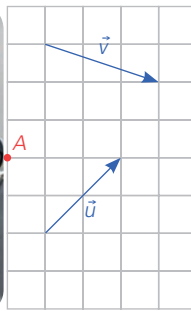
- 10.3 Investiga se ocorre o mesmo com outros polígonos regulares como o triângulo equilátero, o quadrado ou o heptágono.

- 11 Faz uma recolha de fotografias que ilustrem as translações no dia a dia.

## 2.3

# Composição de translações e adição de vetores

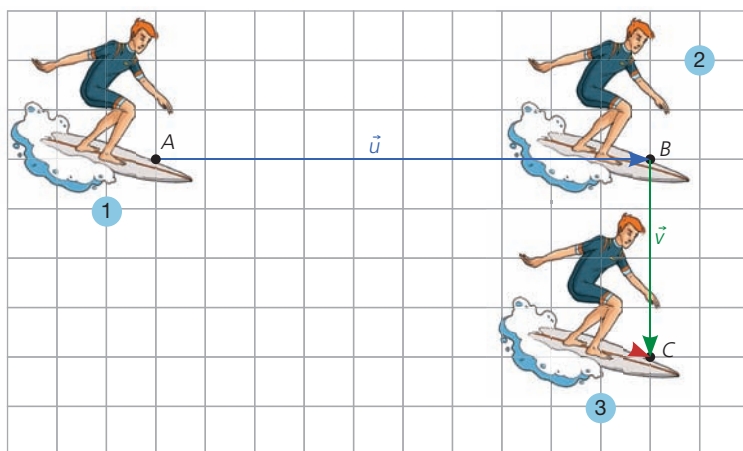
### Tarefa 3



- 1 Em cada caso, indica a posição do ponto A após a translação  $T_{\vec{u}}$  seguida da translação  $T_{\vec{v}}$ .
- 2 Comenta a afirmação: «Duas translações seguidas podem ser substituídas por uma única.»

### Composição de translações

Na situação que se segue, a figura ① desloca-se segundo a translação  $T_{\vec{u}}$ , transformando-se assim na figura ②. Depois, a figura ② desloca-se segundo a translação  $T_{\vec{v}}$ , dando origem à figura ③.



#### Nota

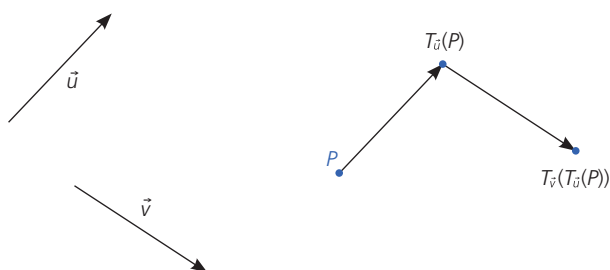
**Compor** duas translações significa efetuar uma a seguir à outra.

A figura ③ é a imagem da figura ① através de duas translações consecutivas,  $T_{\vec{u}}$  e  $T_{\vec{v}}$ .

Dados vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , a **composta da translação  $T_{\vec{v}}$  com a translação  $T_{\vec{u}}$**  é a aplicação que consiste em aplicar a um ponto  $P$  a translação  $T_{\vec{u}}$  e, de seguida, a translação  $T_{\vec{v}}$  ao ponto  $T_{\vec{u}}(P)$  obtido.

Exemplo:

Na figura ao lado estão representados dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e a imagem de um ponto  $P$  pela translação de vetor  $\vec{u}$  seguida da translação de vetor  $\vec{v}$ .



Como  $T_{\vec{u}}(P) = P + \vec{u}$ , temos que:

$$\begin{aligned} T_{\vec{v}}(T_{\vec{u}}(P)) &= T_{\vec{u}}(P) + \vec{v} = \\ &= (P + \vec{u}) + \vec{v} \end{aligned}$$

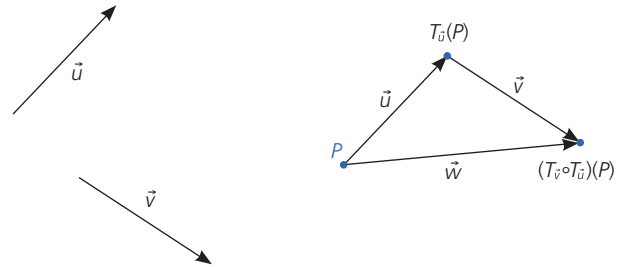
Representa-se por  $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$  a composta da translação  $T_{\vec{v}}$  com a translação  $T_{\vec{u}}$ . Dado um ponto  $P$ :

$$(T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}})(P) = (P + \vec{u}) + \vec{v}$$

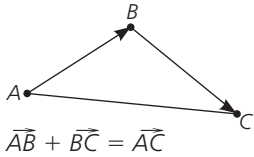
A expressão  $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$  também se lê  $T_{\vec{v}}$  após  $T_{\vec{u}}$ .

Se representarmos por  $\vec{w}$  o vetor com origem  $P$  e extremidade  $(T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}})(P)$ , a translação de vetor  $\vec{w}$ ,  $T_{\vec{w}}$ , coincide com  $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$ .

Diz-se que o vetor  $\vec{w}$  é a **soma** dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ :  
 $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$



#### Nota



A aplicação  $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$  é uma translação de vetor  $\vec{w}$ , tal que se  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $C$  é a extremidade do representante de  $\vec{v}$  de origem  $B$  ( $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ ), então,  $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ .

Designa-se  $\vec{w}$  por  $\vec{u} + \vec{v}$ , isto é,  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ .

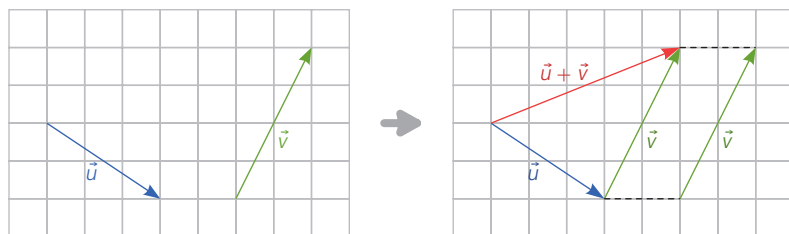
Tem-se ainda que:

$$(P + \vec{u}) + \vec{v} = T_{\vec{v}}(T_{\vec{u}}(P)) = (T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}})(P) = T_{\vec{u} + \vec{v}}(P) = P + (\vec{u} + \vec{v})$$

## ■ Adição de vetores e propriedades

### Regra do triângulo

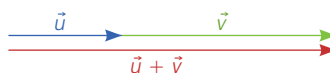
Para adicionar dois vetores,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , faz-se coincidir a extremidade de um representante de  $\vec{u}$  com a origem de um representante de  $\vec{v}$ . O vetor soma tem origem na origem do representante de  $\vec{u}$  e extremidade na extremidade do representante de  $\vec{v}$ .



## Adição de vetores com a mesma direção

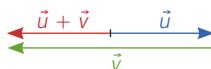
- Quando  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm o mesmo sentido:

O vetor soma tem a mesma direção e o mesmo sentido de  $\vec{u}$  e de  $\vec{v}$ . O seu comprimento é a soma dos comprimentos de  $\vec{u}$  e de  $\vec{v}$ .



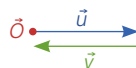
- Quando  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm sentidos contrários e comprimentos diferentes:

O vetor soma tem a mesma direção de  $\vec{u}$  e de  $\vec{v}$  e o sentido do vetor com maior comprimento. O seu comprimento é a diferença entre o maior e o menor dos comprimentos.



- Soma de vetores simétricos:

A soma de dois vetores simétricos é o vetor nulo,  $\vec{0}$ .



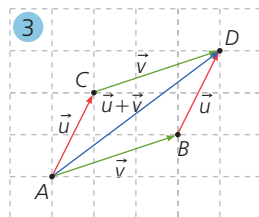
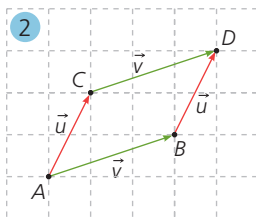
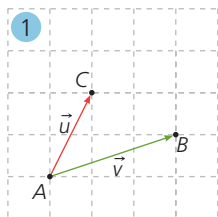
## Regra do paralelogramo

Podem também adicionar-se dois vetores através da regra do paralelogramo:

Consideram-se representantes dos dois vetores que tenham a mesma origem  $A$  (Figura ①) e sejam  $B$  e  $C$  as suas extremidades.

Considera-se um representante de  $\vec{v}$  com origem em  $C$  e um representante de  $\vec{u}$  com origem em  $B$ , obtendo-se assim um paralelogramo  $[ABDC]$  (Figura ②)

Traça-se a diagonal  $[AD]$  do paralelogramo  $[ABDC]$ . O vetor  $\vec{AD}$  é a soma de  $\vec{u}$  com  $\vec{v}$  (Figura ③).

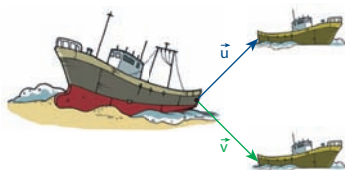


### Exercício resolvido

Duas forças, representadas por dois vetores, podem ser substituídas por uma única força, representada pelo vetor soma.

Um barco encalhado está a ser socorrido por dois rebocadores, conforme ilustrado na figura ao lado.

Qual é a força total aplicada ao barco?

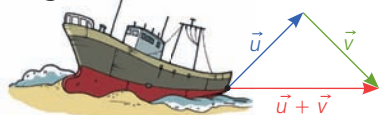


#### Resolução:

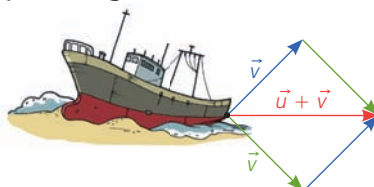
O barco está sujeito a duas forças representadas pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

O vetor que daí resulta é o vetor soma  $\vec{u} + \vec{v}$ .

1.º Processo — Utilizando a definição de soma de vetores (regra do triângulo).



2.º Processo — Utilizando a regra do paralelogramo.





Dados vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , num determinado plano, verifica-se:

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (**propriedade comutativa** da adição de vetores);
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$  (**propriedade de existência de elemento neutro** (vetor nulo) da adição de vetores);
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$  (**propriedade de existência de simétrico** para cada vetor);
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$  (**propriedade associativa** da adição de vetores).

## ■ Propriedades das translações

Ao unir os transformados, por uma translação, dos vértices de uma figura, obtém-se outra figura. Vamos ver como se podem comparar essas figuras.

As translações são isometrias que preservam também a direção e o sentido dos segmentos orientados.

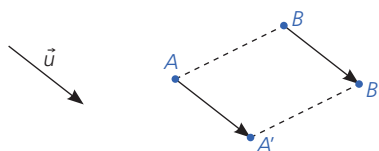
### Recorda

Uma **isometria** caracteriza-se por manter as distâncias entre os pontos, ou seja, se  $A'$  e  $B'$  forem, respetivamente, as imagens de  $A$  e  $B$  por uma dada isometria, então, a distância entre  $A'$  e  $B'$  é igual à distância entre  $A$  e  $B$ , ou seja,  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ .

Além disso, os pontos de  $[A'B']$  são exatamente as imagens dos pontos de  $[AB]$  por essa isometria.

### Demonstração:

Seja  $\vec{u}$  um vetor e  $A$  e  $B$  dois pontos.



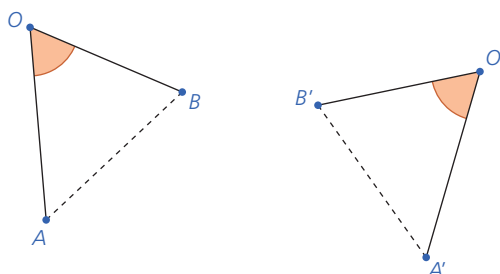
Considerando  $A'$  e  $B'$  os transformados de  $A$  e  $B$  pela translação de vetor  $\vec{u}$ , sabemos que  $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ . Logo,  $[AA'B'B]$  é um paralelogramo. Assim,  $[A,B]$  e  $[A',B']$  são equipolentes, pelo que  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ , o que significa que a translação de vetor  $\vec{u}$  preserva os comprimentos dos segmentos de reta, logo é uma isometria. A translação de vetor  $\vec{u}$  também preserva a direção e o sentido dos segmentos orientados.

Vamos demonstrar outra propriedade das isometrias.

As isometrias preservam a amplitude dos ângulos.

### Demonstração:

Dado um ângulo  $AOB$  e os transformados  $A'$ ,  $O'$  e  $B'$  respetivamente dos pontos  $A$ ,  $O$  e  $B$  por uma isometria, sabemos que  $\overline{AO} = \overline{A'O'}$ ,  $\overline{OB} = \overline{O'B'}$  e  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ . Pelo critério de igualdade de triângulos LLL, os triângulos  $[AOB]$  e  $[A'O'B']$  são iguais, logo, os ângulos  $AOB$  e  $A'O'B'$  têm a mesma amplitude (opõem-se a lados iguais em triângulos iguais).



### Nota

A palavra «isometria» tem a sua origem nas palavras gregas «isos» («igual») e «metron» («medida»).

## ■ Aplicações das propriedades

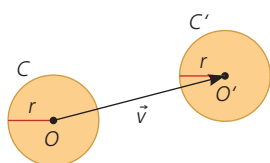
As propriedades das translações são úteis para fazer construções e relacionar figuras ou elementos de figuras entre si.

### Exercício resolvido

Como efetuar a translação de uma circunferência?

#### Resolução:

Como as translações conservam as distâncias, então, o raio de uma circunferência é igual ao raio da sua imagem. Assim, basta fazer a translação do centro e traçar uma circunferência com o mesmo raio.

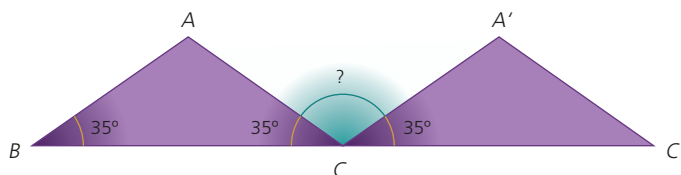


### Exercício resolvido

$[ABC]$  é um triângulo, tal que  $\hat{B} = \hat{C} = 35^\circ$ . As imagens dos pontos A e C pela translação  $T_{\vec{BC}}$  são os pontos A' e C', respectivamente.

- a) Qual é a amplitude do ângulo ACA'?
- b) Como classificas o quadrilátero  $[AA'C'C]$ ?

#### Resolução:



- a) A imagem do ângulo  $ABC$  é o ângulo  $A'CC'$ , logo,  $\hat{A'CC'} = 35^\circ$ .  
Os pontos B, C e C' são colineares, por isso:

$$\hat{ACA'} = 180^\circ - 35^\circ - 35^\circ = 110^\circ$$

- b) Como a imagem por  $T_{\vec{BC}}$  do segmento de reta  $[AC]$  é  $[A'C']$ , os dois segmentos são paralelos e têm o mesmo comprimento, por isso  $[AA'C'C]$  é um paralelogramo.

#### Recorda

- Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.



- Se um quadrilátero tem dois lados paralelos e iguais, então, é um paralelogramo.

#### O que deves saber

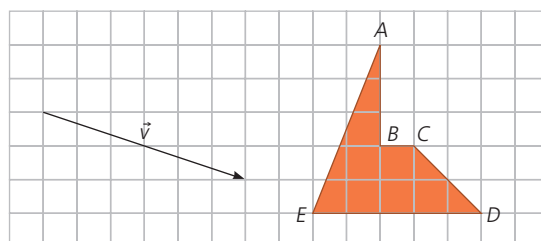
- Compor translações.
- Adicionar vetores. As propriedades da adição de vetores.
- Identificar as propriedades das translações.
- Utilizar as propriedades para justificar raciocínios.

## Verificar a aprendizagem

### IDENTIFICAR E UTILIZAR AS PROPRIEDADES DAS TRANSLAÇÕES

#### Tarefa

- 1 Reproduz o polígono  $[ABCDE]$  e o vetor  $\vec{v}$  numa folha ou num ambiente de Geometria Dinâmica.



- 1.1 Constrói o polígono  $[A'B'C'D'E']$ , que é a imagem de  $[ABCDE]$  pela translação  $T_{\vec{v}}$ .
- 1.2 Compara o comprimento dos segmentos  $[AE]$  e  $[A'E']$ .  
Qual é a posição relativa dos segmentos?
- 1.3 De um modo geral, qual é a imagem de um segmento de reta por uma translação?
- 1.4 Compara a amplitude dos ângulos  $\sphericalangle AED$  e  $\sphericalangle A'E'D'$ .
- 1.5 De um modo geral, qual é a imagem de um ângulo por uma translação?
- 1.6 Copia e completa a afirmação seguinte.  
«As translações conservam ..... e ..... . Assim sendo, a imagem de uma figura é .....»

- 2 Que característica deve ter o vetor  $\vec{u}$  para que a imagem de qualquer figura por  $T_{\vec{u}}$  seja ela própria?

#### AUTOAVALIAÇÃO Sei identificar as propriedades das translações?

- 3 A, B e C são três pontos não alinhados (ou não colineares).  
O ponto D é a imagem do ponto A através da translação associada ao vetor  $\vec{BC}$ .

- 3.1 Qual é a imagem do segmento de reta  $[AB]$ ?
- 3.2 Classifica o quadrilátero  $[ABCD]$ . Justifica a tua resposta.

- 4 Desenha uma circunferência com 3 cm de raio e um vetor  $\vec{v}$  com 5 cm de comprimento.

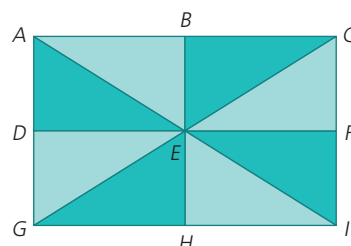
- 4.1 Desenha a imagem da circunferência pela translação  $T_{\vec{v}}$ . Justifica a tua construção.
- 4.2 Qual deve ser o comprimento do vetor de forma que as duas circunferências não se intersetem?

#### AUTOAVALIAÇÃO Sei utilizar as propriedades das translações?

### DETERMINAR IMAGENS

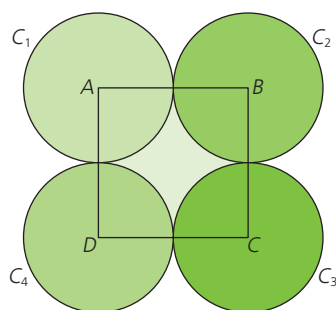
- 5 Em relação à figura à direita, copia e completa:

- |                                   |                                      |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| a) $T_{\vec{BC}}(B) = \dots\dots$ | f) $T_{\vec{BE}}([AB]) = \dots\dots$ |
| b) $T_{\vec{BA}}(E) = \dots\dots$ | g) $T_{\vec{CA}}([CF]) = \dots\dots$ |
| c) $T_{\vec{IF}}(D) = \dots\dots$ | h) $T_{\vec{IC}}([GH]) = \dots\dots$ |
| d) $T_{\vec{AG}}(C) = \dots\dots$ | i) $T_{\vec{AE}}([AD]) = \dots\dots$ |
| e) $T_{\vec{0}}(E) = \dots\dots$  | j) $T_{\vec{GH}}([DE]) = \dots\dots$ |

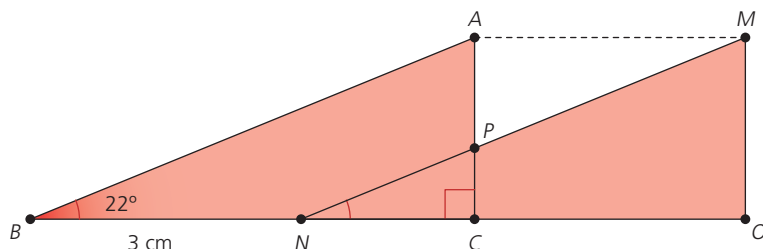


## Aplicar

- 6 Um pacote de leite é colocado no tapete das compras. Designa por  $[AB]$  uma das arestas do pacote que seja perpendicular ao tapete e por  $[A'B']$  a sua imagem após translação. Classifica o quadrilátero  $[ABB'A']$ . Justifica a tua resposta.
- 7 Sabendo que  $[ABCD]$  é um paralelogramo, seleciona a afirmação verdadeira.
- A.  $T_{\vec{DA}}([CD]) = [BA]$       C.  $T_{\vec{BD}}([AB]) = [DC]$   
 B.  $T_{\vec{AD}}([AB]) = [AB]$       D.  $T_{\vec{CB}}([AD]) = [BC]$
- 8 Na figura seguinte,  $[ABCD]$  é um quadrado com 10 cm de lado.  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  são circunferências tangentes de centros  $A, B, C, D$ , respetivamente, e com 5 cm de raio.

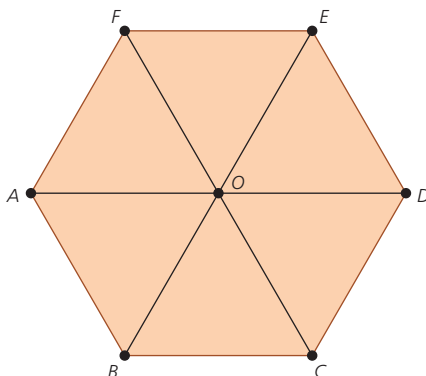


- 8.1 Qual é a imagem de  $C_1$  pela translação  $T_{\vec{BC}}$ ?
- 8.2 Qual é a imagem de  $C_3$  pela translação que transforma  $C$  em  $A$ ?
- 8.3 Qual é a imagem de  $C_4$  pela translação que transforma  $A$  em  $B$ ?
- 8.4 Qual é o vetor da translação que transforma  $C_2$  em  $C_4$ ?
- 9 Sobre a figura, sabe-se que:
- $[ABC]$  é um triângulo retângulo em  $C$ , com  $\hat{B} = 22^\circ$ ;
  - o ponto  $N$  pertence ao segmento de reta  $[BC]$  e é tal que  $\overline{BN} = 3$  cm;
  - o triângulo  $[MNO]$  é a imagem do triângulo  $[ABC]$  pela translação  $T_{\vec{BN}}$ ;
  - os segmentos de reta  $[AC]$  e  $[MN]$  interseitam-se no ponto  $P$ .



- 9.1 Determina a amplitude do ângulo  $APM$ . Justifica a tua resposta.
- 9.2 Refere se a amplitude do ângulo  $APM$  depende da posição do ponto  $N$  no segmento  $[BC]$ .
- 9.3 Classifica o quadrilátero  $[AMOC]$ . Justifica a tua resposta.
- 9.4 Determina a medida do comprimento do segmento de reta  $[CO]$ .

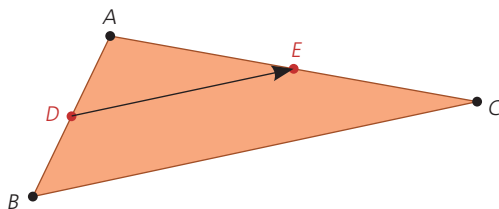
- 10** Na figura, está representado um hexágono regular  $[ABCDEF]$ , cujo centro  $O$  define seis triângulos equiláteros com os vértices de cada lado do hexágono:  $[OAB]$ ,  $[OBC]$ ,  $[OCD]$ ,  $[ODE]$ ,  $[OEF]$  e  $[OFA]$ .



- 10.1** Com os sete pontos da figura, quantos segmentos orientados diferentes podem ser definidos?
- 10.2** Com os sete pontos da figura, quantos vetores diferentes podem ser definidos?
- 10.3** Indica pares de vetores:
- a) com a mesma direção mas sentido e comprimento diferentes;
  - b) com o mesmo sentido mas comprimento diferente;
  - c) com o mesmo comprimento mas direção diferente;
  - d) com o mesmo comprimento e a mesma direção mas sentido diferente.
- 10.4** Indica a translação que transforma:
- a) o ponto  $B$  no ponto  $E$ ;
  - b) o triângulo  $[CDO]$  no triângulo  $[BOA]$ ;
  - c) o paralelogramo  $[OEFA]$  no paralelogramo  $[CDOB]$ ;
  - d) o segmento de reta  $[AF]$  no segmento de reta  $[CD]$ ;
  - e) o ângulo  $AOB$  no ângulo  $FEO$ ;
  - f) o triângulo  $[AFO]$  no triângulo  $[BOC]$ .

### Tarefas de investigação

- 11** Num ambiente de Geometria Dinâmica, constrói um triângulo  $[ABC]$ . Designa por  $D$  o ponto médio de  $[AB]$  e por  $E$  o ponto médio de  $[AC]$ .



Investiga uma relação entre  $\overrightarrow{DE}$  e  $\overrightarrow{BC}$ .

- 12** A Sofia descobriu uma situação curiosa, em que um objeto matemático se desloca por ação de uma translação (associada a um vetor não nulo), mas a sua imagem coincide consigo próprio, como se nunca se tivesse deslocado. Que situação poderá ser essa?

# 2.4

## Reflexão deslizante. Propriedades das isometrias

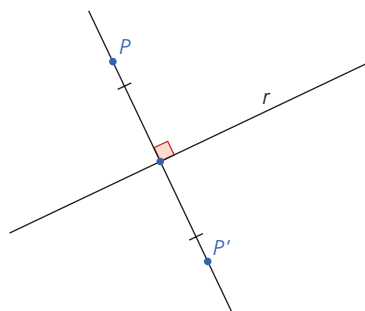
### Tarefa 4



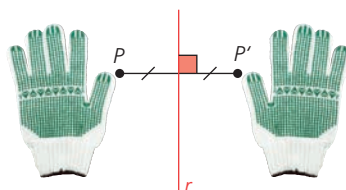
- 1 Que características comuns têm a translação, a rotação e a reflexão?
- 2 Para cada isometria, investiga uma transformação que a anule, ou seja, tal que a imagem de cada figura coincida com a figura inicial.

### Reflexão deslizante

Recorda que para efetuar uma reflexão axial é necessário indicar uma reta  $r$  (**eixo de reflexão**). A imagem  $P'$  de um ponto  $P$  obtém-se traçando uma perpendicular a  $r$ , a partir de  $P$ , e marcando  $P'$  à mesma distância de  $r$  que  $P$ .



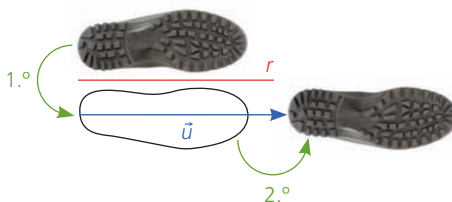
Exemplo:



Algumas transformações podem ser obtidas por composição de outras transformações. A reflexão deslizante é uma dessas transformações.

Uma reflexão deslizante consiste numa reflexão seguida de uma translação associada a um vetor com a mesma direção que o eixo de reflexão.

Exemplo:



Dada uma reflexão de eixo  $r$ , que se designa por  $R_r$ , e um vetor  $\vec{u}$  com a direção da reta  $r$ , a composta da translação  $T_{\vec{u}}$  com a reflexão  $R_r$  é a aplicação que consiste em aplicar a um ponto  $P$  a reflexão  $R_r$  e, em seguida, a translação  $T_{\vec{u}}$  ao ponto  $R_r(P)$  assim obtido. Designa-se esta aplicação,  $T_{\vec{u}} \circ R_r$ , por **reflexão deslizante** de eixo  $r$  e vetor  $\vec{u}$ .

Como as reflexões axiais e as translações preservam a distância entre pontos, também as reflexões deslizantes o fazem, ou seja, as reflexões deslizantes são isometrias.

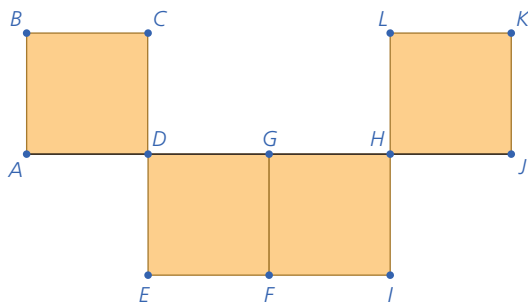


A palavra «**transformação**» em Matemática não significa necessariamente «mudança de forma». Em Geometria, uma transformação é uma função que a cada ponto faz corresponder outro ponto.



## Exercícios resolvidos

1. A figura representada é composta por quatro quadrados iguais. Os pontos  $A, D, G, H$  e  $J$  são colineares.



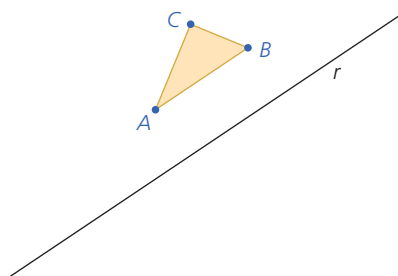
- Identifica o eixo e o vetor associados a uma reflexão deslizante que transforme o quadrado  $[ABCD]$  no quadrado  $[GFIH]$ .
- Identifica duas reflexões deslizantes que transformem o quadrado  $[HJKL]$  no quadrado  $[GHIF]$ .
- Identificas algum eixo de simetria nesta figura? Justifica a tua resposta.

### Resolução:

- Reflexão deslizante de eixo  $AD$  e vetor  $\vec{AG}$ .
  - Uma reflexão deslizante que transforme o quadrado  $[HJKL]$  no quadrado  $[GHIF]$  pode ser definida pelo eixo de reflexão  $HJ$  e pelo vetor  $\vec{HG}$ . Uma outra reflexão deslizante que transforme o quadrado  $[HJKL]$  no quadrado  $[GHIF]$  pode ser definida pelo eixo de reflexão  $LH$  e pelo vetor  $\vec{HI}$ .
  - Um eixo de simetria desta figura é a reta  $GF$  porque o quadrado  $[IFGH]$  é a imagem do quadrado  $[EFGD]$  pela reflexão de eixo  $GF$  e o quadrado  $[JHLK]$  também é a imagem do quadrado  $[ADCB]$  pela reflexão de eixo  $GF$ .

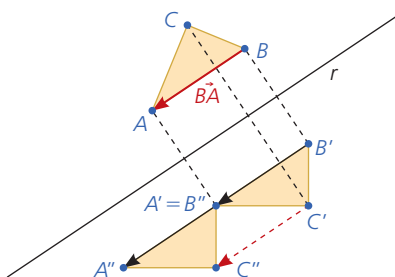
2. Na figura ao lado estão representados o triângulo  $[ABC]$  e a reta  $r$ . As retas  $AB$  e  $r$  são paralelas.

Constrói a imagem  $[A''B''C'']$  do triângulo  $[ABC]$  através da reflexão deslizante de eixo  $r$  e vetor  $\vec{BA}$ .



### Resolução:

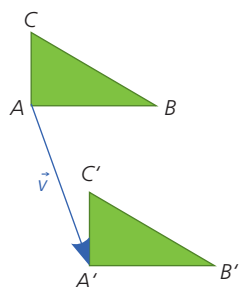
2.



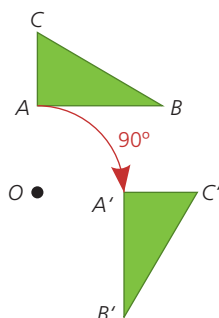
## ■ Propriedades das isometrias

As **isometrias** são transformações que preservam a distância entre pontos. Existem apenas quatro tipos de isometrias no plano: a **translação**, a **rotação**, a **reflexão** e a **reflexão deslizante**.

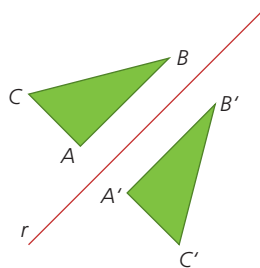
Observe a imagem do triângulo  $[ABC]$  através de cada isometria:



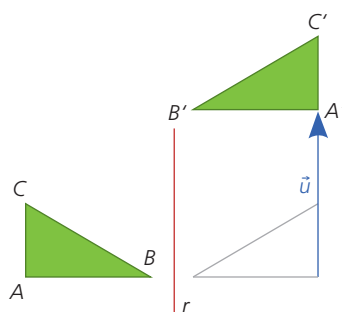
Translação



Rotação



Reflexão



Reflexão deslizante

As isometrias têm propriedades em comum.

A imagem, por uma isometria, de:

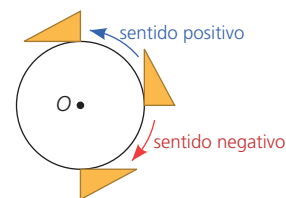
- um segmento de reta é um segmento de reta com o mesmo comprimento;
- uma reta é uma reta;
- uma semirreta é uma semirreta; a origem de uma é transformada na origem da outra;
- um ângulo é um ângulo com a mesma amplitude; o vértice e lados de um são transformados, respetivamente, no vértice e lados do outro;
- uma figura é uma figura geometricamente igual.

No entanto, existem diferenças:

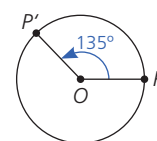
As translações são as únicas isometrias que mantêm a direção e o sentido de qualquer segmento orientado ou semirreta.

### Recorda

Dados dois pontos  $O$  e  $P$  e um ângulo  $\alpha$  (não nulo, não raso e não giro), existem exatamente duas imagens do ponto  $P$  por rotações de centro  $O$  e ângulo  $\alpha$  — uma das rotações por «rotação de sentido positivo» (ou «contrário ao dos ponteiros do relógio») e a outra por «rotação de sentido negativo» (ou «no sentido dos ponteiros do relógio»).



Por exemplo, a imagem de um ponto  $P$  por uma rotação de centro  $O$  e amplitude  $135^\circ$  no sentido positivo é o ponto  $P'$ .



$$\overline{OP} = \overline{OP'} \text{ e } \widehat{POP'} = 135^\circ$$

### Nota

Um **ponto invariante** para uma isometria é um ponto que é a sua própria imagem.

- Numa rotação de amplitude diferente de  $0^\circ$  e de  $360^\circ$ , o centro da rotação é o único ponto invariante.
- Numa reflexão, todos os pontos do eixo são invariantes.
- Numa translação de vetor não nulo não há pontos invariantes.

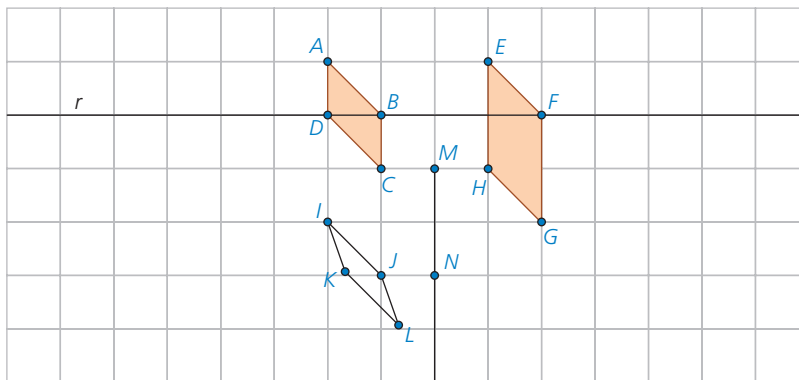
### Recorda

Uma reta  $r$  é **eixo de simetria** de uma dada figura plana quando as imagens dos pontos da figura pela reflexão de eixo  $r$  formam a mesma figura; dizemos que a figura tem **simetria de reflexão**.

Uma figura tem **simetria de rotação** quando existe uma rotação de ângulo não nulo e não giro, tal que as imagens dos pontos da figura por essa rotação formam a mesma figura.

### Exercício resolvido

Considera a figura seguinte:



- Explica por que razão não existe uma isometria que transforme o quadrilátero  $[ABCD]$  no quadrilátero  $[EFGH]$ .
- Sabendo que  $\overline{AB} = \overline{IJ}$ ,  $\overline{AD} = \overline{IK}$ ,  $\overline{DC} = \overline{KL}$  e  $\overline{BC} = \overline{JL}$ , explica por que razão não existe uma isometria que transforme o quadrilátero  $[ABCD]$  no quadrilátero  $[IJKL]$ .
- Explica por que razão não existe uma isometria que transforme a reta  $r$  na semirreta  $\dot{MN}$ .
- Indica dois pontos do quadrilátero  $[ABCD]$  invariantes para a reflexão de eixo  $r$ .
- O quadrilátero  $[IJKL]$  tem pontos invariantes para a reflexão de eixo  $r$ ?
- A imagem da semirreta  $\dot{MN}$  pela reflexão de eixo  $r$  tem o mesmo sentido de  $\dot{MN}$ ?

### Resolução:

- Não existe uma isometria que transforme o quadrilátero  $[ABCD]$  no quadrilátero  $[EFGH]$ , porque qualquer isometria transforma segmentos de reta em segmentos de reta com o mesmo comprimento. Não existe nenhum segmento de reta no quadrilátero  $[ABCD]$  com o mesmo comprimento do segmento de reta  $[EG]$ .
- Não existe uma isometria que transforme o quadrilátero  $[ABCD]$  no quadrilátero  $[IJKL]$ , porque qualquer isometria transforma ângulos em ângulos com a mesma amplitude. Os ângulos internos dos dois quadriláteros são diferentes.
- Não existe uma isometria que transforme a reta  $r$  na semirreta  $\dot{MN}$ , porque as isometrias transformam retas em retas.
- Os pontos  $D$  e  $B$  são invariantes, porque pertencem ao eixo de reflexão.
- Não, porque não existem pontos comuns ao quadrilátero  $[IJKL]$  e ao eixo de reflexão.
- Não, tem sentido oposto.

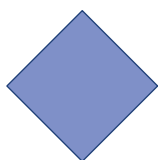
## ■ Frisos e simetrias

As bandas horizontais decorativas que, por vezes, se encontram nos edifícios, nos gradeamentos, em tecidos ou em peças de cerâmica são designadas por frisos. Em Geometria, chama-se friso a uma figura constituída por um motivo que se repete indefinidamente numa mesma direção, através de translações.

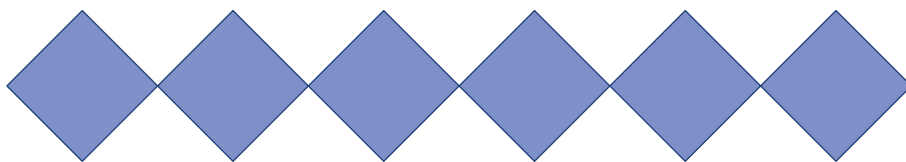
Qualquer friso tem **simetria de translação**, isto é, existe uma translação de vetor não nulo que deixa o friso invariante.

Exemplo:

Com o motivo



construímos o friso

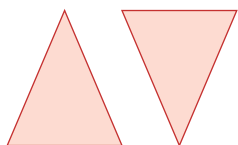


Muitos frisos têm propriedades geométricas interessantes, tais como simetrias de reflexão, de reflexão deslizante ou de rotação.

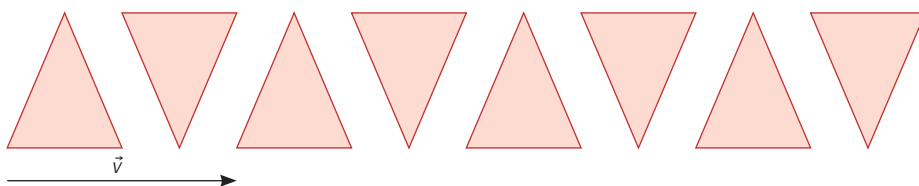
Uma figura tem **simetria de reflexão deslizante** se existe uma reflexão deslizante que deixa a figura invariante.

Exemplo:

Com o motivo

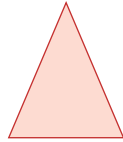


construímos o friso

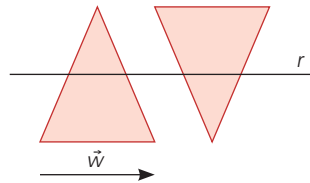


aplicando sucessivamente a translação de vetor  $\vec{v}$ .

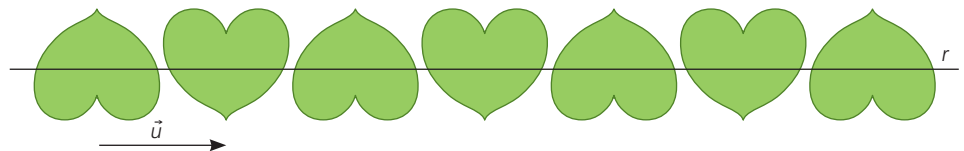
Considerando o motivo



podemos construir o mesmo friso, aplicando sucessivamente a reflexão deslizante de eixo  $r$  e vetor  $\vec{w}$



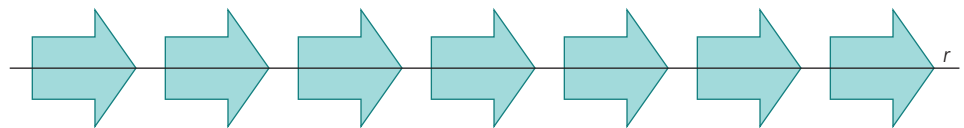
Outros exemplos de frisos e suas simetrias:



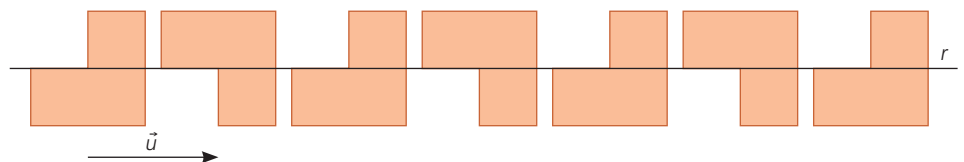
Simetria de reflexão, simetria de reflexão deslizante e simetria de translação



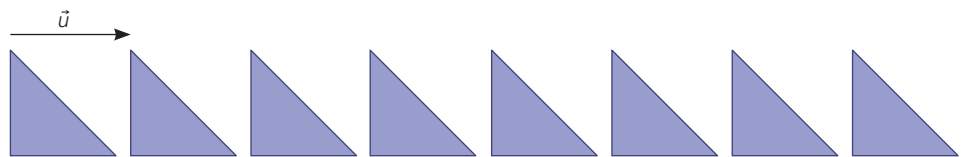
Simetria de reflexão e simetria de translação



Simetria de reflexão, simetria de reflexão deslizante e simetria de translação



Simetria de reflexão deslizante e simetria de translação



Simetria de translação

### O que debes saber

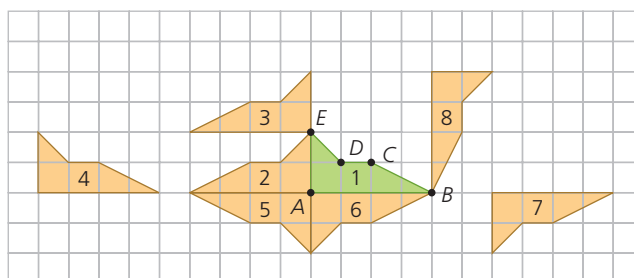
- Identificar translações, rotações, reflexões e reflexões deslizantes.
- Reconhecer as propriedades das isometrias.

## Verificar a aprendizagem

### IDENTIFICAR ISOMETRIAS

- 1 Descreve a isometria que permite transformar a figura ① em cada uma das figuras de ② a ⑧.

**NOTA:** A cor das figuras não tem significado.



- 2 Em cada figura, identifica a(s) isometria(s) que transforma(m) o azulejo da esquerda no azulejo da direita.



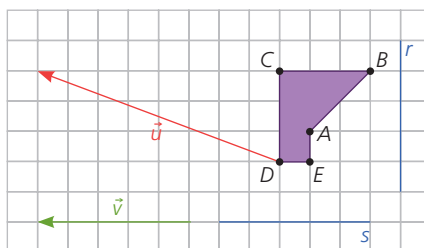
- 3 Uma ampliação com razão de semelhança 2 é uma isometria? Justifica a tua resposta.

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei identificar cada uma das isometrias?

### PROPRIEDADES DAS ISOMETRIAS

#### Tarefa

- 4 Numa folha ou num ambiente de Geometria Dinâmica, reproduz o polígono  $[ABCDE]$ , os eixos  $r$  e  $s$  e os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .



- 4.1 Representa a imagem de  $[ABCDE]$  através:

- a) da reflexão de eixo  $r$ ;
- b) da translação  $T_{\vec{u}}$ ;
- c) da rotação de centro  $D$  e de amplitude  $90^\circ$  no sentido positivo;
- d) da reflexão deslizante de eixo  $s$  e com o vetor  $\vec{v}$ .

- 4.2 O que preservam as quatro isometrias?

- 4.3 Observa a imagem do segmento de reta  $[AB]$  (e da reta  $AB$ , que é o seu prolongamento) em cada uma das quatro figuras construídas.

Qual é a única isometria que conserva as direções, isto é, que transforma qualquer reta numa reta paralela?

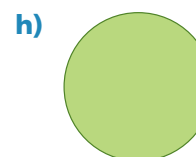
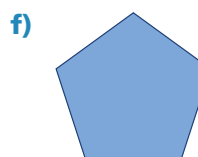
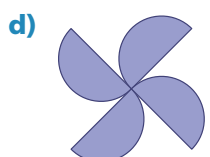
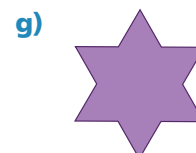
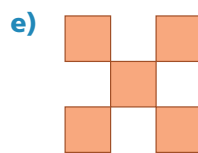
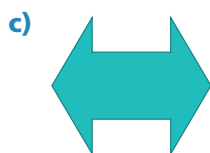
- 5 Descreve uma translação que tenha o mesmo efeito que uma rotação de  $360^\circ$ .

**AUTOAVALIAÇÃO** Reconheço as propriedades das isometrias?



## Aplicar

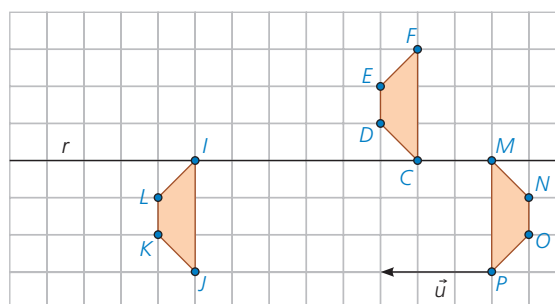
- 6 Indica as simetrias de cada uma das figuras apresentadas a seguir.



- 7 Refere qual é a imagem de um ângulo com uma amplitude de  $60^\circ$  no sentido positivo, por meio de:  
**a)** uma rotação de amplitude  $45^\circ$  no sentido negativo; **b)** uma reflexão deslizante.

- 8 Num relógio, quando o ponteiro dos minutos efetua uma rotação de  $360^\circ$  no sentido negativo, qual é a amplitude e o sentido da rotação do ponteiro das horas?

- 9 Na figura, estão representados, numa grelha quadriculada, três trapézios geometricamente iguais  $[FCDE]$ ,  $[MNOP]$ ,  $[IJKL]$ , uma reta  $r$  e um vetor  $\vec{u}$  com a mesma direção da reta  $r$ .



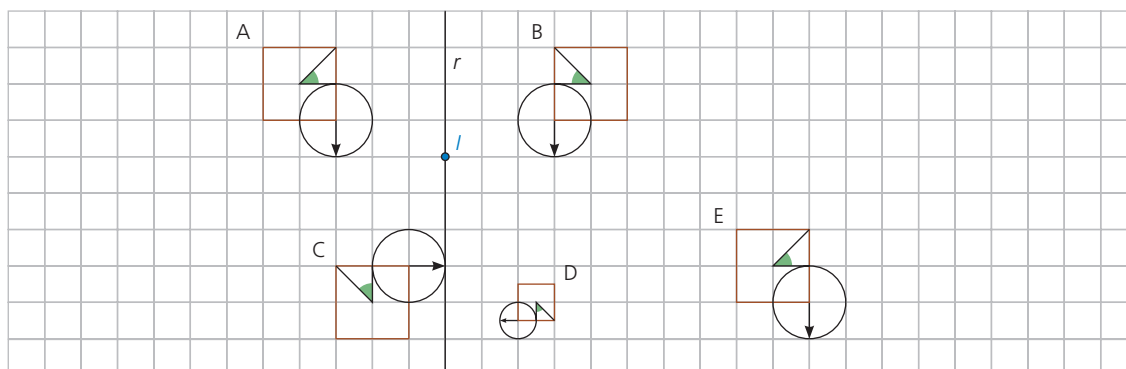
- 9.1** Determina a imagem  $[I'J'K'L']$  do trapézio  $[IJKL]$  pela reflexão deslizante de eixo  $r$  e vetor  $\vec{u}$ .

- 9.2** Identifica uma isometria que transforme o trapézio  $[I'J'K'L']$ , da alínea anterior, no trapézio  $[FCDE]$ .

- 9.3** O trapézio  $[IJKL]$  é o transformado do trapézio  $[FCDE]$  pela reflexão de eixo  $r$  e vetor  $\vec{w}$ . Identifica o vetor  $\vec{w}$ .

- 9.4** Se aplicarmos uma reflexão de eixo  $r$  ao trapézio  $[FCDE]$  obtemos outro trapézio  $[F'C'D'E']$ . Se aplicarmos uma reflexão de eixo  $s$  ao trapézio  $[F'C'D'E']$  obtemos o trapézio  $[NMOP]$ . Identifica a reta  $s$ .

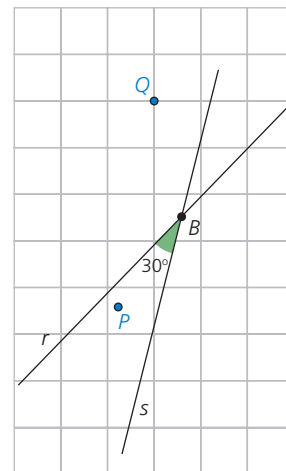
- 10 Na figura, estão representados uma grelha quadriculada com cinco figuras  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$ , a reta  $r$  e o ponto  $I$ .



- 10.1** Qual das figuras  $B$ ,  $C$ ,  $D$  ou  $E$  pode ser a transformada de  $A$  por uma translação? Justifica a tua resposta.
- 10.2** Qual das figuras  $B$ ,  $C$ ,  $D$  ou  $E$  pode ser a transformada de  $A$  por uma reflexão de eixo  $r$ ? Justifica a tua resposta.
- 10.3** Qual das figuras  $B$ ,  $C$ ,  $D$  ou  $E$  pode ser a transformada de  $A$  por uma rotação de centro  $I$ ? Indica a amplitude e o sentido da rotação.
- 10.4** Existe alguma isometria que transforme  $C$  em  $D$ ? Justifica a tua resposta.

- 11** Na figura estão representados dois pontos  $P$  e  $Q$  e duas retas  $r$  e  $s$  concorrentes em  $B$ , formando um ângulo de  $30^\circ$ .

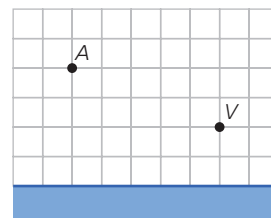
- 11.1** Constrói o transformado de  $P$  pela reflexão axial de eixo  $r$  e denomina-o  $P'$ .
- 11.2** Constrói o transformado de  $P$  pela reflexão axial de eixo  $s$  e denomina-o  $P''$ .
- 11.3** Justifica que  $\overline{BP'} = \overline{BP''}$  e que  $\angle P'BP'' = 60^\circ$ .
- 11.4** Justifica que  $P''$  é o transformado de  $P'$  pela rotação de centro  $B$ , sentido positivo e amplitude  $60^\circ$ .
- 11.5** Constrói o transformado de  $Q$  pela reflexão axial de eixo  $s$  e denomina-o  $Q'$ .
- 11.6** Constrói o transformado de  $Q'$  pela reflexão axial de eixo  $r$  e denomina-o  $Q''$ .
- 11.7** Justifica que  $\overline{BQ} = \overline{BQ''}$  e que  $\angle QBQ'' = 60^\circ$ .
- 11.8** Justifica que  $Q''$  é o transformado de  $Q$  pela rotação de centro  $B$ , sentido negativo e amplitude  $60^\circ$ .



### Tarefas

- 12** Uma vaca quer ir descansar perto de uma árvore, mas primeiro quer ir beber água ao rio.

- 12.1** Num ambiente de Geometria Dinâmica, representa a situação apresentada ao lado e descobre o local ideal para a vaca ( $V$ ) beber, de modo que o trajeto total até à árvore ( $A$ ) seja o mais curto possível.
- 12.2** Procura uma explicação para o local encontrado.



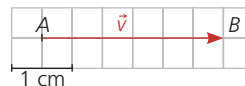
### Tarefas de investigação

- 13** Foi visto anteriormente que a composição de duas translações é uma nova translação (associada ao vetor soma). Agora, investiga e descreve a transformação que resulta da composição de:
- duas reflexões de eixos paralelos;
  - duas reflexões de eixos perpendiculares;
  - duas reflexões de eixos oblíquos;
  - duas rotações com o mesmo centro;
  - duas meias-voltas (rotações de  $180^\circ$ ) com centros diferentes;
  - duas reflexões deslizantes com o mesmo eixo e o mesmo vetor.
- 14** A Joana formulou a conjectura seguinte: «Qualquer isometria pode ser substituída por reflexões.» Concordas? Justifica a tua resposta.

## Síntese

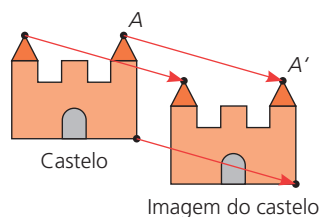
### Vetores

- Dois segmentos orientados dizem-se **equipolentes** quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.
- Um **vetor** fica determinado por um segmento orientado de tal modo que segmentos orientados equipolentes determinam o mesmo vetor e segmentos orientados não equipolentes determinam vetores distintos.
- Os segmentos orientados que determinam um vetor são designados por **representantes do vetor**.
- O vetor determinado pelo segmento orientado  $[A,B]$  representa-se por  $\overrightarrow{AB}$ .
- Um vetor pode ser representado por uma letra minúscula ( $\vec{u}$ ;  $\vec{v}$ ; ...) ou usando dois pontos ( $\overrightarrow{AB}$ ). Quando se escreve  $\overrightarrow{AB}$ , sabe-se que o sentido é de  $A$  (origem) para  $B$  (extremidade).
- Dois vetores são **simétricos** quando têm a mesma direção e o mesmo comprimento, mas têm sentidos opostos.
- Dois vetores, não nulos, dizem-se **colineares**, quando têm a mesma direção.
- O **vetor nulo** ( $\vec{0}$ ) é o vetor determinado pelos segmentos orientados de extremos iguais.



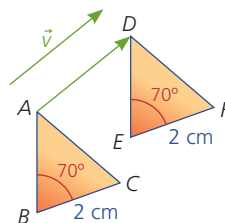
### Translação associada a um vetor

- Dado um vetor  $\vec{u}$  a aplicação, que a um ponto  $P$  associa o ponto  $P + \vec{u}$  designa-se por **translação de vetor  $\vec{u}$**  e representa-se por  $T_{\vec{u}}$ .
- $T_{\vec{v}}(A) = A'$  significa que a imagem do ponto  $A$  pela translação de vetor  $\vec{v}$  é o ponto  $A'$ , tal que  $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$  ( $A' = A + \vec{v}$ ).



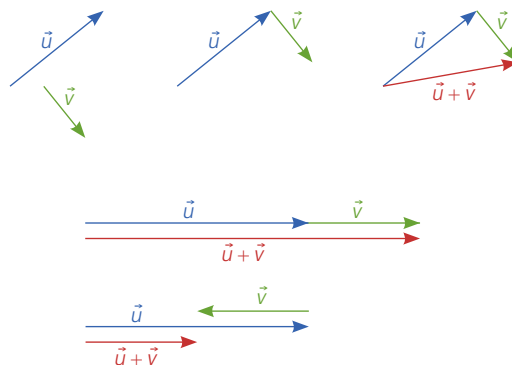
### Propriedades das translações

- Um segmento orientado e a sua imagem por uma translação de vetor  $\vec{u}$  são segmentos orientados equipolentes.
- As translações preservam a amplitude dos ângulos.



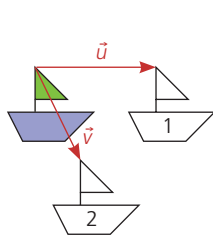
## Composição de translações. Adição de vetores

- Se uma figura se desloca por uma translação associada a um vetor  $\vec{u}$  e, a seguir, se desloca por outra translação associada a um vetor  $\vec{v}$ , então, as duas translações podem ser substituídas por uma única **translação composta** associada ao **vetor soma**  $\vec{u} + \vec{v}$ .
- Para adicionar dois vetores,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ :
  - Desenha-se o vetor  $\vec{v}$  de modo que a sua origem coincida com a extremidade de  $\vec{u}$ .
  - Une-se a origem de  $\vec{u}$  à extremidade de  $\vec{v}$ , onde se coloca a seta.
- Casos particulares:
  - Vetores com a mesma direção e o mesmo sentido:
  - Vetores com a mesma direção e sentidos contrários:
  - Vetores simétricos:  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ .

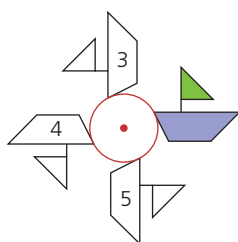


## Propriedades das isometrias

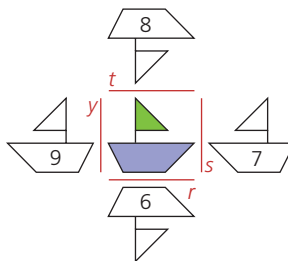
- As **isometrias** são transformações geométricas que conservam a distância entre pontos.
- Existem quatro tipos de isometrias no plano: a **translação**, a **rotação**, a **reflexão** e a **reflexão deslizante**.



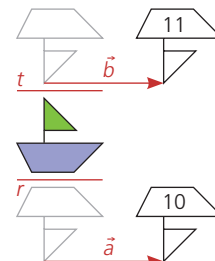
- Translação associada ao vetor  $\vec{u}$ .
- Translação associada ao vetor  $\vec{v}$ .



- Rotação de  $90^\circ$  no sentido positivo.
- Rotação de  $180^\circ$  no sentido positivo.
- Rotação de  $270^\circ$  no sentido positivo ou  $90^\circ$  no sentido negativo.



- Reflexão de eixo horizontal,  $r$ .
- Reflexão de eixo vertical,  $s$ .
- Reflexão de eixo horizontal,  $t$ .
- Reflexão de eixo vertical,  $y$ .



- Reflexão deslizante de eixo  $r$  e de vetor  $\vec{a}$ .
- Reflexão deslizante de eixo  $t$  e de vetor  $\vec{b}$ .

### Propriedades das isometrias:

- A imagem de uma reta é uma reta.
- A imagem de uma semirreta é uma semirreta; a origem de uma é transformada na origem da outra.
- A imagem de um segmento de reta é um segmento de reta com o mesmo comprimento.
- A imagem de um ângulo é um ângulo com a mesma amplitude; o vértice e lados de um são transformados, respetivamente, no vértice e lados do outro.
- A imagem uma figura é uma figura geometricamente igual.
- A translação é a única isometria que conserva sempre a direção e o sentido de qualquer segmento orientado ou semirreta.

## Atividades globais

### QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

Das quatro alternativas, escolha a única opção correta.

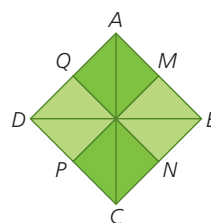
- 1 Qual das afirmações seguintes é verdadeira?
- A. Quando se abre, a gaveta de um armário efetua sempre um movimento de rotação.
  - B. As translações conservam a perpendicularidade.
  - C. A soma de dois vetores simétricos é um vetor com o dobro do comprimento.
  - D. Qualquer isometria conserva as direções.



- 2 Na figura ao lado,  $[ABCD]$  é um quadrado e  $M, N, P$  e  $Q$  são os pontos médios dos lados.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

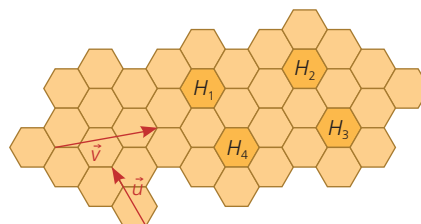
- A.  $\vec{AB} = \vec{CD}$
- B.  $\vec{AQ}$  e  $\vec{BC}$  têm a mesma direção.
- C.  $\vec{DP}$  e  $\vec{NB}$  são vetores simétricos.
- D.  $\vec{DC}$  e  $\vec{DB}$  têm o mesmo comprimento.



- 3 Na figura à direita, observa os hexágonos  $H_1, H_2, H_3$  e  $H_4$ .

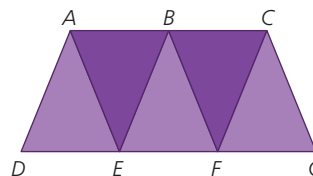
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- A. A imagem de  $H_1$  pela translação  $T_{\vec{u}}$  é  $H_4$ .
- B. A imagem de  $H_3$  pela translação  $T_{\vec{v}}$  é  $H_4$ .
- C. A imagem de  $H_3$  pela translação  $T_{\vec{u} + \vec{v}}$  é  $H_1$ .
- D. A imagem de  $H_4$  pela translação  $T_{\vec{u} + \vec{v}}$  é  $H_2$ .



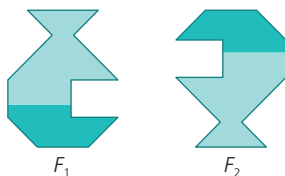
- 4 Em relação à figura à direita, qual das afirmações é verdadeira?

- A.  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{CA}$
- B.  $\vec{AD} + \vec{EF} = \vec{AB}$
- C.  $\vec{GC} + \vec{BE} = \vec{GF}$
- D.  $\vec{DE} + \vec{FG} = \vec{0}$



- 5  $F_2$  é a imagem de  $F_1$  por:

- A. uma rotação.
- B. uma reflexão.
- C. uma translação.
- D. uma reflexão deslizante.



- 6 Identifica a figura em que a reta  $r$  é um eixo de simetria.

- A.
- B.
- C.
- D.

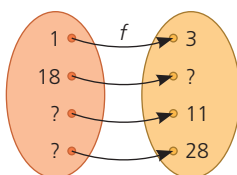
## EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

- 7** A figura à direita é constituída por 28 quadrados numerados. Nela, estão representados dois vetores,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

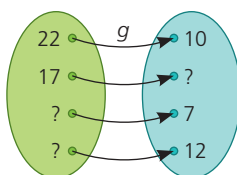
Em cada caso, copia e completa o diagrama sagital sabendo que a função associa a cada quadrado a sua imagem pela translação:

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |
| 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |

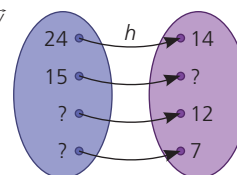
a)  $T_{\vec{u}}$



b)  $T_{\vec{v}}$



c)  $T_{\vec{u} + \vec{v}}$



- 8**  $[AB]$  é um diâmetro de uma circunferência,  $c$ , de centro  $O$ .

- 8.1** Constrói a imagem  $c'$  da circunferência  $c$  pela translação que transforma o ponto  $O$  no ponto  $B$ . Marca os pontos  $I$  e  $J$  na interseção das duas circunferências.
- 8.2** Classifica o quadrilátero  $[OIBJ]$ . Justifica a tua resposta.
- 8.3** Que relação existe entre os vetores  $\vec{OI}$  e  $\vec{BJ}$ ?
- 8.4** Qual é a imagem do ponto  $J$  pela translação de vetor  $\vec{BI} + \vec{BO}$ ?
- 8.5** Qual é a imagem da circunferência  $c'$  pela reflexão de eixo  $IJ$ ?

- 9** O Zito editou, no computador, a fotografia da cidade de Viseu apresentada à direita, com o programa Paint.

No separador Imagem, escolheu Inverter/rodar e experimentou várias opções, entre as quais «Inverter na horizontal» (A), «Inverter na vertical» (B), «Rodar 90° para a direita» (C).



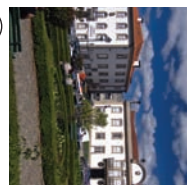
(A)



(B)



(C)



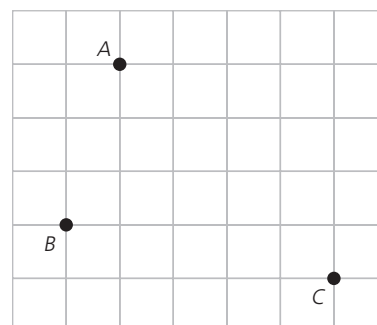
(D)



- 9.1** Identifica isometrias que permitam obter as fotografias (A), (B) e (D).
- 9.2** Qual foi o sentido da rotação que tem por imagem da fotografia original a fotografia (C)?

- 10** Considera os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  da figura seguinte.

- 10.1** Copia a figura e constrói o ponto  $D$ , imagem do ponto  $B$  pela translação  $T_{\vec{AC}}$ .
- 10.2** Representa o ponto  $E$ , tal que  $\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{BC}$ .
- 10.3** Marca o ponto  $F$ , tal que  $\vec{CF} = \vec{BC}$ .
- 10.4** Constrói a imagem do triângulo  $[ABC]$  pela reflexão de eixo  $AC$ .
- 10.5** Representa a imagem do triângulo  $[ABC]$  pela rotação de centro  $C$  e de amplitude  $180^\circ$ .





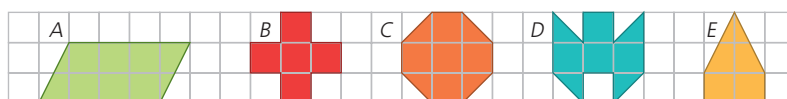
## Atividades globais

### Tarefas

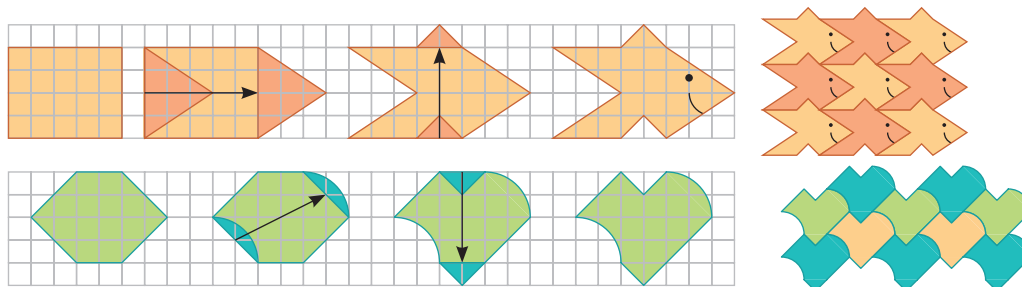
- 11** Quando se preenche uma região plana infinita sem deixar espaços vazios e sem sobreposições, diz-se que se realiza uma pavimentação. Observa os exemplos seguintes:



- 11.1** Quais das figuras seguintes permitem pavimentar o plano?



- 11.2** Inventa três novas figuras que permitam pavimentar o plano.
- 11.3** Investiga, de preferência com *software* de Geometria Dinâmica, quais são os polígonos regulares (com todos os lados e ângulos iguais) que, sozinhos, permitem pavimentar o plano.
- SUGESTÃO:** [http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames\\_asid\\_163\\_g\\_3\\_t\\_3.html](http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_163_g_3_t_3.html)
- 11.4** Os polígonos que permitem pavimentar o plano podem ser alterados para criar figuras irregulares que também pavimentam. Uma técnica consiste em «cortar» parte da figura e deslocá-la para o lado oposto por translação. Observa os exemplos:

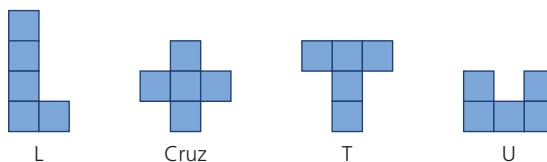


Inventa uma figura com a mesma técnica e pavimenta uma folha quadriculada.

**SUGESTÃO:** <http://www.tessellations.org/tesselmania0.htm>

- 12** Um pentaminó é uma figura constituída por 5 quadrados ligados uns aos outros.

**Exemplos:**



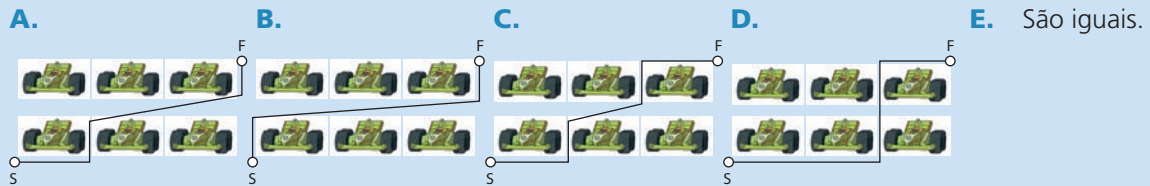
- 12.1** Ao todo, existem 12 pentaminós. Descobre-os.
- 12.2** Indica as simetrias de cada pentaminó.
- 12.3** Quais dos pentaminós permitem preencher totalmente uma faixa horizontal?
- SUGESTÃO:** [http://nlvm.usu.edu/en/NAV/frames\\_asid\\_114\\_g\\_2\\_t\\_3.html?open=activities&from=category\\_g\\_2\\_t\\_3.html](http://nlvm.usu.edu/en/NAV/frames_asid_114_g_2_t_3.html?open=activities&from=category_g_2_t_3.html)
- 12.4** Quais dos pentaminós permitem pavimentar o plano?



## CANGURU MATEMÁTICO SEM FRONTEIRAS

O Canguru Matemático sem Fronteiras é um dos concursos de Matemática mais conhecidos em todo o mundo. Todos os anos, milhões de alunos testam as suas capacidades matemáticas.

- 13** Seis carros estão estacionados num parque de estacionamento. O Tiago quer ir da posição *S* à posição *F*. Qual dos seguintes trajetos é o mais curto?



Prova Benjamin, 2006

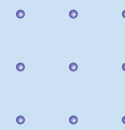


## OLIMPIADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

As Olimpíadas Portuguesas de Matemática são um concurso de problemas, dirigido aos estudantes do 2.º ciclo, 3.º ciclo e ensino secundário, que visa incentivar e desenvolver o gosto pela Matemática.

- 14** Os nove pontos da figura ao lado são vértices de um papel quadriculado.

Quantas circunferências diferentes é possível traçar com centro num destes pontos e que passem por um ou mais pontos da figura?



XXVII OPM, 2.ª Eliminatória

## CONVIVER COM A MATEMÁTICA

- 15** Mark (de Sydney, na Austrália) e Hans (de Berlim, na Alemanha) comunicam muitas vezes entre si, utilizando o *chat* na Internet. Eles têm de estar ligados à Internet ao mesmo tempo, para poderem conversar.

Para encontrar uma hora para conversarem no *chat*, Mark consultou uma tabela de fusos horários e descobriu o seguinte:



Greenwich: 24 h 00 min



Berlim: 01 h 00 min



Sydney: 10 h 00 min

- 15.1** Quando são 19 h 00 min em Sydney, que horas são em Berlim?
- 15.2** Mark e Hans não podem conversar no *chat* entre as 9 h 00 min e as 16 h 30 min, horas locais, porque têm de ir à escola. Também não podem conversar entre as 23 h 00 min e as 7 h 00 min, horas locais, porque estão a dormir.
- A que horas pode Mark conversar com Hans?
- 15.3** Imagina que são colocados dois relógios iguais, lado a lado, um com a hora de Berlim e o outro com a hora de Sydney (como na figura em cima).
- Existe algum momento do dia em que o relógio da direita seja a imagem do relógio da esquerda por meio de uma translação? E por meio de uma reflexão?

## AUTOAVALIAÇÃO

- Identifica claramente na tua folha de respostas os números dos itens a que respondes. Apresenta uma única resposta para cada item.
- O teste inclui quatro itens de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correta. Não apresentes cálculos nem justificações.

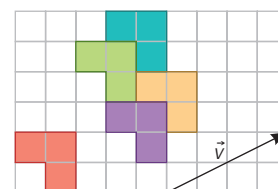
Pág. 62

**1** Em qual das situações seguintes existe um movimento de translação?

- A.** Quando se dobra um guardanapo ao meio.  
**B.** Ao enroscar a tampa de uma garrafa.  
**C.** Quando se abre uma caixa de fósforos.  
**D.** Ao virar um copo ao contrário.

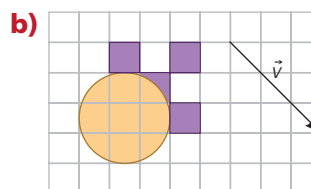
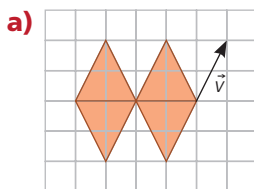
Págs. 62, 63 e 64

**2** Na figura ao lado, qual é a imagem da figura vermelha pela translação de vetor  $\vec{v}$ ?



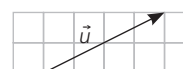
Págs. 62, 63 e 64

**3** Em cada caso, copia a figura e constrói a sua imagem (a lápis) através da translação associada ao vetor  $\vec{v}$ .



Págs. 58 e 59

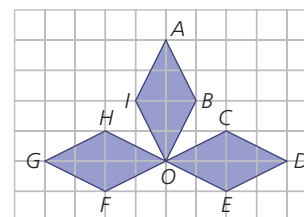
**4** Desenha um vetor  $\vec{v}$  com a mesma direção do vetor  $\vec{u}$ , o sentido contrário e o dobro do comprimento.



Págs. 58, 62, 63, 64, 67 e 68

**5** Considera a figura ao lado.

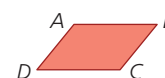
- 5.1** Indica um vetor igual a  $\vec{AB}$ .  
**5.2** Qual é a imagem do ponto O pela translação de vetor  $\vec{GH}$ ?  
**5.3** Indica um vetor que permita a translação de  $[GHOF]$  para  $[OCDE]$ .  
**5.4** Qual é a imagem do ponto H pela translação composta de  $T_{\vec{GF}}$  e  $T_{\vec{IA}}$ ?



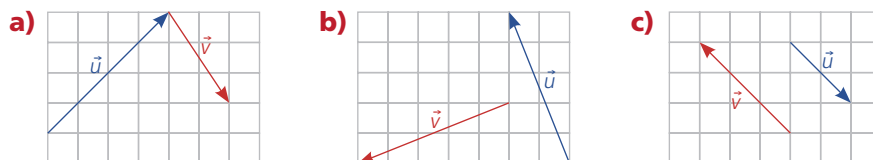
Págs. 58, 59, 68 e 69

**6** Se  $[ABCD]$  é um paralelogramo, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- A.**  $\vec{AB} = \vec{CD}$       **C.**  $\vec{DC} + \vec{CB} = \vec{DA}$   
**B.**  $T_{\vec{DA}}(B) = C$       **D.**  $\vec{BA} + \vec{DC} = \vec{0}$

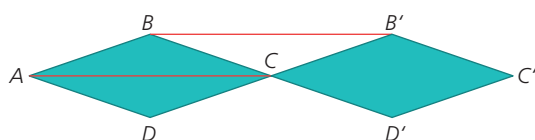


- 7 Copia os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  para o teu caderno e representa o vetor  $\vec{u} + \vec{v}$ .



Págs. 68 e 69

- 8  $[ABCD]$  é um losango com  $\hat{A} = 38^\circ$ .  $[CB'C'D']$  é a imagem de  $[ABCD]$  pela translação que transforma  $A$  em  $C$ .



Págs. 68 e 69

8.1 Classifica o quadrilátero  $[ABB'C]$ . Justifica a tua resposta.

8.2 Determina a amplitude do ângulo  $\angle CB'C'$ . Justifica a tua resposta.

8.3 Copia e completa:  $\vec{AD} + \vec{D'C'} = \dots\dots$

- 9 Em que figura o azulejo da direita é a imagem do azulejo da esquerda por meio de uma rotação?

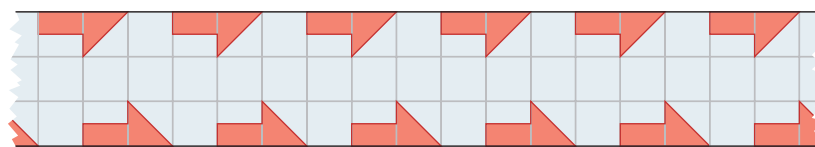


Pág. 77

- 10 Completa a afirmação:  
«A imagem de um ângulo através de qualquer isometria é um ângulo .....»

Pág. 77

- 11 Identifica as simetrias do friso seguinte:



Pág. 77

- 12 Imagina que um dos teus amigos desenhou um triângulo equilátero  $[ABO]$ . Queres agora transmitir-lhe instruções para marcar quatro pontos,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$ , de modo que  $[ABCDEF]$  seja um hexágono regular de centro  $O$ .

Usando pelo menos uma translação, uma reflexão e uma rotação, escreve quatro instruções que permitam marcar os pontos  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$ .

Págs. 75 e 77

#### GRELHA DE AVALIAÇÃO

| Exercício                     | 1 | 2 | 3  | 4 | 5  | 6 | 7  | 8  | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-------------------------------|---|---|----|---|----|---|----|----|---|----|----|----|
| Cotação <sup>1</sup> (pontos) | 5 | 5 | 10 | 5 | 16 | 5 | 15 | 12 | 5 | 8  | 6  | 8  |

<sup>1</sup> Para saberes a cotação de cada alínea, basta divides a cotação do exercício pelo número de alíneas.

# Estratégias para a resolução de problemas e jogos

## Como se relacionam os jogos com a Matemática?

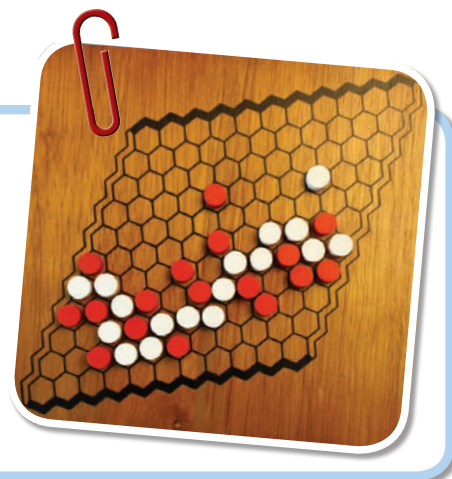
Alguns jogos ajudam a desenvolver vários tipos de raciocínio. Um bom jogador, para ganhar, usa o mesmo tipo de **estratégias** aplicadas na resolução de problemas de Matemática.

### Jogo Hex

#### História do Hex

O matemático e poeta dinamarquês Piet Hein foi o primeiro a apresentar as regras deste jogo numa conferência, na Universidade de Copenhaga, em 1942. O jogo intitulava-se Polígono.

Em 1948, um jovem matemático americano, John Nash, inventa novamente o jogo, de forma independente. Nash provou também que existe uma estratégia vencedora para o primeiro jogador (se não se considerar a «regra do equilíbrio»). Contudo, ninguém conhece essa estratégia se o tabuleiro tiver mais de 8 casas de lado.



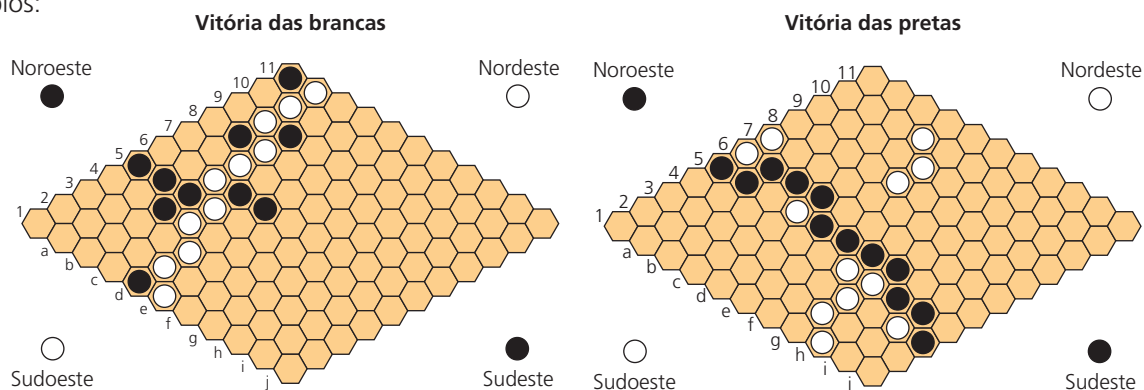
**NÚMERO DE JOGADORES:** 2.

**MATERIAL:** Um tabuleiro hexagonal em forma de losango com  $11 \times 11$  hexágonos de lado (o tamanho do tabuleiro pode variar) e um número suficiente de peças brancas e pretas.

#### REGRAS:

- Um jogador fica com as peças brancas e o outro com as peças pretas. Cada jogada consiste em colocar uma peça da cor correspondente numa das casas vazias do tabuleiro.
- O objetivo do jogador com as peças brancas consiste em conseguir um caminho branco que ligue as margens sudoeste e nordeste. O objetivo do jogador das peças pretas consiste em conseguir um caminho preto unindo as margens sudeste e noroeste.
- Vale a «regra do equilíbrio»: na sua primeira jogada, o segundo jogador pode pedir para trocar de cores e aproveitar a jogada efetuada pelo adversário.

Exemplos:



Facto: O Hex não permite empates, há sempre um vencedor!

## Problema Delegado e subdelegado

Numa turma de 25 alunos, 5 deles são candidatos à eleição de delegado: o André, a Beatriz, a Carla, o David e a Eva.

O candidato que obtiver mais votos será eleito delegado e o que ficar em segundo lugar será subdelegado.

**Quantos resultados diferentes podem ocorrer nestas eleições?**

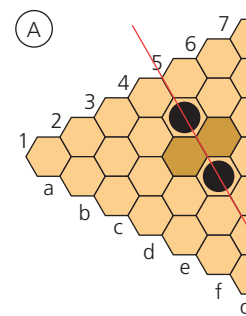


**EXPLICAÇÃO DA ESTRATÉGIA DO JOGO E RESOLUÇÃO DO PROBLEMA:**

- O **conceito de simetria**, presente na forma do tabuleiro de Hex e nas suas casas hexagonais, pode também ser usado como estratégia.

**ESTRATÉGIA: Usar a simetria.**

O Hex pertence à família dos jogos de conexão. Uma boa maneira de ligar as peças é criar pontes. A ponte consiste em ter duas peças que partilhem a vizinhança de dois hexágonos (A). No exemplo ao lado, se as brancas tentarem defender jogando em e3, as pretas respondem em f4, e se as brancas cortarem em f4, as pretas ripostam em e3.



Neste caso, a simetria (de reflexão) permite criar **duas jogadas alternativas**.

- Passando agora ao problema, o objetivo é descobrir todas as possibilidades de escolher dois alunos, sabendo que o primeiro será delegado e o segundo subdelegado. Por exemplo, o resultado da eleição pode ser André-Beatriz (André delegado e Beatriz subdelegada), mas também pode ser Beatriz-André (Beatriz delegada e André subdelegado). Observando esta simetria, é possível **reduzir o problema para metade**.

Para escrever as diferentes alternativas, é preferível adotar uma notação simples. Por exemplo:

A = André; B = Beatriz; C = Carla; D = David; E = Eva.

Os diferentes resultados podem ser apresentados numa tabela:

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| AB | AC | AD | AE |
| BA | BC | BD | BE |
| CA | CB | CD | CE |
| DA | DB | DC | DE |
| EA | EB | EC | ED |

Conclui-se que o número de escolhas possíveis de 2 alunos entre 5 candidatos é de 10 (nas casas azuis). Contando com a simetria (ou seja, voltando a considerar o problema na totalidade), deve multiplicar-se esse valor por 2.

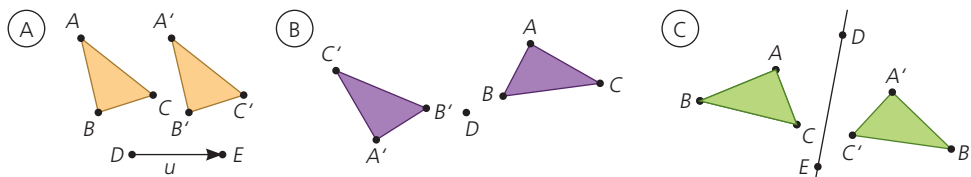
**RESPOSTA:** Nestas eleições, podem ocorrer 20 resultados diferentes.

**Se os 25 alunos fossem candidatos a delegado, quantas possibilidades existiriam? Descubra uma forma de calcular o número total de resultados diferentes para um número qualquer de candidatos.**



## Software de Geometria: GeoGebra

Existem vários programas de Geometria Dinâmica que permitem construir figuras e investigar propriedades. Um deles, disponível gratuitamente na Internet, é o GeoGebra (<http://www.geogebra.org>).



### Translações (A)

1. No ambiente do GeoGebra, constrói um triângulo  $[ABC]$ .  
Seleciona , marca os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e clica novamente em  $A$  para fechar o triângulo.
2. Constrói um vetor,  $\overrightarrow{DE}$ .  
Clica no triângulo no canto inferior direito de , seleciona  e marca dois pontos,  $D$  e  $E$ .
3. Constrói  $\Delta[A'B'C']$ , imagem de  $\Delta[ABC]$  através da translação associada ao vetor  $\overrightarrow{DE}$ .  
Clica no triângulo no canto inferior direito de  e seleciona .  
Depois, clica no objeto a transladar (neste caso,  $\Delta[ABC]$ ) e no vetor.
4. Altera o vetor  $\overrightarrow{DE}$  e o triângulo  $[ABC]$ , com o ponteiro , e observa as alterações.

### Rotações (B)

1. Constrói um triângulo  $[ABC]$  e marca um ponto  $D$  (com o botão  selecionado).
2. Constrói imagens de  $\Delta[ABC]$  através de rotações de centro  $D$ , com diferentes amplitudes.  
Clica no triângulo no canto inferior direito de  e seleciona .  
A seguir, clica no objeto a rodar (neste caso,  $\Delta[ABC]$ ) e no centro da rotação,  $D$ . Por fim, indica a amplitude e o sentido do ângulo (por exemplo,  $150^\circ$  em sentido anti-horário).
3. Modifica  $\Delta[ABC]$  e observa as alterações nas suas imagens.

### Reflexões (C)

1. Constrói um triângulo  $[ABC]$  e traça uma reta  $DE$  (com o botão  selecionado).
2. Constrói  $\Delta[A'B'C']$ , imagem de  $\Delta[ABC]$  através da reflexão de eixo  $DE$ .  
Seleciona . Depois, clica no objeto para reflexão (neste caso,  $\Delta[ABC]$ ) e no eixo  $DE$ .
3. Altera  $\Delta[ABC]$ , bem como  $DE$ , e observa as alterações.

### Sugestão de trabalho

Usando isometrias, investiga modos de construir triângulos isósceles, triângulos equiláteros, paralelogramos, losangos, retângulos, quadrados, pentágonos regulares e hexágonos regulares. Em cada caso, explica a tua construção.

## M. C. Escher

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) foi um importante artista gráfico holandês. Escher é mundialmente conhecido pelos seus desenhos impossíveis: as representações do plano e do espaço, as explorações do infinito e as metamorfoses. Também são famosas as pavimentações do plano em que Escher recorre às **translações**, às **rotações**, às **reflexões** e às **reflexões deslizantes**.



Pavimentação com translações de dois motivos.



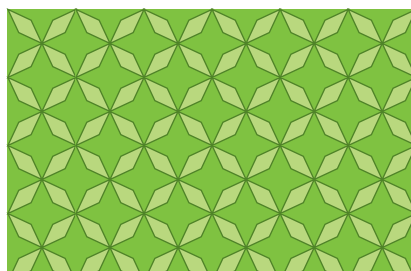
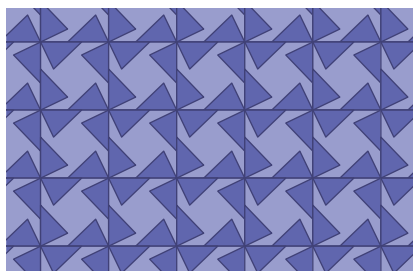
Pavimentação com translações e reflexões deslizantes.



Pavimentação com translações e rotações de um motivo.

### Sugestões de trabalho

- A obra de Escher tornou-se uma ponte entre a Matemática e a arte. Elabora um trabalho sobre este holandês, que dizia ter mais em comum com os matemáticos do que com os artistas. Investiga as suas pavimentações e organiza-as em função das isometrias usadas.
- Recorre a um programa de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, para construir uma pavimentação original usando isometrias.



## Páginas da Internet

- Isometrias: <http://www.scienceu.com/library/articles/isometries> e <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm12>
- Pavimentações: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm22/tiposdepavimentacao1.htm> e <http://www.peda.com/tess/Welcome.html>
- M. C. Escher: <http://www.mcescher.com>
- Scott Kim: <http://www.scottkim.com>

# NÚMEROS RACIONAIS



|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| Atividades iniciais                | 97 |
| Hiperpágina (História dos números) | 98 |

## 3.1

## Representação de números racionais

|                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Frações e dízimas                                                            | 100 |
| Conversão em fração de uma dízima infinita periódica                         |     |
| Representação na reta numérica de números racionais dados na forma de dízima |     |
| Verificar a aprendizagem                                                     | 109 |

## 3.2

## Potências de expoente inteiro

|                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Operações com potências de expoente natural                                              | 111 |
| Potências de expoente nulo                                                               |     |
| Potências de expoente inteiro                                                            |     |
| Decomposição decimal de uma dízima finita usando potências de base 10 e expoente inteiro |     |
| Verificar a aprendizagem                                                                 | 115 |

## 3.3

## Notação científica

|                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Representação de números em notação científica                                           | 117 |
| Ordenação de números racionais representados na forma de dízima ou em notação científica |     |
| Operações com números escritos em notação científica                                     |     |
| Verificar a aprendizagem                                                                 | 122 |
| Síntese                                                                                  | 124 |
| Atividades globais                                                                       | 126 |
| Autoavaliação                                                                            | 130 |
| Estratégias para a resolução de problemas e jogos                                        | 132 |
| Investigar                                                                               | 134 |



## Atividades iniciais

### Diferentes formas de representar números racionais

- 1 A cada imagem, faz corresponder o(s) número(s) que representa(m) a parte colorida.



| Números        |                |
|----------------|----------------|
| 0,4            | $\frac{2}{5}$  |
| 0,3            | $\frac{2}{10}$ |
| $\frac{8}{20}$ | 0,2            |
| $\frac{1}{3}$  | $\frac{1}{5}$  |

- 2 A Sofia, o Diogo e o Zito escreveram a fração  $-\frac{9}{6}$  nas suas calculadoras. A Sofia obteve  $-\left(1\frac{1}{2}\right)$ , o Diogo,  $-\frac{3}{2}$  e o Zito,  $-1,5$ .  
Será que todos inseriram corretamente a expressão na calculadora? Justifica a tua resposta.

- 3 Um quadrado mágico é um quadrado com um número em cada quadrícula, em que, adicionando os números de cada coluna, linha ou diagonal, se obtém sempre o mesmo resultado.  
Verifica que o quadrado seguinte é mágico.

|                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|
| $2\frac{1}{3}$ | $9\frac{1}{3}$ | $4\frac{1}{3}$ |
| $7\frac{1}{3}$ | $5\frac{1}{3}$ | $3\frac{1}{3}$ |
| $6\frac{1}{3}$ | $1\frac{1}{3}$ | $8\frac{1}{3}$ |

- 4 Aureliano Mira Fernandes foi um matemático português natural do Alentejo (1884-1958). Além de todos os seus trabalhos na área da Matemática, também foi deputado. Consta que num debate sobre o Orçamento Geral do Estado, um deputado da oposição criticava o orçamento apresentado pelo Governo dizendo: «O orçamento, meus senhores, tem de ser dividido em terços:  $\frac{1}{3}$  para isto,  $\frac{1}{3}$  para aquilo,  $\frac{1}{3}$  para aqueloutro [...]» Quando o referido deputado chegou ao quinto terço, Mira Fernandes levantou-se, saiu da sala e nunca mais participou ativamente na política.

Num breve texto, refere uma possível justificação para a reação de Mira Fernandes.



- 5 Calcula a área de cada uma das faces do maior cubo que se consegue construir com 1000 cubos de  $1\text{ cm}^3$ .
- 6 Dividindo  $-18$  por um número, obtenho 72. Qual é esse número?

# História dos números

Não é possível indicar uma data concreta para a origem dos números, no entanto, sabe-se que desde sempre o Homem necessitou de efetuar contagens. Os números foram evoluindo à medida que a Humanidade evoluiu.



1000 a. C.



**Fragmento  
de osso de tartaruga,  
1600-1043 a. C.**

Mais tarde, os **Gregos**, os **Hebreus** e os **Romanos** vão usar letras do seu alfabeto para representar números. Na verdade, os três sistemas de numeração copiaram alguns aspectos da escrita dos **Fenícios**. A forma fenícia de escrever é a «mãe» das formas grega, hebraica, latina e árabe de escrever.

Entretanto, na mesma época, no Oriente, as civilizações **chinesa** e **indiana** também desenvolveram formas de representar quantidades. Na China, o sistema numérico era decimal e os números eram representados por símbolos próprios.

O sistema numérico indiano está na origem do sistema que utilizamos hoje. Por volta do século VI d. C., o povo hindu desenvolveu um sistema de numeração que apresentava o zero e mais nove símbolos para representar todas as quantidades. Como o sistema foi criado pelos Hindus e divulgado pelos Árabes, ficou conhecido como **indo-arábico**.

## Exemplos de numerações

|              |   |    |     |      |       |        |         |          |           |            |             |
|--------------|---|----|-----|------|-------|--------|---------|----------|-----------|------------|-------------|
| Egípcia      | I | II | III | IIII | 𐪀     | 𐪁      | 𐪂       | 𐪃        | 𐪄         | 𐪅          | 𐪆           |
| Babilónica   | 𐎶 | 𐎶𐎶 | 𐎶𐎶𐎶 | 𐎶𐎶𐎶𐎶 | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 |
| Romana       | I | II | III | IV   | V     | VI     | VII     | VIII     | IX        | X          | C           |
| Chinesa      | 一 | 二  | 三   | 四    | 五     | 六      | 七       | 八        | 九         | 十          | 百           |
| Indiana      | १ | २  | ३   | ४    | ५     | ६      | ७       | ८        | ९         | १०         | १००         |
| Maia         | . | .. | ... | .... | —     | ÷      | ÷÷      | ÷÷÷      | ÷÷÷÷      | =          | ∞           |
| Indo-arábica | 1 | 2  | 3   | 4    | 5     | 6      | 7       | 8        | 9         | 10         | 100         |

## Números naturais

O Homem resolveu o problema da necessidade de contar criando os números naturais: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

O conjunto dos números naturais é representado por  $\mathbb{N}$ .

A nossa numeração, numeração indo-arábica, de base decimal, foi uma invenção «recente». Há cerca de 2000 anos, os Hindus começaram a usar os símbolos numéricos que deram origem à nossa numeração.

# Números inteiros relativos

Para construir uma escala do tempo onde se fixam numericamente os acontecimentos históricos, considera-se um acontecimento como ponto de origem, e a partir daí conta-se o tempo «para lá» e «para cá».

Para responder à necessidade de algumas grandezas poderem ser tomadas nos dois sentidos, foram criados os números negativos e o zero, aparecendo, então, um novo conjunto: o conjunto dos números inteiros relativos, representado por  $\mathbb{Z}$ .

## Números racionais

As partilhas de bens, as trocas comerciais e outras situações em que as divisões não davam resto zero exigiram o aparecimento de um novo conjunto que contemplasse não só números inteiros mas também números fracionários.

O conjunto de todos esses números chama-se conjunto dos números racionais e é representado por  $\mathbb{Q}$ .



# Representação de números racionais

## Tarefa 1



«Somos irmãos — esclareceu o mais velho — e recebemos como herança estes 35 camelos. Segundo vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte e ao Harin, o mais jovem, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos e a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois metade de 35 é 17,5. Como fazer a partilha se a terça parte e a nona parte de 35 também não são exatas?»

TAHAN, Malba, *O Homem Que Sabia Contar*, Editorial Presença, Lisboa, 2001

- 1 Verifica o valor de  $35 : 2$ ;  $35 : 3$  e  $35 : 9$  na calculadora. O que observas?
- 2 Beremiz, que ouviu esta conversa, disse: «Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui nos trouxe!» De que forma fez Beremiz a divisão, fazendo com que todos os irmãos saíssem satisfeitos e conseguindo ainda lucrar?
- 3 Põe por ordem crescente as três frações referidas no texto.

### Recorda

Qualquer **número racional** pode ser expresso como o quociente entre dois números inteiros,  $a$  e  $b$ ,

e escreve-se  $\frac{a}{b}$ ,

designando-se por fração, sendo  $a$  o numerador e  $b$  o denominador com este diferente de zero.

**Frações decimais** são frações com denominadores iguais a 10, 100, 1000, etc.

Uma **fração própria**  $\frac{a}{b}$  é uma fração com  $b > a$ .

### Frações e dízimas

- Uma fração pode representar um número inteiro ou um número fracionário.

Exemplos:

$\frac{6}{3} = 2$ , logo, a fração  $\frac{6}{3}$  representa um **número inteiro**.

$-\frac{3}{6} = -0,5$ , logo, a fração  $-\frac{3}{6}$  representa um **número fracionário**.

- Vamos ver que qualquer número racional também pode ser representado por uma **dízima**.

Exemplos:

$4 = 4,0$  e  $\frac{1}{2} = 0,5$  dizem-se **dízimas finitas**, porque a parte decimal ou é nula ou é finita.

- Toda a dízima finita pode ser transformada numa fração decimal.

Exemplos:

$$0,28 = \frac{28}{100} = \frac{28}{10^2}$$

$$1,356 = \frac{1356}{1000} = \frac{1356}{10^3}$$

- Toda a fração decimal pode ser representada por uma dízima finita.

Exemplos:

$$\frac{2014}{1000} = \frac{2014}{10^3} = 2,014$$

$$\frac{13}{100} = \frac{13}{10^2} = 0,13$$

Dada uma fração irredutível,  $\frac{a}{b}$ , com  $b \neq 1$ , se a decomposição de  $b$  não tem fatores primos diferentes de 2 e de 5, então,  $\frac{a}{b}$  é equivalente a uma fração decimal. Toda a fração equivalente a uma fração decimal pode ser representada por uma dízima finita.

Exemplos:

$$\bullet \frac{27}{25} = \frac{27}{5^2} = \frac{27 \times 2^2}{5^2 \times 2^2} = \frac{108}{(5 \times 2)^2} = \frac{108}{100} = 1,08$$

$$\bullet \frac{5}{8} = \frac{5}{2^3} = \frac{5 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{625}{(2 \times 5)^3} = \frac{625}{1000} = 0,625$$

$$\bullet \frac{11}{40} = \frac{11}{2^3 \times 5} = \frac{11 \times 5^2}{2^3 \times 5 \times 5^2} = \frac{275}{(2 \times 5)^3} = \frac{275}{1000} = 0,275$$

- Também se podem encontrar as dízimas que representam as frações equivalentes a frações decimais utilizando o algoritmo da divisão.

Vamos obter de novo as representações em dízima das frações dadas anteriormente recorrendo, desta vez, ao algoritmo da divisão.

Exemplos:

$$\begin{array}{r} 27,00 \overline{) 25} \\ 20 \phantom{00} \\ \hline 0 \phantom{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5,000 \overline{) 8} \\ 20 \phantom{00} \\ \hline 40 \phantom{00} \\ 40 \phantom{00} \\ \hline 0 \phantom{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11,000 \overline{) 40} \\ 300 \phantom{00} \\ \hline 200 \phantom{00} \\ 200 \phantom{00} \\ \hline 0 \phantom{00} \end{array}$$

- Nem toda a fração pode ser transformada numa fração decimal.

Observemos o exemplo seguinte:

O número  $\frac{7}{18}$  não possui representação na forma de fração decimal.

Se a fração  $\frac{7}{18}$  fosse equivalente a uma fração decimal, ter-se-ia uma

igualdade da forma  $\frac{7}{18} = \frac{a}{10^n}$ , com  $a$  e  $n$  números naturais, de onde resultaria que:

$$7 \times 10^n = 18 \times a \Leftrightarrow 7 \times 2^n \times 5^n = 2 \times 3^2 \times a$$

Observando a igualdade anterior, verifica-se que a decomposição em fatores primos de  $7 \times 2^n \times 5^n$  é igual a uma decomposição que inclui o número 3, o que é absurdo, pois a decomposição em fatores primos de um número é única.

Este raciocínio aplica-se de forma mais geral a qualquer fração irredutível cujo denominador apresente um divisor primo distinto de 2 e de 5.

Desta forma, pode reconhecer-se que essas frações não admitem representação em dízima finita.

Uma fração  $\frac{a}{b}$  irredutível, tal que  $b$  tem pelo menos um fator primo diferente de 2 e de 5 não é equivalente a uma fração decimal.

#### Recorda

Se  $a = b \times c$ ,  
então,  $a^n = b^n \times c^n$ .

- O que ocorre quando se aplica o algoritmo da divisão a uma fração  $\frac{a}{b}$  irredutível, tal que  $b$  tem pelo menos um fator primo diferente de 2 e de 5? Apliquemos o algoritmo da divisão a  $\frac{7}{18}$

$$\begin{array}{r} 7,00 \overline{) 18} \\ 1 \ 60 \ 0,38 \\ 16 \end{array}$$

O resto parcial 16 já foi obtido anteriormente, pelo que o procedimento se repetirá indefinidamente, enquanto continuarmos o algoritmo:

$$\begin{array}{r} 7,00000 \overline{) 18} \\ 1 \ 60 \ 0,38888 \\ 160 \\ 160 \\ 160 \\ 6 \end{array}$$

Consideremos a fração  $\frac{1}{3}$ . Apliquemos o algoritmo da divisão para determinar os sucessivos algarismos da aproximação de  $\frac{1}{3}$  como dízima, com erros progressivamente menores.

$$\begin{array}{r} 1,000 \overline{) 3} \\ 1 \ 0 \ 0,333 \\ 10 \\ 1 \end{array}$$

Se prosseguirmos o algoritmo da divisão obtemos sucessivas aproximações de  $\frac{1}{3}$ , mas nunca um resultado exato.

Determina-se então por esse processo uma sucessão em que cada termo é uma dízima finita obtida da anterior acrescentando-lhe um algarismo à parte decimal:

$$\begin{array}{l} 0,3 \\ 0,33 \\ 0,333 \\ \dots \end{array}$$

O algoritmo da divisão conduz-nos à **dízima infinita** 0,3333...

Na dízima infinita 0,333... existem sequências de algarismos que se repetem indefinidamente. Neste caso existem várias sequências que se repetem 3, 33, 333, ...

No entanto, a sequência com menor número de algarismos é a sequência constituída só pelo algarismo «3» — esta sequência denomina-se **período da dízima** e a dízima diz-se **infinita periódica**.

O período pode ser escrito entre parênteses:  $\frac{1}{3} = 0,33\dots = 0,(3)$

O número de algarismos que constitui o período da dízima é o **comprimento do período** dessa dízima.

Chama-se **dízima infinita** a uma expressão do tipo  $a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$  formada pela representação decimal  $a_0$  de um número natural ou nulo e onde, após a vírgula, está representada uma sucessão (isto é, uma sequência infinita) de algarismos, podendo ainda ser afetada de um sinal «-».

O comprimento da dízima  $0,(3)$  é 1.

Consideremos outro exemplo:

Apliquemos o algoritmo da divisão à fração  $\frac{20}{11}$

$$\begin{array}{r} 20,0000 \overline{) 11} \\ 90 \phantom{0000} \\ \hline 20 \phantom{0000} \\ 90 \phantom{0000} \\ \hline 20 \phantom{0000} \\ 9 \phantom{0000} \end{array}$$

O algoritmo da divisão conduz-nos à dízima infinita periódica  $1,8181\dots$

$$\frac{20}{11} = 1,8181\dots = 1,(81)$$

O período desta dízima é 81 e tem comprimento 2.

#### Nota

O comprimento do período da dízima infinita periódica que representa a fração irredutível  $\frac{a}{b}$  é sempre menor do que  $b$ .

#### Nota

Não é fácil encontrar o período de  $\frac{343}{17}$ , pois é composto por 16 algarismos e na maioria das calculadoras o número de dígitos visíveis é menor.

## ■ Conversão em fração de uma dízima infinita periódica

Uma dízima infinita periódica pode ser representada na forma de fração.

Exemplos:

- Representar  $0,(6)$  na forma de fração.

Ao multiplicar esta dízima de período «6» por 10, obtém-se a dízima  $6,66\dots = 6,(6)$

$$10 \times 0,(6) = 6,6\dots$$

A diferença entre as duas dízimas é uma dízima finita.

$$10 \times 0,(6) - 0,(6) = 6,6\dots - 0,6\dots = 6$$

$$\text{Mas } 10 \times 0,(6) - 0,(6) = (10 - 1) \times 0,(6) = 9 \times 0,(6)$$

$$\text{Portanto, } 9 \times 0,(6) = 6, \text{ ou seja, } 0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

- Representar  $2,1(13)$  na forma de fração.

Ao multiplicar esta dízima de período «13» por  $10^2$ , obtém-se a dízima  $211,3131\dots = 211,(31)$

$$100 \times 2,1(13) = 211,31\dots$$

Então:

$$\begin{aligned} 100 \times 2,1(13) - 2,1(13) &= 211,31313\dots - 2,1131313\dots = \\ &= 211,31 - 2,11 = 209,2 \end{aligned}$$

$$\text{Mas } (100 - 1) \times 2,1(13) = 99 \times 2,1(13)$$

$$\text{Portanto, } 99 \times 2,1(13) = 209,2, \text{ ou seja,}$$

$$2,1(13) = \frac{209,2}{99} = \frac{2092}{990} = \frac{1046}{495}$$

**Em geral, a diferença entre um número representado por uma dízima infinita e o produto desse número por uma potência de base 10 e expoente igual ao comprimento do período é uma dízima finita.**

Podemos resumir o nosso estudo:

Qualquer número racional pode ser representado por uma dízima finita ou infinita periódica e, reciprocamente, qualquer dízima finita ou infinita periódica representa um número racional.

#### Nota

O algoritmo da divisão nunca conduz a dízimas infinitas periódicas de período igual a «9».

- Qual será a fração que tem por dízima  $0,9$ ?

Ao multiplicar esta dízima de período «9» por 10, obtém-se uma dízima de igual período.

$$10 \times 0,9 = 9,9$$

Então:

$$10 \times 0,9 - 0,9 = 9,9... - 0,9... = 9$$

$$\text{Por outro lado, } 10 \times 0,9 - 0,9 = (10 - 1) \times 0,9 = 9 \times 0,9$$

$$\text{Logo, } 9 \times 0,9 = 9, \text{ ou seja, } 0,9 = \frac{9}{9} = 1.$$

Este processo permite mostrar que é possível representar qualquer dízima infinita de período «9» na forma de dízima finita:

$$0,249 = 0,25$$

$$1,3429 = 1,343$$

Logo, a representação na forma de dízima não é única. Mas se se excluirmos as dízimas de período «9» pode estabelecer-se uma correspondência um a um entre o conjunto das dízimas finitas e infinitas periódicas e o conjunto dos números racionais.

#### Exercícios resolvidos

1. Representa na forma de fração as dízimas seguintes:

a)  $2,13$

b)  $5,5(27)$

#### Resolução:

1. a) Ao multiplicar esta dízima de período «13» por  $10^2$ , obtemos:

$$100 \times 2,13 = 213,1313...$$

Então:

$$100 \times 2,13 - 2,13 = 213,13... - 2,13... = 211$$

$$\text{Por outro lado: } 100 \times 2,13 - 2,13 =$$

$$= (100 - 1) \times 2,13 = 99 \times 2,13$$

$$\text{Portanto, } 99 \times 2,13 = 211, \text{ ou seja, } 2,13 = \frac{211}{99}.$$

- b) Ao multiplicar esta dízima de período «27» por  $10^2$ , obtemos:

$$100 \times 5,5(27) = 552,727...$$

Então:

$$100 \times 5,5(27) - 5,5(27) = 552,727... - 5,527... = 547,2$$

$$\text{Por outro lado: } (100 - 1) \times 5,5(27) = 99 \times 5,5(27)$$

$$\text{Portanto, } 99 \times 5,5(27) = 547,2 \text{ ou seja,}$$

$$5,5(27) = \frac{547,2}{99} = \frac{5472}{990} = \frac{304}{55}.$$





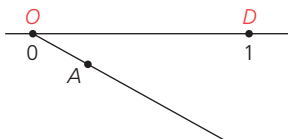
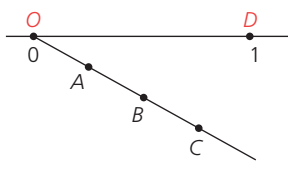
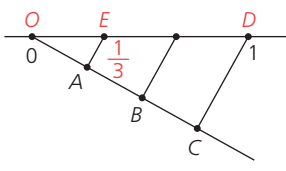
Para representar na reta numérica um número racional representado na forma de dízima infinita periódica, converte-se em fração e utiliza-se uma construção geométrica para decompor um segmento de reta em partes iguais. Vejamos como.

Exemplo:

Para representar  $0,(3)$ , começa-se por converter a dízima em fração.

Foi visto anteriormente que  $0,(3) = \frac{1}{3}$ .

Vamos dividir, por um processo geométrico, a unidade em três partes iguais, tal como se ilustra no seguinte quadro:

| 1.º passo                                                                                                                                                                                                     | 2.º passo                                                                                                                                                                                               | 3.º passo                                                                                                                                                                                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Traçar uma semirreta de origem <math>O</math> e marcar um ponto <math>A</math> nessa semirreta como mostra a figura.</p>  | <p>Marcar, com um compasso, os pontos <math>B</math> e <math>C</math> de tal modo que <math>OA = AB = BC</math>.</p>  | <p>Unir <math>C</math> a <math>D</math> e traçar paralelas a <math>[CD]</math> que passem em <math>A</math> e em <math>B</math>.</p>  |

O ponto  $E$  representa a dízima  $0,(3)$ .

Outro exemplo:

Vamos representar na reta numérica o número racional  $2,8(3)$  começando por representá-lo na forma de fração e em seguida como numeral misto.

Começamos por representar este número na forma de fração:

$$10 \times 2,8(3) = 28,(3)$$

$$10 \times 2,8(3) - 2,8(3) = 28,3... - 2,83... = 25,5$$

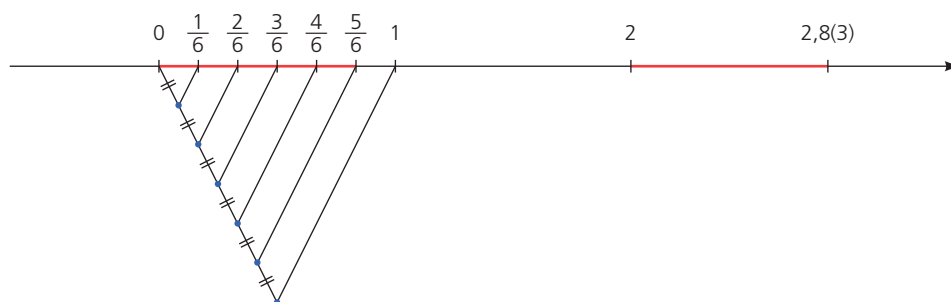
$$10 \times 2,8(3) - 2,8(3) = (10 - 1) \times 2,8(3) = 9 \times 2,8(3)$$

$$9 \times 2,8(3) = 25,5$$

$$2,8(3) = \frac{25,5}{9} = \frac{255}{90} = \frac{17}{6}$$

Representando a fração  $\frac{17}{6}$  na forma de numeral misto, tem-se  $\frac{17}{6} = 2 \frac{5}{6}$ .

Para representar o ponto de abscissa  $2,8(3)$ , constrói-se então um segmento de reta de comprimento  $\frac{5}{6}$  e justapõe-se este segmento de reta ao segmento de reta cujas extremidades são representadas pelos números 0 e 2, como mostra a figura.



### Recorda

O número racional  $\frac{13}{5}$  pode ser representado pelo numeral misto  $2\frac{3}{5}$ .

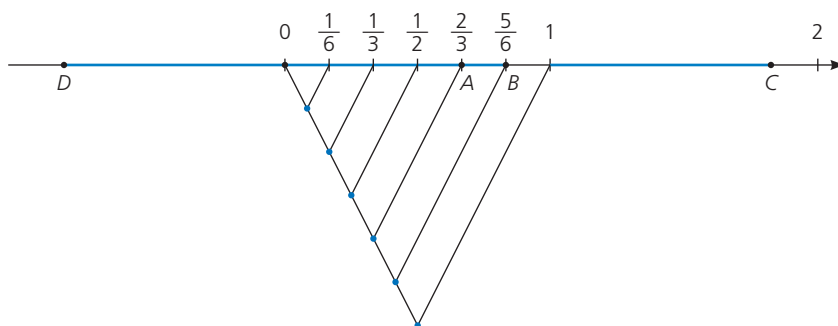
O primeiro número representa a sua parte inteira e o segundo, a sua parte fracionária.

Ou seja,  $2\frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5}$ .

### Exercício resolvido

- a) Representa na reta numérica os números racionais  $1,58(3)$  e  $-1,58(3)$ .
- b) Observa a reta desenhada em baixo e indica uma dízima para representar a abscissa de cada ponto indicado.

Nota que  $\overline{OB} = \overline{OD}$  e que  $\overline{OC} = 1 + \overline{OB}$ .



### Resolução:

- a) Começamos por representar a dízima infinita periódica  $1,58(3)$  na forma de fração.

Ao multiplicar esta dízima de período «3» por 10, obtém-se:

$$10 \times 1,58(3) = 15,833\dots$$

Logo:

$$10 \times 1,58(3) - 1,58(3) = 15,833\dots - 1,583\dots = 14,25$$

$$\text{Por outro lado: } 10 \times 1,58(3) - 1,58(3) = (10 - 1) \times 1,58(3) = 9 \times 1,58(3)$$

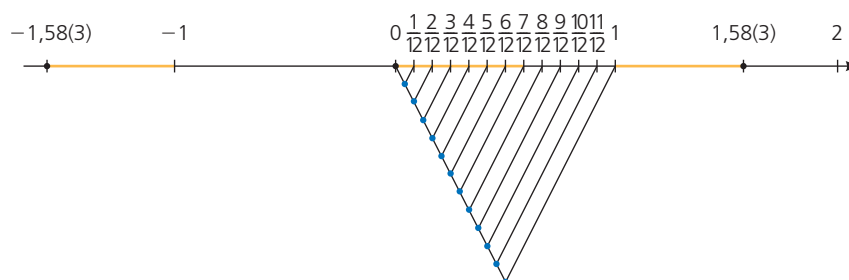
$$\text{Portanto, } 9 \times 1,58(3) = 14,25, \text{ ou seja, } 1,58(3) = \frac{14,25}{9} = \frac{1425}{900} = \frac{19}{12}$$

$$\text{Representando a fração } \frac{19}{12} \text{ na forma de numeral misto, tem-se } \frac{19}{12} = 1 \frac{7}{12}.$$

As dízimas  $1,58(3)$  e  $-1,58(3)$  são simétricas.

Para representar o ponto de abscissa  $1,58(3)$ , constrói-se então um segmento de reta de comprimento  $\frac{7}{12}$  e justapõe-se este segmento ao segmento de reta cujas extremidades são representadas pelos números 0 e 1, como mostra a figura.

O ponto de abscissa  $-1,58(3)$  é o ponto simétrico em relação à origem do ponto de abscissa  $1,58(3)$ .



b) A abscissa do ponto  $A$  é  $\frac{2}{3}$ . A dízima que representa este número racional pode ser obtida pelo algoritmo da divisão.

$$\begin{array}{r} 2,000 \overline{) 3} \\ \underline{20} \phantom{00} \\ 20 \phantom{00} \\ \underline{20} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{2}{3} = 0,6(6)$$

A abscissa do ponto  $B$  é  $\frac{5}{6}$ . A dízima que representa este número racional pode ser obtida pelo algoritmo da divisão.

$$\begin{array}{r} 5,000 \overline{) 6} \\ \underline{20} \phantom{00} \\ 20 \phantom{00} \\ \underline{20} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{5}{6} = 0,8(3)$$

A abscissa do ponto  $C$  é  $1\frac{5}{6}$ . A dízima que representa este número racional pode ser obtida usando a dízima anterior.

$$1\frac{5}{6} = 1 + \frac{5}{6} = 1 + 0,8(3) = 1,8(3)$$

Nota que como  $1\frac{5}{6} = \frac{11}{6}$ , também poderias obter essa dízima pelo algoritmo da divisão, dividindo 11 por 6.

O ponto  $D$  é simétrico do ponto  $B$  em relação à origem. Logo, a dízima que representa a abscissa de  $D$  é  $-0,8(3)$ .

### O que debes saber

- Transformar uma fração irredutível em fração decimal, sempre que possível.
- Representar números fracionários por dízimas finitas ou infinitas periódicas.
- Representar uma dízima finita ou infinita periódica na forma de fração.
- Representar números racionais na reta numérica.

## Verificar a aprendizagem

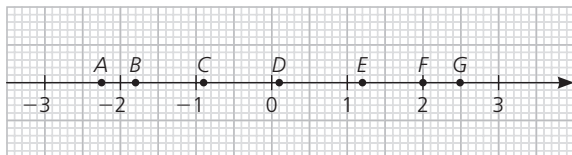
### NÚMEROS RACIONAIS E DÍZIMAS

- 1** Observa os números seguintes:
- $$-8,(6); 1,33333; -\frac{21}{11}; \frac{10}{2}; 0; -\frac{72}{8}; 0,8; \frac{9}{3}; \frac{12}{99}; -5; \frac{43}{13}; \frac{143}{120}; -\frac{120}{143}$$
- 1.1** Identifica os números inteiros.
- 1.2** Que números correspondem a dízimas finitas?
- 1.3** Indica os números que podem ser representados por dízimas infinitas periódicas e diz qual o seu período.
- 1.4** Indica o comprimento do período de cada uma das dízimas infinitas periódicas da questão 1.3.
- 2** Escreve as dízimas seguintes sob a forma de fração e, sempre que possível, simplifica a fração.
- $$0,3; 2,2; 0,03; -1,46$$

**NOTA:** Na página 134, encontra uma explicação sobre simplificação de frações utilizando a calculadora.

### AUTOAVALIAÇÃO Sei representar números fracionários por dízimas finitas ou infinitas periódicas?

- 3** Representa na forma de fração os números racionais dados pelas seguintes dízimas infinitas periódicas:
- $$0,(35); 0,2(7); 3,12(84); 5,(9)$$
- 4** Observa as seguintes frações:  $\frac{3}{16}; -\frac{9}{80}; \frac{143}{120}; -\frac{4}{125}; \frac{7}{50}; -\frac{13}{70}; \frac{120}{143}$
- 4.1** Identifica, justificando, as que são equivalentes a frações decimais.
- 4.2** Transforma em fração decimal as frações identificadas na alínea anterior.
- 4.3** Representa na forma de dízima as frações que não representam dízimas finitas, utilizando o algoritmo da divisão.
- 4.4** Mostra, sem recorrer ao algoritmo da divisão, que a fração  $\frac{13}{70}$  não é equivalente a uma fração decimal.
- 5** Considera a representação de pontos na reta numérica e o conjunto de números racionais.



|                |        |                |       |               |                |                |
|----------------|--------|----------------|-------|---------------|----------------|----------------|
| $\frac{14}{7}$ | $-0,9$ | $\frac{2}{20}$ | $2,5$ | $\frac{6}{5}$ | $-\frac{9}{5}$ | $-\frac{9}{4}$ |
|----------------|--------|----------------|-------|---------------|----------------|----------------|

- 5.1** Utilizando os números racionais, faz corresponder a cada ponto a sua abcissa.
- 5.2** O ponto  $H$  é a imagem do ponto  $D$  pela rotação de centro em  $O$ , que tem abcissa 0, e amplitude  $180^\circ$ . Indica a abcissa do ponto  $H$ .
- 5.3** O ponto  $P$  é a imagem do ponto  $D$  pela rotação de centro em  $B$  e amplitude  $180^\circ$ . Indica a abcissa do ponto  $P$ .
- 5.4** O ponto  $R$  é a imagem do ponto  $E$  pela translação  $T_{\vec{GF}}$ . Indica a abcissa do ponto  $R$ .
- 6** Desenha uma reta numérica no teu caderno e marca, com rigor, os pontos seguintes.
- A  $\rightarrow -2,6$

B  $\rightarrow \frac{3}{6}$

C  $\rightarrow -1,(3)$

D  $\rightarrow \frac{3}{2}$

E  $\rightarrow \frac{19}{7}$

F  $\rightarrow -0,25$

G  $\rightarrow \frac{21}{15}$

H  $\rightarrow 1,4$

## Aplicar

- 7 Considera a sequência de frações seguinte:  $\frac{2}{1+3}$ ;  $\frac{3}{1+3+5}$ ;  $\frac{4}{1+3+5+7}$ ; ...

7.1 Simplifica as frações.

7.2 Escreve as frações correspondentes aos três termos seguintes da sequência na mesma forma que a apresentada.

7.3 Sem efetuar cálculos, identifica as frações simplificadas correspondentes àquelas que escreveste em 7.2.

## Tarefas de investigação

- 8 Qual é o período da dízima que representa  $\frac{1}{81}$ ?

- 9 Considera as frações seguintes.

$$\frac{1}{7} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{11}{7} \quad \frac{24}{7} \quad \frac{1234}{7}$$

9.1 Determina o período de cada uma das dízimas correspondentes.

9.2 O que observas?

- 10 Considera as frações seguintes.

$$\frac{1}{9} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{3}{9} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{11}{9} \quad \frac{20}{9} \quad \frac{21}{9}$$

10.1 Determina o período de cada uma das dízimas correspondentes.

10.2 O que observas?

10.3 Indica, sem utilizar a calculadora, o período de  $\frac{37}{9}$ .

- 11 Considera as frações seguintes:

$$\frac{1}{11} \quad \frac{2}{11} \quad \frac{3}{11} \quad \frac{4}{11}$$

Observa que:  $\frac{1}{11} = 0,0909090909 \dots = 0,(09)$   $\frac{2}{11} = 0,1818181818 \dots = 0,(18)$

$$\frac{3}{11} = 0,2727272727 \dots = 0,(27) \quad \frac{4}{11} = 0,3636363636 \dots = 0,(36)$$

11.1 Tendo em conta o que observaste, faz uma conjectura, sem recorrer à calculadora, na forma de dízima, das seguintes frações:

$$\frac{5}{11} \quad \frac{6}{11} \quad \frac{7}{11} \quad \frac{12}{11} \quad \frac{13}{11}$$

11.2 O que observas?

11.3 Indica, sem utilizar a calculadora, o período de  $\frac{343}{11}$ .

- 12 Observa as frações seguintes.

$$\frac{1}{33} \quad \frac{2}{33} \quad \frac{3}{33} \quad \frac{15}{33} \quad \frac{28}{33} \quad \frac{120}{33}$$

12.1 Determina o período de cada uma das dízimas correspondentes.

12.2 Sem recorrer à calculadora, descobre o período de  $\frac{236}{33}$  e indica outras frações de denominador 33 que tenham o mesmo período. Justifica a tua resposta.

## 3.2

# Potências de expoente inteiro

### Tarefa 2



- 1 Descobre os valores dos 10 prémios.
- 2 Escreve os sete primeiros valores sob a forma de potências com a mesma base.
- 3 Procura uma regularidade nos expoentes das potências e descobre os expoentes dos três últimos prémios.

## Operações com potências de expoente natural

### Recorda:

Existem regras para multiplicar e dividir potências, desde que tenham bases iguais ou expoentes iguais.

- Multiplicar potências com a mesma base:  
 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ , em que  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$
- Multiplicar potências com o mesmo expoente:  
 $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ , em que  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $m \in \mathbb{N}$
- Dividir potências com a mesma base:  
 $a^m : a^n = a^{m-n}$ , em que  $a \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $m > n$
- Dividir potências com o mesmo expoente:  
 $a^m : b^m = (a : b)^m$ , em que  $b \neq 0$ ,  $a, b \in \mathbb{Q}$  e  $m \in \mathbb{N}$
- Potência de potência:  
 $(a^m)^n = a^{m \times n}$ , em que  $a \in \mathbb{Q}$  e  $m, n \in \mathbb{N}$

### Atenção!

Para adicionar ou subtrair potências, não há regras, assim como também não há regras para multiplicar ou dividir potências que não tenham a mesma base nem o mesmo expoente. Em ambos os casos, calculam-se os valores das potências separadamente.

Exemplos:

- $2^5 + 2^3 = 32 + 8 = 40$
- $(-5)^3 - 2^3 = -125 - 8 = -133$
- $2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$

## Potências de expoente nulo

Dado um número racional não nulo  $a$ , que valor deve ser atribuído a  $a^0$  de forma que para todo o número natural  $n$  se tenha  $a^0 \times a^n = a^{0+n}$ ?

Sabendo que  $0 + n = n$ , então,  $a^{0+n} = a^n$ . Assim, que valor deve ser atribuído a  $a^0$  de forma que,  $a^0 \times a^n = a^n$ ?



Para que a igualdade seja verdadeira  $a^0$  terá de ser o elemento neutro da multiplicação de números racionais, ou seja,  $a^0 = 1$ .

Uma potência de expoente nulo é **igual a 1**:

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

Exemplos:

- $2^0 = 1$
- $5000^0 = 1$
- $(-3)^0 = 1$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

Desta forma, continua válida a regra de cálculo de divisão de potências com a mesma base  $a$  ( $a \neq 0$ ).

Exemplo:

$$2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0 = 1$$

Assim, esta regra pode aplicar-se também quando os expoentes são iguais. As restantes regras mantêm-se válidas também.

Exemplos:

- $3^2 \times 3^0 = 3^{2+0} = 3^2$
- $3^0 \times 3^0 = 3^{0+0} = 3^0$
- $2^0 \times 3^0 = (2 \times 3)^0$
- $(2^3)^0 = 2^{3 \times 0} = 2^0$
- $(2^0)^0 = 2^{0 \times 0} = 2^0$

## ■ Potências de expoente inteiro

Dado um número racional não nulo  $a$  e um número natural  $n$ , que valor deve ser atribuído a  $a^{-n}$  de forma que se tenha  $a^n \times a^{-n} = a^{n+(-n)}$ ?

Considerando que  $n + (-n) = 0$  e que  $a^0 = 1$ , a expressão  $a^n \times a^{-n}$  terá de ser igual a 1. Para que tal aconteça,  $a^{-n}$  terá de ser igual ao inverso de  $a^n$ , ou seja,  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ em que } n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Q} \text{ e } a \neq 0.$$

Repara que  $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ , pelo que  $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ .

Exemplos:

- $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10 \times 10} = \frac{1}{100}$
- $(-6)^{-4} = \frac{1}{(-6)^4} = \frac{1}{+6^4} = \frac{1}{1296}$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

### Nota

O inverso da fração  $\frac{a}{b}$  é a fração  $\frac{b}{a}$  (com  $a, b \neq 0$ ).

$$\text{Logo, } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

com  $a, b \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$ .

Desta forma, continua válida a regra de cálculo de divisão de potências com a mesma base  $a$  ( $a \neq 0$ ).

Exemplo:

$$\bullet 2^2 : 2^5 = 2^{2-5} = 2^{-3}$$

$2^2 : 2^5$  pode também ser calculado pela simplificação do quociente:

$$2^2 : 2^5 = \frac{2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2^3}$$

E deste modo voltamos a encontrar a igualdade  $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ .

Assim, esta regra pode aplicar-se também quando o expoente do denominador é superior ao do numerador.

As restantes regras mantêm-se válidas também.

As propriedades das operações com potências de base racional e expoente natural mantêm-se válidas para potências de base racional e expoente inteiro.

- Multiplicar potências com a mesma base:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \text{ em que } a \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{Z} \text{ (com } a \neq 0 \text{)}$$

Exemplos:

$$(-1)^{-3} \times (-1)^2 = (-1)^{-3+2} = (-1)^{-1} = \frac{1}{(-1)^1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2+0} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

- Multiplicar potências com o mesmo expoente:

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m, \text{ em que } a, b \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{Z} \text{ (com } a, b \neq 0 \text{)}$$

Exemplos:

$$3^{-2} \times 2^{-2} = (3 \times 2)^{-2} = 6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

$$2^0 \times 5^0 = (2 \times 5)^0 = 10^0 = 1$$

- Dividir potências com a mesma base:

$$a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0, a \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{Z}$$

Exemplos:

$$4^3 : 4^{-2} = 4^{(3-(-2))} = 4^{(3+2)} = 4^5 = 1024$$

$$2^0 : 2^3 = 2^{(0-3)} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

- Dividir potências com o mesmo expoente:

$$a^m : b^m = (a : b)^m, b \neq 0, a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } m \in \mathbb{Z} \text{ (com } a \neq 0 \text{)}$$

Também se pode escrever esta propriedade utilizando frações

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

### Calculadora

A maioria das calculadoras permite calcular potências através da tecla

$\wedge$ ,  $x^y$  ou  $y^x$ .

Exemplos:

$$\bullet 4^0 = ?$$

4  $\wedge$  0 = 1

$$\bullet 2^{-3} = ?$$

2  $\wedge$  (-) 3 = 0.125

$$\bullet (-8)^5 = ?$$

( (-) 8 )  $\wedge$  5 =

Mais informações sobre calculadoras (vários modelos) na página 134.

### Recorda

Sinal de uma potência:

- Uma potência com base positiva é um número positivo.
- Uma potência com base negativa:
  - e expoente par é um número positivo;
  - e expoente ímpar é um número negativo.

Exemplos:  $8^{-3} : 2^{-3} = \left(\frac{8}{2}\right)^{-3} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

$6^0 : 2^0 = (6 : 2)^0 = 3^0 = 1$

$\frac{3^{-2}}{6^{-2}} = \left(\frac{3}{6}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 2^2 = 4$

- Potência de potência:

$(a^m)^n = a^{m \times n}$ ,  $a \in \mathbb{Q}$  e  $m, n \in \mathbb{Z}$  (em que  $a \neq 0$ )

Exemplos:  $(3^3)^{-1} = 3^{(3 \times (-1))} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

$(2^5)^0 = 2^{5 \times 0} = 2^0 = 1$

### Exercício resolvido

Calcula o valor das seguintes potências:

a)  $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^3\right]^{-1}$       b)  $\frac{(2^3)^{-1}}{5^{-3}}$

**Resolução:**

a)  $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^3\right]^{-1} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{3 \times (-1)} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 = -\frac{64}{27}$

b)  $\frac{(2^3)^{-1}}{5^{-3}} = \frac{2^{3 \times (-1)}}{5^{-3}} = \frac{2^{-3}}{5^{-3}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$

## Decomposição decimal de uma dízima finita usando potências de base 10 e expoente inteiro

Observa que:

$2,351 = 2 + 0,3 + 0,05 + 0,001 = 2 + 3 \times 0,1 + 5 \times 0,01 + 1 \times 0,001$ ,

ou seja,

$2,351 = 2 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3}$ ,

### Exercício resolvido

Efetua a decomposição decimal das dízimas seguintes utilizando potências de base 10 e expoente inteiro.

a) 0,257      b) -12,34

**Resolução:**

a)  $0,257 = 0,2 + 0,05 + 0,007 = 2 \times 0,1 + 5 \times 0,01 + 7 \times 0,001 = 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 7 \times 10^{-3}$

b)  $-12,34 = -(10 + 2 + 0,3 + 0,04) = -(1 \times 10 + 2 + 3 \times 0,1 + 4 \times 0,01) = -1 \times 10^1 - 2 \times 10^0 - 3 \times 10^{-1} - 4 \times 10^{-2}$

### Recorda

Para  $n \in \mathbb{N}$ :

$10^n = 1 \underbrace{0 \dots 00}_{n \text{ zeros}}$

e  $n$  casas decimais

$10^{-n} = \underbrace{0,0 \dots 01}_{n \text{ zeros}}$

### O que deves saber

- Efetuar operações com potências de base racional e expoente inteiro.
- Fazer a decomposição decimal de uma dízima finita.

### Verificar a aprendizagem

#### POTÊNCIAS DE BASE E EXPOENTE INTEIROS

- 1 Calcula:  
a)  $7^0$       b)  $(-50)^0$       c)  $3,22^0$       d)  $-1,8^0$       e)  $(-4)^0 - 3^0$
- 2 Observa a sequência seguinte: 81; 27; 9; 3; 1;  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{9}$ ;  $\frac{1}{27}$   
a) Indica o termo seguinte.  
b) Indica uma lei de formação dos termos desta sequência.  
c) Representa os termos da sequência sob a forma de potências de base 3.
- 3 Copia e completa:  
a)  $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \dots$       b)  $5^{-3} = \dots$       c)  $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \dots$       d)  $(-3)^{-4} = \dots$
- 4 Calcula:  
a)  $5^{-2}$       c)  $(-8)^{-2}$       e)  $19^0$       g)  $(-1)^{-7}$   
b)  $3^{-3}$       d)  $(-4)^{-3}$       f)  $12^{-1}$       h)  $10^{-3}$

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei calcular o valor de potências de base e expoente inteiros?

#### POTÊNCIAS DE BASE RACIONAL E EXPOENTE INTEIRO

- 5 Calcula:  
a)  $\left(\frac{1}{3}\right)^2$       c)  $\left(\frac{2}{9}\right)^2$       e)  $\left(-\frac{7}{11}\right)^2$       g)  $\left(-\frac{7}{11}\right)^0$   
b)  $\left(\frac{1}{5}\right)^3$       d)  $\left(\frac{3}{5}\right)^4$       f)  $\left(-\frac{3}{7}\right)^3$       h)  $\left(-\frac{1}{10}\right)^5$
- 6 Calcula:  
a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-8}$       c)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$       e)  $\left(-\frac{9}{4}\right)^{-2}$       g)  $(-2,5)^{-2}$   
b)  $\left(\frac{1}{10}\right)^{-6}$       d)  $\left(-\frac{7}{3}\right)^{-3}$       f)  $(-0,2)^{-1}$       h)  $0,4^{-5}$

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei calcular o valor de potências de base racional e expoente inteiro?

#### OPERAÇÕES COM POTÊNCIAS DE BASE RACIONAL E EXPOENTE INTEIRO

- 7 Calcula utilizando, sempre que possível, as regras das operações com potências.  
a)  $(2,1)^2 \times (2,1)^{-3}$       c)  $(0,4)^3 \times (2)^3 : \left(\frac{4}{5}\right)^5$       e)  $4^{-2} : 2^{-4} + [2^{-2}]^0$   
b)  $\left(\frac{2}{3}\right)^5 : \left(\frac{2}{9}\right)^5$       d)  $\left[\left(-\frac{1}{10}\right)^{-2}\right]^3$       f)  $(-1)^{51} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 : 5^{-2}$
- 8 Escreve sob a forma de uma potência de base 10:  
a) 10 000      b)  $100^3$       c)  $1000^0$       d) 0,1      e)  $0,01^2$

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei efetuar operações com potências de base racional e expoente inteiro?

- 9 Efetua a decomposição decimal de cada um dos seguintes números racionais:

a) 0,13045                      b) -20,232

### Aplicar

- 10 Copia e completa os espaços com  $<$ ,  $>$  ou  $=$ , de modo a obteres afirmações verdadeiras.

a)  $1^{13} \dots (-1)^{12}$                       c)  $-14^2 \dots 5^2$                       e)  $0,25 \dots 2^{-2}$                       g)  $5^{-5} \dots 10^{-5}$   
b)  $(-2)^4 \dots (-3)^3$                       d)  $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \dots \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$                       f)  $(-4)^2 \dots (-2)^4$                       h)  $\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]^{-1} \dots \left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$

- 11 Qual é o termo geral da sucessão  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ ? Escolhe a opção correta.

A.  $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$                       B.  $\frac{1}{2n}$                       C.  $(-2)^n$                       D.  $2^{-n}$

- 12 Simplifica e calcula:

a)  $5^{-3} \times 5 + \frac{4}{5^2}$                       f)  $0,1^{-2} \times 10^4 - (-2,75)^3 : \left(\frac{4}{11}\right)^{-3}$   
b)  $1^{20} \times (2^{-3} \times 3^{-2}) + \left(\frac{72}{71}\right)^{-1}$                       g)  $6^{-4} : \frac{1}{3^4} - \left(\frac{4}{3}\right)^{-9} : \left(\frac{4}{3}\right)^{-7}$   
c)  $8^{-2} : 8^{-3} + 6^3 : (-3)^3$                       h)  $9^0 + 3^{-6} : (3^{-2})^3 - \left(-\frac{1}{5}\right)^3 \times 5^4$   
d)  $4^{-8} \times 4^3 \times 16^2 + (-32)^0$                       i)  $(1,2)^{-2} - 3^{-2} \times 4^{-1} - \left[\left(-\frac{5}{3}\right)^{-3}\right]^0$   
e)  $\left(\frac{5}{5}\right)^{-4} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-6}$

### Tarefa

- 13 Num programa de televisão sobre culinária, um chefe de cozinha, preocupado com o aumento de pessoas com excesso de peso e com a ingestão de «comida de plástico», resolveu ensinar os habitantes de uma cidade a cozinhar. Como não era possível ensinar todos os habitantes, ensinou 10 habitantes (semana zero); cada um desses 10 habitantes comprometeu-se a ensinar outros 2 habitantes durante a semana seguinte (ou seja, na semana um existem 20 novos cozinheiros que, juntamente com os 10 iniciais, totalizam 30 habitantes a saber cozinhar); cada um desses 30 habitantes ensina outros 2 durante a semana seguinte, e assim sucessivamente. Parte-se do pressuposto de que se ensinaram sempre habitantes diferentes e de que nenhum dos habitantes ensinados falhou o compromisso.

- 13.1 Quantos novos cozinheiros existem em cada uma das primeiras 5 semanas?  
13.2 Qual é a lei de formação da sequência do número de novos cozinheiros em cada semana?  
13.3 Escreve o termo geral da sequência dos novos cozinheiros em cada semana (iniciando a sequência na semana 1).  
13.4 Ao fim de 8 semanas, quantos habitantes sabem cozinhar?  
13.5 Escreve o termo geral da sequência do total de cozinheiros ao fim de  $n$  semanas.







### Repara

- Quando o **número** a escrever em notação científica **é maior ou igual a 10**, o **expoente** do 10 é **positivo**.

Exemplo:

$$23\,400 = 2,34 \times 10^4$$

- Quando o **número** a escrever em notação científica **é menor do que 1**, o **expoente** do 10 é **negativo**.

Exemplo:

$$0,0031 = 3,1 \times 10^{-3}$$

- Quando o **número** a escrever em notação científica **está entre 1 e 10**, o **expoente** do 10 é **zero**.

Exemplo:

$$3,23 = 3,23 \times 10^0$$

(porque  $10^0 = 1$ )

- Átomo de hidrogénio: 0,000 000 000 000 000 000 000 000 001 672 52 kg

**1.º passo:**  $a = 1,672\,52$ .

**2.º passo:** Ao escrever 1,672 52, a vírgula ficou entre o 1 e o 6, mas a posição real da vírgula é 27 casas à esquerda. O expoente é negativo e igual a  $-27$ .

$$0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,672\,52\text{ kg} =$$


$$= 1,672\,52 \times 10^{-27}\text{ kg}$$

Uma dízima infinita periódica pode ser escrita em notação científica, com uma dada aproximação.

Exemplo:

- $0,(3) \approx 3 \times 10^{-1}$ , com erro inferior a uma décima;
- ou  $0,(3) \approx 3,3 \times 10^{-1}$ , com erro inferior a uma centésima.

### ■ Ordenação de números racionais representados na forma de dízima ou em notação científica

Para ordenar dois números racionais positivos, representados na forma de dízima (excluindo o caso das dízimas de período «9»), há que comparar sucessivamente os algarismos a partir do de maior ordem decimal, até se encontrar uma ordem em que as dízimas difiram e então será maior o número para o qual o algarismo dessa ordem seja maior:

- Se tiverem partes inteiras distintas, é maior o que tem maior parte inteira.**

Exemplos:  $7,31 > 3,24$ , porque  $7 > 3$   
 $2,(3) > 1,(6)$ , porque  $2 > 1$

- Se tiverem partes inteiras iguais, é maior o que tiver maior o algarismo da maior ordem decimal em que as duas dízimas diferem (excluindo o caso das dízimas de período «9»).**

Exemplos:

$0,345 > 0,33$ , porque as dízimas têm a parte inteira igual, bem como o algarismo das décimas diferindo no algarismo das centésimas e, neste caso,  $4 > 3$ .

$1,23(45) > 1,(23)$ , porque as dízimas têm a parte inteira igual, bem como o algarismo das décimas e das centésimas diferindo no algarismo das milésimas e, neste caso,  $4 > 2$  ( $1,234545... > 1,2323...$ ).

**Dados dois números racionais negativos é maior o que tiver menor valor absoluto.**

Exemplos:

$-2,132 > -3,254$ , porque o valor absoluto de  $-2,132$  é  $2,132$ , que é menor do que  $3,254$ , sendo este o valor absoluto do número  $-3,254$ ;

$-0,(3) > -0,(6)$ , porque o valor absoluto de  $-0,(3)$  é  $0,(3)$ , que é menor do que  $0,(6)$ , sendo este o valor absoluto do número  $-0,(6)$ .

**Um número positivo é sempre maior do que um número não positivo (negativo ou zero).**

Exemplos:  $2,45 > -50,54$

$0,(3) > -5,(7)$

$1,(6) > 0$

**Zero é sempre maior do que qualquer número negativo.**

Exemplos:  $0 > -1,245$

$0 > -0,(8)$

Vamos agora ver como ordenar números escritos em notação científica.

Considera alguns diâmetros de planetas:

- Mercúrio:  $\approx 4,9 \times 10^3$  km;
- Terra:  $\approx 1,3 \times 10^4$  km;
- Marte:  $\approx 6,8 \times 10^3$  km

A **ordem de grandeza** de um número escrito em notação científica é a sua potência de base 10.

A ordem de grandeza dos diâmetros de Mercúrio e Marte é a mesma:  $10^3$ .  
A ordem de grandeza do diâmetro da Terra é  $10^4$ .

A ordem de grandeza utiliza-se para comparar números escritos em notação científica:

**1. Se a ordem de grandeza é a mesma, é maior o número que tiver o maior fator entre 1 e 10.**

Exemplo:  $6,8 \times 10^3 > 4,9 \times 10^3$ , porque  $6,8 > 4,9$ .

**2. Se a ordem de grandeza for diferente, é maior o número que tiver a maior ordem de grandeza.**

Exemplo:  $1,3 \times 10^4 > 6,8 \times 10^3$ , porque  $10^4 > 10^3$ .

## Operações com números escritos em notação científica

### • Multiplicação e divisão

Para **multiplicar ou dividir** números escritos em notação científica, usamos as já conhecidas propriedades das operações.

Exemplos:

- $(3,4 \times 10^5) \times (5 \times 10^{-3}) = (3,4 \times 5) \times (10^5 \times 10^{-3}) = 17 \times 10^{5-3} = 17 \times 10^2 = 1,7 \times 10 \times 10^2 = 1,7 \times 10^3$

### Recorda

$$\frac{a \times b}{c \times d} = \frac{a}{c} \times \frac{b}{d}$$

(com  $c, d \neq 0$ )



Sr-71 Blackbird

### Curiosidade

As velocidades de certos aviões são expressas em Mach.

Mach 1 = velocidade do som

Todo o tipo de conversões de unidades (tempo, distância, velocidade, etc.) pode ser feito no site:

<http://www.1000conversions.com>

### Recorda

$$\begin{aligned} r \times (p + q) &= \\ &= r \times p + r \times q \\ (p + q) \times r &= \\ &= p \times r + q \times r \end{aligned}$$

(com  $p, q, r \in \mathbb{Q}$ )

- $(4 \times 10^{-3})^2 = (4 \times 10^{-3}) \times (4 \times 10^{-3}) = (4 \times 4) \times 10^{-3+(-3)} = 16 \times 10^{-6} = 1,6 \times 10 \times 10^{-6} = 1,6 \times 10^{-5}$
- $\frac{2,34 \times 10^4}{1,6 \times 10^{-3}} = \frac{2,34}{1,6} \times \frac{10^4}{10^{-3}} = 1,4625 \times 10^{4-(-3)} = 1,4625 \times 10^7$
- $(8,46 \times 10^3) : (2 \times 10^6) = (8,46 : 2) \times (10^3 : 10^6) = 4,23 \times 10^{3-6} = 4,23 \times 10^{-3}$

Em geral:

$$(a \times 10^n) \times (b \times 10^m) = (a \times b) \times 10^{n+m}$$

e

$$(a \times 10^n) : (b \times 10^m) = (a : b) \times 10^{n-m}$$

### • Adição e subtração

Para **adicionar ou subtrair** números escritos em notação científica, temos de os representar por números equivalentes aos dados com a mesma potência de base 10. Depois de os números estarem representados com a mesma potência de base 10, utiliza-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Exemplos:

- Os números  $5,2 \times 10^6$  e  $3,4 \times 10^6$  têm a mesma ordem de grandeza. Para os adicionar, basta aplicar a propriedade distributiva  $(5,2 \times 10^6) + (3,4 \times 10^6) = (5,2 + 3,4) \times 10^6 = 8,6 \times 10^6$
- Os números  $3,4 \times 10^5$  e  $5 \times 10^3$  não têm a mesma ordem de grandeza. Para os adicionar, representamo-los por números equivalentes com a mesma potência de base 10, o que pode ser feito de várias formas (qualquer potência de base 10 pode ser utilizada).

Para simplificar o cálculo, podemos utilizar uma das potências de base 10 já existente num dos números, por exemplo,  $10^3$

$$\begin{aligned} (3,4 \times 10^5) + (5 \times 10^3) &= (3,4 \times 10^2 \times 10^3) + (5 \times 10^3) = \\ &= (340 \times 10^3) + (5 \times 10^3) = (340 + 5) \times 10^3 = 345 \times 10^3 = \\ &= 3,45 \times 10^5 \end{aligned}$$

ou utilizar  $10^5$

$$\begin{aligned} (3,4 \times 10^5) + (5 \times 10^3) &= (3,4 \times 10^5) + (0,05 \times 10^5) = \\ &= (3,4 + 0,05) \times 10^5 = 3,45 \times 10^5 \end{aligned}$$

- $(4,1 \times 10^{-3}) - (5,3 \times 10^{-4}) = (41 \times 10^{-4}) - (5,3 \times 10^{-4}) =$   
 $= (41 - 5,3) \times 10^{-4} = 35,7 \times 10^{-4} = 3,57 \times 10^{-3}$

Ou

$$\begin{aligned} (4,1 \times 10^{-3}) - (5,3 \times 10^{-4}) &= (4,1 \times 10^{-3}) - (0,53 \times 10^{-3}) = \\ &= (4,1 - 0,53) \times 10^{-3} = 3,57 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

### Exercício resolvido

Um dos aviões mais rápidos do Mundo foi o *Sr-71 Blackbird*, que atingia uma velocidade de  $4 \times 10^3$  km/h. A velocidade máxima atingida por um *Boeing 737-300* é de  $9,08 \times 10^2$  km/h.

Sabe-se que a velocidade do som é aproximadamente  $1,2 \times 10^3$  km/h.



- O que é mais rápido, o *Sr-71 Blackbird* ou o som? E quantas vezes?
- Quantos quilômetros percorreu um *Sr-71 Blackbird* que totalizou  $7,3 \times 10^3$  horas de voo? Apresenta o resultado em notação científica e em notação decimal.
- Qual é a diferença de velocidade entre os dois aviões?

#### Resolução:

- a) Comparando os dois números, observa-se que a ordem de grandeza é a mesma, logo, é maior o que tem maior fator entre 1 e 10, ou seja, o avião atingia uma velocidade superior à velocidade do som.

Como:

$$\frac{4 \times 10^3}{1,2 \times 10^3} = \frac{4}{1,2} \times \frac{10^3}{10^3} \approx 3,33 \times 10^{3-3} = 3,33 \times 10^0 = 3,33$$

O avião era aproximadamente 3,33 vezes mais rápido do que o som.

- b)  $4 \times 10^3 \times 7,3 \times 10^3 = (4 \times 7,3) \times (10^3 \times 10^3) = 29,2 \times 10^{3+3} = 29,2 \times 10^6 = 2,92 \times 10^1 \times 10^6 = 2,92 \times 10^7$

Notação científica:  $2,92 \times 10^7$  km.

Notação decimal: 29 200 000 km.

- c)  $4 \times 10^3 - 9,08 \times 10^2 = 40 \times 10^2 - 9,08 \times 10^2 = (40 - 9,08) \times 10^2 = 30,92 \times 10^2 = 3,092 \times 10^3$  km/h

A diferença de velocidades ente os aviões é, em valor absoluto, igual a 3092 km/h.

#### O que debes saber

- Representar um número racional positivo em notação científica.
- Comparar números escritos em notação científica.
- Determinar a soma, diferença, produto e quociente de números racionais representados em notação científica.

## Verificar a aprendizagem

### REPRESENTAÇÃO DE NÚMEROS EM NOTAÇÃO CIENTÍFICA

- 1 Copia e completa:
- a) Como  $10^5 = \dots$ , multiplicar 1,58 por  $10^5$  é o mesmo que deslocar a vírgula de 1,58 ..... casas para a ..... Por isso,  $1,58 \times 10^5 = \dots$ .
- b) Como  $10^{-6} = \dots$ , multiplicar 3,5 por  $10^{-6}$  é o mesmo que deslocar a vírgula de 3,5 ..... casas para a ..... Por isso,  $3,5 \times 10^{-6} = \dots$ .
- 2 Dos números que se seguem, identifica os que estão escritos em notação científica.
- $S = 11,28 \times 10^{-5}$        $B = 0,3 \times 10^4$        $C = 8,5 \times 10^{-12}$   
 $D = 2,225 \times 10^8$        $E = 5976 \times 10^{21}$        $F = 8$
- 3 Sem utilizar a calculadora, escreve os números seguintes em notação decimal:
- a)  $1,39 \times 10^6$       c)  $4,3215 \times 10^4$       e)  $1 \times 10^8$   
b)  $5,31 \times 10^{-5}$       d)  $1 \times 10^{-7}$       f)  $7,3 \times 10^0$
- 4 Sem utilizar a calculadora, escreve os números seguintes em notação científica:
- a) 4500      e) 0,068      i) 7461,987  
b) 635 000      f) 0,000 023 7      j) 5 600 337,8  
c) 1 247 000 000      g) 0,000 000 8      k) um milhão  
d) 1,432      h) 0,000 000 006 451      l) mil milhões

### AUTOAVALIAÇÃO Sei representar números racionais em notação científica?

- 5 Refere a ordem de grandeza dos números apresentados a seguir:
- a) O grande auditório da Casa da Música tem 1238 lugares.  
b) O Centro Cultural de Belém ocupa 100 000 m<sup>2</sup>.  
c) 2379 milhares de lares têm forno micro-ondas.  
d) A idade do Sistema Solar foi estimada em 4600 milhões de anos.  
e) Na Via Láctea, existem 200 000 000 000 estrelas.
- 6 Copia e completa com os símbolos < e > de modo a obteres afirmações verdadeiras.
- a)  $3,8 \times 10^5$  .....  $2,9 \times 10^5$       d)  $5,901 \times 10^{-7}$  .....  $5,91 \times 10^{-7}$   
b)  $8,9 \times 10^{-12}$  .....  $9,8 \times 10^{-12}$       e)  $1,19 \times 10^{-19}$  .....  $1,2 \times 10^{-19}$   
c)  $4,5 \times 10^8$  .....  $6,7 \times 10^7$       f)  $8,2 \times 10^{15}$  .....  $8,2 \times 10^{-15}$



### AUTOAVALIAÇÃO Sei comparar números escritos em notação científica?

## Aplicar

- 7 Escreve em notação científica:
- a)  $234 \times 10^8$       c)  $1911,38 \times 10^{14}$       e)  $0,004\,002 \times 10^{18}$   
b)  $0,046 \times 10^{-5}$       d)  $8352,213 \times 10^{-13}$       f)  $0,000\,92 \times 10^{20}$

- 8 Considera a tabela ao lado, onde se encontra o diâmetro equatorial da Terra, da Lua e do Sol, em quilómetros. Indica, em metros, o valor desses diâmetros em notação científica.

|       | Diâmetro equatorial/km |
|-------|------------------------|
| Terra | 12 756                 |
| Lua   | 3 476                  |
| Sol   | 1 392.000              |

- 9 Em Portugal, um bilião é um milhão de milhões, mas no Brasil e nos Estados Unidos da América, um bilião são mil milhões. Escolhe a opção que representa a forma como se escreve, em Portugal, um bilião em notação científica.

A.  $1 \times 10^6$       B.  $1 \times 10^9$       C.  $1 \times 10^{12}$       D.  $1 \times 10^{15}$

- 10 Calcula, indicando o resultado em notação científica:

a)  $4 \times 10^5 \times 2 \times 10^7$       c)  $2,5 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-6}$       e)  $6,8 \times 10^4 \times 2 \times 10^{-11}$   
b)  $9 \times 10^{12} : (3 \times 10^4)$       d)  $4,5 \times 10^{-8} : (3 \times 10^3)$       f)  $1 \times 10^{-7} : (5 \times 10^{-10})$

- 11 Considera os números:

A.  $3,2 \times 10^{-6}$       B. 0,0000025      C.  $1,8 \times 10^{-5}$

11.1 Os números A e B têm a mesma ordem de grandeza? Qual é o maior?

11.2 Os números B e C têm a mesma ordem de grandeza? Qual é o maior?

11.3 Dos três números, qual é o maior?

11.4 Refere o valor de  $k$  para que  $73 \times 10^{-k}$  tenha a mesma ordem de grandeza de C.

- 12 Nas Ciências Naturais, os números são muito usados para descrever características dos seres vivos.

12.1 Escreve, em notação científica, os pesos em gramas e os comprimentos/distâncias em metros.

- a) A tartaruga-marinha pode pesar 550 kg.  
b) A baleia-azul pode medir 29,9 m e pesar 160 toneladas.  
c) O morcego-nariz-de-porco pode pesar 1,5 g e ter 29 mm de comprimento.  
d) O grito do bugio pode ser ouvido a mais de 16 km na floresta.  
e) A tarambola-dourada é capaz de voar 3000 km sem parar.  
f) A enguia europeia expulsa até 9 milhões de óvulos na desova, cada um com menos de 1 mm de diâmetro.

12.2 Ordena os números presentes na questão 12.1 por ordem crescente.

- 13 Um milímetro cúbico de sangue contém cerca de cinco milhões de glóbulos vermelhos. A D. Marta pesa 56 kg, por isso, tem cerca de 4 litros de sangue, ou seja,  $4\,000\,000\text{ mm}^3$ . Qual é, em notação científica, o número aproximado de glóbulos vermelhos no sangue da D. Marta? Escolhe a opção correta.

A.  $20 \times 10^6$       B.  $2 \times 10^6$       C.  $20 \times 10^{12}$       D.  $2 \times 10^{13}$

- 14 Calcula e indica o resultado em notação científica:

a)  $5 \times 10^7 + 3 \times 10^7$       c)  $2,5 \times 10^{-6} + 1,9 \times 10^{-6}$       e)  $8 \times 10^{-9} + 3 \times 10^{-5}$   
b)  $6,1 \times 10^{10} - 1,79 \times 10^{10}$       d)  $9 \times 10^8 - 5 \times 10^6$       f)  $2,45 \times 10^9 + 2,75 \times 10^{12}$



### Tarefas de investigação

- 15 Pesquisa na Internet o que são o gugol e o gugolplex.
- 16 As páginas da Internet seguintes propõem-te viagens fascinantes que te levarão ao espaço (com as potências de expoente positivo) e ao interior de um átomo (com as potências de expoente negativo).  
Visita: <http://microcosm.web.cern.ch/microcosm/P10/english/welcome.html>  
<http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/scienceopticsu/powersof10/index.html>





## Síntese

### Números racionais

- O conjunto dos números racionais é representado por  $\mathbb{Q}$ .  
Um **número racional** pode ser um número inteiro (pertencente ao conjunto  $\mathbb{Z}$ ) ou um número fracionário.  
**Exemplos** de números racionais:  $\frac{1}{2}$ ;  $-3$ ;  $4,21$ ;  $0$ ;  $-\frac{2}{3}$ .
- Um **número racional** pode ser representado de várias formas:
  - como uma **fração**:  $\frac{7}{5}$ ;  $-\frac{8}{11}$ ;  $\frac{5}{6}$ ; etc;
  - como um **número misto** (quando o número é superior a 1 ou inferior a  $-1$ ):  
 $\frac{7}{5} = \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = 1 + \frac{2}{5} = 1\frac{2}{5}$
  - como uma **dízima**:
    - **dízima finita** (por exemplo,  $\frac{7}{5} = 1,4$ );
    - **dízima infinita periódica** (por exemplo:  $\frac{8}{11} = 0,727272... = 0,(72)$ , que tem **período** 72.)
- Uma fração irredutível,  $\frac{a}{b}$ , com  $b \neq 1$ , é equivalente a uma **fração decimal**, quando e apenas quando a decomposição de  $b$  não tem fatores diferentes de 2 e de 5.

### Ordenação e comparação de números racionais representados por dízimas finitas ou infinitas periódicas.

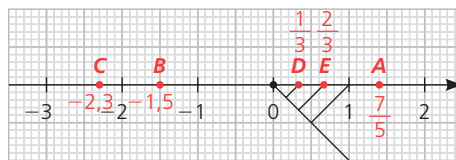
- Depois de representados na reta numérica, os números racionais podem ordenar-se facilmente, uma vez que os valores na reta numérica aumentam da esquerda para a direita.  
**Exemplo**: ordenando por ordem crescente:  $-2,3 < -1,5 < 0,(3) < 0,(6) < 1,4$
- Um número negativo é sempre menor do que um número positivo:  $-1,5 < \frac{1}{3}$ .
- Entre dois números positivos, é menor o que tem menor valor absoluto:  $2,3 < 2,8$ .
- Entre dois números negativos, é menor o que tem maior valor absoluto:  $-2,3 < -1,5$ .
- Para ordenar dois números racionais positivos, representados na forma de dízima (excluindo o caso das dízimas de período «9»), há que comparar sucessivamente os algarismos a partir do de maior ordem decimal até se encontrar uma ordem em que as dízimas difiram e, então, será maior o número para o qual o algarismo dessa ordem seja maior:  
**Exemplos**:  $1,31 > 0,24$      $3,(3) > 2,(6)$      $2,(5) > 2,(1)$      $3,2(1) > 3,2(01)$

### Representação na reta numérica

- Os números racionais podem ser representados numa reta numérica. Cada número racional representado na reta é identificado por um ponto. O número é a **abscissa** do ponto.

**Exemplo**: A  $\rightarrow 1,4$ ; B  $\rightarrow -1,5$ ; C  $\rightarrow -2,3$ ; D  $\rightarrow 0,(3)$ ; E  $\rightarrow 0,(6)$

Nota:  $0,(3) = \frac{1}{3}$ ;  $0,(6) = \frac{2}{3}$



## Potências de expoente inteiro

- Uma **potência de expoente nulo** é igual a 1.

Exemplos:  $2032^0 = 1$ ;  $(-1,4)^0 = 1$

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$  ( $a \neq 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ )

Exemplo:  $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$  ( $a, b \neq 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ )

Exemplo:  $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{64}$

## Propriedades das operações com potências de base racional

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \text{ onde } a \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{Z} \text{ (com } a \neq 0 \text{)}$$

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m, \text{ onde } a, b \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{Z} \text{ (com } a, b \neq 0 \text{)}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0, a \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{Z}$$

$$a^m : b^m = (a : b)^m, b \neq 0, a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } m \in \mathbb{Z} \text{ (com } a \neq 0 \text{)}$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m}, a \in \mathbb{Q} \text{ e } m, n \in \mathbb{Z} \text{ (com } a \neq 0 \text{)}$$

## Notação científica

- Um número positivo em **notação científica** escreve-se na forma:  $a \times 10^n$ , com **a maior ou igual a 1 e menor do que 10** e  $n \in \mathbb{Z}$ .

| Escrever em notação científica                                                                                                                                                                   | Escrever em notação decimal                                                                                                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li><math>0,000\ 000\ 000\ 582 = 5,82 \times 10^{-10}</math></li> <li><math>750 \times 10^6 = 7,5 \times 10^2 \times 10^6 = 7,5 \times 10^8</math></li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li><math>8,142\ 123 \times 10^4 = 81\ 421,23</math></li> <li><math>3,7 \times 10^{-6} = 0,000\ 003\ 7</math></li> </ul> |

- A ordem de grandeza de um número escrito em notação científica é a sua potência de base 10.
- Comparação de números:** entre dois números em notação científica, é maior o que tem a maior ordem de grandeza. Se a ordem de grandeza for a mesma, é maior o que tem o maior fator entre 1 e 10.  
Exemplos:  $2 \times 10^{-5} > 4 \times 10^{-8}$ ;  $2 \times 10^{-5} > 1,9 \times 10^{-5}$
- Para multiplicar ou dividir números escritos em notação científica, usam-se as propriedades das operações.

Exemplos:  $(5,1 \times 10^{-3}) \times (3,2 \times 10^{-2}) = (5,1 \times 3,2) \times (10^{-3} \times 10^{-2}) = 16,32 \times 10^{-5} = 1,632 \times 10^{-4}$

$$\frac{2,4 \times 10^4}{4 \times 10^{-2}} = \frac{2,4}{4} \times \frac{10^4}{10^{-2}} = 0,6 \times 10^{4-(-2)} = 0,6 \times 10^6 = 6 \times 10^5$$

- Para adicionar ou subtrair números escritos em notação científica representamo-los por números equivalentes aos dados com a mesma potência de base 10.

Exemplos:  $4,1 \times 10^{-2} - 2,3 \times 10^{-2} = (4,1 - 2,3) \times 10^{-2} = 1,8 \times 10^{-2}$

$2,1 \times 10^{-3} + 3,2 \times 10^{-2} = 0,21 \times 10^{-2} + 3,2 \times 10^{-2} = (0,21 + 3,2) \times 10^{-2} = 3,41 \times 10^{-2}$

## Atividades globais

### QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

Das quatro alternativas, escolhe a única opção correta.

- 1 Dos números seguintes, qual é o menor?  
A.  $\frac{5}{6}$  B.  $\frac{1}{\frac{3}{2}}$  C.  $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$  D.  $1\frac{1}{5}$
- 2 Dos números seguintes, qual pode ser representado por uma dízima infinita periódica?  
A. 5,333 B.  $\frac{5}{6}$  C.  $\frac{3}{8}$  D.  $\frac{1252\ 525}{10\ 000}$
- 3 Dos números seguintes, qual deles representa o número  $\frac{1}{81}$ ?  
A.  $3^{27}$  B.  $3^{-4}$  C.  $\frac{1}{3^{-4}}$  D.  $\frac{1}{3^{27}}$
- Exercício adaptado do Teste Intermédio do 8.º ano, 2010
- 4 Segundo alguns estudos, o fio de cabelo mais fino tem um diâmetro de aproximadamente 0,000 017 m. Qual é o valor desta medida em notação científica?  
A.  $0,17 \times 10^{-4}$  m B.  $1,7 \times 10^5$  m C.  $17 \times 10^{-6}$  m D.  $1,7 \times 10^{-5}$  m
- 5 Identifica a afirmação verdadeira.  
A.  $\frac{5}{6} < \frac{4}{5}$  B.  $-\frac{11}{7} > -\frac{9}{7}$  C.  $-\frac{41}{3} < -\frac{15}{12}$  D.  $\frac{3}{4} < -\frac{5}{4}$
- 6 O Diogo tem 6 caixas para guardar *Blu-ray*, cada uma com 6 discos, cada disco com 6 filmes. O número de filmes do Zito é dois terços do número de filmes do Diogo. Quantos filmes tem o Zito?  
A. 144 B. 72 C. 36 D. 12
- 7 Qual é o valor da expressão numérica  $3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}$ ?  
A. 2 B. 1 C.  $\frac{1}{4}$  D. -4
- 8 Qual das igualdades seguintes é verdadeira?  
A.  $2^3 + 2^4 = 2^7$  B.  $(2 + 1)^2 = 2^2 + 1^2$  C.  $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$  D.  $\left(-\frac{1}{4}\right)^6 : \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4^4}$



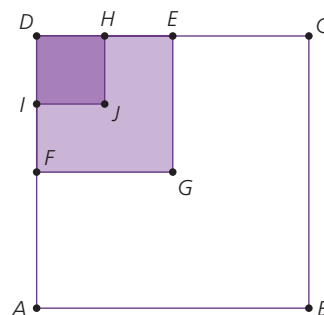
## EXERCÍCIOS E PROBLEMAS



- 9** O automóvel do Sr. João tem um consumo médio de 5,8 litros por cada 100 km. Sabe-se que o automóvel foi comprado novo e que percorreu até ao momento  $3,56 \times 10^5$  km.
- 9.1** Quantos litros já gastou? Escreve o número em notação científica.
- 9.2** A média de preço do combustível gasto desde a compra do automóvel foi de 0,940 € por litro. Quanto já gastou o Sr. João em combustível?
- 10** Na corrida «Sim à Saúde», a D. Marta percorreu, até um certo instante,  $\frac{6}{7}$  do percurso, a Sofia,  $\frac{10}{11}$ , e a Joana,  $\frac{12}{13}$ .
- 10.1** Qual das três ia à frente nesse instante? Justifica a tua resposta.
- 10.2** Sabendo que a extensão do percurso era de 3000 metros, qual foi a distância percorrida por cada uma até ao instante referido?

### Tarefas

- 11** O quadrado  $[ABCD]$  tem área igual a  $1 \text{ cm}^2$ . Um segundo quadrado,  $[DFGE]$ , tem metade da medida do lado do quadrado  $[ABCD]$ ; um terceiro quadrado,  $[DIJH]$ , tem metade da medida do lado do quadrado  $[DFGE]$ , e assim sucessivamente.
- 11.1** Determina a área:
- do quadrado  $[DFGE]$ ;
  - do quadrado  $[DIJH]$ .
- 11.2** Escreve sob a forma de uma potência de base 2 a área do quarto quadrado construído por este processo.
- 11.3** Quantas vezes a área do segundo quadrado é maior do que a área do quarto quadrado?
- 12** Observa a tabela dos prefixos do Sistema Internacional de unidades (SI):



| Prefixo | pico       | nano      | micro     | mili      | centi     | deci      | deca   | hecto  | quilo  | mega   | giga   | tera      |
|---------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|
| Símbolo | p          | n         | $\mu$     | m         | c         | d         | da     | h      | k      | M      | G      | T         |
| Fator   | $10^{-12}$ | $10^{-9}$ | $10^{-6}$ | $10^{-3}$ | $10^{-2}$ | $10^{-1}$ | $10^1$ | $10^2$ | $10^3$ | $10^6$ | $10^9$ | $10^{12}$ |

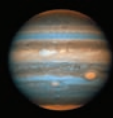
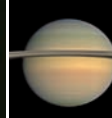
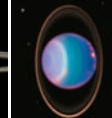
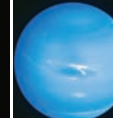
Para utilizar os prefixos, basta juntar o prefixo ao nome da unidade, por exemplo, nanossegundo (ns), picómetro (pm), decalitre (dL), megawatt (MW), etc.

- 12.1** Qual é o valor, em segundos, de 5 nanossegundos (ns)? E de 0,34 gigassegundos (Gs)?
- 12.2** Qual é o valor, em miligramas (mg), de 373 254 hg? E de  $8 \mu\text{g}$ ?
- 12.3** Com um mesmo número, podem referir-se quantidades muito distintas, modificando a unidade de medida. Nas alíneas seguintes, calcula o valor (exceto na alínea a) e coloca uma unidade mais adequada, arredondando se necessário.
- O vírus da gripe mede aproximadamente 0,000 000 03 metros.
  - O número de segundos de vida de um jovem de 13 anos (considera 1 ano = 365,25 dias).
  - A quantidade de chá bebido em Inglaterra diariamente é de cerca de 165 milhões de chá-venas (considera 1 chávena = 150 mL).
- 12.4** Investiga os prefixos que correspondem aos fatores  $10^{-18}$ ,  $10^{-15}$ ,  $10^{15}$  e  $10^{18}$ .

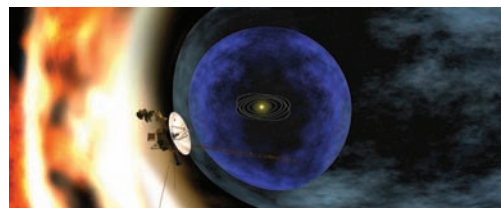
## Atividades globais

### Tarefas

- 13** A tabela que se segue tem informações sobre os planetas do Sistema Solar.

|                            | Mercúrio                                                                          | Vénus                                                                             | Terra                                                                             | Marte                                                                             | Júpiter                                                                            | Saturno                                                                             | Úrano                                                                               | Neptuno                                                                             |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|                            |  |  |  |  |  |  |  |  |
| <b>Massa/kg</b>            | $3,3 \times 10^{23}$                                                              | $4,9 \times 10^{24}$                                                              | $6 \times 10^{24}$                                                                | $6,4 \times 10^{23}$                                                              | $1,9 \times 10^{27}$                                                               | $5,7 \times 10^{26}$                                                                | $8,7 \times 10^{25}$                                                                | $1 \times 10^{26}$                                                                  |
| <b>Diâmetro/km</b>         | 4878                                                                              | 12 104                                                                            | 12 756                                                                            | 6794                                                                              | 142 800                                                                            | 120 000                                                                             | 51 118                                                                              | 49 500                                                                              |
| <b>Distância ao Sol/km</b> | $6 \times 10^7$                                                                   | $1,1 \times 10^8$                                                                 | $1,5 \times 10^8$                                                                 | $2,3 \times 10^8$                                                                 | $7,8 \times 10^8$                                                                  | $1,4 \times 10^9$                                                                   | $2,9 \times 10^9$                                                                   | $4,5 \times 10^9$                                                                   |

- 13.1** Identifica os planetas da tabela cujo diâmetro tem ordem de grandeza  $10^4$ .
- 13.2** Ordena os planetas por ordem crescente da sua massa.
- 13.3** Quantas vezes é a massa de Úrano superior à massa de Marte?
- 13.4** Quando a Terra está entre Sol e Júpiter, estando os três alinhados, qual é a distância entre a Terra e Júpiter?
- 13.5** Compara a massa conjunta da Terra e de Mercúrio com a massa de Saturno.
- 13.6** Para distâncias entre planetas, é habitual utilizar a unidade astronómica (UA): 1 UA = distância da Terra ao Sol. Apresenta as distâncias de cada um dos planetas ao Sol em UA.
- 13.7** A *Voyager 2* foi lançada pela NASA a 20 de agosto de 1977. A 8 de março de 2010, a sonda alcançou uma distância de 92 UA da Terra, localizando-se na constelação de Telescópio.
- Calcula a distância da sonda à Terra, em quilómetros.



- 14** Calcula o valor de cada uma das expressões numéricas seguintes.

a)  $3^{-4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} : (-2)^6 : 10^{-10}$

d)  $\frac{3}{2} \times \frac{8}{15} + \frac{\sqrt{25}}{4} - \frac{2 \times 10^2}{5 \times 10^2}$

b)  $7 : \frac{3}{7} + \frac{5}{4} - \left(-\frac{1}{12}\right)$

e)  $3^2 - [10^2 \times (2^2)^5 \times 2^{-12}]^0$

c)  $\frac{3^0 \times 3^4}{9^2} - \frac{5^{-1}}{\left(\frac{1}{5}\right)^2}$

f)  $9^{-2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} - 4\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{3}\right)$

- 15** O Diogo tem um pacote de chocolates com a forma de um prisma e a Joana tem um perfume com a forma de uma pirâmide com a mesma base.

**15.1** Prova que o número de arestas de um prisma é sempre  $\frac{3}{2}$  do número de arestas de uma pirâmide com a mesma base.

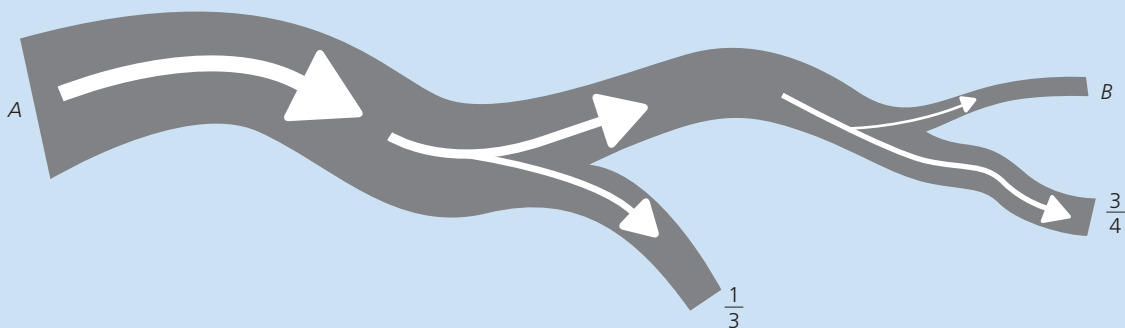
**15.2** Identifica a figura que está na base dos dois sólidos sabendo que, no total, têm 23 faces.

**15.3** Qual é o período do número obtido pelo quociente entre o número total de arestas dos dois sólidos anteriores e o número total dos seus vértices?

**SUGESTÃO:** Utiliza, para este cálculo, a calculadora científica de um computador.

## CANGURU MATEMÁTICO SEM FRONTEIRAS

- 16** A nascente de um rio está identificada pelo ponto A da figura. Após um trajeto inicial, o rio ramifica-se em dois. O leito da primeira ramificação fica com  $\frac{1}{3}$  do caudal inicial e a segunda ramificação fica com o resto do caudal. Posteriormente, a segunda ramificação divide-se em duas partes, levando uma delas  $\frac{3}{4}$  do caudal e a outra o restante. A figura em baixo descreve a situação. Qual é a fração da água da nascente que atravessa o ponto B?



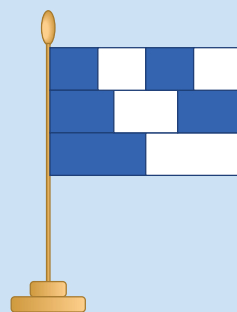
- A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{2}{3}$       C.  $\frac{11}{12}$       D.  $\frac{1}{6}$       E. Não pode ser determinada.

Prova Benjamim, 2008

## OLIMPIÁDAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

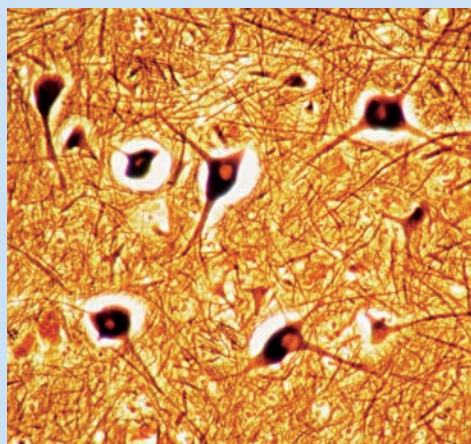
- 17** A bandeira da Cubolândia, representada na figura, é formada por três tiras do mesmo tamanho, que estão divididas em duas, três e quatro partes iguais. A bandeira tem  $27 \text{ mm}^2$  de área. Qual é a área da região pintada da bandeira?

XXVI OPM, 1.ª Eliminatória



## CONVIVER COM A MATEMÁTICA

- 18** Um grupo de médicos monitorizou, de dois em dois dias, o desenvolvimento de um determinado tipo de células para saber quanto tempo demoram as células a atingir as 60 000 (quantidade de que necessitam para iniciar uma experiência). A tabela seguinte mostra os resultados obtidos.



| Tempo/dias     | 4   | 6   | 8    | 10   | 12   | 14   | 16   | 18   | 20     | 22     | 24     |
|----------------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|--------|--------|--------|
| N.º de células | 597 | 893 | 1339 | 1995 | 2976 | 4434 | 6606 | 9878 | 14 719 | 21 956 | 32 763 |

Quando é que o número de células atinge as 60 000? Explica o teu raciocínio.



## AUTOAVALIAÇÃO

- Identifica claramente na tua folha de respostas os números dos itens a que respondes. Apresenta uma única resposta para cada item.
- O teste inclui quatro itens de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correta. Não apresentes cálculos nem justificações.

Pág. 119

- 1** Qual das afirmações seguintes é falsa?
- A.**  $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$       **B.**  $\frac{2}{7} < \frac{2}{5}$       **C.**  $8,21 > 8,3$       **D.**  $-\frac{1}{3} < -0,33$

Pág. 100

- 2** Considera os números racionais seguintes:

$$\frac{1}{6}; -\frac{8}{2}; 0; \frac{7}{3}; 1\frac{2}{7}; -0,25$$

**2.1** Dos números acima, identifica:

- a)** os fracionários;
- b)** as dízimas finitas;
- c)** os que podem ser representados por frações decimais;
- d)** as dízimas infinitas periódicas, indicando o respetivo período e o seu comprimento.

Pág. 106

**2.2** Representa os números na reta numérica.

Pág. 119

**2.3** Escreve os números por ordem decrescente.

Pág. 103

**2.4** Indica um número racional de período 6 que seja menor do que  $-\frac{8}{2}$ .

Pág. 119

- 3** Qual dos seguintes números racionais está entre  $4^{-1}$  e  $3^{-1}$ ?

**A.**  $-3,25$       **B.**  $\frac{2}{7}$       **C.**  $\frac{5}{6}$       **D.**  $\frac{1}{5}$

Págs. 114, 115 e 116

- 4** Calcula o valor de cada expressão, usando, sempre que possível, as regras das operações com potências.

**a)**  $(-2)^6 \times (-3)^6 : (-6)^8 + \left[ \left( -\frac{1}{8} \right)^2 \right]^{10}$

**b)**  $\left( -\frac{2}{7} \right)^{-2} : \left( \frac{3}{14} \right)^{-2} \times \left( -\frac{3}{4} \right)^{-4}$

Pág. 117

- 5** No ano passado, a Sofia assistiu a 120 aulas de Matemática (cada aula com a duração de 45 minutos).

**5.1** Escreve o número total de minutos de aulas de Matemática em notação científica.

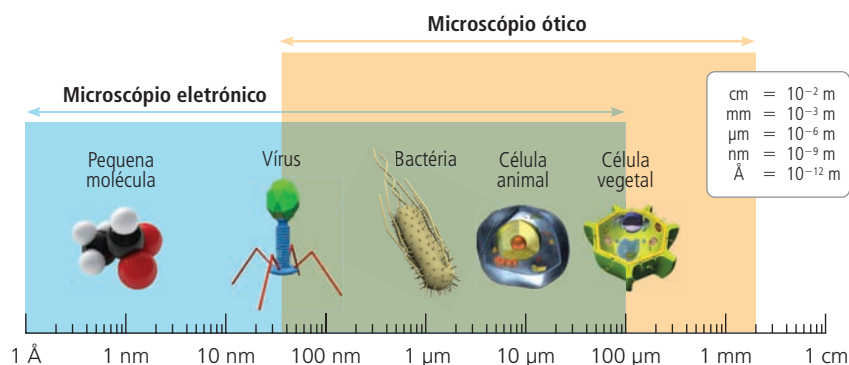
Pág. 120

**5.2** O Zito assistiu a  $0,585 \times 10^4$  minutos. Qual dos amigos assistiu a mais tempo de aulas? Justifica a tua resposta.

Pág. 120

- 6** Um ano-luz corresponde a  $9,46 \times 10^{15}$  m. Uma outra unidade muito utilizada quando se trata de estrelas é o parsec. Sabendo que 1 parsec corresponde a  $3,08 \times 10^{16}$  m, a quantos anos-luz equivale um parsec?

- 7** Considera os números racionais  $\frac{32}{75}$  e  $\frac{51}{150}$ .
- 7.1** Verifica se alguma destas frações é equivalente a uma fração decimal.
- 7.2** Representa-os na forma de dízima finita ou infinita periódica.
- 8** Representa na forma de fração a dízima seguinte: 2,2(31)
- 9** Representa na reta numérica, com rigor, os pontos seguintes:  
 A  $\rightarrow 1,(36)$       B  $\rightarrow -1,(18)$
- 10** Considera os números racionais  $a = 125,30241$  e  $b = 2 \times 10^2 + 4 \times 10^0 + 3 \times 10^{-3} + 10^{-5}$
- 10.1** Efetua a decomposição decimal do número  $a$  utilizando potências de base 10 e expoente inteiro.
- 10.2** Escreve o número  $b$  na forma de dízima.
- 11** Um nanómetro (nm) corresponde a  $10^{-9}$  metros e um micrómetro ( $\mu\text{m}$ ) corresponde a  $10^{-6}$  metros.  
 Considera um vírus com 35 nm, uma bactéria com  $0,9 \mu\text{m}$ , uma célula animal



com  $9 \mu\text{m}$  e uma célula vegetal com  $95 \mu\text{m}$ .

- 11.1** Se considerarmos a unidade de medida o comprimento de um vírus com 35 nm, qual é o comprimento de uma bactéria? Apresenta o resultado com um erro inferior a uma centésima.
- 11.2** Qual é, em metros, a soma do comprimento de uma célula animal com o comprimento de uma célula vegetal? Apresenta o resultado em notação científica.
- 11.3** Adiciona os comprimentos do vírus com o da célula vegetal. Quantas vezes teremos de adicionar esse número para obter 1 metro de comprimento? Apresenta o resultado com erro inferior a uma unidade.

#### GRELHA DE AVALIAÇÃO

| Exercício                     | 1 | 2.1 | 2.2 a 2.4 | 3 | 4  | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|-------------------------------|---|-----|-----------|---|----|---|---|---|---|---|----|----|
| Cotação <sup>1</sup> (pontos) | 5 | 8   | 15        | 5 | 10 | 8 | 7 | 7 | 5 | 8 | 10 | 12 |

<sup>1</sup> Para saberes a cotação de cada alínea, basta dividires a cotação do exercício pelo número de alíneas.

Págs. 100 e 101

Págs. 101, 102 e 103

Pág. 106

Pág. 106

Pág. 114

Pág. 114

Págs. 118 e 119

Pág. 120

Pág. 120

# Estratégias para a resolução de problemas e jogos

## Jogo Rãs e sapos

Este jogo consiste em trocar as rãs (lado esquerdo) com os sapos (lado direito), tendo em conta que cada animal só se pode mover para uma pedra vazia ou pode saltar por cima de outro que não seja da mesma espécie para uma pedra vazia.

Mais do que conseguir trocar os animais, tenta-se descobrir o número mínimo de jogadas (quantos movimentos e quantos saltos).



Para jogar online: [http://nrich.maths.org/public/viewer.php?obj\\_id=1246](http://nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=1246)

**NÚMERO DE JOGADORES:** 2

**REGRAS:**

- Um jogador começa com duas rãs e dois sapos. O adversário regista numa tabela o número de saltos e de movimentos. A seguir, o adversário tenta fazer melhor (menos jogadas).
- Ganha um ponto quem conseguir realizar o menor número de jogadas.
- Repete-se para três rãs e três sapos, e assim sucessivamente.

Existe alguma relação entre o número de rãs e o número de saltos?  
E entre o número de rãs e o número de movimentos?

## Problema O problema dos 35 camelos

Começa por ler o texto da tarefa inicial da página 100.

[...] — É muito simples — atalhou Beremiz. — Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui nos trouxe!

[...] — Vou, meus amigos — disse ele, dirigindo-se aos três irmãos —, fazer a divisão justa e exata dos camelos que são agora, como veem, em número 36.

E, voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:

— Deverias receber, meu amigo, a metade de 35, isto é, 17,5. Receberás a metade de 36 e, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste a lucrar com esta divisão!

E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:

— E tu, Hamed Namir, deverias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, isto é, 12. Não poderás protestar, pois também tu saíste com visível lucro na transação.

E disse, por fim, ao mais novo:

— E tu, jovem Harim Namir, segundo a vontade de teu pai, deverias receber a nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, isto é, 4. O teu lucro foi igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado!

*E concluiu com a maior segurança e serenidade:*

*— Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir, partilha em que todos os três saíram lucrando, couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um resultado  $(18 + 12 + 4)$  de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobram, portanto, dois. Um pertence, como sabem, ao meu amigo e companheiro [que o emprestou], outro toca por direito a mim por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança!*

Como é possível terem lucrado os três irmãos e também Beremiz, se só foi acrescentado um camelo?

#### EXPLICAÇÃO DA ESTRATÉGIA DO JOGO E RESOLUÇÃO DO PROBLEMA:

- No jogo, para duas rãs e dois sapos, são suficientes 4 saltos e 8 movimentos para trocar os animais. Com três rãs e três sapos, bastam 9 saltos e 15 movimentos. A estratégia consiste em evitar situações que bloqueiem a progressão (por exemplo, colocar duas rãs seguidas de dois sapos) e pensar sempre na jogada seguinte. Quando, ainda assim, o jogo fica bloqueado, é preferível voltar atrás até descobrir o erro, e retomar a partir desse ponto.

#### ESTRATÉGIA: Procurar o erro e retomar a partir desse ponto.

- No problema dos 35 camelos, o facto surpreendente de terem sobrado dois camelos parece indicar que algum erro foi cometido. Podem confirmar-se os cálculos e as partilhas efetuados por Beremiz, mas está tudo certo.
  1. Será que a divisão proposta pelo pai foi correta, ou seja, será que juntando as três partes se obtém a totalidade da herança:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = 1$ ?
  2. Efetuando os cálculos:  
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{9}{18} + \frac{6}{18} + \frac{2}{18} = \frac{17}{18}$  e  $\frac{17}{18} \neq \frac{18}{18}$ .  
( $\times 9$ ) ( $\times 6$ ) ( $\times 2$ )  
Conclui-se, assim, que a divisão não correspondia ao total dos camelos, mas sim a  $\frac{17}{18}$ , existindo uma sobra de  $\frac{1}{18}$  camelos. Foi este o erro cometido: pressupor que a divisão totalizava os 35 camelos.
  3. Quando Beremiz acrescentou um camelo aos 35, passaram a ser 36. Distribuindo os  $\frac{17}{18}$  pelos três irmãos, segundo as frações a que tinham direito (e aumentando a parte a cada um), ficou com a parte que sobrava,  $\frac{1}{18}$  para ele. Como  $\frac{1}{18}$  de 36 é igual a 2,  $\left(\frac{1}{8} \times 36 = 2\right)$ , no final, sobraram 2 camelos.

#### Sugestões de trabalho

- a) Ilustra como teria Beremiz de atuar se, em vez de 35 camelos, fossem 17.
- b) E se fossem 53 camelos?
- c) Indica outros números para os quais se pode utilizar a técnica de Beremiz.

## Calculadora e software de cálculo numérico

### Calculadora científica

Modelos com visor em formato natural (Casio 82 ES e Texas 30 XB multiview)



#### • Simplificação de frações Teclas

Simplificar  $\frac{686}{490}$  ..... 686 490 ou 686 490 (Aparece  $\frac{7}{5}$ )

#### • Operações com frações

Calcular  $\frac{1}{24} + \frac{7}{60}$  ..... 1 24 7 60 ou 1 24 7 60 (Aparece  $\frac{19}{120}$ )

#### • Passar de um número misto para uma fração simples

$1\frac{1}{2}$  ..... 1 1 2 ou 1 1 2 (Aparece  $\frac{3}{2}$ )

#### • Potências

$4^0$  ..... 4 0 ou 4 0

$2^{-3}$  ..... 2 (-) 3 ou 2 (-) 3

#### • Notação científica

— Escrever em notação decimal:

$3 \times 10^{-7}$  ..... 3 (-) 7 ou 3 (-) 7

— Escrever em notação científica:

O modo de funcionamento normal da CASIO é 3 (NORM) 2. Para trabalhar em notação científica, deve mudar-se para 2 (SCI) 9.

O modo de funcionamento normal da TEXAS é (NORM). Para trabalhar em notação científica, deve mudar-se para (SCI).

123 000 ..... 123 000 ou 123 000 (Aparece  $1,23 \times 10^5$ )

$5 \times 10^8 + 2 \times 10^6$  ..... 5 8 2 6 ou 5 8 2 6 (Aparece  $5,02 \times 10^8$ )

### Software de cálculo numérico Derive

- Para descobrir o período da fração  $\frac{17}{13}$ , utiliza-se a calculadora:  $\frac{17}{13} = 1,307692308\dots$

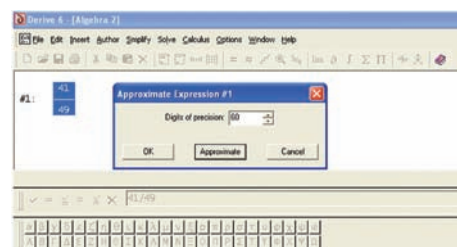
**Encontrar mais casas decimais na calculadora:** as calculadoras têm mais casas decimais na memória do que as que aparecem no visor. Para as visualizar, subtrai-se ao número o algarismo das unidades e multiplica-se o resultado por 10, e assim sucessivamente.

No caso da fração  $\frac{17}{13}$ , ficaria:

17 13 (Aparece 1,307692308) 1 10 (Aparece 3,076923077)  
 3 10 (Aparece 0,7692307692)

Colocando agora os algarismos todos:  $\frac{17}{13} = 1,307692307692$ . Logo, o período é 076923.

- Com uma calculadora científica, não se consegue encontrar o período da fração  $\frac{41}{49}$ . Uma opção é utilizar a calculadora científica do computador, na qual o número de casas decimais é muito superior ao da calculadora. Outra opção é utilizar um *software* de cálculo, por exemplo, o *software* DERIVE.
- Abrir o *software* **Derive**.
- Escrever 41/49 na barra em baixo e clicar em .
- No menu **Simplify**, escolher a opção **Approximate** e indicar o número de casas decimais que se pretende.
- Carregar em **Approximate**.



### Sugestões de trabalho

- Quantos algarismos tem o período do número  $\frac{231}{347}$ ?
- No século XIX, o matemático inglês William Shanks determinou o período de  $1/17389$ . Investiga quantos algarismos tem esse período e procura outros cálculos famosos feitos por este matemático.
- Observa uma dízima infinita que não seja periódica, por exemplo, o número  $\pi$ .

### Atividades de investigação

- Identifica os denominadores que fazem com que uma fração:
  - corresponda a uma dízima finita;
  - possa ser representada por uma dízima infinita periódica.

#### Sugestão:

- Para investigar o denominador 2, por exemplo, calcula:  $\frac{1}{2}; \frac{2}{2}; \frac{3}{2}; \frac{4}{2}; \frac{5}{2}; \dots$
- Imagina que podes dobrar uma folha tantas vezes quantas quiseses. Sabendo que a distância da Terra à Lua é de  $3,84 \times 10^5$  km, quantas vezes terias de dobrar uma folha com 0,1 mm de espessura para obter essa distância?



### Páginas da Internet

- Frações: [http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames\\_asid\\_194\\_g\\_3\\_t\\_1.html?from=category\\_g\\_3\\_t\\_1.html](http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_194_g_3_t_1.html?from=category_g_3_t_1.html); [http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames\\_asid\\_159\\_g\\_2\\_t\\_1.html?from=category\\_g\\_2\\_t\\_1.html](http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_159_g_2_t_1.html?from=category_g_2_t_1.html) e <http://www.shodor.org/interactivate/activities/BoundFractionPointer/>
- Notação científica: <http://www.malhatlantica.pt/cnaturais/dadossistemasolar.htm> e <http://cyberlesson.free.fr/Cybermaths/Ecriturescientif/ecriturescientifi.htm>
- Operações com números: [http://www.fi.uu.nl/toepassing/en/00013/leerling\\_pt.html](http://www.fi.uu.nl/toepassing/en/00013/leerling_pt.html)



# DÍZIMAS INFINITAS NÃO PERIÓDICAS E NÚMEROS REAIS



Atividades iniciais ..... 137

## 4.1 Conjunto dos números reais ..... 138

Dízimas infinitas não periódicas e «pontos irracionais». Representação na reta numérica

Conjunto dos números reais

Números irracionais

Verificar a aprendizagem ..... 145

## 4.2 Operações com números reais ..... 147

Propriedades

Adição e subtração

Multiplicação e divisão

Potenciação

Método geométrico para determinar o produto de dois números reais

Verificar a aprendizagem ..... 151

## 4.3 Relação de ordem em IR ..... 155

Comparar e ordenar números reais

Verificar a aprendizagem ..... 158

Hiperpágina ..... 160

As aproximações do número  $\pi$

Síntese ..... 162

Atividades globais ..... 164

Autoavaliação ..... 168

Retrato de um matemático ..... 170

Paul Erdős

Problemas famosos ..... 171

A irracionalidade de  $\sqrt{2}$

Investigar ..... 172

## Atividades iniciais

### Números racionais

- 1 Considera os números:  $\frac{2}{3}$ ; 4;  $\frac{13}{8}$ ;  $\frac{9}{22}$ ;  $-10$ ;  $\frac{6}{7}$ .
- 1.1 Representa cada um dos números sob a forma de dízima.
- 1.2 Separa as dízimas que são finitas das que são infinitas periódicas.
- 1.3 No caso das dízimas infinitas periódicas, indica o seu período.
- 2 Copia e completa com  $\in$  (pertence) ou  $\notin$  (não pertence).

|     | IN | Z | Q |
|-----|----|---|---|
| 9   |    |   |   |
| -6  |    |   |   |
| 4,5 |    |   |   |
| 0   |    |   |   |

IN = {números naturais}  
Z = {números inteiros}  
Q = {números racionais}



- 3 Investiga as frações com denominador 37.
- 3.1 Usando a calculadora, representa  $\frac{1}{37}$ ,  $\frac{2}{37}$ ,  $\frac{3}{37}$ ,  $\frac{4}{37}$  e  $\frac{5}{37}$  sob a forma de dízima.
- 3.2 Sem usar a calculadora, conjectura como ficarão representados, na forma de dízima,  $\frac{6}{37}$  e  $\frac{7}{37}$ .
- 3.3 Usando a calculadora, representa  $\frac{38}{37}$ ,  $\frac{39}{37}$  e  $\frac{40}{37}$  sob a forma de dízima.
- 3.4 De um modo geral, como se escreve na forma de dízima uma fração de denominador 37?

### Um número não racional

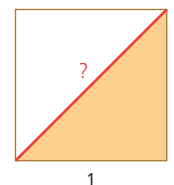
- 4 Recorda que dois segmentos de reta dizem-se **comensuráveis** quando existe uma unidade de comprimento, tal que a medida de ambos é expressa em números inteiros. Por exemplo,  $[AB]$  e  $[CD]$  são comensuráveis porque  $\overline{AB} = 5u$  e  $\overline{CD} = 3u$ .



Na Grécia Antiga, acreditava-se que dois segmentos de reta eram sempre comensuráveis, por isso, um dos maiores desafios que os matemáticos enfrentaram surgiu quando quiseram determinar a medida da diagonal de um quadrado de lado igual a 1: descobriram que a diagonal não era comensurável com o lado do quadrado!

Com a resolução deste problema, viria a nascer o primeiro número não racional. A descoberta de que existiam medidas não comensuráveis (ou incomensuráveis) revelou que os números inteiros e os fracionários não eram suficientes para descrever a realidade.

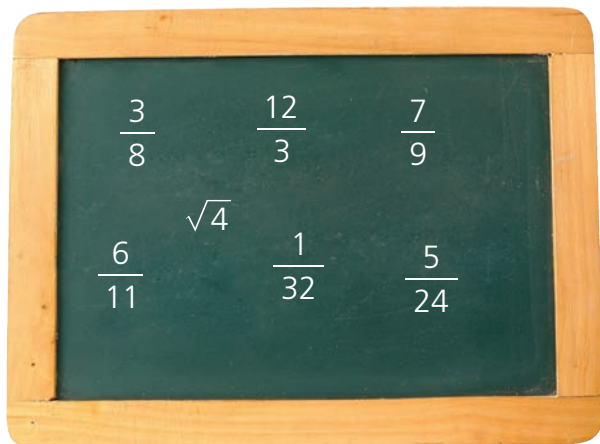
Designando por  $x$  a medida da diagonal de um quadrado de lado igual a 1, a que é igual  $x^2$ ?



# 4.1

## Conjunto dos números reais

### Tarefa 1



O Diogo entrou numa sala onde estavam escritos números no quadro.

- 1 Indica os números que podem ser representados:
  - a) por uma dízima finita;
  - b) por uma dízima infinita periódica.
- 2 Que outras dízimas conheces? Consegues escrever no quadro alguma?
- 3 O número  $\frac{1}{17}$  representa-se por uma dízima finita ou infinita?

Denomina-se **dízima infinita não periódica** uma expressão do tipo

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

formada pela representação decimal  $a_0$  de um número inteiro seguido de uma vírgula e de uma sucessão de algarismos que **não** corresponde a uma dízima infinita periódica.

### ■ Dízimas infinitas não periódicas e «pontos irracionais». Representação na reta numérica

As dízimas infinitas não são todas periódicas. Quando não são periódicas, dizem-se **dízimas infinitas não periódicas**.

Não é fácil exibir uma dízima infinita não periódica. Podemos pensar numa dízima infinita periódica e entre cada sequência de algarismos que constitui o período dessa dízima «colocamos» um número de zeros sempre diferente:

$$0,303003000300003\dots$$

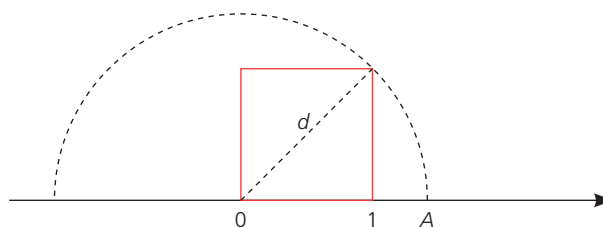
$$-2,58058005800058000058\dots$$

As dízimas anteriores são infinitas não periódicas.

#### • Números irracionais

Na Grécia Antiga, o problema da medição da diagonal de um quadrado de lado igual a 1 levou ao aparecimento de um novo número, que não podia ser um número racional.

Consideremos um quadrado de lado 1 com um lado coincidente com o segmento de reta definido pelos pontos de abscissa zero e abscissa um, da reta numérica. Com um compasso, marcamos na reta numérica um segmento de reta com comprimento igual ao comprimento da diagonal do quadrado, tal como indicado na figura:



#### Recorda

Dois segmentos de reta são comensuráveis quando (e só quando), tomando um deles para unidade de comprimento, existe um número racional positivo,  $r$ , tal que a medida do outro segmento de reta é igual a  $r$ .

Não existem números naturais  $a$  e  $b$  tais que  $a^2 = 2b^2$ .

A hipotenusa e o cateto de um triângulo retângulo isósceles não são comensuráveis.

Obtém-se o ponto  $A$  sobre a reta numérica. Qual é a sua abcissa?

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, pode escrever-se a igualdade  $1^2 + 1^2 = d^2$ , que é equivalente à igualdade  $d^2 = 2$ .

Se  $d$  fosse um número racional, então, seria da forma  $\frac{a}{b}$ , com  $a$  e  $b$  números naturais, o que seria equivalente a afirmar que  $\frac{a^2}{b^2} = 2$ , logo, poder-se-ia afirmar que  $a^2 = 2b^2$ , o que se sabe que não pode ocorrer. Conclui-se que  $d$  não pode ser um número racional.

Um ponto da reta numérica à distância da origem igual ao comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 **não pode corresponder a um número racional**.

Os pontos da reta numérica que não correspondem a um número racional chamam-se **pontos irracionais**.

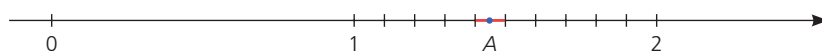
Considera um ponto  $A$ , da semirreta numérica positiva. Existem pontos de abcissa dada por uma dízima finita tão próximos de  $A$  quanto se pretenda, como vamos ver a seguir.

Uma vez que o ponto  $A$  está marcado na reta numérica, podem justapor-se segmentos de reta de comprimento unitário a partir da origem até que um deles contenha o ponto  $A$ .



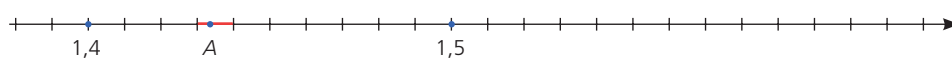
No caso da figura, verifica-se que o ponto  $A$  está entre os pontos de abcissa 1 e 2.

Vamos agora justapor, a partir do ponto de abcissa 1, segmentos de reta de medida de comprimento  $\frac{1}{10} = 0,1$ , até que um deles contenha o ponto  $A$ .



O ponto  $A$  fica situado entre os pontos de abcissa  $1 + 4 \times 0,1$  e  $1 + 5 \times 0,1$ , isto é, entre os pontos de abcissa 1,4 e 1,5.

Continuamos a justapor, a partir do ponto de abcissa 1,4, segmentos de reta de medida de comprimento  $\frac{1}{10^2} = 0,01$  até que um deles contenha o ponto  $A$ .



O ponto  $A$  fica situado entre os pontos de abcissa 1,43 e 1,44.

Repete-se este processo com segmentos de reta de medida de comprimento  $\frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^4} \dots$

Vai-se assim construindo progressivamente uma dízima.

No exemplo considerado, esta dízima é 1,43...



Esta dízima fica associada ao ponto  $A$ , podendo ocorrer uma de três situações:

- O processo termina após um número finito de etapas, com a coincidência do ponto  $A$  com uma extremidade de um dos segmentos, obtendo-se então uma **dízima finita**. Neste caso, a dízima corresponde à fração decimal que representa o número racional abscissa de  $A$ .
- A dízima obtida é **infinita periódica**. Neste caso, a dízima representa o número racional abscissa de  $A$ .
- A dízima obtida é **infinita não periódica**. Neste caso,  $A$  é um ponto irracional. A dízima representa um número, dito **número irracional**, medida da distância entre a origem e  $A$  e que é a abscissa de  $A$ .

A cada ponto irracional da semirreta numérica positiva está associada uma dízima infinita não periódica.

Esta dízima infinita não periódica representa um **número irracional**.

Para os pontos da semirreta negativa, proceder-se-ia de modo análogo, obtendo deste modo as abscissas de todos os pontos desta semirreta, representadas por dízimas finitas ou infinitas (periódicas ou não), afetadas de sinal « $-$ », juntando-se assim os números irracionais negativos aos racionais negativos já nossos conhecidos.

**Pontos simétricos em relação à origem são representados por dízimas simétricas** (ou seja, que diferem apenas no sinal). Em particular, o simétrico de um ponto irracional de abscissa positiva  $a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$  é um ponto irracional e a sua abscissa é o **número irracional negativo**  $-a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$

Exemplos:

- $0,(3)$  e  $-0,(3)$  são dízimas simétricas; neste caso, dízimas infinitas periódicas simétricas.
- As dízimas infinitas não periódicas  $0,3030030003\dots$  e  $-0,3030030003\dots$  são simétricas.

## Conjunto dos números reais

Com a «descoberta» dos números irracionais, criou-se um novo conjunto de números formado pelos racionais e irracionais.

Trata-se do **conjunto dos números reais**.

Um **número real** pode ser representado por uma dízima finita, uma dízima infinita periódica ou uma dízima infinita não periódica.

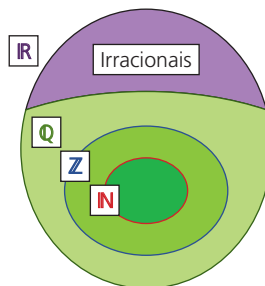
A união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais,  $\mathbb{Q} \cup \{\text{irracionais}\}$ , designa-se por **conjunto dos números reais**.

O **conjunto dos números reais** representa-se por  **$\mathbb{R}$** .

A relação entre os vários conjuntos de números pode ser representada num diagrama:

Não existe um símbolo para o conjunto dos números irracionais.

Os números reais podem ser representados graficamente numa reta numérica, designada por reta real.



### Nota

$\mathbb{R}^+$  representa o conjunto dos números reais positivos

$\mathbb{R}^-$  representa o conjunto dos números reais negativos

$\mathbb{R}_0^+$  representa o conjunto dos números reais não negativos

$\mathbb{R}_0^-$  representa o conjunto dos números reais não positivos

## ■ Números irracionais

Ao considerar novamente o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1, verifica-se que  $d^2 = 2$  e que não existem números naturais  $a$  e  $b$ , tais que  $\frac{a^2}{b^2} = 2$ , isto é, 2 não pode ser o quadrado de um número racional positivo. Mas existe um único número real positivo cujo quadrado é 2. Designemos esse número por  $\sqrt{2}$ . Este número não pode ser racional, logo, tem de ser irracional.

**O número  $\sqrt{2}$  é irracional.**

Pode utilizar-se uma calculadora ou um computador para se obter alguns algarismos da dízima que representa o número  $\sqrt{2}$ .

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242\dots$$

Em geral, dado um número real  $a$  não negativo, a raiz quadrada de  $a$  é o número real  $b$  não negativo cujo quadrado é  $a$ .

Escreve-se  $\sqrt{a} = b$ .

Já vimos que  $\sqrt{2}$  é um número irracional.

E quando  $n$  é um número natural que não é um quadrado perfeito, o número  $\sqrt{n}$  será um número irracional? Por exemplo,  $\sqrt{7}$  será um número irracional?

Recorda que um quadrado perfeito é um número  $t^2$ , em que  $t$  é um número natural. Na decomposição em fatores primos de um quadrado perfeito apenas figuram expoentes pares.

Por exemplo, a decomposição em fatores primos do número 60 é  $2^2 \times 3 \times 5$ .

A decomposição em fatores primos do número  $60^2$  é

$$60^2 = (2^2 \times 3 \times 5)^2 = 2^{(2 \times 2)} \times 3^2 \times 5^2 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$$

Na decomposição em fatores primos do quadrado perfeito  $60^2$  apenas figuram expoentes pares.

Para obter a decomposição em fatores primos de  $t^2$  começamos por decompor o número natural  $t$  em fatores primos e aplicamos as regras das potências. Todos os expoentes são multiplicados por 2, logo, obtêm-se expoentes pares.

### Nota

- O número 64 é um quadrado perfeito. A sua decomposição em fatores primos é  $2^6$ , o único fator primo é 2 e o expoente é o número par 6.

- O número 32 não é um quadrado perfeito porque a sua decomposição em fatores primos é  $2^5$  e o expoente do fator primo 2 é o número ímpar 5.



### Nota

Para determinar a raiz quadrada de um quadrado perfeito podemos decompô-lo em fatores primos.

Por exemplo:

- $900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 = (2 \times 3 \times 5)^2 = 30^2$   
Logo,  $\sqrt{900} = 30$
- $60\,025 = 5^2 \times 7^4 = (5 \times 7^2)^2 = 245^2$   
Logo,  $\sqrt{60\,025} = 245$ .

Se  $\sqrt{7}$  fosse um número racional existiriam números naturais  $a$  e  $b$  tais que  $\sqrt{7} = \frac{a}{b}$ . Desta forma,  $7 = \frac{a^2}{b^2}$ , isto é,  $7 \times b^2 = a^2$ .

Todos os fatores primos da decomposição de  $a^2$  figuram com expoente par o mesmo acontecendo com os de  $b^2$ . Assim o expoente do fator 7 na decomposição em fatores primos de  $7 \times b^2$  é um número ímpar, o que é absurdo, visto que  $7 \times b^2 = a^2$ . Daqui conclui-se que  $\sqrt{7}$  não pode ser escrito sob a forma de fração, o que significa que é um número irracional.

Este mesmo raciocínio pode ser aplicado para concluir que, por exemplo, o número  $\sqrt{5}$ , o número  $\sqrt{6}$  e o número  $\sqrt{8}$  são números irracionais.

Se o número natural  $n$  não é um quadrado perfeito, então, o número  $\sqrt{n}$  é um número irracional.

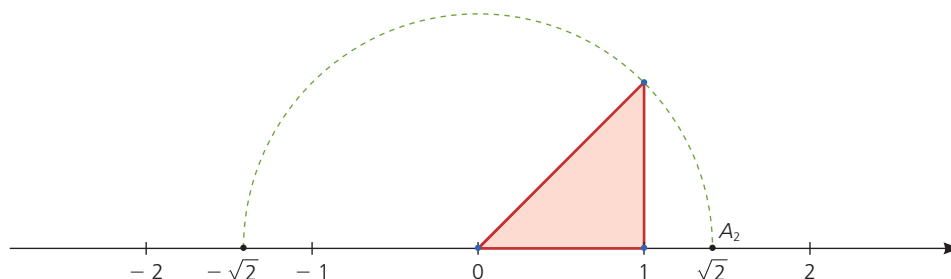
- Vamos representar, na reta numérica, números da forma  $\sqrt{n}$  com  $n$  número natural e os seus simétricos,  $-\sqrt{n}$ .

Começemos por representar os números  $\sqrt{2}$  e  $-\sqrt{2}$ . Recordemos o procedimento.

Construímos um triângulo retângulo com um dos catetos de comprimento 1 coincidente com o segmento de extremos na origem  $O$  e no ponto  $A_1$  de abscissa 1 e o outro cateto também de comprimento 1. Com um compasso determinamos um ponto  $A_2$  de abscissa igual à medida do comprimento da hipotenusa do triângulo e um outro ponto com abscissa simétrica da abscissa do ponto  $A_2$ .

Considerando que a medida do comprimento da hipotenusa é  $d_1$ , e aplicando o Teorema de Pitágoras, obtém-se  $d_1^2 = 1^2 + 1^2$ , isto é,  $d_1^2 = 2$ . A medida do comprimento da hipotenusa é  $\sqrt{2}$ .

A abscissa do ponto  $A_2$  é  $\sqrt{2}$  e a do seu ponto simétrico é  $-\sqrt{2}$ .



Vamos agora representar os números  $\sqrt{3}$  e  $-\sqrt{3}$ .

Construindo um triângulo retângulo  $[OA_2B]$  com um dos catetos coincidente com  $[OA_2]$  e o outro de comprimento 1, e utilizando um compasso, determinamos na reta real um ponto  $A_3$  de abscissa igual à medida do comprimento da hipotenusa desse triângulo e um outro ponto com abscissa simétrica da abscissa de  $A_3$ .

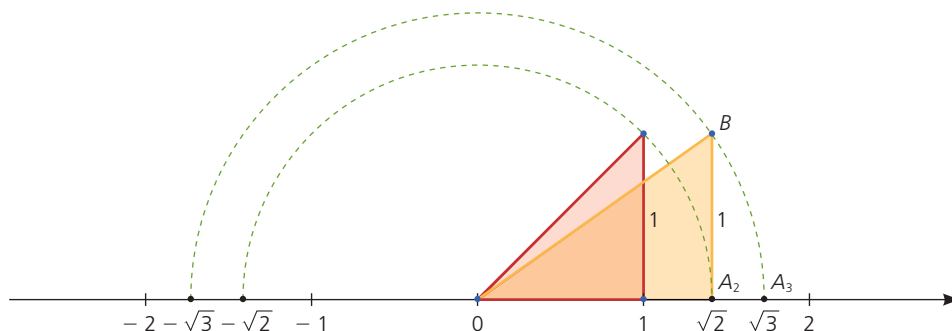
Utilizando o Teorema de Pitágoras, e considerando que a medida do comprimento da hipotenusa do triângulo  $[OA_2B]$  é  $d_2$ , obtém-se  $d_2^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$ , isto é,  $d_2^2 = 3$ .

A medida do comprimento da hipotenusa  $d_2$  é  $\sqrt{3}$ .

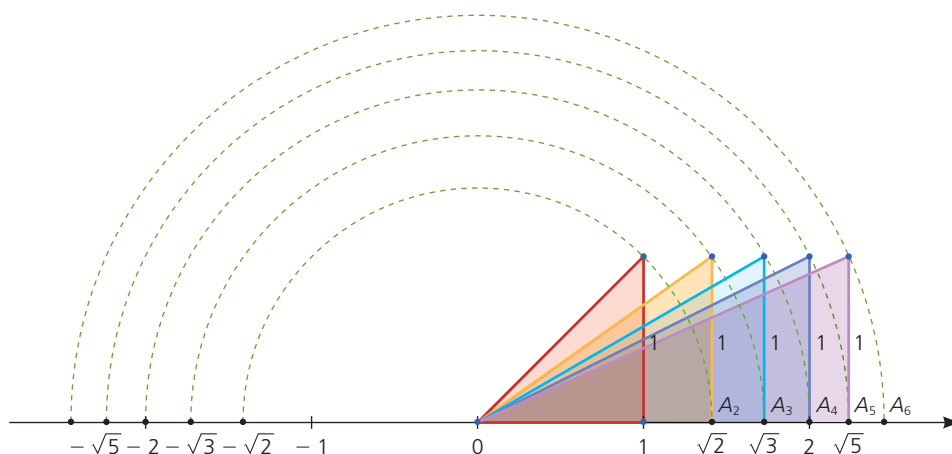
A abscissa do ponto  $A_3$  é  $\sqrt{3}$  e a do seu ponto simétrico é  $-\sqrt{3}$ .

**Nota**

$(\sqrt{n})^2 = n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .



Pode utilizar-se o processo indicado anteriormente e determinar pontos na reta real com abscissas  $\sqrt{4}$  e  $-\sqrt{4}$ ,  $\sqrt{5}$  e  $-\sqrt{5}$ , ...



A abscissa do ponto  $A_4$  é  $\sqrt{4}$  e, como  $4 = 2^2$ , é um quadrado perfeito  $\sqrt{4} = 2$  e, consequentemente,  $-\sqrt{4} = -2$ .

Utilizando este facto, pode obter-se um ponto de abscissa igual a  $\sqrt{5}$ , construindo um triângulo retângulo cujas medidas dos catetos são 2 e 1, porque  $5 = 2^2 + 1^2$ .

Qual é a abscissa do ponto  $A_6$ ?

Consideremos que  $d_5$  é a medida do comprimento da hipotenusa do triângulo de cateto coincidente com  $[OA_5]$ . O Teorema de Pitágoras permite escrever  $d_5^2 = (\sqrt{5})^2 + 1^2$ , isto é,  $d_5^2 = 6$ . A medida do comprimento da hipotenusa é  $\sqrt{6}$ .

A abscissa do ponto  $A_6$  é  $\sqrt{6}$  e a do seu ponto simétrico é  $-\sqrt{6}$ .

Se se continuar o processo, a próxima abscissa a ser obtida é  $\sqrt{7}$ .

Pode utilizar-se o Teorema de Pitágoras para construir geometricamente raízes quadradas de números naturais e representá-los na reta numérica. Para o mesmo número, podem utilizar-se triângulos retângulos diferentes. Por exemplo, para construir geometricamente  $\sqrt{13}$ , pode utilizar-se um triângulo retângulo cujas medidas dos comprimentos dos catetos são  $\sqrt{12}$  «e» 1 ou um triângulo retângulo cujas medidas dos comprimentos dos catetos são 2 e 3. Poder-se-ia indicar outros exemplos de triângulos retângulos cuja medida do comprimento da hipotenusa é  $\sqrt{13}$ .

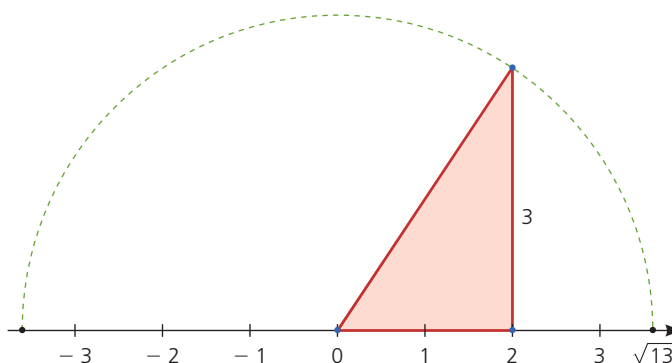
### Exercício resolvido

Representa na reta numérica o número  $\sqrt{13}$  recorrendo à construção de um triângulo retângulo.

#### Resolução:

Consideremos o triângulo retângulo representado cujas medidas dos comprimentos dos catetos são 2 e 3.

Como  $13 = 2^2 + 3^2$  a diagonal desse triângulo retângulo mede  $\sqrt{13}$  (Teorema de Pitágoras).



- Dado um número real  $a$  chamamos **raiz cúbica de  $a$**  ao número real  $b$ , tal que  $b^3 = a$ .

Escreve-se:  $\sqrt[3]{a} = b$

As raízes cúbicas de números naturais que não são cubos perfeitos são números irracionais. Por exemplo,  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[3]{4}$  são números irracionais.

Também  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ ,  $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ ,  $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ , por exemplo, são números irracionais.

Recorda que os perímetros e os diâmetros dos círculos são grandezas diretamente proporcionais e que a respetiva constante de proporcionalidade é designada por  $\pi$ . O valor de  $\pi$  arredondado às décimas milésimas é igual a 3,1416.

Este número é representado por uma dízima infinita não periódica.

O número  $\pi$  é um número irracional.

Podemos utilizar uma calculadora ou um computador para obter alguns algarismos da dízima que representa o número  $\pi$ :

$\pi = 3,141592653589793238462643383\dots$

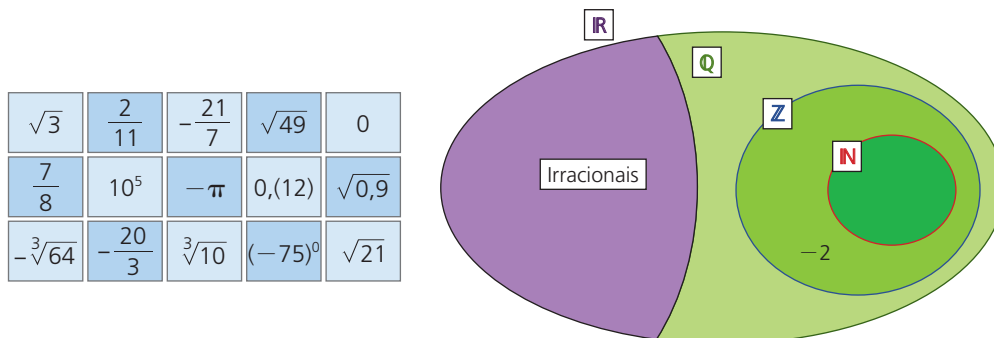
#### O que deves saber

- Associar a um ponto representado na reta real a sua abcissa em forma de dízima, com uma dada aproximação.
- Identificar um número real (racional ou irracional).
- Representar números reais na reta real.

## Verificar a aprendizagem

### NOÇÃO DE NÚMERO REAL

- 1 Considera o conjunto  $A = \left\{ -\frac{17}{3}; -\sqrt{27}; \sqrt{81}; \sqrt{\frac{25}{4}}; -\sqrt[3]{27}; \frac{50}{13}; -\sqrt{\frac{1}{6}} \right\}$ .
- 1.1 Selecciona os números do conjunto  $A$  que podem ser representados por:
- dízimas finitas;
  - dízimas infinitas periódicas;
  - dízimas infinitas não periódicas.
- 1.2 Selecciona os números do conjunto  $A$  que são:
- naturais;
  - inteiros;
  - racionais;
  - irracionais;
  - reais.
- 2 Qual das opções seguintes apresenta um número irracional?
- $\sqrt{36}$
  - $\sqrt{3,6}$
  - $\sqrt{0,36}$
  - $\sqrt{0,0036}$
- 3 Reproduz o diagrama apresentado em baixo à direita e coloca cada um dos números reais da tabela no seu respetivo conjunto. Por exemplo, o número  $-2$  é um número inteiro (e, por isso, é também um número racional), mas não é um número natural.



- 4 Em cada caso, diz se é verdadeiro ou falso. Explica a tua resposta nos casos em que é falso.
- $18 \in \mathbb{Q}$
  - $-\sqrt{25} \in \mathbb{N}$
  - $-6 \in \mathbb{R}^+$
  - $-\sqrt{2} \in \mathbb{R}_0^-$
  - $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$
  - $\{\sqrt{7}; \sqrt{8}; \sqrt{9}\} \subset \{\text{números irracionais}\}$
- 5 Mostra que  $\sqrt{3}$  e  $\sqrt{8}$  são números irracionais.

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei identificar um número real (racional ou irracional)?

### REPRESENTAÇÃO NA RETA REAL

- 6 Representa na reta real, com rigor (sempre que possível), os números:
- $A \curvearrowright -2,5$ ;  $B \curvearrowright -\frac{3}{4}$ ;  $C \curvearrowright \frac{7}{10}$ ;  $D \curvearrowright \sqrt{2}$ ;  $E \curvearrowright 4\frac{2}{3}$ .
- 7 Considera os números reais:  $\sqrt{5}$ ;  $\sqrt{10}$ ;  $-\sqrt{11}$
- Representa rigorosamente, na reta real, os números.

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei representar números reais na reta real?

## Aplicar

- 8 Escreve um número irracional compreendido entre 4 e 5.

## Tarefa

- 9 Uma forma de criar números irracionais consiste em apresentar dízimas infinitas que obedecem a um padrão que não seja periódico.

9.1 Copia e completa as dízimas seguintes:

a) 0,12345678910111213 □□□□...

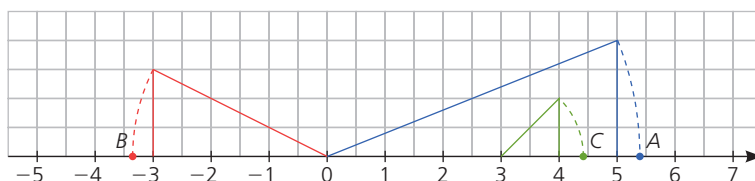
b) 3,09009000900009000 □□□□...

c) 1,05101520253035 □□□□...

9.2 Escreve três novos números irracionais utilizando um padrão não periódico. Troca os teus números com um colega e tentem descobrir as casas decimais seguintes de cada um dos números.

- 10 Considera o número fracionário  $\frac{9}{13}$ . Quando se representa sob a forma de dízima, qual é a sua 75.<sup>a</sup> casa decimal? Justifica a tua resposta.

- 11 Determina o valor exato da abcissa dos pontos A, B e C representados na reta numérica ao lado.



- 12 Considera a sequência numérica de termo geral  $\sqrt{n}$ . Quantos números irracionais existem entre os primeiros 100 termos da sequência? Escolhe a opção correta.

A. 10      B. 15      C. 80      D. 90

- 13 Nem sempre é possível visualizar o período de uma dízima no ecrã de uma calculadora porque o número de dígitos é limitado.

13.1 Recorrendo à calculadora de um computador (em modo científico), determina o período de:

a)  $\frac{1}{81}$

b)  $\frac{2}{17}$

c)  $\frac{5}{56}$

d)  $\frac{3}{19}$

13.2 Apresenta um número fracionário ao qual corresponda uma dízima cujo período não seja visível na calculadora do computador.

## Tarefa de investigação

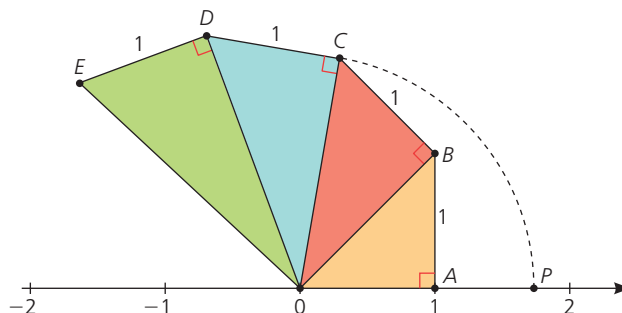
- 14 Sobre a figura ao lado, sabe-se que:

- os triângulos  $[OAB]$ ,  $[OBC]$ ,  $[OCD]$  e  $[ODE]$  são retângulos;
- $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = 1$

14.1 Qual é a abcissa do ponto P?

14.2 Procura uma regularidade no comprimento das hipotenusas.

14.3 Num ambiente de Geometria Dinâmica, constrói a sequência de triângulos e continua-a de modo a obteres uma espiral.



## 4.2

# Operações com números reais

### Tarefa 2



No judo, a zona de combate é um quadrado cujo lado pode medir entre 8 m e 10 m.

1 A Rita escolheu três números reais entre 8 e 10:

A.  $\sqrt{72}$

B.  $7 + \sqrt{2}$

C.  $5 \times \sqrt{3}$

Supõe que esses números correspondem à medida do lado de três quadrados. Para cada um deles, apresenta o valor exato (simplificado) do perímetro do quadrado.

2 A medida da diagonal de um quadrado,  $d$ , em função do seu lado,  $\ell$ , é dada pela fórmula  $d = \sqrt{2} \times \ell$ . Para cada um dos valores da questão anterior, determina o valor exato da medida da diagonal.

As quatro operações definidas sobre os números racionais podem-se estender aos números reais mantendo as respetivas propriedades algébricas.

A potenciação de expoente inteiro, bem como as suas propriedades algébricas, também se podem estender aos números reais mantendo as respetivas propriedades algébricas. O mesmo acontece com a raiz quadrada e a raiz cúbica.

### Propriedades

As propriedades das operações válidas no conjunto dos números racionais **mantêm-se válidas** no conjunto dos números reais.

- Propriedades da adição em  $\mathbb{R}$ :

| Para quaisquer números $a, b$ e $c \in \mathbb{R}$ |                             |
|----------------------------------------------------|-----------------------------|
| Propriedade comutativa                             | $a + b = b + a$             |
| Propriedade associativa                            | $a + (b + c) = (a + b) + c$ |
| Elemento neutro                                    | $a + 0 = 0 + a = a$         |
| Elemento simétrico                                 | $a + (-a) = (-a) + a = 0$   |

- Propriedades da multiplicação em  $\mathbb{R}$ :

| Para quaisquer números $a, b$ e $c \in \mathbb{R}$            |                                                                    |
|---------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| Propriedade comutativa                                        | $a \times b = b \times a$                                          |
| Propriedade associativa                                       | $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$                    |
| Elemento neutro                                               | $a \times 1 = 1 \times a = a$                                      |
| Elemento absorvente                                           | $a \times 0 = 0 \times a = 0$                                      |
| Elemento inverso                                              | $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$ , com $a \neq 0$ |
| Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição | $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$                       |

#### Nota

Para simplificar a escrita, em vez de se escrever  $\sqrt{2} \times 3$  ou  $3 \times \sqrt{2}$ , escreve-se simplesmente  $3\sqrt{2}$ .



Não é possível simplificar expressões como:

- $5 + \sqrt{2}$
- $1 + 2\sqrt{3}$
- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
- $3\sqrt{7} + 4\sqrt{10}$
- $3 + \sqrt[3]{2}$
- $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$
- $5\sqrt[3]{-2} - 3\sqrt[3]{4}$



## ■ Adição e subtração

Para simplificar expressões com números reais, pode utilizar-se a propriedade distributiva:

- $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (3 + 4)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$
- $2\pi - 8\pi = (2 - 8)\pi = -6\pi$
- $\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{1} + \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{3\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{5}}{3} = \frac{(3+1)\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$
- $\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} = (1+5)\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$
- $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{(-1)^3 \times 2} = \sqrt[3]{2} + (-1)\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 0$

## ■ Multiplicação e divisão

Na multiplicação e na divisão, são ainda válidas as regras seguintes:

### Nota

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$  representa o conjunto dos números reais não nulos.

- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$  (com  $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ )
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$  (com  $a \in \mathbb{R}_0^+$  e  $b \in \mathbb{R}^+$ )
- $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \times b}$  (com  $a, b \in \mathbb{R}$ )
- $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$  (com  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ )

$\sqrt{7^2} = \sqrt{7^2} = 7$ :  
A RAIZ QUADRADA  
SIMPLIFICA-SE  
COM O  
QUADRADO.

ATENÇÃO COM OS  
NÚMEROS NEGATIVOS,  
O RESULTADO É  
POSITIVO:  
 $\sqrt{(-3)^2} = 3$ .



Exemplos:

- $-4\sqrt{3} \times 2\sqrt{11} = -4 \times 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{11} = -8 \times \sqrt{3 \times 11} = -8\sqrt{33}$
- $\sqrt{5} \times (2 + \sqrt{6}) = \sqrt{5} \times 2 + \sqrt{5} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{5} + \sqrt{5 \times 6} = 2\sqrt{5} + \sqrt{30}$
- $\frac{45\sqrt{12}}{5\sqrt{3}} = \frac{45}{5} \times \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 9 \times \sqrt{\frac{12}{3}} = 9\sqrt{4} = 9 \times 2 = 18$
- $2\sqrt[3]{4} \times (-3\sqrt[3]{5}) = 2 \times (-3) \sqrt[3]{4 \times 5} = -6\sqrt[3]{20}$
- $\frac{15\sqrt[3]{8}}{3\sqrt[3]{-2}} = \frac{15}{3} \times \sqrt[3]{\frac{8}{-2}} = 5\sqrt[3]{-4} = 5 \times \sqrt[3]{(-1)^3 \times 4} = 5 \times (-1) \times \sqrt[3]{4} = -5\sqrt[3]{4}$

## ■ Potenciação

São válidas as regras das operações com potências ( $a, b \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{Z}$ ):

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$  (com  $a \neq 0$ )
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$  (com  $a \neq 0$ )
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$  (com  $a \neq 0$ )
- $a^m \times b^m = (a \times b)^m$  (com  $a, b \neq 0$ )
- $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$  (com  $a, b \neq 0$ )

Exemplos:

- $\sqrt{7}^5 = \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} = \sqrt{7}^2 \times \sqrt{7}^2 \times \sqrt{7} = 7 \times 7 \times \sqrt{7} = 49\sqrt{7}$
- $(3\sqrt{5})^2 = 3^2 \sqrt{5}^2 = 9 \times 5 = 45$
- $\frac{\sqrt{6}^9}{\sqrt{6}^7} = \sqrt{6}^{9-7} = \sqrt{6}^2 = 6$
- $\sqrt[3]{4}^7 = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4}^3 \times \sqrt[3]{4}^3 \times \sqrt[3]{4} = 4 \times 4 \times \sqrt[3]{4} = 16\sqrt[3]{4}$
- $(3\sqrt[3]{2})^2 = 3^2 \times \sqrt[3]{2}^2 = 9\sqrt[3]{4}$
- $\frac{\sqrt[3]{5}^8}{\sqrt[3]{5}^5} = \sqrt[3]{5}^{8-5} = \sqrt[3]{5}^3 = 5$

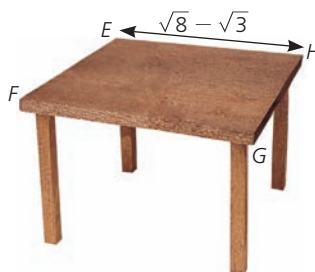
### Exercício resolvido

Considera a mesa de tampo quadrado, como se ilustra na figura ao lado.

Sabe-se que  $\overline{EH} = \sqrt{8} - \sqrt{3}$

a) Escreve uma expressão simplificada para o perímetro e para a área do quadrado  $[EFGH]$ .

b) Mostra que  $\overline{FH} = \sqrt{22 - 8\sqrt{6}}$ .



**Resolução:**

a)  $P = 4 \times (\sqrt{8} - \sqrt{3}) = 4\sqrt{8} - 4\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{8} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{8} - \sqrt{3}) \times (\sqrt{8} - \sqrt{3}) = \\ &= \sqrt{8}^2 - \sqrt{8} \times \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{8} + \sqrt{3}^2 = \\ &= 8 - 2\sqrt{24} + 3 = 11 - 2\sqrt{24} = 11 - 2\sqrt{2^2 \times 6} = \\ &= 11 - 2 \times 2\sqrt{6} = 11 - 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

b) Recorrendo ao Teorema de Pitágoras sabe-se que:

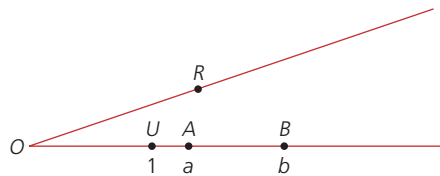
$$\begin{aligned} \overline{FE}^2 + \overline{EH}^2 &= \overline{FH}^2 \Leftrightarrow (\sqrt{8} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{8} - \sqrt{3})^2 = \overline{FH}^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \times (\sqrt{8} - \sqrt{3})^2 = \overline{FH}^2 \Leftrightarrow 2 \times (11 - 4\sqrt{6}) = \overline{FH}^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 22 - 8\sqrt{6} = \overline{FH}^2 \Leftrightarrow \overline{FH} = \sqrt{22 - 8\sqrt{6}} \end{aligned}$$

## ■ Método geométrico para determinar o produto de dois números reais

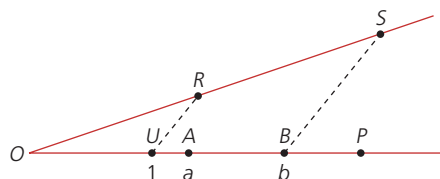
As propriedades envolvendo proporções entre medidas de segmentos podem estender-se aos números reais, isto é, mantêm-se válidas para medidas de segmentos definidas por números reais.

Dada uma reta numérica de origem  $O$ , e os números reais positivos  $a$  e  $b$ , abscissas, respetivamente, dos pontos  $A$  e  $B$ , pretende-se construir, nessa reta, o ponto  $P$ , de abscissa  $a \times b$ .

Com este objetivo, designemos por  $U$  o ponto de abscissa 1 e consideremos uma reta auxiliar  $OR$  distinta da reta numérica inicial.

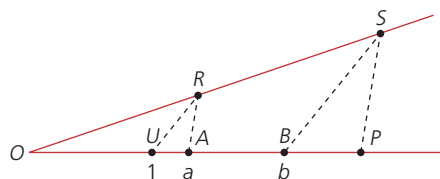


Seja  $S$  a interseção de  $OR$  com a reta paralela a  $UR$  que passa por  $B$ .



Como os triângulos  $[ORU]$  e  $[OSB]$  são semelhantes, pode concluir-se que  $\frac{\overline{OB}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}}$ . Logo,  $\frac{b}{1} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}}$ , isto é,  $b = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}}$ .

Seja  $P$  a interseção de  $OU$  com a reta paralela a  $AR$  que passa por  $S$ .



Como os triângulos  $[ORA]$  e  $[OSP]$  são semelhantes, pode deduzir-se que  $\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}}$ , logo,  $\frac{\overline{OP}}{a} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}}$ .

Das duas condições anteriores, deduz-se que  $\frac{\overline{OP}}{a} = b$ , pelo que  $\overline{OP} = a \times b$ .

Este método é aplicável para dois números  $a$  e  $b$  reais, não necessariamente positivos.

### O que deves saber

- Conhecer as propriedades e as regras das operações em  $\mathbb{R}$ .
- Simplificar expressões com números reais.

## Verificar a aprendizagem

### PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

- 1 Associa cada propriedade ao exemplo que lhe corresponde.

|   |                                                               |
|---|---------------------------------------------------------------|
| A | Propriedade comutativa da adição                              |
| B | Propriedade comutativa da multiplicação                       |
| C | Propriedade associativa da adição                             |
| D | Propriedade associativa da multiplicação                      |
| E | Elemento neutro da adição                                     |
| F | Elemento neutro da multiplicação                              |
| G | Elemento absorvente                                           |
| H | Elemento simétrico                                            |
| I | Elemento inverso                                              |
| J | Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição |

|    |                                                                               |
|----|-------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | $\sqrt{7} + (-\sqrt{7}) = -\sqrt{7} + \sqrt{7} = 0$                           |
| 2  | $\sqrt{10} \times 1 = 1 \times \sqrt{10} = \sqrt{10}$                         |
| 3  | $6 \times (-0,25) = (-0,25) \times 6$                                         |
| 4  | $\pi \times 0 = 0 \times \pi = 0$                                             |
| 5  | $\sqrt{5} \times (\sqrt{20} \times 9) = (\sqrt{5} \times \sqrt{20}) \times 9$ |
| 6  | $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$                                   |
| 7  | $1 + (4 + \sqrt{7}) = (1 + 4) + \sqrt{7}$                                     |
| 8  | $3 \times (\sqrt{8} + 2) = 3 \times \sqrt{8} + 3 \times 2$                    |
| 9  | $-60 + 0 = 0 + (-60) = -60$                                                   |
| 10 | $\sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = 1$ |

### AUTOAVALIAÇÃO Conheço as propriedades das operações em IR?

### EXPRESSÕES NUMÉRICAS

- 2 Simplifica cada uma das expressões seguintes:

- |                             |                                                   |                                                 |
|-----------------------------|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| a) $5\pi + 9\pi$            | d) $\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$                         | g) $3\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5}$                 |
| b) $4\sqrt{8} - 11\sqrt{8}$ | e) $\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 11\sqrt{5}$            | h) $2\sqrt[3]{7} - 5\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{7}$ |
| c) $9\sqrt{13} + \sqrt{13}$ | f) $-\sqrt{6} + 4\sqrt{6} + \sqrt{6} - 5\sqrt{6}$ | i) $5\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2}$ |

- 3 Apresenta dois números,  $a$  e  $b$ , tais que:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

- 4 Qual das expressões seguintes é a única que se pode simplificar?

- A.  $7 + 4\sqrt{2}$       B.  $\sqrt{5} + \sqrt{6}$       C.  $8\sqrt{5} - 5\sqrt{3}$       D.  $2\sqrt{6} + 4\sqrt{6}$

- 5 Simplifica cada uma das expressões seguintes:

- |                                                                             |                                                        |                                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\sqrt{2} \times \sqrt{50}$                                              | e) $\frac{18\sqrt{40}}{3\sqrt{10}}$                    | i) $\frac{8\sqrt[3]{54}}{2\sqrt[3]{2}}$                                                          |
| b) $-5\sqrt{3} \times 4\sqrt{12}$                                           | f) $\frac{-4\sqrt{2} \times (-8\sqrt{12})}{2\sqrt{8}}$ | j) $\frac{-2\sqrt[3]{6} \times 3\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{2}}$                                      |
| c) $\sqrt{5} \times (2 - \sqrt{3})$                                         | g) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6^2}$                  | k) $\sqrt[3]{20} \times \left( \frac{3}{\sqrt[3]{2}} - \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}} \right)$ |
| d) $\sqrt{6} \times \left( \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ | h) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4}$                    |                                                                                                  |

- 6 Calcula o valor de cada uma das expressões seguintes:

- |                                 |                    |                       |
|---------------------------------|--------------------|-----------------------|
| a) $\sqrt{11} \times \sqrt{11}$ | c) $\sqrt{2}^5$    | e) $\sqrt[3]{(-3)^4}$ |
| b) $\sqrt{3}^4$                 | d) $\sqrt[3]{2}^6$ | f) $\sqrt[3]{-5}^4$   |

**7** Simplifica utilizando as regras das operações com potências.

a)  $(5\sqrt{7})^2$

e)  $(\sqrt{2^3})^2$

i)  $\frac{\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt[3]{2^{-5}}}$

b)  $\left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{24}}\right)^2$

f)  $\frac{\sqrt{10^5}}{\sqrt{2^5}}$

j)  $\frac{\sqrt[3]{8^7}}{\sqrt[3]{4^7}}$

c)  $\sqrt{6^5} \times \sqrt{6^{-7}}$

g)  $(2\sqrt[3]{5^2})^3$

k)  $\frac{(\sqrt[3]{2^2})^2 \times (\sqrt[3]{4})^2}{\sqrt[3]{2^2}}$

d)  $\frac{\sqrt{3^{11}}}{\sqrt{3^8}}$

h)  $\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{24}}\right)^6$

l)  $((\sqrt[3]{\sqrt{5}})^2)^3$

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei simplificar expressões numéricas?

### Aplicar

**8** Considera a propriedade  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$  com  $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ .

Mostra que:

a)  $\sqrt{5} \times \sqrt{20} = 10$

b)  $(\sqrt{5} - 2\sqrt{3}) \times (\sqrt{5} + 2\sqrt{3}) = -7$

**9** Mostra que  $(2 - \sqrt{7})^2 + (2 + \sqrt{7})^2$  é um número natural.

**10** Lê o diálogo entre a Rita e a Sofia:

Rita — Sabias que se pode simplificar  $\sqrt{50}$ ?

Sofia — Como?

Rita — A ideia é procurar um quadrado perfeito (4, 9, 16, 25, 36, etc.) que, multiplicado por outro número, dê 50. Neste caso, é fácil:  $50 = 25 \times 2$ .

Sofia — Porquê um quadrado perfeito?

Rita — Porque podes calcular a sua raiz quadrada. Repara:  $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ .

Sofia — Já percebi!

**10.1** Utilizando o mesmo método, simplifica os números irracionais seguintes:

a)  $\sqrt{8}$

d)  $\sqrt{45}$

b)  $\sqrt{20}$

e)  $\sqrt{75}$

c)  $\sqrt{27}$

f)  $\sqrt{200}$

**10.2** Lê a continuação do diálogo entre a Rita e a Sofia:

Sofia — Então este método também é válido para a raiz cúbica?

Rita — Sim, também podemos utilizá-lo. Repara:  $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

Utilizando o método, simplifica os números racionais seguintes.

a)  $\sqrt[3]{54}$

d)  $\sqrt[3]{81}$

b)  $\sqrt[3]{432}$

e)  $\sqrt[3]{500}$

c)  $\sqrt[3]{189}$

f)  $\sqrt[3]{40}$

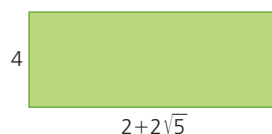
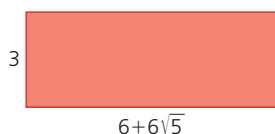
**11** Simplifica cada uma das expressões seguintes:

- a)**  $\sqrt{2} - 8\sqrt{6} - 4\sqrt{2} + 7\sqrt{6}$     **e)**  $5\pi\left(\frac{1}{\pi} - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)$     **i)**  $(\sqrt{8} - \sqrt{6})(\sqrt{3} - \sqrt{4})$   
**b)**  $\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{3}}{5} \times \sqrt{5}$     **f)**  $\frac{\sqrt{14} \times \sqrt{30}}{\sqrt{5} \times \sqrt{7}}$     **j)**  $\sqrt[3]{12} \times \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{3}}$   
**c)**  $\sqrt{7} - \frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{\sqrt{7}}{2}$     **g)**  $(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2$     **k)**  $(\sqrt[3]{2})^2 - \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^2}}$   
**d)**  $(\sqrt{3} + 2\sqrt{11}) \times \sqrt{11}$     **h)**  $(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7})$     **l)**  $\sqrt[3]{81} + 3\sqrt[3]{\frac{24}{27}}$

**12** Ao número  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  dá-se o nome de número de ouro; é um número famoso pela sua utilização em obras de arte, desde a Antiguidade. Mostra que é válida a seguinte relação:  $1 + \varphi = \varphi^2$ .

**13** Um retângulo diz-se retângulo de ouro, ou áureo, se a razão entre o lado maior e o lado menor é igual ao número de ouro,  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

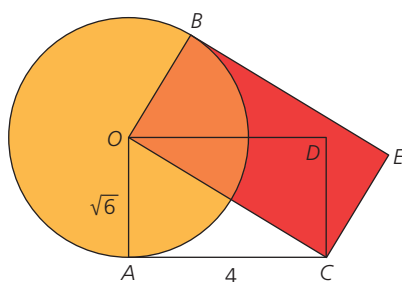
**13.1** Verifica se os retângulos seguintes são retângulos de ouro.



**13.2** Determina a medida do lado maior, do seguinte retângulo áureo, sabendo que o lado menor é  $\sqrt{2}$ .



**14** Sobre a figura seguinte, sabe-se que:



- os pontos A e B pertencem à circunferência de centro O;
- $[ODCA]$  e  $[BECO]$  são dois retângulos;
- $\overline{OA} = \sqrt{6}$  e  $\overline{AC} = 4$ .

Determina o valor exato:

- a)** da área do círculo de raio  $[OA]$ ;  
**b)** do perímetro do retângulo  $[BECO]$ ;  
**c)** da área do retângulo  $[BECO]$ .



- 15** Na figura ao lado, está representado o quadrado  $[ABCD]$ .

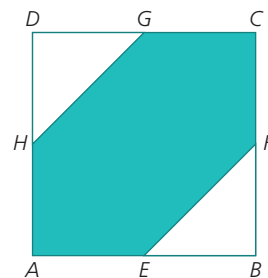
Sabe-se que:

- o lado do quadrado mede  $\sqrt{8}$  cm;
- $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$  são os pontos médios dos lados  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  e  $[DA]$ , respetivamente.

**15.1** Qual é a medida de  $[EF]$ ?

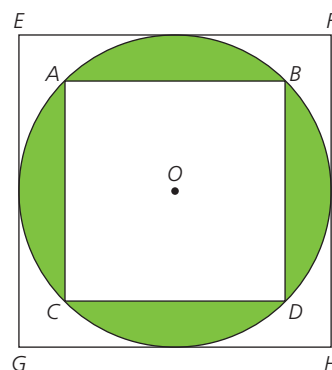
**15.2** Determina, na forma simplificada, o perímetro da região sombreada.

**15.3** Qual é a área da região sombreada?



Adaptado do Teste Intermédio de Matemática do 9.º ano, fevereiro de 2010.

- 16** Na figura seguinte, está representada uma circunferência de centro  $O$  e raio  $\sqrt{5}$  cm, na qual está inscrito o quadrado  $[ABDC]$ .



**16.1** Determina a medida do lado do quadrado  $[ABDC]$ .

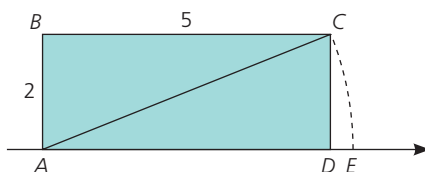
**16.2** Mostra que a área sombreada na figura é  $5\pi - 10$  cm<sup>2</sup>.

**16.3** Determina os valores exatos para o perímetro e área do quadrado  $[EFHG]$ .

- 17** Utiliza o método geométrico para obter aproximadamente o valor do produto  $1,8 \times 3,4$ , começando por marcar, numa reta numérica com unidade igual a 1 centímetro, os pontos 1,8 e 3,4 com auxílio de uma régua graduada.

- 18** Um número do tipo  $\sqrt{2}^n$  (com  $n \in \mathbb{N}$ ) é racional ou irracional? Justifica a tua resposta.

- 19** Na figura seguinte, está representado um retângulo  $[ABCD]$ . Os vértices  $A$  e  $D$  são pontos da reta real.



Sabe-se ainda que:

- o ponto  $E$  é um ponto da reta real;
- $\overline{AB} = 2$ ,  $\overline{BC} = 5$  e  $\overline{AE} = \overline{AC}$ ;
- a abcissa do ponto  $A$  é  $3 - \sqrt{29}$ .

Determina a abcissa de  $E$ .

Mostra como chegaste à tua resposta.

Adaptado do Teste Intermédio de Matemática do 9.º ano, fevereiro de 2011.

- 20** Prova que:

**a)**  $\sqrt{28} - 2\sqrt{7} = 0$

**b)**  $2\sqrt{27} - \sqrt{12} = 4\sqrt{3}$

**c)**  $5\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{2} = 13\sqrt[3]{2}$

## 4.3

# Relação de ordem em IR

### Tarefa 3



O Jaime preparou um sorteio para decidir a ordem pela qual os amigos desfilariam num cortejo que organizou. Os números sorteados foram:

$$\text{Zito: } 6,28311; \text{ Joana: } 6,245; \text{ Diogo: } \frac{377}{60}; \text{ Sofia: } \frac{6281}{1000}.$$

- 1 Se os amigos desfilarem por ordem crescente dos números que lhes foram atribuídos, qual é a ordem pela qual irão no desfile?
- 2 Selecciona, de entre os números anteriores, os que estão entre:
  - a) 6,2 e 6,3;
  - b) 6,28 e 6,29;
  - c) 6,283 e 6,284;
  - d) 6,2831 e 6,2832.

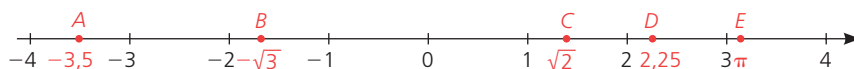
### Comparar e ordenar números reais

Vamos agora estender a ordenação dos números racionais a IR.

Um número real  $a$  é maior do que um número real  $b$  ( $a > b$ ) se o ponto de abscissa  $a$  pertence à semirreta de sentido positivo com origem no ponto de abscissa  $b$ , ou seja, se a semirreta de sentido positivo associada a  $a$  estiver contida na semirreta de sentido positivo associada a  $b$ .



Quando os números estão representados na reta real, estão por ordem crescente, da esquerda para a direita.



Escreve-se:  $-3,5 < -\sqrt{3} < \sqrt{2} < 2,25 < \pi$

### Propriedades da relação de ordem em IR

- Propriedade transitiva

Se  $a > b$  e  $b > c$ , então,  $a > c$  (com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ).



Se  $a > b$ , então, a semirreta, de sentido positivo, associada a  $a$  está contida na semirreta, de sentido positivo, associada a  $b$ .

Se  $b > c$ , então, a semirreta, de sentido positivo, associada a  $b$  está contida na semirreta, de sentido positivo, associada a  $c$ .

### Recorda

- O símbolo  $<$  significa «menor».
- O símbolo  $>$  significa «maior».
- Uma expressão do tipo  $a < b$  (ou  $a > b$ ) chama-se uma **desigualdade**.

PARA COMPARAR  $\sqrt{2}$  E  $\sqrt{5}$  NÃO PRECISO DE CALCULADORA: 2 É MENOR DO QUE 5, LOGO,  $\sqrt{2}$  É MENOR DO QUE  $\sqrt{5}$ .



Pode concluir-se que a semirreta, de sentido positivo, associada a  $a$  está contida na semirreta, de sentido positivo, associada a  $c$ , o que significa que  $a > c$ .

Exemplo:

Sabendo que  $\sqrt{10} > \frac{355}{113}$  e  $\frac{355}{113} > \pi$ , então, pode concluir-se que  $\sqrt{10} > \pi$ .

- Propriedade tricotómica

### Nota

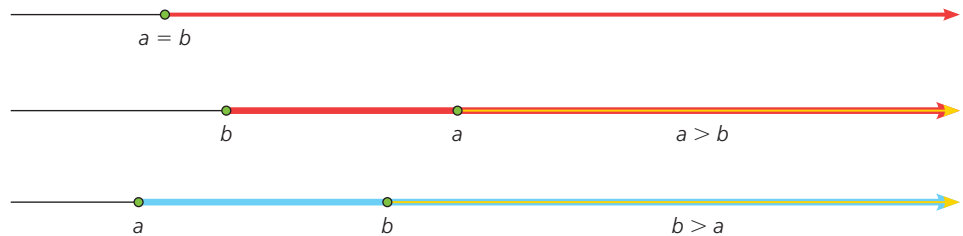
Também são usados em algumas situações os símbolos  $\leq$  e  $\geq$ , que significam, respetivamente, «menor ou igual» e «maior ou igual».

$$8 \geq 7; 6 \leq 6$$

Para quaisquer números reais  $a$  e  $b$ , verifica-se uma e uma só das relações:

$$a = b \text{ ou } a > b \text{ ou } b > a$$

Dados dois números reais  $a$  e  $b$ , os pontos dos quais são abcissas ou coincidem, ou a semirreta, de sentido positivo, associada a um dos pontos está contida na semirreta, de sentido positivo, associada ao outro ponto.



Para ordenar dois números reais positivos distintos, representados na forma de dízima, excluindo as dízimas de período «9», comparam-se sucessivamente os algarismos da maior para a menor ordem até se encontrar uma ordem em que as dízimas difiram; então, será maior o número para o qual o algarismo dessa ordem for maior.

Exemplos:

$$\frac{355}{113} = 3,14159292\dots$$

$$\sqrt{10} = 3,16227766\dots$$

$$\text{Logo, } \sqrt{10} > \frac{355}{113}$$

$$\frac{355}{113} = 3,14159292\dots$$

$$\pi = 3,14159265\dots$$

$$\text{Logo, } \frac{355}{113} > \pi$$

Repara que já usámos este processo para ordenar números racionais escritos na forma de dízima. Agora estendemo-lo às dízimas infinitas não periódicas.

### Exercícios resolvidos

1. Considera o número real  $a = 2,31311311131111\dots$ . A parte decimal de  $a$  foi construída usando os algarismos 1 e 3; começa-se com 3 e vai-se progressivamente aumentando o número de algarismos 1 entre cada ocorrência do algarismo 3.

$$a = 2,3131131113111131111311113\dots$$

Considera também os números  $b$  e  $c$  que são números racionais representados por dízimas infinitas

$$b = 2,31311311131111(3111113);$$

$$c = 2,313113111311113(111113)$$

Compara dois a dois os três números.

#### Resolução:

1. O número  $b$  é maior do que o número  $c$  porque ao comparar os sucessivos algarismos a partir do de maior ordem até se encontrar uma ordem em que as dízimas difiram, o algarismo dessa ordem do número  $b$  é maior do que o correspondente algarismo do número  $c$ .

$$b = 2,313113111311113111131111311113111131111311113\dots$$

$$c = 2,313113111311113111131111311113111131111311113\dots$$

Como  $3 > 1$ , então,  $b > c$ ;

O número  $c$  é maior do que o número  $a$ :

$$a = 2,313113111311113111131111311113111131111311113\dots$$

$$c = 2,313113111311113111131111311113111131111311113\dots$$

Como  $3 > 1$ , então,  $c > a$ .

Como  $b > c$  e  $c > a$ , então, pela propriedade transitiva,  $b > a$ .

2. Define uma dízima infinita periódica sabendo que tem o algarismo:

- das unidades igual ao algarismo das unidades de  $\sqrt{2}$ ;
- das décimas igual ao algarismo das décimas de  $\sqrt{3}$ ;
- das centésimas igual ao algarismo das centésimas de  $\sqrt{5}$ ;
- período de comprimento 3 com os algarismos 2, 3 e 0.

#### Resolução:

2. Tem-se que:

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356$$

$$\sqrt{3} \approx 1,7320508$$

$$\sqrt{5} \approx 2,236067977$$

O algarismo das unidades da dízima infinita periódica é 1, o algarismo das décimas é 7 e o algarismo das centésimas é 3. Como os algarismos do seu período são o 2, o 3 e o 0, uma possibilidade para a definir é  $1,7(320)$ .

### O que debes saber

- Comparar e ordenar números reais.

## Verificar a aprendizagem

### COMPARAR E ORDENAR NÚMEROS REAIS

- 1 Considera o conjunto:  $A = \left\{4; -\sqrt{5,29}; -\frac{1}{8}; \sqrt{3}; \frac{3}{10}; \sqrt{10}; \pi; \frac{4}{3}; -\sqrt{2}; -\frac{7}{5}\right\}$

1.1 Representa os números do conjunto  $A$  na reta real, com rigor aproximado.

1.2 Escreve os números do conjunto  $A$  por ordem crescente.

- 2 Copia e completa com  $<$  ou  $>$ , utilizando a calculadora quando necessário.

a)  $\frac{5}{9} \dots \frac{3}{19}$

d)  $\sqrt{6} \dots 2,449$

g)  $\frac{6}{5} \dots \frac{13}{10}$

b)  $\frac{56}{25} \dots \sqrt{5}$

e)  $\sqrt{2} \dots \frac{99}{70}$

h)  $\frac{\sqrt{5}}{2} \dots \frac{\sqrt{5}}{3}$

c)  $-\sqrt{72} \dots \sqrt{8}$

f)  $-\sqrt{11} \dots -\sqrt{13}$

i)  $-2,64576 \dots -\sqrt{7}$

- 3 Copia e completa as afirmações.

a) A Sofia pesa menos do que o Zito, ou seja, o Zito pesa ..... do que a Sofia.

b)  $x < 3 \Leftrightarrow 3 \dots x$

c) A Joana é mais baixa do que o Diogo e o Diogo é mais baixo do que a Rita, então, a Joana é ..... do que a Rita.

d) Se  $x < \pi$  e, por outro lado,  $\pi < \sqrt{12}$ , então, pode concluir-se que .....

### AUTOAVALIAÇÃO Sei comparar e ordenar números reais?

### VALORES APROXIMADOS

- 4 Escreve um valor aproximado:

a) arredondado às centésimas, de  $\sqrt{24}$ ;

e) por excesso, com erro inferior a 0,1, de  $\sqrt{5}$ ;

b) arredondado às milésimas, de  $\sqrt{13}$ ;

f) por defeito, com erro inferior a 0,01, de  $\sqrt{11}$ ;

c) às unidades, por defeito, de  $\sqrt{76}$ ;

g) por excesso, a menos de uma décima, de  $\sqrt{6}$ ;

d) às décimas, por excesso, de  $2\sqrt{3}$ ;

h) por defeito, a menos de uma centésima de  $\sqrt{2}$ .

- 5 Escreve em linguagem corrente:  $2,8 < \sqrt{8} < 2,9$ .

- 6 Escreve duas dízimas próximas de  $\sqrt{3}$  (uma maior e outra menor do que  $\sqrt{3}$ ) que difiram de  $\sqrt{3}$  menos do que uma:

a) unidade;

b) décima;

c) centésima;

d) milésima.

- 7 A D. Marta comprou  $x$  kg de tomates e  $y$  kg de batatas.

7.1 Sabendo que  $2,5 < x < 2,6$  e  $8,3 < y < 8,4$ , determina:

a) um valor aproximado mas superior ao peso das compras;

b) um valor aproximado mas inferior ao peso das compras.

7.2 Sabendo que os tomates custam  $p$  €/kg e que, segundo a variedade,  $1,45 < p < 1,55$ , determina:

a) um valor aproximado mas inferior ao custo dos tomates;

b) um valor aproximado mas superior ao custo dos tomates.



### AUTOAVALIAÇÃO Sei determinar valores aproximados de números reais?

## Aplicar

- 8 Através da quantidade de carbono-14 encontrado num artefacto, um arqueólogo concluiu que o objeto datava do ano de 1568, com uma margem de erro de quarenta anos.

Qual é o período de tempo no qual está compreendida a datação real do artefacto?

- 9 O piloto de um caça-bombardeiro *Dassault/Dornier Alpha Jet* levantou voo da Base Aérea de Beja, mas não registou algumas informações com exatidão. Sabe-se apenas que o voo durou entre 105 e 108 minutos, a uma velocidade média compreendida entre 900 km/h e 930 km/h.

Será que a distância percorrida teria permitido alcançar a Base Aérea das Lajes, a 1700 km de distância?

Justifica a tua resposta.



- 10 Num exercício, a Sofia e os amigos utilizaram diferentes aproximações do número  $\pi$ .

Joana: 3,1415; Zito:  $3\frac{16}{113}$ ; Rita:  $\sqrt{9,86}$ ; Jaime:  $\frac{22}{7}$

10.1 Escreve esses quatro valores por ordem decrescente.

10.2 Qual dos quatro amigos utilizou uma melhor aproximação do número  $\pi$ ?

10.3 A Sofia utilizou um valor aproximado de  $\pi$  superior ao do Zito. Esse valor é inferior ou superior ao da Joana?

10.4 Escreve duas dízimas próximas de  $\pi$  (uma maior e outra menor do que  $\pi$ ) que difiram de  $\pi$  menos de uma:

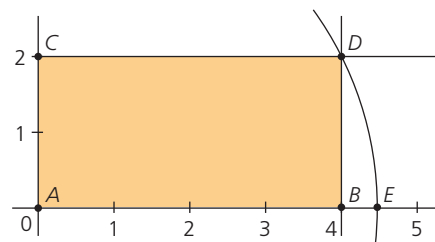
a) unidade;                      b) décima;                      c) centésima;                      d) milésima.

10.5 Escreve um valor aproximado, por defeito, a menos de uma milésima, do número  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ . Calcula um valor aproximado do erro cometido quando se escolhe  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  como valor aproximado de  $\pi$ .

## Tarefas de investigação

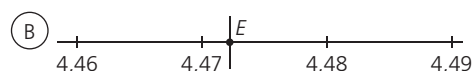
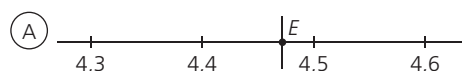
- 11 No GeoGebra, reproduz a figura seguinte:

- constrói o retângulo  $[CDBA]$ ;
- traça uma circunferência de centro  $A$  e que passe pelo ponto  $D$ ;
- marca o ponto  $E$  na interseção da circunferência com o eixo das abcissas.



11.1 Qual é o valor exato da abscissa do ponto  $E$ ?

11.2 Utilizando o botão «Ampliar», determina dízimas finitas próximas da abscissa de  $E$ , com erro inferior a uma décima (A), a uma centésima (B), a uma milésima, e assim sucessivamente.



11.3 Escolhe um número irracional e determina dízimas finitas aproximadas que difiram menos de 0,00001 em relação a esse número.

- 12 Usando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0 (exatamente por esta ordem e sem repetições), os parênteses que achares necessários, e as operações adição, subtração, multiplicação e divisão, tenta obter o resultado mais próximo possível de  $\sqrt{2}$ .



# As aproximações do número $\pi$

Representação  
de  $\pi$  na reta real

Por definição,  $\pi$  é o valor que se obtém sempre que se divide o perímetro de uma circunferência (independentemente do seu tamanho) pelo comprimento do seu diâmetro. Desde a Antiguidade, matemáticos profissionais e amadores tentaram calcular o valor de  $\pi$ , com cada vez mais precisão.

Os Babilônios utilizavam o valor  $3 \frac{1}{8}$  como aproximação de  $\pi$ .

Os Egípcios usavam implicitamente  $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ .

Na Bíblia, no Livro dos Reis, escrito cerca do século VI a. C., aparece uma aproximação de  $\pi$  com o número 3.

Arquimedes, no século III a. C. (ver página 44), descobriu um enquadramento de  $\pi$ , aproximando uma circunferência com polígonos inscritos e circunscritos:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

William Shanks, em 1873, utilizou uma soma infinita (série) para calcular  $\pi$  com 707 casas decimais, mas infelizmente enganou-se nas contas a partir da casa 527.

Durante muito tempo, os matemáticos acreditaram que todas as grandezas eram comensuráveis, o que se pode traduzir em linguagem moderna pela afirmação de que todos os números eram racionais, até ao dia em que descobriram a existência de  $\sqrt{2}$ .

**O número  $\pi$  é irracional.**

Foi apenas no século XVIII que os matemáticos Lambert e Legendre provaram, separadamente, que  $\pi$  é irracional, ou seja, que  $\pi$  é uma **dízima infinita não periódica**.

Sabe-se hoje que o perímetro de uma circunferência também **não é comensurável** com o seu diâmetro.

3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209  
749445923078164062862089986280348253421170679821480865132  
823066470938446095505822317253594081284811174502841027019  
385211055596446229489549303819644288109756659334461284756  
482337867831652712019091456485669234603486104543266482133  
936072602491412737245870066063155881748815209209628292540  
917153643678925903600113305305488204665213841469519415116  
094330572703657595919530921861173819326117931051185480744  
623799627495673518857527248912279381830119491...

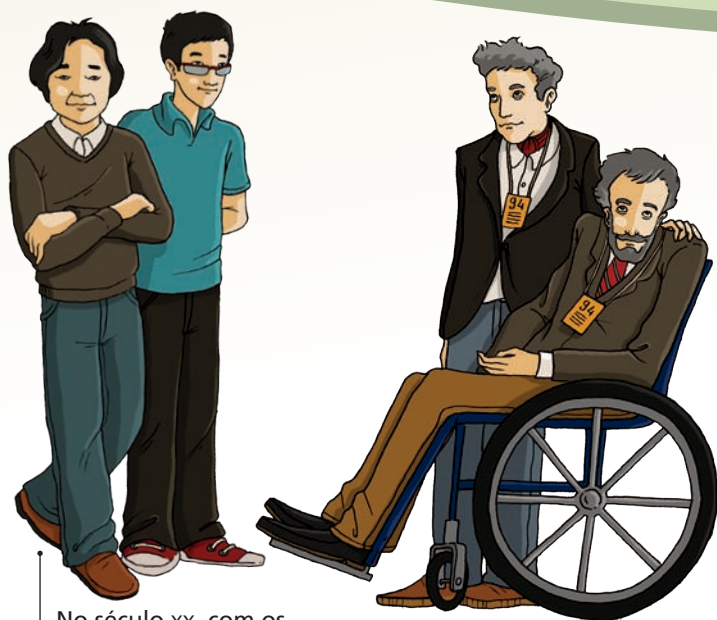
É possível representar  $\sqrt{2}$  na reta real, com rigor: constrói-se um triângulo retângulo cujos catetos medem 1 e transfere-se a medida da hipotenusa ( $\sqrt{2}$ ), com um compasso, para a reta real (ver página 142). Utilizando a espiral da tarefa 14 da página 146, podem representar-se, na reta real, todos os números irracionais que sejam a raiz quadrada de um número natural.

No entanto, está provado que **não é possível representar o número  $\pi$  na reta real, com rigor**, utilizando apenas uma régua e um compasso.

### Aplicações

Curiosamente, o número  $\pi$  aparece numa infinidade de contextos que nada têm que ver com circunferências, círculos ou esferas. Um deles está relacionado com o cálculo de probabilidades.

E que pensar da sua presença nas leis da Física e da Eletrodinâmica?



No século xx, com os computadores, passou-se de 620 algarismos, em 1946, para mais de 16 000 000, em 1982, em cálculos realizados pelos japoneses Yoshiaki Tamura e Yasumasa Kanada.

Em 1994, os irmãos russos Chudnovsky atingiram mais de 4 000 000 000 algarismos de  $\pi$ , mas, em outubro de 1995, Kanada recuperou o *record*, com 6 442 000 000 algarismos.



Em 1999, uma nova fórmula foi utilizada por Yasumasa Kanada e Daisuke Takahashi, tendo permitido ultrapassar os 206 000 000 000 algarismos.



No dia 2 de agosto de 2010, Shigeru Kondo (engenheiro) e Alexander Yee (programador) anunciaram um novo recorde, 5 000 000 000 000 algarismos, com um computador criado para o efeito.

### Sugestões de trabalho

1. Investiga o método de Arquimedes com este *applet*: <http://www.math.utah.edu/~alfeld/Archimedes/Archimedes.html>
2. Procura um número à tua escolha (data de nascimento, número de telemóvel, número de cartão de cidadão, etc.) no número  $\pi$ : <http://www.atractor.pt/fromPI/PIsearch.html>
3. Investiga se existe algum novo recorde no cálculo de  $\pi$ . <http://www.numberworld.org/digits/Pi/>
4. Comemora o dia do  $\pi$ : 14 de março, às 14 h 15 min 9 s.

## Síntese

### Os números reais

- Todo o número **racional** pode ser representado por uma **dízima finita** ou por uma **dízima infinita periódica** e, reciprocamente, toda a dízima finita ou infinita periódica representa um número racional.

**Exemplos:**  $6 = 6,0$ ;  $\frac{1}{8} = 0,125$ ;  $\frac{2}{3} = 0,(6)$ ;  $\frac{29}{22} = 1,3(18)$ .

- Um número **irracional** é todo o número que pode ser representado por uma **dízima infinita não periódica**.

**Exemplos:**  $\sqrt{2}$ ;  $-\sqrt{2}$ ;  $\pi$ ;  $\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{5}$ ;  $4,505500555000\dots$

- Quando o número natural  $n$  não é um quadrado perfeito,  $\sqrt{n}$  é um número irracional.
- Um **número real** é um número que ou é racional ou é irracional, ou seja, pode ser representado por uma dízima finita, uma dízima infinita periódica ou uma dízima infinita não periódica.
- O **conjunto dos números reais** representa-se por **IR**.
- O conjunto dos números naturais ( $\mathbb{N}$ ) está contido no conjunto dos números inteiros ( $\mathbb{Z}$ ), o qual está contido no conjunto dos números racionais ( $\mathbb{Q}$ ), que, por sua vez, está contido em  $\mathbb{R}$ .

Escreve-se:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irracionais}\}$

- A relação entre os vários conjuntos de números pode ser representada num diagrama como o que se apresenta abaixo:

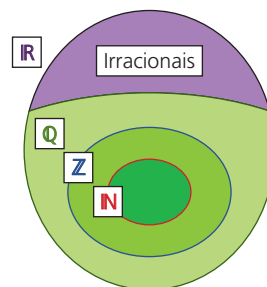
Nota: Não existe um símbolo para o conjunto dos números irracionais.

$\mathbb{R}^+$  representa o conjunto dos números reais positivos.

$\mathbb{R}^-$  representa o conjunto dos números reais negativos.

$\mathbb{R}_0^+$  representa o conjunto dos números reais não negativos.

$\mathbb{R}_0^-$  representa o conjunto dos números reais não positivos.



### Operações com números reais

As propriedades das operações e as regras de cálculo válidas no conjunto dos números racionais **mantêm-se válidas** no conjunto dos números reais.

- Propriedades da adição em  $\mathbb{R}$ :

| Para quaisquer números $a, b$ e $c \in \mathbb{R}$ |                             |
|----------------------------------------------------|-----------------------------|
| Propriedade comutativa                             | $a + b = b + a$             |
| Propriedade associativa                            | $a + (b + c) = (a + b) + c$ |
| Elemento neutro                                    | $a + 0 = 0 + a = a$         |
| Elemento simétrico                                 | $a + (-a) = (-a) + a = 0$   |

- Propriedades da multiplicação em  $\mathbb{R}$ :

| Para quaisquer números $a, b$ e $c \in \mathbb{R}$            |                                                                    |
|---------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| Propriedade comutativa                                        | $a \times b = b \times a$                                          |
| Propriedade associativa                                       | $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$                    |
| Elemento neutro                                               | $a \times 1 = 1 \times a = a$                                      |
| Elemento absorvente                                           | $a \times 0 = 0 \times a = 0$                                      |
| Elemento inverso                                              | $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$ , com $a \neq 0$ |
| Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição | $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$                       |

Exemplos:

- Adição:  $5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$   
 $2\sqrt[3]{5} + 5\sqrt[3]{5} = 7\sqrt[3]{5}$
- Subtração:  $2\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = -8\sqrt{3}$   
 $5\sqrt[3]{4} - 8\sqrt[3]{4} = -3\sqrt[3]{4}$
- Multiplicação:  $4\sqrt{5} \times 6\sqrt{7} = 4 \times 6 \times \sqrt{5} \times \sqrt{7} = 24 \times \sqrt{5 \times 7} = 24\sqrt{35}$   
 $2\sqrt[3]{3} \times 4\sqrt[3]{5} = 2 \times 4 \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5} = 8\sqrt[3]{3 \times 5} = 8\sqrt[3]{15}$
- Divisão:  $\frac{30\sqrt{24}}{6\sqrt{3}} = \frac{30}{6} \times \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = 5 \times \sqrt{\frac{24}{3}} = 5\sqrt{8}$   
 $\frac{8\sqrt[3]{12}}{2\sqrt[3]{3}} = \frac{8}{2} \times \frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}} = 4\sqrt[3]{\frac{12}{3}} = 4\sqrt[3]{4}$
- Potenciação:  $(4\sqrt{10})^2 = 4^2 \sqrt{10}^2 = 16 \times 10 = 160$   
 $(2\sqrt[3]{4})^3 = 2^3 \times \sqrt[3]{4}^3 = 8 \times 4 = 32$

### Relação de ordem em $\mathbb{R}$

- Para **comparar números reais**, sob a forma de dízima, comparam-se os algarismos da mesma ordem. Por exemplo:  $4,1382529... < 4,1382617...$ , porque  $5 < 6$ .
- Propriedades das relações  $<$  e  $>$  (para  $a, b \in \mathbb{R}$ ).
  - **Propriedade transitiva:**  
 Se  $a > b$  e  $b > c$ , então,  $a > c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ).
  - **Propriedade tricotômica:**  
 Para quaisquer números reais  $a$  e  $b$  verifica-se uma e uma só das relações:  
 $a = b$  ou  $a > b$  ou  $b > a$ .

## Atividades globais

### QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

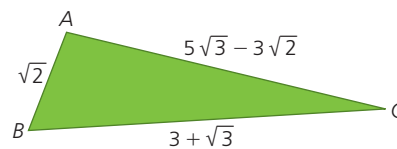
Das quatro alternativas, escolhe a única opção correta.

- 1 Qual das afirmações seguintes é verdadeira?
- A. Todo o número racional pode ser representado sob a forma de uma dízima finita.  
B. Todo o número inteiro é um número natural.  
C. A qualquer ponto da reta real corresponde um número racional.  
D. Qualquer número real ou é racional ou irracional.
- 2 Qual das opções seguintes apresenta dois números irracionais?
- A.  $\sqrt{64}$  e  $\sqrt[3]{64}$ .      B.  $\sqrt{8}$  e  $\sqrt[3]{8}$ .      C.  $\sqrt{3}$  e  $\sqrt[3]{3}$ .      D.  $\sqrt[3]{0,81}$  e  $\sqrt{0,81}$ .
- 3 Quais são os números do conjunto  $A = \left\{-8, -\sqrt{27}, \frac{3}{7}, \pi, \sqrt{81}\right\}$  que são irracionais?
- A.  $-\sqrt{27}$  e  $\pi$       B.  $\pi$  e  $\sqrt{81}$       C.  $-\sqrt{27}$  e  $\sqrt{81}$       D.  $\frac{3}{7}$  e  $\sqrt{81}$

Exame Nacional de Matemática, 9.º ano, 1.ª chamada, 2009

- 4 Qual é o valor exato do perímetro do triângulo  $[ABC]$ ?

A.  $5 + \sqrt{5}$       C.  $6\sqrt{3}$   
B.  $-2\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 3$       D. 10,56



- 5 Qual dos números seguintes é o maior?

A.  $\sqrt{29}$       B.  $\frac{70}{13}$       C. 5,385(1)      D.  $3\frac{19}{50}$

- 6 Quais são os dois números inteiros mais próximos de  $-\sqrt{50}$ ?

A. 7 e 8.      B. -7 e -6.      C. -7,1 e -7,0.      D. -8 e -7.

- 7 Uma das aves que podem ser vistas no Parque Natural da ria Formosa, no Algarve, é a garça-pequena. O seu peso,  $P$  (em gramas), é tal que  $350 < P < 550$ .

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

A.  $P < 500$       C.  $300 < P < 600$   
B.  $P > 400$       D.  $360 < P < 540$



- 8 A qual dos conjuntos seguintes pertence o número 6?

A.  $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 6\}$       C.  $\{x \in \mathbb{R} : 6,1 \leq x \leq 6,2\}$   
B.  $\{x \in \mathbb{R} : x > \sqrt{30}\}$       D.  $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 5\}$

### EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

- 9 Considera o conjunto  $A: A = \left\{-\sqrt{0,64}; -\frac{7}{6}; 3\sqrt{8}; \frac{7}{10}; \sqrt{8}; -\frac{8}{7}; \frac{127}{45}\right\}$

9.1 Quais dos números do conjunto  $A$  podem ser representados por dízimas finitas?

9.2 Indica os números do conjunto  $A$  que são irracionais.

**9.3** Simplifica as expressões seguintes:

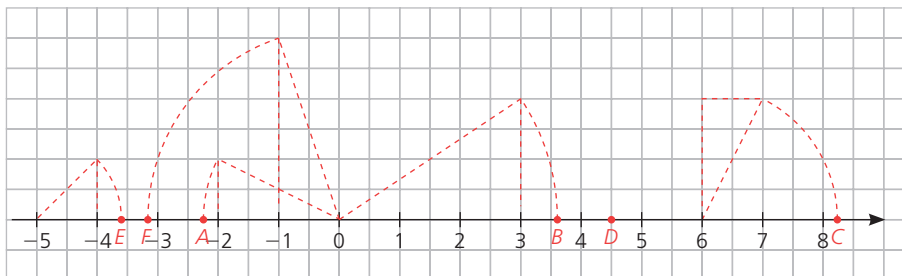
**a)**  $\sqrt{8} - 3\sqrt{8}$       **b)**  $\sqrt{8} \times 3\sqrt{8}$

**9.4** Escreve os números do conjunto  $A$  por ordem crescente.

**9.5** Escreve duas dízimas finitas aproximadas de  $\sqrt{8}$ , uma inferior e outra superior a  $\sqrt{8}$ , que difiram menos do que uma centésima de  $\sqrt{8}$ .

**9.6** Indica todos os números inteiros que pertencem ao conjunto  $\left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{7}{6} < x < \sqrt{8}\right\}$ .

- 10** Na figura seguinte, estão representados os pontos  $A, B, C, D, E$  e  $F$ . Indica as suas abcissas e apresenta os cálculos que efetuares.



- 11** Representa na reta real os números:

$A \rightarrow -2 + \sqrt{2}$      $B \rightarrow 3 + \sqrt{5}$      $C \rightarrow -\sqrt{9}$      $D \rightarrow \sqrt{\frac{1}{4}}$      $E \rightarrow \sqrt{20}$

- 12** Considera os seguintes números reais:

$$\sqrt{\frac{1}{25}}; \sqrt{0,25}; \frac{1}{25}; \sqrt{2,5}$$

**12.1** Apenas um é um número irracional. Identifica-o e justifica a tua resposta.

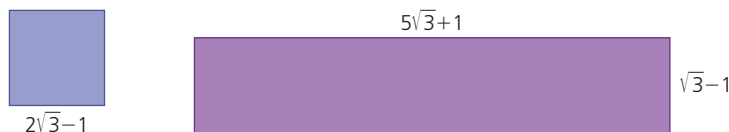
**12.2** Que características tem de ter um número natural para que a sua raiz quadrada seja um número racional?

- 13** Classifica as condições seguintes como verdadeiras ou falsas. Justifica a tua classificação.

**A.**  $-(\sqrt{5})^3 = (-\sqrt{5})^3$       **C.**  $-(\sqrt[3]{2})^4 = (-\sqrt[3]{2})^4$       **E.**  $(\sqrt[3]{-8})^2 = (-\sqrt[3]{8})^2$

**B.**  $-(\sqrt{3})^4 = (-\sqrt{3})^4$       **D.**  $-(\sqrt[3]{12})^5 = (-\sqrt[3]{12})^5$

- 14** Na figura seguinte, estão representados um quadrado e um retângulo.



Verifica se o quadrado e o retângulo são figuras equivalentes, ou seja, se têm a mesma área.

- 15** Quais são os números compreendidos entre  $\sqrt{5}$  e  $\sqrt{7}$  cuja dízima tem só uma casa decimal?

- 16** Indica os números inteiros mais próximos, um menor e outro maior, de:

**a)**  $-\sqrt{20}$       **b)**  $\frac{48}{5}$       **c)**  $\pi - 2$       **d)**  $-2,751$

- 17** Sem utilizares a calculadora, indica os números inteiros  $n$  que verificam cada condição:

**a)**  $\sqrt{6} < n < \sqrt{40}$       **b)**  $\sqrt[3]{7} < n < \sqrt[3]{30}$



## Atividades globais

- 18** A diagonal de um quadrado é igual a  $\sqrt{24}$  cm.



**18.1** Qual é o comprimento do lado do quadrado?

**18.2** Determina a área e o perímetro do quadrado.

**18.3** Escreve duas dízimas finitas aproximadas, uma inferior e outra superior que difiram menos do que  $10^{-3}$  de:

- a)**  $2\sqrt{24}$       **b)**  $2 + \sqrt{24}$       **c)**  $\sqrt{24} + 2\sqrt{24}$

- 19** Sabe-se que  $\sqrt{7} < \frac{8}{3}$ . Refere a relação que existe entre:

- a)**  $\sqrt{7} + 1$  e  $\frac{8}{3} + 1$ ;      **b)**  $2\sqrt{7}$  e  $\frac{16}{3}$ ;      **c)**  $-\sqrt{7}$  e  $-\frac{8}{3}$ ;      **d)**  $\sqrt{7} - \frac{1}{3}$  e  $\frac{7}{3}$ .

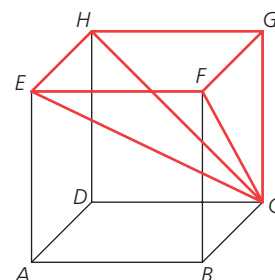
- 20** O Zito resolveu pedir ajuda à Rita num trabalho de casa que tinha. Era necessário que esta o ajudasse a responder corretamente às seguintes questões:

**a)** Se  $x < y$  e  $y < 3$ , que relação existe entre  $x$  e 3?

**b)** Se  $a > b$ , que relação existe entre  $-2a$  e  $-2b$ ?

**c)** Se  $x < y$ , que relação existe entre  $\sqrt{3x}$  e  $\sqrt{3y}$ ?

- 21** Considera o cubo  $[ABCDEFGH]$ , de aresta 4 cm, e a pirâmide  $[EFGHC]$ , representados na figura ao lado. Mostra que o comprimento de todas as arestas da pirâmide é:
- $$c = 20 + 8\sqrt{2} + 4\sqrt{3} \text{ cm}$$



- 22** Na figura ao lado está representado um paralelepípedo retângulo.

Sabe-se que:  $\overline{AE} = 2$  cm,  $\overline{FG} = 3$  cm e  $\overline{EF} = 4$  cm

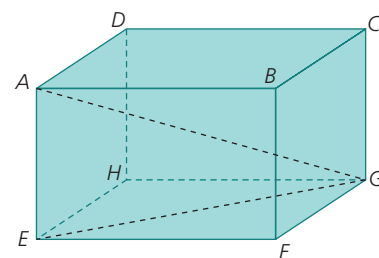
**22.1** Determina a medida do comprimento do segmento de reta  $EG$ .

**22.2** Determina a medida do comprimento do segmento de reta  $AG$ .

**22.3** Determina o perímetro, em valor exato, do triângulo  $[AEG]$ .

**22.4** O quadrilátero  $[EDCF]$  é um retângulo. Determina o valor exato da área desse retângulo.

**22.5** Determina uma dízima finita que difira menos de uma centésima de centímetro do perímetro do quadrilátero  $[EDCF]$ .

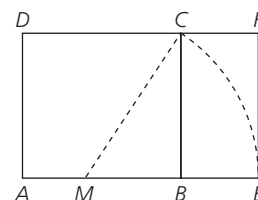


## Tarefas

- 23** Na figura seguinte estão representados um quadrado  $[ABCD]$  e um retângulo  $[AEFD]$ .

Sabe-se que:

- o lado do quadrado mede 2 cm;
- $M$  é o ponto médio do lado  $[AB]$ ;
- o arco  $CE$  é um arco de circunferência de centro em  $M$ .



**23.1** Determina o valor exato de:

- a)**  $\overline{MC}$       **b)**  $\overline{AE}$

**23.2** Verifica se o retângulo  $[AEFD]$  é um retângulo de ouro, ou seja, se  $\frac{\overline{AE}}{\overline{EF}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  (número de ouro).

**23.3** Determina o perímetro e a área do retângulo  $[AEFD]$

**23.4** Investiga se todos os retângulos obtidos através deste processo são retângulos de ouro.





## CANGURU MATEMÁTICO SEM FRONTEIRAS

- 24** Existem 50 tijolos de cor branca, azul e vermelha numa caixa e cada tijolo só tem uma cor. O número de tijolos brancos é onze vezes o número de tijolos azuis. Há menos tijolos vermelhos do que brancos, mas há mais tijolos vermelhos do que azuis.

Quantos tijolos vermelhos existem a menos do que tijolos brancos?

- A. 2                      B. 11                      C. 19                      D. 22                      E. 30

Prova Cadete, 2010



## OLIMPIADAS CONCELHIAS DO ALGARVE EM MATEMÁTICA

- 25** A Ana começou a descer uma escada de 96 degraus no mesmo instante em que a Beatriz começou a subi-la. A Ana tinha descido 72 degraus quando se cruzou com a Beatriz.

No momento em que a Ana terminou de descer, quantos degraus ainda faltam à Beatriz para acabar de subir a escada?

- A. 24                      B. 36                      C. 48                      D. 64                      E. 72

VII Olimpíadas, Prova de Apuramento



## OLIMPIADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

- 26** O João escolheu 5 números do conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  e disse o respetivo produto à Maria. A Maria disse que, com esta informação, não poderia dizer se a soma dos números escolhidos pelo João era par ou ímpar.

Qual foi o produto calculado pelo João?

XXVIII OPM, 2.ª Eliminatória

## CONVIVER COM A MATEMÁTICA

- 27** As tarifas postais na Zedelândia dependem do peso dos artigos a enviar (arredondado ao grama mais próximo), como indica o quadro seguinte.

| Peso dos artigos a enviar | Tarifa     |
|---------------------------|------------|
| Até 20 g                  | 0,46 zedes |
| 21 g-50 g                 | 0,69 zedes |
| 51 g-100 g                | 1,02 zedes |
| 101 g-200 g               | 1,75 zedes |
| 201 g-350 g               | 2,13 zedes |
| 351 g-500 g               | 2,44 zedes |
| 501 g-1000 g              | 3,20 zedes |
| 1001 g-2000 g             | 4,27 zedes |
| 2001 g-3000 g             | 5,03 zedes |

O João quer enviar a um amigo dois artigos, que pesam, respetivamente, 40 g e 80 g. De acordo com as tarifas postais zedelandesas, determina se é mais barato enviar os dois artigos sob a forma de um envio único ou de dois envios separados.

Justifica a tua resposta.

## AUTOAVALIAÇÃO

- Identifica claramente, na tua folha de respostas, os números dos itens a que respondes. Apresenta uma única resposta para cada item.
- O teste inclui três itens de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correta. Não apresentes cálculos nem justificações.

Pág. 138

- 1** Qual dos números seguintes pode ser representado sob a forma de uma dízima infinita não periódica?

**A.**  $\frac{6}{5}$       **B.**  $\sqrt{109}$       **C.**  $\frac{5}{6}$       **D.**  $\sqrt{1,69}$

Págs. 138 e 140

- 2** Prova que a conjectura seguinte é falsa:  
«Sempre que  $\frac{a}{b}$  corresponde a uma dízima infinita periódica, então,  $\frac{b}{a}$  corresponde a uma dízima finita (em que  $a$  e  $b$  são números inteiros).»

- 3** Considera o conjunto:

$$A = \left\{ -\frac{21}{7}; -\sqrt{2}; \sqrt[3]{1,728}; -\frac{3}{5}; \sqrt{16} \right\}$$

- 3.1** Identifica os números do conjunto  $A$  que são:

**a)** inteiros;    **b)** racionais;    **c)** irracionais;    **d)** reais.

- 3.2** Representa na reta real, com rigor, o número  $-\sqrt{2}$ .

- 3.3** Qual dos números do conjunto  $A$  está mais próximo de  $-1$ ?

Pág. 140

Pág. 142

Págs. 155 e 156

Págs. 155 e 156

- 4** Qual dos números seguintes é o maior?

**A.** 3,6      **B.**  $\sqrt{13}$       **C.** 3,60(5)      **D.**  $\sqrt[3]{46}$

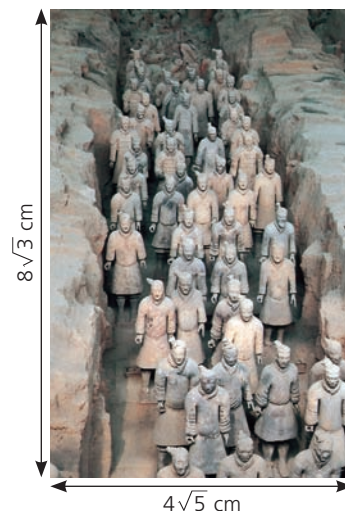
- 5** Simplifica cada uma das expressões seguintes.

**a)**  $2\pi - 7\pi + 4\pi$       **c)**  $\frac{\sqrt{2} \times (-8\sqrt{15}) \times \sqrt{2}}{-2\sqrt{5}}$   
**b)**  $\sqrt{6} \times \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{5} \right)$       **d)**  $(3 + \sqrt{7})^2$

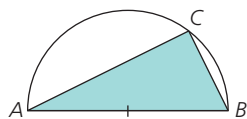
Págs. 148, 155 e 156

- 6** Em relação à fotografia dos Guerreiros de Terracota (China). Determina:

- a)** o valor exato do perímetro;  
**b)** uma dízima finita próxima do valor do perímetro que difira menos de uma centésima deste e que lhe seja superior;  
**c)** o valor exato da área;  
**d)** duas dízimas finitas aproximadas do valor da área, (uma inferior e outra superior a essa área) que difiram menos do que uma centésima desse valor.



- 7** Na figura seguinte, o triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $C$ , sabe-se que  $\overline{AD} = \overline{DB} = \sqrt{17}$  cm e que  $\overline{AC} = 5\sqrt{2}$  cm, sendo  $D$  o centro da circunferência.



**7.1** Determina:

- a)** o perímetro do triângulo  $[ABC]$ ;  
**b)** a área do triângulo  $[ABC]$ .

**7.2** Considera um cubo e um prisma triangular com igual volume. O prisma triangular tem 18 cm de altura e as bases são geometricamente iguais ao triângulo  $[ABC]$ .

Mostra que a aresta do cubo pode ser dada por  $3\sqrt[3]{10}$  cm.

- 8** Mostra que  $\sqrt{50}$  é um número irracional.

- 9** Utiliza o método geométrico para obter aproximadamente o valor do produto  $-1,2 \times \sqrt{11}$ , começando por marcar, numa reta numérica com unidade igual a 1 centímetro, os pontos  $-1,2$  com auxílio de uma régua graduada e  $\sqrt{11}$ , recorrendo a uma construção geométrica, com rigor.

- 10** Um criador tem três cavalos e cada um come  $q$  kg de ração por dia. Analisando os meses anteriores, o criador sabe que  $4,7 \leq q \leq 4,8$ . Sabe ainda que a ração é vendida em sacos de 40 kg que custam entre 14,50 € e 14,65 €.

Qual é a despesa máxima que o criador prevê para o mês de março?

Apresenta os cálculos que efetuares.



- 11** Seja  $a$  o número real de parte inteira igual a 0 e parte decimal dada por uma sucessão envolvendo apenas os algarismos 5 e 0, começando por 5 e inserindo-se sucessivamente entre cada duas ocorrências do algarismo 5 um número de ocorrências do algarismo 0, começando em 1 e sucessivamente acrescentando uma unidade (ou seja:  $a = 0,505005000500005\dots$ ).

**11.1** Será  $a$  um número racional? Porquê?

**11.2** Compara  $a$  com o número  $b = 0,505005000500005(00005)$ .

Págs. 148 e 149

Págs. 148 e 149

Pág. 141

Págs. 143 e 150

Págs. 155 e 156

Págs. 155 e 156

#### GRELHA DE AVALIAÇÃO

| Exercício                     | 1 | 2 | 3.1 | 3.2 | 3.3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8 | 9  | 10 | 11 |
|-------------------------------|---|---|-----|-----|-----|---|----|----|----|---|----|----|----|
| Cotação <sup>1</sup> (pontos) | 4 | 4 | 8   | 4   | 4   | 4 | 12 | 12 | 18 | 8 | 10 | 4  | 8  |

<sup>1</sup> Para saberes a cotação de cada alínea, basta dividires a cotação do exercício pelo número de alíneas.

# Retrato de um matemático

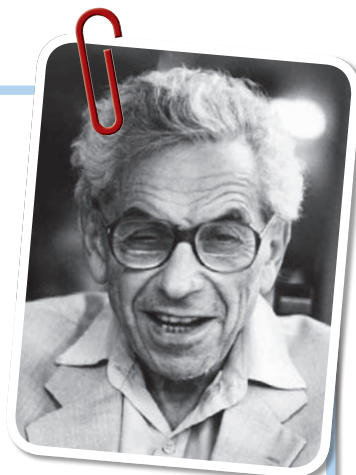
## Paul Erdős

### Vida

Paul Erdős nasceu em Budapeste (Hungria), em 1913, filho de professores de Matemática. O seu interesse pelos números começou muito cedo: aos 3 anos, por exemplo, conseguia multiplicar, de cabeça, números de três algarismos.

Toda a vida de Erdős foi dedicada à Matemática. Não tinha casa. Passava o tempo saltitando de uma conferência para outra. Foi o segundo matemático mais produtivo de todos os tempos (a seguir a Euler): deixou mais de 1500 artigos publicados e milhares de «teoremas de Erdős»!

O *Mago de Budapeste*, como era conhecido, morreu em 1996. Costumava dizer que «se fizermos uma grande descoberta matemática, seremos recordados depois de todos os outros terem sido esquecidos».



## A paixão pelos problemas

Erdős destacou-se num ramo da Matemática conhecido por teoria dos números, mas também contribuiu para as probabilidades, para a teoria de grafos, para a teoria de conjuntos e para a Geometria.

O matemático de Budapeste tinha uma capacidade extraordinária para resolver problemas. Era capaz de apresentar uma solução de duas linhas, quando outros matemáticos ocupavam trinta páginas. Erdős é lembrado por ter solucionado alguns problemas famosos, mas é ainda mais recordado pelos que colocou. O dinheiro que ganhava, por participar em conferências, era convertido em prémios para jovens matemáticos que resolvessem os problemas que ele próprio inventava.

## Os números de Erdős

Erdős adorava partilhar ideias e escrever artigos com outros matemáticos. Quando chegava a uma cidade, costumava contactar um colega matemático e dizer-lhe «o meu cérebro chegou». Para ele, todo o tempo devia ser dedicado à Matemática. Chegava a trabalhar 19 horas por dia.

Para homenagear essas colaborações, foram criados os números de Erdős: se um matemático publicou um artigo com Erdős, então, diz-se que tem o número de Erdős 1; se publicou um artigo com alguém que publicou um artigo com Erdős, então, tem o número 2; e assim sucessivamente.

Pesquisa mais informações sobre Paul Erdős:

- Vida e obra: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/erdos/mainfrm.html>
- The Erdos Number Project: <http://www.oakland.edu/enp>
- Livro: Hoffman, Paul, *O Homem Que só Gostava de Números*, Gradiva, 2000.

# Problemas famosos

## A irracionalidade de $\sqrt{2}$

Certo dia, Hípaso de Metaponto, um matemático da Escola Pitagórica, descobriu que a diagonal de um quadrado de lado 1 não era comensurável com o lado do quadrado, o que significa que  $\sqrt{2}$  é irracional.

A lenda conta que a descoberta foi muito mal recebida pelos pitagóricos, que fizeram tudo para escondê-la (diz-se que Hipaso de Metaponto foi afogado).

Como se pode ter a certeza de que não existe nenhuma fração que seja igual a  $\sqrt{2}$ ?



Aristóteles (384-322 a. C.) sugeriu uma demonstração, que viria a ser famosa, de que o número  $\sqrt{2}$  é irracional, ou seja, não pode ser escrito sob a forma de uma fração. Essa demonstração utiliza um raciocínio conhecido por «redução ao absurdo».

1. Se o número  $\sqrt{2}$  fosse racional, então, poderia ser escrito sob a forma de uma fração irredutível, ou seja, ter-se-ia  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ , em que  $a$  e  $b$  seriam dois números naturais **sem divisores em comum** (para garantir que a fração é irredutível).
2. Elevando  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  ao quadrado, daria  $2 = \frac{a^2}{b^2}$ , ou, ainda,  $2b^2 = a^2$ .
3. Uma vez que o termo da esquerda,  $2b^2$ , é par (porque é múltiplo de 2), o termo da direita,  $a^2$ , também teria de ser par. Ora, isso só seria possível se o próprio  **$a$  fosse par** (Nota: um número ímpar ao quadrado dá sempre um número ímpar; um número par ao quadrado dá sempre um número par).
4. Se  $a$  fosse par, poderia ser escrito na forma  $a = 2n$ , em que  $n$  é um número natural.

Obter-se-ia:

$$2b^2 = a^2 \Leftrightarrow 2b^2 = (2n)^2 \Leftrightarrow 2b^2 = 4n^2$$

Dividindo por 2, ter-se-ia:  $b^2 = 2n^2$ .

5. Uma vez que  $2n^2$  é par, também  $b^2$  teria de ser par, o que implicaria que o próprio  **$b$  fosse par**.
6. Chegou-se assim à conclusão de que  $a$  e  $b$  teriam de ser pares, o que não faz sentido, visto que se considerou, desde o início, que  $a$  e  $b$  não tinham divisores em comum (se fossem pares, seriam ambos divisíveis por 2).
7. Esta contradição demonstra a impossibilidade de  $\sqrt{2}$  ser racional, **portanto,  $\sqrt{2}$  é irracional**.

### Sugestão de trabalho

Por redução ao absurdo, demonstra que  $\sqrt{6}$  é irracional.

# Investigar

## Aproximações de $\sqrt{2}$

1. Considera a seguinte sequência de frações:

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \dots$$

- a) Utilizando a calculadora, escreve cada um dos termos sob a forma de dízima.  
b) No caso das dízimas infinitas periódicas, determina o período.

**NOTA:** Quando a calculadora não permite identificar o período, recorre a um *software* de cálculo.

1. Faz o *download* do programa Derive (versão de 30 dias):

<http://derive.en.softonic.com>

2. Escreve a fração na linha de entrada e carrega em Enter.



3. No separador Simplify, seleciona a opção Approximate. Abre-se uma nova janela. Escolhe o número de casas decimais que queres observar e carrega em Approximate.

- c) Copia e completa:

| Termo da sequência                   | 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{7}{5}$ | $\frac{17}{12}$ | $\frac{41}{29}$ | $\frac{99}{70}$ | $\frac{239}{169}$ | $\frac{577}{408}$ |
|--------------------------------------|---|---------------|---------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|-------------------|
| Diferença entre $\sqrt{2}$ e o termo |   |               |               |                 |                 |                 |                   |                   |

- d) Justifica que os termos da sequência se aproximam de  $\sqrt{2}$ .  
e) Mostra que a sequência pode ser dividida em duas sequências: uma que se aproxima de  $\sqrt{2}$  por defeito e outra que se aproxima por excesso.  
f) Qual é o termo seguinte da sequência?  
Explica o teu raciocínio.

2. O Método Babilónico é um método que permite obter uma aproximação da raiz quadrada de 2:

- 1.º Escolhe-se um número natural qualquer,  $n$ , e calcula-se a média entre  $n$  e  $\frac{2}{n}$ ;  
2.º O resultado obtido passa a ser o novo valor de  $n$  e, com ele, repete-se o cálculo anterior. Cada número assim obtido é uma melhor aproximação de  $\sqrt{2}$ .

Implementa o Método Babilónico com uma folha de cálculo:

- Na célula A1, escreve um número natural.  
— Preenche B1, C1 e A2 de acordo com as instruções ao lado.  
— Arrasta as células A2, B1 e C1 para baixo.

|   | A     | B       | C            |
|---|-------|---------|--------------|
| 1 |       | $=2/A1$ | $=(A1+B1)/2$ |
| 2 | $=C1$ |         |              |

**NOTA:** Para aumentar o número de casas decimais, clica em .

3. Investiga outros métodos para obter aproximações da raiz quadrada de 2.



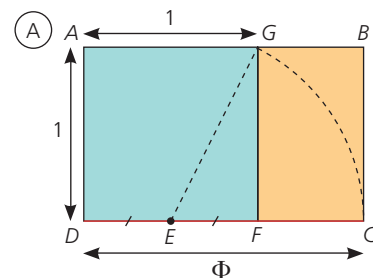
## Os números irracionais na Geometria

À semelhança do número  $\sqrt{2}$ , que está presente na diagonal do quadrado de lado igual a 1, os números irracionais aparecem frequentemente em figuras geométricas. Foi assim que os pitagóricos descobriram aquele que viria a ser um dos números irracionais mais famosos (com  $\pi$ ): o «número de ouro»,  $\Phi$  (fi).

O valor do número de ouro é:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989...$$

O número  $\Phi$  aparece no conhecido «retângulo de ouro» (A), mas também está presente em qualquer pentágono regular.



### Sugestões de trabalho

1. Na figura A, prova que:  $\overline{DC} = \Phi$ .
2. Num ambiente de Geometria Dinâmica, constrói um pentágono regular e as suas diagonais. Irá aparecer um pequeno pentágono dentro do primeiro.
  - 2.1 Em relação ao pentágono inicial, investiga a razão entre o comprimento de uma diagonal e o comprimento de um lado.
  - 2.2 Investiga a razão entre o comprimento do lado do pentágono inicial e o comprimento do lado do pequeno pentágono.
3. Mostra que o número  $\sqrt{3}$  está presente no triângulo equilátero de lado igual a 2 e, com esse conhecimento, representa  $\sqrt{3}$  na reta real, com rigor.

## Dramatização sobre números

### Sugestão de trabalho

Em grupo, escrevam uma história dando vida a todos os tipos de números que estudaram até agora (números primos, quadrados perfeitos, números negativos, fracionários, irracionais, etc.) e procedam à sua dramatização. As características de cada número (aspecto físico, personalidade, comportamento, etc.) poderão estar relacionadas com o tipo de número e as suas propriedades matemáticas.



## Páginas de Internet

- Números reais: <http://matematica.no.sapo.pt/nconcreto.htm>
- Atividades: <http://matoumatheux.ac-rennes.fr/Anglais/accueilniveaux/accueilCalcul.htm>

# SOLUÇÕES

## 0 REVISÃO DO 7.º ANO

Págs. 10 a 25

### FICHA DE DIAGNÓSTICO

Pág. 24

1. a)  $-\frac{11}{18}$   
b)  $\frac{2}{7}$   
c) 30  
d) -4
2. Positivo porque o expoente (300) é par.
3. 3.1 13  
3.2 Adicionar 3 ao termo anterior.  
3.3  $3n + 1$  estrelas
4. 4.1 5  
4.2 50 não é termo da sucessão.
5. A
6. 6.1 a)  $A(5; 4)$   
b)  $B(0; 2)$   
6.2 Todos os pontos teriam de estar sobre uma reta que passasse pela origem do referencial.
7. a) C. S. =  $\{-4\}$   
b) C. S. =  $\{-20\}$   
c) C. S. =  $\left\{-\frac{1}{11}\right\}$
8. C
9. Ao todo, jogaram 295 minutos. Um deles jogou 15 minutos e cada um dos outros jogou 70 minutos.
10. 10.1 Ao cuidado do aluno.  
10.2 O comprimento é 16 cm.
11. D
12. 12.1 São semelhantes pelo critério AA.  
( $\hat{C} = \hat{E} = 90^\circ$  e  $\hat{B}\hat{A}\hat{C} = \hat{D}\hat{A}\hat{E}$ ).  
12.2 1,8 m

## 1 TEOREMA DE PITÁGORAS

Págs. 26 a 51

### Atividades iniciais

Pág. 27

1. A — Triângulo escaleno e acutângulo.  
B — Triângulo equilátero e acutângulo.  
C — Triângulo isósceles e acutângulo.  
D — Triângulo escaleno e retângulo.  
E — Triângulo isósceles e obtusângulo.  
F — Triângulo isósceles e retângulo.  
G — Triângulo isósceles e obtusângulo.  
H — Triângulo equilátero e acutângulo.
2. 2.1 Tem dois, o ângulo A e o ângulo C.  
2.2 É o lado [AC].  
2.3 Os catetos são [AB] e [BC].  
2.4 É o lado [AC].
3. 4 m
4. 6 m

## 1.1 Decomposição de um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa

Pág. 28

### Tarefa 1:

1. A Sofia deve cortar o bolo pela altura do triângulo relativa à hipotenusa.
2. As duas fatias que se obtêm são triângulos semelhantes.
3. A fatia inicial e as duas fatias que se obtêm depois do corte que a Sofia fez são triângulos semelhantes entre si.

### Verificar a aprendizagem

Pág. 30

1. a) [BC]  
b) [AB]  
c) [AC]; [BH]
2. 2.1 Ao cuidado do aluno.  
2.2 Os três triângulos são semelhantes. Pelo critério de semelhança AA  
 $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{B}\hat{H}\hat{C} = \hat{A}\hat{H}\hat{B} = 90^\circ$  e  $\hat{A}\hat{C}\hat{B} = \hat{B}\hat{C}\hat{H} = \hat{A}\hat{B}\hat{H}$ ,  
os três triângulos são semelhantes.
3. 3.1 Os triângulos [AHB] e [BHC] são semelhantes, logo, os comprimentos de lados correspondentes são diretamente proporcionais:

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{HC}} \Leftrightarrow \frac{3,2}{x} = \frac{x}{5}$$

$$3,2 \cdot x = 4$$

4. a) 54 m<sup>2</sup>  
b) 60 cm

### Aplicar

Pág. 31

5. a) 2,8  
b) 2,0  
c) 3,1  
d) 4  
e) 3  
f) 3
6. 60 cm
7.  $\frac{5}{2} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = 0,8$   
A 0,8 metros do ponto B.

## 1.2 Teorema de Pitágoras

Pág. 32

### Tarefa 2:

1. Ao cuidado do aluno.
2. Ao cuidado do aluno.
3. A soma é igual ao quadrado da hipotenusa.
4. A relação mantém-se.
5. Num triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

### Verificar a aprendizagem

Pág. 34

1. a) Hipotenusa: [AC]; cateto maior: [BC]; cateto menor: [AB].  
b) Hipotenusa: [DF]; cateto maior: [DE]; cateto menor: [EF].  
c) Hipotenusa: [GI]; cateto maior: [HI]; cateto menor: [HG].
2. 2.1  $A_{[ABCD]} = A_{\text{QUADRADO VERMELHO}} + A_{\text{QUADRADO VERDE}} + 4 \times$   
 $\times A_{\text{TRIÂNGULO}} = b^2 + c^2 + 4 \times \frac{b \times c}{2} = b^2 + c^2 + 2bc.$

- 2.2 É um quadrado, porque tem quatro lados iguais e quatro ângulos de  $90^\circ$ .

$$A_{[ABCD]} = A_{\text{QUADRADO AMARELO}} + 4 \times A_{\text{TRIÂNGULO}} =$$

$$= a^2 + 4 \times \frac{b \times c}{2} = a^2 + 2bc.$$

$$2.3 \quad a^2 + \cancel{2bc} = b^2 + c^2 + \cancel{2bc} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

- 3.** Em triângulos retângulos.

4. a) 13  
b) 15  
c) 17  
d) 25  
e) 1  
f) 3
5. a) 125 cm  
b) 60 cm

## Aplicar

6. a)  $150 \text{ m}^2$   
b)  $625 \text{ m}^2$
7. a)  $36 \text{ cm}$   
b)  $40 \text{ cm}$   
c)  $40 \text{ cm}$
8.  $36 \text{ cm}$
9. 9.1  $3750 \text{ €}$   
9.2  $60 \text{ m}$

## Tarefas de investigação

10. Ao cuidado do aluno.
11. 11.1 Ao cuidado do aluno.
  - 11.2 A área do triângulo maior é igual à soma das áreas dos dois triângulos menores. A relação mantém-se.
  - 11.3 A área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos.
  - 11.4 A relação mantém-se para outros polígonos.
  - 11.5 A área do polígono regular construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos polígonos regulares construídos sobre os catetos.

## 1.3

## Teorema de Pitágoras (continuação)

### Tarefa 3:

1. O triângulo é retângulo em  $B$ .
2. É o cateto menor.
3. 11 m

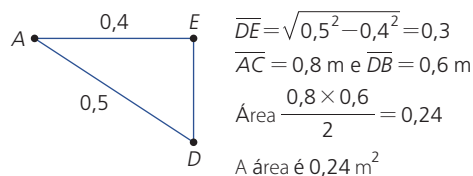
### Verificar a aprendizagem

1. C
2. a) 12  
b) 2  
c) 2  
d) 32
3. a) 112 mm  
b) 306 cm
4. Serve para verificar se um triângulo é retângulo.

5. a)  $26^2 = 24^2 + 10^2$ , logo, o triângulo é retângulo em  $B$ .  
b)  $6^2 \neq 5^2 + 3^2$ , logo, o triângulo não é retângulo.  
c)  $17^2 = 15^2 + 8^2$ , logo, o triângulo é retângulo em  $G$ .  
d)  $37^2 \neq 35^2 + 13^2$ , logo, o triângulo não é retângulo.  
e)  $30^2 \neq 23,6^2 + 18,4^2$ , logo, o triângulo não é retângulo.  
f)  $29^2 = 21^2 + 20^2$ , logo, o triângulo é retângulo em  $R$ .
6.  $4,55^2 = 4,2^2 + 1,75^2$ , logo, o triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $B$  e as retas  $s$  e  $t$  são perpendiculares.

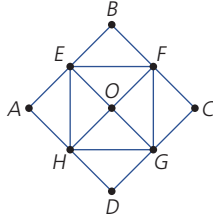
## Aplicar

7.  $45^2 = 36^2 + 27^2$ , logo, o triângulo é retângulo e as linhas laterais são perpendiculares às linhas de fundo.
8. a) 15 cm  
b) 5 cm
9. a)  $\overline{TI} = 6$  cm  
b)  $\frac{32}{3} \text{ cm}^2$
10. a)  $54 \text{ cm}^2$   
b)  $7,68 \text{ cm}^2$   
c)  $48 \text{ cm}^2$   
d)  $6,96 \text{ cm}^2$
11. 11.1 O ângulo com vértice em C é comum aos dois triângulos e ambos possuem um ângulo reto. Portanto, os triângulos  $[ABC]$  e  $[EDC]$  são semelhantes, por AA.
- 11.2 a) A razão de semelhança é  $\frac{\overline{CB}}{\overline{EC}} = \frac{6}{3} = 2$   
b)  $\overline{CD} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$   
c)  $\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = 2$   
 $\overline{AB} = 2 \times 4 = 8$   
 $\overline{AC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$
12. Perímetro do losango  $= 4 \times \text{lado} \Leftrightarrow 2 = 4 \times \overline{AD} \Leftrightarrow \overline{AD} = 0,5$



- 13.1** Os triângulos  $[AEH]$ ,  $[DGH]$ ,  $[CFG]$  e  $[BEF]$  são retângulos e os seus catetos são iguais a metade da medida do lado do quadrado  $[ABCD]$ . Assim, temos quatro triângulos retângulos isósceles com os catetos todos iguais. Pelo critério LAL pode garantir-se a igualdade dos triângulos dois a dois, logo, os lados do quadrilátero  $[EFGH]$  são todos iguais. Portanto, é um losango.
- 13.2** O triângulo  $[AHE]$  é retângulo em  $A$  e isósceles logo o ângulo  $AHE$  tem  $45^\circ$  de amplitude. Do mesmo modo, conclui-se que o ângulo  $DHG$  tem  $45^\circ$  de amplitude.
- $$\widehat{AHD} = \widehat{AHE} + \widehat{EHG} + \widehat{DHG}$$
- $$180^\circ = 45^\circ + \widehat{EHG} + 45^\circ$$
- $$\widehat{EHG} = 90^\circ$$
- Do mesmo modo, conclui-se que:
- $$\widehat{HEF} = \widehat{EFG} = \widehat{FGH} = 90^\circ$$
- Logo, o quadrilátero  $[EFGH]$  tem os ângulos todos iguais e os lados todos iguais, pelo que é um quadrado.

- 13.3 O quadrado  $[ABCD]$  fica dividido em quatro quadrados iguais. Cada um destes quadrados fica dividido em dois triângulos retângulos isósceles, um que pertence ao quadrado  $[EFGH]$ . Assim, pode concluir-se que a área do quadrado  $[EFGH]$  é metade da área do quadrado  $[ABCD]$ .



14. 14.1  $\overline{AC}^2 = 15^2 - 12^2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \overline{AC} = \pm \sqrt{81} \Leftrightarrow \overline{AC} = \pm 9$   
 Como  $\overline{AC}$  é um comprimento, então, é um número não negativo. Logo,  $\overline{AC} = 9$  cm.
- 14.2  $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$   
 $\overline{AD} = \frac{4}{5} \overline{DC}$   
 Como  $\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AC}$   
 Temos  $\frac{4}{5} \overline{DC} + \overline{DC} = 9 \Leftrightarrow \frac{9}{5} \overline{DC} = 9 \Leftrightarrow \overline{DC} = 5$   
 Logo,  $\overline{AD} = \frac{4}{5} \times 5 \Leftrightarrow \overline{AD} = 4$   
 $\overline{AD} = 4$  cm
15. 15.1  $b^2 = h^2 + x^2$   
 15.2  $a^2 + b^2 = a^2 + h^2 + x^2$   
 15.3  $c^2 = h^2 + (a + x)^2 \Leftrightarrow c^2 = h^2 + (a + x) \times (a + x) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow c^2 = h^2 + a^2 + 2ax + x^2$   
 15.4 Comparando as expressões obtidas para  $a^2 + b^2$  e  $c^2$  nas questões anteriores, vem que  $c^2 = a^2 + b^2 + 2ax$ ; como  $2ax > 0$  conclui-se que  $c^2 > a^2 + b^2$ .

**Tarefa de investigação**

Pág. 41

16. 16.1 D  
 16.2  $(2a)^2 = (2b)^2 + (2c)^2 \Leftrightarrow 4a^2 = 4b^2 + 4c^2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{4a^2}{4} = \frac{4b^2 + 4c^2}{4} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$ , que é verdadeiro, logo,  $(2a; 2b; 2c)$  é um termo pitagórico.  
 16.3 Ao cuidado do aluno.

**Atividades globais**

Págs. 46 e 47

1. B
2. A
3. B
4. D
5. B
6. 6.1 30 cm<sup>2</sup>  
6.2 4,6 cm
7. 7.1 180 m  
7.2 4794 m<sup>2</sup>
8. 8.1 Ao cuidado do aluno.  
8.2 24 m<sup>2</sup>  
8.3 48 m<sup>2</sup>
9. a)  $x = 30$  cm;  $y = 50$  cm  
b)  $x = 10$  m;  $y = 9$  m

10. 10.1 Tem quatro lados iguais e ângulos de 90°.  
 10.2  $b - a$   
 10.3  $A_{\text{QUADRADO EXTERIOR}} = A_{\text{QUADRADO INTERIOR}} + 4 \times A_{\text{TRIÂNGULO}} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow c^2 = (b - a)^2 + 4 \times \frac{b \times a}{2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow c^2 = (b - a)(b - a) + 4 \times \frac{b \times a}{2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow c^2 = b^2 - 2ba + a^2 + 2ba \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow c^2 = b^2 + a^2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto maior})^2 + (\text{cateto menor})^2$
11. 11.1  $\widehat{UWZ} = 180^\circ - \widehat{TWU} - \widehat{YWZ} =$   
 $= 180^\circ - \widehat{TWU} - \widehat{TUW} = 90^\circ$   
 11.2  $A_{[TUZY]} = A_{[UWZ]} + 2 \times A_{[TUM]} \Leftrightarrow \frac{(b + a) \times (b + a)}{2} =$   
 $= \frac{c^2}{2} + 2 \times \frac{b \times a}{2} \Leftrightarrow b^2 + 2ab + a^2 =$   
 $= c^2 + 2ba \Leftrightarrow b^2 + a^2 = c^2 \Leftrightarrow (\text{cateto maior})^2 +$   
 $+ (\text{cateto menor})^2 = (\text{hipotenusa})^2$

**AUTOAVALIAÇÃO**

Págs. 48 e 49

1. 1.1  $[ABC]$ ,  $[BHC]$  e  $[AHB]$ .  
1.2 6 cm
2. 20
3. C
4. a) 50  
b) 32
5. D
6. 128 cm
7. 1,2 m
8. B
9. a) 864 cm<sup>2</sup>  
b) 180 cm
10. Perímetro = 20 m  
Área = 22 m<sup>2</sup>
11.  $13^2 = 12^2 + 5^2$ , logo, pelo recíproco do Teorema de Pitágoras, o triângulo é retângulo em B.
12.  $(b + c)^2 = a^2 + 2bc \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (b + c)(b + c) = a^2 + 2bc \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (\text{cateto maior})^2 + (\text{cateto menor})^2 = (\text{hipotenusa})^2$

**2**

**VETORES, TRANSLAÇÕES E ISOMETRIAS**

Págs. 52 a 95

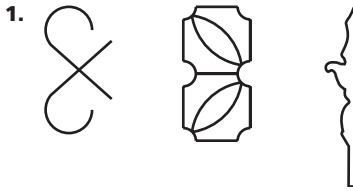
**Atividades iniciais**

Pág. 53

1. Ao cuidado do aluno.
2. Rotações: 2, 5 e 7. Reflexões: 1, 3 e 4.
3. a) 2  
b) 4  
c) 5  
d) 0  
e) 6

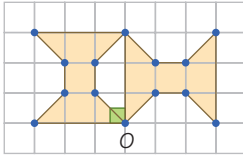
## 2.1 Segmentos orientados e vetores Pág. 54

### Tarefa 1:



2. Uma (o eixo de reflexão).

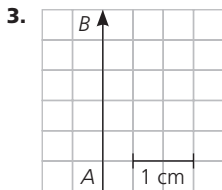
3. Por exemplo:



### Verificar a aprendizagem

Pág. 60

1. D
2. a) Por exemplo,  $[H, I]$  e  $[C, B]$ .  
b) Por exemplo,  $[A, B]$  e  $[G, H]$   
c) Por exemplo,  $[A, B]$  e  $[D, E]$   
d) Por exemplo,  $[I, H]$  e  $[I, A]$

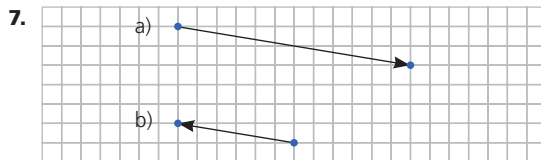


4. 4.1 Sim.  
4.2 Não.  
4.3 Sim.  
4.4  $\vec{F}$   
4.5  $\vec{C}$
5. Os vetores têm a mesma direção e o mesmo comprimento, mas têm sentidos opostos (os vetores são simétricos).

### Aplicar

Pág. 61

6. a)  $\vec{P}$  tem direção vertical e sentido de cima para baixo;  
 $\vec{F}$  tem direção vertical e sentido de baixo para cima.  
b)  $\vec{U}$  tem direção horizontal e sentido da esquerda para a direita;  
 $\vec{V}$  tem direção horizontal e sentido da direita para a esquerda.  
c)  $\vec{AC}$  tem a direção da reta  $BC$  e sentido de  $A$  para  $C$ ;  
 $\vec{AB}$  tem a direção da reta  $BC$  e sentido de  $A$  para  $B$ .



8. a)  $\vec{DC}$ ,  $\vec{CD}$  e  $\vec{BA}$ . b)  $\vec{DC}$ ,  $\vec{CD}$ ,  $\vec{BA}$  e  $\vec{AB}$ . c)  $\vec{DA}$
9. 9.1 Ao cuidado do aluno.  
9.2 Três, para além de  $[I, K]$ :  $[H, A]$ ,  $[B, L]$  e  $[G, D]$ .  
9.3 Cinco, para além de  $\vec{AB}$ :  $\vec{KI}$ ,  $\vec{IK}$ ,  $\vec{HL}$ ,  $\vec{LH}$  e  $\vec{BA}$   
9.4 Três direções.

### Tarefas de investigação

Pág. 61

10. 10.1 Se  $B$  for o ponto médio do segmento  $[AC]$ , podem criar-se 4 vetores:  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BA}$ ,  $\vec{AC}$  e  $\vec{CA}$ . Caso contrário, são 6 vetores:  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BA}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{CB}$ ,  $\vec{AC}$  e  $\vec{CA}$ .  
10.2 No máximo, são 12; no mínimo, são 6.  
10.3

| N.º de pontos         | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
|-----------------------|---|---|----|----|----|
| N.º máximo de vetores | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 |

+4   +6   +8   +10

11. Ao cuidado do aluno.

## 2.2 Translação

Pág. 62

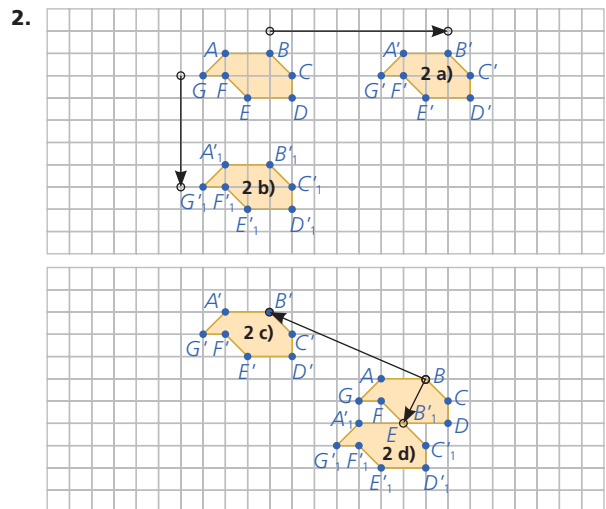
### Tarefa 2:

1. O tamanho.
2. A forma.
3. a) Um segmento de reta com o mesmo comprimento.  
b) Um ângulo com a mesma amplitude.

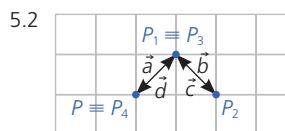
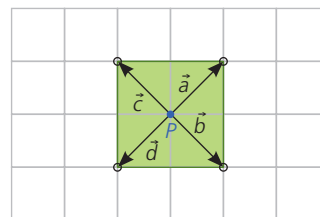
### Verificar a aprendizagem

Pág. 65

1. D



3. a) Translação de vetor  $\vec{AA'}$ .  
b) Translação de vetor  $\vec{AE'}$ .
4. a) B c) B  
b) A d) B
5. 5.1 Um quadrado.

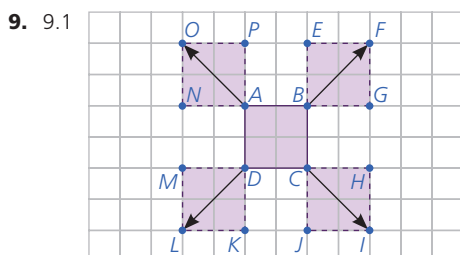
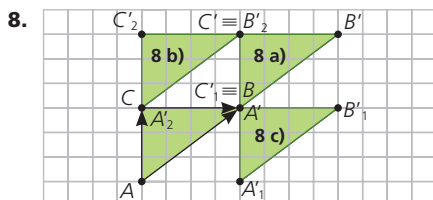


5.2.1  $P = P_4$

6.  $A + \vec{MB} = M$  e  $T_{\vec{MA}}(B) = M$

## Aplicar

Pág. 66



$$\begin{aligned} 9.2 \quad T_{\vec{AC}}([ABCD]) &= [CHIJ] \\ T_{\vec{DB}}([ABCD]) &= [EFGH] \\ T_{\vec{CA}}([ABCD]) &= [OPAN] \\ T_{\vec{BD}}([ABCD]) &= [MDKL] \end{aligned}$$

9.3 Por exemplo:  $\vec{FE}$ ,  $\vec{PO}$ ,  $\vec{IJ}$  e  $\vec{BA}$ .

$$\begin{aligned} 9.4 \quad T_{\vec{CA}}([CHIJ]) &= [ABCD] \\ T_{\vec{BD}}([EFGH]) &= [ABCD] \\ T_{\vec{AC}}([OPAN]) &= [ABCD] \\ T_{\vec{DB}}([MDKL]) &= [ABCD] \end{aligned}$$

## Tarefas de investigação

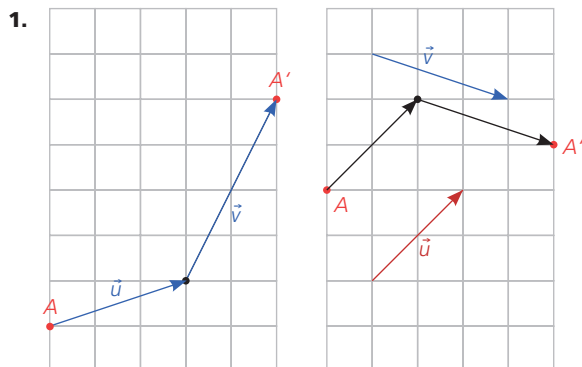
Pág. 66

10. 10.1 Pentágono;  $P \equiv P_5$   
 10.2 Hexágono;  $P \equiv P_6$   
 10.3 Ao cuidado do aluno.
11. Ao cuidado do aluno.

## 2.3 Composição de translações e adição de vetores

Pág. 67

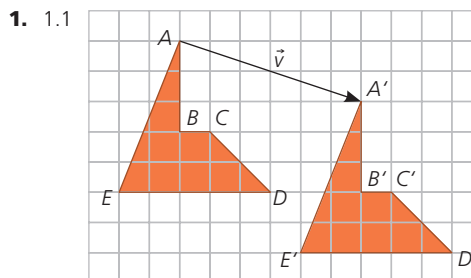
## Tarefa 3:



2. A afirmação é verdadeira. A imagem  $A'$  do ponto  $A$  poderia ser obtida diretamente com uma única translação, ou seja, aplicando um único vetor ( $\vec{AA'}$ ).

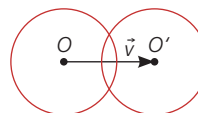
## Verificar a aprendizagem

Pág. 72



- 1.2 Têm o mesmo comprimento. São estritamente paralelos.  
 1.3 Um segmento de reta com o mesmo comprimento e estritamente paralelo.  
 1.4 Têm a mesma amplitude.  
 1.5 Um ângulo com a mesma amplitude.  
 1.6 As distâncias; a amplitude dos ângulos; uma figura congruente.
2. Deve ser o vetor nulo.
3. 3.1 O segmento de reta  $[DC]$ .  
 3.2 A imagem do segmento de reta  $[AB]$  é  $[DC]$ , logo, os segmentos são paralelos e têm o mesmo comprimento; por isso,  $[ABCD]$  é um paralelogramo.

4. 4.1



As translações conservam as distâncias, logo, o raio (3 cm) mantém-se na imagem. Assim, basta fazer a translação do centro e traçar uma circunferência com 3 cm de raio.

- 4.2 Deve ter mais de 6 cm.
5. a) C f)  $[DE]$   
 b) D g)  $[AD]$   
 c) A h)  $[AB]$   
 d) I i)  $[EH]$   
 e) E j)  $[EF]$

## Aplicar

Pág. 73

6.  $[ABB'A']$  é um retângulo porque é um paralelogramo com um ângulo de  $90^\circ$  (a aresta  $[AB]$  é perpendicular ao tapete).
7. A
8. 8.1  $C_4$   
 8.2  $C_1$   
 8.3  $C_3$   
 8.4  $\vec{BD}$
9. 9.1  $\widehat{PNC} = \widehat{ABC} = 22^\circ$  (a translação conserva a amplitude dos ângulos).  $\widehat{NPC} = 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$  (no triângulo  $[NPC]$ ).  $\widehat{APM} = \widehat{NPC} = 68^\circ$  (ângulos verticalmente opostos).
- 9.2 Não, porque o raciocínio da alínea anterior só envolve ângulos: independentemente da posição do ponto  $N$ , os ângulos  $\angle ABC$  e  $\angle MNO$  são geometricamente iguais.
- 9.3  $[AMOC]$  é um retângulo porque é um paralelogramo com um ângulo reto ( $\angle ACO$ ).
- 9.4  $\vec{CO} = \vec{NO} - \vec{NC} = \vec{BC} - \vec{NC} = \vec{BN} = 3 \text{ cm}$ .



10. 10.1 42 — Cada lado define dois segmentos orientados (12). O ponto  $O$  com cada um dos vértices define outros dois segmentos orientados (12). As três diagonais de maior comprimento definem seis segmentos orientados (6). As diagonais de menor comprimento, que são 6, definem outros dois segmentos orientados (12).
- 10.2 18 — Os lados são paralelos dois a dois e paralelos a dois segmentos com o ponto  $O$  em comum, por exemplo, os segmentos  $[AF]$ ,  $[BO]$ ,  $[OE]$  e  $[CD]$  definem um só vetor no sentido de  $A$  para  $F$  e outro no sentido de  $F$  para  $A$ . Assim, temos 6 vetores. As diagonais de comprimento máximo definem outros 6 vetores (cada diagonal define dois vetores simétricos) e as diagonais menores definem outros 6 vetores (têm o mesmo comprimento e direção duas a duas)
- 10.3 a) Por exemplo:  $\overrightarrow{AF}$  e  $\overrightarrow{EB}$ .  
b) Por exemplo:  $\overrightarrow{AF}$  e  $\overrightarrow{BE}$ .  
c) Por exemplo:  $\overrightarrow{AF}$  e  $\overrightarrow{FE}$ .  
d) Por exemplo:  $\overrightarrow{AF}$  e  $\overrightarrow{DC}$ .
- 10.4 a)  $T_{\overrightarrow{BE}}$   
b)  $T_{\overrightarrow{CB}}$   
c)  $T_{\overrightarrow{OC}}$   
d)  $T_{\overrightarrow{AC}}$   
e)  $T_{\overrightarrow{AF}}$   
f)  $T_{\overrightarrow{AB}}$

#### Tarefas de investigação

Pág. 74

11.  $\overrightarrow{DE}$  e  $\overrightarrow{BC}$  têm a mesma direção e o mesmo sentido;  $\overrightarrow{DE}$  tem metade do comprimento de  $\overrightarrow{BC}$ .
12. A imagem de uma reta através de uma translação associada a um vetor com a direção da reta.

## 2.4 Reflexão deslizante.

### Propriedades das isometrias

Pág. 75

#### Tarefa 4:

- A imagem de um segmento de reta é sempre um segmento de reta com o mesmo comprimento e a imagem de um ângulo é sempre um ângulo com a mesma amplitude.
- Propriedades:
  - uma translação associada a um vetor  $\vec{u}$  anula-se com uma translação associada ao vetor simétrico de  $\vec{u}$ ;
  - uma rotação de centro  $O$  e com uma certa amplitude anula-se com uma rotação com o mesmo centro e a mesma amplitude, mas em sentido contrário;
  - uma reflexão de um eixo  $r$  anula-se consigo própria;
  - uma reflexão deslizante de eixo  $r$  e vetor  $\vec{u}$  anula-se com uma reflexão deslizante com o mesmo eixo mas com o vetor simétrico de  $\vec{u}$ .

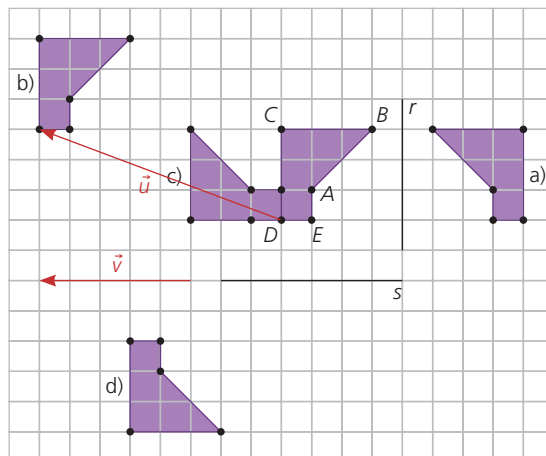
#### Verificar a aprendizagem

Pág. 81

- Reflexão de eixo  $AE$ .
  - Reflexão deslizante de eixo  $EA$  e vetor  $\overrightarrow{AE}$ .
  - Translação de 9 casas para a esquerda.
  - Rotação de centro  $A$  e de amplitude  $180^\circ$ .
  - Reflexão de eixo  $AB$ .
  - Reflexão deslizante: reflexão de eixo  $AB$  e translação de 6 casas para a direita.
  - Rotação de centro  $B$  e de amplitude  $90^\circ$  no sentido negativo (ou  $270^\circ$  no sentido positivo).

- Reflexão de eixo vertical ou rotação de  $180^\circ$ .
  - Rotação de  $90^\circ$  no sentido positivo.
  - Rotação de  $90^\circ$  no sentido negativo.
  - Rotação de  $180^\circ$ .
  - Translação.
- Não é uma isometria porque não preserva as distâncias.

4. 4.1



4.2 As quatro isometrias conservam o comprimento dos segmentos de reta e a amplitude dos ângulos.

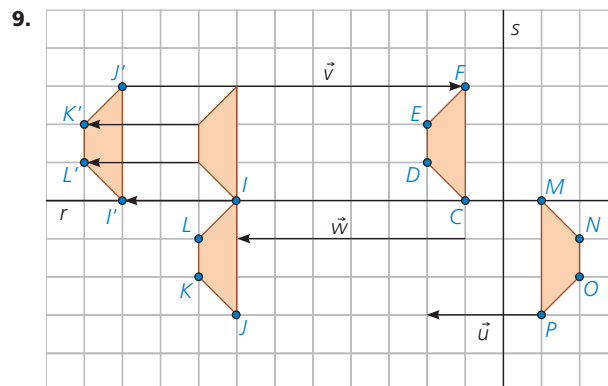
4.3 A translação.

5. A translação associada ao vetor nulo.

#### Aplicar

Pág. 82

- Simetria de reflexão (um eixo de simetria).
  - Simetria de reflexão (um eixo de simetria).
  - Simetria de reflexão (dois eixos de simetria) e simetria de rotação ( $180^\circ$ ,  $360^\circ$ ).
  - Simetria de rotação ( $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$ ).
  - Simetria de reflexão (quatro eixos de simetria) e simetria de rotação ( $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$ ).
  - Simetria de reflexão (cinco eixos de simetria) e simetria de rotação ( $72^\circ$ ,  $144^\circ$ ,  $216^\circ$ ,  $288^\circ$  e  $360^\circ$ ).
  - Simetria de reflexão (seis eixos de simetria) e simetria de rotação ( $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $300^\circ$  e  $360^\circ$ ).
  - Simetria de reflexão (uma infinidade de eixos de simetria) e simetria de rotação (uma infinidade de rotações com centro no centro do círculo).
- Um ângulo com uma amplitude de  $60^\circ$  no sentido positivo.
  - Um ângulo com uma amplitude de  $60^\circ$  no sentido negativo.
- $30^\circ$  no sentido negativo.

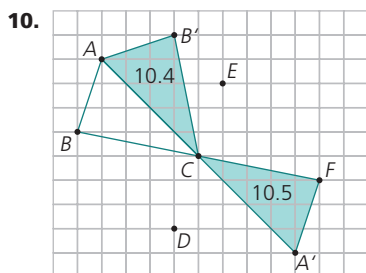


9.2 Translação de vetor  $\vec{v}$ .



9. 9.1 A: reflexão de eixo vertical; B: reflexão de eixo horizontal; D: rotação de  $180^\circ$ .

9.2 Sentido negativo.

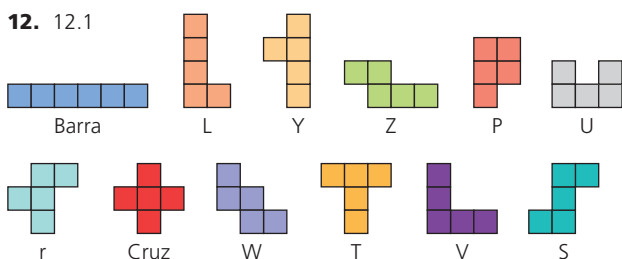


11. 11.1 A, B, D, E.

11.2 Ao cuidado do aluno.

11.3 Triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular.

11.4 Ao cuidado do aluno.



12.2 Barra: Simetria de reflexão (dois eixos de simetria); simetria de rotação ( $180^\circ$ ;  $360^\circ$ ).

U: Simetria de reflexão (um eixo de simetria).

Cruz: Simetria de reflexão (quatro eixos de simetria); simetria de rotação ( $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$ ).

W: Simetria de reflexão (um eixo de simetria).

T: Simetria de reflexão (um eixo de simetria).

V: Simetria de reflexão (um eixo de simetria).

S: Simetria de rotação ( $180^\circ$ ;  $360^\circ$ ).

12.3 Barra, L, Y, Z, P, r, W, cruz, S, V.

12.4 Todos.

13. B

14. 38

15. 15.1 10 h 00 min

15.2 Entre as 07 h 00 min e as 08 h 00 min, assim como entre as 16 h 30 min e as 18 h 00 min (horas de Sydney).

15.3 Não (só seria possível se a diferença fosse de 0 ou 12 horas entre as cidades). Sim, às 04 h 30 min em Sydney (19 h 30 min em Berlim) e às 16 h 30 min em Sydney (07 h 30 min em Berlim).

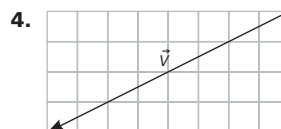
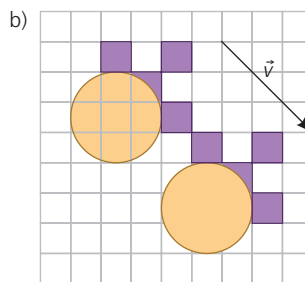
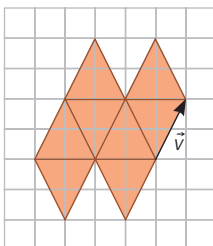
#### AUTOAVALIAÇÃO

Págs. 90 e 91

1. C

2. B

3. a)



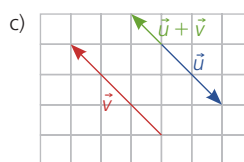
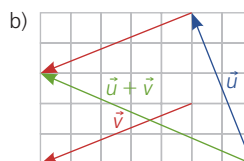
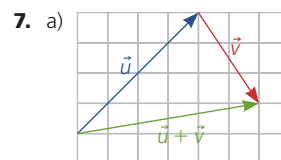
5. 5.1  $\vec{IO}$

5.2 C

5.3  $\vec{GO}$

5.4 B

6. D



8. 8.1  $[ABB'C']$  é um paralelogramo porque tem dois lados opostos paralelos e com o mesmo comprimento,  $[AB]$  e  $[CB']$  (visto que a imagem de um segmento de reta por uma translação é um segmento paralelo e com o mesmo comprimento).

8.2 A translação conserva a amplitude dos ângulos, logo,  $\widehat{CB'C'} = \widehat{ABC} = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$ .

8.3  $\vec{AC}$

9. A

10. ... geometricamente igual.

11. Uma infinidade de simetrias de translação e uma infinidade de simetrias de reflexão deslizante.

12. Por exemplo: o ponto C é a imagem de A pela reflexão de eixo BO; D é a imagem de C pela translação de vetor  $\vec{BO}$ ; E é a imagem de B pela rotação de centro O e de amplitude  $180^\circ$ ; F é a imagem de O pela translação de vetor  $\vec{BA}$ .

### 3 NÚMEROS RACIONAIS

Págs. 96 a 135

#### Atividades iniciais

Pág. 97

- $\frac{1}{5}; 0,2; \frac{2}{10}$
  - 0,3
  - $\frac{1}{3}$
  - $\frac{8}{20}; 0,4; \frac{2}{5}$
  - $\frac{2}{10}; \frac{1}{5}; 0,2$
- Sim, porque  

$$-\left(1\frac{1}{2}\right) = -\left(1 + \frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} = -\frac{9}{6} = -1,5$$
- Ao cuidado do aluno.
- Se dividirmos o orçamento em terços, obtemos 3 terços.
- $100 \text{ cm}^2$
- $-\frac{1}{4}$

### 3.1 Representação números racionais

Pág. 100

#### Tarefa 1:

- Obtém-se 17,5; 11,666 666 6... e 3,888 888 8..., respectivamente. Não são números inteiros.
- Juntou o seu camelo aos 35 e deu 36, que passou a ser divisível por 2, 3 e 9. Obtém-se 18, 12 e 4 camelos, respectivamente. Sobraram 2 camelos para Beremiz.
- $\frac{35}{9} < \frac{35}{3} < \frac{35}{2}$

#### Verificar a aprendizagem

Pág. 109

- $\frac{10}{2}; 0; -\frac{72}{8}; \frac{9}{3}; -5$
  - $1,333\ 33; \frac{10}{2}; 0; -\frac{72}{8}; 0,8; \frac{9}{3}; -5$
  - $-8,(6) \rightarrow \text{período: } 6; -\frac{21}{11} \rightarrow \text{período: } 90;$   
 $\frac{12}{99} \rightarrow \text{período: } 12; \frac{43}{13} \rightarrow \text{período: } 307\ 692.$   
 $\frac{143}{120} \rightarrow \text{período: } 6;$   
 $-\frac{120}{143} \rightarrow \text{período: } 839160$
  - $-8,(6) \text{ período de comprimento } 1.$   
 $-\frac{21}{11} \text{ período de comprimento } 2.$   
 $\frac{12}{99} \text{ período de comprimento } 2.$   
 $\frac{43}{13} \text{ período de comprimento } 6.$   
 $\frac{143}{120} \text{ período de comprimento } 1.$   
 $-\frac{120}{143} \text{ período de comprimento } 6.$
- $0,3 = \frac{3}{10}; 2,2 = \frac{22}{10} = \frac{11}{5}; 0,03 = \frac{3}{100}; -1,46 = -\frac{146}{100} = -\frac{73}{50}$

- $0,(35) = \frac{35}{99}$   
 $0,2(7) = \frac{25}{90}$   
 $3,12(84) = \frac{30972}{9900}$   
 $5,(9) = \frac{54}{9} = 6$
- $\frac{3}{16}; -\frac{9}{80}; -\frac{4}{125}; \frac{7}{50}$
  - $\frac{3}{16} = \frac{3}{2^4} = \frac{1875}{10000}$   
 $-\frac{9}{80} = -\frac{3^2}{2^4 \times 5} =$   
 $= -\frac{1125}{10000}$   
 $-\frac{4}{125} = -\frac{2^2}{5^3} =$   
 $= -\frac{32}{1000}$   
 $\frac{7}{50} = \frac{7}{2 \times 5^2} = \frac{14}{100}$
- $\frac{143}{120} = 1,191(6)$

$$\begin{array}{r} 143,000000 \overline{)120} \\ 23\ 0 \phantom{000000} \underline{1,19166} \\ 11\ 00 \\ 200 \\ 800 \\ 800 \\ 800 \end{array}$$

$$-\frac{13}{70} = -0,1(857142)$$

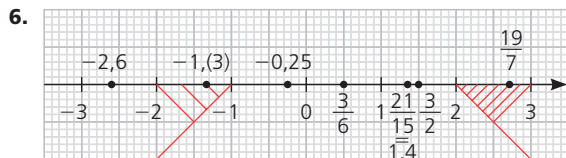
$$\begin{array}{r} 13,0000000000 \overline{)70} \\ 6\ 00 \phantom{00000000} \underline{0,185714285} \\ 400 \\ 500 \\ 100 \\ 300 \\ 200 \\ 600 \\ 400 \\ 500 \end{array}$$

$$\frac{120}{143} = 0,(839160)$$

$$\begin{array}{r} 120,000000000 \overline{)143} \\ 5\ 60 \phantom{00000000} \underline{0,83916083} \\ 1\ 310 \\ 230 \\ 870 \\ 1200 \\ 560 \\ 1310 \end{array}$$

- $\frac{13}{70} = \frac{13}{2 \times 5 \times 7}$ ; É uma fração irredutível em que um dos fatores do denominador é 7.

5. 5.1 A.  $-\frac{9}{4}$ ; B.  $-\frac{9}{5}$ ; C.  $-0,9$ ; D.  $\frac{2}{20}$ ; E.  $\frac{6}{5}$ ; F.  $\frac{14}{7}$ ; G.  $2,5$   
 5.2 H.  $-\frac{2}{20}$   
 5.3 P.  $-\frac{37}{10}$   
 5.4 R.  $\frac{7}{10}$



#### Aplicar

Pág. 110

7. 7.1  $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$   
 7.2  $\frac{5}{1+3+5+7+9}; \frac{6}{1+3+5+7+9+11};$   
 $\frac{1}{1+3+5+7+9+11+13}$   
 7.3  $\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}$

#### Tarefas de investigação

Pág. 110

8. 012 345 679  
 9. 9.1 142 857; 285 714; 571 428; 428 571; 285 714.  
 9.2 O período tem sempre seis algarismos: 1, 2, 4, 5, 7 e 8, apenas se alterando a ordem pela qual se encontram.  
 10. 10.1 1; 2; 3; 4; 1; 2; 2; 3  
 10.2 O período é sempre igual ao resto da divisão inteira do numerador por 9.  
 10.3 1  
 11. 11.1  $\frac{5}{11} = 0,4545454545 \dots = 0, (45)$   
 $\frac{6}{11} = 0,5454545454 \dots = 0, (54)$   
 $\frac{7}{11} = 0,6363636363 \dots = 0, (63)$   
 $\frac{12}{11} = 1,0909090909 \dots = 1, (09)$   
 $\frac{13}{11} = 1,1818181818 \dots = 1, (18)$   
 11.2 O período tem sempre dois algarismos. O número formado por esses dois algarismos é sempre igual ao produto de 9 pelo resto da divisão do numerador por 11.  
 11.3  $\frac{343}{11}$  tem de período 18, porque o resto da divisão inteira de 343 por 11 é 2 e  $2 \times 9 = 18$ .  
 12. 12.1 03; 06; 09; 45; 84; 63  
 12.2 Período: 15.  $\frac{203}{33}; \frac{170}{33}; \frac{269}{33}$ ; etc. O período tem sempre dois algarismos e o número por eles formado é sempre igual ao produto de 3 pelo resto da divisão do numerador por 33.

## 3.2

### Potências de expoente inteiro

Pág. 111

#### Tarefa 2:

1. 4.º prémio ..... 16 €      8.º prémio ..... 1 €  
 5.º prémio ..... 8 €      9.º prémio ..... 0,5 €  
 6.º prémio ..... 4 €      10.º prémio ..... 0,25 €  
 7.º prémio ..... 2 €

2.  $2^7; 2^6; 2^5; 2^4; 2^3; 2^2; 2^1$   
 3.  $2^0; 2^{-1}; 2^{-2}$

#### Verificar a aprendizagem

Pág. 115

1. a) 1  
 b) 1  
 c) 1  
 d) -1  
 e) 0  
 2. a)  $\frac{1}{81}$ .  
 b) Dividir por 3 o termo anterior.  
 c)  $3^4; 3^3; 3^2; 3^1; 3^0; 3^{-1}; 3^{-2}; 3^{-3}$   
 3. a)  $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$   
 b)  $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$   
 c)  $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-2^3} = -\frac{1}{8}$   
 d)  $(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$   
 4. a)  $\frac{1}{25}$   
 b)  $\frac{1}{27}$   
 c)  $\frac{1}{64}$   
 d)  $-\frac{1}{64}$   
 e) 1  
 f)  $\frac{1}{12}$   
 g) -1  
 h)  $\frac{1}{1000}$   
 5. a)  $\frac{1}{9}$   
 b)  $\frac{1}{125}$   
 c)  $\frac{4}{81}$   
 d)  $\frac{81}{625}$   
 e)  $\frac{49}{121}$   
 f)  $-\frac{27}{343}$   
 g) 1  
 h)  $-\frac{1}{100\,000}$   
 6. a) 256  
 b) 1 000 000  
 c)  $\frac{625}{16}$   
 d)  $-\frac{27}{343}$   
 e)  $\frac{16}{81}$   
 f) -5  
 g)  $\frac{4}{25}$   
 h)  $\frac{3125}{32}$

7. a)  $(2,1)^{-1} = \frac{10}{21}$   
 b)  $3^5 = 243$   
 c)  $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{16}$   
 d)  $10^6 = 1\,000\,000$   
 e) 2  
 f)  $-\frac{1}{5}$

8. a)  $10^4$   
 b)  $10^6$   
 c)  $10^0$   
 d)  $10^{-1}$   
 e)  $10^{-4}$

9. a)  $0,1 + 0,03 + 0,0004 + 0,00005 =$   
 $= 1 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-5}$   
 b)  $-(20 + 0,2 + 0,03 + 0,002) =$   
 $= -(2 \times 10 + 2 \times 0,1 + 3 \times 0,01 + 2 \times 0,001) =$   
 $= -2 \times 10^1 - 2 \times 10^{-1} - 3 \times 10^{-2} - 2 \times 10^{-3}$

**Aplicar**

Pág. 116

10. a) =  
 b) >  
 c) <  
 d) <  
 e) =  
 f) =  
 g) >  
 h) >
11. D
12. a)  $\frac{1}{5}$   
 b) 1  
 c) 0  
 d)  $\frac{5}{4}$   
 e)  $\frac{9}{25}$   
 f) 1 000 001  
 g)  $-\frac{1}{2}$   
 h) 7  
 i)  $-\frac{1}{3}$

13. 13.1

| Semana                   | 0  | 1  | 2  | 3   | 4   | 5    |
|--------------------------|----|----|----|-----|-----|------|
| N.º de novos cozinheiros | 10 | 20 | 60 | 180 | 540 | 1620 |

13.2 Multiplica-se por 3 o termo anterior.

13.3  $20 \times 3^{n-1}$

13.4 65 610

13.5  $10 \times 3^n$

**3.3****Notação científica** Pág. 117**Tarefa 3:**

1.  $3,4 \times 10^9$   
 2.  $200\,000\,000\,000 = 2 \times 10^{11}$ ;  $1\,400\,000\,\text{km} = 1,4 \times 10^6\,\text{km}$ ;  
 $0,000\,000\,001\,\text{g} = 1 \times 10^{-9}\,\text{g}$   
 3.  $2,8 \times 10^{17}$

**Verificar a aprendizagem**

Pág. 122

1. a) 100 000; cinco; direita; 158 000.  
 b) 0,000 001; seis; esquerda; 0,000 003 5.
2. C e D
3. a) 1 390 000  
 b) 0,000 053 1  
 c) 43 215  
 d) 0,000 000 1  
 e) 100 000 000  
 f) 7,3
4. a)  $4,5 \times 10^3$   
 b)  $6,35 \times 10^5$   
 c)  $1,247 \times 10^9$   
 d)  $1,432 \times 10^0$   
 e)  $6,8 \times 10^{-2}$   
 f)  $2,37 \times 10^{-5}$   
 g)  $8 \times 10^{-7}$   
 h)  $6,451 \times 10^{-9}$   
 i)  $7,461987 \times 10^3$   
 j)  $5,6003378 \times 10^6$   
 k)  $1 \times 10^6$   
 l)  $1 \times 10^9$
5. a)  $10^3$   
 b)  $10^5$   
 c)  $10^6$   
 d)  $10^9$   
 e)  $10^{11}$
6. a) >  
 b) <  
 c) >  
 d) <  
 e) <  
 f) >

**Aplicar**

Pág. 122

7. a)  $2,34 \times 10^{10}$   
 b)  $4,6 \times 10^{-7}$   
 c)  $1,91138 \times 10^{17}$   
 d)  $8,352\,213 \times 10^{-10}$   
 e)  $4,002 \times 10^{15}$   
 f)  $9,2 \times 10^{16}$
8. Terra  $1,2756 \times 10^7\,\text{m}$ ;  
 Lua  $3,476 \times 10^6\,\text{m}$ ;  
 Sol  $1,392 \times 10^9\,\text{m}$
9. C

10. a)  $8 \times 10^{12}$   
b)  $3 \times 10^8$   
c)  $7,5 \times 10^{-9}$   
d)  $1,5 \times 10^{-11}$   
e)  $1,36 \times 10^{-6}$   
f)  $2 \times 10^2$
11. 11.1 A e B têm a mesma ordem de grandeza.  $A > B$ .  
11.2 B e C não têm a mesma ordem de grandeza.  $C > B$   
11.3 C  
11.4  $k = 6$
12. 12.1 a)  $5,5 \times 10^5$  g  
b)  $2,99 \times 10^1$  m;  $1,6 \times 10^8$  g  
c)  $1,5 \times 10^0$  g;  $2,9 \times 10^{-2}$  m  
d)  $1,6 \times 10^4$  m  
e)  $3 \times 10^6$  m  
f)  $9 \times 10^6$  óvulos;  $1 \times 10^{-3}$  m  
12.2  $1 \times 10^{-3} < 2,9 \times 10^{-2} < 1,5 \times 10^0 < 2,99 \times 10^1 < 1,6 \times 10^4 < 5,5 \times 10^5 < 3 \times 10^6 < 9 \times 10^6 < 1,6 \times 10^8$
13. D.
14. a)  $8 \times 10^7$   
b)  $4,31 \times 10^{10}$   
c)  $4,4 \times 10^{-6}$   
d)  $8,95 \times 10^8$   
e)  $3,0008 \times 10^{-5}$   
f)  $2,75245 \times 10^{12}$

#### Tarefas de investigação

Pág. 123

15. Ao cuidado do aluno.

16. Ao cuidado do aluno.

#### Atividades globais

Págs. 126 a 129

- B
- B
- B
- D
- C
- A
- B
- D
- 9.1  $2,0648 \times 10^4$  L  
9.2 19 409,12 €
- 10.1 A Joana vai à frente porque  $\frac{12}{13} > \frac{10}{11} > \frac{6}{7}$ .  
10.2 Joana: aproximadamente, 2769 m;  
Sofia: aproximadamente, 2727 m;  
D. Marta: aproximadamente, 2571 m.
- 11.1 a)  $\frac{1}{4}$  cm<sup>2</sup>      b)  $\frac{1}{16}$  cm<sup>2</sup>  
11.2  $2^{-6}$  cm<sup>2</sup>  
11.3 16 vezes.
- 12.1 0,000 000 005 segundos; 340 000 000 segundos.  
12.2 37 325 400 000 miligramas; 0,008 miligramas.  
12.3 a) 30 nm (nanómetros).  
b) 410 Ms (megassegundos).  
c) 24,75 ML (megalitros).  
12.4 Ao cuidado do aluno.

13. 13.1 Vénus, Terra, Úrano e Neptuno.  
13.2 Mercúrio; Marte; Vénus; Terra; Úrano; Neptuno; Saturno; Júpiter.  
13.3 Aproximadamente, 136 vezes.  
13.4  $6,3 \times 10^8$  km  
13.5 A massa de Saturno é aproximadamente 90 vezes maior do que a massa conjunta da Terra e de Mercúrio.  
13.6

|                     | Mercúrio | Vénus   | Terra  | Marte   |
|---------------------|----------|---------|--------|---------|
| Distância ao Sol/UA | 0,4      | ≈0,73   | 1      | ≈1,53   |
|                     | Júpiter  | Saturno | Úrano  | Neptuno |
| Distância ao Sol/UA | 5,2      | ≈9,33   | ≈19,33 | 30      |

- 13.7  $1,38 \times 10^{10}$  km
14. a)  $5^{10} = 9\,765\,625$   
b)  $\frac{53}{3}$   
c) -4  
d) 1,65 ou  $\frac{33}{20}$   
e) 8  
f)  $-\frac{19}{3}$
15. 15.1 Considerando  $n$  o número de lados do polígono da base dos sólidos, o prisma terá  $3n$  arestas e a pirâmide  $2n$  arestas. Logo, a razão entre o número de arestas de um prisma e o número de arestas de uma pirâmide com a mesma base é  $\frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$ .  
15.2 A base é um decágono: polígono com 10 lados.  
15.3 612903225806451
16. D
17. 15 mm<sup>2</sup>
18. Aos 28 dias.

#### AUTOAVALIAÇÃO

Págs. 130 e 131

1. C
2. 2.1 a)  $\frac{1}{6}$ ;  $\frac{7}{3}$ ;  $1\frac{2}{7}$ ; -0,25  
b)  $-\frac{8}{2}$ ; -0,25; 0  
c)  $-\frac{8}{2}$ ; 0; -0,25  
d)  $\frac{1}{6} \rightarrow$  período: 6 e comprimento 1,  
 $\frac{7}{3} \rightarrow$  período: 3 e comprimento 1,  
 $1\frac{2}{7} \rightarrow$  período: 285714 e comprimento 6.
- 2.2
- 
- 2.3  $\frac{7}{3} > 1\frac{2}{7} > \frac{1}{6} > 0 > -0,25 > -\frac{8}{2}$
- 2.4 Por exemplo,  $-\frac{25}{6}$ .



3. B

4. a)  $\frac{37}{36}$  b)  $\frac{16}{9}$

5. 5.1  $5,4 \times 10^3$  minutos.

5.2 O Zito assistiu a mais tempo de aulas porque  $0,585 \times 10^4 = 5,85 \times 10^3$  e  $5,85 \times 10^3 > 5,4 \times 10^3$ .

6. Aproximadamente, 3,26 anos-luz.

7. 7.1  $\frac{32}{75} = \frac{2^5}{3 \times 5^2}$  como é uma fração irredutível em que o denominador tem fatores diferentes de 2 e de 5 esta fração não é equivalente a uma fração decimal

$\frac{51}{150} = \frac{3 \times 17}{2 \times 3 \times 5^2} = \frac{17}{2 \times 5^2}$  como o denominador

não tem fatores diferentes de 2 ou de 5 esta fração é equivalente a uma fração decimal

$\frac{51}{150} = \frac{17}{2 \times 5^2} = \frac{2 \times 17}{2 \times 2 \times 5^2} = \frac{34}{100}$

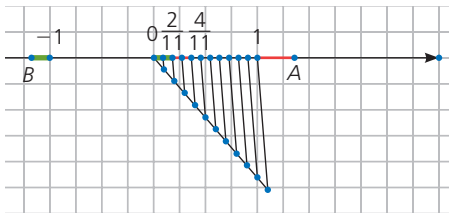
7.2  $\frac{32}{75} = 0,42(6)$

$\frac{51}{150} = \frac{34}{100} = 0,34$

8.  $2,2(31) = \frac{2209}{990}$

9.  $1,(36) = \frac{15}{11} = 1 \frac{4}{11}$

$-1,(18) = -\frac{13}{11} = -1 \frac{2}{11}$



10. 10.1  $a = 125,30241 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3} + 1 \times 10^{-4}$

10.2  $b = 2 \times 10^2 + 4 \times 10^0 + 3 \times 10^{-3} + 10^{-5} = 204,00301$

11. 11.1  $\frac{0,9 \times 10^{-6}}{35 \times 10^{-9}} \approx 25,71$

11.2  $9 \times 10^{-6} + 95 \times 10^{-6} = 104 \times 10^{-6} = 1,04 \times 10^{-4}$

11.3  $35 \times 10^{-9} + 95 \times 10^{-6} = 35 \times 10^{-9} + 95000 \times 10^{-9} = 95035 \times 10^{-9}$

$\frac{1}{95035 \times 10^{-9}} \approx 10522$

## 4 NÚMEROS REAIS

Págs. 136 a 173

### Atividades iniciais

Pág. 137

1. 1.1  $\frac{2}{3} = 0,(6)$ ;  $4 = 4,0$ ;  $\frac{13}{8} = 1,625$ ;  $\frac{9}{22} = 0,4(09)$ ;  $-10 = -10,0$ ;  $\frac{6}{7} = 0,(857142)$ .

1.2 Finitas: 4,0; 1,625; -10,0.

Infinitas periódicas: 0,(6); 0,4(09); 0,(857142).

1.3 0,(6) tem período 6; 0,4(09) tem período 09; 0,(857142) tem período 857142.

2.

|     | IN | Z | Q |
|-----|----|---|---|
| 9   | ∈  | ∈ | ∈ |
| -6  | ∉  | ∈ | ∈ |
| 4,5 | ∉  | ∉ | ∈ |
| 0   | ∉  | ∈ | ∈ |

3. 3.1  $\frac{1}{37} = 0,(027)$ ;  $\frac{2}{37} = 0,(054)$ ;  $\frac{3}{37} = 0,(081)$ ;

$\frac{4}{37} = 0,(108)$ ;  $\frac{5}{37} = 0,(135)$

3.2  $\frac{6}{37} = 0,(162)$ ;  $\frac{7}{37} = 0,(189)$

3.3  $\frac{38}{37} = 1,(027)$ ;  $\frac{39}{37} = 1,(054)$ ;  $\frac{40}{37} = 1,(081)$

3.4 Divide-se o numerador por 37: o quociente obtido dá a parte inteira da dízima; o resto obtido multiplicado por 27 indica o período da dízima.

4. 2

## 4.1 Conjunto dos números reais

Pág. 138

### Tarefa 1:

1. a)  $\frac{3}{8}$ ;  $\frac{12}{3}$ ;  $\sqrt{4}$ ;  $\frac{1}{32}$

b)  $\frac{7}{9}$ ;  $\frac{6}{11}$ ;  $\frac{5}{24}$

2. Dízimas infinitas não periódicas.

Por exemplo: 0,505005000500005...

3. Representa-se por uma dízima infinita periódica.

### Verificar a aprendizagem

Pág. 145

1. 1.1 a)  $\sqrt{81}$ ;  $\sqrt{\frac{25}{4}}$ ;  $-\sqrt[3]{27}$

b)  $-\frac{17}{3}$ ;  $\frac{50}{13}$

c)  $-\sqrt{27}$ ;  $-\sqrt{\frac{1}{6}}$

1.2 a)  $\sqrt{81}$

b)  $\sqrt{81}$ ;  $-\sqrt[3]{27}$

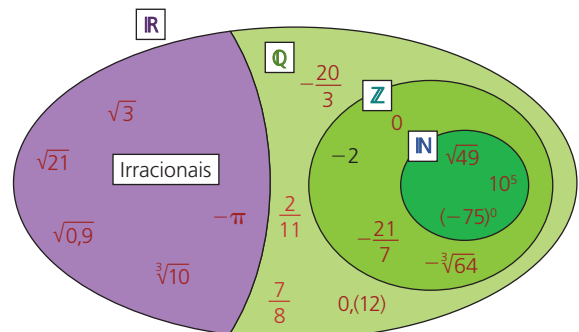
c)  $-\frac{17}{3}$ ;  $\sqrt{81}$ ;  $\sqrt{\frac{25}{4}}$ ;  $-\sqrt[3]{27}$ ;  $\frac{50}{13}$

d)  $-\sqrt{27}$ ;  $-\sqrt{\frac{1}{6}}$

e) Todos.

2. B

3.



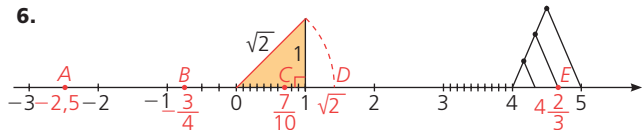
4. A. Verdadeiro.

B. Falso, porque  $-\sqrt{25} = -5$ . Os números naturais são os inteiros positivos.

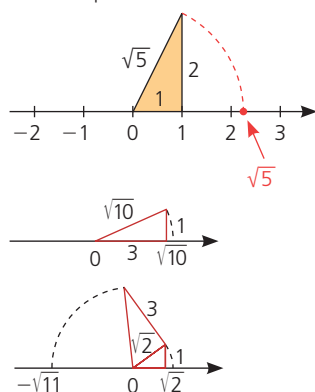
- C. Falso, porque  $\mathbb{R}^+$  é o conjunto dos números reais positivos.  
 D. Verdadeiro.  
 E. Verdadeiro.  
 F. Falso, porque  $\sqrt{9} = 3$ , que é um número racional.

5. Ao cuidado do aluno.

6.



7. Por exemplo:



#### Aplicar

Pág. 146

8. Por exemplo,  $\sqrt{20}$ .  
 9.1 a) 1415 b) 0090 c) 4045  
 9.2 Ao cuidado do aluno.  
 10. O período é constituído por 6 algarismos (692307) e repete 12 vezes até à 72.ª casa decimal. Assim, a 75.ª casa decimal é um 2.  
 11. A:  $\sqrt{29}$   
 B:  $-\sqrt{\frac{45}{4}}$   
 C:  $3 + \sqrt{2}$   
 12. D  
 13. 13.1 a) 012345679  
 b) 1176470588235294  
 c) 285714  
 d) 157894736842105263  
 13.2 Por exemplo,  $\frac{25}{59}$ .

#### Tarefa de investigação

Pág. 146

14. 14.1  $\sqrt{3}$   
 14.2 São as raízes quadradas dos números inteiros superiores a 1:  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \dots$   
 14.3 Ao cuidado do aluno.

## 4.2

Operações com números reais — Pág. 147

#### Tarefa 2:

1. A.  $4 \times \sqrt{72}$   
 B.  $28 + 4 \times \sqrt{2}$   
 C.  $20 \times \sqrt{3}$   
 2. A. 12  
 B.  $7 \times \sqrt{2} + 2$   
 C.  $5 \times \sqrt{6}$

#### Verificar a aprendizagem

Pág. 151

1. A — 6; B — 3; C — 7;  
 D — 5; E — 9; F — 2;  
 G — 4; H — 1; I — 10;  
 J — 8.  
 2. a)  $14\pi$   
 b)  $-7\sqrt{8}$   
 c)  $10\sqrt{13}$   
 d)  $-2\sqrt{2}$   
 e)  $-3\sqrt{5}$   
 f)  $-\sqrt{6}$   
 g)  $4\sqrt[3]{5}$   
 h)  $-3\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{5}$   
 i)  $4\sqrt[3]{2}$   
 3. Por exemplo,  
 $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ , mas  $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ .  
 4. D  
 5. a) 10  
 b)  $-120$   
 c)  $2\sqrt{5} - \sqrt{15}$   
 d)  $1 + \sqrt{3}$   
 e) 12  
 f)  $16\sqrt{3}$   
 g) 6  
 h) 2  
 i) 12  
 j)  $-3\sqrt[3]{9}$   
 k)  $\sqrt[3]{10}$   
 6. a) 11  
 b) 9  
 c)  $4\sqrt{2}$   
 d) 4  
 e)  $3\sqrt[3]{3}$   
 f)  $-5\sqrt[3]{5}$   
 7. a) 175  
 b)  $\frac{1}{3}$   
 c)  $\frac{1}{6}$   
 d)  $3\sqrt{3}$   
 e) 8  
 f)  $25\sqrt{5}$   
 g) 200  
 h)  $\frac{1}{16}$   
 i) 8  
 j)  $4\sqrt[3]{2}$   
 k) 4  
 l) 5

#### Aplicar

Pág. 152

8. Ao cuidado do aluno.  
 9.  $(2 - \sqrt{7})^2 + (2 + \sqrt{7})^2 = 22$

10. 10.1 a)  $2\sqrt{2}$   
 b)  $2\sqrt{5}$   
 c)  $3\sqrt{3}$   
 d)  $3\sqrt{5}$   
 e)  $5\sqrt{3}$   
 f)  $10\sqrt{2}$   
 10.2 a)  $3\sqrt[3]{2}$   
 b)  $6\sqrt[3]{2}$   
 c)  $3\sqrt[3]{7}$   
 d)  $3\sqrt[3]{3}$   
 e)  $5\sqrt[3]{4}$   
 f)  $2\sqrt[3]{5}$

11. a)  $-3\sqrt{2} - \sqrt{6}$   
 b)  $\sqrt{3}$   
 c)  $\frac{7\sqrt{7}}{6}$   
 d)  $\sqrt{33} + 22$   
 e)  $5 - 5\sqrt{2}$   
 f)  $2\sqrt{3}$   
 g)  $7 + 2\sqrt{10}$   
 h)  $-4$   
 i)  $4\sqrt{6} - 7\sqrt{2}$   
 j)  $2\sqrt[3]{3}$   
 k)  $\sqrt[3]{4} - 3$   
 l)  $5\sqrt[3]{3}$

12.  $1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} =$  e  $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 =$   
 $= \frac{2 + 1 + \sqrt{5}}{2} =$   $= \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{2^2} =$   
 $= \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$   $= \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} =$   
 $= \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} =$   
 $= \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

13. 13.1 O primeiro, de dimensões 3 e  $6 + 6\sqrt{5}$  não é retângulo áureo. O segundo, de dimensões 4 e  $2 + 2\sqrt{5}$  é um retângulo áureo.

13.2  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}$

14. a)  $6\pi$   
 b)  $2\sqrt{6} + 2\sqrt{22}$   
 c)  $\sqrt{132} = 2\sqrt{33}$

15. 15.1  $\overline{EF} = 2 \text{ cm}$   
 15.2  $4 + 2\sqrt{8} \text{ cm}$   
 15.3  $6 \text{ cm}^2$

16. 16.1  $\sqrt{10} \text{ cm}$   
 16.2 Ao cuidado do aluno.  
 16.3  $P = 8\sqrt{5} \text{ cm}; A = 20 \text{ cm}^2$

17. Ao cuidado do aluno.

18.  $\sqrt{2}^n$  é racional se  $n$  for par e é irracional se  $n$  for ímpar.

19. 3

20. Ao cuidado do aluno.

## 4.3

## Relação de ordem em IR Pág. 155

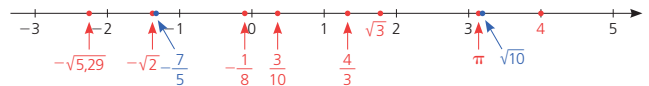
## Tarefa 3:

1. 1.º Joana; 2.º Sofia; 3.º Zito; 4.º Diogo.  
 2. a) Todos.  
 b)  $6,28311; \frac{377}{60}; \frac{6281}{1000}$   
 c)  $6,28311; \frac{377}{60}$ .  
 d)  $6,28311$

## Verificar a aprendizagem

Pág. 158

1. 1.1



- 1.2

$$-\sqrt{5,29} < -\sqrt{2} < -\frac{7}{5} < -\frac{1}{8} < \frac{3}{10} < \frac{4}{3} < \sqrt{3} < \pi < \sqrt{10} < 4$$

2. a) >  
 b) >  
 c) <  
 d) >  
 e) <  
 f) >  
 g) <  
 h) >  
 i) <  
 3. a) mais  
 b) >  
 c) mais baixa  
 d)  $x < \sqrt{12}$   
 4. a) 4,90  
 b) 3,606  
 c) 8  
 d) 3,5  
 e) Por exemplo, 2,3.  
 f) Por exemplo, 3,31.  
 g) Por exemplo, 2,5.  
 h) Por exemplo, 1,41.

5. «O número  $\sqrt{8}$  está compreendido entre 2,8 e 2,9» ou « $\sqrt{8}$  é superior a 2,8 e inferior a 2,9».  
 6. a)  $1 < \sqrt{3} < 2$   
 b)  $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$   
 c)  $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$   
 d)  $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$   
 7. 7.1 a) 11 kg  
 b) 10,8 kg  
 7.2 a) 3,62 €  
 b) 4,03 €

8. Entre 1528 e 1608.
9. Não, porque, no máximo, percorreu 1674 km.
10. 10.1  $\frac{22}{7} > 3\frac{16}{113} > 3,1415 > \sqrt{9,86}$
- 10.2 O Zito.
- 10.3 A aproximação da Sofia é superior à da Joana.
- 10.4 a)  $3 < \pi < 4$   
 b)  $3,1 < \pi < 3,2$   
 c)  $3,14 < \pi < 3,15$   
 d)  $3,141 < \pi < 3,142$
- 10.5 3,146  
 O erro cometido é aproximadamente 0,00467.

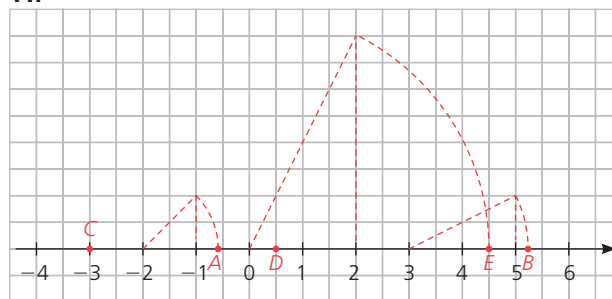
## Tarefa de investigação

11. 11.1  $\sqrt{20}$
- 11.2  $4,4 < \sqrt{20} < 4,5$ ;  $4,47 < \sqrt{20} < 4,48$ ;  $4,472 < \sqrt{20} < 4,473$ ;  $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ ;  $4,47213 < \sqrt{20} < 4,47214$ ;  $4,472135 < \sqrt{20} < 4,472136$ ; ...
- 11.3 Ao cuidado do aluno.
12. Ao cuidado do aluno.

## Atividades globais

1. D
2. C
3. A
4. B
5. A
6. C
7. C
8. B
9. 9.1  $-\sqrt{0,64}$ ;  $\frac{7}{10}$
- 9.2  $3\sqrt{8}$ ;  $\sqrt{8}$
- 9.3 a)  $-2\sqrt{8}$   
 b) 24
- 9.4  $-\frac{7}{6} < -\frac{8}{7} < -\sqrt{0,64} < \frac{7}{10} < \frac{127}{45} < \sqrt{8} < 3\sqrt{8}$
- 9.5  $2,82 < \sqrt{8} < 2,83$
- 9.6  $-1$ ;  $0$ ;  $1$ ;  $2$
10. A  $\curvearrowright -\sqrt{5}$   
 B  $\curvearrowright \sqrt{13}$   
 C  $\curvearrowright 6 + \sqrt{5}$   
 D  $\curvearrowright 4,5$   
 E  $\curvearrowright -5 + \sqrt{2}$   
 F  $\curvearrowright -\sqrt{10}$

11.



12. 12.1  $\sqrt{2,5}$  é irracional, pois  $\sqrt{2,5} = \sqrt{\frac{25}{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$  e 10 não é quadrado perfeito.
- 12.2 O número natural em questão tem de ser quadrado perfeito.
13. A. Verdadeira  $-(\sqrt{5})^3 = (-\sqrt{5})^3 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -(\sqrt{5})^2 \times \sqrt{5} =$   
 $= (-\sqrt{5})^2 \times (-\sqrt{5}) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -5\sqrt{5} = 5 \times (-\sqrt{5})$
- B. Falso  $-(\sqrt{3})^4 = (-\sqrt{3})^4 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -(\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3})^2 =$   
 $= (-\sqrt{3})^2 \times (-\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -9 = 9$
- C. Falso  $-(\sqrt[3]{2})^4 = (-\sqrt[3]{2})^4 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -(\sqrt[3]{2})^3 \times \sqrt[3]{2} =$   
 $= (-\sqrt[3]{2})^3 \times (-\sqrt[3]{2}) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -2\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$
- D. Verdadeira  $-(\sqrt[3]{12})^5 = (-\sqrt[3]{12})^5 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -(\sqrt[3]{12})^3 \times (\sqrt[3]{12})^2 =$   
 $= (-\sqrt[3]{12})^3 \times (-\sqrt[3]{12})^2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -12 \times (\sqrt[3]{12})^2 =$   
 $= -12 \times (-\sqrt[3]{12})^2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -12 \times \sqrt[3]{144} =$   
 $= -12 \times \sqrt[3]{144}$
- E. Verdadeira  $(\sqrt[3]{-8})^2 = (-\sqrt[3]{8})^2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (-2)^2 = (-2)^2$
14. Não são equivalentes.
15. 2,3 ; 2,4 ; 2,5 e 2,6
16. a)  $-5 < -\sqrt{20} < -4$   
 b)  $9 < \frac{48}{5} < 10$   
 c)  $1 < \pi - 2 < 2$   
 d)  $-3 < -2,751 < -2$
17. a) 3, 4, 5 e 6  
 b) 2 e 3
18. 18.1  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$  cm  
 18.2 Área =  $12 \text{ cm}^2$ ; perímetro =  $8\sqrt{3}$  cm

## SOLUÇÕES

- 18.3 a)  $9,797 < 2\sqrt{24} < 9,798$   
 b)  $6,898 < 2 + \sqrt{24} < 6,899$   
 c)  $14,696 < \sqrt{24} + 2\sqrt{24} < 14,697$

19. a)  $\sqrt{7} + 1 < \frac{8}{3} + 1$

b)  $2\sqrt{7} < \frac{16}{3}$

c)  $-\sqrt{7} > -\frac{8}{3}$

d)  $\sqrt{7} - \frac{1}{3} < \frac{7}{3}$

20. a)  $x < 3$

b)  $-2a < -2b$

c)  $\sqrt{3x} < \sqrt{3y}$

21. Ao cuidado do aluno.

22. 22.1 5 cm

22.2  $\sqrt{29}$  cm

22.3  $7 + \sqrt{29}$  cm

22.4  $4\sqrt{13}$  cm<sup>2</sup>

22.5  $8 + 2\sqrt{13} \approx 15,21$  cm

23. 23.1 a)  $\overline{MC} = \sqrt{5}$  cm

b)  $\overline{AE} = 1 + \sqrt{5}$  cm

23.2 O retângulo  $[AEFD]$  é um retângulo de ouro.

23.3 Perímetro =  $6 + 2\sqrt{5}$  cm; área =  $2 + 2\sqrt{5}$  cm<sup>2</sup>

23.4 Sempre que se aplique este processo na construção de um retângulo obtém-se um retângulo de ouro.

24. C

25. D

26. 420

27. É mais barato enviar os dois artigos sob a forma de dois envios separados (1,71 zedes) do que através de um envio único (1,75 zedes).

### AUTOAVALIAÇÃO

Págs. 168 e 169

1. B

2. A conjectura é falsa porque, por exemplo,  $\frac{7}{3}$  é uma dízima infinita periódica, mas  $\frac{3}{7}$  não é uma dízima finita.

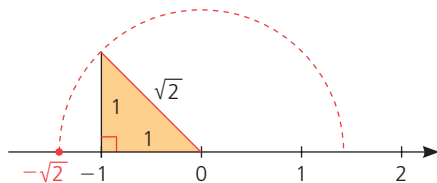
3. 3.1 a)  $-\frac{21}{7}; \sqrt{16}$

c)  $-\sqrt{2}$

b)  $-\frac{21}{7}; \sqrt[3]{1,728}; -\frac{3}{5}; \sqrt{16}$

d) Todos.

3.2



3.3  $-\frac{3}{5}$

4. C

5. a)  $-\pi$

b)  $\sqrt{2} + \sqrt{30}$

c)  $8\sqrt{3}$

d)  $16 + 6\sqrt{7}$

6. a)  $8\sqrt{5} + 16\sqrt{3}$

b) Por exemplo, 45,61.

c)  $32\sqrt{15}$

d)  $123,93 < 32\sqrt{15} < 123,94$

7. 7.1 a)  $2\sqrt{17} + 8\sqrt{2}$  cm

b) 15 cm<sup>2</sup>

7.2 Ao cuidado do aluno.

8. Ao cuidado do aluno.

9. Ao cuidado do aluno.

10. 175,80 € (correspondendo a 12 sacos a 14,65 € cada).

11. 11.1 O número  $a$  não é racional, é irracional.

11.2  $b > a$

## FONTES FOTOGRÁFICAS

Capa: Esferas — Getty Images

### Casa da Imagem

- P. 7 Sapatinhas em saldo, laboratório
- P. 36 Avião a levantar voo

### Getty Images

- P. 6 Aluna a escrever no quadro
- P. 8 Alunos de braço levantado
- P. 9 Aluna a pensar
- P. 50 Dramatização
- P. 52 Parque das Nações
- P. 60 Relógio
- P. 61 Jogadores de *rugby*; homem e criança na neve
- P. 67 Jovem deitado numa boia; *skater*
- P. 116 Cozinheiros
- P. 123 Bugio

### iStockphoto

- P. 65 Passadeira de ginásio

### VMI/Corbis

- P. 147 Judocas

### ©2013 The M. C. Escher Company-Holland

- P. 95 Aquarelas 22, 67 e 21, M. C. Escher Company-Holland.  
Todos os direitos reservados

### Vários

- P. 7 Bolsa de mercadorias — Shannon Stapleton/Reuters;  
bonecos e mapa Sanja Gjenero/stock.xchng
- P. 26 Título desconhecido (Barcos), de Amadeo  
de Souza-Cardoso (1887-1918) / Fundação Calouste  
Gulbenkian
- P. 34 Escadote — Kevin Russell
- P. 39 Partida de ténis de mesa — Keith Walbolt
- P. 40 Desafio de futebol de praia — Letota
- P. 53 Calçada — Claire Gaillard
- P. 60 Janela — Jawcey; martelo e prego  
— Monika Forsyia/PhotoXpress
- P. 76 Praticante de parapente — Agata Urbaniak
- P. 86 Gavetas — Chance Agrella
- P. 87 Cidade de Viseu — Dias dos Reis
- P. 88 Calçada — Szymon; pavimento hexagonal  
— Gesine Kuhlmann; pavimento retangular  
— Herman Brinkman
- P. 97 Selo com caricatura de Mira Fernandes  
— CTT — Correios de Portugal
- P. 120 Avião *Sr-71* — NASA
- P. 121 Boeing photo
- P. 122 Edifício — Casa da Música
- P. 123 Ave — Markus Horsch
- P. 135 Papel dobrado — Nara Vieira Osga

O Projeto **Desafios** de Matemática destinado ao 8.º ano de escolaridade, 3.º Ciclo do Ensino Básico, é uma obra coletiva, concebida e criada pelo Departamento de Investigações e Edições Educativas da Santillana, sob a direção de Sílvia Vasconcelos.

#### EQUIPA TÉCNICA

Chefe de Equipa Técnica: Patrícia Boleto

Modelo Gráfico e Capa: Carla Julião

Ilustrações: Ana Mesquita, Félix e Paulo Oliveira

Paginação: Célia Neves, Leonor Ferreira e Sérgio Pires

Documentalistas: Paulo Ferreira

Revisão: Ana Abranches e Catarina Pereira

#### EDITORA

Paula Inácio

**A edição revista de acordo com as novas metas curriculares é da responsabilidade de Arnaldo Rolo e Maria Helena Lopes.**



© 2014

Rua Mário Castelhana, 40 – Queluz de Baixo  
2734-502 Barcarena, Portugal

#### APOIO AO PROFESSOR

Tel.: 214 246 901

[apoioaoprofessor@santillana.com](mailto:apoioaoprofessor@santillana.com)

#### APOIO AO LIVREIRO

Tel.: 214 246 906

[apoioaolivreiro@santillana.com](mailto:apoioaolivreiro@santillana.com)

Internet: [www.santillana.pt](http://www.santillana.pt)

Impressão e Acabamento: Lidergraf

ISBN: 978-989-708-539-0

C. Produto: 411 010 204

2.ª Edição

4.ª Tiragem

Depósito Legal: 369979/14



A **cópia ilegal** viola os direitos dos autores.  
Os prejudicados somos todos nós.