



Manuel Marques e Paula Ferreira

Componentes do projeto:

- Manual do aluno
- Caderno de atividades
- Livromédia



20,32 € IVA incluído

A Santillana publicou a obra Projeto **Desafios** Matemática 8.º ano em dois volumes para reduzir o peso a transportar pelos alunos. Os dois volumes não podem ser vendidos separadamente.



EDIÇÃO REVISTA  
DE ACORDO COM AS NOVAS  
M E T A S  
CURRICULARES

MANUAL CERTIFICADO pela Faculdade  
de Ciências da Universidade de Lisboa,  
nos termos da legislação em vigor



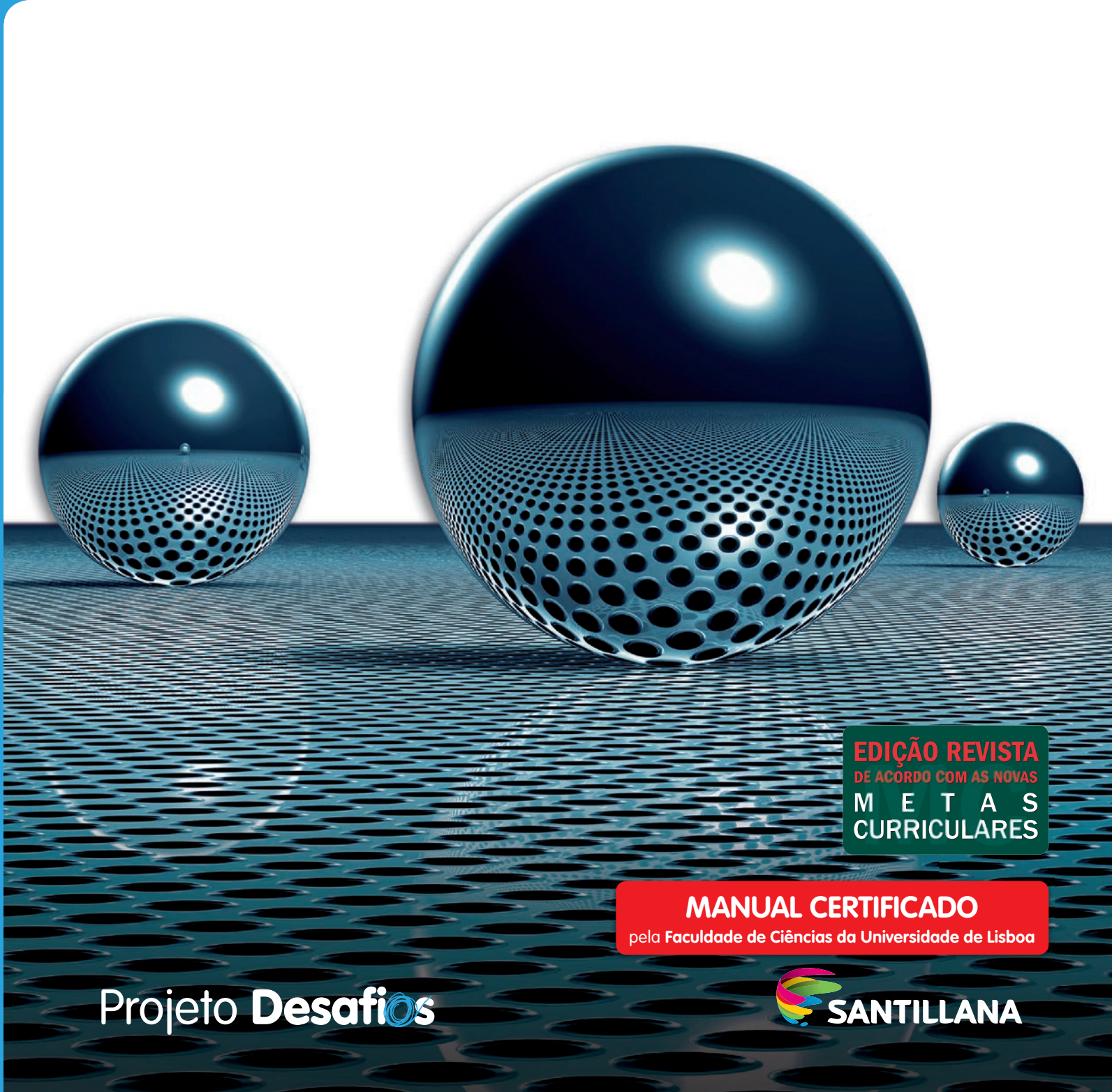
Conforme o novo  
Acordo Ortográfico  
da língua portuguesa

Projeto **Desafios**

Matemática Volume 2

Projeto **Desafios**

SANTILLANA



EDIÇÃO REVISTA  
DE ACORDO COM AS NOVAS  
M E T A S  
CURRICULARES

MANUAL CERTIFICADO  
pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa



Projeto **Desafios**



# Matemática

Volume 2

8<sup>o</sup>

## 5 GRÁFICOS DE FUNÇÕES AFINS

4



Atividades iniciais ..... 5

### 5.1 Equação de uma reta não vertical e gráfico de função linear ou afim ..... 6

Noção de função

Funções lineares e funções afins

Representação algébrica e gráfica de uma função afim

Relação entre os gráficos da função  $f$  e da função  $g$  definida por  $g(x) = f(x) + b$ 

Verificar a aprendizagem ..... 12

### 5.2 Declive e ordenada na origem de uma reta não vertical ..... 14

Parâmetro  $a$ : declive da retaParâmetro  $b$ : ordenada na origem

Relação entre o declive e paralelismo

Verificar a aprendizagem ..... 17

### 5.3 Declive de uma reta determinada por dois pontos com abscissas distintas. Equação de uma reta vertical ..... 19

Determinação do declive de uma reta

Equação de uma reta vertical

Verificar a aprendizagem ..... 22

Síntese ..... 24

Atividades globais ..... 26

Autoavaliação ..... 30

Hiperpágina

(Gráficos de funções no quotidiano) ..... 32

Investigar ..... 34

## 6 MONÓMIOS, POLINÓMIOS E EQUAÇÕES DO 2.º GRAU

36



Atividades iniciais ..... 37

### 6.1 Monómios ..... 38

Monómios

Operações com monómios

Verificar a aprendizagem ..... 40

### 6.2 Polinómios ..... 42

Polinómios

Operações com polinómios

Verificar a aprendizagem ..... 46

### 6.3 Casos notáveis da multiplicação de binómios ..... 48

Caso notável — Quadrado de um binómio

Caso notável — Produto da soma de dois monómios pela sua diferença

Fatorização de polinómios

Verificar a aprendizagem ..... 51

### 6.4 Equações do 2.º grau ..... 53

Equações do 2.º grau

Lei do anulamento do produto

Resolução de equações do 2.º grau

Verificar a aprendizagem ..... 58

Síntese ..... 61

Atividades globais ..... 64

Autoavaliação ..... 66

Estratégias para a resolução

de problemas e jogos ..... 68

Investigar ..... 70





Atividades iniciais ..... 73

## 7.1

**Equações literais** ..... 74

Resolução de equações literais

Verificar a aprendizagem ..... 76

## 7.2

**Sistemas de duas equações  
do 1.º grau com duas incógnitas** ..... 78

Definição e solução de um sistema

Verificar a aprendizagem ..... 80

## 7.3

**Interpretação geométrica  
de sistemas de duas equações  
do 1.º grau com duas incógnitas** ..... 82

Interpretação gráfica das soluções  
de um sistema

Sistema possível e determinado

Sistema impossível

Sistema possível e indeterminado

Verificar a aprendizagem ..... 85

## 7.4

**Resolução de sistemas  
de equações** ..... 87

Resolução pelo método de substituição

Resolução de problemas utilizando sistemas  
de equações

Verificar a aprendizagem ..... 90

Síntese ..... 92

Atividades globais ..... 94

Autoavaliação ..... 98

Estratégias para a resolução  
de problemas e jogos ..... 100

Investigar ..... 102



Atividades iniciais ..... 105

## 8.1

**Medidas de localização** ..... 106

Extremos e quartis

Diagramas de extremos e quartis

Verificar a aprendizagem ..... 111

## 8.2

**Medidas de dispersão** ..... 114

Amplitude

Amplitude interquartis

Verificar a aprendizagem ..... 116

Síntese ..... 118

Atividades globais ..... 120

Autoavaliação ..... 122

Utilização das TIC ..... 124

Investigar ..... 126

**SOLUÇÕES** ..... 128

**FONTES FOTOGRÁFICAS** ..... 143

# GRÁFICOS DE FUNÇÕES AFINS



Atividades iniciais ..... 5

**5.1**

**Equação de uma reta não vertical e gráfico de função linear ou afim** ..... 6

Noção de função

Funções lineares e funções afins

Representação algébrica e gráfica de uma função afim

Relação entre os gráficos da função  $f$  e da função  $g$  definida por  $g(x) = f(x) + b$

Verificar a aprendizagem ..... 12

**5.2**

**Declive e ordenada na origem de uma reta não vertical** ..... 14

Parâmetro  $a$ : declive da reta

Parâmetro  $b$ : ordenada na origem

Relação entre o declive e paralelismo

Verificar a aprendizagem ..... 17

**5.3**

**Declive de uma reta determinada por dois pontos com abscissas distintas. Equação de uma reta vertical** ..... 19

Determinação do declive de uma reta

Equação de uma reta vertical

Verificar a aprendizagem ..... 22

Síntese ..... 24

Atividades globais ..... 26

Autoavaliação ..... 30

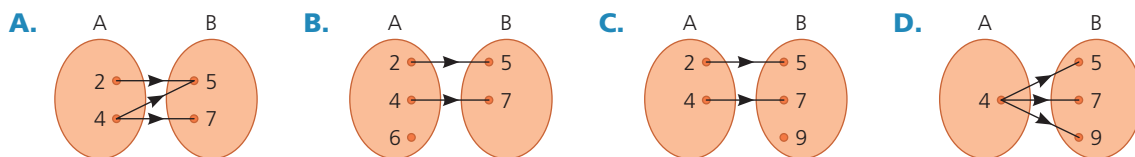
Hiperpágina (Gráficos de funções no quotidiano) ..... 32

Investigar ..... 34

## Atividades iniciais

### Conceito de função

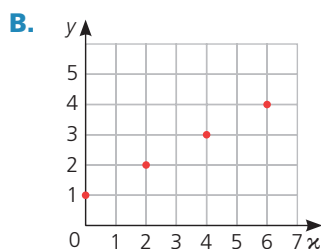
- 1 Seleciona, de entre os diagramas de setas seguintes, o que representa uma função entre o conjunto A e o conjunto B.



- 2 Considera as duas funções representadas a seguir, a função  $f$  por uma tabela e a função  $g$  por um gráfico.

A.

|     |   |   |    |    |
|-----|---|---|----|----|
| $x$ | 0 | 2 | 4  | 6  |
| $y$ | 4 | 8 | 16 | 20 |



- 2.1 Para cada uma das funções, indica:
- o domínio;
  - o contradomínio;
  - a imagem do objeto 4;
  - o objeto que tem por imagem 4.

2.2 Calcula:

a)  $(f + g)(2)$

b)  $(g(4))^2$

c)  $(g - f)(4)$

- 3 Considera a função definida pela expressão algébrica  $f(x) = 3x$ .

3.1 Qual é a imagem do objeto 15?

3.2 Qual é o objeto cuja imagem é 60?

- 4 Considera as funções definidas na forma canónica por:

$$f(x) = 3x - 2; g(x) = -2x; h(x) = 5; i(x) = -x + \frac{1}{2} \text{ e } j(x) = -\frac{x}{4}$$

- Identifica as que são lineares, as que são constantes e as que são afins.
- Identifica o coeficiente de  $x$  e o termo independente das funções  $f$  e  $g$ .
- Sem efetuar qualquer cálculo, justifica que  $f(x) + h(x)$  é uma função afim.
- Escreve na forma canónica  $f(x) + i(x)$ .

- 5 Durante o seu percurso um comboio desloca-se a uma velocidade constante. A tabela seguinte relaciona a distância percorrida com o tempo gasto a percorrê-la.

|              |     |     |     |
|--------------|-----|-----|-----|
| Tempo/horas  | 1,5 | 2   | 3   |
| Distância/km | 168 | 224 | 336 |

- Mostra que as duas grandezas são diretamente proporcionais e indica a constante de proporcionalidade.
- O que representa a constante de proporcionalidade?
- A distância é função do tempo. Escreve uma expressão algébrica que represente essa função.
- Se o comboio andar 5 horas a esta velocidade, quantos quilómetros percorrerá?

# 5.1

## Equação de uma reta não vertical e gráfico de função linear ou afim

### Tarefa 1



Como a velocidade do som (340 m/s) é muito menor do que a da luz (300 000 km/s), é possível saber a distância a que está uma trovoadas medindo o intervalo de tempo decorrido entre o relâmpago e o trovão.

A tabela ao lado relaciona o intervalo de tempo entre o relâmpago e o trovão com a distância a que se encontra a trovoadas.

| Tempo/s     | 1   | 2 | 3 | 4 |
|-------------|-----|---|---|---|
| Distância/m | 340 |   |   |   |

- 1 Copia e completa a tabela.
- 2 Escreve uma relação entre a distância,  $d$ , e o tempo,  $t$ .
- 3 Representa graficamente os dados da tabela. O que observas?

### ■ Noção de função

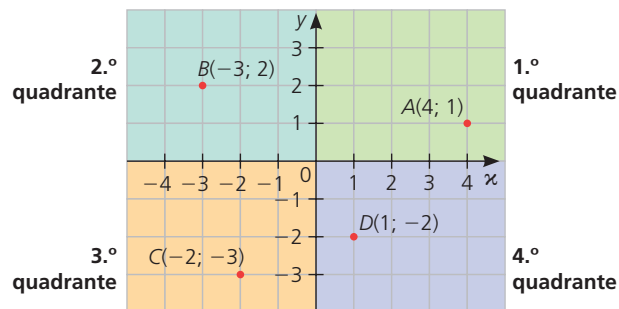
Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , uma função  $f: A \rightarrow B$  é uma correspondência entre  $A$  e  $B$  que a cada elemento de  $A$  associa um único elemento  $y = f(x)$  de  $B$ .

O conjunto  $A$  é o **domínio** de  $f$  e  $B$  é o **conjunto de chegada**.

$x$  diz-se a **variável independente** e  $y$ , a **variável dependente**.

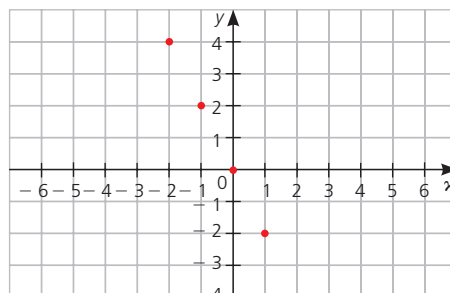
As funções numéricas de variável numérica, isto é, as funções em que tanto o domínio como o conjunto de chegada são conjuntos de números, podem representar-se graficamente num referencial cartesiano.

O referencial cartesiano tem quatro quadrantes numerados, como se mostra na figura seguinte.



O **gráfico cartesiano** de uma função  $f$  numérica de variável numérica é constituído pelos pontos do plano cuja ordenada é a imagem por  $f$  da abcissa.

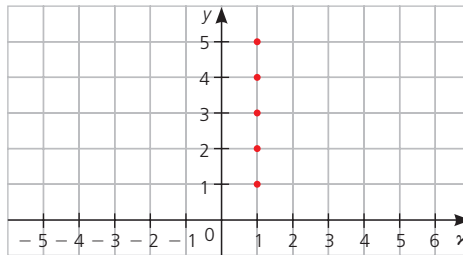
Exemplo:



$f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = -2x$



No entanto, nem todas as representações num referencial cartesiano são gráficos de funções. Por exemplo, a representação ao lado não é a representação de uma função porque ao número 1 corresponde mais do que um valor.



Em particular, as retas verticais, isto é, as retas paralelas ao eixo dos  $yy$ , não são gráficos de funções. Pode até observar-se que a interseção do gráfico de uma função com qualquer reta vertical é no máximo um ponto.

## ■ Funções lineares e funções afins

No 7.º ano estudaram-se as funções lineares e afins como funções de  $\mathbb{Q}$  em  $\mathbb{Q}$ . Estas funções podem definir-se como funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , uma vez que apenas envolvem operações algébricas agora com sentido em  $\mathbb{R}$ .

Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **linear** se existe um número **real**  $a$ , tal que  $f(x) = ax$  para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

Uma função cuja expressão algébrica é do tipo  $f(x) = ax + b$  (em que  $a$  e  $b$  são **números reais**) para todo o  $x \in \mathbb{R}$  designa-se por **função afim**.

Exemplo:

As funções  $f$  e  $g$  definidas, de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , por:

$f(x) = \sqrt{3}x$  e  $g(x) = -2x + \sqrt{2}$  são funções afins; a função  $f$  é linear.

## ■ Representação algébrica e gráfica de uma função afim

O Zito fez uma caminhada sempre ao mesmo ritmo.

Na tabela seguinte, estão apresentados alguns valores da distância percorrida pelo Zito no seu percurso, em função do tempo.

| Tempo/min   | 2   | 4   | 6   |
|-------------|-----|-----|-----|
| Distância/m | 240 | 480 | 720 |

Esta correspondência pode ser representada pela função linear de expressão algébrica  $f(x) = 120x$ .

Nesta situação, estamos perante uma função de proporcionalidade direta de constante 120.

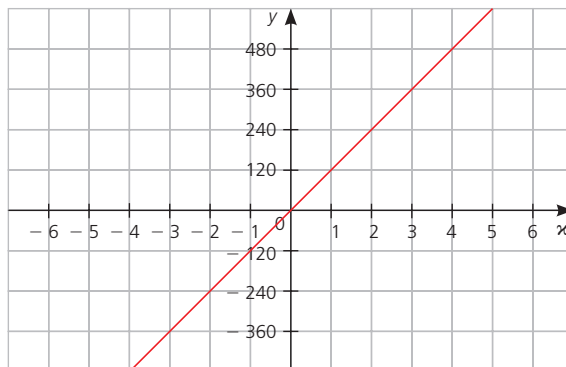
Se estendermos esta função aos números reais, isto é, se considerarmos a função linear  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 120x$  e a representarmos graficamente num referencial cartesiano obtemos uma reta que passa pela origem e pelos 1.º e 4.º quadrantes.

### Recorda

A expressão algébrica de uma **função de proporcionalidade direta** é  $y = kx$ , em que  $k$  é a constante de proporcionalidade direta ( $k$  é positivo).

### Repara

Num contexto real, o gráfico de uma relação de proporcionalidade direta está contido numa reta que passa pela origem do referencial: pode ser uma semirreta, um segmento de reta ou um conjunto de pontos que não faz sentido unir.



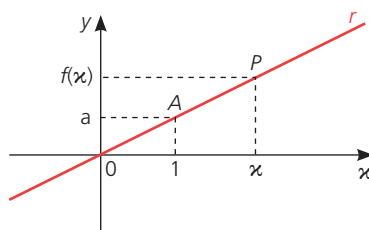
Reciprocamente, quando temos uma reta não vertical que passa pela origem do referencial, pode mostrar-se que essa reta é o gráfico de uma função linear.

As retas não verticais, num dado plano, que passam pela origem de um referencial cartesiano são os gráficos das funções lineares.

Se  $f(x) = ax$  é uma função linear, então,  $a = f(1)$  é a constante de proporcionalidade entre as ordenadas e as abscissas dos pontos da reta.

### Demonstração:

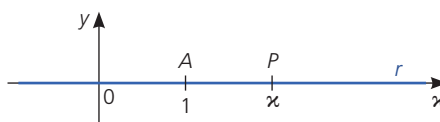
Considere-se um referencial cartesiano num plano e uma reta  $r$  não vertical que passa na origem do referencial.



Como  $r$  não é vertical, não é paralela a nenhuma reta vertical, pelo que intersecta qualquer reta vertical em exatamente um ponto. Assim, para cada  $x \in \mathbb{R}$  existe um único ponto da reta  $r$  que tem  $x$  por abscissa. A reta  $r$  é, portanto, o gráfico da função  $f$  que associa a cada  $x \in \mathbb{R}$  a ordenada  $y$  do ponto de  $r$  de abscissa  $x$ .

Seja  $a = f(1)$ .

- Se  $a = 0$ , a reta  $r$  passa pelo ponto  $(0, 0)$ , pois é uma reta que passa na origem do referencial, e pelo ponto  $(1, 0)$ , porque  $0 = f(1)$ , logo, coincide com o eixo das abscissas. Assim,  $f$  é a função nula,  $f(x) = 0$ , logo,  $f$  é a função linear de coeficiente igual a  $0 = f(1)$ .



- Se  $a > 0$ , a reta  $r$  passa na origem e pelos 1.º e 3.º quadrantes.

Seja  $P$  um ponto da reta  $r$  do 1.º quadrante de coordenadas  $(x, f(x))$ .

Pelo Teorema de Tales, pode afirmar-se que  $\frac{f(x)}{a} = \frac{x}{1}$ , o que é equivalente a  $f(x) = ax$ .

Se  $P$  for um ponto do 3.º quadrante concluímos igualmente que  $f(x) = ax$ .

- Se  $a < 0$ , a reta  $r$  passa na origem e nos 2.º e 4.º quadrantes. Um raciocínio semelhante ao anterior conduz-nos à mesma conclusão:  $f(x) = ax$  onde  $a = f(1)$ .

Desta forma,  $f(x) = ax$ , logo,  $t$  é uma função linear e o coeficiente  $a$  é a constante de proporcionalidade direta entre a ordenada e a abscissa dos pontos da reta.

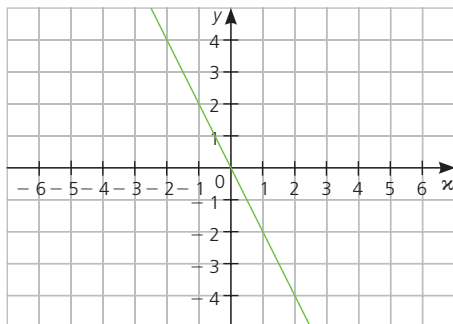
Reciprocamente, dada uma função  $f$  linear, da forma  $f(x) = ax$ , a reta determinada pelos pontos de coordenadas  $(0, 0)$  e  $(1, a)$  é o gráfico de  $f$ , pelo que o gráfico de  $f$  é, de facto, uma reta não vertical que passa pela origem. Diz-se que  $y = ax$  é a equação dessa reta. Se o referencial for ortogonal e monométrico chama-se a  $a$  **declive da reta**.

Exemplo:

Vamos representar graficamente a função linear definida por  $f(x) = -2x$ .

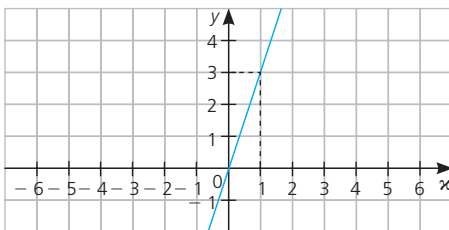
O seu gráfico é a reta de equação  $y = -2x$ . O declive desta reta é  $-2$ . Como  $f(0) = 0$  e  $f(1) = -2$  e dois pontos bastam para traçar uma reta, obtém-se:

| $x$ | $f(x)$ |
|-----|--------|
| 0   | 0      |
| 1   | -2     |



### Exercício resolvido

Considera a reta representada no referencial, indica o seu declive e escreve a sua equação.



### Resolução:

Repara que a reta é não vertical e passa pela origem do referencial, pelo que é um gráfico de função linear, ou seja, do tipo  $f(x) = ax$ .

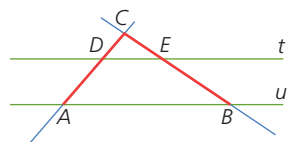
Como a reta  $r$  passa pelo ponto de coordenadas  $(1, 3)$ , então  $f(1) = 3$ , pelo que  $a = 3$ , ou seja, o declive de  $r$  é 3 e a sua equação é  $y = 3x$ .

### Recorda

#### Teorema de Tales

Se, no mesmo plano, duas retas paralelas intersectam duas retas concorrentes, os triângulos obtidos têm os comprimentos dos lados correspondentes diretamente proporcionais.

$$\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{CE} = \frac{AB}{DE}$$



### Recorda

Um **referencial** é **ortogonal** se os eixos forem perpendiculares. No nosso estudo todos os referenciais são ortogonais. Um **referencial** é **monométrico** quando a unidade de comprimento é a mesma para ambos os eixos.

### Recorda

Se  $a > 0$ , então,  
 $|a| = a$ .

Se  $a < 0$ , então,  
 $|a| = -a$ .

### Exercício resolvido

Considera o referencial cartesiano da figura ao lado, onde está representada a reta, não vertical,  $r$ . A reta  $r$  passa na origem do referencial e no ponto  $P_1(2,2; -1,54)$ .

Determina uma equação da reta  $r$  utilizando o Teorema de Tales.

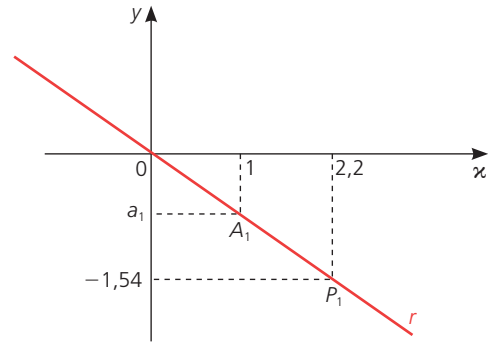
#### Resolução:

Começemos por determinar a constante de proporcionalidade.

Pelo Teorema de Tales, podemos afirmar que  $\frac{|-1,54|}{|a_1|} = \frac{2,2}{1}$ , o que é equivalente a  $1,54 = |a_1| \times 2,2$ , ou seja,  $|a_1| = \frac{1,54}{2,2} = 0,7$ .

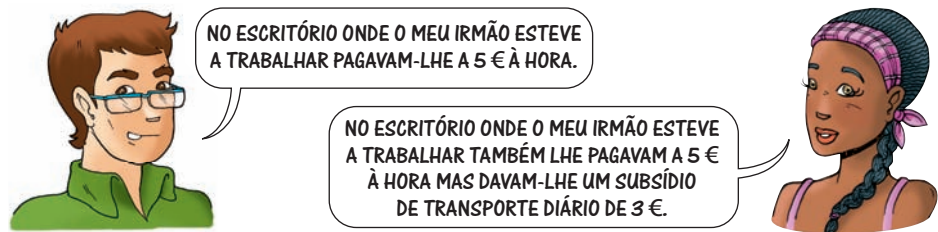
Como  $a_1 < 0$ , então,  $a_1 = -0,7$ .

Assim, para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -0,7x$  representa uma função linear cujo gráfico é a reta  $r$  de equação:  $y = -0,7x$ .



## Relação entre os gráficos da função $f$ e da função $g$ definida por $g(x) = f(x) + b$

Durante as férias da Páscoa os irmãos mais velhos do Diogo e da Joana foram trabalhar para escritórios a fazer entrega de documentos.



Considerem-se as funções  $f$  e  $g$  que a  $x$  horas de trabalho diário — respetivamente dos escritórios onde trabalhara o irmão do Diogo e o irmão da Joana — fazem corresponder o valor a receber ao fim do dia.

O valor a receber por cada um, em função do número de horas de trabalho pode ser representado por uma função.

No caso do escritório onde trabalhou o irmão do Diogo, o valor a receber é dado pela expressão  $y = 5x$ .

No caso do escritório onde trabalhou o irmão da Joana, o valor a receber é dado pela expressão  $y = 5x + 3$ .

Considera as funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = 5x$  e  $g(x) = 5x + 3$ .

Já sabes representar graficamente a função  $f(x) = 5x$ .

### Recorda

Qualquer função afim é a soma de uma função linear com uma constante.



Vamos agora representar graficamente a função  $g(x) = 5x + 3$ .

Repara que  $g(x) = f(x) + 3$ .

A imagem por  $g$  de um número é igual à soma da imagem desse número por  $f$  com 3.

Graficamente, corresponde a deslocar a reta 3 unidades na vertical para cima.

Mais precisamente, verifica-se que o gráfico da função  $g$  se obtém do gráfico da função  $f$  pela translação de vetor  $\vec{OB}$ , em que  $O$  é a origem do referencial e  $B$  é o ponto de coordenadas  $(0, 3)$ .

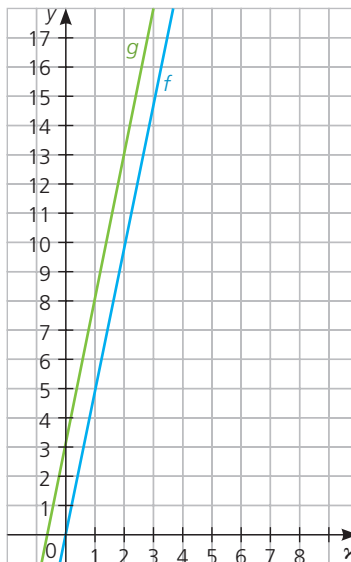
A imagem do ponto  $A$  do gráfico de  $f$ , de coordenadas  $(1, 5)$ , pela translação de vetor  $\vec{OB}$  é o ponto  $C = A + \vec{OB}$ . Assim,  $\vec{AC} = \vec{OB}$ .

A reta  $AC$  é paralela à reta  $OB$ , ou seja, ao eixo dos  $yy$ , então,  $C$  e  $A$  têm a mesma abscissa:  $x_c = 1$ .

A ordenada do ponto  $C$  é  $y_c = f(1) + 3 = 5 + 3 = 8 = g(1)$ .

Então, o ponto  $C$  tem coordenadas  $(1, g(1))$ . Logo,  $C$  pertence ao gráfico de  $g$ .

Como  $\vec{OB} = \vec{AC}$ , os segmentos orientados  $[O, B]$  e  $[A, C]$  são equipolentes, pelo que  $[OBCA]$  é um paralelogramo e, como tal, as retas  $OA$  e  $BC$  são paralelas. Assim, as retas que representam as funções  $f(x) = 5x$  e  $g(x) = 5x + 3$  são paralelas.



Dada uma função  $f$ , o gráfico da função  $g$  definida pela expressão  $g(x) = f(x) + b$ , com  $b \in \mathbb{R}$ , obtém-se do gráfico da função  $f$  pela translação de vetor  $\vec{OB}$  onde  $O$  é o ponto de coordenadas  $(0, 0)$  e  $B$  é o ponto de coordenadas  $(0, b)$ .

Se o gráfico de  $f$  é a reta  $r$  de equação  $y = ax$ , então, o gráfico de  $g$  é a **reta paralela a  $r$**  de equação  $y = ax + b$ .

As retas não verticais são os gráficos das funções afins.

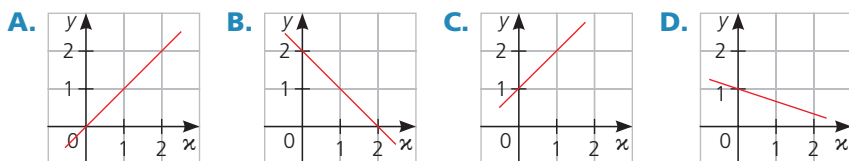
### O que deves saber

- Identificar e representar o gráfico de uma função linear.
- Determinar a expressão algébrica de uma função linear.
- Como obter o gráfico da função  $g$  definida por  $g(x) = f(x) + b$ , através do gráfico da função  $f$ .

## Verificar a aprendizagem

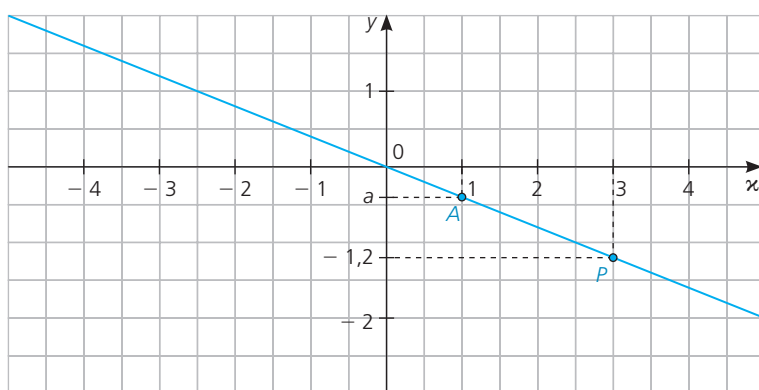
### REPRESENTAR UMA FUNÇÃO LINEAR

- 1 Selecciona, de entre os gráficos seguintes, o que representa uma função linear.



- 2 Considera o referencial cartesiano da figura seguinte onde está representada a reta  $r$ , não vertical. A reta  $r$  passa na origem do referencial e no ponto  $(3; -1,2)$ .

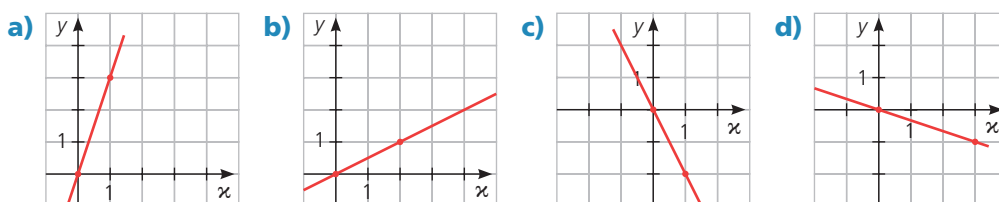
Determina uma equação da reta  $r$  utilizando o Teorema de Tales.



- 3 Num referencial cartesiano, representa graficamente as funções lineares seguintes.

a)  $f(x) = x$     b)  $f(x) = 2x$     c)  $f(x) = 5x$     d)  $f(x) = -x$     e)  $f(x) = -3x$

- 4 Em cada caso, determina a expressão algébrica da função representada graficamente.



**AUTOAVALIAÇÃO** Sei representar gráfica e algebricamente uma função linear?

### REPRESENTAR UMA FUNÇÃO AFIM

- 5 Para cada uma das funções apresentadas a seguir, copia e completa a tabela; de seguida, representa graficamente a função num referencial cartesiano.

a)  $f(x) = x + 1$

b)  $g(x) = 2x - 3$

c)  $h(x) = -3x + 5$

d)  $i(x) = 4$

| $x$ | $y = x + 1$ | $(x; y)$ |
|-----|-------------|----------|
| 0   | $y =$       | $A( ; )$ |
| 2   | $y =$       | $B( ; )$ |

| $x$ | $y = 2x - 3$ | $(x; y)$ |
|-----|--------------|----------|
| 0   | $y =$        | $C( ; )$ |
| 2   | $y =$        | $D( ; )$ |

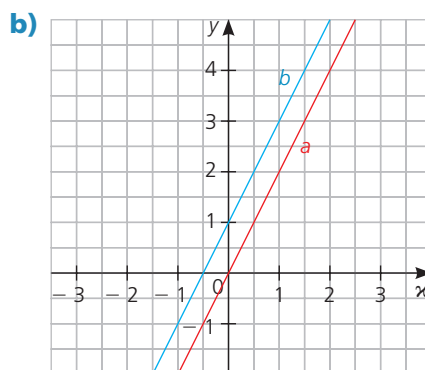
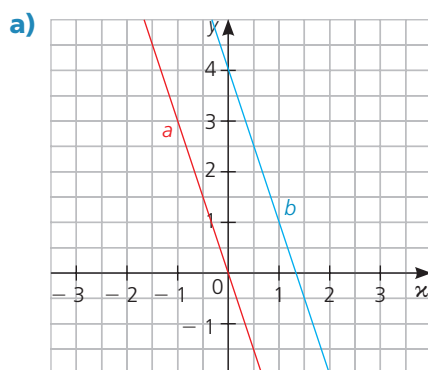
| $x$ | $y = -3x + 5$ | $(x; y)$ |
|-----|---------------|----------|
|     | $y =$         | $E( ; )$ |
|     | $y =$         | $F( ; )$ |

| $x$ | $y = 4$ | $(x; y)$ |
|-----|---------|----------|
|     |         | $G( ; )$ |
|     |         | $H( ; )$ |

- 6 Descreve o gráfico de uma função constante  $f(x) = b$  (em que  $b$  é um número real).

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei representar gráfica e algebricamente uma função afim?

- 7 Explica como, para cada situação representada nos gráficos, se pode obter o gráfico da reta  $b$  a partir do gráfico da reta  $a$ .

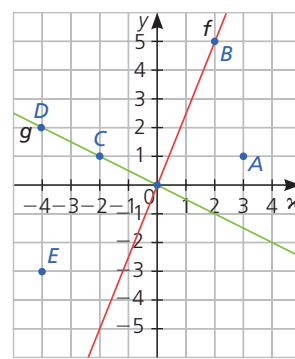


### Aplicar

- 8 No referencial ao lado, estão traçadas duas retas que são representações gráficas de duas funções,  $f$  e  $g$ .

A expressão algébrica da função  $f$  é  $f(x) = 2,5x$ .

- 8.1 Determina as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$ .  
 8.2 Determina a expressão algébrica das funções  $f$  e  $g$  recorrendo ao Teorema de Tales.  
 8.3 A reta  $AE$  representa uma função linear? Justifica a tua resposta.



- 9 Considera a função de expressão algébrica  $f(x) = \frac{3}{2}x$ .

9.1 Copia e completa a tabela:

|            |    |    |    |   |   |     |
|------------|----|----|----|---|---|-----|
| $x$        | -4 | -2 | -1 |   | 1 |     |
| $y = f(x)$ |    |    |    | 0 |   | 4,5 |

9.2 Representa os dados da tabela num referencial e traça uma representação gráfica da função.

9.3 O ponto de coordenadas (24; 35) pertence ao gráfico da função  $f$ ? Justifica a tua resposta.

- 10 Num referencial cartesiano, o Jaime traçou uma reta que representa uma função linear.

Menciona uma isometria que permita transformar essa reta noutra reta diferente, mas que seja também o gráfico de uma função linear.

### Tarefas

- 11 De que modo o parâmetro  $a$ , em  $y = ax$ , influencia a inclinação da reta que representa o gráfico de uma função linear?
- 12 As expressões algébricas seguintes representam retas. Ordena as retas da menos inclinada à mais inclinada.

A.  $y = \frac{1}{9}x$     B.  $y = \frac{7}{3}x$     C.  $y = \frac{8}{6}x$     D.  $y = \frac{3}{4}x$     E.  $y = \frac{4}{5}x$

**SUGESTÃO:** Confirma a tua resposta construindo as cinco retas num mesmo referencial, com recurso a um software de representação de gráficos (consulta a página 34).

# 5.2

## Declive e ordenada na origem de uma reta não vertical

### Tarefa 2



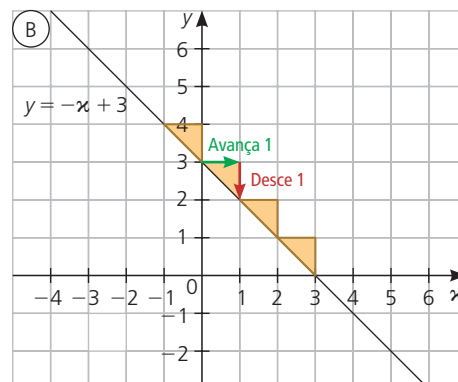
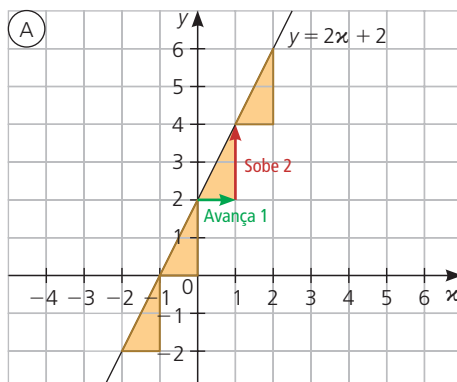
Uma nova loja de aluguer de filmes em *blu-ray* abriu na rua do Zito. Os clientes podem escolher entre três modos de pagamento:

- tarifário A: 4 € por filme;
- tarifário B: 10 € por mês, mais 2 € por filme;
- tarifário C: 25 € por mês (independentemente do número de filmes).

- 1 Na tua opinião, qual é o melhor tarifário?
- 2 Representa graficamente a relação entre o número de filmes e o preço, para cada um dos tarifários.

### Parâmetro $a$ : declive da reta

A Joana está a observar a representação gráfica das funções afins definidas por  $y = 2x + 2$  e  $y = -x + 3$



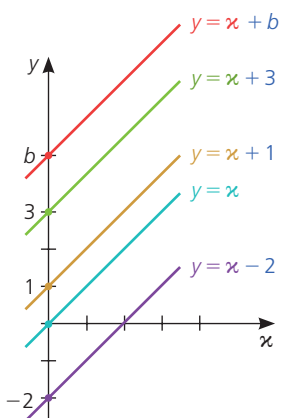
#### Nota

- Numa reta horizontal, que corresponde a uma função constante ( $f(x) = b$ ), o declive é **zero**.
- Não se define declive de uma reta vertical.

O parâmetro  $a$  na expressão  $y = ax + b$  chama-se **declive da reta** quando o referencial é ortogonal e monométrico.

O declive está relacionado com a **inclinação da reta**: sempre que  $x$  aumenta 1 unidade, o declive indica quantas unidades  $y$  aumenta (quando  $a$  é positivo) ou diminui (quando  $a$  é negativo).

#### Repara



### Parâmetro $b$ : ordenada na origem

A reta que representa a função  $f(x) = 2x + 2$  intersesta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas  $(0, 2)$ .

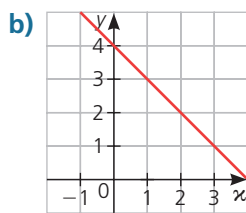
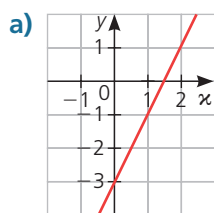
Em geral, dada uma função afim  $f(x) = ax + b$ , o valor de  $b$  é a imagem do objeto zero, porque, se  $x = 0$ , temos  $f(0) = a \times 0 + b = b$ .

O gráfico da função  $f(x) = ax + b$  é uma reta que **intersesta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas  $(0, b)$** .

O parâmetro  $b$  chama-se **ordenada na origem**.

### Exercício resolvido

Determina a expressão algébrica de cada uma das funções afins representadas graficamente.

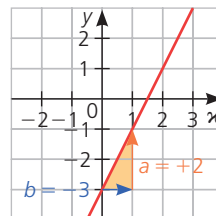


#### Resolução:

Toda a função afim tem uma expressão algébrica do tipo  $f(x) = ax + b$ .

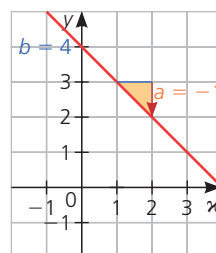
a) A expressão algébrica da função é  $f(x) = 2x - 3$ :

- $a = 2$ , porque, sempre que  $x$  aumenta 1 unidade,  $y$  aumenta 2 unidades.
- $b = -3$ , porque a reta interseca o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas  $(0; -3)$ .



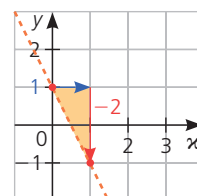
b) A expressão algébrica da função é  $f(x) = -x + 4$ :

- $a = -1$ , porque, sempre que  $x$  aumenta 1 unidade,  $y$  diminui 1 unidade.
- $b = 4$ , porque a reta interseca o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas  $(0; 4)$ .



POSSO USAR  
A ORDENADA NA ORIGEM  
E O DECLIVE PARA  
TRAÇAR O GRÁFICO.

POR EXEMPLO,  
 $y = -2x + 1$



## Relação entre o declive e paralelismo

Se tivermos duas retas,  $r$  e  $s$ , não verticais, num referencial cartesiano, de equações respetivamente  $y = ax + b$  e  $y = cx + d$ , em que condições se pode afirmar que  $r$  e  $s$  são paralelas?

Começamos por considerar que as retas  $r$  e  $s$  têm o mesmo declive, ou seja,  $a = c$ . Estas retas podem obter-se por translação da reta de equação  $y = ax$ , pelo que são paralelas a esta, como se viu anteriormente. Como a reta  $r$  é paralela à reta de equação  $y = ax$  e a reta  $s$  também é paralela a esta mesma reta, conclui-se que as retas  $r$  e  $s$  são paralelas.

Suponhamos agora que as retas  $r$  e  $s$  não têm o mesmo declive, isto é, que  $a \neq c$ . A reta  $r$  tem o mesmo declive que a reta de equação  $y = ax$ , pelo que é paralela a esta reta. A reta  $s$  tem o mesmo declive que a reta de equação  $y = cx$ , logo, é paralela a esta reta.

As retas de equação  $y = ax$  e  $y = cx$  têm um único ponto comum, que é a origem do referencial, porque a primeira contém o ponto de coordenadas  $(1, a)$ , que não pode pertencer à segunda. Assim, estas retas não são coincidentes, logo, são concorrentes. Como tal, não são paralelas.

Então, as retas  $r$  e  $s$  não são paralelas.

Duas retas não verticais são paralelas quando (e apenas quando) têm o mesmo declive.

#### Nota

Duas retas com um ponto comum ou são concorrentes ou são coincidentes.



### Exercícios resolvidos

1. Considera as seguintes retas dadas pelas respetivas equações:

$$r: y = -3x + 2$$

$$t: y = 3x - 5$$

$$v: y = 3x$$

$$s: y = -3x - 5$$

$$u: y = -3x + 8$$

Determina todos os pares possíveis de retas paralelas que se podem formar com estas retas.

#### Resolução:

Sabe-se que duas retas não verticais são paralelas quando (e apenas quando) têm o mesmo declive.

Desta forma, as retas  $r$ ,  $s$  e  $u$  são paralelas, pois têm o mesmo declive, que é  $-3$ . Também as retas  $t$  e  $v$  o são pelo mesmo motivo, têm declive  $3$ .

Assim, podem construir-se quatro pares de retas possíveis, que são:  $v$  e  $t$ ;  $r$  e  $s$ ;  $r$  e  $u$ ;  $s$  e  $u$ .

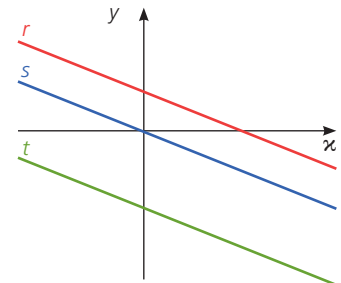
2. Escreve uma equação da reta paralela à reta de equação  $y = \frac{1}{2}x + 3$  que passa pelo ponto  $P(0, -5)$ .

#### Resolução:

Como duas retas não verticais são paralelas quando (e apenas quando) têm o mesmo declive, a reta pedida tem declive  $\frac{1}{2}$  ( $a = \frac{1}{2}$ ). Como passa pelo ponto  $P(0, -5)$  tem ordenada na origem igual a  $-5$  ( $b = -5$ ). Assim, a equação pedida é  $y = \frac{1}{2}x - 5$ .

3. Na figura seguinte estão representadas três retas paralelas,  $r$ ,  $s$  e  $t$ , que representam graficamente três funções, respetivamente:  $f$ ,  $g$  e  $h$ .

Sabendo que a função  $g$  se define algebricamente por  $g(x) = -0,4x$ , que a reta  $r$  passa pelo ponto  $R(0; 1,2)$  e que a reta  $t$  passa no ponto  $T(7; -\frac{1}{2})$ , indica uma expressão algébrica para cada uma das funções  $f$  e  $h$ .



#### Resolução:

Como as retas  $r$  e  $t$  são paralelas a  $s$ , têm o mesmo declive de  $s$ . Logo, a equação de  $r$  é da forma  $y = -0,4x + b$ . Como  $r$  passa pelo ponto  $R(0; 1,2)$ , então  $b = 1,2$ .

Assim, uma expressão algébrica para a função  $f$  é  $f(x) = -0,4x + 1,2$ .

Por sua vez, a equação da reta  $t$  é da forma  $y = -0,4x + b$ .

Como  $t$  passa no ponto  $T(7; -\frac{1}{2})$ , as coordenadas de  $T$  têm de satisfazer a equação de  $t$ , logo,  $-\frac{1}{2} = -0,4 \times 7 + b \Leftrightarrow b = 2,3$

Assim, uma expressão algébrica para a função  $h$  é  $h(x) = -0,4x + 2,3$ .

### O que deves saber

- Reconhecer que retas não verticais são gráficos de funções afins.
- Identificar declive e ordenada na origem de uma reta não vertical.
- Reconhecer e identificar retas paralelas.

## Verificar a aprendizagem

### DECLIVE E ORDENADA NA ORIGEM

#### Tarefas

- 1 Copia e completa a tabela:

| Função afim ( $f(x) = ax + b$ ) | Declive (parâmetro $a$ ) | Sempre que $x$ aumenta 1 unidade... |
|---------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| $f(x) = x + 1$                  |                          | $y$ aumenta 1 unidade               |
| $f(x) = 2x + 1$                 |                          |                                     |
| $f(x) = 1$                      |                          |                                     |
| $f(x) = -x + 1$                 |                          |                                     |
| $f(x) = -2x + 1$                |                          |                                     |

- 2 Explica a influência do declive (parâmetro  $a$  em  $y = ax + b$ ) no gráfico de uma função afim.
- 3 Num referencial cartesiano, desenha uma reta cujo declive seja igual a:
- a) 4
  - b)  $-2$
  - c) 0
- 4 Qual é a posição relativa dos gráficos das funções  $f(x) = 5x + 1$  e  $g(x) = 5x$ ?

#### AUTOAVALIAÇÃO Compreendo o que é o declive de uma reta?

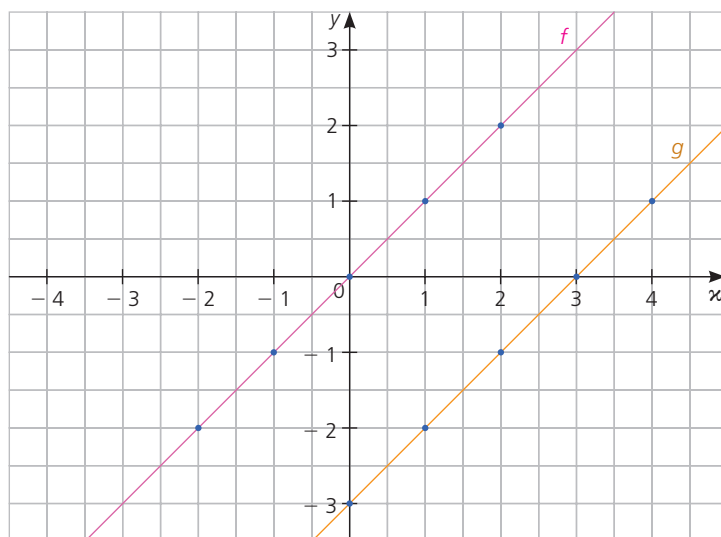
- 5 Considera as seguintes funções afins:
- $f(x) = x$        $g(x) = x + 1$        $h(x) = x + 3$        $i(x) = x - 2$        $j(x) = x - 4$
- 5.1 Num mesmo referencial, traça a reta que representa cada uma das funções.
- 5.2 Explica a influência da ordenada na origem sobre a reta.
- 5.3 Copia e completa: «Uma função afim, isto é, do tipo  $f(x) = ax + b$ , tem por gráfico uma reta que passa pelo ponto de coordenadas  $(0; \dots)$  e é paralela à reta que representa a função  $\dots$ »
- 5.4 Escreve a expressão de uma função afim cujo gráfico passe pelo ponto de coordenadas  $(0; -7)$ .

#### AUTOAVALIAÇÃO Compreendo o que é a ordenada na origem?

### RELAÇÃO ENTRE O DECLIVE E PARALELISMO

- 6 Considera as funções  $f$ ,  $g$  e  $h$  definidas algebricamente por  $f(x) = -2x$ ,  $g(x) = -2x + 3$  e  $h(x) = -2x - 1$ .
- 6.1 Representa graficamente, no mesmo referencial, as três funções.
- 6.2 Qual é a posição relativa das três retas obtidas?
- 6.3 Qual é a ordenada na origem de cada uma das retas?
- 6.4 Como se podem obter os gráficos das funções  $g(x) = -2x + 3$  e  $h(x) = -2x - 1$  a partir do gráfico da função  $f(x) = -2x$ ?
- 6.5 Como se pode obter o gráfico da função  $f(x) = -2x$  através do gráfico da função  $g(x) = -2x + 3$ ?

- 7 No referencial cartesiano, estão representadas duas funções  $f$  e  $g$ , através das retas  $r$  e  $s$ . Sabendo que a função  $f$  se define algebricamente por  $f(x) = x$  e que a reta  $s$  passa no ponto  $(0, -3)$ , indica uma expressão algébrica da função  $g$ .



- 8 Considera as seguintes funções  $f(x) = x + 3$ ,  $g(x) = x$  e  $h(x) = x - 2$ .

8.1 Qual é a posição relativa das retas que representam estas funções?

8.2 O que têm em comum as expressões algébricas que as definem?

8.3 Completa corretamente a frase seguinte:

Retas com o mesmo declive são \_\_\_\_\_.

- 9 Comenta a afirmação seguinte:

«Qualquer reta num referencial cartesiano representa uma função afim.»

#### Tarefa

- 10 O Diogo e a Sofia estão na Madeira e querem alugar bicicletas.

Diogo: «Vou comprar um capacete por 25 € e alugo uma bicicleta por 7,50 € por dia.»

Sofia: «Compra a bicicleta por 150 €! Oferecem o capacete.»

A partir de quantos dias de aluguer o Diogo se poderá arrepender de não ter seguido o conselho da Sofia?



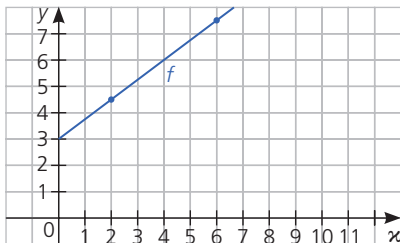
#### Tarefa de investigação

- 11 As retas que representam as funções  $f(x) = x$  e  $f(x) = -x$  são perpendiculares. Investiga a relação que deve existir entre os declives de duas retas para serem perpendiculares.

# 5.3

## Declive de uma reta determinada por dois pontos com abcissas distintas. Equação de uma reta vertical

### Tarefa 3



O Jaime teve de apanhar um táxi para ir visitar o Diogo ao hospital. Apanhou o táxi do Sr. Júlio onde, por cada serviço prestado, o cliente paga uma taxa fixa acrescida de um determinado valor por cada quilómetro percorrido. O gráfico da função que relaciona o custo com a distância percorrida está contido na semirreta representada na figura.

Sabe-se que a função que relaciona o valor a pagar,  $y$ , em €, com a distância percorrida,  $x$ , em km, é dada pela expressão algébrica:  $f(x) = 0,75x + 3$

- 1 Qual é o valor da taxa fixa?
- 2 No contexto da situação, qual é o significado de:
  - a)  $f(2)$  e  $f(0)$
  - b)  $f(6)$  e  $f(2)$
- 3 Calcula:
  - a)  $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$
  - b)  $\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2}$
- 4 Compara os valores obtidos na questão 3 com o valor  $a$  na expressão  $f(x) = ax + b$ . O que observas?

### Determinação do declive de uma reta

Considera uma reta  $r$  não vertical que passa pelos pontos  $A(2,3)$  e  $B(6,8)$ . Vamos determinar algebricamente o seu declive.

Sabemos que  $r$  é o gráfico de uma função afim, isto é, de uma função do tipo  $y = ax + b$ . Como  $A$  e  $B$  são pontos da reta, satisfazem a equação de  $r$ . Assim:

$$3 = a \times 2 + b \text{ e } 8 = a \times 6 + b$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } 3 - 8 &= a \times 2 + b - (a \times 6 + b) = \\ &= a \times 2 + b - a \times 6 - b = \\ &= a \times 2 - a \times 6 = a \times (2 - 6) \end{aligned}$$

$$\text{Como tal, } a = \frac{3 - 8}{2 - 6} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

Em geral:

A reta  $r$  definida por dois pontos  $A$  e  $B$  de coordenadas, respetivamente,  $(x_A, y_A)$  e  $(x_B, y_B)$  não é vertical quando, e apenas quando,  $x_B \neq x_A$

e, nesse caso, o declive de  $r$  é  $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .

Considera uma reta definida pelos pontos  $A$  e  $B$  de coordenadas respetivamente  $(x_A, y_A)$  e  $(x_B, y_B)$ . Vamos ver que a reta  $AB$  é não vertical quando e apenas quando  $x_B \neq x_A$  e que o seu declive é igual a  $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .

### Demonstração:

Se  $x_A \neq x_B$ , a reta  $AB$  tem pontos com abcissas distintas, logo não é vertical. Por outro lado, se  $x_A = x_B$ , a reta  $AB$  tem dois pontos em comum com a reta vertical formada pelos pontos de abcissa  $x_A$  coincidindo portanto com essa reta.

A reta não vertical  $AB$  tem uma equação da forma  $y = ax + b$ , em que  $a$  e  $b$  são números reais. Em particular,  $y_A = ax_A + b$  e  $y_B = ax_B + b$ , de onde se conclui que  $y_B - y_A = ax_B + b - (ax_A + b) = a(x_B - x_A)$ . Então, podem dividir-se ambos os membros da igualdade pela expressão  $x_B - x_A \neq 0$  (já que  $x_B \neq x_A$ ), obtendo-se  $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .

## Equação de uma reta vertical

Uma reta vertical é, por definição, uma reta paralela ao eixo das ordenadas. Uma tal reta é constituída pelos pontos com uma mesma abcissa (pela própria definição de abcissa).

Os pontos do plano de abcissa igual a  $c$  (sendo  $c$  um número real) são os pontos da **reta vertical que passa pelo ponto de coordenadas  $(c, 0)$** . Uma equação dessa reta é  $x = c$ .

### Exercício resolvido

Considera os pontos  $A(3,3)$ ,  $B(4,3)$  e  $C(3,4)$ .

- a) Indica todos os pares possíveis de pontos, de entre os dados, que determinem uma reta não vertical e justifica.
- b) Indica todos os pares possíveis de pontos, de entre os dados, que determinem uma reta vertical e indica a equação dessa reta.
- c) Escreve a equação da reta vertical que passa por  $B(4, 3)$ .
- d) Escreve a equação da reta vertical que passa pela origem do referencial.

### Resolução:

- a) Sabemos que uma reta vertical é constituída pelos pontos com uma mesma abcissa, neste caso os pares de pontos que determinam uma reta não vertical são  $A$  e  $B$  e também  $B$  e  $C$ .
- b) Os pontos que determinam uma reta vertical são  $A$  e  $C$  e a equação dessa reta é  $x = 3$ .
- c) A reta vertical que passa por  $B(4,3)$  tem equação  $x = 4$ .
- d) Como a reta passa pelo ponto  $O(0, 0)$  tem equação  $x = 0$ .

### Exercício resolvido

Considera, num referencial cartesiano, os pontos  $A(3, 3)$ ,  $B(8, -3)$ ,  $C(a, 2)$  e  $D(-5, a)$ , sendo  $a$  um número real.

- a) Justifica que  $A(3, 3)$  e  $B(8, -3)$  definem uma reta não vertical e determina a equação dessa reta.
- b) Determina o valor de  $a$  para que a reta  $BC$  seja vertical. Indica a equação dessa reta.
- c) Qual é o valor de  $a$  para que a reta  $CD$  seja vertical?
- d) Haverá algum valor de  $a$  para o qual a reta  $AD$  seja vertical? Porquê?

#### Resolução:

- a) A reta  $AB$  não é vertical, pois passa por dois pontos com diferentes abcissas.

Para determinar o seu declive, substituímos as coordenadas de  $A$  e  $B$  na fórmula  $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .

$$\text{Vem: } a = \frac{-3 - 3}{8 - 3} = -\frac{6}{5}.$$

Assim, a equação da reta  $AB$  é da forma  $y = -\frac{6}{5}x + b$ .

Como passa pelo ponto  $A(3, 3)$

$$3 = -\frac{6}{5} \times 3 + b$$

Logo,  $b = \frac{33}{5}$  e como tal a equação da reta  $AB$  é  $y = -\frac{6}{5}x + \frac{33}{5}$

- b) Como uma reta vertical é constituída pelos pontos com a mesma abcissa, para que a reta  $BC$  seja vertical  $B$  e  $C$  têm de ter a mesma abcissa, logo,  $a = 8$ . A equação dessa reta é  $x = 8$ .
- c) Para que a reta  $CD$  seja vertical  $a = -5$ , pois uma reta vertical é constituída pelos pontos com a mesma abcissa.
- d) Os pontos  $A$  e  $D$  têm abcissa 3 e  $-5$ , respetivamente. A reta  $AD$  não é vertical, pois passa por dois pontos com abcissas diferentes, logo, não existe nenhum valor de  $a$  para o qual a reta  $AD$  seja vertical.

### O que deves saber

- Identificar e definir retas não verticais.
- Determinar o declive de retas não verticais.
- Identificar e definir retas verticais.

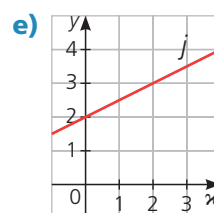
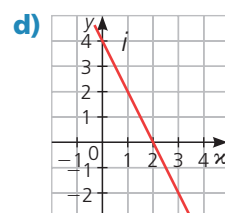
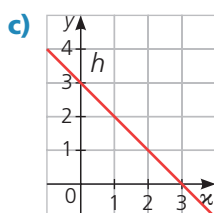
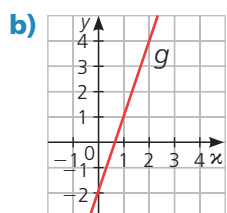
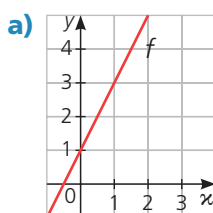


## Verificar a aprendizagem

### EXPRESSÃO ALGÉBRICA DE UMA FUNÇÃO AFIM A PARTIR DO GRÁFICO

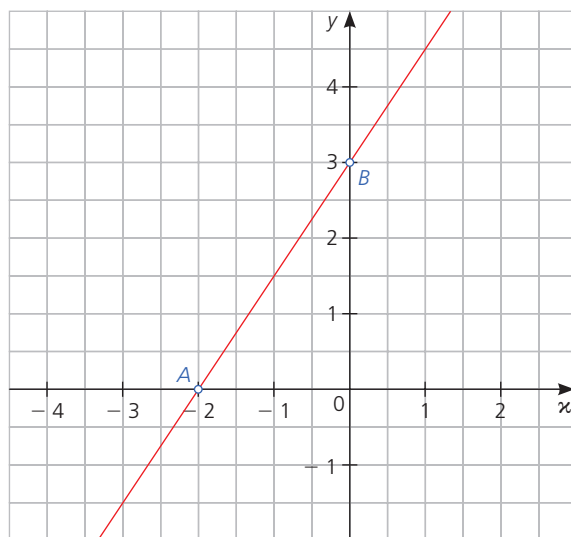
- 1 Considera as representações gráficas das funções  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $i$  e  $j$ .

1.1 Em cada caso, determina a expressão algébrica da função afim representada.



1.2 Escreve a expressão algébrica da reta paralela à representada pela função  $h$  que passa pela origem do referencial.

- 2 No referencial, está representado o gráfico da função  $h$ , representado pela reta  $r$ .



2.1 Atendendo aos dados da figura, escreve a expressão algébrica da função  $h$ .

2.2 Escreve uma equação da reta que é paralela a  $r$  e que tem ordenada na origem 1.

2.3 Escreve a equação da reta que é paralela a  $r$  e que passa pelo ponto  $(3, -2)$ .

2.4 Explica como se pode obter o gráfico da função  $f(x) = \frac{3}{2}x - 1$  através do gráfico de  $h$ .

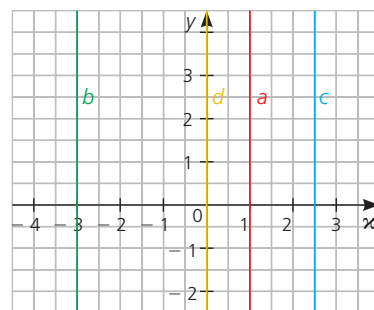
- 3 Escreve a expressão algébrica da função afim  $f$ , sabendo que  $f(1) = 3$  e  $f(2) = 5$ .

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei indicar a expressão algébrica de uma função afim a partir do gráfico?

### RETA VERTICAL

- 4 Indica dois pontos de entre  $A(-1, 5)$ ,  $B(4, -1)$  e  $C(-1, -4)$  que determinem uma reta vertical e justifica a tua resposta.
- 5 Considera os pontos  $A(2, 6)$  e  $B(6, 2)$ . Justifica que determinam uma reta não vertical.

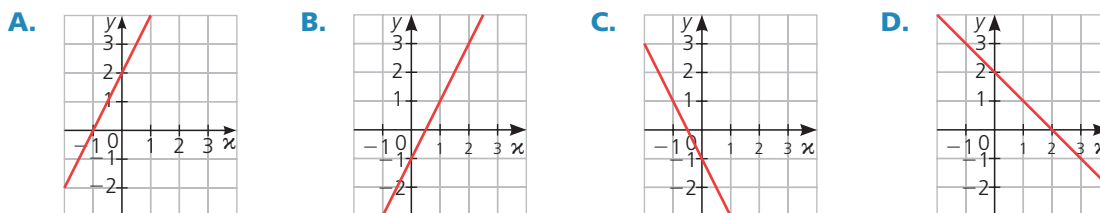
- 6 Escreve a equação de cada uma das retas representadas na figura seguinte.



**AUTOAVALIAÇÃO** Sei indicar a expressão algébrica de uma reta vertical?

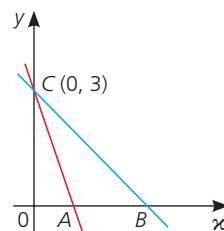
### Aplicar

- 7 Selecciona, de entre os gráficos seguintes, o que representa a função  $f(x) = 2x - 1$ .



- 8 Considera as retas AC e BC representadas na figura. De acordo com os dados da figura, determina a expressão da função afim cuja representação é a reta:

- a) CB, sabendo que o triângulo [OBC] é isósceles;  
b) CA, sabendo que a área do triângulo [OAC] é  $\frac{3}{2}$ .



- 9 Considera, num referencial cartesiano, os pontos  $A(2; -4)$ ,  $B(5; 8)$ ,  $C(a; -2)$  e  $D(3; a)$ , sendo  $a$  um número real.

9.1 Justifica que os pontos  $A(2; -4)$  e  $B(5; 8)$  determinam uma reta não vertical e calcula o declive da reta AB.

9.2 Supondo que a reta AC é vertical, indica uma equação para essa reta.

9.3 Qual é o valor de  $a$  para que a reta CD seja vertical?

9.4 Haverá algum valor de  $a$  para o qual a reta BD seja vertical? Porquê?

- 10 Determina, em cada caso, a expressão algébrica da função cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos indicados:

- a)  $A(1; 3)$  e  $B(2; 4)$ ;      b)  $C(-2; 1)$  e  $D(1; 7)$ ;      c)  $E(1; -4)$  e  $F(-2; 5)$ .

- 11 O Diogo inventou uma função afim, tal que os objetos 2 e 4 têm por imagem 1 e 6, respetivamente. Qual é a expressão algébrica da função?

- 12 A Joana observou que, enquanto as pilhas estavam a recarregar, a percentagem da carga ( $y$ ) em função do tempo ( $x$ ), em minutos, podia ser expressa através de uma função afim. Após 5 minutos a carga era de 20 % e ao fim de 13 minutos era de 36 %.

12.1 Qual é a expressão algébrica da função?

12.2 Quanto tempo irão demorar as pilhas a recarregar?



## Síntese

### Equação de uma reta não vertical

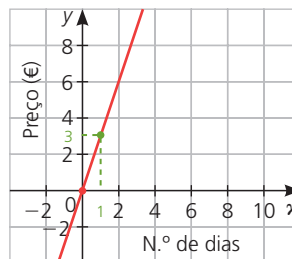
#### Gráfico da função linear

As retas não verticais, num dado plano, que passam pela origem de um referencial cartesiano, são os gráficos das funções lineares.

O gráfico de uma função linear  $f(x) = ax$  é uma reta que passa pela **origem do referencial** e pelo ponto de coordenadas **(1; a)**.

O **coeficiente** de uma função linear é igual à constante de proporcionalidade entre as ordenadas e as abscissas dos pontos da reta e designa-se por **declive da reta**, se o referencial for ortogonal e monométrico.

**Exemplo:** A reta que representa a função  $f(x) = 3x$  (em que  $x$  pode tomar qualquer valor) passa pelos pontos de coordenadas **(0; 0)** e **(1; 3)**.



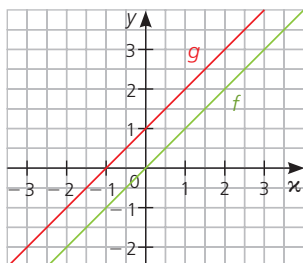
O declive da reta é 3.

#### Gráfico de uma função do tipo $g(x) = f(x) + b$

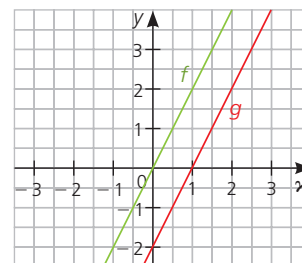
Dada uma função  $f$  definida em  $\mathbb{R}$ , o gráfico da função  $g$  definida pela expressão  $g(x) = f(x) + b$ , com  $b \in \mathbb{R}$ , obtém-se do gráfico da função  $f$  por translação de vetor  $\overrightarrow{OB}$  onde  $O$  é o ponto de coordenadas (0, 0) e  $B$  é o ponto de coordenadas (0, b).

**Exemplos:**

O gráfico da função  $g$  obtém-se fazendo uma translação do gráfico da função  $f$  segundo o vetor  $\overrightarrow{OB}$ , em que  $O$  é a origem do referencial e  $B$  é o ponto de coordenadas (0, 1).



O gráfico da função  $g$  obtém-se fazendo uma translação do gráfico da função  $f$  segundo o vetor  $\overrightarrow{OB}$ , em que  $O$  é a origem do referencial e  $B$  é o ponto de coordenadas (0, -2).



#### Representar um gráfico de uma função afim

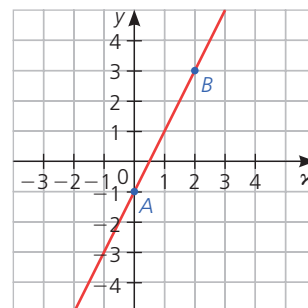
- As retas não verticais são os gráficos das funções afins.
- O gráfico de uma **função constante** é uma **reta horizontal**.
- O gráfico de uma função afim **não linear** e **não constante** é uma reta que **não passa** pela origem do referencial e não é horizontal.

Exemplo de gráfico de uma função afim (não linear e não constante):

$$f(x) = 2x - 1.$$

Visto que para traçar uma reta apenas são necessários **2 pontos**, basta escolher dois objetos (por exemplo, 0 e 2) e calcular as suas imagens numa tabela:

| $x$ | $y = 2x - 1$              | $(x; y)$   |
|-----|---------------------------|------------|
| 0   | $y = 2 \times 0 - 1 = -1$ | $A(0; -1)$ |
| 2   | $y = 2 \times 2 - 1 = 3$  | $B(2; 3)$  |



## Declive e ordenada na origem de uma reta não vertical

Dada uma reta de equação  $y = ax + b$ , designa-se  $a$  por **declive** da reta e  $b$  por **ordenada na origem**.

## Influência dos parâmetros $a$ (declive) e $b$ (ordenada na origem)

| Declive                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Ordenada na origem                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"><li>O parâmetro <math>a</math> na expressão <math>y = ax + b</math> chama-se <b>declive da reta</b>.</li><li>Sempre que <math>x</math> aumenta 1 unidade, o declive indica quantas unidades <math>y</math> aumenta (quando <math>a</math> é positivo) ou diminui (quando <math>a</math> é negativo).</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>O parâmetro <math>b</math> na expressão <math>y = ax + b</math> chama-se <b>ordenada na origem</b>.</li><li>O gráfico da função <math>f(x) = ax + b</math> é uma reta que <b>intersecta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas <math>(0; b)</math></b>.<br/>Por exemplo, o gráfico da função <math>f(x) = 2x - 1</math> é uma reta que passa pelo ponto <math>A(0; -1)</math>.</li></ul> |

## Relação entre o declive e paralelismo

**Duas retas não verticais são paralelas quando (e apenas quando) têm o mesmo declive.**

**Exemplos:**

As retas  $r$  e  $s$  de equação respetivamente  $y = 3x + 1$  e  $y = 3x - 5$  são paralelas porque têm o mesmo declive, 3.

As retas  $r$  e  $s$  de equação respetivamente  $y = -6x + 1$  e  $y = 2x + 1$  não são paralelas porque não têm o mesmo declive, a reta  $r$  tem declive  $-6$  e a reta  $s$  tem declive 2.

## Cálculo do declive de uma reta

Uma reta  $r$  determinada pelos pontos  $A$  e  $B$  de coordenadas respetivamente  $(x_A, y_A)$  e  $(x_B, y_B)$  não é vertical quando e apenas quando  $x_B \neq x_A$  e, nesse caso, o **declive** de  $r$  é  $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .

**Exemplo:**

A reta  $r$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  de coordenadas, respetivamente,  $(-1, 2)$  e  $(1, 3)$  não é uma reta vertical uma vez que os pontos têm abcissas distintas.

O declive desta reta é  $\frac{3 - 2}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$ .

## Equação de uma reta vertical

Uma **reta vertical** é, por definição, uma reta **paralela ao eixo das ordenadas**.

Uma reta vertical é constituída pelos **pontos com uma mesma abcissa**  $c$  e a sua equação é  $x = c$ .

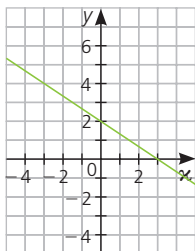
## Atividades globais

### QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

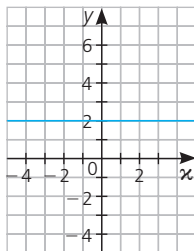
Das quatro alternativas, escolhe a única opção correta.

- 1 Qual dos gráficos representa uma função linear?

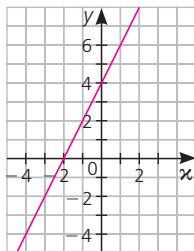
A.



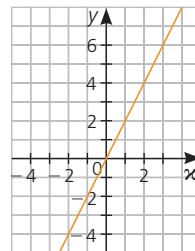
B.



C.

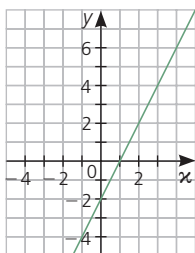


D.

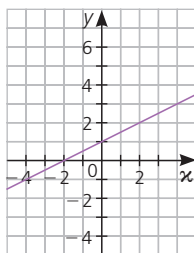


- 2 Qual das seguintes retas é a representação gráfica da função  $h(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ?

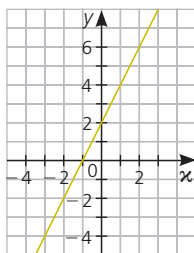
A.



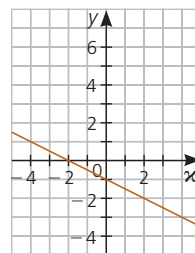
B.



C.



D.



- 3 Qual dos pontos seguintes pertence ao gráfico da função  $f(x) = -2x + 5$ ?

A.  $P(13; 31)$

B.  $Q(-12; 29)$

C.  $R(-15; 36)$

D.  $S(11; -3)$

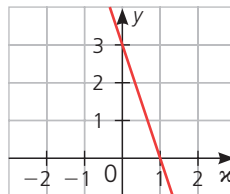
- 4 Qual é a expressão algébrica da função representada graficamente à direita?

A.  $f(x) = -3x + 3$

C.  $h(x) = x + 3$

B.  $g(x) = x - 1$

D.  $i(x) = -3x + 1$



- 5 As retas  $r$  e  $s$  representadas na figura são paralelas.



Sabe-se que  $r$  e  $s$  são representações gráficas das funções  $f$  e  $g$ , sendo  $f(x) = \frac{1}{4}x + 1$ .

Então, a função  $g$  pode ser representada analiticamente pela expressão:

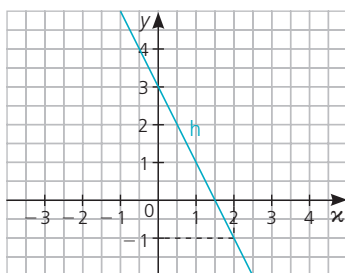
A.  $g(x) = -2x + 1$

C.  $g(x) = \frac{1}{4}x - 2$

B.  $g(x) = x - 2$

D.  $g(x) = \frac{1}{4}x + 2$

- 6 Na figura encontra-se representada graficamente a função afim  $h$ .



Uma expressão algébrica da função  $h$  é:

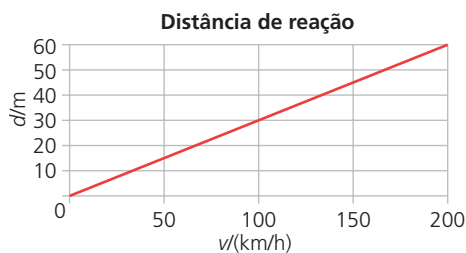
- A.  $h(x) = 3x + 2$       C.  $h(x) = -\frac{1}{2}x + 3$   
 B.  $h(x) = -3x - 1$       D.  $h(x) = -2x + 3$

## EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

- 7 O gráfico de uma função não constante pode ter uma simetria de reflexão com eixo horizontal? Justifica a tua resposta.
- 8 A função que a cada número inteiro (diferente de zero) faz corresponder o seu inverso é uma função afim? Justifica a tua resposta.
- 9 A distância de reação é a distância percorrida por um automóvel, desde que o condutor avista um obstáculo até ao momento em que começa a travar. A distância de reação depende, entre outros fatores, da velocidade a que o automóvel circula.

Em determinadas circunstâncias, a relação entre a distância de reação,  $d$ , em metros, e a velocidade,  $v$ , em km/h, pode ser traduzida pelo gráfico seguinte.

- 9.1 De acordo com o gráfico, a que velocidade circula um automóvel se a distância de reação for 60 metros?



- 9.2 Escreve a expressão algébrica que representa a distância de reação ( $d$ ) em função da velocidade ( $v$ ).
- 9.3 Qual é a distância de reação quando o automóvel circula a 120 km/h?

Adaptado do Exame nacional de Matemática, 9.º ano (2009, 2.ª chamada)

- 10 Determina uma expressão algébrica da reta, sabendo que:
- a) passa nos pontos de coordenadas  $(0, 0)$  e  $(-1, -5)$ ;  
 b) passa pelos pontos de coordenadas  $(-2, 3)$  e  $(2, -5)$ ;  
 c) tem ordenada na origem  $-4$  e passa no ponto de coordenadas  $(1, 1)$ .

## Atividades globais

- 11** A função  $f$  tem por expressão algébrica  $y = 3x - 1$ .

**11.1** Determine a expressão algébrica da função cujo gráfico é uma reta:

- a) paralela ao gráfico de  $f$  e que passa pelo ponto de coordenadas  $(0, 8)$ ;
- b) horizontal e que interseja o gráfico de  $f$  no eixo das ordenadas;
- c) com o mesmo declive de  $f$  e que passa na origem do referencial.

**11.2** Comenta a afirmação: «As representações gráficas das funções  $f$  e  $g(x) = 2x - 1$  são retas paralelas».

- 12** Considera, num referencial cartesiano, os pontos  $A(2,5)$ ,  $B(-2,7)$ ,  $C(-2,7)$ ,  $D(a,3)$  e  $E(2,a)$ , sendo  $a$  um número real.

**12.1** Justifica que os pontos  $A$  e  $B$  determinam uma reta não vertical e calcula o declive da reta  $AB$ .

**12.2** Qual é o valor de  $a$  para que a reta  $BD$  seja vertical? Escreve a equação dessa reta.

**12.3** Haverá algum valor de  $a$  para o qual a reta  $CE$  seja vertical? Porquê?

**12.4** Indica a equação da reta vertical que passa por  $D$ .

- 13** Em cada caso, indica o declive da reta descrita pela personagem, representa essa reta num referencial cartesiano e escreve a expressão algébrica da função que lhe corresponde.

a)

A RETA PASSA PELA ORIGEM  
E PELO PONTO  $A(3; 4)$ .



b)

A RETA É  
PARALELA À DA  
FUNÇÃO  $y = 5x$   
E PASSA PELO  
PONTO  $B(0; -2)$ .



c)

A RETA  
PASSA  
PELOS  
PONTOS  
 $C(-1; 8)$   
E  $D(1; 4)$ .

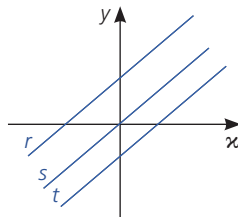


d)

A RETA PASSA  
PELOS PONTOS  
 $E(-2; -1)$  E  $F(2; 1)$ .



- 14** Na figura, estão três retas paralelas,  $r$ ,  $s$  e  $t$ , que representam graficamente três funções, respetivamente  $f$ ,  $g$  e  $h$ .



Sabendo que a função  $f$  se define algebricamente por  $f(x) = 2x + 4$ , que a reta  $s$  passa pela origem do referencial e que a reta  $t$  passa no ponto  $T(0; -0,5)$ , indica uma expressão algébrica para cada uma das funções  $g$  e  $h$ .





## CANGURU MATEMÁTICO SEM FRONTEIRAS

- 15** Um grupo de dança tem 39 rapazes e 23 raparigas. Todas as semanas entram para o grupo mais 6 rapazes e mais 8 raparigas. Ao fim de algumas semanas o grupo terá o mesmo número de rapazes e de raparigas. Quantos rapazes e raparigas terá, nessa altura, o grupo de dança?

A. 144      B. 154      C. 164      D. 174      E. 184

Prova Benjamim, 2009

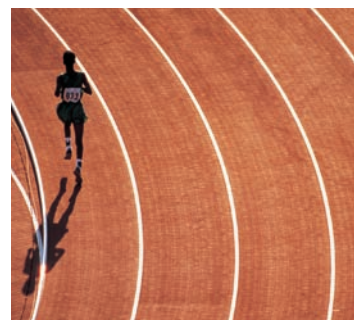


## SUB 14

O SUB 14 é um campeonato de resolução de problemas de Matemática para 7.º e 8.º anos.

### Tarefa

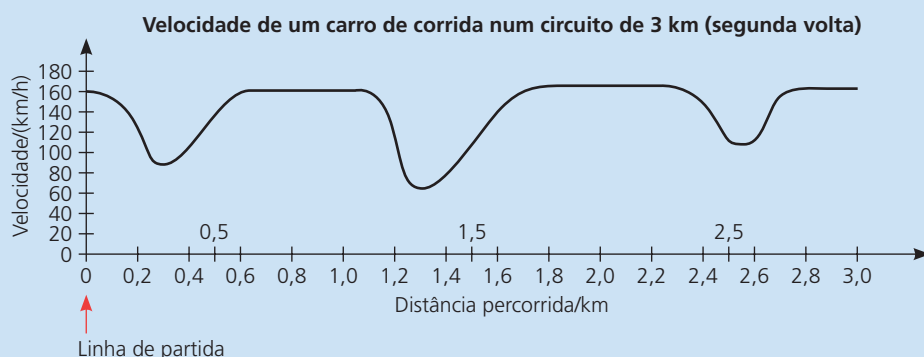
- 16** O Zeca, o Joca e o Nico gostam de correr ao fim de semana. O Zeca corre com o dobro da velocidade do Joca e com o triplo da velocidade do Nico. No fim de semana passado foram correr para uma pista circular. Partiram os três do mesmo ponto da pista mas o Zeca correu num sentido e os outros dois correram em sentido contrário. Durante a primeira volta, o Zeca cruzou-se com o Joca e depois de correr mais 50 metros cruzou-se com o Nico. Quantos metros de comprimento tem a pista?



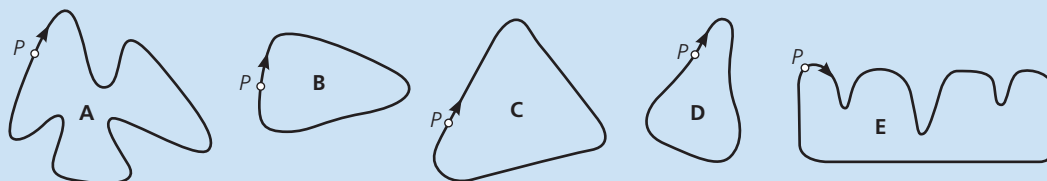
Edição 2008/2009 — Problema 8

## CONVIVER COM A MATEMÁTICA

- 17** O gráfico seguinte mostra a variação da velocidade de um carro de corrida num circuito plano de 3 quilómetros, durante a segunda volta.



- 17.1** Qual foi a velocidade mínima registada pelo carro? Onde ocorreu?
- 17.2** O que se pode dizer sobre a velocidade do carro entre os quilómetros 0,7 e 1,0?
- 17.3** A que distância da linha de partida a velocidade do carro aumentou pela primeira vez?
- 17.4** Encontram-se traçados, a seguir, cinco circuitos. Em qual deles poderá o carro ter circulado, de forma que o gráfico da velocidade seja o apresentado anteriormente? (P = Linha de partida).

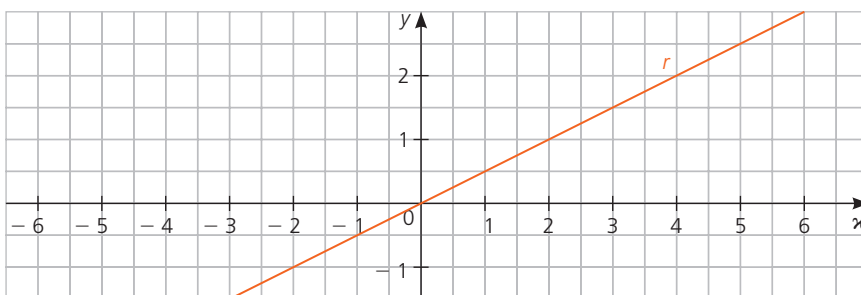


## AUTOAVALIAÇÃO

- Identifica claramente na tua folha de respostas os números das questões às quais respondes. Apresenta uma única resposta para cada item.
- O teste inclui dois itens de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correta. Não apresentes cálculos nem justificações.

Págs. 7, 10, 14 e 15

- 1** No referencial seguinte está traçada a reta  $r$  que é a representação gráfica da função linear  $f$ .



- 1.1** Escreve a equação da reta  $r$ .  
**1.2** Qual é o declive da reta  $r$ ?  
**1.3** Escreve a equação da reta que se obtém fazendo uma translação da reta  $r$  segundo o vetor  $\vec{OA}$ , em que  $O$  é a origem do referencial e  $A$  é o ponto de coordenadas  $(0, -3)$ .  
**1.4** Escreve a equação da reta paralela à reta  $r$  que passa pelo ponto  $(0, 2)$ .

Págs. 7 e 8

- 2** Num dos dias em que o José ia para o trabalho, devido a uma avaria, o seu automóvel movia-se a uma velocidade constante de 10 km/h. Logo, ao fim de uma hora teria andado 10 km, ao fim de duas horas, 20 km, e assim sucessivamente. Escreve a expressão algébrica que traduz esta situação e faz a sua representação gráfica.

Págs. 7 e 8

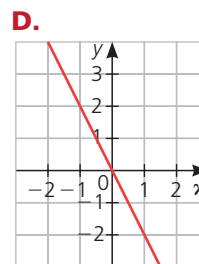
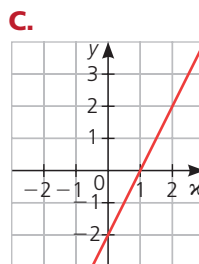
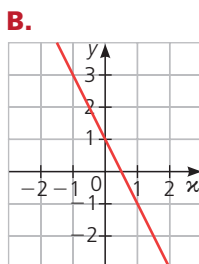
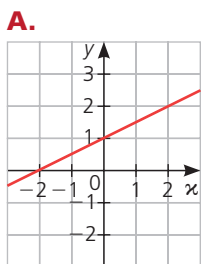
- 3** Num mesmo referencial, representa graficamente as funções seguintes:  
**a)**  $f(x) = -3x$       **b)**  $g(x) = 2x - 5$       **c)**  $h(x) = 4$

Págs. 7 e 10

- 4** Em cada caso, verifica se o ponto pertence à reta que representa a função  $f(x) = -14x + 18$ :  
**a)**  $A(12; -148)$       **b)**  $B(-15; 228)$

Págs. 8, 10 e 14

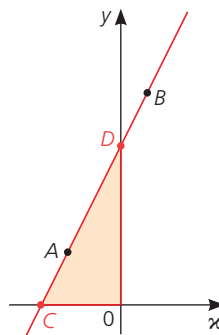
- 5** Selecciona, de entre as representações gráficas seguintes, a que corresponde à função definida por  $f(x) = -2x + 1$ .



- 6** Considera as seguintes retas dadas pelas respetivas equações:
- $$r: y = \frac{x}{2} + 3 \quad s: y = -2x + 3 \quad t: y = \frac{1}{2}x - 5$$
- $$u: y = -2x \quad v: y = 1 - 2x$$
- Determina todos os pares possíveis de retas paralelas que se podem formar com estas retas.

Pág. 15

- 7** Na figura, encontra-se representada uma função afim. A reta passa pelos pontos  $A(-2, 2)$ ,  $B(1, 8)$  e  $D(0, 6)$ .



Págs. 14 e 19

- 7.1** Mostra que a expressão analítica da função é  $g(x) = 2x + 6$ .
- 7.2** Determina as coordenadas do ponto C, interseção da reta com os eixo das abscissas.
- 7.3** Calcula a área do triângulo [COD].

- 8** Durante uma noite, a Sofia colocou um bidão no exterior, para recolher a água da chuva. Quando começou a chover, o nível de água no bidão era de 8 cm. Depois, em cada hora, o nível subiu 6 cm.

Págs. 8, 10 e 14

- 8.1** Qual é a expressão que representa a altura da água ( $y$ , em cm) no bidão, em função do tempo ( $x$ , em horas)?
- Escolhe a opção correta.
- A.**  $y = 6x$  **C.**  $y = 8x$
- B.**  $y = 6 + 8x$  **D.**  $y = 6x + 8$
- 8.2** A altura da água é diretamente proporcional ao tempo? Justifica a tua resposta.
- 8.3** Durante um dia de calor, a variação da altura da água passou a ser dada pela expressão:  $y = -0,2x + 85$ .
- Nesse contexto, explica o significado dos valores  $-0,2$  e  $85$ .

- 9** Indica a expressão algébrica:
- a)** da função linear cujo gráfico passa pelo ponto  $A(5; 8)$ ;
- b)** da função afim cujo gráfico passa pelos pontos  $B(0; -2)$  e  $C(3; 7)$ .
- c)** da reta vertical que passa pelo ponto  $A(5, 8)$ .

Págs. 14, 19 e 20

- 10** Considera todas as funções do tipo  $f(x) = ax + 7$  ( $a$  é um número real).
- 10.1** Qual é o ponto de interseção das retas que representam essas funções?
- 10.2** Explica a influência da variação do parâmetro  $a$ .

Pág. 14

#### GRELHA DE AVALIAÇÃO

| Exercício                     | 1  | 2 | 3  | 4  | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  | 10 |
|-------------------------------|----|---|----|----|---|---|----|----|----|----|
| Cotação <sup>1</sup> (pontos) | 15 | 4 | 12 | 10 | 4 | 8 | 15 | 12 | 12 | 8  |

<sup>1</sup> Para saberes a cotação de cada alínea, basta dividires a cotação do exercício pelo número de alíneas.

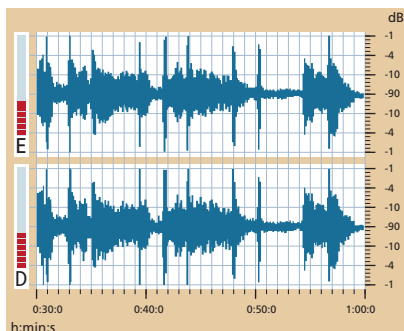
# Gráficos de funções no quotidiano

São várias as situações do dia a dia em que a informação é apresentada através de gráficos de funções, pelo seu apelo visual e por permitirem visualizar a relação entre as variáveis. Quando se consulta uma fatura de consumo de água, por exemplo, veem-se logo os períodos em que o consumo aumentou. Os gráficos são tão importantes que alguns aparelhos foram especialmente concebidos para os traçar (por exemplo, o sismógrafo e o polígrafo).



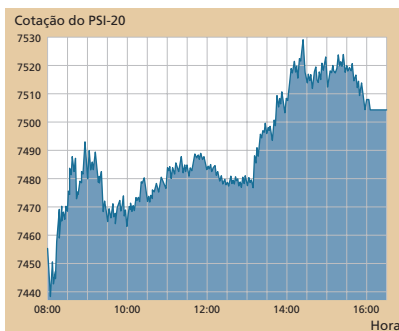
## Intensidade do som

Algumas aparelhagens de som mostram um gráfico durante o seu funcionamento, que representa a intensidade do som em função da sua frequência. A unidade utilizada para medir o nível sonoro é o decibel (dB) e o aparelho é o sonómetro.



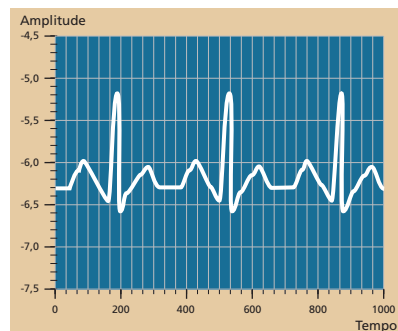
## Cotação da bolsa

Na bolsa de Lisboa, a variação do índice PSI-20 é registada ao longo do dia. Constroem-se gráficos a partir dos dados registados, para que sejam perceptíveis mais facilmente as tendências de subida ou descida do respetivo índice.



## Eletrocardiograma

O eletrocardiograma é um exame de saúde no qual é feito o registo da variação dos potenciais gerados pela atividade elétrica do coração. Os potenciais elétricos são registados por eletrodos sensíveis colocados em pontos específicos do corpo.

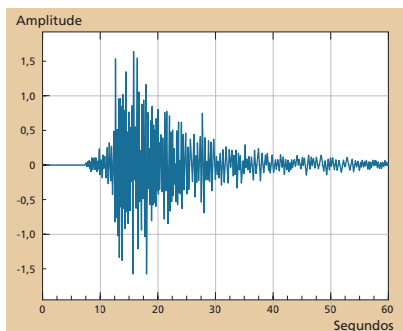






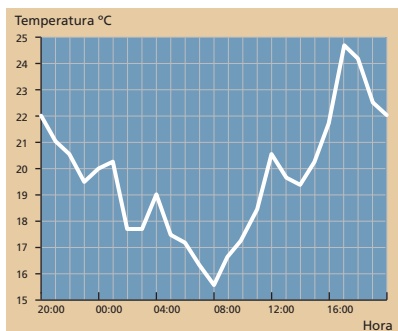
## Sismograma

O gráfico obtido por um sismógrafo designa-se por sismograma. Quando ocorre um sismo, o sismograma regista oscilações bastante acentuadas. Em período de calma sísmica, o gráfico caracteriza-se por uma linha com poucas oscilações.



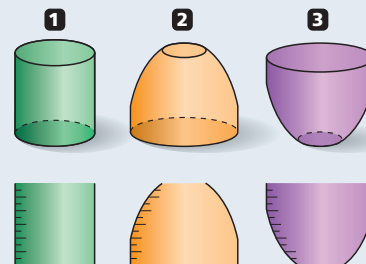
## Temperatura do ar

As medições da temperatura do ar, da intensidade do vento, da humidade e da pressão atmosférica são efetuadas nas estações meteorológicas. O tratamento destes dados obriga à utilização de computadores potentes e modelos matemáticos adequados.

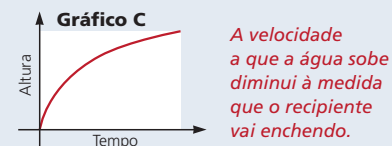
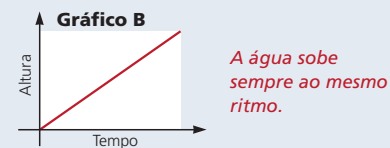


## Tarefa

Observa os três recipientes, todos eles com a mesma altura e o mesmo volume (1, 2 e 3), e os seus cortes transversais com as respetivas graduações.



Imagina que se enchem os três recipientes com igual fluxo de água. Depois, regista-se numa tabela a altura de água em cada vaso e o tempo. Por fim, constroem-se os gráficos tempo-altura.



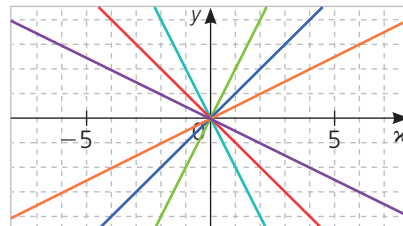
Repara que todos eles terminam no mesmo ponto, pois os recipientes têm todos o mesmo volume. No entanto, estes recipientes não se enchem de igual forma.

**A que gráfico corresponde cada um dos recipientes?**

# Investigar

## Software de representação de gráficos

O Graphmatica é um programa que permite facilmente construir gráficos de funções. Está disponível gratuitamente em <http://www.graphmatica.com>. Algumas das atividades propostas ao longo desta unidade podem ser realizadas recorrendo a esse *software*.



### 1. Como construir o gráfico de uma função?

Para traçar o gráfico de uma função, basta escrever a sua expressão algébrica na linha abaixo da barra de ícones e carregar em *Enter* (por exemplo,  $y = 3x$ ). Podem visualizar-se vários gráficos em simultâneo. Para selecionar um deles, clica-se em ▼ (A).

### 2. Como determinar objetos e imagens?

No menu *Tools*, escolhe-se *Evaluate*. Na nova janela, seleciona-se uma função. Depois, pode indicar-se o valor de um objeto e pedir a sua imagem (*Solve for y. Enter value of x*) ou indicar-se uma imagem e pedir-se o(s) objeto(s) (*Solve for x. Enter value of y*) (B).

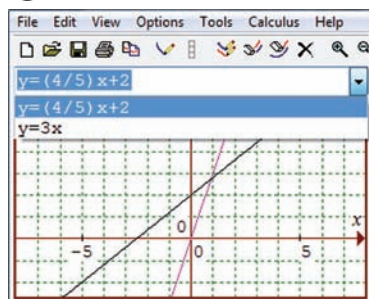
### 3. Como determinar o(s) ponto(s) de interseção de dois gráficos?

No menu *Tools*, escolhe-se *Find Intersection*. Na nova janela, escolhem-se duas funções e carrega-se em *Calculate*.

### 4. Como determinar a expressão algébrica de uma função afim, do tipo $f(x) = ax + b$ , dados dois pontos do seu gráfico?

Clica-se no ícone *Data Plot Editor* (último da linha). Na nova janela, escrevem-se as coordenadas de dois pontos (por exemplo (1; 2) e (3; -1)) e carrega-se em *Curve Fit* (C). O programa traça, então, a reta que passa pelos dois pontos. Para ler a expressão algébrica, basta clicar em ▼.

(A)



(B)

Select an equation:  
 $y = (4/5)x + 2$

☐ Solve for y. Enter value of x: 3

☒ Solve for x. Enter value of y:  
To find an off-screen solution, you must also enter a guess for x

Results

| x    | y   |
|------|-----|
| 3.0  | 4.4 |
| 3.75 | 5.0 |

Calculate Close

(C)

Data Plot

Plot: Data plot 1 New Del

Symbol: • Color: Red Curve Fit

Insert Point Remove Point Options

| x | y  |
|---|----|
| 1 | 2  |
| 3 | -1 |

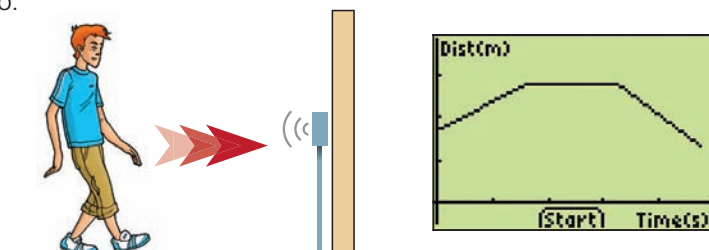
### Sugestão de trabalho

- Dadas as expressões de duas funções afins,  $f(x) = 2x - 1$  e  $g(x) = -x + 11$ , procura uma maneira de calcular as coordenadas do ponto de interseção das retas que as representam. Depois, confirma a tua resposta usando o Graphmatica.
- Experimenta com as expressões algébricas de outras funções.

## Sensor de movimento

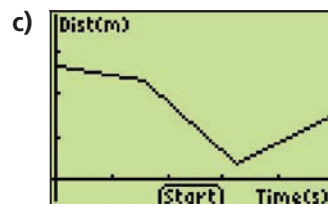
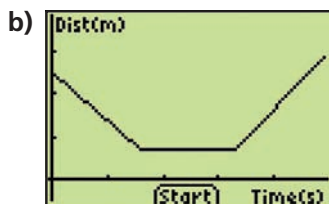
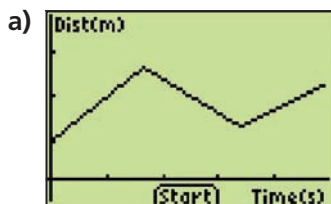
Os sensores de movimento são aparelhos que permitem explorar relações matemáticas entre a distância e o tempo. Para determinar distâncias, o sensor emite ultrassons: o tempo entre a emissão do som e a receção do eco permite determinar a distância ao objeto. Uma vez recolhidos, os dados são enviados para uma calculadora gráfica, onde podem ser analisados.

Uma das atividades que podem ser realizadas com uma calculadora gráfica e um sensor de movimento (por exemplo, o CBR2 da *Texas Instruments*) consiste em imitar um gráfico de distância em função do tempo. Enquanto o sensor está a recolher a distância a que nos encontramos (mais de 200 vezes por segundo!), devemos andar para a frente, para trás, ou estar parados, de modo que a nossa posição esteja o mais de acordo possível com o gráfico.



### Sugestão de trabalho

- Para cada um dos ecrãs apresentados a seguir, como te deverias deslocar para imitar o gráfico?



**Nota:** Os eixos estão graduados de 1 em 1.

- Descreve uma experiência em que se poderia utilizar um sensor de movimento para obter uma função afim.

## Páginas da Internet

- Descobre a expressão algébrica das funções afins (jogo):  
<http://www.shodor.org/interactivate/activities/NumberCruncher/>  
<http://www.shodor.org/interactivate/activities/LinearFunctMachine/>
- Influência dos parâmetros  $a$  e  $b$  na expressão  $y = ax + b$ , recorrendo ao GeoGebra:  
[http://mat.absolutamente.net/ra\\_f\\_r.html](http://mat.absolutamente.net/ra_f_r.html)
- Jogo de tiro com arco (ajusta o declive e a ordenada na origem para acertar nos balões):  
[http://www.fi.uu.nl/toepassing/en/00065/toepassing\\_wisweb.en.html](http://www.fi.uu.nl/toepassing/en/00065/toepassing_wisweb.en.html)
- Vrum... vrum... (Jogo de movimento): [http://umpoucodematematica.no.sapo.pt/10\\_software.htm](http://umpoucodematematica.no.sapo.pt/10_software.htm)



# MONÓMIOS, POLINÓMIOS E EQUAÇÕES DO 2.º GRAU



Atividades iniciais ..... 37

## 6.1 Monómios ..... 38

Monómios  
Operações com monómios  
Verificar a aprendizagem ..... 40

## 6.2 Polinómios ..... 42

Polinómios  
Operações com polinómios  
Verificar a aprendizagem ..... 46

## 6.3 Casos notáveis da multiplicação de binómios ..... 48

Caso notável — Quadrado de um binómio  
Caso notável — Produto da soma de dois monómios pela sua diferença  
Fatorização de polinómios  
Verificar a aprendizagem ..... 51

## 6.4 Equações do 2.º grau ..... 53

Equações do 2.º grau  
Lei do anulamento do produto  
Resolução de equações do 2.º grau  
Verificar a aprendizagem ..... 58  
  
Síntese ..... 61  
Atividades globais ..... 64  
Autoavaliação ..... 66  
Estratégias para a resolução de problemas e jogos ..... 68  
Investigar ..... 70

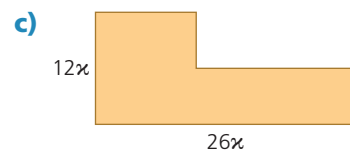
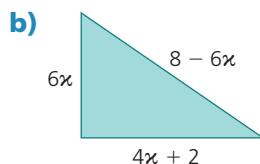
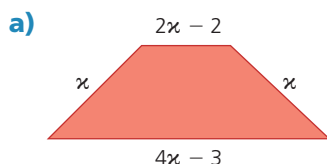
## Atividades iniciais

### Simplificar expressões

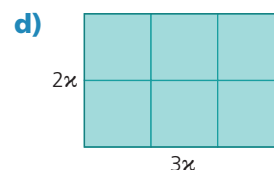
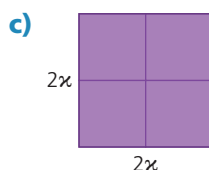
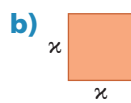
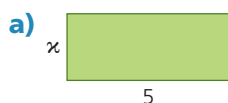
- 1 De entre as expressões seguintes, seleciona a que não se pode simplificar.  
**A.**  $5x + 8x$       **B.**  $5 + 8$       **C.**  $5x - 8x$       **D.**  $5x + 8$

- 2 Simplifica as expressões:  
**a)**  $x + 3x + 12x$       **c)**  $4x + 9x + 17 + 5$   
**b)**  $13x - 7x$       **d)**  $-9y + 2 - y + 6$

- 3 Escreve uma expressão simplificada do perímetro de cada figura:



- 4 Escreve uma expressão simplificada da área de cada retângulo:



### Equações

- 5 Em cada uma das situações seguintes, indica qual das personagens tem razão. Explica as tuas respostas.



- 6 Considera a equação  $x^2 - 1 = 80$ .

- 6.1** Mostra, por substituição, que o número 10 não é solução da equação.  
**6.2** Verifica, por substituição, que o valor 9 é solução da equação.  
**6.3** Substitui, agora,  $x$  por  $-9$ . O que podes concluir?

## Tarefa 1

VAMOS ORGANIZAR UM CAMPEONATO INTERESCOLAS. CADA EQUIPA JOGA DOIS JOGOS COM TODAS AS OUTRAS: UM JOGO EM CASA E OUTRO FORA.



SE PARTICIPAREM 3 ESCOLAS, SERÃO 3 EQUIPAS, O QUE DÁ 6 JOGOS.



E SE FOREM 4 EQUIPAS, SERÃO 12 JOGOS.



- 1 Se forem 5 equipas, quantos jogos serão? E se forem 6 equipas?
- 2 Procura uma expressão que corresponda ao número de jogos para  $x$  equipas. Simplifica-a o mais possível.

### Monómios

Expressões como  $3$ ,  $-5x$ ,  $\frac{1}{4}x^2$  e  $7x^3y^2$  são exemplos de **monómios**.

Um **monómio** é uma expressão que liga por símbolos de produto fatores numéricos, e potências de expoente natural e de base representada por letras, ditas **variáveis ou indeterminadas**.

Num monómio, a expressão que representa o produto dos fatores numéricos designa-se por **parte numérica** ou **coeficiente** do monómio.

Um monómio de parte numérica nula designa-se por **monómio nulo** e um monómio reduzido à parte numérica designa-se por **monómio constante**.

Num monómio não constante o produto, por ordem alfabética, de cada uma das variáveis elevada à soma dos expoentes dos fatores em que essa variável intervém no monómio dado designa-se por **parte literal** do monómio.

No quadro seguinte,  $x$  e  $y$  são variáveis e  $a$  é uma constante. Num monómio podem, então, considerar-se duas partes:

| Monómio           | Parte numérica (ou coeficiente) | Parte literal |
|-------------------|---------------------------------|---------------|
| $-5x$             | $-5$                            | $x$           |
| $\frac{1}{4}ax^2$ | $\frac{1}{4}a$                  | $x^2$         |
| $3$               | $3$                             | Não tem.      |
| $-4yxy$           | $-4$                            | $xy^2$        |

Quando dois monómios, não nulos, têm a mesma parte literal, são **semelhantes**.

Por exemplo:

- $9x^2$  e  $-4x^2$  são monómios semelhantes;
- $5axy^2$  e  $2x^2y$ , com  $a$  constante e  $x$  e  $y$  variáveis, também são monómios semelhantes. A sua parte literal é  $x^2y$ .

**Fórmula canónica** de um monómio não nulo é um monómio em que se representa em primeiro lugar a parte numérica e em seguida a parte literal.

#### Nota

As constantes representam-se habitualmente pelas letras  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

As variáveis representam-se habitualmente pelas letras  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Exemplo:

A forma canónica dos monómios  $8x^2y^3$ ,  $8y^3x^2$  e  $2 \times 5y^3x^2$  com variáveis  $x$  e  $y$  é, respetivamente,  $8x^2y^3$ ,  $8x^2y^3$  e  $10x^2y^3$ .

Dois **monómios são iguais** quando admitem a mesma forma canónica ou quando são ambos nulos.

Os monómios  $8x^2y^3$  e  $8y^3x^2$  são iguais:  $8x^2y^3 = 8y^3x^2$

O **grau de um monómio não nulo** é a soma dos expoentes da respetiva parte literal, quando existe. Os monómios constantes não nulos têm grau 0.

Por exemplo, sendo  $x$  e  $y$  variáveis e  $a$  e  $b$  constantes não nulas:

- $3b \rightarrow$  grau 0
- $-8ax^3 \rightarrow$  grau 3
- $5x \rightarrow$  grau 1
- $-xy^3 = -x^1y^3 \rightarrow$  grau 4
- $6x^2 \rightarrow$  grau 2
- $7x^3y^2 \rightarrow$  grau 5

## ■ Operações com monómios

### Soma algébrica de monómios semelhantes

Dados monómios semelhantes não nulos, a respetiva **soma algébrica** é um monómio com a mesma parte literal e cujo coeficiente é igual à soma algébrica dos coeficientes de cada monómio.

Exemplos:

- $2x^3 + x^3 = 3x^3$
- $x + \frac{1}{2}x = \left(1 + \frac{1}{2}\right)x = \frac{3}{2}x$
- $2xy^2 - \pi xy^2 = (2 - \pi)xy^2$

### Produto

O **produto de monómios** é um monómio cuja parte numérica é igual ao produto dos coeficientes dos fatores e a parte literal se obtém representando cada uma das variáveis elevada à soma dos expoentes dos fatores em que essa variável intervém nos monómios dados.

Exemplos:

- $2x^3 \times x^3 = 2x^{3+3} = 2x^6$  ( $x$  variável)
- $x \times \frac{a}{2}x = \left(1 \times \frac{a}{2}\right)x^{1+1} = \frac{a}{2}x^2$  ( $x$  variável,  $a$  constante)
- $\sqrt{2}xy \times \sqrt{2}x^2 = (\sqrt{2} \times \sqrt{2})x^{1+2}y^1 = 2x^3y$  ( $x$  e  $y$  variáveis)

#### O que deves saber

- Compreender o vocabulário relativo a monómios.
- Operar com monómios.

## Verificar a aprendizagem

### MONÓMIOS

- 1 Copia a tabela para o teu caderno e completa-a, indicando o coeficiente, a parte literal e o grau de cada um dos monómios. Nos monómios seguintes,  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam variáveis e  $a$  e  $b$  representam constantes não nulas.

| Monómio          | Coeficiente | Parte literal | Grau |
|------------------|-------------|---------------|------|
| $4x$             |             |               |      |
| $-9x^3$          |             |               |      |
| $\frac{2}{3}y^2$ |             |               |      |
| $ax$             |             |               |      |
| $-z^2$           |             |               |      |
| $7b$             |             |               |      |
| $-20x^4y^3$      |             |               |      |
| $xy^2z$          |             |               |      |

- 2 Qual das opções seguintes corresponde a um par de monómios semelhantes?  
**A.**  $6x$  e  $6x^2$       **B.**  $-8x$  e  $15y$       **C.**  $2xy$  e  $7xy^2$       **D.**  $4x$  e  $-13x$
- 3 Qual dos monómios não é de 3.º grau?  
**A.**  $3x^2y$       **B.**  $\frac{1}{3}xyz$       **C.**  $3xy$       **D.**  $6x^3$
- 4 Através do preenchimento da tabela seguinte, indica uma forma canónica para cada um dos seguintes monómios e identifica os que são semelhantes e os que são iguais.  
 Nos monómios seguintes,  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam variáveis e  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes.

| Monómio       | Forma canónica | Igual a | Semelhante a |
|---------------|----------------|---------|--------------|
| $2yx^4y^2$    |                |         |              |
| $3a$          |                |         |              |
| $-5xyz^2x$    |                |         |              |
| $2x^2y^3x^2$  |                |         |              |
| $\frac{2}{3}$ |                |         |              |
| $25x^3zyz^2$  |                |         |              |
| $-8z^2yx^2$   |                |         |              |
| $4bcx^3yz^3$  |                |         |              |
| $25xz^3yzx^2$ |                |         |              |

- 5 Escreve dois monómios semelhantes ao monómio  $-\frac{2x^3y}{5}$ .

- 6 Considera as seguintes expressões, em que as variáveis se designam por  $x$ ,  $y$  e  $z$  e as constantes por  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

A.  $2x^3 - 4y$       B.  $-\frac{1}{2}$       C.  $2a$       D.  $acx^3$       E.  $bxy^2$       F.  $-acx^3$

6.1 Indica as que são monómios.

6.2 De entre os monómios da questão 6.1, indica os semelhantes.

- 7 Dá um exemplo de:

- a) um monómio de 3.º grau que tenha duas variáveis;  
b) dois monómios de grau 2 que sejam semelhantes.

**AUTOAVALIAÇÃO** Compreendo o vocabulário relativo a monómios?

**SOMA ALGÉBRICA E PRODUTO**

- 8 Qual é o único caso em que se pode efetuar a adição dos monómios indicados? Escolhe a opção correta.

A.  $10x$  e  $3y$       B.  $8x^2$  e  $2x^2$       C.  $-5x^2$  e  $3x$       D.  $11x^2$  e  $4$

- 9 Multiplica os monómios:

a)  $3 \times 5x$       b)  $8x \times 2x$       c)  $-2x^2 \times 7x$       d)  $-8x^3 \times (-9x^4)$

- 10 Qual dos monómios representa o produto  $-2x^2 \times \frac{3}{2}x^2$ ?

A.  $-3x^2$       B.  $x^4$       C.  $-\frac{6}{4}x^4$       D.  $-3x^4$

- 11 Nos monómios seguintes, as variáveis designam-se por  $x$ ,  $y$  e  $z$  e as constantes por  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Escreve na forma canónica o produto dos seguintes monómios e, caso os monómios sejam semelhantes, determina igualmente a respetiva soma.

a)  $2bx^3$  e  $-3x^3$       b)  $7y^2z$  e  $5z^2y$       c)  $abyx$  e  $8acxy$       d)  $3b^2cy^3z$  e  $-4cb^2zy^3$

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei adicionar (subtrair) e multiplicar monómios?

**Aplicar**

- 12 Qual é o valor de  $\frac{3x^3y}{2}$  quando as indeterminadas  $x$  e  $y$  tomam valores  $-1$  e  $2$ , respetivamente?

- 13 Determina as expressões para o perímetro e para a área de um quadrado de lado  $\frac{y}{2}$  cm.

- 14 A aresta de um cubo mede  $2x$  cm. Escreve uma expressão simplificada para a área total das faces do cubo e outra para o volume do cubo.

- 15 O Jaime está a investigar potências de monómios. Copia e completa o seu raciocínio:

- a)  $(3x)^2 = 3x \times 3x = \dots$ . Ou seja,  $(3x)^2 = 3^2x^2$ .  
b)  $(5x)^3 = 5x \times 5x \times 5x = \dots$ . Ou seja,  $(5x)^3 = \dots$ .  
c)  $(-6xy)^2 = -6xy \times (-6xy) = \dots$ . Ou seja,  $(-6xy)^2 = \dots$ .  
d) De um modo geral, o expoente aplica-se tanto ao  $\dots$  como à parte  $\dots$ .

- 16 Calcula:

a)  $(4x)^2$       b)  $(10y)^3$       c)  $(-9x)^2$       d)  $\left(\frac{8}{7}x\right)^2$       e)  $(-2xy^2)^3$       f)  $(-x^5)^4$



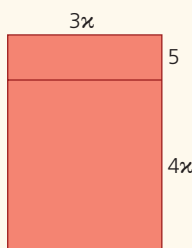
# 6.2

## Polinómios

### Tarefa 2



PRECISO DE CALCULAR AS EXPRESSÕES PARA O PERÍMETRO E PARA A ÁREA DA MESA QUE A MINHA MÃE VAI COMPRAR, SABENDO QUE AS DIMENSÕES DEPENDEM DO VALOR DESCONHECIDO  $x$ , TAL COMO MOSTRA A FIGURA.



- 1 Qual é a expressão para o perímetro da mesa?
- 2 Escreve uma expressão que dê a área da mesa. Simplifica essa expressão.
- 3 Calcula a área de cada um dos retângulos sugeridos na figura e soma-as. O que obténs?

### Polinómios

Um **polinómio** é um monómio ou uma expressão ligando monómios (designados por **termos do polinómio**) através de sinais de adição ou de sinais de subtração.

Se um polinómio for constituído por dois termos não semelhantes, é um **binómio** (por exemplo,  $6x^2 - 3x$ ) e, se for constituído por três, é um **trinómio** (por exemplo,  $5x^2 + 7x - 9$ ).

As variáveis dos termos de um polinómio designam-se por **variáveis** ou **indeterminadas do polinómio** e os coeficientes dos respetivos termos por **coeficientes do polinómio**.

**Forma reduzida de um polinómio** é um polinómio que se obtém do polinómio dado eliminando os termos nulos, adicionando algebricamente os termos semelhantes e eliminando as somas nulas. No caso de não se obter nenhum termo por este processo, dizemos que a forma reduzida é 0.

Um polinómio com forma reduzida 0 designa-se por **polinómio nulo**.

Exemplos:

- $-7x^2 + 3x + 2$  é a forma reduzida do polinómio  $5x^2 - 6 + 3x - 12x^2 + 8$ .
- $5x^2y + 5x$  é a forma reduzida do polinómio  $3x^3y^2 + 4x + 2x^2y - 3x^3y^2 + 3x^2y + x$ .
- 0 é a forma reduzida do polinómio  $2x^2y^2 + 3x - 4 + xy - x^2y^2 + 2xy - 2x + 4 - 3xy - x^2y^2 - x$ .

Dois polinómios dizem-se **iguais** se admitem uma mesma forma reduzida.

Exemplo:

Os polinómios  $5x^2 - 6 + 3x - 12x^2 + 8$  e  $x^3 + x - 7x^2 - 2 + 2x - x^3 + 4$  são iguais:  $-7x^2 + 3x + 2$  é uma forma reduzida destes polinómios.

$$5x^2 - 6 + 3x - 12x^2 + 8 = x^3 + x - 7x^2 - 2 + 2x - x^3 + 4 = -7x^2 + 3x + 2$$

O **termo independente** de um polinómio é o termo de grau 0 de uma forma reduzida desse **polinómio**.

#### Nota

$$5x^2 - 6x = 5x^2 + (-6x)$$

Exemplos:

- O termo independente do polinómio de  $-7x^2 + 3x + 2$  é 2.
- $x^2 - 2x$  não tem termo independente.

O **grau de um polinómio não nulo** é o maior dos graus dos termos de uma forma reduzida desse polinómio.

Por exemplo:

- $5x^2 + 7x - 9$  é um polinómio do 2.º grau (ou de grau 2);
- $2x^4 + 4x + 5x^2y - x^4 + y + x - x^4 = 5x^2y + 5x + y$  é um polinómio do 3.º grau (ou de grau 3).

## ■ Operações com polinómios

### Soma algébrica

Dados dois polinómios, o **polinómio soma** é o que se obtém ligando os polinómios parcelas através do sinal de adição. Se, em seguida, adicionarmos os termos semelhantes obtemos uma forma reduzida da soma.

Exemplo:

$$\begin{aligned} \bullet (5x^2 + 7x - 9) + (3x^2 - 2x - 6) &= 5x^2 + 7x - 9 + 3x^2 - 2x - 6 = \\ &= 8x^2 + 5x - 15 \end{aligned}$$

O polinómio  $8x^2 + 5x - 15$  diz-se **reduzido** (não tem monómios semelhantes) e **ordenado** (os monómios estão escritos por ordem decrescente do grau).

A adição de polinómios goza das propriedades comutativa e associativa.

O **simétrico** do polinómio  $-3x^2 + 2x + 5$  é o polinómio  $3x^2 - 2x - 5$ .

Dados dois polinómios, o **polinómio diferença** é o polinómio que se obtém somando o primeiro com o simétrico do segundo.

Exemplo:

$$\begin{aligned} \bullet (x^2 - 10x - 8) - (-3x^2 + 2x) &= x^2 - 10x - 8 + 3x^2 - 2x = \\ &= 4x^2 - 12x - 8 \end{aligned}$$

A adição e a subtração de polinómios designa-se por **adição algébrica**.

Nota que, dados dois polinómios na forma reduzida, se adicionarmos algebricamente os coeficientes dos termos semelhantes obtemos uma forma reduzida da sua soma algébrica.

### Produto

O **produto** de dois polinómios é o polinómio que se obtém efetuando todos os produtos possíveis de um termo de um por um termo do outro e adicionando os resultados obtidos.

a) Para **multiplicar um monómio por um polinómio**, multiplica-se o monómio por cada um dos termos do polinómio e adicionam-se os monómios obtidos.

Exemplos:

$$\begin{aligned} \bullet 2x \times (4x - 13) &= 2x \times 4x + 2x \times (-13) = 8x^2 - 26x \\ \bullet -5x \times (8x^2 + x - 4) &= -40x^3 - 5x^2 + 20x \end{aligned}$$

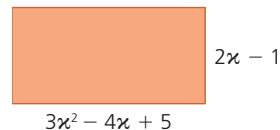
**b)** Para **multiplicar dois polinômios**, multiplica-se cada termo do primeiro polinômio pelos termos do segundo e adicionam-se os monômios obtidos.

Exemplos:

- $(x - 3) \times (x + 5) = x \times x + x \times 5 - 3 \times x - 3 \times 5 =$   
 $= x^2 + 5x - 3x - 15 = x^2 + 2x - 15$
- $(x + 2)(x^2 - 3x + 2) =$   
 $= x \times x^2 + x \times (-3x) + x \times 2 + 2 \times x^2 + 2 \times (-3x) + 2 \times 2 =$   
 $= x^3 - 3x^2 + 2x + 2x^2 - 6x + 4 = x^3 - x^2 - 4x + 4$

### Exercício resolvido

Considera o retângulo apresentado ao lado.



- Determina uma expressão simplificada do perímetro do retângulo. Apresenta o resultado na forma de polinômio reduzido e indica o respetivo grau.
- Determina uma expressão simplificada da área do retângulo. Apresenta o resultado na forma de polinômio reduzido e indica o respetivo grau.
- Supondo que  $x = 2$ , qual é o valor do perímetro e da área deste retângulo?

### Resolução:

- $P = 2 \times (2x - 1) + 2 \times (3x^2 - 4x + 5) =$   
 $= 4x - 2 + 6x^2 - 8x + 10 =$   
 $= 6x^2 - 4x + 8$   
 É um polinômio de grau 2.
- $A = b \times h = (3x^2 - 4x + 5)(2x - 1) =$   
 $= 3x^2 \times 2x + 3x^2 \times (-1) - 4x \times 2x - 4x \times (-1) + 5 \times 2x + 5 \times (-1) =$   
 $= 6x^3 - 3x^2 - 8x^2 + 4x + 10x - 5 =$   
 $= 6x^3 - 11x^2 + 14x - 5$   
 É um polinômio de grau 3.
- $P = 6 \times 2^2 - 4 \times 2 + 8 = 24$   
 $A = 6 \times 2^3 - 11 \times 2^2 + 14 \times 2 - 5 = 27$

A multiplicação de polinômios goza das propriedades comutativa e associativa. Também é válida a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica.

Levando em conta as propriedades algébricas da multiplicação e das potências e a forma como se definem as operações e o conceito de igualdade entre polinômios, pode afirmar-se que:

- Dada uma soma de polinômios (respetivamente produto), se se substituírem as indeterminadas por números, obtém-se uma expressão numérica de valor igual à soma (respetivamente produto) dos valores das expressões numéricas que se obtêm substituindo, nas parcelas, as indeterminadas respetivamente pelos mesmos números;

Exemplos:

$\left(2xy^2 - \frac{1}{2}x\right) + \left(-xy^2 + \frac{3}{2}x\right) = xy^2 + x$ . Vamos substituir as indeterminadas  $x$  e  $y$ .

| $x$ | $y$ | $\left(2xy^2 - \frac{1}{2}x\right) + \left(-xy^2 + \frac{3}{2}x\right)$                                                          | $xy^2 + x$                    |
|-----|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| 1   | -1  | $\left(2 \times 1 \times (-1)^2 - \frac{1}{2} \times 1\right) + \left(-1 \times (-1)^2 + \frac{3}{2} \times 1\right) = 2$        | $1 \times (-1)^2 + 1 = 2$     |
| -1  | 2   | $\left(2 \times (-1) \times 2^2 - \frac{1}{2} \times (-1)\right) + \left(-(-1) \times 2^2 + \frac{3}{2} \times (-1)\right) = -5$ | $(-1) \times 2^2 + (-1) = -5$ |

$(x+1) \times \left(\frac{1}{2}x - 1\right) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ . Vamos substituir a indeterminada  $x$ .

| $x$ | $(x+1) \times \left(\frac{1}{2}x - 1\right)$                   | $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$                           |
|-----|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| -1  | $((-1)+1) \times \left(\frac{1}{2} \times (-1) - 1\right) = 0$ | $\frac{1}{2} \times (-1)^2 - \frac{1}{2} \times (-1) - 1 = 0$ |
| 1   | $(1+1) \times \left(\frac{1}{2} \times 1 - 1\right) = -1$      | $\frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{2} \times 1 - 1 = -1$      |

Uma vez que está definido o produto de polinómios, pode utilizar-se a notação das potências de expoente natural para representar o produto de certo número de polinómios iguais.

$$(x+1) \times (x+1) \times (x+1) = (x+1)^3$$

### Exercício resolvido

Determina na forma de polinómio reduzido e indica o respetivo grau:

- a)  $2(x-3) + 5x - 2$       c)  $(2x-3)^2 - 3(x-2)$   
b)  $(x+1)^2$       d)  $(x+2)^2 - (x+3)^2$

#### Resolução:

a)  $2(x-3) + 5x - 2 = 2x - 6 + 5x - 2 = 7x - 8$

O seu grau é 1.

b)  $(x+1)^2 =$

$$= (x+1) \times (x+1) =$$

$$= x \times x + x \times 1 + 1 \times x + 1 \times 1 =$$

$$= x^2 + 2x + 1$$

O seu grau é 2.

c)  $(2x-3)^2 - 3(x-2) =$

$$= (2x-3) \times (2x-3) - 3x + 6 =$$

$$= 4x^2 - 6x - 6x + 9 - 3x + 6 = 4x^2 - 15x + 15$$

O seu grau é 2.

d)  $(x-2)^2 - (x+3)^2 =$

$$= (x-2) \times (x-2) - (x+3) \times (x+3) =$$

$$= x^2 - 2x - 2x + 4 - (x^2 + 3x + 3x + 9) =$$

$$= x^2 - 4x + 4 - x^2 - 6x - 9 = -10x - 5$$

O seu grau é 1.

### O que deves saber

- Compreender o vocabulário relativo a polinómios.
- Operar com polinómios (soma algébrica e produto).

## Verificar a aprendizagem

### POLINÓMIOS

- 1 Considera os polinómios  $12x - a$  e  $-3x^2 - 4x + 25$ , na variável  $x$ . Para cada um deles, identifica:
- a) os seus termos;
  - b) o grau do polinómio.
- 2 Escreve um binómio do 2.º grau em que os coeficientes sejam simétricos.
- 3 Qual dos seguintes polinómios, em que  $x$ ,  $y$  e  $z$  são variáveis, é de grau 5?
- A.  $2x^4 + 3$
  - B.  $xyz + x^2y^3 + 4$
  - C.  $x^2 + 8 + \frac{3}{2}x^2$
  - D.  $5y^2 + 2x^2 + z$
- 4 Dá um exemplo de:
- a) um polinómio de 3.º grau;
  - b) um binómio de 2.º grau;
  - c) um polinómio de grau 2 com termo independente nulo e coeficientes simétricos.
- 5 Qual dos polinómios seguintes, em que  $x$ ,  $y$  e  $z$  são variáveis e  $a$  é constante, está na forma reduzida?
- A.  $2x + x^2 - x + 3 + a$
  - B.  $x^2 + 8 + \frac{3}{2}x^2$
  - C.  $xyz + x^2y^2 + 2az$
  - D.  $5y^2 + 3yx + 2x^2 - xy$

### AUTOAVALIAÇÃO Compreendo o vocabulário relativo a polinómios?

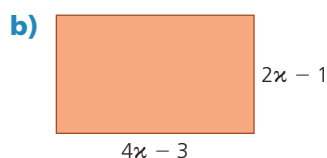
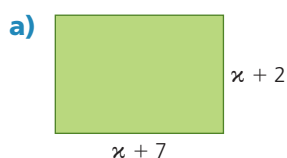
### SOMA ALGÉBRICA E PRODUTO

- 6 Simplifica e apresenta o resultado sob a forma de um polinómio reduzido e ordenado e identifica duas alíneas em que se representam polinómios iguais:
- a)  $(7x + 8) + (4x + 6)$
  - b)  $(3x^2 + 5x + 2) + (6x^2 + 9x + 7)$
  - c)  $(x^2 - 4x - 1) + (x^2 - 6x + 14)$
  - d)  $(x^3 - 4x^2 + 2x - 9) + (x^3 - x^2 + 9)$
  - e)  $(10x - 3) - (2x - 6)$
  - f)  $(9x^2 + 5x + 2) - (-3x^2 + 8x) + (3x + 20)$
  - g)  $(4x^2 + x - 3) - (4x^2 - 7x + 3) + (3x + 20)$
  - h)  $(-2x^3 - 6x^2 + 11) - (x^3 - 2x^2 + 5)$
- 7 Simplifica e apresenta o resultado sob a forma de um polinómio reduzido e ordenado:
- a)  $2x \times (4x + 10)$
  - b)  $3x^2 \times (6x - 2)$
  - c)  $(x + 4)(x + 5)$
  - d)  $(x + 3)(x + 7)$
  - e)  $(2x - 4)(3x - 1)$
  - f)  $(x + 5)(x^2 + 2x + 6)$
  - g)  $(x - 2)(9x^2 + 3x - 4)$
  - h)  $(3x + 2)(-x^2 + 8x - 5)$
- 8 Mostra que:
- a)  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
  - b)  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
  - c)  $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

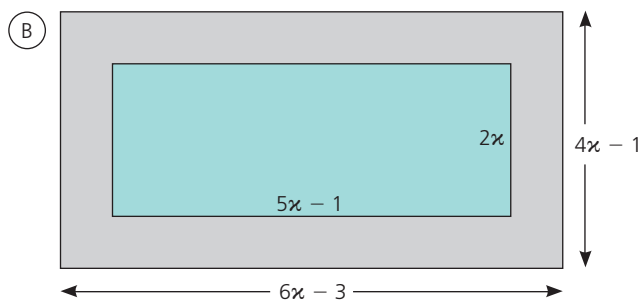
### AUTOAVALIAÇÃO Sei adicionar (subtrair) e multiplicar polinómios?

## Aplicar

- 9** Qual é o valor de  $x^2 + x - 6$  quando  $x = 3$ ?  
**A.** 18                      **B.** 6                      **C.** 3                      **D.** 0
- 10** Descobre o polinómio que torna verdadeiras as igualdades seguintes:  
**a)**  $(3x^2 - 2x - 1) + (\dots) = 5x^2 - 6x + 6$   
**b)**  $4x \times (\dots) = 8x^2 + 4x$
- 11** Determina uma expressão simplificada do perímetro e da área de cada um dos retângulos apresentados a seguir e indica o grau dos polinómios:



- 12** Uma piscina retangular está rodeada por um pavimento, como mostra a figura B.

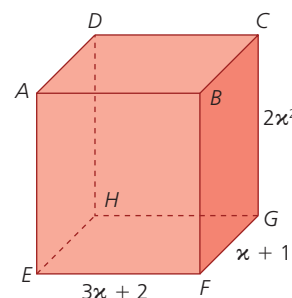


- 12.1** Escreve uma expressão simplificada do perímetro da piscina.  
**12.2** Escreve um polinómio reduzido e ordenado que corresponda à área da piscina.  
**12.3** Escreve uma expressão simplificada da área do pavimento.

## Tarefa

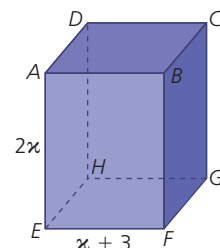
- 13** Considera o paralelepípedo retângulo  $[ABCDEFGH]$ .  
 Escreve o polinómio reduzido e ordenado que representa:

- a)** o perímetro da base  $[EFGH]$ ;  
**b)** a área da face frontal  $[ABFE]$ ;  
**c)** a área da base;  
**d)** o volume do paralelepípedo.  
**e)** a área da face lateral  $[BCGF]$ ;



- 14** Considera o prisma quadrangular  $[ABCDEFGH]$ , que tem  $(x + 3)$  cm de base e  $2x$  cm de altura. Escreve o polinómio reduzido e ordenado que representa:

- a)** o perímetro da base  $[ABCD]$ ;  
**b)** a área da base  $[ABCD]$ ;  
**c)** o volume do prisma.

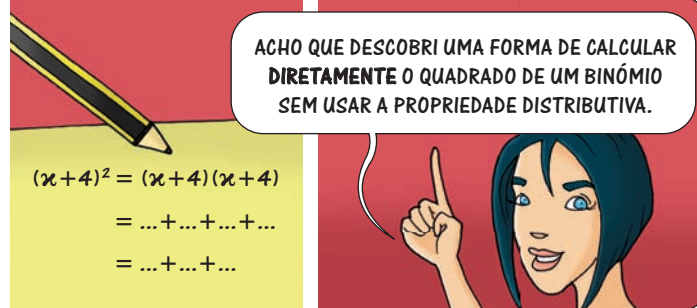
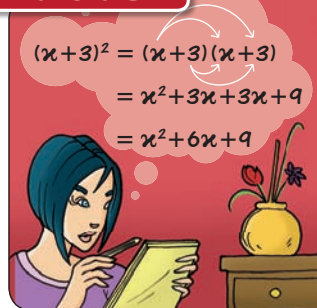




# 6.3

## Casos notáveis da multiplicação de binómios

### Tarefa 3



- 1 Completa os cálculos da Sofia.
- 2 Observa que o resultado é sempre um trinómio. Investiga como se obtém cada um dos seus três monómios.

### Caso notável — Quadrado de um binómio

Como simplificar o quadrado do binómio  $a + b$ , ou seja,  $(a + b)^2$ ?

— Pode usar-se a propriedade distributiva:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + \underline{ba} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

— Pode também relacionar-se  $(a + b)^2$  com a área de um quadrado cujo lado mede  $a + b$ :

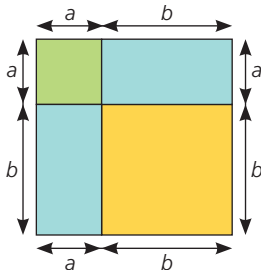


De um modo geral:

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$$

Por exemplo:

$$\underbrace{(2 + 3)^2}_{25} \neq \underbrace{2^2 + 3^2}_{13}$$



$$A_{\text{QUADRADO}} = A_{\text{verde}} + 2 \times A_{\text{azul}} + A_{\text{amarelo}}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \times ab + b^2$$

### Repara

Quando se calcula a potência de um monómio, o expoente aplica-se tanto ao coeficiente como à parte literal.

Exemplos:

- $(3x)^2 = 3^2 x^2 = 9x^2$
- $(-2x)^2 = (-2)^2 x^2 = +4x^2$
- $\left(\frac{4}{5}x\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} x^2 = \frac{16}{25} x^2$

|                        |   |                         |   |                                                  |   |                         |
|------------------------|---|-------------------------|---|--------------------------------------------------|---|-------------------------|
| $(a + b)^2$            | = | $a^2$                   | + | $2ab$                                            | + | $b^2$                   |
| Quadrado de um binómio |   | Quadrado do 1.º monómio |   | Dobro do produto do 1.º monómio pelo 2.º monómio |   | Quadrado do 2.º monómio |

O quadrado de um binómio obtém-se adicionando o quadrado do 1.º monómio ao dobro do produto do 1.º monómio pelo 2.º monómio e ao quadrado do 2.º monómio.

Exemplos:

- $(x + 6)^2 = x^2 + 2 \times x \times 6 + 6^2 = x^2 + 12x + 36$
- $(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x - 3)^2 = (x + (-3))^2 = x^2 + 2 \times x \times (-3) + (-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

- $\left(-x + \frac{1}{2}\right)^2 = (-x)^2 + 2 \times (-x) \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$
- $(-7 - 4x)^2 = ((-7) + (-4x))^2 = (-7)^2 + 2 \times (-7) \times (-4x) + (-4x)^2 =$   
 $= 7^2 + 2 \times 7 \times 4x + (4x)^2 = 49 + 56x + 16x^2 = 16x^2 + 56x + 49$

## ■ Caso notável — Produto da soma de dois monómios pela sua diferença

Como simplificar expressões do tipo  $(a + b)(a - b)$ ?

Observa-se que:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + \cancel{ba} - b^2 = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

|                                                     |   |                         |   |                         |
|-----------------------------------------------------|---|-------------------------|---|-------------------------|
| $(a + b)(a - b)$                                    | = | $a^2$                   | - | $b^2$                   |
| Produto da soma de dois monómios pela sua diferença |   | Quadrado do 1.º monómio |   | Quadrado do 2.º monómio |

O produto da soma de dois monómios pela sua diferença é igual à diferença dos seus quadrados.

Exemplos:

- $(x + 9)(x - 9) = x^2 - 9^2 = x^2 - 81$
- $(5x - 0,1)(5x + 0,1) = (5x)^2 - 0,1^2 = 25x^2 - 0,01$
- $\left(-\frac{7}{3} + 6x\right)\left(-\frac{7}{3} - 6x\right) = \left(-\frac{7}{3}\right)^2 - (6x)^2 = \frac{49}{9} - 36x^2$

### Exercício resolvido

Utiliza os casos notáveis da multiplicação de binómios para efetuar os cálculos numéricos seguintes:

- a)  $103^2$       b)  $198^2$       c)  $51 \times 49$

#### Resolução:

- a) Usando o caso notável «quadrado de um binómio»:

$$103^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609$$

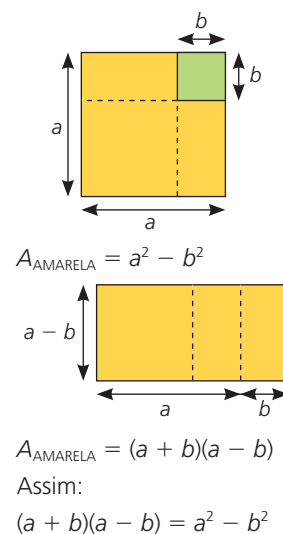
- b) Usando o caso notável «quadrado de um binómio»:

$$198^2 = (200 - 2)^2 = 200^2 - 2 \times 200 \times 2 + 2^2 = 40\,000 - 800 + 4 = 39\,204$$

- c) Usando o caso notável «produto da soma de dois monómios pela sua diferença»:

$$51 \times 49 = (50 + 1)(50 - 1) = 50^2 - 1^2 = 2500 - 1 = 2499$$

### Repara



## ■ Fatorização de polinômios

A **fatorização de um polinômio** é a operação que consiste em escrever um dado polinômio como produto de polinômios, sendo pelo menos um dos fatores não constante e de grau inferior ao do polinômio inicial.

Exemplos:

Pode fatorizar-se um polinômio pondo em evidência os fatores comuns a cada um dos seus termos, caso existam.

$$2x^2y - 4xy = 2xy(x - 2)$$

Também se pode utilizar os casos notáveis da multiplicação de binômios, quando possível, para efetuar a fatorização.

- $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$
- $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 6x + 3^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3)$
- $x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x = x\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = x\left(x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = x\left(x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

### Nota

Quando se faz

$x^2 + 5x = x(x + 5)$ ,  
também se diz que se  
«coloca  $x$  em evidência»,  
ou seja, usa-se a  
propriedade distributiva  
no sentido inverso.

QUANDO FATORIZAMOS  
UM POLINÓMIO DEVEMOS  
PROSSEGUIR A FATORIZAÇÃO  
TANTO QUANTO POSSÍVEL.



### Exercício resolvido

Fatoriza os seguintes polinômios, começando por pôr em evidência fatores comuns e observando, em seguida, a eventual ocorrência de casos notáveis que permitam prosseguir a fatorização.

- a)  $x^3 - 2x$
- b)  $x^2(2x + 5) - 4(2x + 5)$
- c)  $5x^2 - 10x + 20$
- d)  $4x^2y^4 - 4xy^3z + y^2z^2$

### Resolução:

- a)  $x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = x(x^2 - (\sqrt{2})^2) = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$
- b)  $x^2(2x + 5) - 4(2x + 5) = (2x + 5)(x^2 - 4) = (2x + 5)(x - 2)(x + 2)$
- c)  $5x^2 - 10x + 20 = 5(x^2 - 2x + 4) = 5(x - 2)^2$
- d)  $4x^2y^4 - 4xy^3z + y^2z^2 = y^2(4x^2y^2 - 4xyz + z^2) = y^2(2xy - z)^2$

### O que deves saber

- Utilizar os casos notáveis da multiplicação de binômios.
- Aplicar os casos notáveis no cálculo numérico.
- Fatorizar polinômios.

## Verificar a aprendizagem

### QUADRADO DE UM BINÓMIO

- 1 Simplifica, usando um caso notável, e apresenta o resultado sob a forma de um polinómio reduzido e ordenado:  
 a)  $(x + 5)^2$                       c)  $(x + 9)^2$                       e)  $(2x + 8)^2$   
 b)  $(x + 7)^2$                       d)  $(3x + 4)^2$                       f)  $\left(4y + \frac{5}{2}\right)^2$
- 2 Copia e completa:  
 a)  $(x + \dots)^2 = x^2 + 6x + 9$   
 b)  $(\dots + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$
- 3 Efetua os cálculos numéricos seguintes utilizando o quadrado de um binómio:  
 a)  $101^2$                       b)  $52^2$                       c)  $203^2$
- 4 Simplifica, usando um caso notável, e apresenta o resultado sob a forma de um polinómio reduzido e ordenado:  
 a)  $(x - 4)^2$                       c)  $(5x - 1)^2$                       e)  $\left(2x - \frac{3}{4}\right)^2$   
 b)  $(x - 8)^2$                       d)  $(-3 - 10y)^2$                       f)  $\left(\frac{t}{8} - \frac{1}{2}\right)^2$
- 5 Copia e completa:  
 a)  $(\dots - \dots)^2 = x^2 - 10x + 25$                       b)  $(\dots - \dots)^2 = 9x^2 - 36x + 36$
- 6 Efetua os cálculos numéricos seguintes utilizando um caso notável:  
 a)  $99^2$                       b)  $295^2$                       c)  $498^2$

### AUTOAVALIAÇÃO Sei utilizar o caso notável — quadrado de um binómio?

### PRODUTO DA SOMA DE DOIS MONÓMIOS PELA SUA DIFERENÇA

- 7 Simplifica, usando o caso notável do produto da soma de dois monómios pela sua diferença, e apresenta o resultado sob a forma de um polinómio reduzido e ordenado:  
 a)  $(x + 3)(x - 3)$                       c)  $(2x + 9)(2x - 9)$                       e)  $(0,5 - 6y)(0,5 + 6y)$   
 b)  $(x + 12)(x - 12)$                       d)  $(5t - 13)(5t + 13)$                       f)  $\left(\frac{4}{3}x + \frac{7}{20}\right)\left(\frac{4}{3}x - \frac{7}{20}\right)$
- 8 Copia e completa:  
 a)  $(\dots + \dots)(\dots - \dots) = x^2 - 49$                       b)  $(\dots + \dots)(\dots - \dots) = 16x^2 - 64$
- 9 Efetua os cálculos numéricos seguintes utilizando o caso notável do produto da soma de dois monómios pela sua diferença:  
 a)  $31 \times 29$                       b)  $62 \times 58$                       c)  $95 \times 105$
- 10 Fatoriza os seguintes polinómios, com  $x$ ,  $y$  e  $z$  variáveis e a constante, começando por colocar em evidência fatores comuns e observando, em seguida, a eventual ocorrência de casos notáveis que permitam prosseguir a fatorização:  
 a)  $25x^3 - 75x$                       c)  $(x - y)^2 - 9$                       e)  $4x^4y^2 - 4x^3yz + x^2z^2$   
 b)  $3ax^2 + 6ax + 3a$                       d)  $-xy^2 + 2xy - x$                       f)  $(x + 1)^2 - (x^2 - 1)$

### AUTOAVALIAÇÃO Sei utilizar o caso notável — produto da soma pela diferença?

## Aplicar

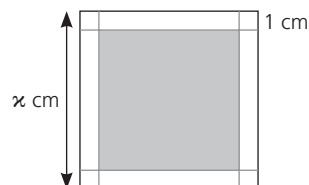
- 11** Um quadrado tem  $x$  cm de lado. Se se aumentar o lado em 1 cm, qual passará a ser a expressão que representa a sua área, em  $\text{cm}^2$ ? Escolhe a opção correta.

A.  $x^2 + 1$       B.  $x^2 + x + 1$       C.  $x^2 + 2$       D.  $x^2 + 2x + 1$

- 12** A Joana fez quatro dobras com 1 cm de largura num guardanapo quadrado que tinha  $x$  cm de lado (figura ao lado).

Qual é a expressão da área sombreada (em  $\text{cm}^2$ )? Escolhe a opção correta.

A.  $x^2 - 4x + 4$       C.  $x^2 - 2x + 1$   
B.  $x^2 - 4$       D.  $x^2 - 2$



- 13** Simplifica cada uma das expressões:

a)  $5(-2x + 3)^2 + (x - 6)(x + 6)$

b)  $(-x - 4)^2 - (x - 4)^2$

- 14** Um petroleiro que navegava no golfo do México colidiu com duas embarcações e começou a derramar petróleo. Um cientista descobriu que,  $x$  horas após a sua chegada, a área (em  $\text{km}^2$ ) de petróleo espalhado sobre o mar era dada pela expressão:

$$(0,5x + 4)^2 - 4x$$

Esta expressão manteve-se válida durante 24 horas.

**14.1** Simplifica a expressão.

**14.2** Qual era a área de petróleo derramado três horas após a chegada do cientista?



- 15** Se três números naturais  $m$ ,  $n$  e  $p$  verificam a igualdade  $m^2 + n^2 = p^2$  diz-se que  $(m, n, p)$  é um terno pitagórico.

Prova que, sendo  $a$  e  $b$  números naturais, tais que  $a > b$ , então, os números inteiros  $m = a^2 - b^2$ ,  $n = 2ab$  e  $p = a^2 + b^2$  formam um terno pitagórico.

## Tarefas de investigação

- 16** O Diogo escolheu três números inteiros consecutivos. Depois, calculou o quadrado do número do meio e comparou o resultado com o produto dos outros dois (o primeiro e o terceiro). Repetiu a experiência várias vezes e escreveu uma conjectura.

**16.1** Descobre a conjectura do Diogo.

**16.2** Representa o menor número por  $x$  e prova a conjectura.

- 17** Os números 1, 4, 9, 16, 25, etc., designam-se por quadrados perfeitos ( $1^2$ ,  $2^2$ ,  $3^2$ ,  $4^2$ ,  $5^2$ , etc.).

**17.1** Investiga o tipo de número que se obtém quando se calcula a diferença entre dois quadrados perfeitos consecutivos e estabelece uma conjectura.

**17.2** Se  $x^2$  é um quadrado perfeito, como se escreve o quadrado perfeito seguinte?

**17.3** Escreve uma expressão geral que dê a diferença entre dois quadrados perfeitos consecutivos e prova a tua conjectura.

# 6.4

## Equações do 2.º grau

### Tarefa 4



- 1 Designa por  $x$  o número de rapazes. Escreve uma equação que traduza a situação.
- 2 Resolve a equação.
- 3 Responde à pergunta do Zito.

### Equações do 2.º grau

Uma **equação do 2.º grau com uma incógnita** é uma equação equivalente a uma equação do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$ , em que  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  e  $x$  é incógnita.

Uma equação do 2.º grau  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a \neq 0$ , diz-se **incompleta** quando  $b = 0$  ou  $c = 0$ .

### Lei do anulamento do produto

Numa multiplicação, se um dos fatores for igual a zero, então, o produto é nulo. Vamos agora ver que, reciprocamente, se o produto de dois fatores é igual a zero, é porque pelo menos um deles é igual a zero.

Sejam dois números  $a$  e  $b$ , tais que  $a \times b = 0$ .

Se  $a \neq 0$ , multiplicando ambos os membros da igualdade por  $\frac{1}{a}$ , vem

$$\frac{1}{a} \times a \times b = \frac{1}{a} \times 0, \text{ ou seja, } b = 0.$$

Desta forma,  $a = 0$  ou  $b = 0$ .

#### Lei do anulamento do produto

Um produto é zero se e só se algum dos seus fatores é zero.

$$a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

**NOTA:** A palavra «ou» pode representar-se pelo símbolo « $\vee$ ».

Exemplo:

Quais são as soluções da equação  $(x - 7)(2x + 6) = 0$ ?

$$(x - 7)(2x + 6) = 0 \Leftrightarrow x - 7 = 0 \vee 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \vee 2x = -6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \vee x = -\frac{6}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \vee x = -3$$

$$\text{C. S.} = \{-3; 7\}$$

#### Repara

A equação

$$(x - 7)(2x + 6) = 0$$

é do 2.º grau, pois:

$$(x - 7)(2x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 14x - 42 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 42 = 0$$

## ■ Resolução de equações do 2.º grau

### Equações do tipo $ax^2 + c = 0$ , com $a \neq 0$

Para resolver equações do tipo  $ax^2 + c = 0$ , com  $a \neq 0$ , começa-se por isolar a incógnita, obtendo uma equação equivalente  $x^2 = -\frac{c}{a}$ .

#### Nota

Se  $k > 0$ , existem dois números cujo quadrado é  $k$ :

$$\sqrt{k} \text{ e } -\sqrt{k}$$

Assim, obtém-se uma equação do tipo  $x^2 = k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ .

- Se  $k > 0$ , temos  $x^2 = k \Leftrightarrow x = \sqrt{k} \vee x = -\sqrt{k}$
- Se  $k < 0$ , como  $x^2 \geq 0$  independentemente do valor de  $x$ , a equação não tem solução;
- Se  $k = 0$ , temos  $x^2 = 0 \Leftrightarrow x \times x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , pela lei do anulamento do produto;

Observa os exemplos seguintes:

**Exemplo 1:** Resolver a equação  $9x^2 - 4 = 0$

$$9x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 9x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow$$

Aplicação da noção de raiz quadrada

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{4}{9}} \vee x = -\sqrt{\frac{4}{9}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} \vee x = -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \vee x = -\frac{2}{3}$$

$$\text{C. S.} = \left\{ -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}$$

**Exemplo 2:** Resolver a equação  $16x^2 - 7 = 0$

$$16x^2 = 7 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{7}{16}} \vee x = -\sqrt{\frac{7}{16}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} \vee x = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{4} \vee x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{C. S.} = \left\{ -\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4} \right\}$$

#### Recorda

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

( $a$  é não negativo e  $b$  é positivo.)

É útil «separar em duas raízes quadradas» quando pelo menos um dos termos da fração é um quadrado perfeito.



**Exemplo 3:** Resolver a equação  $5x^2 = 81$ .

$$\begin{aligned} 5x^2 = 81 &\Leftrightarrow x^2 = \frac{81}{5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{\frac{81}{5}} \vee x = -\sqrt{\frac{81}{5}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{5}} \vee x = -\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{9}{\sqrt{5}} \vee x = -\frac{9}{\sqrt{5}} \quad \text{C. S.} = \left\{ -\frac{9}{\sqrt{5}}, \frac{9}{\sqrt{5}} \right\} \end{aligned}$$

**Exemplo 4:** Resolver a equação  $13x^2 = 8$ .

$$\begin{aligned} 13x^2 = 8 &\Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{13} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{\frac{8}{13}} \vee x = -\sqrt{\frac{8}{13}} \quad \text{C. S.} = \left\{ -\sqrt{\frac{8}{13}}, \sqrt{\frac{8}{13}} \right\} \end{aligned}$$

Repara, agora, nos dois casos que se seguem:

**Exemplo 5:** Resolver a equação  $8x^2 = 0$ .

$$8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{0}{8} \Leftrightarrow x^2 = 0$$

$$\text{C. S.} = \{0\}$$

Existe apenas um número que ao quadrado dá zero: o próprio zero.

**Exemplo 6:** Resolver a equação  $x^2 + 25 = 0$

$$x^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -25$$

$$\text{C. S.} = \{\}$$

Esta equação é impossível, pois não há nenhum número cujo quadrado seja negativo.

Este tipo de equações também se pode resolver da forma seguinte.

**Exemplo 7:**

$$\begin{aligned} 25x^2 - 16 = 0 &\Leftrightarrow (5x)^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (5x - 4)(5x + 4) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5x - 4 = 0 \vee 5x + 4 = 0 &\Leftrightarrow x = +\frac{4}{5} \vee x = -\frac{4}{5} \\ \text{C. S.} &= \left\{ -\frac{4}{5}, \frac{4}{5} \right\} \end{aligned}$$

Uma equação do tipo  $x^2 = k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , tem:

- **duas soluções simétricas**, se  $k > 0$ ;
- **uma única solução (zero)**, se  $k = 0$ ;
- **nenhuma solução**, se  $k < 0$ .

## Equações do tipo $ax^2 + bx = 0$ (com $a, b \neq 0$ )

**Exemplo 1:**  $x^2 + 5x = 0$

Primeiro, deve transformar-se  $x^2 + 5x = 0$  num produto, para, depois, se poder usar a lei do anulamento do produto:

$$\begin{aligned}x^2 + 5x = 0 &\Leftrightarrow x \times x + x \times 5 = 0 \Leftrightarrow x \times (x + 5) = 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 5 = 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -5 \quad \text{C. S.} = \{-5; 0\}\end{aligned}$$

**Exemplo 2:**  $3x^2 - 12x = 0$

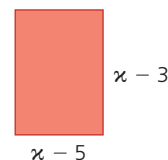
$$\begin{aligned}3x^2 - 12x = 0 &\Leftrightarrow 3x \times x - 3x \times 4 = 0 \Leftrightarrow 3x \times (x - 4) = 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 3x = 0 \vee x - 4 = 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow x = \frac{0}{3} \vee x = 4 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 \quad \text{C. S.} = \{0; 4\}\end{aligned}$$

ANTES DE USAR A LEI DO ANULAMENTO DO PRODUTO, TENHO SEMPRE DE CONFIRMAR QUE O 2.º MEMBRO DA EQUAÇÃO É ZERO.



### Exercício resolvido

Considera o retângulo da figura ao lado, com as dimensões escritas em função de  $x$ .



- Escreve uma expressão que represente o perímetro do retângulo.
- Determina o valor de  $x$  para que a área do retângulo seja igual a 15.
- Determina o perímetro do retângulo de área 15.

#### Resolução:

- $P = 2 \times b + 2 \times h = 2 \times (x - 5) + 2 \times (x - 3) = 2x - 10 + 2x - 6 = 4x - 16$
- $b \times h = A_{\square} \Leftrightarrow (x - 5)(x - 3) = 15$

Não se pode aplicar diretamente a lei do anulamento do produto porque o 2.º membro da equação não é zero.

Usa-se a propriedade distributiva:

$$(x - 5)(x - 3) = 15 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 5x + 15 = 15 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 15 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 - 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x = 0$$

Põe-se  $x$  em evidência:

$$x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x \times x - x \times 8 = 0 \Leftrightarrow x(x - 8) = 0$$

Utiliza-se a lei do anulamento do produto:

$$x(x - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$$

Se  $x$  fosse 0, as medidas do retângulo seriam negativas ( $-5$  e  $-3$ ), o que é impossível!

Assim,  $x$  só pode ser igual a 8 (base =  $8 - 5 = 3$ ; altura =  $8 - 3 = 5$ ).

- Uma vez que a expressão que dá o perímetro é  $P = 4x - 16$ , e para o retângulo ter área 15 temos  $x = 8$ , vem  $P = 4 \times 8 - 16 = 16$ .

## Equações com casos notáveis

Quando não se pode pôr  $x$  em evidência, deve verificar-se se é possível usar um dos casos notáveis da multiplicação.

**Exemplo 1:** Usando o quadrado do binómio:

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \times 3x + 3^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \quad \text{C. S.} = \{-3\}$$

**Exemplo 2:** Usando o quadrado do binómio:

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - 2 \times 2x + 1^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{C. S.} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

**Exemplo 3:** Usando o produto da soma de dois monómios pela sua diferença:

$$(x + 3)^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - 5^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 3 + 5)(x + 3 - 5) = 0 \Leftrightarrow (x + 8)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 8 = 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -8 \vee x = 2$$
$$\text{C. S.} = \{-8; 2\}$$



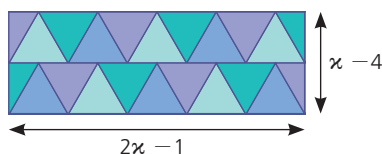
No polinómio  $x^2 + 6x + 9$ , não se pode pôr  $x$  em evidência porque  $x$  não aparece no 9.

### Repara

Uma equação do 2.º grau não tem mais do que duas soluções.

### Exercícios resolvidos

1. A Sofia construiu um friso (horizontal) repetindo sete vezes o motivo retangular que se pode observar à direita e cujas medidas estão expressas em função de  $x$ .



Escreve de forma simplificada a área do friso.

#### Resolução:

$$\text{A área é } A = 7 \times (2x - 1)(x - 4) = 7 \times (2x^2 - 8x - x + 4) = 14x^2 - 63x + 28$$

2. O Pedro construiu o seu friso (horizontal) repetindo sete vezes um motivo quadrado com  $x + 2$  cm de lado.

Qual é o valor de  $x$  para que os dois frisos ocupem a mesma área?

#### Resolução:

Para que os frisos ocupem a mesma área, tem de se resolver a equação onde se igualam as áreas dos frisos da Sofia e do Pedro.

$$\text{A área do friso da Sofia é dada pela expressão: } A = 14x^2 - 63x + 28$$

A área do friso do Pedro é dada pela expressão:

$$A = 7 \times (x + 2)^2 = 7 \times (x^2 + 4x + 4) = 7x^2 + 28x + 28$$

Como as áreas são iguais, vem:

$$14x^2 - 63x + 28 = 7x^2 + 28x + 28 \Leftrightarrow 14x^2 - 7x^2 - 63x - 28x + 28 - 28 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 - 91x = 0 \Leftrightarrow 7x(x - 13) = 0 \Leftrightarrow 7x = 0 \vee x - 13 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 13$$

Uma vez que a solução  $x = 0$  não é possível, pois esta solução daria medidas negativas para os lados do friso, a solução  $x = 13$  é a única que é válida.

### O que deves saber

- Resolver equações do 2.º grau usando: a noção de raiz quadrada, a lei do anulamento do produto e os casos notáveis da multiplicação.

## Verificar a aprendizagem

### EQUAÇÕES DO TIPO $ax^2 + c = 0$ , COM $a \neq 0$

- 1 A Sofia pensava que a equação  $x^2 = 9$  só tinha uma solução. No entanto, após falar com a Joana, percebeu que a equação tem, afinal, duas soluções.  
Quais são os dois números que, ao quadrado, dão 9?
- 2 Resolve as equações e apresenta o conjunto-solução:
- |                  |                     |
|------------------|---------------------|
| a) $x^2 = 100$   | g) $x^2 + 1 = 0$    |
| b) $x^2 = 36$    | h) $16x^2 - 81 = 0$ |
| c) $x^2 = 0$     | i) $64x^2 + 7 = 8$  |
| d) $5x^2 = 20$   | j) $4x^2 - 31 = 0$  |
| e) $-2x^2 = -50$ | k) $11 - 49x^2 = 0$ |
| f) $6x^2 = 0$    | l) $-12 - 3x^2 = 0$ |
- 3 Quantas soluções tem a equação  $5x^2 + 45 = 0$ ?  
A. Nenhuma.    B. Uma.    C. Duas.    D. Três.
- 4 Verifica, por substituição, se  $-3$  é solução das equações:
- a)  $x^2 + 8 = -1$   
b)  $2x^2 - 10 = 8$

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei resolver equações do 2.º grau usando a noção de raiz quadrada ou a lei do anulamento do produto?

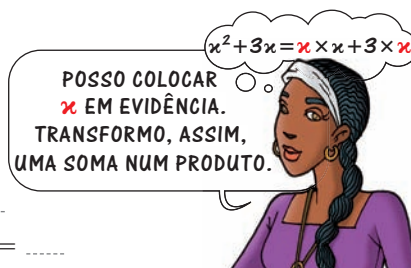
### LEI DO ANULAMENTO DO PRODUTO

- 5 O Diogo pensou em dois números. Multiplicou-os e obteve zero.  
O que se pode concluir sobre os números em que o Diogo pensou?
- 6 Resolve as equações usando a lei do anulamento do produto.  
Em cada caso, apresenta o conjunto-solução:
- |                              |                                                                             |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| a) $(x - 4)(x + 8) = 0$      | d) $x(60 - 4x) = 0$                                                         |
| b) $(3x + 15)(2x - 14) = 0$  | e) $x(-24x - 8) = 0$                                                        |
| c) $(12x - 6)(0,5x + 4) = 0$ | f) $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{5} - 4\right) = 0$ |
- 7 Onde está o erro na resolução que se segue?  
 $x(x - 4) = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei utilizar a lei do anulamento do produto?

### DECOMPOSIÇÃO EM FATORES

- 8 Decompõe em fatores cada um dos polinómios:
- |                                           |                                 |
|-------------------------------------------|---------------------------------|
| a) $x^2 + 3x = x \times (\dots + \dots)$  | e) $-3x^2 - 21x = \dots$        |
| b) $x^2 - 7x = x \times (\dots - \dots)$  | f) $4x - 4x^2 = \dots$          |
| c) $2x^2 + x = x \times (\dots + \dots)$  | g) $x^3 + 8x^2 + x = \dots$     |
| d) $5x^2 + 20x = 5x \times (\dots \dots)$ | h) $6x^3 - 30x^2 + 18x = \dots$ |



- 9 Copia e completa de modo a resolveres a equação:
- $$x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \dots \quad \leftarrow \text{Colocando } x \text{ em evidência.}$$
- $$\Leftrightarrow \dots \quad \leftarrow \text{Aplicando a lei do anulamento do produto.}$$
- $$\Leftrightarrow \dots \quad \leftarrow \text{Resolvendo cada uma das equações do 1.º grau.}$$

- 10 Resolve as equações e apresenta o conjunto-solução:

- |                     |                      |                  |
|---------------------|----------------------|------------------|
| a) $x^2 + 4x = 0$   | d) $8x^2 - 48x = 0$  | g) $2x^2 = 38x$  |
| b) $x^2 - 9x = 0$   | e) $-14x^2 + 7x = 0$ | h) $-x^2 = -3x$  |
| c) $3x^2 + 30x = 0$ | f) $x^2 - x = 0$     | i) $14x = 18x^2$ |

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei resolver equações do 2.º grau decompondo em fatores?

### EQUAÇÕES COM CASOS NOTÁVEIS

- 11 Copia e completa de modo a resolveres as equações:

- a)  $x^2 + 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (\dots + \dots)^2 = 0 \Leftrightarrow \dots$   
 b)  $x^2 - 16x + 64 = 0 \Leftrightarrow (\dots - \dots)^2 = 0 \Leftrightarrow \dots$

- 12 Resolve as equações e apresenta o conjunto-solução:

- |                          |                         |                        |
|--------------------------|-------------------------|------------------------|
| a) $x^2 + 20x + 100 = 0$ | c) $x^2 - 14x + 49 = 0$ | e) $-30x + 25 = -9x^2$ |
| b) $x^2 - 2x + 1 = 0$    | d) $x^2 + 18x = -81$    | f) $16x^2 + 4 = -16x$  |

- 13 Resolve as equações usando o caso notável produto da soma de dois monómios pela sua diferença:

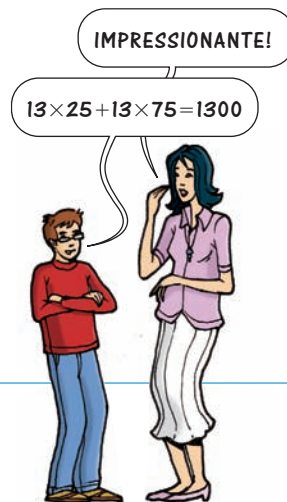
- a)  $(x + 5)^2 - 2^2 = 0$       b)  $(x - 3)^2 - 81 = 0$

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei resolver equações do 2.º grau com casos notáveis?

### Aplicar

- 14 A fatorização pode ser aplicada no cálculo mental.  
 Por exemplo:  $8 \times 3 + 8 \times 7 = 8 \times (3 + 7) = 8 \times 10 = 80$ .  
 Usando o mesmo processo, calcula mentalmente:

- |                                    |                                 |
|------------------------------------|---------------------------------|
| a) $15 \times 6 + 15 \times 4$     | d) $120 \times 7 - 20 \times 7$ |
| b) $24 \times 52 + 24 \times 48$   | e) $23 \times 99 + 23$          |
| c) $37 \times 200 + 37 \times 800$ | f) $-198 \times 6 - 2 \times 6$ |



### Tarefa

- 15 Inventa uma equação do 2.º grau que tenha como soluções:

- |            |                     |
|------------|---------------------|
| a) 4 e -7. | c) 5                |
| b) 0 e 16. | d) Nenhuma solução. |

- 16 Resolve as equações e apresenta o conjunto-solução:

- |                           |                       |                         |
|---------------------------|-----------------------|-------------------------|
| a) $-5x^2 = 0$            | e) $5(2x^2 - x) = 0$  | i) $x^2 + 1 = -2x$      |
| b) $x^2 - 400 = 0$        | f) $8t^2 = 16t$       | j) $(x + 6)^2 - 25 = 0$ |
| c) $x^2 + 16x = 0$        | g) $x^2 - 6x + 9 = 0$ |                         |
| d) $(x - 3)(4x + 28) = 0$ | h) $7y^2 + 10 = 3$    |                         |

- 17) Considera a equação  $(x + 3)(x + 6) = 18$ .

17.1 Por que razão não se pode aplicar diretamente a lei do anulamento do produto?

17.2 Resolve a equação.

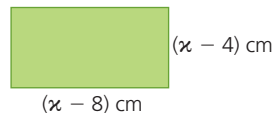
- 18) O retângulo à direita tem  $32 \text{ cm}^2$  de área.

18.1 Escreve uma equação que traduza a afirmação.

18.2 Resolve a equação.

18.3 Comenta a afirmação:

«Só uma das soluções da equação é aceitável para o problema.»



- 19) Quando se anda de bicicleta, de moto ou de automóvel em piso molhado, deve reduzir-se a velocidade, pois o risco de deslizar é maior e as travagens são mais complicadas.

Uma oficina testou um automóvel e concluiu que, com o piso molhado, a distância de travagem,  $d$  (em metros), em função da velocidade,  $x$  (em km/h), é dada pela expressão:

$$d = 0,014x^2$$

19.1 Se um automóvel viajar a  $100 \text{ km/h}$  em piso molhado, qual será a distância de travagem?

19.2 Se a distância de travagem for de  $101,15 \text{ m}$ , qual será a velocidade do automóvel?



- 20) Uma bola de petanca foi lançada de baixo para cima.

A altura que a bola atingiu,  $h$  (em metros), em função do tempo,  $t$  (em segundos), após ser lançada, é dada pela expressão:

$$h = -t^2 + 3t + 0,5$$

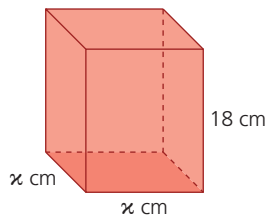
20.1 Qual era a altura da bola após 1 segundo?

20.2 A expressão ainda faz sentido 4 segundos após a bola ter sido lançada? Justifica a tua resposta.

20.3 Em que instantes esteve a bola a  $0,5$  metros de altura?



- 21) Determina o valor de  $x$ , sabendo que o paralelepípedo retângulo de base quadrada tem  $2812,5 \text{ cm}^3$  de volume.



### Tarefa de investigação

- 22) Considera todas as equações do tipo  $5x^2 + bx = 0$ , em que  $b$  é um número qualquer.

22.1 Qual é a solução que todas essas equações têm em comum?

22.2 Refere como deve ser o número  $b$  de modo que a outra solução da equação seja:

- a) positiva;
- b) um número inteiro.

## Síntese

### Monómios

Um **monómio** é uma expressão que liga por símbolos de produto fatores numéricos e potências de expoente natural e de base representada por letras, ditas **variáveis ou indeterminadas**.

- Num monómio, a expressão que representa o produto dos fatores numéricos designa-se por **parte numérica** ou **coeficiente** do monómio.
- Um monómio de parte numérica nula designa-se por **monómio nulo**.
- Um monómio reduzido à parte numérica designa-se por **monómio constante**.
- Num monómio não constante, o produto de cada uma das variáveis elevada à soma dos expoentes dos fatores em que essa variável intervém no monómio dado designa-se por **parte literal**.
- Dois monómios, não nulos, que têm a mesma parte literal, dizem-se **semelhantes**.
- **Forma canónica** de um monómio não nulo é um monómio em que se representa em primeiro lugar, a parte numérica e, em seguida, a parte literal.
- Dois monómios são **iguais** quando admitem a mesma forma canónica ou quando são ambos nulos.
- O **grau de um monómio não nulo** é a soma dos expoentes da respetiva parte literal, quando existe. Os monómios constantes não nulos têm grau 0.

#### Exemplo:

O monómio  $4x^2y$ , com  $x$  e  $y$  variáveis, tem coeficiente 4 e parte literal  $x^2y$  e está escrito na forma canónica. Este monómio tem grau  $2 + 1 = 3$ . O monómio  $-x^2y$  é semelhante a  $4x^2y$ .

A **soma algébrica** de monómios é um monómio com a mesma parte literal e cujo coeficiente é igual à soma algébrica dos coeficientes das parcelas.

O **produto de monómios** é um monómio cuja parte numérica é igual ao produto dos coeficientes dos fatores e a parte literal se obtém representando cada uma das variáveis elevada à soma dos expoentes dos fatores em que essa variável intervém nos monómios dados.

#### Exemplos:

$$4xy - 3yx = xy$$

$$4xy \times 3yx = 12x^2y^2$$

### Polinómios

Um **polinómio** é um monómio ou uma expressão ligando monómios (designados por **termos do polinómio**) através de sinais de adição ou subtração.

- As variáveis dos termos de um polinómio designam-se por **variáveis ou indeterminadas do polinómio** e os coeficientes dos respetivos termos por **coeficientes do polinómio**.
- **Forma reduzida** de um polinómio é um polinómio que se possa obter do polinómio dado eliminando os termos nulos, adicionando algebricamente os termos semelhantes e eliminando as somas nulas.
- Dois polinómios dizem-se **iguais** se admitem uma mesma forma reduzida.
- Um polinómio com forma reduzida 0 designa-se por **polinómio nulo**.
- O **termo independente** de um polinómio é o termo de grau 0 de uma forma reduzida desse polinómio.



- O **grau de um polinómio** não nulo é o maior dos graus dos termos de uma forma reduzida desse polinómio.

**Exemplo:**  $x^2 - 4x + 7$  é um polinómio do 2.º grau que é constituído por três monómios ( $x^2$ ,  $-4x$  e  $7$ );  $-4x$  é um monómio do 1.º grau ( $-4$  é o coeficiente e  $x$  é a parte literal).

A adição e a subtração de polinómios designa-se por **soma algébrica**.

**Exemplos:**  $(8x^2 + 6x - 1) + (2x^2 - 4x - 5) = 10x^2 + 2x - 6$

$$(6x^2 + 3x - 3) - (4x^2 - 5x + 1) = 6x^2 + 3x - 3 - 4x^2 + 5x - 1 = 2x^2 + 8x - 4$$

Para **multiplicar** dois polinómios, efetuam-se todos os produtos possíveis de um termo de um por um termo do outro e adicionam-se os monómios obtidos.

**Exemplos:**

$$\bullet 3 \times 5x = 15x$$

$$\bullet -9x \times 7x = -63x^2$$

$$\bullet -2x^3y \times (-4x^2y^5) = 8x^5y^6$$

$$\bullet x \times (4x - 7) = 4x^2 - 7x$$

$$\bullet -3x \times (x^2 + 6x - 8) = -3x^3 - 18x^2 + 24x$$

$$\begin{aligned} (x + 8)(2x - 5) &= \\ &= 2x^2 - 5x + 16x - 40 = \\ &= 2x^2 + 11x - 40 \end{aligned}$$

## Casos notáveis da multiplicação

| Quadrado de um binómio                                                                                                                                                                                                                                             | Produto da soma de dois monómios pela sua diferença                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ <p><b>Exemplos:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>(x + 5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25</math></li> <li><math>(x - 3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9</math></li> </ul> | $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ <p><b>Exemplo:</b></p> $(x + 8)(x - 8) = x^2 - 8^2 = x^2 - 64$ |

## Decomposição em fatores (fatorização)

| Pôr em evidência fatores comuns                                                                                                                                                                                                                                                                 | Usar os casos notáveis                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Para transformar uma adição algébrica numa multiplicação, usa-se a propriedade distributiva, no sentido inverso.</p> <p><b>Exemplos:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>x^2 + 8x = x \times (x + 8)</math></li> <li><math>5x^2 - 15x = 5x \times (x - 3)</math></li> </ul> | <p>Quando não há fatores em comum, verifica-se se temos o desenvolvimento de <math>(a + b)^2</math>, ou <math>(a + b)(a - b)</math>.</p> <p><b>Exemplos:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2</math></li> <li><math>9x^2 - 49 = (3x)^2 - 7^2 = (3x + 7)(3x - 7)</math></li> </ul> |

## Lei do anulamento do produto

- Numa multiplicação, se um dos fatores for zero, então, o produto é igual a zero; por outro lado, se o resultado de uma multiplicação for zero, então, pelo menos um dos fatores é igual a zero:

$$a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

**Exemplo:**  $(x + 6)(4x - 8) = 0 \Leftrightarrow x + 6 = 0 \vee 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -6 \vee x = 2 \quad \text{C. S.} = \{-6; 2\}$

## Resolução de equações do 2.º grau

### Equações do tipo $ax^2 + c = 0$ , com $a \neq 0$

As equações do tipo  $ax^2 + c = 0$ , com  $a \neq 0$  são equivalentes a  $x^2 = -\frac{c}{a}$ , ou seja, a equações do tipo  $x^2 = k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ .

Uma equação do tipo  $x^2 = k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , tem:

- **Duas soluções simétricas**, se  $k > 0$ ;
- **Uma única solução** (zero), se  $k = 0$ ;
- **Nenhuma solução**, se  $k < 0$ .

**Exemplos:**

- A equação  $x^2 = 9$ , por exemplo, tem duas soluções simétricas:

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \sqrt{9} \vee x = -\sqrt{9} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3 \quad \text{C. S.} = \{-3; 3\}$$

$$4x^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - 9^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 9)(2x + 9) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 9 = 0 \vee 2x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \vee x = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow \quad \text{C. S.} = \left\{-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right\}$$

- A equação  $x^2 = 0$  tem apenas uma solução:  $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$  C. S. =  $\{0\}$
- A equação  $x^2 = -5$  não tem solução (nenhum número ao quadrado dá um resultado negativo): C. S. =  $\{ \}$ .

### Equações do tipo $ax^2 + bx = 0$ , com $b \neq 0$

Decompõe-se o primeiro membro num produto de fatores e aplica-se a lei do anulamento do produto.

**Exemplo:**

$$7x^2 - 21x = 0 \Leftrightarrow 7x \times (x - 3) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 7x = 0 \vee x - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{0}{7} \vee x = 0 + 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \quad \text{C. S.} = \{0; 3\}$$

### Equações com casos notáveis

**Exemplo:**

- $x^2 + 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = -4 \quad \text{C. S.} = \{-4\}$
- $(x + 3)^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x + 3)^2 - 5^2 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x + 3 + 5)(x + 3 - 5) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x + 8)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x + 8 = 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = -8 \vee x = 2 \quad \text{C. S.} = \{-8; 2\}$

## Atividades globais

### QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

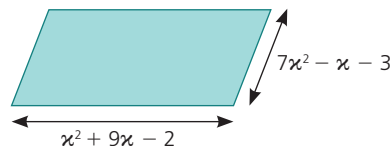
Das quatro alternativas, escolhe a única opção correta.

- 1 Qual dos monómios seguintes tem o menor coeficiente?

A.  $-\frac{x^2}{4}$       B.  $-x$       C.  $-\frac{2}{3}x^4$       D. 5

- 2 Qual dos polinómios seguintes corresponde ao perímetro do paralelogramo apresentado à direita?

A.  $8x^2 + 8x - 5$       C.  $14x^2 - 2x - 6$   
B.  $16x^2 + 16x - 10$       D.  $2x^2 + 18x - 4$

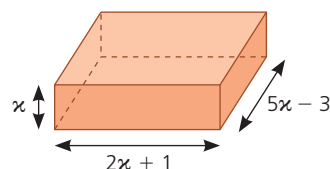


- 3 Qual é o polinómio reduzido que resulta da operação  $(3x^2 - 5x - 6) - (x^2 - 8x + 2)$ ?

A.  $2x^2 + 3x - 8$       C.  $2x^2 - 3x - 4$   
B.  $2x^2 - 13x - 4$       D.  $4x^2 + 3x - 8$

- 4 Qual dos polinómios seguintes corresponde ao volume do paralelepípedo retângulo apresentado à direita?

A.  $10x^2 - x - 3$       C.  $10x^3 - 3x$   
B.  $10x^3 - x^2 - 3x$       D.  $10x^3 - 6x^2 + 5x - 3$



- 5 Qual dos polinómios seguintes é equivalente a  $(3x + 4)^2$ ?

A.  $9x^2 + 16$       B.  $3x^2 + 24x + 16$       C.  $9x^2 + 12x + 16$       D.  $9x^2 + 24x + 16$

- 6 A Sofia e o Diogo têm 20 bandas desenhadas cada um. A Sofia ofereceu  $x$  das suas ao Diogo. Qual das seguintes opções corresponde ao produto entre o número de bandas desenhadas da Sofia e do Diogo?

A.  $400 - x^2$       C.  $400 - 40x + x^2$   
B. 400      D.  $x^2 + 40x + 400$

- 7 Qual das seguintes equações do 2.º grau tem exatamente uma solução?

A.  $x^2 = 225$       B.  $x^2 + 81 = 0$       C.  $16x^2 = 0$       D.  $x^2 - 13 = 0$

- 8 Qual das seguintes equações tem duas soluções negativas?

A.  $(2x + 18)(4x - 20) = 0$       C.  $(-x - 33)(9 + 2x) = 0$   
B.  $7x \times (-5x - 3) = 0$       D.  $(-6x + 42)(x + 17) = 0$

- 9 O Zito tem um jogo em que criou uma empresa que vende capacetes de bicicletas. O número de capacetes vendidos em função do dia ( $x$ ) é dado pela expressão:  $-3x^2 + 60x$ .

Em qual dos dias seguintes não se venderam capacetes?

A. 10.º dia      C. 20.º dia  
B. 15.º dia      D. 25.º dia



- 10 Qual das expressões seguintes é equivalente à expressão  $(a + b)^2 - (a - b)^2$ ?

A.  $4ab$       B.  $2a^2 + 2b^2$       C.  $2a^2 - 2b^2$       D. 0

## EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

- 11** A Joana realizou um estudo estatístico sobre o tema «Dificuldades de compreensão entre adolescentes e adultos» e apresentou os resultados num gráfico circular.

Sabendo que o círculo tem  $133 \text{ cm}^2$  de área, determina o seu raio, com aproximação às décimas.

- 12** Resolve as seguintes equações e apresenta o conjunto-solução:

a)  $\frac{x^2}{3} = x$

b)  $5x^2 - \frac{1}{5} = 0$

c)  $\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

- 13** A expressão algébrica de uma função  $f$  é:  $f(x) = (2x + 3)(4x - 5) - 8x^2$

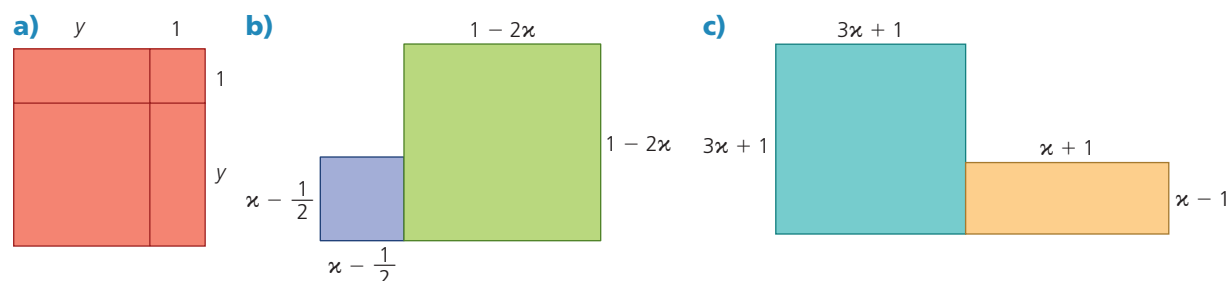
**13.1** Simplifica a expressão algébrica.

**13.2** Justifica que  $f$  é uma função afim.

**13.3** Que tipo de gráfico tem a função  $f$ ?

**13.4** Qual é o objeto que tem por imagem  $-7$ ?

- 14** Utiliza os casos notáveis da multiplicação de polinómios para apresentares uma expressão simplificada da área total das seguintes figuras:



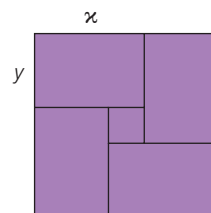
- 15** Na figura ao lado, está um quadrado de lado  $x + y$  que foi dividido em quatro retângulos iguais e num quadrilátero central.

**15.1** Refere, justificando, se o quadrilátero central é um quadrado e indica uma expressão para o lado desse quadrado como um polinómio de variáveis  $x$  e  $y$ .

**15.2** Exprime a área dos retângulos e do quadrado central através de polinómios nas variáveis  $x$  e  $y$ .

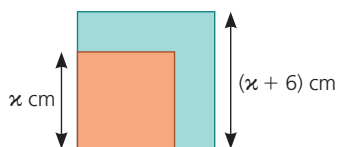
**15.3** Utilizando a questão 15.2, mostra que  $(x + y)^2 = 4xy + (x - y)^2$ .

**15.4** Prova algebricamente a igualdade da questão 15.3.



### Tarefa

- 16** Ao aumentar os lados de um quadrado em 6 cm, a área aumenta  $156 \text{ cm}^2$ .



Qual é a medida do lado do quadrado inicial?

## AUTOAVALIAÇÃO

- Identifica claramente, na tua folha de respostas, os números dos itens a que respondes. Apresenta uma única resposta para cada item.
- O teste inclui três itens de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correta. Não apresentes cálculos nem justificações.

Pág. 39

- 1** Qual dos monómios seguintes tem o maior grau? Escolhe a opção certa.
- A.**  $15x$       **B.**  $7x^4$       **C.**  $8x^3y^2$       **D.**  $9xyz$

Pág. 38

- 2** O polinómio, na variável  $x$ ,  $3x^2 - ax + 12$  é constituído por três monómios. Para cada um deles, indica o coeficiente, a parte literal e o grau.

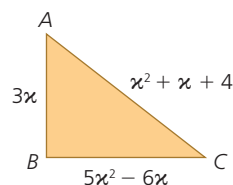
Págs. 43, 44 e 45

- 3** As medidas dos lados do triângulo  $[ABC]$  estão expressas em função de  $x$ .

**3.1** Escreve uma expressão simplificada do perímetro de  $[ABC]$ .

**3.2** Escreve uma expressão para  $\overline{AC} - \overline{BC}$  e simplifica-a.

**3.3** Determina o comprimento do segmento de reta  $[BC]$  para  $x = 2$ .



Págs. 39 e 43

- 4** Simplifica as expressões e apresenta o resultado sob a forma de um monómio ou de um polinómio reduzido e ordenado:

- a)**  $8x \times 9x$   
**b)**  $3x \times (7x^2 - 4x + 10)$   
**c)**  $(x + 6)(x + 2)$   
**d)**  $(3x - 5)(2x - 4)$

Pág. 43

- 5** As medidas do quadro *Composição VIII* (Nova Iorque, Museu Guggenheim), apresentado à direita, pintado em 1923 pelo russo Wassily Kandinsky, estão expressas em função de  $x$ .

**5.1** Escreve uma expressão simplificada do perímetro do quadro.

**5.2** Escreve a área sob a forma de um polinómio reduzido e ordenado.



$$x^2 - 3x + 6$$

$$x + 3$$

Pág. 48

- 6** Qual dos polinómios seguintes é equivalente a  $(2x + 6)^2$ ? Escolhe a opção correta.

- A.**  $2x^2 + 36$   
**B.**  $4x^2 + 36$   
**C.**  $2x^2 + 24x + 36$   
**D.**  $4x^2 + 24x + 36$

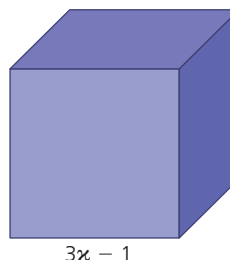
- 7** Simplifica, usando um caso notável, e apresenta o resultado sob a forma de um polinómio reduzido e ordenado:

**a)**  $(x - 9)^2$                       **c)**  $\left(4x - \frac{15}{11}\right)\left(4x + \frac{15}{11}\right)$

**b)**  $(2x + 7)^2$                       **d)**  $\left(6 - \frac{3}{2}x\right)^2$

- 8** O cubo representado ao lado tem  $(3x - 1)$  cm de aresta. Escreve uma expressão simplificada para a área total do cubo.

Nota: A área total do cubo é a soma da área de todas as suas faces.



- 9** Qual dos polinómios seguintes não é o desenvolvimento de um caso notável? Escolhe a opção correta.

**A.**  $x^2 + 6x + 9$                       **C.**  $x^2 - 4x + 4$

**B.**  $x^2 - x + 1$                       **D.**  $x^2 + 14x + 49$

- 10** Um colega do Sr. João fez a afirmação seguinte: «Em 2025, acontecerá algo curioso: o ano será igual ao quadrado da minha idade.»

Em que ano nasceu o colega do Sr. João?

- 11** Resolve as equações e apresenta o conjunto-solução:

**a)**  $16x^2 - 225 = 0$

**b)**  $(3x + 27)(6x - 2) = 0$

**c)**  $x^2 + 4x = 0$

**d)**  $x^2 + 18x + 81 = 0$

- 12** Deixa-se cair, em queda livre, uma bola de ténis da janela de um prédio. Sabe-se que a distância percorrida pela bola,  $d$  (em metros), ao fim de  $t$  segundos é dada pela fórmula:

$$d = 4,9t^2$$



**12.1** Determina a distância percorrida após 2 segundos.

**12.2** Quanto tempo demorou a bola a percorrer 17 metros? Apresenta um valor aproximado às centésimas.

#### GRELHA DE AVALIAÇÃO

| Exercício                     | 1 | 2 | 3 | 4  | 5 | 6 | 7  | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-------------------------------|---|---|---|----|---|---|----|---|---|----|----|----|
| Cotação <sup>1</sup> (pontos) | 5 | 9 | 9 | 12 | 6 | 5 | 12 | 4 | 5 | 5  | 20 | 8  |

<sup>1</sup> Para saberes a cotação de cada alínea, basta divides a cotação do exercício pelo número de alíneas.

Págs. 48 e 49

Págs. 43 e 49

Págs. 48 e 49

Pág. 54

Págs. 54 a 57

Pág. 54

# Estratégias para a resolução de problemas e jogos

## Jogo Torres de Hanói

### Origens do jogo

Em 1883, o matemático francês Édouard Lucas inventou o famoso *puzzle* das Torres de Hanói e apresentou-o sob a forma de uma lenda.

Segundo a lenda, num templo budista do Extremo Oriente, existia uma bandeja de metal no local que marcava o centro do Mundo. A bandeja tinha três agulhas de diamante que serviam de colunas a sessenta e quatro discos de ouro puro. No início do Mundo, todos os discos de ouro haviam sido colocados na primeira agulha, formando assim uma torre. Incansavelmente, os monges transferiam os discos, um de cada vez, de agulha para agulha, de modo que nenhum disco ficasse por cima de outro menor. Quando os monges terminassem de transportar a torre para outra agulha, o Mundo acabaria.



Hanói, capital do Vietnã.

**NÚMERO DE JOGADORES:** 1.

**MATERIAL:** Este quebra-cabeças é constituído por uma base com três colunas e um conjunto de discos com diâmetros crescentes. Inicialmente, os discos são colocados na coluna da esquerda, começando pelo maior e terminando no menor, em forma de «torre». O número de discos pode variar (o *puzzle* original de Édouard Lucas era composto por oito discos).



**OBJETIVO:** Deslocar a torre da coluna da esquerda para a coluna da direita, efetuando o mínimo de movimentações.

### REGRAS:

- Só se pode movimentar um disco de cada vez.
- Um disco maior nunca pode ficar por cima de um menor.
- Não é permitido movimentar um disco que esteja por baixo de outro.

**CURIOSIDADE:** Se os monges da lenda demorassem um segundo a mudar cada disco (o que exigiria velocidade e resistência), demorariam 18 446 744 073 709 551 615 segundos a deslocar a torre com 64 discos, ou seja, cerca de 585 mil milhões de anos.



## Problema Um quadrado cada vez maior

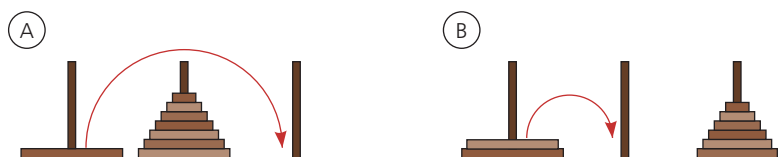
A Sofia pediu ao Sr. Luís para lhe oferecer um pequeno porco. O avô aceitou, mas com a condição de a neta resolver o enigma que lhe contou a seguir:

O porco vai viver num terreno quadrado vedado, com  $x$  metros de lado. Todos os anos, o lado do terreno terá de aumentar 1 metro para o porco ter mais espaço. Daqui a quanto tempo a área do terreno será dada pela expressão  $x^2 + 24x + 144$ ?



### EXPLICAÇÃO DA ESTRATÉGIA DO JOGO E RESOLUÇÃO DO PROBLEMA:

- Nas Torres de Hanói, antes de começar, é preferível pensar no que terá de acontecer mais tarde durante o jogo. Por exemplo, para conseguir passar a torre de 8 discos da 1.ª coluna para a 3.ª, será necessário transportar os 7 primeiros discos para a 2.ª coluna de modo a «libertar» o maior disco e deslocá-lo para a 3.ª coluna (A).



Seguindo o mesmo raciocínio, para transportar a torre de 7 discos para a 2.ª coluna, será necessário deslocar os 6 primeiros discos para a 3.ª coluna para «libertar» o 7.º disco (B); e assim sucessivamente.

### ESTRATÉGIA: Raciocinar do fim para o princípio

- No enigma proposto pelo Sr. Luís, poder-se-ia determinar a área do terreno nos primeiros anos até chegar à expressão desejada para a área ( $x^2 + 24x + 144$ ):

| Ano | Lado do terreno | Área do terreno (quadrado)                                   |
|-----|-----------------|--------------------------------------------------------------|
| 1   | $x$             | $x^2$                                                        |
| 2   | $x + 1$         | $(x + 1)^2 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$ |
| 3   | $x + 2$         | $(x + 2)^2 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$ |
| ... | ...             | ...                                                          |

Como se pode ver, não é uma boa estratégia, pois não se sabe quantas tentativas serão necessárias para obter a expressão desejada. Neste caso, como nas Torres de Hanói, é mais fácil começar pelo fim e procurar a expressão que, ao quadrado, dá  $x^2 + 24x + 144$ :

$$x^2 + 24x + 144 = (x + 12)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

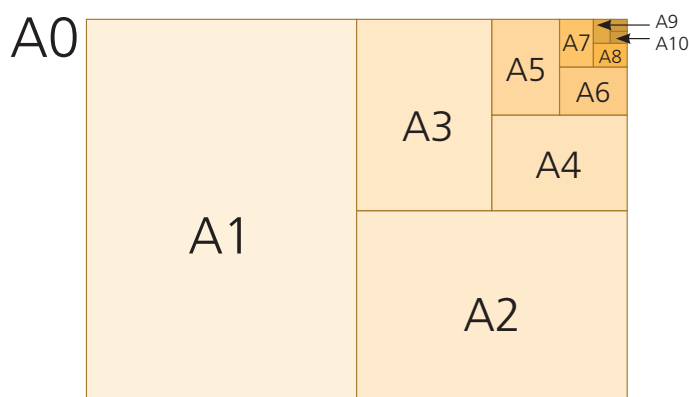
Assim, o lado do terreno terá de medir  $(x + 12)$  metros, o que acontecerá no 13.º ano.

**RESPOSTA:** No 13.º ano, a área do terreno será dada pela expressão  $x^2 + 24x + 144$ .

## A folha de papel A4

As folhas que se usam diariamente (nas impressoras, nas fotocopiadoras, etc.) têm dimensões que podem parecer curiosas: 29,7 cm por 21 cm. Trata-se de um formato designado por A4. Mas por que razão as folhas mais utilizadas em todo o Mundo não têm medidas mais simples como, por exemplo, 30 cm por 20 cm?

O formato A4 faz parte da norma ISO 216, que começa no A0 (o maior) e acaba no minúsculo A10. Repara que quanto maior é o número do formato menor é a folha. Para passar de um formato para o seguinte, basta cortar a folha ao meio. Por exemplo, dividindo uma folha A4 ao meio, pelo lado de maior dimensão, obtêm-se duas folhas A5. A mesma regra aplica-se aos restantes formatos:



### Sugestão de trabalho

1. Corta uma folha A4, sucessivamente, de modo a obteres os formatos A5, A6, A7, A8, A9 e A10, e preenche uma tabela igual à que se segue:

| Formato          | A4   | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 |
|------------------|------|----|----|----|----|----|-----|
| $L/\text{cm}$    | 29,7 |    |    |    |    |    |     |
| $\ell/\text{cm}$ | 21   |    |    |    |    |    |     |
| $\frac{L}{\ell}$ |      |    |    |    |    |    |     |

2. Formula uma conjectura a respeito da relação entre as dimensões de dois formatos desta série.
3. Se as medidas de uma folha são  $L$  e  $\ell$ , quais são as medidas da folha no formato seguinte?
4. Partindo do princípio de que a tua conjectura é verdadeira, estabelece uma proporção e determina, de acordo com ela, o valor exato da razão  $\frac{L}{\ell}$ . Em presença deste valor, comenta os resultados obtidos na tabela acima.

**NOTA:** Estes formatos são muito úteis para as fotocópias. Por exemplo, pondo lado a lado duas folhas A4 e fazendo uma redução, cada uma das folhas originais ocupa metade da nova folha e não se desperdiça papel.

## Fórmula de Héron de Alexandria

Héron de Alexandria (século I d. C.) foi um engenheiro e matemático grego. O seu nome ficou associado a uma fórmula que permite calcular a área de um triângulo sem conhecer a sua altura.

### Sugestão de trabalho

1. Num ambiente de Geometria Dinâmica, constrói um triângulo qualquer cujas medidas dos lados sejam designadas por  $a$ ,  $b$  e  $c$ .
2. Calcula o valor do semiperímetro,  $s$ , do triângulo:  $s = \frac{a + b + c}{2}$ .
3. Calcula o valor da expressão  $s(s - a)(s - b)(s - c)$ .
4. Compara o resultado com o quadrado da área do triângulo e estabelece uma conjectura para a fórmula de Héron.
5. Usa a fórmula que conjecturaste para determinar a área de um triângulo cujos lados medem 6 cm, 8 cm e 10 cm.

## Sequências com raízes quadradas

Considera as sequências numéricas em que se pode escolher o primeiro termo e em que a lei de formação é: «Adicionar o primeiro termo ao termo anterior e aplicar a raiz quadrada ao resultado.»

Por exemplo, se o primeiro termo for 3, obtém-se a sequência seguinte recorrendo a uma calculadora:

3; 2,449489743...; 2,334414218...; 2,309635083...; ...

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ a_1 & a_2 & = & \sqrt{a_1 + a_1} & & a_3 & = & \sqrt{a_2 + 3} & & a_4 & = & \sqrt{a_3 + 3} \end{array}$$

Esta sequência obtém-se facilmente com a calculadora, escrevendo-se:



↑  
1.º termo

Lei de formação

### Sugestão de trabalho

1. Recorrendo à calculadora, investiga quais são os primeiros termos (limita-te a valores inteiros entre 1 e 20) que permitem obter sequências em que os termos são todos iguais a um número inteiro ou em que os termos se aproximam de um número inteiro.
2. Agora, sem usar a calculadora, indica qual é o valor inteiro superior a 20 que deve ser escolhido como primeiro termo para obter uma sequência com a mesma característica.

## Páginas da Internet

- Equações: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm23/equacoes.htm>
- História da Matemática e problemas famosos: <http://www.malhatlantica.pt/mathis/index.html>

# EQUAÇÕES LITERAIS E SISTEMAS



Atividades iniciais 73

## 7.1 Equações literais 74

Resolução de equações literais 74  
Verificar a aprendizagem 76

## 7.2 Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas 78

Definição e solução de um sistema 78  
Verificar a aprendizagem 80

## 7.3 Interpretação geométrica de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas 82

Interpretação gráfica das soluções de um sistema 82  
Sistema possível e determinado 82  
Sistema impossível 82  
Sistema possível e indeterminado 82  
Verificar a aprendizagem 85

## 7.4 Resolução de sistemas de equações 87

Resolução pelo método de substituição 87  
Resolução de problemas utilizando sistemas de equações 87  
Verificar a aprendizagem 90  
Síntese 92  
Atividades globais 94  
Autoavaliação 98  
Estratégias para a resolução de problemas e jogos 100  
Investigar 102

## Atividades iniciais

### Equações

- 1** Averigua se são equivalentes as seguintes equações:
- a)  $x + 1 = 0$  e  $x + 3 = 2$ ;
  - b)  $\frac{x}{2} = \frac{3}{2}$  e  $\frac{2}{3}x = 2$ ;
  - c)  $x^2 = 4$  e  $x + 2 = 4$ .
- 2** Indica valores de  $a$  e  $b$  para que a equação  $3x - 6 = ax + 2 + b$  seja:
- a) impossível;
  - b) possível e indeterminada;
  - c) possível e determinada com solução  $x = -1$ .
- 3** Considera as equações:
- A.  $4x + (-7 + x) = 3 - (2x - 4)$
  - B.  $5x + 3(2x - 4) = x - 22$
- 3.1** Verifica se  $-1$  é solução de alguma das equações. Apresenta todos os cálculos que efetuares.
- 3.2** Resolve cada uma das equações, indicando o seu conjunto-solução.
- 4** A turma do Zito está a angariar dinheiro para a viagem de finalistas que fará no 9.º ano. Para isso, vende fatias de bolo e maçãs nos intervalos. As vendas do 1.º período renderam 440,00 €. A quantidade de maçãs vendidas foi o dobro das fatias de bolo vendidas. Se cada fatia de bolo custa 0,50 € e cada maçã custa 0,30 €, quantas foram as fatias de bolo vendidas?



### Tarefa

- 5** Na Lusamóvel, o preço a pagar ( $y/\text{€}$ ) pelo transporte de mobílias a casa dos clientes, em função da distância da loja à casa do cliente ( $x/\text{km}$ ), é dado pela expressão algébrica:

$$y = 0,50x + 4$$

- 5.1** Explica o significado do valor 4 no contexto do problema.
- 5.2** Representa a função graficamente.
- 5.3** Quanto paga de transporte um cliente que more a 6 km da loja?





## Tarefa 1



A fórmula  $v = \frac{d}{t}$  relaciona a velocidade média ( $v$ ) de um objeto móvel com a distância ( $d$ ) percorrida e o tempo ( $t$ ) que demorou a percorrer essa distância.

- 1 Um automóvel de fórmula 1 percorreu uma pista de 4 km em 2,1 minutos. Qual foi a sua velocidade média, em km/h?
- 2 Determina a distância percorrida, em km, por outro automóvel que se deslocou, durante 12 minutos, a uma velocidade média de 118 km/h.
- 3 Numa competição, uma moto percorreu 60 km a uma velocidade média de 250 km/h. Quanto tempo demorou no percurso?

## Recorda:

Dadas duas funções  $f$  e  $g$ , dá-se o nome de equação na incógnita  $x$  a uma expressão da forma  $f(x) = g(x)$ .

## Resolução de equações literais

Denomina-se **equação literal** uma equação que se obtém igualando dois polinómios de forma que pelo menos um dos coeficientes envolva uma ou mais letras.

Exemplos:

1. Na Matemática:

- $A = \frac{b \times h}{2}$  ( $A$  é a área do triângulo,  $b$  é a medida da base e  $h$  é a medida da altura);
- $P = 2\pi r$  ( $P$  representa o perímetro de uma circunferência de raio  $r$ ).

2. Em Físico-Química:

- $C = \frac{m}{V}$  ( $C$  representa a concentração mássica,  $m$ , a massa de soluto e  $V$ , o volume da solução).

## Exercício resolvido

Das equações seguintes, nas variáveis  $x$  e  $y$ , indica as que não são equações literais, justificando a tua resposta.

- A.  $x + a^2x = 5$     B.  $2x + x^2 = 2x$     C.  $\pi + 2y = 10$     D.  $x + 2ay = 4$

## Resolução:

As equações B e C não são equações literais, pois os coeficientes são números, não envolvem letras.

A equação literal  $x + a^2x = 5$ , na variável  $x$ , pode resolver-se em ordem a  $x$ :

$$x + a^2x = 5 \Leftrightarrow (1 + a^2)x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{1 + a^2}$$

A equação literal  $x + 2ay = 4$ , pode resolver-se em ordem a  $x$  considerando  $y$  como constante:

$$x + 2ay = 4 \Leftrightarrow x = 4 - 2ay$$

Esta equação também pode ser resolvida em ordem a  $y$ , considerando  $x$  como constante:

$$x + 2ay = 4 \Leftrightarrow 2ay = 4 - x \Leftrightarrow y = \frac{4 - x}{2a} \quad (a \neq 0)$$

Para se resolver uma equação literal em ordem a uma dada incógnita considera-se apenas essa incógnita como variável dos polinómios envolvidos e as restantes letras como constantes.

A equação literal  $P = 2\pi r$ , já está resolvida em ordem a  $P$ , mas pode ser resolvida em ordem a  $r$ :  $r = \frac{P}{2\pi}$ .

### Exercício resolvido

Para medir a temperatura, podem utilizar-se termómetros graduados em graus Celsius ou graduados em graus Fahrenheit.

Para relacionar graus Celsius com graus Fahrenheit, utiliza-se a fórmula:

$$F = 1,8C + 32$$

em que  $C$  representa o valor da temperatura em graus Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ) e  $F$  representa o valor correspondente em graus Fahrenheit ( $^{\circ}\text{F}$ ).

- Determina o valor da temperatura, em graus Fahrenheit, correspondente a  $-25^{\circ}\text{C}$ .
- Determina o valor da temperatura, em graus Celsius, correspondente a  $95^{\circ}\text{F}$ .

Retirado do Teste Intermédio do 9.º ano, maio de 2010

### Resolução:

- Como a equação já se encontra resolvida em ordem a  $F$ , basta substituir  $C$  por  $-25$ :  $F = 1,8 \times (-25) + 32 \Leftrightarrow F = -45 + 32 = -13$   
R:  $-25^{\circ}\text{C}$  correspondem a  $-13^{\circ}\text{F}$ .

- Antes de substituir  $F$  por 95, resolve-se a equação em ordem a  $C$ :

$$\begin{aligned} F &= 1,8C + 32 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F - 32 &= 1,8C \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{F - 32}{1,8} &= C \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C &= \frac{F - 32}{1,8} \end{aligned}$$

De seguida, substitui-se  $F$  por 95 na equação:

$$C = \frac{95 - 32}{1,8} = 35$$

R:  $95^{\circ}\text{F}$  correspondem a  $35^{\circ}\text{C}$ .

### Nota

A equação  $P = 2\pi r$  pode ser considerada equação literal na incógnita  $P$  (nesse caso,  $r$  considera-se constante) ou equação literal na incógnita  $r$  (nesse caso,  $P$  considera-se constante).

AS EQUAÇÕES LITERAIS  
RESOLVEM-SE  
COMO AS EQUAÇÕES  
NUMÉRICAS.



### Repara

Para resolver uma equação em ordem a uma das variáveis, por exemplo  $C$ , os termos com a letra  $C$  funcionam como termos com incógnita e os restantes (com a variável  $F$  ou com números) funcionam como termos independentes. Além disso, utilizam-se as regras habituais da resolução de equações.

### O que deves saber

- Identificar uma equação literal.
- Resolver equações literais em ordem a uma variável.



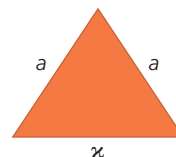
## Verificar a aprendizagem

### RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES LITERAIS

- 1 Identifica quais das seguintes equações são equações literais ( $x$  e  $a$  são variáveis e  $b$  é constante).

- A.  $3x + \pi = 10$
- B.  $3(a + 2) = b - 3$
- C.  $3x + x^2 = 10x$
- D.  $14a = 10ab$

- 2 Considera um triângulo isósceles de perímetro igual a 110 cm em que cada um dos lados iguais mede  $a$  cm. Escreve uma equação que permita obter o comprimento do outro lado.



- 3 Resolve cada uma das equações, em ordem à variável indicada entre parênteses:

- |                        |     |                                    |     |
|------------------------|-----|------------------------------------|-----|
| a) $c - d = 4$         | (c) | f) $R = \frac{l}{V}$               | (l) |
| b) $c - d = 4$         | (d) | g) $e = vt$                        | (t) |
| c) $A = c \times \ell$ | (c) | h) $A = \frac{b \times h}{2}$      | (b) |
| d) $3a + 2b = 5$       | (a) | i) $p + 3g - 3 = 2p - 1$           | (p) |
| e) $9e = 2 + 2f$       | (f) | j) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{4}$ | (x) |

- 4 Considera  $x$  e  $y$  dois números. Adicionando o primeiro número,  $x$ , ao dobro do segundo obtém-se 40.

4.1 Escreve a equação que traduz a situação descrita.

4.2 Resolve a equação dada em ordem a cada uma das variáveis.

- 5 Resolve em ordem a  $x$  as seguintes equações literais, em que  $a$  é uma constante positiva:

- a)  $3x^2 - 6a = 0$
- b)  $3x^2 = 2ax$
- c)  $x^2 - a^2 = 0$
- d)  $x^2 + 3ax + a^2 = ax$

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei resolver equações literais em ordem a uma das variáveis?

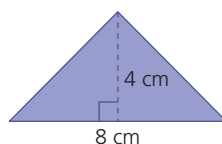
## Aplicar

- 6 O Sr. João levou o seu automóvel à oficina. O custo do arranjo ( $c/\text{€}$ ) é dado pela fórmula  $c = 42h + 20$ , em que  $h$  representa o número de horas de mão de obra.

- 6.1 Quanto pagou o Sr. João sabendo que foram necessárias quatro horas de mão de obra?
- 6.2 Resolve a equação em ordem a  $h$ .
- 6.3 Quantas horas de mão de obra foram cobradas ao Sr. João se ele pagou 293 €?



- 7 O triângulo desenhado tem  $16 \text{ cm}^2$  de área.



- 7.1** Indica outras medidas possíveis, além das representadas na figura, para que o triângulo tenha a mesma área.
- 7.2** Resolve a equação da área,  $A = \frac{b \times h}{2}$ , em ordem a  $h$ .
- 7.3** Descobre todas as possíveis medidas inteiras, em cm, para a base e para a altura de um triângulo cuja área é  $16 \text{ cm}^2$ .

- 8 A densidade ( $\rho$ ) é uma grandeza física que relaciona a massa de um corpo ( $m$ ) com o volume ( $V$ ) por ele ocupado. A equação matemática que define a densidade é:

$$\rho = \frac{m}{V}, \text{ onde } \rho \text{ é a densidade (g/cm}^3\text{), } m \text{ é a massa (g) e } V \text{ é o volume (cm}^3\text{).}$$

- 8.1** Qual é a densidade da água, sabendo que 230 g de água ocupam  $230 \text{ cm}^3$ ?
- 8.2** Qual é a densidade do ouro, sabendo que 2,895 kg de ouro ocupam  $150 \text{ cm}^3$ ?
- 8.3** Resolve a equação em ordem a  $m$ .
- 8.4** Calcula a massa da prata que ocupa  $50 \text{ cm}^3$ , sabendo que a densidade da prata é  $10,5 \text{ g/cm}^3$ .
- 8.5** Resolve a equação em ordem a  $V$ .
- 8.6** A densidade do gelo é igual a  $0,998 \text{ g/cm}^3$ . Qual é o volume ocupado por 1 kg de gelo?

### Tarefas

- 9 O Zito e os colegas de turma foram a um campo de *paintball*. Nesse campo, cada participante paga 20 € pelo aluguer do equipamento e 0,05 € por cada bola comprada.

- 9.1** Escreve uma equação que relacione o preço total a pagar,  $p$ , com o número de bolas compradas,  $b$ .
- 9.2** O Zito comprou 100 bolas. Quanto pagou?
- 9.3** Um colega do Zito pagou 40 €. Quantas bolas comprou?
- 9.4** Resolve a equação em ordem a  $b$ .
- 9.5** Copia e completa a seguinte tabela:

|              |    |    |    |    |
|--------------|----|----|----|----|
| $p/\text{€}$ | 50 | 60 | 65 | 70 |
| $b$          |    |    |    |    |

- 9.6** Qual é a vantagem de ter a equação resolvida em ordem a  $b$ ?



### Tarefa de investigação

- 10 Investiga o que são equações diofantinas lineares e por que razão se designam assim. Dá exemplos de equações diofantinas lineares possíveis e de equações diofantinas lineares impossíveis, explicando como, através dos termos da equação, se pode concluir que a equação é possível ou impossível.

# 7.2

## Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas

### Tarefa 2



- 1 Considera  $x$  o dinheiro gasto pela Sofia e  $y$  o dinheiro gasto pelo Diogo. Escreve uma equação que traduza a fala do Sr. João.
- 2 Escreve uma equação que traduza a fala da Sofia.
- 3 Descobre quanto gastou cada um dos irmãos no almoço.
- 4 No mesmo referencial, representa graficamente cada uma das equações.
- 5 O que observas quanto ao ponto de interseção das duas retas?

#### Nota:

A expressão  $(x; y)$  representa o par ordenado de primeiro elemento  $x$  e segundo elemento  $y$ .

Os pares ordenados  $(x; y)$  e  $(a; b)$  são iguais quando, e apenas quando,  $x = a$  e  $y = b$ .

Interessa a ordem, pois o par  $(4; 3)$  é diferente do par  $(3; 4)$ .

**Consideram-se as variáveis ordenadas por ordem alfabética:** escreve-se  $(x; y)$  e não  $(y; x)$ .

#### Repara

O símbolo  $\wedge$  utiliza-se em vez do «e» e representa uma conjunção.

### Definição e solução de um sistema

O Jaime quer saber quais são os números que satisfazem as condições seguintes:

«A soma de dois números é igual a 6. Sabe-se também que adicionando a um dos números o dobro do outro número obtém-se 10. Quais são os dois números?»

Então, pediu ajuda ao Zito para resolver esta questão. O Zito começou por identificar as variáveis.

Sendo  $x$  e  $y$  os dois números, podemos traduzir estas afirmações por duas equações:  $x + y = 6$  e  $x + 2y = 10$ .

O Jaime reconhece rapidamente que o par ordenado  $(0; 6)$  é solução da primeira equação, pois  $0 + 6 = 6$ ; também o par ordenado  $(1; 5)$  é solução dessa equação, já que  $1 + 5 = 6$ ; o par  $(3; 3)$  também o é e poder-se-iam encontrar mais pares ordenados que são solução desta equação.

Dos pares ordenados assinalados anteriormente, nenhum é solução da segunda equação, uma vez que  $0 + 2 \times 6 \neq 10$ ;  $1 + 2 \times 5 \neq 10$  e  $3 + 2 \times 3 \neq 10$ .

Continuando a pesquisar, encontra-se um par ordenado que é, ao mesmo tempo, solução das duas equações:  $(2; 4)$ .

- $2 + 4 = 6$
- $2 + 2 \times 4 = 2 + 8 = 10$

O par ordenado  $(2; 4)$  é, então, solução do problema.

A expressão  $x + y = 6 \wedge x + 2y = 10$  designa-se por **conjunção** das duas condições  $x + y = 6$  e  $x + 2y = 10$ . Para satisfazer a conjunção de duas condições, é necessário satisfazer ambas as condições. Esta conjunção também se pode escrever de outra forma, a que se chama **sistema de equações**:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

Designa-se por **sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas**,  $x$  e  $y$ , um sistema de duas equações numéricas redutíveis à forma  $ax + by = c$ , tal que os coeficientes  $a$  e  $b$  não são ambos nulos.

Um sistema diz-se na **forma canónica** quando está escrito na forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \text{ com } x \text{ e } y \text{ incógnitas e } a, b, c, d, e \text{ e } f \text{ constantes.}$$

Na situação anterior verificou-se que o par ordenado (2; 4) é solução do problema.

O par ordenado de números  $(x_0; y_0)$  é **solução de um sistema de duas equações** com duas incógnitas quando, ao substituir em cada uma das equações a primeira incógnita por  $x_0$  e a segunda por  $y_0$ , se obtêm duas igualdades verdadeiras.

### Exercícios resolvidos

1. Mostra que o par ordenado (5; -2) não é solução do sistema de equações.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ -x - y = -3 \end{cases}$$

#### Resolução:

1. Para verificar se (5; -2) é solução do sistema, substitui-se  $x$  por 5 e  $y$  por -2:

$$\begin{cases} 2 \times 5 + 3 \times (-2) = 11 \\ -5 - (-2) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 - 6 = 11 \\ -5 + 2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 11 & (F) \\ -3 = -3 & (V) \end{cases}$$

O par ordenado (5; -2) não satisfaz as duas condições (não satisfaz a primeira condição), logo, não é solução do sistema.

2. Verifica se o par ordenado (2; 3) é solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

#### Resolução:

2. Para verificar se (2; 3) é solução do sistema, substitui-se  $x$  por 2 e  $y$  por 3.

$$\begin{cases} 2 + 3 = 5 \\ 2 \times 2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5 & (V) \\ 1 = 1 & (V) \end{cases}$$

O par ordenado (2; 3) é solução do sistema, uma vez que satisfaz as duas condições.

É PRECISO TER MUITO  
CUIDADO COM A ORDEM  
DAS VARIÁVEIS,  
POIS (5; -2) NÃO É SOLUÇÃO  
DO SISTEMA, MAS (-2; 5)  
JÁ É SOLUÇÃO DO SISTEMA:

$$\begin{cases} 2 \times (-2) + 3 \times 5 = 11 \\ -(-2) - 5 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 11 = 11 & (V) \\ -3 = -3 & (V) \end{cases}$$



Dois sistemas de equações dizem-se **sistemas equivalentes** se tiverem o mesmo conjunto de soluções.

### O que deves saber:

- Verificar se um par ordenado é ou não solução de um sistema.
- Identificar sistemas equivalentes.

### Verificar a aprendizagem

#### SOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE DUAS EQUAÇÕES DO 1.º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

1 Encontra quatro pares ordenados que sejam solução da equação  $2x + y = 100$ .

2 Qual dos seguintes pares ordenados é solução do sistema dado?

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

- A. (3; 1)
- B. (8; 2)
- C. (4; -2)
- D. (3; 16)

3 Verifica para qual dos sistemas de equações seguintes o par ordenado (2; 5) é solução.

A.  $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} 5x + 3y = -5 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} x - 4y = 2 \\ \frac{x}{2} - y = -3 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x + 4y = 22 \\ 8x - y = 11 \end{cases}$

4 Verifica se os pares ordenados (2; -1) e (-1; 2) são soluções dos sistemas seguintes:

a)  $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x = 3 - 2y \\ 9x + 4y = -1 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ y = -\frac{x}{2} \end{cases}$

d)  $\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x + 4y = 4 \end{cases}$

5 Considera o sistema de equações:  $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = -10 \end{cases}$

Dos seguintes pares ordenados (x; y), qual deles é solução do sistema?

- A. (-2; 8)
- B. (2; -8)
- C. (2; 8)
- D. (-2; -8)

6 Considera o sistema de equações  $\begin{cases} -x + y = -3 \\ x + y = 5 \end{cases}$

6.1 Mostra que o par ordenado (6; 3) é solução da primeira equação, mas não é solução do sistema.

6.2 Dá um exemplo de um par ordenado (x; y) que seja solução da segunda equação, mas não seja solução do sistema.

6.3 Mostra que o par ordenado (4; 1) é solução do sistema.

6.4 O sistema é equivalente ao sistema  $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$  ?

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei verificar se um par ordenado é solução de um sistema?

## Aplicar

- 7 Sabendo que o par ordenado  $(1; -2)$  é solução do sistema de equações  $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ y = 4 - 6x \end{cases}$ ,

justifica que este sistema de equações não é equivalente ao sistema de equações  $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$ .

- 8 Encontra mentalmente a solução do sistema de equações  $\begin{cases} y = x + 6 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ .  
Explica como pensaste.

- 9 Observa a figura.



9.1 Identifica as incógnitas do problema.

9.2 Escreve sob a forma de um sistema as duas equações que traduzem o problema sugerido pelas duas figuras.

9.3 Determina, mentalmente, a solução do problema.

9.4 Confirma, com cálculos, a solução obtida na questão anterior.

- 10 Considera o problema: «A Ana comprou, no bar da escola, sumos e sanduíches para alguns colegas. Comprou mais três sanduíches do que sumos. No total pagou 4,60 €. Cada sanduíche custa 0,80 € e cada sumo, 0,30 €. Quantos sumos e quantas sanduíches comprou a Ana?»

Copia o sistema seguinte e escreve uma equação do 1.º grau que permita completar o sistema, de modo que este traduza o problema.

$$\begin{cases} x = y + 3 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Adaptado do Exame Nacional do 9.º ano de 2005 — 2.ª chamada

- 11 Inventa um sistema de equações, tal que o par ordenado  $(10; 15)$  seja solução desse sistema.

## Tarefas

- 12 No sistema de equações seguinte,  $a$  e  $b$  representam números.

$$\begin{cases} x - y = a \\ bx - 2y = 18 \end{cases}$$

Descobre os números  $a$  e  $b$ , sabendo que o par ordenado  $(5; -4)$  é solução do sistema.

- 13 Copia e completa o sistema de equações seguinte, de modo que o par ordenado  $(-4; 12)$  seja solução do sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = \dots \\ 3x - 2y = \dots \end{cases}$$

# Interpretação geométrica de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas

## Tarefa 3



NO SÁBADO, VENDI 30 RIFAS DAS QUE TÊM SEMPRE PRÊMIO E 20 DAS OUTRAS; FIZ 50 €. NO DOMINGO, VENDI 45 RIFAS DAS QUE TÊM SEMPRE PRÊMIO E 30 DAS OUTRAS; FIZ 75 €.



Numa quermesse, são vendidos dois tipos de rifas, de preços diferentes: umas que têm sempre prémio e outras que podem ter ou não.

- 1 Traduz a fala da D. Marta por um sistema de equações nas incógnitas  $x$  e  $y$ .
- 2 Resolve cada equação do sistema anterior em ordem a  $y$ .
- 3 Representa graficamente as equações do sistema.
- 4 Consegues concluir quantas rifas de cada tipo vendeu a D. Marta? Justifica a tua resposta.

## Interpretação gráfica das soluções de um sistema

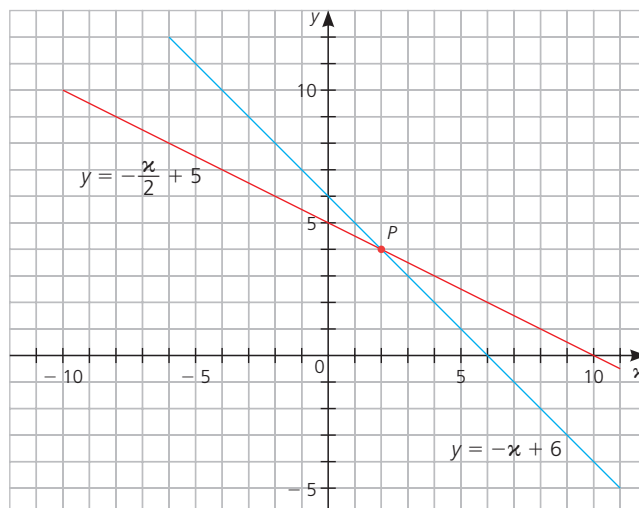
O Jaime e o Zito conseguiram, após algumas tentativas, encontrar uma

solução do sistema  $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$ ,  $(2; 4)$ .

As equações do sistema anterior são equivalentes a equações da forma  $y = ax + b$ , representadas graficamente por retas não verticais.

O sistema  $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$  é equivalente ao sistema  $\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = -\frac{x}{2} + 5 \end{cases}$ .

Ao representar as retas correspondentes a estas equações, obtém-se:





As coordenadas dos pontos da reta de equação  $y = -x + 6$  são as soluções da equação  $x + y = 6$ .

As coordenadas dos pontos da reta de equação  $y = -\frac{x}{2} + 5$  são as soluções da equação  $x + 2y = 10$ .

O ponto  $P(2,4)$  é o ponto de interseção das duas retas. O par ordenado  $(2, 4)$  é a única solução comum às duas equações. Ou seja,  $(2, 4)$  é a solução do sistema.

## ■ Sistema possível e determinado

No gráfico anterior, as retas são concorrentes (intersectam-se num único ponto). O par ordenado  $(2, 4)$  é a única solução do sistema.

Diz-se que este sistema de equações é um **sistema possível e determinado**.

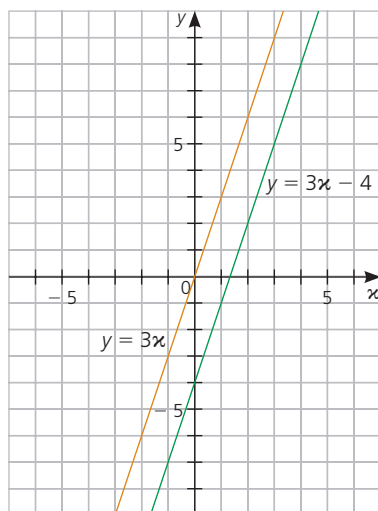
## ■ Sistema impossível

Existem sistemas que não têm nenhuma solução.

Por exemplo:

O sistema  $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$  é equivalente ao sistema  $\begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = 3x \end{cases}$ .

Consideremos a representação gráfica das retas que têm estas equações.



Observa-se que as retas são paralelas, não se intersectam. Então, não há solução comum às duas equações.

**O sistema não tem solução.** Diz-se que o sistema de equações é um **sistema impossível**.

### Recorda

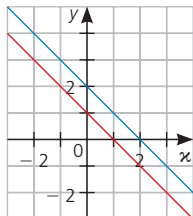
Duas retas do plano podem ser:

- **Paralelas** se não se intersectam (não têm pontos em comum);
- **Coincidentes** se têm dois pontos comuns;
- **Concorrentes** se se intersectam num único ponto.

### Repara

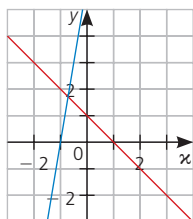
Um sistema de equações pode ser:

- **Impossível** (não tem solução)

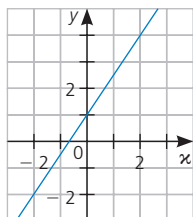


- **Possível**

— **Determinado** (tem uma única solução)



— **Indeterminado** (tem uma infinidade de soluções)



## Sistema possível e indeterminado

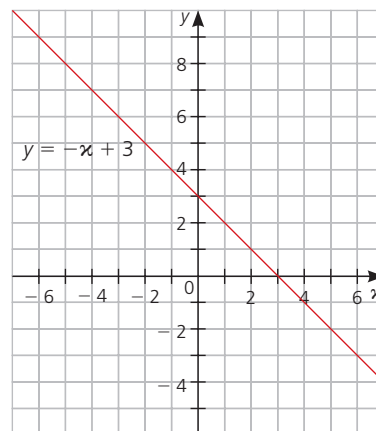
Existem sistemas para os quais há uma infinidade de soluções. Por exemplo:

O sistema  $\begin{cases} x + y = 3 \\ -2y - 2x = -6 \end{cases}$  é equivalente ao sistema  $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = -x + 3 \end{cases}$ .

De seguida, mostra-se a representação gráfica das retas que têm estas equações.

Observa-se que as duas retas são coincidentes. Então, há uma infinidade de soluções comuns às duas equações.

**O sistema tem uma infinidade de soluções.** As soluções são as coordenadas dos pontos da reta definida por uma das duas equações equivalentes do sistema. Diz-se que o sistema de equações é um **sistema possível e indeterminado**.



### Exercício resolvido

Recorre à interpretação gráfica para verificar quantas soluções tem o sistema e classifica-o:

$$\begin{cases} -6x + y = 6 \\ -6(x + 1) = y \end{cases}$$

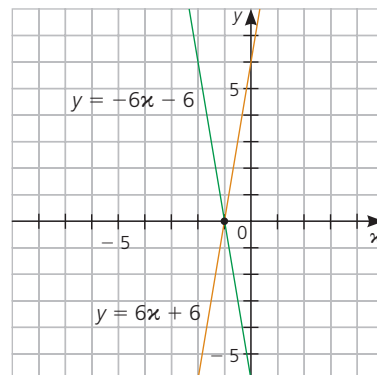
#### Resolução:

Começamos por escrever um sistema equivalente a este, cujas equações estejam na forma  $y = ax + b$ .

$$\text{Assim: } \begin{cases} -6x + y = 6 \\ -6(x + 1) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6x + 6 \\ -6x - 6 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6x + 6 \\ y = -6x - 6 \end{cases}$$

As retas são concorrentes (intersectam-se num único ponto). O ponto  $P$ , ponto de interseção das duas retas, tem coordenadas  $(-1, 0)$ . A solução do sistema é o par ordenado  $(-1, 0)$ .

Este sistema de equações é um **sistema possível e determinado**.



### O que deves saber

- Interpretar geometricamente os sistemas de duas equações do 1.º grau num plano, munido de um referencial cartesiano.
- Reconhecer sistemas impossíveis, possíveis determinados e possíveis indeterminados.

## Verificar a aprendizagem

### INTERPRETAÇÃO GRÁFICA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES

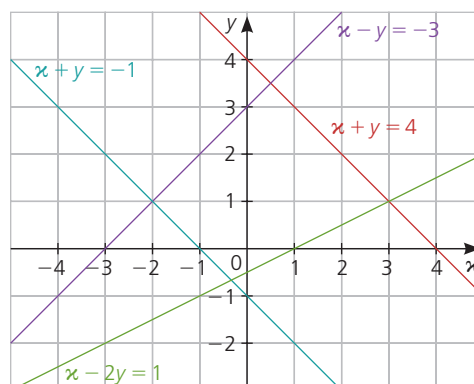
1 Observa as representações gráficas.

1.1 Qual é a solução do sistema  $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ ?

1.2 Quantas soluções tem o sistema  $\begin{cases} x - y = -3 \\ x + y = 4 \end{cases}$ ?  
Justifica a tua resposta.

1.3 Indica um sistema que não tenha soluções.

1.4 Indica um sistema que tenha como solução  $(-2; 1)$ .



2 Representa graficamente cada um dos sistemas seguintes, indicando a respetiva solução:

a)  $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} -x + y = -2 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x + y = 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei interpretar geometricamente os sistemas de duas equações de 1.º grau num plano?

### CLASSIFICAR SISTEMAS DE EQUAÇÕES

3 Copia para o teu caderno as correspondências corretas.

|          |                                  |          |                                               |            |  |
|----------|----------------------------------|----------|-----------------------------------------------|------------|--|
| <b>A</b> | Sistema impossível               | <b>1</b> | Tem uma única solução, que é um par ordenado. | <b>I</b>   |  |
| <b>B</b> | Sistema possível e indeterminado | <b>2</b> | Tem uma infinidade de soluções.               | <b>II</b>  |  |
| <b>C</b> | Sistema possível e determinado   | <b>3</b> | Não tem soluções.                             | <b>III</b> |  |

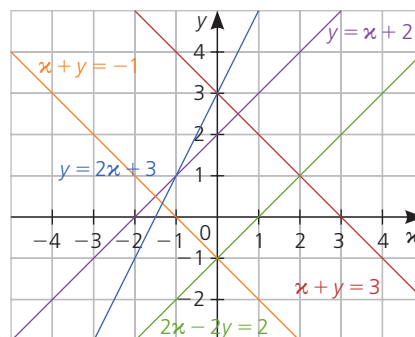
4 Observa as retas representadas no referencial cartesiano seguinte.

4.1 Utilizando as equações das retas representadas, indica:

- a) um sistema possível e determinado de solução  $(0; 3)$ ;
- b) um sistema impossível;
- c) um sistema possível e indeterminado.

4.2 Graficamente, qual te parece ser a solução do sistema  $\begin{cases} y = x + 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ ?

4.3 Com uma das equações dadas, completa o sistema de equações de modo que seja impossível:  $\begin{cases} \frac{y}{2} = x - 1 \\ \dots \end{cases}$



**AUTOAVALIAÇÃO** Sei reconhecer sistemas impossíveis, possíveis determinados e possíveis indeterminados?

## Aplicar

- 5 Traduz por um sistema de equações o problema seguinte e resolve-o graficamente:  
«A diferença entre a idade de uma amiga da Joana e a idade da Joana é de 4 anos. O dobro da soma das idades é igual a 60. Qual é a idade de cada uma?»

## Tarefas

- 6 Considera a equação  $x + 3y = 8$ .

TABELA 1

| $x$ | $y =$ ..... | Pontos     |
|-----|-------------|------------|
| -4  |             | A(...;...) |
| 5   |             | B(...;...) |

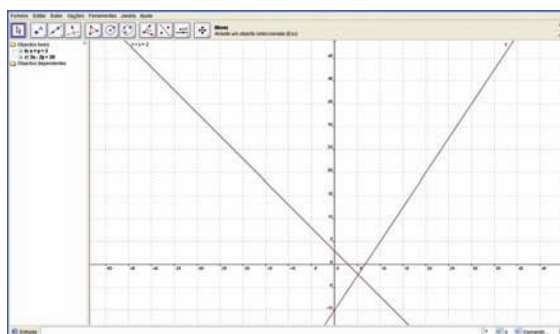
TABELA 2

| $y$ | $x =$ ..... | Pontos     |
|-----|-------------|------------|
| -1  |             | C(...;...) |
| 2   |             | D(...;...) |

- 6.1 Copia e completa a tabela 1.  
6.2 Representa a equação graficamente.  
6.3 Copia e completa a tabela 2.  
6.4 No mesmo referencial cartesiano, representa graficamente os pontos da tabela 2.  
6.5 O que observas relativamente aos pontos A, B, C e D?
- 7 Copia e completa o sistema de equações seguinte, de modo que o sistema seja:
- a) impossível;  
b) possível e indeterminado;  
c) possível e determinado.
- $$\begin{cases} 2(x + y) = 8 \\ \dots + y = \dots \end{cases}$$

## Tarefa de investigação

- 8 Abre o ambiente do GeoGebra. No menu **Exibir**, escolhe as opções **Eixos coordenados**, **Quadriculado** e **Janela de álgebra**. Para desenhares o gráfico de uma equação, por exemplo,  $3x - 2y = 20$ , basta introduzires a equação na parte inferior da janela (**Entrada**) e carregares em Enter.



- 8.1 Determina a solução do sistema de equações  $\begin{cases} 3x - 2y = 20 \\ x + y = 3 \end{cases}$ .  
8.2 Inventa outros sistemas e procede da mesma forma.

**NOTA:** Podes alterar a cor e a espessura da linha ou apresentar a expressão algébrica da equação, selecionando a reta e escolhendo a opção **Propriedades** no menu **Editar**.

# 7.4

## Resolução de sistemas de equações

### Tarefa 4



- 1 Completa os raciocínios ao lado e descobre quanto pesa cada bola.
- 2 Inventa outro problema semelhante e resolve-o.

Já viste como resolver um sistema graficamente. No entanto, este método tem limitações e nem sempre leva à descoberta da solução exata do sistema.

Vamos aprender um método algébrico para resolver sistemas.

### Resolução pelo método de substituição

Este processo permite resolver sistemas e determinar o valor exato da solução de um sistema possível e determinado.

Exemplo:

Para resolver, pelo método de substituição, o sistema  $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 5 \end{cases}$ , executam-se os passos seguintes:

1. Resolver uma das equações em ordem a uma das incógnitas (deve escolher-se a equação e a incógnita que tornem mais fácil a resolução):

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ x - y = 5 \end{cases}$$

2. Na outra equação, substituir  $y$  por  $7 - 2x$ :

$$\begin{cases} y = 7 - 2x \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ x - (7 - 2x) = 5 \end{cases}$$

3. Resolver a equação que ficou com apenas uma incógnita (neste caso, a segunda), utilizando as regras habituais:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 7 - 2x \\ x - (7 - 2x) = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ x - 7 + 2x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ 3x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ x = \frac{12}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

4. Substituir o valor obtido (4) na equação inicial:

$$\begin{cases} y = 7 - 2x \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 2 \times 4 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

A solução do sistema é o par ordenado (4; -1).

Este sistema é **possível e determinado**.

**QUANDO SE SUBSTITUI  $y$  POR  $7 - 2x$ ,  $y$  DESAPARECE E FICA UMA EQUAÇÃO APENAS EM  $x$ ! NESTA SUBSTITUIÇÃO TEM DE SE TER EM ATENÇÃO O QUE ESTÁ ANTES DO  $y$ : SE FOR UM SINAL «-», ALTERAM-SE OS SINAIS DOS TERMOS DA EXPRESSÃO; SE FOR UM SINAL «+», NÃO SE ALTERA NADA; SE FOR UM COEFICIENTE, TEM DE SE UTILIZAR A PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA DA MULTIPLICAÇÃO.**



SE PUDER, AO INICIAR A RESOLUÇÃO, ESCOLHO SEMPRE UMA INCÓGNITA QUE TENHA COEFICIENTE UM.



### Nota

Na resolução de um sistema aplicam-se as regras anteriormente estudadas para a resolução de equações.

Se uma ou as duas equações do sistema tiverem parênteses ou denominadores, deve começar-se por tirar os parênteses e desembaraçar de denominadores, transformando o sistema num equivalente.

### Exercício resolvido

Resolve os seguintes sistemas de equações e identifica quantas soluções têm:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x - 2(x - 1) = 4y \\ \frac{x}{2} - (y - 4) = 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + y = 5 \\ 2(x - 5) = -2y \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases} \end{array}$$

#### Resolução:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 3x - 2(x - 1) = 4y \\ \frac{x}{2} - (y - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2x + 2 = 4y \\ \frac{x}{2} - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} x + 2 = 4y \\ \frac{x}{2} - \frac{2}{2}y + \frac{8}{2} = \frac{0}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 4 \\ x - 2y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 4y \\ (-2 + 4y) - 2y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} x = -2 + 4y \\ 2y = -8 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 4y \\ y = -\frac{6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 4y \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} x = -2 + 4 \times (-3) \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -14 \\ y = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

O par ordenado  $(-14; -3)$  é a única solução do sistema.

O sistema é possível e determinado.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \begin{cases} x + y = 5 \\ 2(x - 5) = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 10 = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} x = 5 - y \\ 2x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ 2 \times (5 - y) + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ 10 - 2y + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} x = 5 - y \\ 0y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Obtém-se uma equação possível e indeterminada ( $0y = 0$ ). Qualquer que seja o valor de  $y$ , a igualdade é sempre verdadeira, logo, o sistema tem uma **infinitude de soluções** (todas as que satisfazem a condição  $x = 5 - y$ ).

O sistema é possível e indeterminado.

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 2 \times (3 - 2y) + 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 6 - 4y + 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 0y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Obtém-se uma equação impossível ( $0y = 2$ ). Qualquer que seja o valor de  $y$ , a igualdade é sempre falsa, logo, o sistema não tem solução.

O sistema é impossível.

## ■ Resolução de problemas utilizando sistemas de equações

Há problemas cuja resolução passa por traduzi-los por um sistema de equações de 1.º grau com duas incógnitas.

### Exercícios resolvidos

1. Hoje, a idade da mãe é seis vezes maior do que a idade do filho. Qual é a idade atual de cada um, sabendo que daqui a vinte anos a idade da mãe será o dobro da idade do filho?

#### Resolução:

1. Representando por  $x$  a idade atual da mãe e por  $y$  a idade atual do filho, daqui a 20 anos, a mãe terá  $x + 20$  anos e o filho  $y + 20$  anos.

O problema traduz-se pelo sistema:

$$\begin{cases} x = 6y \\ x + 20 = 2 \times (y + 20) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 6y \\ x + 20 = 2y + 40 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6y \\ x - 2y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6y \\ 6y - 2y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6y \\ 4y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6y \\ y = \frac{20}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \times 5 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

A mãe tem 30 anos e o filho 5 anos.

2. Num retângulo de perímetro 10, a medida do comprimento pode exceder, em 6 unidades, a medida da largura?

#### Resolução:

2. Sendo  $c$  a medida do comprimento e  $\ell$  a medida da largura, o problema é traduzido pelo sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2c + 2\ell = 10 \\ c = \ell + 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times (\ell + 6) + 2\ell = 10 \\ c = \ell + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\ell + 12 + 2\ell = 10 \\ c = \ell + 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4\ell = -2 \\ c = \ell + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell = \frac{-2}{4} \\ c = \ell + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell = -0,5 \\ c = -0,5 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell = -0,5 \\ c = 5,5 \end{cases} \end{aligned}$$

O sistema é possível e determinado, mas a **solução não é solução do problema**, uma vez que a largura não pode tomar um valor negativo.

Conclui-se, assim, que num retângulo de perímetro 10, o comprimento não pode exceder a largura em seis unidades.



Quando se resolve um problema, é necessário verificar se a solução do sistema faz sentido no contexto do problema.

### O que debes saber

- Resolver sistemas de equações pelo método de substituição.
- Resolver e formular problemas envolvendo sistemas de equações.



## Verificar a aprendizagem

### RESOLUÇÃO DE SISTEMAS PELO MÉTODO DE SUBSTITUIÇÃO

- 1 Considera o sistema de equações: 
$$\begin{cases} 4x - 2y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

1.1 Representa graficamente o sistema de equações.

1.2 Consegues concluir qual é a solução exata do sistema? Justifica a tua resposta.

1.3 Resolve o sistema de equações, pelo método de substituição.

- 2 Resolve, pelo método de substituição, os sistemas seguintes:

a) 
$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x + y = 16 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} y = 7 - x \\ x - y = 1 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ x = 1 - y \end{cases}$$

### Tarefa

- 3 Para cada resolução, indica qual foi o erro cometido.

a) 
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - y + 2y = 4 \\ x = 2 - y \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x \\ x + 2 \times 5 - 3x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x \\ x + 10 - 3x = 9 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ x - 2 - 2x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ x - 2x = 10 + 2 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ 2x + 2(6 - 2x) = 3 \end{cases}$$

- 4 Resolve, pelo método de substituição, os sistemas seguintes:

a) 
$$\begin{cases} y = x - 2 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

g) 
$$\begin{cases} 3x + 10y = 6 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} y = 3x \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$$

h) 
$$\begin{cases} 5x + 5y = 8 \\ 4x - 5y = 10 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x - 3y = 9 \\ x = -2y + 4 \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 4x + y = 15 \end{cases}$$

i) 
$$\begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

- 5 Escreve na forma canónica cada um dos sistemas e, de seguida, resolve-os pelo método de substituição:

a) 
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ y = \frac{x}{2} - 2 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x = 2 - \frac{y}{2} \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} y - 3x = 0 \\ x + 2y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 2x - y = -3y - 4 \\ y - 3x - 2 = 0 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} x + 3 = 5y \\ 2(x - 3y) + x = 9 \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} 4x + \frac{5 + 3y}{2} = 5 \\ 2x - (x - y) = 4 \end{cases}$$

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei resolver sistemas de equações pelo método de substituição?

## Aplicar

- 6 Resolve os sistemas seguintes através de um raciocínio semelhante ao do Zito:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{a}{4} + 2 = 3b \\ \frac{a}{4} - 2b = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3c = d \\ 3(c + d) = 4 \end{cases}$$

POR VEZES, NÃO COLOCO O SISTEMA NA FORMA CANÔNICA NEM RESOLVO UMA EQUAÇÃO EM ORDEM A UMA DAS VARIÁVEIS, POIS PODE EXISTIR ALGUM TERMO OU EXPRESSÃO NUMA EQUAÇÃO QUE SE REPITA NA OUTRA:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y = \frac{x + y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 2y = \frac{3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ y = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 0,5 = 3 \\ y = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2,5 \\ y = 0,5 \end{cases}$$



- 7 Uma empresa de águas engarrafou 4500 L de água em 1200 garrafas de dois e de cinco litros.

7.1 Considerando  $c$  o número de garrafas de cinco litros e  $d$  o número de garrafas de dois litros, qual dos sistemas seguintes traduz o problema?

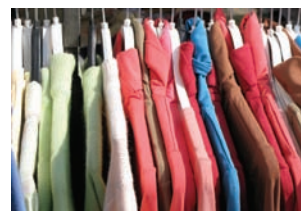
$$\text{A. } \begin{cases} 5c + 2d = 1200 \\ c + d = 4500 \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} c + d = 1200 \\ c + d = 4500 \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} 5c + 2d = 4500 \\ c + d = 1200 \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} c + d = 1200 \\ 2c + 5d = 4500 \end{cases}$$

7.2 Resolve o sistema que traduz o problema, pelo método de substituição.

7.3 Quantos garrafas de cada uma das capacidades foram utilizados?

- 8 Na época de saldos, uma loja realizou a promoção seguinte: colocou todas as peças de roupa com um preço único, assim como todos os sapatos (estes com um preço diferente do da roupa). A Sofia comprou um casaco, umas calças e um par de sapatos por 47,50 € e a Joana comprou uma camisa e dois pares de sapatos por 50 €.

Quanto custou cada peça de roupa e cada par de sapatos?



- 9 Dois caixotes contêm conjuntamente 94 caixas de bolachas. Se tirássemos 9 caixas de um deles para as colocarmos no outro, os caixotes ficariam com o mesmo número de caixas. Quantas caixas contém cada um dos caixotes?

Adaptado do Exame de Aptidão, 1943

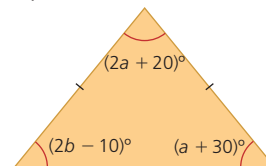
- 10 No jardim, a D. Marta dividiu uma zona retangular para colocar um canteiro de legumes. O canteiro tem 15 m de perímetro e o seu comprimento é uma vez e meia a sua largura. Quais são as dimensões do canteiro?

- 11 Numa zona de praia concessionada, o preço diário das palhotas é 6 € mais caro do que o preço dos toldos. A D. Marta e a família alugaram uma palhota por 5 dias. Como no fim de semana apareceram mais familiares, alugaram também um toldo por 2 dias e pagaram, por tudo, 93 €.

Qual foi o preço diário da palhota?

- 12 Observa o triângulo desenhado. (Nota: o triângulo não foi construído à escala.)

Quais devem ser os valores de  $a$  e  $b$  de modo que o triângulo seja isósceles?



- 13 A média das percentagens obtidas pelo Jaime em dois testes de Matemática foi de 94%. No primeiro teste, o Jaime teve 10% a mais do que no segundo. Quanto obteve em cada um dos testes?

- 14 Um grupo de amigos foi almoçar. Ao dividirem o preço do almoço, verificaram que, se cada um pagasse 14 euros, faltavam 4 euros. Mas se cada um pagasse 16 euros, sobravam 6 euros. Quanto deve pagar cada um dos amigos, de modo a obterem, exatamente, a quantia correspondente ao preço do almoço?

Teste Intermédio de Matemática, fevereiro, 2010

## Síntese

### Equações literais

- Denomina-se **equação literal** uma equação que se obtém igualando dois polinómios de forma que pelo menos um dos coeficientes envolva uma ou mais letras.

Exemplos:

$x$  e  $y$  são variáveis;  $a$  e  $b$  são constantes.

- $x + 2y = 4a$
- $4x^2 = 2bxy$
- $x^2 - 6ax + 9a^2 = 0$
- $x + 3ay = 2a$
- Para se **resolver uma equação literal** em ordem a uma dada incógnita considera-se apenas essa incógnita como variável dos polinómios envolvidos e as restantes letras como constantes.

Exemplos:

$$x + 2y = 4a$$

| Em ordem a $x$ | Em ordem a $y$          |
|----------------|-------------------------|
| $x = -2y + 4a$ | $y = -\frac{x}{2} + 2a$ |

$$4x^2 = 2bxy$$

| Em ordem a $x$                                                                                                                                                                                       | Em ordem a $y$                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $4x^2 - 2bxy = 0 \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow x(4x - 2by) = 0 \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow x = 0 \vee 4x - 2by = 0 \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{b}{2}y$ | $4x^2 = 2bxy \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \frac{4x^2}{2bx} = y \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow y = \frac{2x}{b}, x \neq 0$ |

### Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas

Designa-se por **sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas**  $x$  e  $y$  um sistema de duas equações numéricas redutíveis à forma  $ax + by = c$ , tal que os coeficientes  $a$  e  $b$  não são ambos nulos.

Um sistema diz-se na **forma canónica** quando está escrito na forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}, \text{ com } x \text{ e } y \text{ incógnitas e } a, b, c, d, e \text{ e } f \text{ constantes.}$$

O sistema  $\begin{cases} 10x + 5y = 700 \\ x = y + 25 \end{cases}$  é equivalente ao sistema  $\begin{cases} 10x + 5y = 700 \\ x - y = 25 \end{cases}$  que está na forma canónica.

## Solução de um sistema de equações

- O par ordenado de números  $(x_0, y_0)$  é **solução de um sistema** com duas incógnitas quando, ao substituir em cada uma das equações a primeira incógnita por  $x_0$  e a segunda por  $y_0$ , se obtêm duas igualdades verdadeiras.
- Para verificar se um par ordenado é solução do sistema, substitui-se cada variável pelo número.

Exemplos:

—  $(50; 40)$  **não é solução** do sistema de equações, porque:  $\begin{cases} 10 \times 50 + 5 \times 40 = 700 & \text{Verdadeiro} \\ 50 = 40 + 25 & \text{Falso} \end{cases}$

—  $(55; 30)$  **é solução** do sistema de equações, porque:  $\begin{cases} 10 \times 55 + 5 \times 30 = 700 & \text{Verdadeiro} \\ 55 = 30 + 25 & \text{Verdadeiro} \end{cases}$

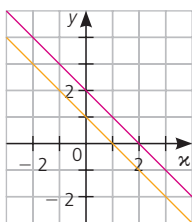
- Dois sistemas dizem-se **sistemas equivalentes** se tiverem o mesmo conjunto de soluções.

## Interpretação geométrica de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas

Um sistema de equações pode ser:

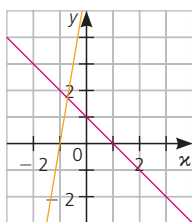
**Impossível** (não tem solução)

Graficamente as retas que representam as equações são paralelas, ou seja, não se intersectam.



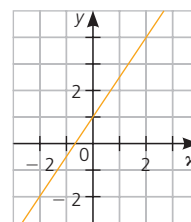
**Possível e determinado**

(tem uma única solução)  
Graficamente, as retas que representam as equações são concorrentes, ou seja, intersectam-se num único ponto.



**Possível e indeterminado**

(tem uma infinidade de soluções)  
Graficamente, as retas que representam as equações são coincidentes.



## Resolução de um sistema de equações pelo método de substituição

- $\begin{cases} 10x + 5y = 700 \\ x = y + 25 \end{cases}$  Resolve-se uma das equações em ordem a uma das incógnitas (neste sistema, a 2.ª equação já se encontra resolvida em ordem a  $x$ ).
- $\begin{cases} 10x + 5y = 700 \\ x = y + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 \times (y + 25) + 5y = 700 \\ x = y + 25 \end{cases}$  Substitui-se, na outra equação, a incógnita pela expressão obtida.
- $\begin{cases} 10y + 250 + 5y = 700 \\ x = y + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15y = 700 - 250 \\ x = y + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 30 \\ x = y + 25 \end{cases}$  Resolve-se a equação usando as regras para a resolução de equações do 1.º grau.
- $\begin{cases} y = 30 \\ x = 30 + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 30 \\ x = 55 \end{cases}$  Substitui-se o valor encontrado para uma das incógnitas na outra equação e escreve-se a solução:  $(55; 30)$ .

## Atividades globais

### QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

Das quatro alternativas, escolhe a única opção correta.

- 1 Georg Simon Ohm (1789-1854) foi um físico e matemático alemão que desenvolveu a primeira teoria matemática da condução elétrica nos circuitos, enunciando a Lei de Ohm:

$$R = \frac{V}{I},$$

em que  $V$  é a diferença de potencial elétrico (em volts);  $R$  é a resistência elétrica do circuito (em ohms) e  $I$  é a intensidade da corrente elétrica (em amperes).

Qual das equações seguintes representa a Lei de Ohm, resolvida em ordem a  $I$ ?

- A.  $I = \frac{V}{R}$       B.  $I = \frac{R}{V}$       C.  $I = RV$       D.  $I = R + V$
- 2 Quando se resolve, em ordem a  $x$ , a equação  $4x^2 = ax$ , com  $a \in \mathbb{R}$  obtêm-se as soluções:
- A.  $\left\{-\frac{a}{4}, 0\right\}$       B.  $\left\{0, \frac{a}{4}\right\}$       C.  $\left\{0, \frac{a}{2}\right\}$       D.  $\{0, 4\}$

- 3 Considera o seguinte sistema de equações: 
$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} = 1 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases}$$

Qual dos quatro pares ordenados  $(x, y)$  seguintes é a solução deste sistema?

- A.  $(0, 2; 1, 6)$       B.  $(0; 2)$       C.  $(2; 0)$       D.  $(1, 2)$
- 4 Considera o sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{2}{5}y = 2 - x \\ 3x - 2(y - 3x) = 5 \end{cases}$$

Em qual das opções seguintes o sistema está representado na forma canónica?

- A.  $\begin{cases} 2y = 10 - 5x \\ 3x - 2y - 3x = 5 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} 2y + x = 2 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x + \frac{2}{5}y = 2 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} 5x + 2y = 10 \\ 9x - 2y = 5 \end{cases}$

- 5 No verão, a Joana foi com alguns amigos passar um fim de semana à praia da Nazaré. Na praia, uma senhora vendia bolos, a 1 € cada, e um senhor vendia bolachas americanas, a 1,50 € cada. Durante o fim de semana, compraram vinte e um bolos e bolachas americanas e gastaram 27 €.

Representando por  $b$  o número de bolos e por  $a$  o número de bolachas americanas, qual dos sistemas traduz a informação contida no texto?

- A.  $\begin{cases} b + a = 27 \\ b + 1,50a = 21 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} b = 21 - a \\ 1,50a + b = 27 \end{cases}$       C.  $\begin{cases} 1,50b + a = 27 \\ b - a = 21 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} 1,50a + b = 27 \\ a = 21 + b \end{cases}$



- 6 Qual dos sistemas seguintes é possível e indeterminado?

- A.  $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x + y = 3 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 1,5 \end{cases}$

## EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

- 7** Um quadrado mágico é um quadrado em que a soma dos números de cada linha, coluna e diagonal é sempre igual. No quadrado seguinte aparece uma incógnita.

|               |          |                     |
|---------------|----------|---------------------|
| $a + 3$       | $2a - 4$ | $\frac{1}{2}a + 3a$ |
| $3a$          | $2a$     | $2(3 - a)$          |
| $\frac{a}{2}$ | $4a$     | $2a - 1$            |

**7.1** Descobre o valor de  $a$ .

**7.2** Qual é o número mágico deste quadrado (valor da soma)?

- 8** Num certo concelho, a tarifa de consumo de água para serviços públicos e instituições privadas é calculada através da fórmula seguinte:

$$v = 2,05 + 0,83c$$

em que  $v$  representa o valor a pagar mensalmente, em euros, e  $c$ , o consumo de água, em  $m^3$ .

**8.1** O que representa o valor 2,05?

**8.2** Quanto pagou uma instituição de apoio social que consumiu  $240 m^3$  de água num mês?

**8.3** Resolve a equação em ordem a  $c$ .

**8.4** Um serviço público pagou 334,05 € de água. Qual foi o seu consumo?

**8.5** Qual é a utilidade de resolver a equação em ordem a  $c$ ?



- 9** Os biólogos utilizam o método de captura e recaptura para estimar o tamanho de uma população. Capturam um determinado número de animais (1.ª amostra), marcam-nos e, depois, libertam-nos. Dias depois, capturam um segundo número de animais (2.ª amostra) e contam o número de animais marcados. A população é estimada através da seguinte fórmula:

$$P = \frac{A \times B}{M}$$

em que

- $P$  é a população;
- $A$  é o número de animais capturados na 1.ª amostra;
- $B$  é o número de animais capturados na 2.ª amostra;
- $M$  é o número de animais marcados na 2.ª amostra.

**9.1** Se, na 2.ª amostra, todos os animais estiverem marcados, que conclusão podes tirar acerca da população do rio?

**9.2** Uma associação ambientalista capturou, no rio Minho, 2000 trutas e marcou-as. Dois dias depois, capturou uma 2.ª amostra, tendo recolhido 1250 trutas. Os biólogos estimaram que a população do rio, naquela zona, era de 100 000 trutas. Quantas trutas marcadas continha a 2.ª amostra? Explica a tua resposta.

Exercício adaptado da Prova de Aferição do 3.º ciclo do Ensino Básico, 2002

- 10** Um triângulo tem de medidas dos lados:  $2y$  cm;  $(x + y)$  cm e  $(x + 4)$  cm. Para que valores de  $x$  e de  $y$  o triângulo é equilátero?

## Atividades globais

- 11** Para efetuar chamadas do seu telemóvel, para duas redes (A e B), o preço, em cêntimos, que o Diogo tem a pagar por segundo é o apresentado na tabela ao lado. Ontem, o Diogo só efetuou chamadas do seu telemóvel para as redes A e B. A soma dos tempos de duração dessas chamadas foi de 60 segundos e, no total, o Diogo gastou 35 cêntimos.

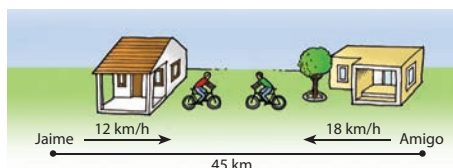
| Rede | Preço por segundo (em cêntimos) |
|------|---------------------------------|
| A    | 0,5                             |
| B    | 0,6                             |

Qual foi o tempo de duração das chamadas efetuadas pelo Diogo para a rede A? Apresenta todos os cálculos que efetuares e, na tua resposta, indica a unidade.

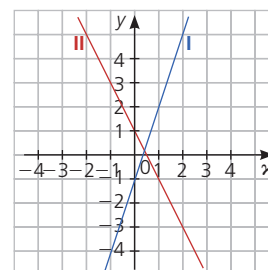
Exercício adaptado do Exame Nacional do 9.º Ano, 2007 — 2.ª chamada

## Tarefas

- 12** O Jaime combinou encontrar-se com um amigo que mora a uma distância de 45 km de sua casa. Ambos vão de bicicleta: o Jaime a uma velocidade média de 12 km/h e o amigo a 18 km/h. Passado quanto tempo se encontram e a que distância da casa do Jaime?



- 13** Classifica as afirmações seguintes como verdadeiras ou falsas.
- A.** Se duas retas têm a mesma ordenada na origem, o sistema definido pelas suas equações é sempre possível e determinado.
  - B.** Os gráficos de duas funções de proporcionalidade direta, com constantes de proporcionalidade diferentes, correspondem a um sistema possível e indeterminado.
- 14** No referencial cartesiano à direita estão representadas graficamente duas funções afins.
- 14.1** Determina a expressão algébrica de cada uma das funções.
  - 14.2** Escreve o sistema de equações formado pela conjunção das duas expressões algébricas.
  - 14.3** Resolve o sistema de equações.
  - 14.4** Quais são as coordenadas do ponto de interseção das duas retas?
  - 14.5** Indica uma expressão algébrica de uma função afim que, juntamente com a expressão algébrica representada em II, forme um sistema de equações impossível.



- 15** Resolve em ordem a  $x$  a equação  $6x^2 = ax$ , em que  $a$  é um número real.
- 16** Um quadrado de lado  $x$  tem perímetro  $p$  e área  $a$  ( $p > 0$  e  $a > 0$ ).
- 16.1** Escreve uma igualdade que relacione  $x$  e  $p$  e outra que relacione  $x$  e  $a$ .
  - 16.2** Resolve cada uma das equações da questão 16.1 em ordem a  $x$  e deduz que  $p^2 = 16a$ .
  - 16.3** Existe algum quadrado de perímetro 20 cm e de área 24 cm<sup>2</sup>?



- 17** A energia cinética é a energia associada ao movimento dos corpos.

A energia cinética,  $E_c$ , expressa-se em joules (J) e pode ser calculada através da equação:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2$$

em que  $m$  é a massa do corpo (em kg) e  $v$  é a velocidade a que o corpo se movimenta (em m/s).

**17.1** Numa prova de 100 metros, a velocidade de um atleta português foi de, aproximadamente, 10 m/s. Determina a energia cinética do atleta, sabendo que pesa 72 kg.

**17.2** Resolve a equação em ordem a  $m$ .

**17.3** Um leopardo, deslocando-se a uma velocidade de 26 m/s, possuía uma energia cinética igual a 27 040 J. Calcula a sua massa.

**17.4** Resolve a equação em ordem a  $v$ .

**17.5** Uma moto pesa 135,2 kg. Qual deve ser a sua velocidade para que tenha a mesma energia cinética que o leopardo?

- 18** O Índice de Massa Corporal (IMC) é aceite como padrão de medida internacional para identificar o grau de obesidade de uma pessoa adulta. O IMC tem em consideração o peso (em kg) e a altura (em metros). Calcula-se através de uma equação:

$$\text{IMC} = \frac{\text{Peso}}{(\text{Altura})^2}$$

Conhecido o valor do IMC, consulta-se a tabela seguinte para saber se a pessoa tem um peso baixo, normal ou se, pelo contrário, tem peso a mais.

| IMC               | Resultados  |
|-------------------|-------------|
| Inferior a 18,5   | Peso baixo  |
| Entre 18,5 e 24,9 | Peso ideal  |
| Entre 25,0 e 29,9 | Peso a mais |
| 30,0 ou mais      | Obesidade   |

**18.1** Comenta a afirmação seguinte:

«Um adulto que meça 1,60 m e pese 63 kg tem peso a mais.»

**18.2** Resolve a equação em ordem ao peso.

**18.3** Calcula o peso (com 1 c. d.) de um adulto cujo IMC é 28,7 e que mede 1,56 m.

**18.4** Resolve a equação em ordem à altura.

**18.5** Calcula a altura (com 2 c. d.) de um adulto cujo IMC é 19,2 e que pesa 65 kg.

### Tarefa

- 19** Comenta a afirmação seguinte: «Um sistema representado graficamente por duas retas com o mesmo declive é possível e indeterminado.»

### Tarefa de investigação

- 20** Considera o sistema de equações: 
$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ mx + y = 10 \end{cases}$$

**20.1** Resolve e classifica o sistema para  $m = 2$ .

**20.2** Utilizando um *software* que permita representar retas (por exemplo, o GeoGebra), investiga um valor de  $m$  para o qual o sistema seja impossível.

## AUTOAVALIAÇÃO

- Identifica claramente, na tua folha de respostas, os números dos itens a que respondes. Apresenta uma única resposta para cada item.
- O teste inclui dois itens de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correta. Não apresentes cálculos nem justificações.

Págs. 74 e 75

- 1** Na maioria dos países da Europa, a temperatura é indicada na escala Celsius (C). No Norte da Europa e nos Estados Unidos, usa-se a escala Fahrenheit (F). A conversão da temperatura expressa em graus Celsius para graus Fahrenheit é feita utilizando a fórmula:

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

Por outro lado, no trabalho científico, também se utiliza a escala Kelvin (K). A conversão da temperatura expressa em graus Celsius para Kelvin faz-se utilizando a fórmula:

$$K = C + 273$$

- 1.1** Num dia 26 de julho, o Diogo e a Sofia foram fazer um piquenique com o Sr. Luís para comemorar o Dia dos Avós. Estavam 41 °C. A quantos graus Fahrenheit correspondem?
- 1.2** Resolve a primeira equação em ordem a C.
- 1.3** A quantos graus Celsius correspondem 77 °F?
- 1.4** Num laboratório, qual é a temperatura, em Kelvin, a que se encontra um líquido que está a 100 °C?
- 1.5** Encontra uma fórmula que permita converter diretamente em graus Fahrenheit uma temperatura expressa em Kelvin.

Pág. 79

- 2** Considera o sistema de equações:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x = 3 + 2y \end{cases}$$

Qual dos pares ordenados seguintes é a solução do sistema?

- A.** (2; 0)      **B.** (-1; -2)      **C.** (1; -1)      **D.** (5; 3)

Pág. 82, 83 e 84

- 3** Faz a interpretação gráfica do sistema de equações  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$  e indica quantas soluções tem.

Pág. 82, 83, 84 e 89

- 4** Considera os seguintes sistemas de equações.

**I.**  $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

**II.**  $\begin{cases} x + \frac{y}{2} = 9 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$

**III.**  $\begin{cases} 3(2 - x) = 4y \\ 4y = -3x + 6 \end{cases}$

- 4.1** Resolve, graficamente, o sistema I, indicando qual é a sua solução.
- 4.2** Resolve algebricamente e identifica o número de soluções dos sistemas II e III.

**5** Escreve um sistema de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas cuja solução seja (0; 2).

Pág. 79

**6** Selecciona a afirmação falsa.

Pág. 82, 83 e 84

- A.** Um sistema possível e indeterminado tem uma infinidade de soluções.
- B.** Num sistema impossível, as retas que representam as equações são coincidentes.
- C.** Num sistema possível e determinado, as retas que representam as equações são concorrentes.
- D.** Um sistema possível e determinado tem uma única solução.

**7** A Marta tem 5,50 € em moedas de 20 cêntimos e de 50 cêntimos. No total tem 17 moedas.

Pág. 89

Considera  $x$  o número de moedas de 20 cêntimos e  $y$  o número de moedas de 50 cêntimos.

Qual dos sistemas seguintes permite determinar quantas moedas de 20 cêntimos e de 50 cêntimos tem a Marta?

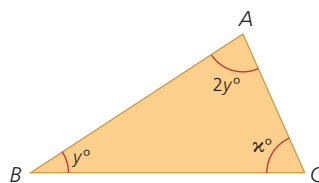
- A.**  $\begin{cases} x + y = 17 \\ 20x - 50y = 55 \end{cases}$
- B.**  $\begin{cases} x + y = 5,5 \\ 0,2x - 0,5y = 17 \end{cases}$
- C.**  $\begin{cases} x + y = 55 \\ 20x - 50y = 17 \end{cases}$
- D.**  $\begin{cases} x + y = 17 \\ 0,2x + 0,5y = 5,5 \end{cases}$

**8** No Natal, o Zito comprou três baralhos de cartas de um jogo de estratégia e dois livros de BD por 71 €, e o Jaime comprou dois baralhos de cartas do mesmo tipo e quatro livros de BD por 82 €. Qual foi o preço de cada baralho de cartas?



Págs. 87, 88 e 89

**9** De um triângulo  $[ABC]$ , além das informações apresentadas na figura, sabe-se que o ângulo  $C$  mede  $40^\circ$  a mais do que o ângulo  $B$ . Qual é a amplitude de cada um dos ângulos do triângulo? (O triângulo não foi construído à escala.)



Págs. 87, 88 e 89

#### GRELHA DE AVALIAÇÃO

| Exercício                     | 1  | 2 | 3  | 4  | 5  | 6 | 7  | 8  | 9  |
|-------------------------------|----|---|----|----|----|---|----|----|----|
| Cotação <sup>1</sup> (pontos) | 20 | 5 | 10 | 20 | 10 | 5 | 10 | 10 | 10 |

<sup>1</sup> Para saberes a cotação de cada alínea, basta dividires a cotação do exercício pelo número de alíneas.

# Estratégias para a resolução de problemas e jogos

## Jogo Apaga dois e escreve um

### Jogos com conceitos matemáticos

Existem diversos tipos de jogos: uns que dependem da sorte (por exemplo, jogos com lançamento de dados), outros que dependem de estratégias ganhadoras, e outros que são problemas matemáticos, cujos resultados se conseguem, à partida, prever.

Exemplos disso são os famosos problemas «Pensa num número...», em que a pessoa que coloca as questões adivinha com facilidade, através da resolução de equações matemáticas, qual foi o número pensado.

Observa o jogo seguinte:

1. Pensa num número.
2. Multiplica-o por 9.
3. Se o número for superior a 9, adiciona os algarismos desse número. Procede da mesma forma até obteres um número menor ou igual a 9.
4. Subtrai 5 ao número obtido.
5. Associa a letra do alfabeto que se encontra nessa posição ( $1 \rightarrow A$ ;  $2 \rightarrow B$ ;  $3 \rightarrow C$ ; etc.).
6. Pensa num país começado por essa letra.
7. Vai à 5.ª letra desse país e pensa num animal que comece por essa letra.

Pensaste na Dinamarca e no macaco?

**NÚMERO DE JOGADORES:** 2.

**MATERIAL:**

- Uma folha de papel, lápis e borracha.

**REGRAS:**

- Escrevem-se os números naturais de 1 a 10 numa folha.
- Escolhe-se, à sorte, o primeiro jogador. Este jogador apaga dois números e, em vez deles, escreve a sua soma subtraída de 1.
- O segundo jogador procede da mesma forma: apaga dois números e, em vez deles, escreve a sua soma subtraída de 1.
- O jogo continua até que exista apenas um número na folha de papel. O jogador que o escrever é o vencedor.

1. Experimenta algumas vezes o jogo.
2. Existe um número fixo de jogadas até ao final do jogo?
3. O que observas quanto ao último número escrito na folha? Formula uma conjectura.
4. Prova a tua conjectura.

## Problema As quatro irmãs\*

Quatro irmãs têm 45 €. Se o dinheiro da primeira fosse aumentado em dois euros e o da segunda diminuído em dois euros; se o da terceira duplicasse e o da quarta se reduzisse a metade, todas as irmãs teriam a mesma importância. Quanto dinheiro tinha cada uma delas?



### EXPLICAÇÃO DA ESTRATÉGIA DO JOGO E RESOLUÇÃO DO PROBLEMA:

No jogo «Apaga dois e escreve um», uma estratégia consiste em, para cada experiência, ir registrando cada jogada e o seu resultado. Assim, é mais fácil comparar e formular uma conjectura.

**ESTRATÉGIA: Registrar todas as informações separadamente e compará-las.**

Em relação ao problema, também é importante começar por registar todas as informações separadamente. Considera-se, então,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $w$  o dinheiro de cada uma das quatro irmãs, respetivamente:

| Linguagem corrente                                        | Linguagem matemática               |
|-----------------------------------------------------------|------------------------------------|
| As quatro irmãs têm 45 €.                                 | $x + y + z + w = 45$               |
| Se o dinheiro da primeira fosse aumentado em dois euros e | $x + 2$                            |
| o da segunda diminuído em dois euros;                     | $y - 2$                            |
| se o da terceira duplicasse e                             | $2z$                               |
| o da quarta se reduzisse a metade,                        | $\frac{w}{2}$                      |
| todas as irmãs teriam a mesma importância.                | $x + 2 = y - 2 = 2z = \frac{w}{2}$ |

Da última expressão, pode deduzir-se que:

- $x + 2 = y - 2$
- $x + 2 = 2z$
- $x + 2 = \frac{w}{2}$

Resolvendo cada uma das equações literais em ordem a  $y$ ,  $z$  e  $w$ , tem-se:

- $x + 2 = y - 2 \Leftrightarrow y = x + 4$
- $x + 2 = 2z \Leftrightarrow z = \frac{x + 2}{2}$
- $x + 2 = \frac{w}{2} \Leftrightarrow w = 2x + 4$

Substituindo cada variável na equação  $x + y + z + w = 45$ , obtém-se:

$$\Leftrightarrow x + x + 4 + \frac{x + 2}{2} + 2x + 4 = 45 \Leftrightarrow 2x + 2x + 8 + x + 2 + 4x + 8 = 90 \Leftrightarrow 9x = 72 \Leftrightarrow x = \frac{72}{9} \Leftrightarrow x = 8$$

**RESPOSTA:** As quatro irmãs tinham 8 €, 12 €, 5 € e 20 €, respetivamente.

ESTE PROBLEMA PODE SER ESCRITO COMO UM SISTEMA DE QUATRO EQUAÇÕES A QUATRO INCÓGNITAS!



$$\begin{cases} x + y + z + w = 45 \\ y = x + 4 \\ z = \frac{x + 2}{2} \\ w = 2x + 4 \end{cases}$$

\* Problema adaptado do livro de PERELMAN, Y. I., *Álgebra Recreativa*, Editora MIR, 1989.

## Outros métodos para resolver sistemas de equações

### 1. Método da adição ordenada ou método da redução

Este método é útil quando, ao escrever o sistema na forma canónica, os coeficientes dos termos de uma das incógnitas são simétricos (por exemplo,  $+5x$  e  $-5x$ ).

- Exemplo 1: Os coeficientes da incógnita  $y$  são simétricos:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -x + 3y = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline x = 5 \end{array}$$

Adicionando as duas equações, obtém-se o valor de  $x$ . Depois, basta substituir  $x$  por 5 em qualquer uma das equações para obter o valor de  $y$ :  $-5 + 3y = 1 \Leftrightarrow 3y = 1 + 5 \Leftrightarrow y = \frac{6}{3} \Leftrightarrow y = 2$ .  
A solução do sistema é  $(5; 2)$ .

Caso não existam termos simétricos, multiplicam-se todos os termos de uma das equações por um mesmo número diferente de zero, para que surjam termos simétricos.

- Exemplo 2:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4y = -6 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad \text{Multiplicando todos os termos por } -2.$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline -3y = -5 \Leftrightarrow y = \frac{5}{3} \end{array}$$

Substituindo  $y$  por  $\frac{5}{3}$  numa das equações, obtém-se  $x = -\frac{1}{3}$ . A solução do sistema é  $(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3})$ .

### Sugestão de trabalho

Resolve, pelo método da adição ordenada, os sistemas de equações seguintes:

a)  $\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 3x - 5y = 10 \\ 4x + 10y = 20 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 5x - 4y = \frac{1}{3} \end{cases}$

### 2. Método da comparação

Este método consiste em resolver cada uma das equações em ordem à mesma incógnita e, de seguida, igualar as expressões.

Exemplo:  $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y = 4 - 2x \\ 3y = 1 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4 - 2x}{-3} \\ y = \frac{1 + x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2x - 4}{3} \\ y = \frac{1 + x}{3} \end{cases}$

Assim:

$$\frac{2x - 4}{3} = \frac{1 + x}{3} \Leftrightarrow 2x - 4 = 1 + x \Leftrightarrow 2x - x = 1 + 4 \Leftrightarrow x = 5$$

Substituindo  $x$  por 5, numa das equações obtém-se  $y = 2$ . A solução do sistema é  $(5; 2)$ .

## Resolução de sistemas utilizando a folha de cálculo (Excel)

Para resolver graficamente o sistema do exemplo anterior, começa-se por elaborar tabelas de valores para ambas as equações do sistema, resolvidas em ordem a  $y$ :

a) Em A1, B1, D1 e E1, coloca os títulos das tabelas, como mostra a figura A.

b) Em A2 e D2, coloca os valores que pretendes para a variável  $x$  (basta colocar o primeiro valor, arrastar pelo canto inferior direito da célula e, clicando em , escolher a opção **Preencher série**).

c) Em B2, coloca:  $= (2 \cdot A2 - 4) / 3$  e carrega em Enter. (Se arrastares o canto inferior direito da célula para baixo, verás todos os valores calculados.)

d) Em E2, procede da mesma forma, mas agora para a outra equação. Coloca:  $= (1 + D2) / 3$ .

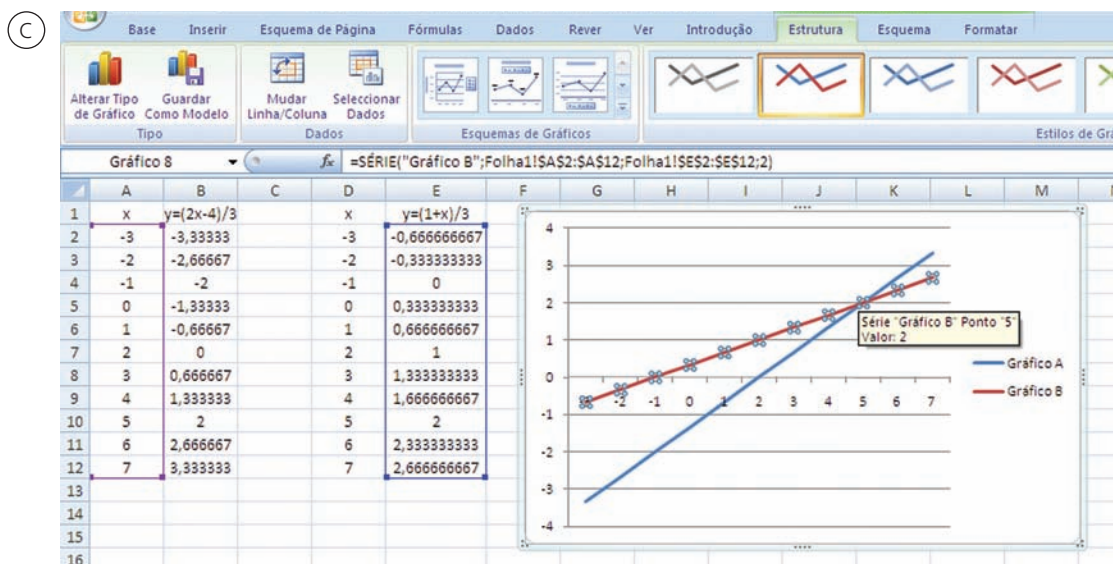
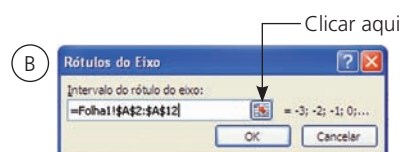
e) Para construíres os gráficos que correspondem às duas equações, seleciona os valores das colunas B e E (com a tecla Ctrl premida) e, na janela **Inserir**, no menu **Gráfico**, escolhe a opção **linha**.

f) Para visualizar o eixo das abcissas com os valores corretos, seleciona o eixo com o botão da direita do rato, escolhe **Selecionar dados** e **Editar rótulo do eixo horizontal** (B). Com o rato, seleciona as células da coluna A onde estão os valores de  $x$  e carrega em OK duas vezes.

g) Quando se aproxima o ponteiro do ponto de interseção, são mostradas as suas coordenadas (solução do sistema). (C)

(A)

|    | A  | B            | C | D  | E            |
|----|----|--------------|---|----|--------------|
| 1  | x  | $y=(2x-4)/3$ |   | x  | $y=(1+x)/3$  |
| 2  | -3 | -3,33333     |   | -3 | -0,666666667 |
| 3  | -2 | -2,66667     |   | -2 | -0,333333333 |
| 4  | -1 | -2           |   | -1 | 0            |
| 5  | 0  | -1,33333     |   | 0  | 0,333333333  |
| 6  | 1  | -0,66667     |   | 1  | 0,666666667  |
| 7  | 2  | 0            |   | 2  | 1            |
| 8  | 3  | 0,66667      |   | 3  | 1,333333333  |
| 9  | 4  | 1,33333      |   | 4  | 1,666666667  |
| 10 | 5  | 2            |   | 5  | 2            |
| 11 | 6  | 2,66667      |   | 6  | 2,333333333  |
| 12 | 7  | 3,33333      |   | 7  | 2,666666667  |
| 13 |    |              |   |    |              |





# ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS



Atividades iniciais ..... 105

## **8.1** Medidas de localização ..... 106

Extremos e quartis

Diagramas de extremos e quartis

Verificar a aprendizagem ..... 111

## **8.2** Medidas de dispersão ..... 114

Amplitude

Amplitude interquartis

Verificar a aprendizagem ..... 116

Síntese ..... 118

Atividades globais ..... 120

Autoavaliação ..... 122

Utilização das TIC ..... 124

Investigar ..... 126

## Atividades iniciais

### Organização e representação de dados

1

A indicação geográfica «maçã de Alcobaça» só pode ser utilizada em maçãs de categoria extra I e II. Estas categorias tanto podem ser atribuídas pelo peso da maçã como pelo seu calibre (diâmetro da maçã).

Registaram-se os seguintes calibres, em milímetros:

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 62 | 51 | 50 | 58 | 52 | 67 | 59 | 58 | 54 | 52 | 64 | 63 | 57 | 54 |
| 65 | 68 | 59 | 68 | 65 | 55 | 51 | 69 | 55 | 54 | 51 | 52 | 65 | 64 |
| 57 | 59 | 53 | 51 | 55 | 60 | 65 | 58 | 64 | 63 | 67 | 52 | 63 | 57 |



- 1.1 Constrói a sequência ordenada dos calibres das maçãs.
- 1.2 Determina a mediana do conjunto dos calibres destas maçãs.
- 1.3 Qual era a percentagem de maçãs de calibre inferior a 60?
- 1.4 Acrescentaram-se 3 calibres de três maçãs a este conjunto de dados. A mediana do conjunto destes 45 calibres de maçãs ficou igual à mediana do conjunto dos calibres das 42 maçãs iniciais. Indica dois exemplos diferentes de como tal pode ocorrer.

### Interpretação de dados

#### Tarefa

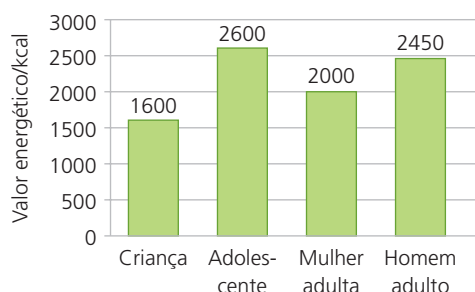
2

A Direção-Geral de Saúde estima que, em 2025, metade da população em Portugal sofra de obesidade, caso não venham a ser tomadas medidas preventivas.

Os gráficos seguintes referem-se ao valor energético médio que a alimentação diária deve fornecer a uma pessoa de acordo com a idade e o sexo (A) e à proporção em que os diferentes grupos de alimentos devem ser ingeridos diariamente (B).

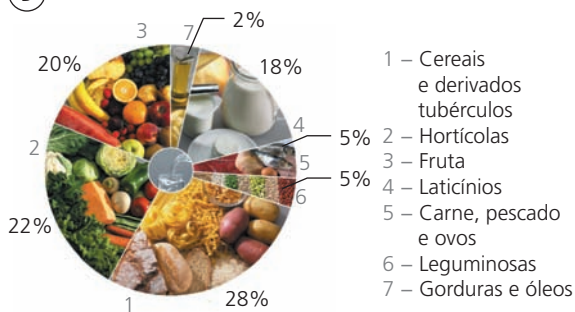
(A)

Valor energético médio diário



(B)

Nova Roda dos Alimentos (2004)



- 2.1 Indica o valor energético médio que a alimentação diária deve fornecer a uma mulher adulta.
- 2.2 Qual é a percentagem de aumento do valor energético fornecido pela alimentação a um adolescente relativamente a uma criança?
- 2.3 Determina o valor energético médio que a alimentação de produtos hortícolas deve fornecer, diariamente, a um adolescente.
- 2.4 A média dos pesos de quatro colegas da Sofia é de 52,5 kg. Juntando o peso da Sofia, a média passa a ser de 51,4 kg. Quanto pesa a Sofia?

## Tarefa 1



Cada bilhete para o cinema custa 7 €.

Um grupo de três amigos quer ir ao cinema e, por isso, resolveram juntar o dinheiro de todos para ver se chegava para pagar os três bilhetes. Verificaram que a soma do dinheiro dos três perfazia 21 €, ou seja, em média cada um tem 7 €.

- 1 Comenta a afirmação:  
Cada um dos amigos pode pagar o seu bilhete.
- 2 Encontra dois exemplos, da distribuição do dinheiro pelos três amigos, que esteja de acordo com a tua resposta à questão anterior.

## Recorda

**Moda** de um conjunto de dados é a categoria ou classe com maior frequência absoluta.

**Média** de um conjunto de dados quantitativos é o quociente entre a soma de todos os dados e o número total de dados.

**Mediana** é um valor que divide ao meio os dados da amostra, estando estes ordenados. Se o número de dados é ímpar, é o valor central; se o número de dados é par, é a média dos dois valores centrais.

## Extremos e quartis

Num estudo estatístico, os dados recolhidos são organizados, representados e, finalmente, interpretados.

O número de horas de utilização da Internet pelo Zito em cinco dias foram:

2 2 4 5 7

Repara que a **moda** de horas de utilização da Internet pelo Zito é **2**, a **média** é **4** e a **mediana** é **4**.

- Comparando o número de horas de utilização da Internet pelo Zito nos cinco dias, verifica-se que o menor valor é 2 e o maior é 7. Os números 2 e 7 denominam-se **extremos**; 2 é o **mínimo** e 7 é o **máximo**.
- A mediana também se chama **2.º quartil** ( $Q_2$ ).
- Se se calcular a mediana do grupo de dados à esquerda de  $Q_2$ , obtém-se o **1.º quartil** ( $Q_1$ ).
- Ao calcular a mediana do grupo de dados à direita de  $Q_2$ , obtém-se o **3.º quartil** ( $Q_3$ ).

Dado um conjunto de  $n$  dados numéricos, o **primeiro quartil** ( $Q_1$ ):

- se  $n$  for um número ímpar, é a mediana do subconjunto de dados de ordem inferior a  $\frac{n+1}{2}$  na sequência ordenada do conjunto inicial de dados;
- se  $n$  for um número par, é a mediana do subconjunto de dados de ordem inferior ou igual a  $\frac{n}{2}$  na sequência ordenada do conjunto inicial de dados.

Dado um conjunto de  $n$  dados numéricos, o **segundo quartil** ( $Q_2$ ) é igual à mediana desse conjunto de dados.

Dado um conjunto de  $n$  dados numéricos, o **terceiro quartil** ( $Q_3$ ):

- se  $n$  for um número ímpar, é a mediana do subconjunto de dados de ordem superior a  $\frac{n+1}{2}$  na sequência ordenada do conjunto inicial de dados;
- se  $n$  for um número par, é a mediana do subconjunto de dados de ordem superior ou igual a  $\frac{n}{2} + 1$  na sequência ordenada do conjunto inicial de dados.

Exemplos:

1. Numa loja de calçado, registaram-se os números dos 11 pares de sapatos vendidos numa manhã:

37, 35, 37, 36, 37, 38, 39, 41, 38 42 42

Pretende-se determinar os valores dos quartis.

Começamos por ordenar os dados:

35, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 39, 41, 42, 42

Como são 11 dados e 11 é ímpar, a ordem de referência para o cálculo dos quartis é a ordem  $\frac{11+1}{2} = 6$ . A mediana é o dado de ordem 6 ( $Q_2 = 38$ ).

35, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 39, 41, 42, 42

Para calcular o primeiro quartil, tem de se determinar a mediana dos dados de ordem menor do que 6:

35, 36, 37, 37, 37

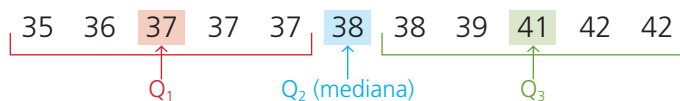
O 1.º quartil é 37.

Para calcular o terceiro quartil, tem de se determinar a mediana dos dados de ordem maior do que 6:

38, 39, 41, 42, 42

O 3.º quartil é 41.

Assim:  $Q_1 = 37$ ,  $Q_2 = 38$  e  $Q_3 = 41$



2. Durante a tarde, foram vendidos 12 pares de sapatos com os seguintes números:

37, 39, 38, 40, 43, 45, 37, 38, 39, 41, 43, 40

Pretende-se determinar os valores dos quartis.

Começamos por ordenar os dados:

37, 37, 38, 38, 39, 39, 40, 40, 41, 43, 43, 45

Como são 12 dados e 12 é par, a ordem de referência para o cálculo dos quartis é a ordem  $\frac{12}{2} = 6$ . A mediana é a média aritmética dos dados de ordem 6 e 7, logo,  $Q_2 = \frac{39 + 40}{2} = 39,5$ .

Para calcular o 1.º quartil, tem de se determinar a mediana dos dados de ordem menor ou igual a 6:

37, 37, 38, 38, 39, 39

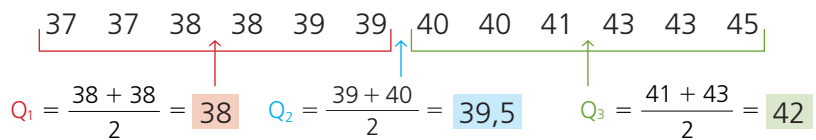
O 1.º quartil é  $\frac{38+38}{2} = 38$ .

Para calcular o 3.º quartil, tem de se determinar a mediana dos dados de ordem maior ou igual a 7:

40, 40, 41, 43, 43, 45

O 3.º quartil é  $\frac{41+43}{2} = 42$ .

Assim:  $Q_1 = 38$ ,  $Q_2 = 39,5$  e  $Q_3 = 42$



**3.** Os alunos da turma da Joana têm de ler um livro, de acordo com o Plano Nacional de Leitura. A professora resolveu questionar os alunos sobre o número de páginas lidas até ao momento:

9, 14, 14, 10, 8, 3, 11, 6, 7, 12, 16, 17, 5, 7, 15, 11, 3

Pretende-se determinar os valores dos quartis.

Começamos por ordenar os dados:

3, 3, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 14, 14, 15, 16, 17

Como são 17 dados e 17 é ímpar, a ordem de referência para o cálculo dos quartis é a ordem  $\frac{17+1}{2} = 9$ . A mediana é 10.

3, 3, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 14, 14, 15, 16, 17

Para calcular o primeiro quartil, tem de se determinar a mediana dos dados de ordem menor do que 9:

3, 3, 5, 6, 7, 7, 8, 9

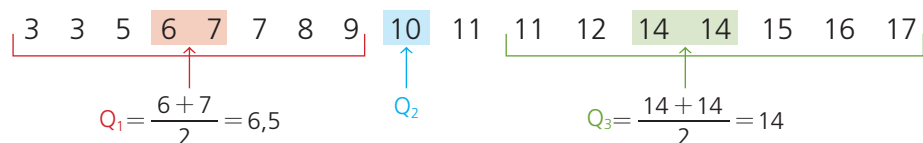
O primeiro quartil é  $\frac{6+7}{2} = 6,5$ .

Para calcular o terceiro quartil, tem de se determinar a mediana dos dados de ordem maior do que 9:

11, 11, 12, 14, 14, 15, 16, 17

O terceiro quartil é  $\frac{14+14}{2} = 14$ .

Assim:  $Q_1 = 6,5$ ,  $Q_2 = 10$  e  $Q_3 = 14$



4. A professora formulou a mesma questão na turma do Diogo e obteve os seguintes resultados:

4, 5, 7, 6, 12, 15, 16, 13, 8, 7, 5, 9, 18, 16, 15, 21, 21, 11, 8, 20, 8, 7

Pretende-se determinar os valores dos quartis.

Começamos por ordenar os dados:

4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 15, 16, 16, 18, 20, 21, 21

Como são 22 dados e 22 é par, a ordem de referência para o cálculo dos quartis é a ordem  $\frac{22}{2} = 11$ . Tem-se  $Q_2 = \frac{9+11}{2} = 10$

Para calcular o 1.º quartil, tem de se determinar a mediana dos dados de ordem menor ou igual a 11:

4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9

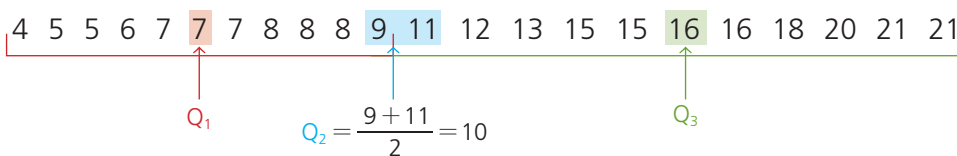
O 1.º quartil é 7.

Para calcular o 3.º quartil, tem de se determinar a mediana dos dados de ordem maior ou igual a 12:

11, 12, 13, 15, 15, 16, 16, 18, 20, 21, 21

O 3.º quartil é 16.

Assim:  $Q_1 = 7$ ,  $Q_2 = 10$  e  $Q_3 = 16$



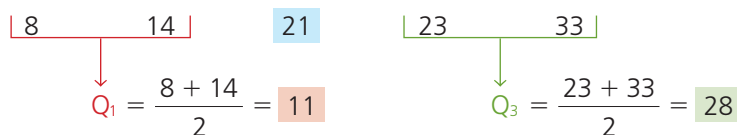
### Exercício resolvido

O Sr. Luís jogou uma chave de cinco números no Euromilhões. Indica uma hipótese para os cinco números escolhidos, sabendo que a mediana dos números é 21, o 1.º quartil é 11 e o 3.º quartil é 28.

#### Resolução:

Se são cinco números e a mediana é 21, isso significa que, escrevendo os números por ordem crescente, o 3.º número é 21.

Os restantes números podem ser, por exemplo:



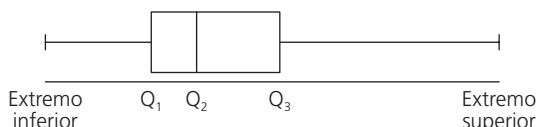
Os números que o Sr. Luís escolheu podem ter sido: 8; 14; 21; 23; 33.

No entanto, este exercício tem muitas soluções. É apenas necessário que a soma dos dois primeiros números seja igual a 22, que a dos dois últimos seja igual a 56 e que ordenando os números de forma crescente o número 21 esteja na posição central.

## ■ Diagramas de extremos e quartis

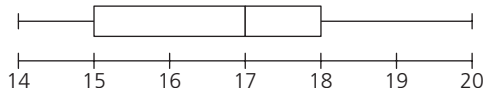
Após determinar os três quartis, pode construir-se um **diagrama de extremos e quartis**. Para tal, é necessário:

1. Assinalar os três quartis num eixo numerado.
2. Traçar um retângulo entre o 1.º e o 3.º quartis.
3. Nesse retângulo, assinalar a mediana (2.º quartil) com uma barra vertical.
4. De cada um dos lados do retângulo, traçar um segmento de reta até aos extremos, conforme se pode ver na figura que se segue:



### Exercício resolvido

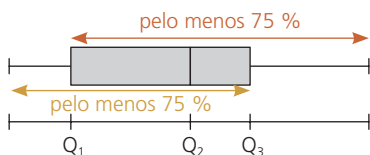
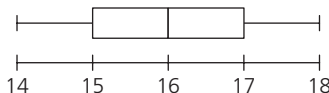
Numa turma de 10.º ano, registaram-se as idades dos 16 alunos e construiu-se o diagrama de extremos e quartis que se segue:



- a) Qual é a idade do aluno mais novo? E do aluno mais velho?
- b) Qual é a mediana das idades?
- c) No final do 1.º período, três alunos saíram da turma. As idades dos alunos, já ordenadas, passaram a ser: 14; 15; 15; 15; 15; 16; 16; 17; 17; 17; 17; 17; 18. Constrói um novo diagrama de extremos e quartis.

### Resolução:

- a) O aluno mais novo tem 14 anos e o mais velho tem 20 anos.
- b) A mediana das idades é 17 anos.
- c) Começa por calcular-se os três quartis:  $Q_1 = 15$ ;  $Q_2 = 16$ ;  $Q_3 = 17$   
O diagrama fica, então:



Considerado um conjunto de dados numéricos, a percentagem de dados maiores ou iguais ao 1.º quartil é, pelo menos, 75 %.

Considerado um conjunto de dados numéricos, a percentagem de dados menores ou iguais ao 3.º quartil é, pelo menos, 75 %.

### O que deves saber

- Compreender e determinar os extremos e os quartis de um conjunto de dados.
- Construir e interpretar diagramas de extremos e quartis.



## Verificar a aprendizagem

### MEDIANA E QUARTIS

- 1 Determina os três quartis ( $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ ) de cada conjunto de dados:  
**a)** 4; 8; 11; 7; 19; 6      **b)** 15; 9; 24; 22; 27; 31; 28      **c)** 1; 6; 2; 7; 9; 13; 0; 7

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei determinar a mediana e os quartis?

### DIAGRAMA DE EXTREMOS E QUARTIS

- 2 A Sofia registou quantos euros recebiam de semanada alguns dos seus amigos.

|   |   |   |   |   |   |    |    |
|---|---|---|---|---|---|----|----|
| 7 | 5 | 4 | 8 | 3 | 4 | 12 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|----|----|

2.1 Constrói um diagrama de extremos e quartis com estes dados.

2.2 Copia e completa a frase que se segue:

«Podemos afirmar que .....% dos amigos da Sofia recebem até 9 € por semana.  
A mediana para a semanada é de ..... A média de semanada é de .....  
e .....% dos alunos recebem menos do que a média.»

**AUTOAVALIAÇÃO** Sei construir e interpretar um diagrama de extremos e quartis?

- 3 As tabelas seguintes mostram os resultados de 23 equipas europeias, na fase de apuramento para o Mundial do Brasil em 2014, dos grupos F, G, H e I.

| Grupo A          |    |   |   |   |    |    |    |
|------------------|----|---|---|---|----|----|----|
|                  | PJ | V | E | D | GM | GS | P  |
| Rússia           | 10 | 7 | 1 | 2 | 20 | 5  | 22 |
| Portugal         | 10 | 6 | 3 | 1 | 20 | 9  | 21 |
| Israel           | 10 | 3 | 5 | 2 | 19 | 14 | 14 |
| Azerbaijão       | 10 | 1 | 6 | 3 | 7  | 11 | 9  |
| Irlanda do Norte | 10 | 1 | 4 | 5 | 9  | 17 | 7  |
| Luxemburgo       | 10 | 1 | 3 | 6 | 7  | 26 | 6  |

| Grupo B            |    |   |   |   |    |    |    |
|--------------------|----|---|---|---|----|----|----|
|                    | PJ | V | E | D | GM | GS | P  |
| Bósnia Herzegovina | 10 | 8 | 1 | 1 | 30 | 6  | 25 |
| Grécia             | 10 | 8 | 1 | 1 | 12 | 4  | 25 |
| Eslováquia         | 10 | 3 | 4 | 3 | 11 | 10 | 13 |
| Lituânia           | 10 | 3 | 2 | 5 | 9  | 11 | 11 |
| Letónia            | 10 | 2 | 2 | 6 | 10 | 20 | 8  |
| Liechtenstein      | 10 | 0 | 2 | 8 | 4  | 25 | 2  |

| Grupo C    |    |   |   |    |    |    |    |
|------------|----|---|---|----|----|----|----|
|            | PJ | V | E | D  | GM | GS | P  |
| Inglaterra | 10 | 6 | 4 | 0  | 31 | 4  | 22 |
| Ucrânia    | 10 | 6 | 3 | 1  | 28 | 4  | 21 |
| Montenegro | 10 | 4 | 3 | 3  | 18 | 17 | 15 |
| Polónia    | 10 | 3 | 4 | 3  | 18 | 12 | 13 |
| Moldávia   | 10 | 3 | 2 | 5  | 12 | 17 | 11 |
| San Marino | 10 | 0 | 0 | 10 | 1  | 54 | 0  |

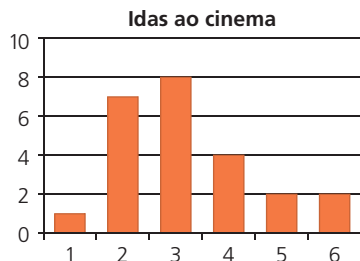
| Grupo D      |    |   |   |   |    |    |    |
|--------------|----|---|---|---|----|----|----|
|              | PJ | V | E | D | GM | GS | P  |
| Espanha      | 8  | 6 | 2 | 0 | 14 | 3  | 20 |
| França       | 8  | 5 | 2 | 1 | 15 | 6  | 17 |
| Finlândia    | 8  | 2 | 3 | 3 | 5  | 9  | 9  |
| Geórgia      | 8  | 1 | 2 | 5 | 3  | 10 | 5  |
| Bielorrússia | 8  | 1 | 1 | 6 | 7  | 16 | 4  |

Fonte: Estatísticas retiradas do site oficial da UEFA

- 3.1 Determina os três quartis,  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ , do conjunto dos pontos das 23 equipas.  
3.2 Comenta a afirmação seguinte: «Pelo menos 75 % das equipas tiveram 7 ou mais pontos.»  
3.3 Apuraram-se diretamente para o Mundial a primeira equipa de cada grupo. Tinham todas um número de pontos igual ou superior ao 3.º quartil?

## Aplicar

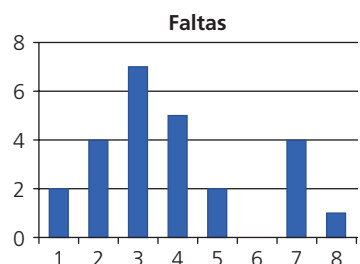
- 4 Considera o gráfico seguinte, referente às idas ao cinema dos alunos da turma do Zito durante o ano de 2013.



**4.1** Determina os extremos e os quartis deste conjunto de dados.

**4.2** Constrói um diagrama de extremos e quartis que represente as idas ao cinema destes alunos.

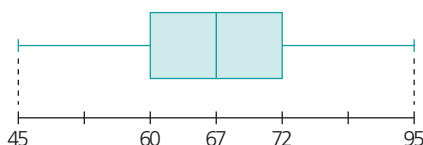
- 5 Considera o gráfico abaixo representado, referente às faltas dos alunos da turma da Sofia durante o mês de dezembro de 2013.



**5.1** Determina os extremos e os quartis deste conjunto de dados.

**5.2** Constrói um diagrama de extremos e quartis que represente as faltas destes alunos.

- 6 A figura representa o diagrama de extremos e quartis da distribuição dos pesos, em quilogramas, de 500 alunos de uma escola.



**6.1** Qual é o peso do(s) aluno(s) mais leve(s)? E o do(s) mais pesado(s)?

**6.2** Indica os quartis da distribuição dos pesos dos alunos da escola.

**6.3** Comenta a afirmação: Há mais alunos com peso compreendido entre 45 kg e 60 kg do que entre 60 kg e 67 kg, porque  $60 - 45 > 67 - 60$ .

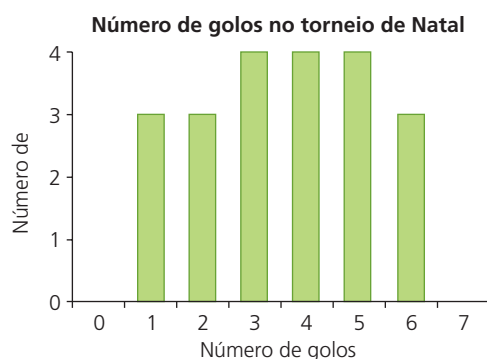
- 7 Registaram-se as alturas dos alunos de uma determinada turma do 8.º ano e obtiveram-se os seguintes dados (em cm):

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 159 | 170 | 168 | 175 | 145 | 147 | 162 | 159 | 175 | 161 |
| 176 | 142 | 172 | 174 | 163 | 165 | 173 | 176 | 177 |     |

**7.1** Determina os extremos do conjunto de dados e interpreta o seu significado no contexto do problema.

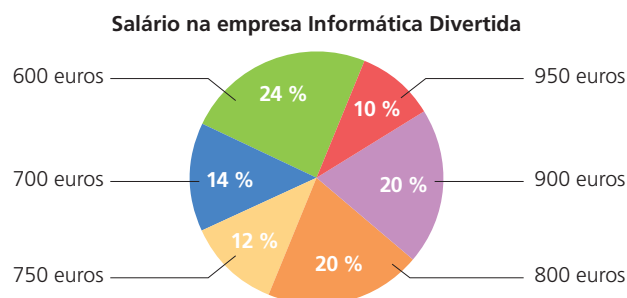
- 7.2** Determina os quartis  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  do conjunto de dados e interpreta o seu significado no contexto do problema.
- 7.3** Existem dois dados com o valor igual a  $Q_1$ ; estando os dados ordenados, com os dois valores iguais consecutivos, qual é o que representa a posição do 1.º quartil?
- 7.4** Constrói o diagrama de extremos e quartis referente a estes dados.
- 7.5** Um aluno com 174 cm pode ser considerado alto nesta turma? Justifica a tua resposta.
- 7.6** Constatou-se que a medição dos alunos foi mal efetuada, tendo-se retirado dois centímetros a cada uma das medições. Qual será a alteração que ocorrerá nos valores dos extremos e dos quartis?

- 8** Observa o gráfico seguinte, relativo aos golos marcados pelas equipas do campeonato de futebol de uma escola durante o torneio de Natal.



- 8.1** Determina os extremos e os quartis relativos a estes dados e interpreta o seu significado no contexto do problema.
- 8.2** Constrói um diagrama de extremos e quartis.

- 9** O gráfico circular abaixo representa os dados referentes aos salários, em euros, dos trabalhadores da empresa Informática Divertida. Ao todo são 100 trabalhadores.



- 9.1** Indica os extremos do conjunto de dados e interpreta-os no contexto da situação.
- 9.2** Determina os quartis do conjunto de dados.
- 9.3** Constrói um diagrama de extremos e quartis.

### Tarefa de investigação

- 10** Utiliza uma folha de cálculo ou uma calculadora gráfica e constrói conjuntos de dados em que pelo menos dois dos elementos, extremos e /ou quartis, são coincidentes quando elaboras os diagramas de extremos e quartis respetivos. Qual é o significado de tais coincidências no contexto dos dados? Procura situações reais em que tal acontece. Podes consultar um *site* com bases de dados sobre Portugal e sobre a Europa: <http://www.pordata.pt/>

## 8.2

# Medidas de dispersão

### Tarefa 2

A MINHA TURMA FOI MELHOR NO ÚLTIMO TESTE DE CIÊNCIAS.

NA MINHA TURMA, OS EXTREMOS FORAM 25 % E 94 %, ENQUANTO NA TUA FORAM 13 % E 91 %.

COMO É QUE SABES?

MAS A MÉDIA DAS NOTAS FOI IGUAL NAS DUAS: 51 %. ESTÃO AO MESMO NÍVEL!

Quem tem razão? Os extremos e a média chegam para concluir se houve ou não uma turma melhor do que a outra?

Nas páginas anteriores, foram abordadas medidas de localização.

Por vezes, estas medidas não chegam para tirar conclusões. Por isso, existem as **medidas de dispersão**, que dão uma ideia de como variam os dados.

Vamos estudar duas, a amplitude e a amplitude interquartis.

### ■ Amplitude

A **amplitude** de uma amostra é a diferença entre os extremos.

$$\text{Amplitude} = \text{máximo} - \text{mínimo}$$



Exemplo:

Num estudo realizado a sete jovens em que se perguntou «Quantos irmãos tens?», as respostas foram: 0; 1; 1; 0; 1; 6; 1.

Como os extremos das respostas são 0 e 6 irmãos, **a amplitude é 6**, porque  $6 - 0 = 6$ .

### ■ Amplitude interquartis

A amplitude é facilmente influenciada por um valor extremo (muito alto ou muito baixo).

Se se quiser mais informações sobre o comportamento da amostra, pode calcular-se a **amplitude interquartis**.

A **amplitude interquartis** é a diferença entre o 3.º e o 1.º quartil.

$$\text{Amplitude interquartis} = Q_3 - Q_1$$

Exemplo:

No exemplo anterior, coloca-se o número de irmãos por ordem crescente:

0 0 1 1 1 6

Então,  $Q_1 = 0$  e  $Q_3 = 1$ .

Logo, a amplitude interquartis é  $Q_3 - Q_1 = 1 - 0 = 1$ .

A AMPLITUDE INTERQUARTIS NÃO SE DEIXA INFLUENCIAR POR VALORES EXTREMOS!



### Exercício resolvido

Na escola do Diogo, todos os anos existe um Quadro de Honra com os três melhores alunos de cada ano de escolaridade, que são os que tiveram a melhor média de notas no 3.º período.

Observa as notas, já ordenadas, dos alunos do 8.º ano que ficaram no Quadro de Honra:

|           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Maria     | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Carolina  | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Guilherme | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

- a) Calcula a média, a mediana, a amplitude e a amplitude interquartis das notas de cada aluno.
- b) Quem fica em terceiro lugar? Dá uma sugestão para o desempate dos dois alunos com a mesma média. Justifica a tua resposta.

#### Resolução:

- a) A média de cada aluno é:

$$\text{Maria: } \frac{5 \times 4 + 6 \times 5}{11} \approx 4,55$$

$$\text{Carolina: } \frac{3 + 2 \times 4 + 8 \times 5}{11} \approx 4,64$$

$$\text{Guilherme: } \frac{2 \times 3 + 9 \times 5}{11} \approx 4,64$$

A mediana é igual a 5 nos três casos.

A amplitude é:

$$\text{Maria: } 5 - 4 = 1;$$

$$\text{Carolina: } 5 - 3 = 2;$$

$$\text{Guilherme: } 5 - 3 = 2.$$

A amplitude interquartis é:

$$\text{Maria: } 5 - 4 = 1;$$

$$\text{Carolina: } 5 - 4 = 1;$$

$$\text{Guilherme: } 5 - 5 = 0.$$

- b) A Maria fica em terceiro lugar, pois tem a média mais baixa. Para desempatar os alunos que têm a mesma média, poderíamos escolher o que tem a menor amplitude, mas assim a Carolina e o Guilherme ficariam empatados. Escolhendo o que tem a menor amplitude interquartis, o vencedor é o Guilherme.



Entre o 1.º e o 3.º quartis encontram-se aproximadamente 50 % dos dados.

Neste caso, quanto menor é a amplitude interquartis, mais **regular** é o aluno.

### O que deves saber

- Compreender e determinar a amplitude e a amplitude interquartis de um conjunto de dados.

## Verificar a aprendizagem

### AMPLITUDE

1 Para cada conjunto de dados, calcula a amplitude.

- a) 3; 5; 4; 6; 3; 4; 4; 6; 7
- b) 3; 5; 4; 6; 3; 4; 4; 6; 70
- c) 2; 2; 1; 1; 0; 0; 2; 2; 1

### AUTOAVALIAÇÃO Compreendo e sei determinar a amplitude?

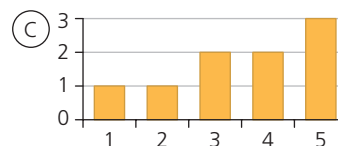
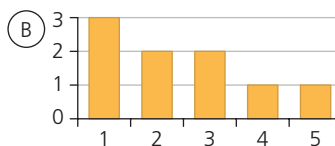
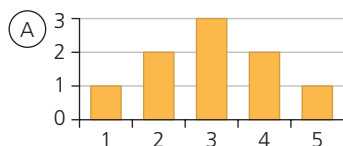
### AMPLITUDE INTERQUARTIS

2 Considera a tabela ao lado e responde às questões:

- 2.1 Qual é a amplitude?
- 2.2 Qual é o número total de dados recolhidos neste estudo?
- 2.3 Determina os três quartis:  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ .
- 2.4 Qual é a amplitude interquartis?

| Idade da 1.ª ida ao cinema | Frequência absoluta |
|----------------------------|---------------------|
| 4                          | 7                   |
| 6                          | 12                  |
| 10                         | 8                   |
| 12                         | 5                   |

3 Observa os gráficos seguintes, sobre três estudos de algumas notas de três alunos do 8.º ano no final do 3.º período.



- 3.1 Refere se o número total de dados é o mesmo nos três estudos.
- 3.2 Para cada gráfico, escreve os dados por ordem crescente.
- 3.3 Determina os três quartis em cada um dos casos.
- 3.4 Completa a tabela seguinte.

| Medida de dispersão    | Estudo A | Estudo B | Estudo C |
|------------------------|----------|----------|----------|
| $Q_1$                  |          |          |          |
| $Q_2$                  |          |          |          |
| $Q_3$                  |          |          |          |
| Amplitude              |          |          |          |
| Amplitude interquartis |          |          |          |

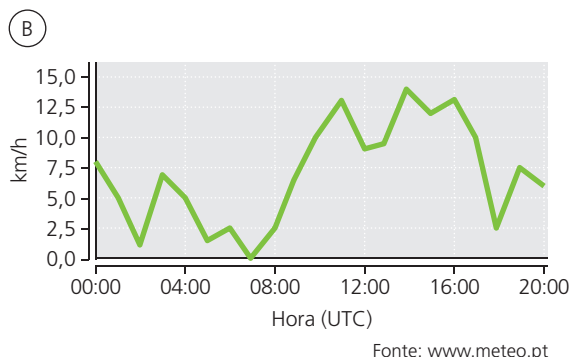
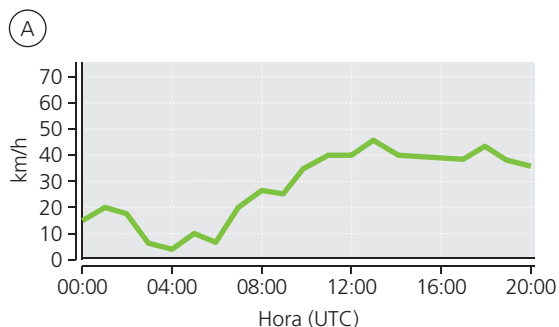
3.5 Com base no que escreveste na tabela, completa as frases seguintes usando as palavras: «superior», «inferior» e «igual».

O 3.º quartil do estudo C é ..... ao 3.º quartil dos outros estudos. Os três estudos têm ..... amplitude. A amplitude interquartis do estudo A é ..... à do estudo B.

### AUTOAVALIAÇÃO Compreendo e sei determinar a amplitude interquartis?

## Aplicar

- 4 Os gráficos em linha que se seguem representam a intensidade do vento, em km/h, entre as 00:00h e as 20:00h do dia 27 de março de 2009 em duas localidades portuguesas: Sagres (A) e Monção (B).



4.1 Em qual das localidades houve uma maior intensidade do vento? Justifica a tua resposta.

4.2 Qual é, aproximadamente, a amplitude da intensidade do vento em cada uma das localidades?

- 5 Na escola da Sofia, todos os meses, exceto em julho e agosto, é editado um jornal escolar há já alguns anos. O número de exemplares vendidos por mês, em 2008 e em 2009, foi registado num diagrama de caule-e-folhas (bilateral).

| 2008 |   |   |   |   | 2009 |   |   |   |  |
|------|---|---|---|---|------|---|---|---|--|
| 8    | 7 | 5 | 3 | 6 | 8    |   |   |   |  |
|      | 6 | 4 | 2 | 7 | 6    | 8 |   |   |  |
|      |   | 4 | 2 | 8 | 0    | 4 | 6 | 6 |  |
|      |   |   | 3 | 9 | 3    | 5 | 8 |   |  |

5.1 Calcula a amplitude e a amplitude interquartis do número de jornais vendidos em cada ano.

5.2 As medidas de dispersão calculadas na questão anterior são suficientes para concluir qual foi o ano com mais vendas?

5.3 Calcula o número médio de jornais vendidos (por mês) em cada ano. O que concluis?

- 6 Um amigo do Diogo é federado em natação. Um dia, o seu treinador registou no computador os tempos gastos, em segundos, nos primeiros 50 metros de mariposa:

| Tempo/segundos |    |    |    |     |    |    |    |    |    |
|----------------|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|
| 42             | 50 | 39 | 46 | 511 | 49 | 43 | 41 | 38 | 42 |

6.1 Determina a média e a mediana dos tempos.

6.2 Calcula a amplitude e a amplitude interquartis.

6.3 Tanto em 6.1 como em 6.2 existe uma grande diferença entre a primeira medida e a segunda. A que se deve esta diferença?

6.4 O treinador resolveu ignorar o valor 511 por achar que fora um erro de registo. Resolve novamente as questões 6.1 e 6.2 sem este valor e explica o que sucede.





## Síntese

### Medidas de localização

Considerem-se os pesos de 12 alunos em quilogramas: 36, 38, 39, 42, 39, 43, 45, 45, 42, 58, 68, 45

A **moda** de um conjunto de dados é a categoria ou classe com maior frequência absoluta. No exemplo anterior, a moda dos pesos é **45 kg**.

A **média** é o quociente entre a soma de todos os dados e o número total de dados.

**Exemplo:** a média dos pesos é de 45 kg porque  $\frac{36 + 38 + 2 \times 39 + 2 \times 42 + 43 + 3 \times 45 + 58 + 68}{12} = 45$ .

A **mediana** é um valor que divide ao meio os dados da amostra, estando estes ordenados. Se o número de dados é ímpar, é o valor do meio; se o número de dados é par, é a média dos dois elementos do meio.

Ao maior e ao menor valor da amostra (36 e 68) chamamos **extremos**; 36 é o mínimo e 68 é o máximo.

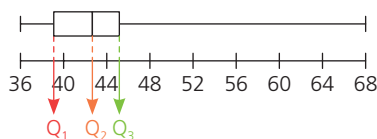
$Q_2$  coincide com a mediana.  $Q_1$  e  $Q_3$  determinam-se calculando as medianas da parte à esquerda da mediana e da parte à direita da mediana, respetivamente.

**Exemplo:** 36 38 39 39 42 42 43 45 45 45 58 68

$Q_1 = 39$     $Q_2 = 42,5$     $Q_3 = 45$

### Diagrama de extremos e quartis

Os dados podem ser representados em diagramas de extremos e quartis:



A percentagem de dados numéricos maiores ou iguais ao primeiro quartil é, pelo menos, 75 %.

A percentagem de dados numéricos menores ou iguais ao terceiro quartil é, pelo menos, 75 %.

### Medidas de dispersão

Com os extremos e com os dois quartis de ordem ímpar definem-se duas medidas de dispersão:

a **amplitude** e a **amplitude interquartil**.

A **amplitude** é a diferença entre o maior valor e o menor valor.

**Exemplo:** a amplitude é  $68 - 36 = 32$ .

A **amplitude interquartil** é a diferença entre o 3.º quartil e o 1.º quartil. No exemplo, é  $45 - 39 = 6$ .

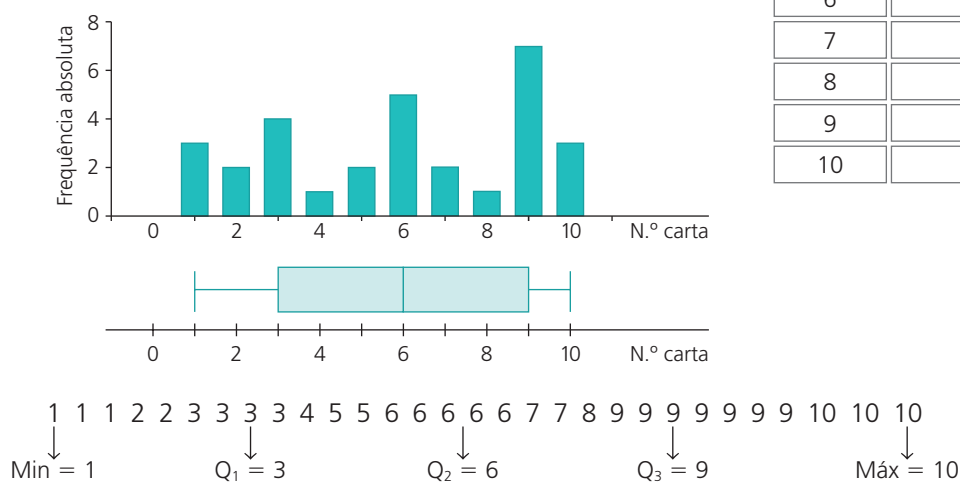
## Problemas envolvendo gráficos diversos e diagramas de extremos e quartis

Deves resolver problemas utilizando gráficos diversos e diagramas de extremos e quartis, sabendo obter a informação contida em cada gráfico ou suporte e apresentá-la sob a forma de diagrama de extremos e quartis.

Exemplos de gráficos estatísticos e sua relação com os diagramas de extremos e quartis:

Número de cartas repetidas de um baralho com 10 cartas de Pokémon.

| N.º carta | Freq. absoluta |
|-----------|----------------|
| 1         | 3              |
| 2         | 2              |
| 3         | 4              |
| 4         | 1              |
| 5         | 2              |
| 6         | 5              |
| 7         | 2              |
| 8         | 1              |
| 9         | 7              |
| 10        | 3              |



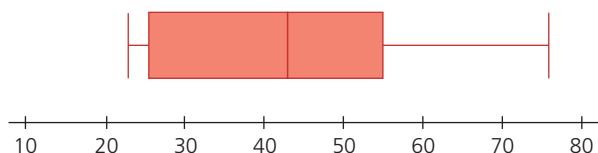
Pesos em quilogramas de um grupo de 25 escuteiros.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |                           |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---------------------------|
| 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 9 | Chave: 3   1 significa 31 |
| 3 | 0 | 0 | 5 | 7 |   |   |   |   |                           |
| 4 | 3 | 5 | 5 | 7 | 8 |   |   |   |                           |
| 5 | 3 | 4 | 6 | 6 | 8 | 9 |   |   |                           |
| 6 | 7 |   |   |   |   |   |   |   |                           |
| 7 | 6 |   |   |   |   |   |   |   |                           |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |                           |

Min = 23

$$Q_1 = \frac{25 + 26}{2} = 25,5; Q_2 = 43 \text{ (13.º dado)}; Q_3 = \frac{54 + 56}{2} = 55$$

Máx = 76



## Atividades globais

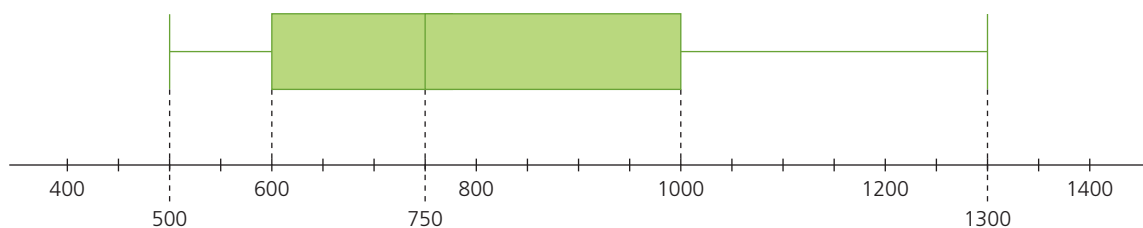
### QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

Das quatro alternativas, escolha a única opção correta.

- 1** O Jaime esteve a organizar as suas cartas de Pokémon do tipo dragão, elétrico e fada. Colocou as 755 cartas daquele tipo numa caixa, numerando-as, depois de as organizar por tipos, de 1 a 755. Primeiro as do tipo dragão, depois as do tipo elétrico e, por último, as do tipo fada. O último número atribuído às cartas tipo dragão corresponde ao 1.º quartil do conjunto dos dados e o primeiro atribuído a uma carta do tipo fada corresponde ao 3.º quartil.
- 1.1** O número de cartas do tipo dragão é:
- A.** 378                      **C.** 576  
**B.** 189                      **D.** 250
- 1.2** O primeiro número atribuído às cartas do tipo fada é:
- A.** 378                      **C.** 566  
**B.** 189                      **D.** 75
- 1.3** Qual é a percentagem aproximada de cartas do tipo elétrico?
- A.** 25 %                      **C.** 75 %  
**B.** 50 %                      **D.** 80 %
- 2** Considera um conjunto de 31 dados, todos números inteiros diferentes, em que se determinou o mínimo, o máximo e os três quartis. Os resultados foram enviados em quatro mensagens eletrónicas, mas houve incorreções ao escrever os valores em três deles. Qual dos seguintes conjuntos de valores transmitidos poderá estar correto?
- A.** Mínimo = 2;  $Q_1 = 24$ ;  $Q_2 = 37$ ;  $Q_3 = 37$  e máximo = 100  
**B.** Mínimo = 24;  $Q_1 = 2$ ;  $Q_2 = 37$ ;  $Q_3 = 48$  e máximo = 100  
**C.** Mínimo = 4;  $Q_1 = 24$ ;  $Q_2 = 37$ ;  $Q_3 = 38$  e máximo = 100  
**D.** Mínimo = 2;  $Q_1 = 24$ ;  $Q_2 = 37$ ;  $Q_3 = 48$  e máximo = 100
- 3** Num certo conjunto de dados, o maior valor é 35 e a amplitude é 19. Qual é o valor mais baixo nesse conjunto de dados?
- A.** 54                      **C.** 16  
**B.** 19                      **D.** 2
- 4** Selecciona a afirmação falsa.
- A.** O valor mínimo é sempre diferente do 1.º quartil.  
**B.** O 1.º quartil pode ser igual à mediana.  
**C.** O 2.º quartil coincide com a mediana.  
**D.** A percentagem de dados menores ou iguais ao 3.º quartil é pelo menos 75 %.
- 5** Num conjunto de dados, a amplitude interquartis é 12, o 1.º quartil é 5 e a mediana é 9. Qual poderá ser o valor do 3.º quartil?
- A.** 14                      **C.** 21  
**B.** 17                      **D.** 75

## EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

- 6** Numa empresa de recolha e reciclagem de resíduos perigosos, trabalham 25 trabalhadores. O diagrama mostra a distribuição dos salários, em euros, desses trabalhadores:



- 6.1** Qual é a população em estudo?
- 6.2** Indica os extremos do conjunto de dados.
- 6.3** Indica as medidas de localização que podes observar neste diagrama.
- 6.4** Que medidas de dispersão podes obter com a informação deste diagrama? Determina-as.
- 6.5** Comenta a afirmação de um trabalhador da empresa:  
«A amplitude dos salários é grande e pelo menos 75 % dos trabalhadores não recebe mais do que 1000 €.»
- 7** A distribuição do número de *e-mails* enviados pelos funcionários da empresa Só-digital, durante o mês de dezembro, está representado na tabela de frequências seguinte:

| Número de <i>e-mails</i> por funcionário | Frequência absoluta |
|------------------------------------------|---------------------|
| 0                                        | 3                   |
| 5                                        | 10                  |
| 10                                       | 7                   |
| 15                                       | 5                   |
| 20                                       | 8                   |
| 25                                       | 4                   |
| 30                                       | 8                   |

- 7.1** Qual é a amplitude desta distribuição?
- 7.2** Determina os quartis da distribuição.
- 7.3** Qual é a amplitude interquartis do conjunto de dados?
- 7.4** Constrói um diagrama de extremos e quartis que represente o conjunto de dados.
- 7.5** O critério de sucesso da empresa desta empresa é:  
«Pelo menos 25 % dos funcionários envia 25 *e-mails* num mês»  
A empresa atingiu o sucesso neste mês de dezembro? Justifica a tua resposta.

Págs. 106 e 114

Pág. 114

Págs. 106, 110 e 114

Págs. 106, 110 e 114

## AUTOAVALIAÇÃO

EM CADA UMA DAS TRÊS QUESTÕES SEGUINTE,  
ESCOLHE A OPÇÃO CORRETA.

- 1** Num estudo realizado, num hospital central de uma grande cidade, sobre o tempo de espera para cada utente ser atendido, que incidiu sobre 1500 casos, verificou-se que:

- o tempo de espera varia entre as zero horas e as nove horas.
- cerca de 25 % dos utentes são atendidos em menos de duas horas.
- cerca de 25 % dos utentes são atendidos num tempo superior a seis horas.

**1.1** A amplitude interquartis do conjunto destes dados é cerca de:

- A.** 2                                      **C.** 4  
**B.** 3                                      **D.** 6

**1.2** O número de utentes, neste estudo, que são atendidos em menos de seis horas é aproximadamente:

- A.** 750                                      **C.** 1475  
**B.** 1125                                      **D.** 1500

- 2** Em qual dos conjuntos de dados que se seguem a amplitude interquartis é maior?

- A.** 5; 11; 12; 100; 2; 12; 17                                      **C.** 17; 28; 44; 31; 50; 49  
**B.** 25; 13; 18; 15; 26; 20                                      **D.** 2; 2; 2; 5; 8; 8; 8

APRESENTA TODOS OS CÁLCULOS QUE TIVERES DE EFETUAR.

- 3** Numa aula de Estatística, registou-se num diagrama de caule-e-folhas, o número de jogos que cada um dos alunos tinha no seu telemóvel.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 8 | 9 | 9 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 4 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 2 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

- 3.1** Determina a amplitude do conjunto de dados.  
**3.2** Determina o 1.º quartil do conjunto de dados  
**3.3** Qual é a mediana deste conjunto de dados?  
**3.4** O 3.º quartil é um valor do conjunto destes dados? Explica porquê.  
**3.5** Constrói um diagrama de extremos e quartis.  
**3.6** Qual é a amplitude interquartis do conjunto de dados?

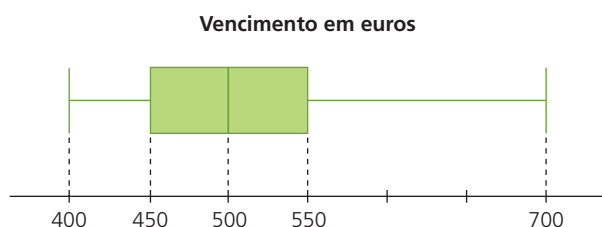
- 4** Após o lançamento de um jogo para uma consola, uma empresa de compras *online* registou os pedidos de aquisição diários durante 20 dias, que foram os seguintes:

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 14 | 18 | 20 | 24 | 37 | 13 | 24 | 28 | 38 | 10 | 44 | 18 | 23 | 35 | 30 | 22 | 37 | 32 | 41 | 39 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

- 4.1** Qual é a amplitude do conjunto destes dados?  
**4.2** Determina os quartis do conjunto de dados.  
**4.3** Constrói um diagrama de extremos e quartis do conjunto de dados.

- 4.4** Qual é a amplitude interquartis?
- 4.5** Considerando os três quartis só o 3.º é um valor da distribuição. Explica porquê.
- 4.6** Representa os dados por meio de um diagrama de caule-e-folhas. Qual é a vantagem desta representação, neste caso, em comparação com o diagrama de extremos e quartis?

- 5** Um gestor de uma empresa, confrontado com a contestação dos seus trabalhadores e dos sindicatos, apresentou o gráfico em baixo e disse o seguinte: «Pelo gráfico, conclui-se que tenho aproximadamente o dobro das pessoas a ganhar mais do que 500 €. Assim, a contestação não tem razão de existir.» Consideras que a afirmação do gestor está correta e de acordo com o gráfico apresentado? Justifica a tua resposta.



- 6** O Zito recebeu, este ano, no seu aniversário, dez prendas em dinheiro. As primeiras sete ofertas foram as seguintes quantidades em euros:

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 12 | 15 | 18 | 20 | 25 | 30 |
|----|----|----|----|----|----|----|

Que quantia recebeu em cada uma das restantes prendas para que os quartis do conjunto dos 10 dados sejam  $Q_1 = 13$ ,  $Q_2 = 19$  e  $Q_3 = 22$ ?

Págs. 106, 110 e 114

Pág. 106

#### GRELHA DE AVALIAÇÃO

| Exercício                     | 1.1 | 1.2 | 2 | 3.1 a 3.4 | 3.5 | 3.6 | 4.1 | 4.2 | 4.3 a 4.5 | 4.6 | 5  | 6  |
|-------------------------------|-----|-----|---|-----------|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|----|----|
| Cotação <sup>1</sup> (pontos) | 4   | 4   | 4 | 16        | 10  | 4   | 10  | 8   | 12        | 8   | 10 | 10 |

<sup>1</sup> Para saberes a cotação de cada alínea, basta divides a cotação do exercício pelo número de alíneas.



SE TENS MENOS DE 50 PONTOS: É MELHOR VOLTARES A ESTUDAR ESTA UNIDADE!

SE TENS ENTRE 50 PONTOS E 69 PONTOS: REVÊ AS PARTES EM QUE ERRASTE E FAZ MAIS ALGUNS EXERCÍCIOS.

SE TENS ENTRE 70 PONTOS E 89 PONTOS: ESTÁS NO BOM CAMINHO.

SE TENS 90 PONTOS OU MAIS: PARABÉNS!

# Utilização das TIC

Pretende-se calcular a mediana, o 1.º quartil e o 3.º quartil e construir o diagrama de extremos e quartis com recurso à calculadora gráfica.

Apresentam-se em seguida os passos para determinar estas medidas de localização recorrendo a dois modelos de calculadoras gráficas, Texas TI-83 Plus e Casio fx-9860GSD.

Fez-se um inquérito a um grupo de jovens sobre o número de filmes visionados na última semana. Os resultados foram os seguintes:

| N.º de filmes visionados | N.º de jovens |
|--------------------------|---------------|
| 0                        | 10            |
| 1                        | 18            |
| 2                        | 12            |
| 3                        | 21            |
| 4                        | 3             |
| 5                        | 1             |

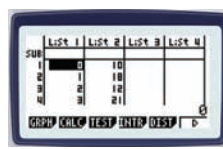
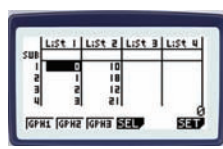
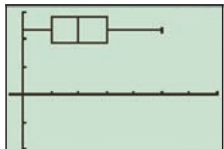
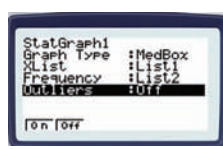
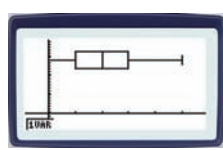
## Calculadora gráfica

Apresentam-se os passos para dois modelos de calculadoras gráficas: TI-83 Plus e Casio fx-9860GSD.

| TI-83 plus                                                                                         |  | Casio fx-9860GSD                                                                                   |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| STAT + 1 EDIT + Enter                                                                              |  | Menu + 2 STAT                                                                                      |  |
| Colocar os valores nas listas; na lista L1, o número de filmes, e na lista L2, o número de jovens. |  | Colocar os valores nas listas: na lista L1, o número de filmes, e na lista L2, o número de jovens. |  |
| STAT > CALC + 1:1-VarStats + Enter + L1, L2                                                        |  | F2: CALC                                                                                           |  |
| Enter +  Determinaram-se os quartis: $Q_1 = 1$ , $Q_2 = 2$ e $Q_3 = 3$                             |  | F6: SET e identificar as listas.                                                                   |  |
| STAT 1<br>Abre a lista para visualizar os números.                                                 |  | EXIT + F1: 1 VAR +  Determinaram-se os quartis: $Q_1 = 1$ , $Q_2 = 2$ e $Q_3 = 3$                  |  |



Para construir o diagrama de extremos e quartis, vamos ativar um dos gráficos estatísticos.

| TI-83 plus                                      |                                                                                   | Casio fx-9860GSD                                                                                                           |                                                                                      |
|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 2nd + STAT PLOT<br>selecionar 1:Plot 1          |  | F1:GRPH                                                                                                                    |   |
| Enter e escolher o tipo de gráfico e as listas. |  | F6: SET                                                                                                                    |   |
| Zoom + 9: ZoomStat +<br>Enter                   |  | Selecionar o tipo<br>de gráfico e as listas.                                                                               |   |
|                                                 |                                                                                   | Exit + F1:GPH1<br>Selecionando SHIFT Trace,<br>e com a tecla direcional,<br>obtem-se os valores dos<br>extremos e quartis. |  |

### Sugestões de trabalho

1. Considera o seguinte conjunto de dados de classificações, em percentagem, dos alunos de duas turmas do 8.º ano, A e B, na disciplina de Matemática:

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A  | 15 | 26 | 38 | 45 | 59 | 58 | 70 | 89 | 92 |
| 58 | 93 | 45 | 12 | 74 | 33 | 45 | 68 | 66 | 54 |
| 52 | 15 | 25 | 36 | 47 | 82 | 98 |    |    |    |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| B  | 45 | 34 | 78 | 56 | 79 | 34 | 27 | 89 | 90 |
| 32 | 24 | 45 | 57 | 87 | 88 | 56 | 64 | 65 | 78 |
| 50 | 67 | 78 | 80 | 90 | 94 | 23 |    |    |    |

Usando recursos tecnológicos, compara os resultados das duas turmas com o auxílio dos quartis, da amplitude, da amplitude interquartis e do diagrama de extremos e quartis, além das outras medidas obtidas na calculadora e que já estudaste nos anos anteriores.

2. Procura nas páginas da Internet conjuntos de dados, do teu interesse, para que possas comparar, como na sugestão de trabalho anterior. Podes utilizar os *sites* indicados na página 127.

## A Estatística ao serviço do Mundo

Efetuem-se diversos estudos em todo o Mundo sobre os mais variados temas. Todos os dias deparamos com notícias de estudos realizados. E se alguns remetem para factos sem grande importância, apenas curiosidades, a maioria reveste-se de grande utilidade: quer seja para o avanço tecnológico ou médico, quer para o conhecimento da economia, dos investimentos, das seguradoras, de aspetos ligados à educação, à saúde, às finanças, aos hábitos de consumo, às condições de vida e do ambiente, etc. A Estatística percorre todas as áreas do saber e em todos os domínios da Ciência são realizados estudos estatísticos.

### Apresentação de trabalhos de projeto

A apresentação dos três trabalhos de projeto descritos a seguir deve fazer-se de duas formas distintas:

- Apresentação oral de um resumo do trabalho, com as principais etapas do seu planeamento, da recolha dos dados e das conclusões tiradas. Esta apresentação poderá ser realizada através de diapositivos utilizando, por exemplo, o PowerPoint. Seria interessante um pequeno vídeo com a fase de planeamento do estudo a desenvolver utilizando, por exemplo, um programa de edição de filme (por exemplo, Windows Movie Maker).
- Apresentação escrita do trabalho, que deverá conter:
  - Capa (com identificação da escola, do tema e dos autores do trabalho);
  - Índice;
  - Introdução: pequeno texto com apresentação do tema, justificando a sua escolha e os objetivos do trabalho;
  - Desenvolvimento do trabalho: o planeamento do estudo, que deve conter o inquérito, caso tenha sido realizado, a recolha dos dados, a organização dos dados, a análise e a interpretação dos dados (estes dois últimos conteúdos foram lecionados nos anos de escolaridade anteriores);
  - Conclusão: breve comentário sobre o trabalho e identificação das dificuldades ou dos resultados que se desviaram do esperado.

### Sugestão de trabalho

#### Crescimento populacional em Portugal e no Mundo

1. Nos últimos anos, o crescimento da população mundial tem sido o maior de sempre.

- Em relação a Portugal, estuda:
  - a) o crescimento populacional;
  - b) a razão entre o número de idosos e o número de jovens.

Na Internet:

- [http://www.ine.pt/xportal/xmain?xpid=INE&xpgid=ine\\_main](http://www.ine.pt/xportal/xmain?xpid=INE&xpgid=ine_main)
- [http://www.pordata.pt/azap\\_runtime/?n=25&themeld=1](http://www.pordata.pt/azap_runtime/?n=25&themeld=1)

#### Crescimento populacional mundial de 1800 a 2054



Fonte: [http://pt.wikipedia.org/Wiki/Crescimento\\_populacional](http://pt.wikipedia.org/Wiki/Crescimento_populacional)

## Sustentabilidade

2. A palavra «sustentabilidade» está na ordem do dia. Muitos são os que falam em sustentabilidade ambiental e em desenvolvimento sustentável.

O equilíbrio entre o progresso, o ambiente, a cultura, o urbano e o rural, bem como a correta utilização dos recursos naturais, são fatores fundamentais para um bom desenvolvimento.

- Estuda a opinião da tua comunidade escolar sobre a sustentabilidade: Saberão o que significa?; Que medidas adotam para a conservação da Natureza?; Que medidas propõem?; etc.

Na Internet:

- <http://www.agrisustentavel.com/doc/cotidiano.html>
- <http://www.CRENEWS.info>



## Desktop e laptop

3. Enquanto os computadores de secretária, ou *desktops*, são usados tipicamente sempre no mesmo local, é cada vez maior o uso de computadores portáteis, vulgarmente designados por *laptops*. (Atualmente, são vendidos, a nível mundial, mais *laptops* do que *desktops*).

Cada um destes tipos de computador tem vantagens em relação ao outro. Os *desktops* são geralmente mais potentes e mais fáceis de atualizar; os *laptops* são muitas vezes mais práticos e consomem geralmente menos energia (um *laptop* pode consumir até 80 % menos do que um *desktop*).

- Averigua qual é o tipo de computador dos teus amigos. Seleciona também outras questões que sejam relevantes, como a capacidade de memória, a capacidade do disco, o sistema operativo utilizado, etc., e elabora um estudo estatístico.

Na Internet:

- [http://www.eu-energystar.org/pt/pt\\_022p.shtml](http://www.eu-energystar.org/pt/pt_022p.shtml)
- <http://www.itposts.net/pt/laptops/desktop-vs-laptop.html>



## Páginas da Internet

- Resumos, atividades e dossiês temáticos sobre Estatística: <http://alea-estp.ine.pt/>
- Estudos e sondagens: [http://www.ine.pt/xportal/xmain?xpid=INE&xpgid=ine\\_main](http://www.ine.pt/xportal/xmain?xpid=INE&xpgid=ine_main) (Instituto Nacional de Estatística); <http://www.marktest.com/wap/default.aspx> (Marktest) htm (Eurobarómetro); [http://stats.uis.unesco.org/unesco/TableView/document.aspx?ReportId=143&IF\\_Language=eng](http://stats.uis.unesco.org/unesco/TableView/document.aspx?ReportId=143&IF_Language=eng) (Unesco)
- Portugal em números: <http://akinumeros.com>
- Elaboração de inquéritos: <http://www.brunoamaral.com/post/10-erros-comuns-na-elaboracao-de-inqueritos/>
- Dados sobre Portugal e a Europa: <http://www.portdata.pt>

# SOLUÇÕES

## 5 GRÁFICOS DE FUNÇÕES AFINS Pág. 4 a 35

### Atividades iniciais

Pág. 5

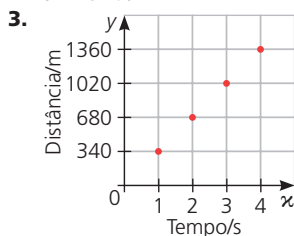
1. C
2. 2.1 A. a)  $D = \{0; 2; 4; 6\}$ ;  
b)  $D' = \{4; 8; 16; 20\}$ ;  
c) 16;  
d) 0  
B. a)  $D = \{0; 2; 4; 6\}$ ;  
b)  $D' = \{1; 2; 3; 4\}$ ;  
c) 3;  
d) 6
- 2.2 a) 10  
b) 9  
c) -13
3. 3.1 45  
3.2 20
4. 4.1  $g$  e  $j$  são lineares;  $h$  é constante; todas são afins.  
4.2 Função  $f$ : o coeficiente de  $x$  é 3 e o termo independente é -2.  
Função  $g$ : o coeficiente de  $x$  é -2 e o termo independente é 0.  
4.3 A soma de funções afins é uma função afim.  
4.4  $2x - \frac{3}{2}$
5. 5.1  $\frac{168}{1,5} = \frac{224}{2} = \frac{336}{3} = 112$   
112 é a constante de proporcionalidade.  
5.2 A distância percorrida pelo comboio numa hora.  
5.3  $d = 112t$   
5.4 560 km

## 5.1 Equação de uma reta não vertical e gráfico de função linear ou afim Pág. 6

### Tarefa 1:

|    |             |     |     |      |      |
|----|-------------|-----|-----|------|------|
| 1. | Tempo/s     | 1   | 2   | 3    | 4    |
|    | Distância/m | 340 | 680 | 1020 | 1360 |

2.  $d = 340t$



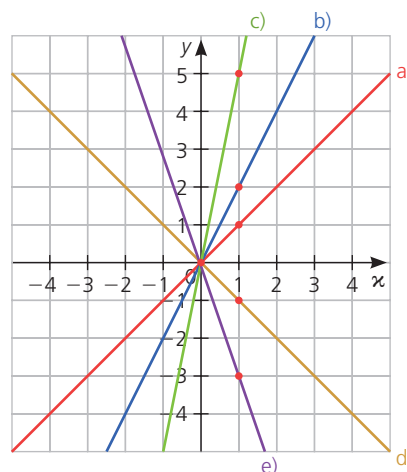
Observa-se que todos os pontos estão sobre uma reta que passa pela origem do referencial.

### Verificar a aprendizagem

Pág. 12

1. A
2. A reta  $r$  representa uma função linear de equação  $y = -0,4x$ .

3.



4. a)  $y = 3x$  b)  $y = 0,5x$  c)  $y = -2x$  d)  $y = -\frac{1}{3}x$

| $x$ | $y = x + 1$ | $(x; y)$  | $x$ | $y = 2x - 3$ | $(x; y)$   |
|-----|-------------|-----------|-----|--------------|------------|
| 0   | $y = 1$     | $A(0; 1)$ | 0   | $y = -3$     | $C(0; -3)$ |
| 2   | $y = 3$     | $B(2; 3)$ | 2   | $y = 1$      | $D(2; 1)$  |

| $x$ | $y = -3x + 5$ | $(x; y)$   | $x$ | $y = 4$ | $(x; y)$  |
|-----|---------------|------------|-----|---------|-----------|
| 0   | $y = 5$       | $E(0; 5)$  | 0   | $y = 4$ | $G(0; 4)$ |
| 2   | $y = -1$      | $F(2; -1)$ | 2   | $y = 4$ | $H(2; 4)$ |

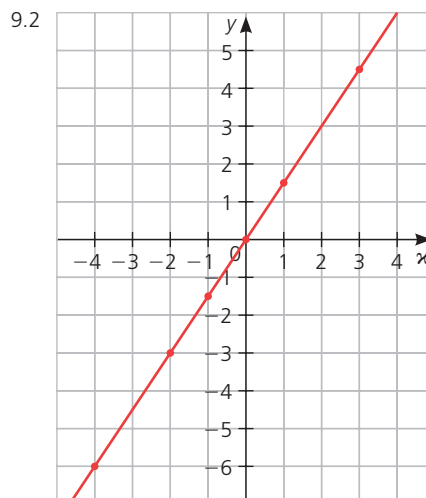
6. É uma reta horizontal que passa por todos os pontos com ordenada  $b$ .
7. a) O gráfico da reta  $b$  obtém-se fazendo uma translação do gráfico da reta  $a$  segundo o vetor  $\vec{OA}$ , em que  $O$  é a origem do referencial e  $A$  é o ponto de coordenadas (0, 4).  
b) O gráfico da reta  $b$  obtém-se fazendo uma translação do gráfico da reta  $a$  segundo o vetor  $\vec{OB}$ , em que  $O$  é a origem do referencial e  $B$  é o ponto de coordenadas (0, 1).

### Aplicar

Pág. 13

8. 8.1  $A(3, 1); B(2, 5); C(-2, 1); D(-4, 2); E(-4, -3)$ .  
8.2  $f(x) = 2,5x$  e  $g(x) = -0,5x$   
8.3 Não, porque não passa pela origem do referencial.

|        |            |    |    |      |   |     |     |
|--------|------------|----|----|------|---|-----|-----|
| 9. 9.1 | $x$        | -4 | -2 | -1   | 0 | 1   | 3   |
|        | $y = f(x)$ | -6 | -3 | -1,5 | 0 | 1,5 | 4,5 |



9.3 Não pertence, porque  $\frac{3}{2} \times 24 \neq 35$ .

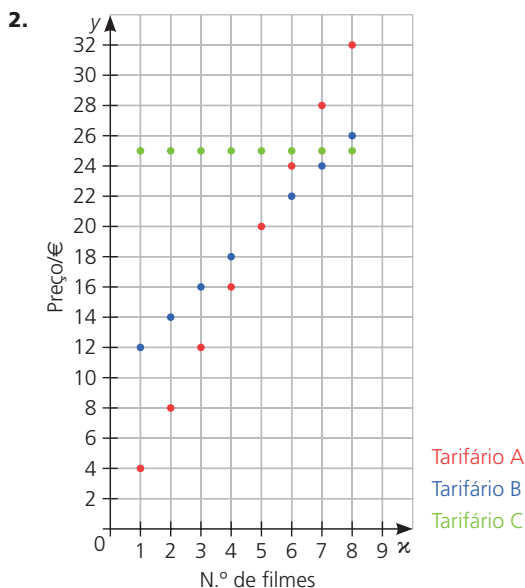
10. Uma rotação de centro na origem do referencial e de amplitude qualquer, sem ser  $180^\circ$  ou  $360^\circ$ , ou uma reflexão em relação a um dos eixos do referencial.
11. Quando  $a$  é positivo, a reta passa pelo  $1.^\circ$  e o  $3.^\circ$  quadrantes; quando  $a$  é negativo, a reta passa pelo  $2.^\circ$  e o  $4.^\circ$  quadrantes. Em ambos os casos, quanto maior é o valor absoluto de  $a$ , maior é a inclinação da reta, isto é, mais próxima está do eixo dos  $yy$ .
12. A — D — E — C — B

## 5.2 Declive e ordenada na origem de uma reta não vertical

Pág. 14

### Tarefa 2:

1. Para quem alugar 4 filmes ou menos, é melhor o tarifário A. Para 5 filmes, os tarifários A e B são igualmente bons. Para 6 ou 7 filmes, é melhor o tarifário B. Para quem quer alugar 8 filmes ou mais, é melhor o tarifário C.



### Verificar a aprendizagem

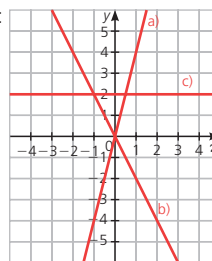
Pág.17

1.

| Função afim<br>( $f(x) = ax + b$ ) | Declive<br>(parâmetro $a$ ) | Sempre que $x$ aumenta<br>1 unidade... |
|------------------------------------|-----------------------------|----------------------------------------|
| $f(x) = x + 1$                     | 1                           | $y$ aumenta 1 unidade                  |
| $f(x) = 2x + 1$                    | 2                           | $y$ aumenta 2 unidades                 |
| $f(x) = 1$                         | 0                           | $y$ mantém-se igual a 1                |
| $f(x) = -x + 1$                    | -1                          | $y$ diminui 1 unidade                  |
| $f(x) = -2x + 1$                   | -2                          | $y$ diminui 2 unidades                 |

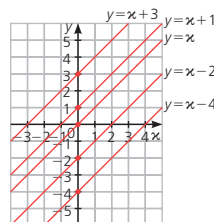
2. O declive está relacionado com a inclinação da reta: sempre que  $x$  aumenta 1 unidade, o declive indica quantas unidades  $y$  aumenta (quando  $a$  é positivo) ou diminui (quando  $a$  é negativo).

3. Por exemplo:



4. São estritamente paralelas.

5. 5.1

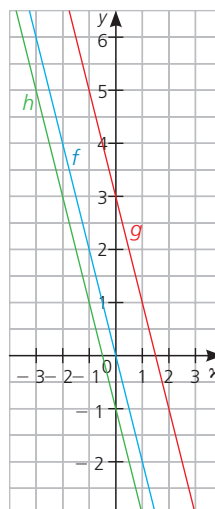


- 5.2 Variar a ordenada na origem faz «subir» ou «descer» a reta.

- 5.3  $b$ ;  $y = ax$

- 5.4 Por exemplo,  $y = x - 7$ .

6. 6.1



- 6.2 As retas são paralelas.

- 6.3 Para  $f(x) = -2x$ , a ordenada na origem é 0 ( $b = 0$ ). Para  $g(x) = -2x + 3$ , a ordenada na origem é 3 ( $b = 3$ ). Para  $h(x) = -2x - 1$ , a ordenada na origem é -1 ( $b = -1$ ).

- 6.4 O gráfico da função  $g(x) = -2x + 3$  obtém-se fazendo uma translação do gráfico de  $f(x) = -2x$  segundo o vetor  $\vec{OA}$ , em que  $O$  é a origem do referencial e  $A$  é o ponto de coordenadas (0, 3).

O gráfico da função  $h(x) = -2x - 1$  obtém-se fazendo uma translação do gráfico de  $f(x) = -2x$  segundo o vetor  $\vec{OB}$ , em que  $O$  é a origem do referencial e  $B$  é o ponto de coordenadas (0, -1).

- 6.5 O gráfico da função  $f(x) = -2x$  obtém-se fazendo uma translação do gráfico da função  $g(x) = -2x + 3$  segundo o vetor  $\vec{AO}$ , em que  $A$  é o ponto de coordenadas (0,3) e  $O$  é a origem do referencial.

7.  $g(x) = x - 3$

8. 8.1 As retas são paralelas.

- 8.2 Têm o mesmo declive.

- 8.3 ... paralelas.

9. É falso, porque as retas verticais não representam funções.

10. A partir de 17 dias.

## Tarefa de investigação

Pág. 18

11. O produto dos declives deve ser igual a  $-1$ .

## 5.3

## Declive de uma reta determinada por dois pontos com abscissas distintas.

Equação de uma reta vertical Pág. 19

## Tarefa 3:

- A taxa fixa é de 3 €.
- $2 - 0$  representa a distância percorrida.  $f(2) - f(0)$  representa a quantia a pagar pelos dois quilómetros de viagem.
  - $6 - 2$  representa a distância percorrida entre os 2 quilómetros e os 6 km de viagem.  $f(6) - f(2)$  representa a variação da quantia a pagar entre os 2 quilómetros e os 6 quilómetros de viagem.
- 0,75
  - 0,75
- O valor obtido é igual ao valor de  $a$ .

## Verificar a aprendizagem

Pág. 22

- $f(x) = 2x + 1$
    - $g(x) = 3x - 2$
    - $h(x) = -x + 3$
    - $i(x) = -2x + 4$
    - $j(x) = 0,5x + 2$
  - $k(x) = -x$
- $y = \frac{3}{2}x + 3$
  - $y = \frac{3}{2}x + 1$
  - $y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$
  - O gráfico da função  $f(x) = \frac{3}{2}x - 1$  obtém-se fazendo uma translação do gráfico da função  $h(x)$  segundo o vetor  $\overrightarrow{BC}$ , em que  $B$  é o ponto de coordenadas  $(0, 3)$  e  $C$  o ponto de coordenadas  $(0, -1)$ .
- $y = 2x + 1$
- Uma reta vertical é constituída pelos pontos com uma mesma abscissa, assim os pontos que determinam uma reta vertical são o  $A(-1, 5)$  e o  $C(-1, -4)$ .
- Para os pontos determinarem uma reta vertical têm de ter a mesma abscissa e isso não acontece, logo os pontos  $A$  e  $B$  determinam uma reta não vertical.
- Reta  $a: x = 1$ ; Reta  $b: x = -3$ ;  
Reta  $c: x = \frac{5}{2}$ ; Reta  $d: x = 0$ .

## Aplicar

Pág. 23

- B
- $y = -x + 3$
  - $y = -3x + 3$
- A reta  $AB$  não é vertical, pois passa por dois pontos com diferentes abscissas, não sendo portanto paralela ao eixo dos  $yy$ , pelo que tem equação da forma  $y = ax + b$ . O declive da reta  $AB$  é 4.
  - $x = 2$
  - $a = 3$

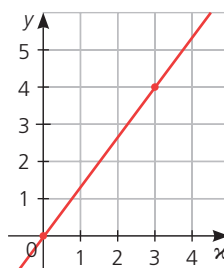
9.4 Como uma reta vertical é constituída pelos pontos com a mesma abscissa, e os pontos  $B$  e  $D$  têm abscissa 5 e 3, respetivamente, a reta  $AD$  não é vertical, logo, não existe nenhum valor de  $a$  para o qual a reta  $AD$  seja vertical.

- $y = x + 2$
  - $y = 2x + 5$
  - $y = -3x - 1$
- $y = 2,5x - 4$
- $y = 2x + 10$
  - 45 minutos.

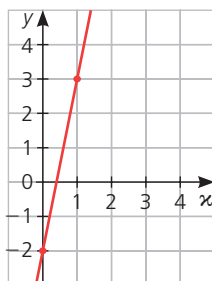
## Atividades globais

Págs. 26 a 29

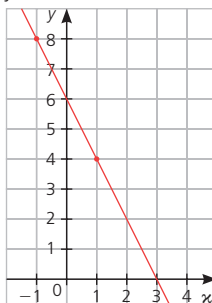
- D
- B
- B
- A
- C
- D
- Não, porque a cada objeto corresponde uma e uma só imagem.
- Não, porque a expressão algébrica não é do tipo  $y = ax + b$ , é  $y = \frac{1}{x}$ .
- 200 km/h
  - $d = 0,3v$
  - 36 m
- $y = 5x$
  - $y = -2x - 1$
  - $y = 5x - 4$
- $y = 3x + 8$
    - $y = -1$
    - $y = 3x$
  - A afirmação é falsa uma vez que as retas não têm o mesmo declive.
- $-\frac{1}{2}$
  - $a = -2; x = -2$
  - A reta  $CE$  não é vertical, pois passa por dois pontos com diferentes abscissas, logo, não existe nenhum valor de  $a$  para o qual a reta  $CE$  seja vertical.
  - $x = a$
- declive:  $\frac{4}{3}$   
 $y = \frac{4}{3}x$



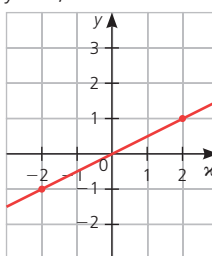
- b) declive: 5  
 $y = 5x - 2$



- c) declive: -2  
 $y = -2x + 6$



- d) declive: 0,5  
 $y = 0,5x$



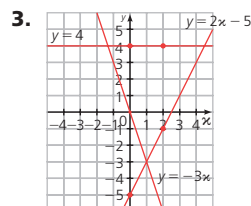
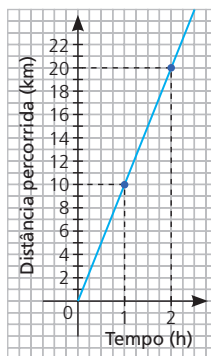
14.  $g(x) = 2x$   
 $h(x) = 2x - 0,5$
15. D
16. 600 metros.
17. 17.1 Aproximadamente 60 km/h, após 1,3 km.  
 17.2 A velocidade manteve-se constante.  
 17.3 0,3 km  
 17.4 B

#### AUTOAVALIAÇÃO

Págs. 30 e 31

1. 1.1  $y = 0,5x$   
 1.2 O declive da reta é 0,5.  
 1.3  $y = 0,5x - 3$   
 1.4  $y = 0,5x + 2$

2.  $y = 10x$ ,  $x \geq 0$ . O gráfico é uma semirreta.



3. a) Não pertence, porque  $-14 \times 12 + 18 \neq -148$ .  
 b) Pertence, porque  $-14 \times (-15) + 18 = 228$ .
5. B
6.  $r$  e  $t$ .  
 $s$  e  $u$ .  
 $s$  e  $v$ .  
 $u$  e  $v$ .
7. 7.1 Ao cuidado do aluno.  
 7.2  $C(-3, 0)$   
 7.3 9 u.a.
8. 8.1 D  
 8.2 Não, porque a função não é linear (a ordenada na origem não é zero).  
 8.3 Inicialmente, o bidão tinha 85 cm de água. Depois, em cada hora, o nível desceu 0,2 cm.
9. a)  $y = \frac{8}{5}x$   
 b)  $y = 3x - 2$   
 c)  $x = 5$
10. 10.1 O ponto de coordenadas (0; 7).  
 10.2 Quando  $a$  é positivo, a reta passa pelo 1.º e o 3.º quadrantes; quando  $a$  é negativo, a reta passa pelo 2.º e o 4.º quadrantes. Quanto maior é o valor absoluto de  $a$ , maior é a inclinação da reta, isto é, mais próxima está do eixo dos  $yy$ .

6

#### MONÓMIOS, POLINÓMIOS E EQUAÇÕES DO 2.º GRAU

Págs. 36 a 71

#### Atividades iniciais

Pág. 37

1. D
2. a)  $16x$   
 b)  $6x$   
 c)  $13x + 22$   
 d)  $-10y + 8$



## SOLUÇÕES

3. a)  $8x - 5$   
b)  $4x + 10$   
c)  $76x$
4. a)  $5x$   
b)  $x^2$   
c)  $4x^2$   
d)  $6x^2$
5. a) A Joana tem razão; existem dois números: 5 e  $-5$ .  
b) O Jaime tem razão: nenhum número multiplicado por ele próprio pode dar um resultado negativo.
6. 6.1  $10^2 - 1 = 80 \Leftrightarrow 99 = 80$ . É uma igualdade falsa, logo, 10 não é solução da equação.  
6.2  $9^2 - 1 = 80 \Leftrightarrow 80 = 80$ . É uma igualdade verdadeira, logo, 9 é solução da equação.  
6.3  $(-9)^2 - 1 = 80 \Leftrightarrow 81 - 1 = 80 \Leftrightarrow 80 = 80$ .  
Conclui-se que  $-9$  é solução da equação.

### 6.1 Monómios Pág. 38

#### Tarefa 1:

1. Com 5 equipas, são 20 jogos. Com 6 equipas, são 30 jogos.  
2.  $x \times (x - 1) = x^2 - x$

#### Verificar a aprendizagem Pág. 40

1.

| Monómio          | Coefficiente  | Parte literal | Grau |
|------------------|---------------|---------------|------|
| $4x$             | 4             | $x$           | 1    |
| $-9x^3$          | -9            | $x^3$         | 3    |
| $\frac{2}{3}y^2$ | $\frac{2}{3}$ | $y^2$         | 2    |
| $ax$             | $a$           | $x$           | 1    |
| $-z^2$           | -1            | $z^2$         | 2    |
| $7b$             | $7b$          | Não tem.      | 0    |
| $-20x^4y^3$      | -20           | $x^4y^3$      | 7    |
| $xy^2z$          | 1             | $xy^2z$       | 4    |

2. D

3. C

4.

| Monómio       | Forma canónica | Igual a      | Semelhante a  |
|---------------|----------------|--------------|---------------|
| $2yx^4y^2$    | $2x^4y^3$      | $2x^2y^3x^2$ |               |
| $3a$          | $3a$           |              | $\frac{2}{3}$ |
| $-5xyz^2x$    | $-5x^2yz^2$    |              | $-8z^2yx^2$   |
| $2x^2y^3x^2$  | $2x^4y^3$      | $2yx^4y^2$   |               |
| $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$  |              | $3a$          |
| $25x^3zyz^2$  | $25x^3yz^3$    |              | $4bcx^3yz^3$  |
| $-8z^2yx^2$   | $-8x^2yz^2$    |              | $-5xyz^2x$    |
| $4bcx^3yz^3$  | $4bcx^3yz^3$   |              | $25x^3zyz^2$  |
| $25xz^3yzx^2$ | $25x^3yz^4$    |              |               |

5. Ao cuidado do aluno. Por exemplo:  $x^3y$  e  $10x^3y$

6. 6.1 B, C, D, E e F  
6.2 B e C são semelhantes.  
D e F são semelhantes.
7. a) Ao cuidado do aluno. Por exemplo:  $-xz^2$   
b) Ao cuidado do aluno. Por exemplo:  $8x^2$  e  $\frac{x^2}{3}$
8. B
9. a)  $15x$   
b)  $16x^2$   
c)  $-14x^3$   
d)  $72x^7$
10. D
11. a)  $-6bx^6$   
Os monómios são semelhantes.  
A soma é  $(2b - 3)x^3$   
b)  $35y^3z^3$   
c)  $8a^2bcx^2y^2$   
Os monómios são semelhantes.  
A soma é  $(ab + 8ac)xy$   
d)  $-12b^4c^2y^6z^2$   
Os monómios são semelhantes.  
A soma é  $-b^2cy^3z$

### Aplicar Pág. 41

12.  $\frac{3(-1)^3 \times 2}{2} = -3$
13.  $P = 2y \text{ cm}$  e  $A = \frac{y^2}{4} \text{ cm}^2$
14. Área total:  $24x^2 \text{ cm}^2$ . Volume:  $8x^3 \text{ cm}^3$ .
15. a)  $9x^2$   
b)  $125x^3$ ;  $5^3x^3$   
c)  $36x^2y^2$ ;  $(-6)^2 x^2y^2$   
d) coeficiente; literal.
16. a)  $16x^2$   
b)  $1000y^3$   
c)  $81x^2$   
d)  $\frac{64}{49}x^2$   
e)  $-8x^3y^6$   
f)  $x^{20}$

### 6.2 Polinómios Pág. 42

#### Tarefa 2:

1.  $14x + 10$
2.  $3x \times (4x + 5)$  simplificada vem  $12x^2 + 15x$
3.  $A_1 = 4x \times 3x = 12x$  e  $A_2 = 5 \times 3x = 15x$   
 $A_1 + A_2 = 12x^2 + 15x$ , obtém-se a expressão da área da mesa.

#### Verificar a aprendizagem Pág. 46

1. a) Os seus termos são  $12x$  e  $-a$ ;  
 $-3x^2$ ,  $-4x$  e  $25$ .  
b) Grau 1. Grau 2.
2. Por exemplo,  $-5x^2 + 5x$  ( $x$  variável)
3. B

4. a) Por exemplo:  $2x^3 - 5x^2 + \frac{x}{2} + 3$  ( $x$  variável)  
 b) Por exemplo:  $y^2 - 8y$  ( $y$  variável)  
 c) Por exemplo:  $\frac{2x^2}{5} - \frac{2x}{5}$  ( $x$  variável)

5. C

6. a)  $11x + 14$   
 b)  $9x^2 + 14x + 9$   
 c)  $2x^2 - 10x + 13$   
 d)  $2x^3 - 5x^2 + 2x$   
 e)  $8x + 3$   
 f)  $12x^2 + 22$   
 g)  $11x + 14$   
 h)  $-3x^3 - 4x^2 + 6$

Os polinómios iguais são os correspondentes às alíneas a) e g).

7. a)  $8x^2 + 20x$   
 b)  $18x^3 - 6x^2$   
 c)  $x^2 + 9x + 20$   
 d)  $x^2 + 10x + 21$   
 e)  $6x^2 - 14x + 4$   
 f)  $x^3 + 7x^2 + 16x + 30$   
 g)  $9x^3 - 15x^2 - 10x + 8$   
 h)  $-3x^3 + 22x^2 + x - 10$

8. Ao cuidado do aluno.

#### Aplicar

Pág. 47

9. B

10. a)  $2x^2 - 4x + 7$   
 b)  $2x + 1$
11. a) Perímetro:  $4x + 18$ , polinómio de grau 1.  
 Área:  $x^2 + 9x + 14$ , polinómio de grau 2.  
 b) Perímetro:  $12x - 8$ , polinómio de grau 1.  
 Área:  $8x^2 - 10x + 3$ , polinómio de grau 2.
12. 12.1  $14x - 2$   
 12.2  $10x^2 - 2x$   
 12.3  $14x^2 - 16x + 3$
13. a)  $8x + 6$   
 b)  $6x^3 + 4x^2$   
 c)  $3x^2 + 5x + 2$   
 d)  $6x^4 + 10x^3 + 4x^2$   
 e)  $2x^3 + 2x^2$
14. a)  $4x + 12$   
 b)  $x^2 + 6x + 9$   
 c)  $2x^3 + 12x^2 + 18x$

### 6.3

#### Casos notáveis da multiplicação de binómios

Pág. 48

#### Tarefa 3:

1.  $(x + 4)^2 = (x + 4)(x + 4) = x^2 + 4x + 4x + 16 = x^2 + 8x + 16$
2. O 1.º monómio do resultado é o quadrado do 1.º monómio inicial; o 2.º monómio do resultado é o dobro do produto dos dois monómios iniciais; o 3.º monómio do resultado é o quadrado do 2.º monómio inicial.

#### Verificar a aprendizagem

Pág. 51

1. a)  $x^2 + 10x + 25$   
 b)  $x^2 + 14x + 49$   
 c)  $x^2 + 18x + 81$   
 d)  $9x^2 + 24x + 16$   
 e)  $4x^2 + 32x + 64$   
 f)  $16y^2 + 20y + \frac{25}{4}$
2. a) 3; b)  $2x$
3. a)  $101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201$   
 b)  $52^2 = (50 + 2)^2 = 50^2 + 2 \times 50 \times 2 + 2^2 = 2500 + 200 + 4 = 2704$   
 c)  $203^2 = (200 + 3)^2 = 200^2 + 2 \times 200 \times 3 + 3^2 = 40\,000 + 1200 + 9 = 41\,209$
4. a)  $x^2 - 8x + 16$   
 b)  $x^2 - 16x + 64$   
 c)  $25x^2 - 10x + 1$   
 d)  $100y^2 + 60y + 9$   
 e)  $4x^2 - 3x + \frac{9}{16}$   
 f)  $\frac{t^2}{64} - \frac{t}{8} + \frac{1}{4}$
5. a)  $(x - 5)^2$ ; b)  $(3x - 6)^2$
6. a)  $99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9801$   
 b)  $295^2 = (300 - 5)^2 = 300^2 - 2 \times 300 \times 5 + 5^2 = 90\,000 - 3000 + 25 = 87\,025$   
 c)  $498^2 = (500 - 2)^2 = 500^2 - 2 \times 500 \times 2 + 2^2 = 250\,000 - 2000 + 4 = 248\,004$
7. a)  $x^2 - 9$   
 b)  $x^2 - 144$   
 c)  $4x^2 - 81$   
 d)  $25t^2 - 169$   
 e)  $-36y^2 + 0,25$   
 f)  $\frac{16}{9}x^2 - \frac{49}{400}$
8. a)  $(x + 7)(x - 7)$   
 b)  $(4x + 8)(4x - 8)$
9. a)  $31 \times 29 = (30 + 1)(30 - 1) = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 899$   
 b)  $62 \times 58 = (60 + 2)(60 - 2) = 60^2 - 2^2 = 3600 - 4 = 3596$   
 c)  $95 \times 105 = (100 - 5)(100 + 5) = 100^2 - 5^2 = 10\,000 - 25 = 9975$
10. a)  $25x(x^2 - 3) = 25x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$   
 b)  $3ax^2 + 6ax + 3a = 3a(x^2 + 2x + 1) = 3a(x + 1)^2$   
 c)  $(x - y)^2 - 9 = ((x - y) - 3)((x - y) + 3) = (x - y - 3)(x - y + 3)$   
 d)  $-xy^2 + 2xy - x = x(-y^2 + 2y - 1) = -x(y^2 - 2y + 1) = -x(y - 1)^2$   
 e)  $x^2(2xy - z)^2$   
 f)  $2(x + 1)$

#### Aplicar

Pág. 52

11. D  
 12. A

## SOLUÇÕES

13. a)  $21x^2 - 60x + 9$   
b)  $16x$
14. 14.1  $0,25x^2 + 16$   
14.2  $18,25 \text{ km}^2$
15. Ao cuidado do aluno.

### Tarefa de investigação

Pág. 52

16. 16.1 O quadrado do número do meio é igual ao produto dos outros dois, mais um.  
16.2 Os três números são:  $x$ ,  $x + 1$  e  $x + 2$ .  
O quadrado do número do meio é  $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ .  
O produto dos outros dois números é  $x \times (x + 2) = x^2 + 2x$ .  
Está provada a conjectura.
17. 17.1 Quando se calcula a diferença entre dois quadrados perfeitos consecutivos, obtém-se um número ímpar.  
17.2  $(x + 1)^2$   
17.3  $(x + 1)^2 - x^2 =$   
 $= x^2 + 2x + 1 - x^2 =$   
 $= 2x + 1$ , que é o termo geral da sequência dos números ímpares.

## 6.4

### Equações do 2.º grau

Pág. 53

#### Tarefa 4:

1.  $x^2 \times 5 = 1280$   
2. C. S. =  $\{-16; 16\}$   
3. Ao todo, são 16 rapazes.

### Verificar a aprendizagem

Pág. 58

1. 3 e  $-3$ .  
2. a) C. S. =  $\{-10; 10\}$   
b) C. S. =  $\{-6; 6\}$   
c) C. S. =  $\{0\}$   
d) C. S. =  $\{-2; 2\}$   
e) C. S. =  $\{-5; 5\}$   
f) C. S. =  $\{0\}$   
g) C. S. =  $\emptyset$   
h) C. S. =  $\left\{-\frac{9}{4}; \frac{9}{4}\right\}$   
i) C. S. =  $\left\{-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right\}$   
j) C. S. =  $\left\{-\frac{\sqrt{31}}{2}; \frac{\sqrt{31}}{2}\right\}$   
k) C. S. =  $\left\{-\frac{\sqrt{11}}{7}; \frac{\sqrt{11}}{7}\right\}$   
l) C. S. =  $\emptyset$
3. A  
4. a) Não é solução.  
b) É solução.  
5. Pelo menos um dos números é zero.  
6. a) C. S. =  $\{-8; 4\}$   
b) C. S. =  $\{-5; 7\}$   
c) C. S. =  $\left\{-8; \frac{1}{2}\right\}$   
d) C. S. =  $\{0; 15\}$

e) C. S. =  $\left\{-\frac{1}{3}; 0\right\}$

f) C. S. =  $\left\{\frac{2}{3}; 20\right\}$

7. Não se pode aplicar a lei do anulamento do produto, porque o 2.º membro é 1 em vez de 0.
8. a)  $x \times (x + 3)$   
b)  $x \times (x - 7)$   
c)  $x \times (2x + 1)$   
d)  $5x \times (x + 4)$   
e) Por exemplo,  $-3x \times (x + 7)$ .  
f) Por exemplo,  $4x \times (1 - x)$ .  
g)  $x \times (x^2 + 8x + 1)$   
h) Por exemplo,  $6x \times (x^2 - 5x + 3)$ .
9.  $x \times (x + 8) \Leftrightarrow x = 0 \vee x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -8$ .
10. a) C. S. =  $\{-4; 0\}$   
b) C. S. =  $\{0; 9\}$   
c) C. S. =  $\{-10; 0\}$   
d) C. S. =  $\{0; 6\}$   
e) C. S. =  $\{0; 0,5\}$   
f) C. S. =  $\{0; 1\}$   
g) C. S. =  $\{0; 19\}$   
h) C. S. =  $\{0; 3\}$   
i) C. S. =  $\left\{0; \frac{7}{9}\right\}$
11. a)  $(x + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$   
b)  $(x - 8)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8$
12. a) C. S. =  $\{-10\}$   
b) C. S. =  $\{1\}$   
c) C. S. =  $\{7\}$   
d) C. S. =  $\{-9\}$   
e) C. S. =  $\left\{\frac{5}{3}\right\}$   
f) C. S. =  $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$
13. a) C. S. =  $\{-7; -3\}$   
b) C. S. =  $\{-6; 12\}$

### Aplicar

Pág. 59

14. a) 150  
b) 2400  
c) 37 000  
d) 700  
e) 2300  
f)  $-1200$
15. a) Por exemplo,  $(x - 4)(x + 7) = 0$ .  
b) Por exemplo,  $x(x - 16) = 0$ .  
c) Por exemplo,  $(x - 5)^2 = 0$   
d) Por exemplo,  $x^2 + 1 = 0$ .
16. a) C. S. =  $\{0\}$   
b) C. S. =  $\{-20; 20\}$   
c) C. S. =  $\{-16; 0\}$   
d) C. S. =  $\{-7; 3\}$   
e) C. S. =  $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$   
f) C. S. =  $\{0; 2\}$

- g) C. S. = {3}  
 h) C. S. =  $\emptyset$   
 i) C. S. = {-1}  
 j) C. S. = {-11; -1}

17. 17.1 Não se pode aplicar a lei do anulamento do produto, porque o 2.º membro não é zero.  
 17.2 C. S. = {-9; 0}  
 18. 18.1  $(x - 8)(x - 4) = 32$   
 18.2 C. S. = {0; 12}  
 18.3 A afirmação é verdadeira, pois só a solução 12 é válida. A solução 0 daria medidas negativas para os lados do retângulo.  
 19. 19.1 140 m  
 19.2 85 km/h  
 20. 20.1 2,5 m  
 20.2 Não, porque a altura seria negativa (-3,5 m).  
 20.3 Aos 0 e aos 3 segundos.  
 21. 12,5

#### Tarefa de investigação

Pág. 60

22. 22.1 0  
 22.2 a) Negativo.  
 b) Múltiplo de 5.

#### Atividades globais

Págs. 64 a 65

1. B  
 2. B  
 3. A  
 4. B  
 5. D  
 6. A  
 7. C  
 8. C  
 9. C  
 10. A  
 11. 6,5 cm  
 12. a) C. S. = {0; 3}  
 b) C. S. =  $\left\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right\}$   
 c) C. S. =  $\left\{0; \frac{1}{4}\right\}$   
 13. 13.1  $f(x) = 2x - 15$   
 13.2 É uma função afim, porque é do tipo  $f(x) = ax + b$  com  $a = 2$  e  $b = -15$ .  
 13.3 Uma reta que passa no ponto de coordenadas (0; -15).  
 13.4 4  
 14. a)  $y^2 + 2y + 1$   
 b)  $5x^2 - 5x + \frac{5}{4}$   
 c)  $10x^2 + 6x$   
 15. 15.1 É um quadrado de lado  $x - y$ .  
 15.2  $A_{rec} = xy$ ,  $A_{qua} = (x - y)^2$   
 15.3 Ao cuidado do aluno.  
 15.4 Ao cuidado do aluno.  
 16. 10 cm

#### AUTOAVALIAÇÃO

Págs. 66 e 67

1. C

| Monómio | Coeficiente | Parte literal | Grau |
|---------|-------------|---------------|------|
| $3x^2$  | 3           | $x^2$         | 2    |
| $-ax$   | $-a$        | $x$           | 1    |
| 12      | 12          | Não tem.      | 0    |

3. 3.1  $6x^2 - 2x + 4$

3.2  $-4x^2 + 7x + 4$

3.3 8

4. a)  $72x^2$

b)  $21x^3 - 12x^2 + 30x$

c)  $x^2 + 8x + 12$

d)  $6x^2 - 22x + 20$

5. 5.1  $2x^2 - 4x + 18$

5.2  $x^3 - 3x + 18$

6. D

7. a)  $x^2 - 18x + 81$

b)  $4x^2 + 28x + 49$

c)  $16x^2 - \frac{225}{121}$

d)  $\frac{9}{4}x^2 - 18x + 36$

8.  $(54x^2 - 36x + 6) \text{ cm}^2$

9. B

10. Nasceu em 1980.

11. a) C. S. =  $\left\{-\frac{15}{4}; \frac{15}{4}\right\}$

c) C. S. = {-4; 0}

b) C. S. =  $\left\{-9; \frac{1}{3}\right\}$

d) C. S. = {-9}

12. 12.1 19,6 m

12.2 1,86 s

#### 7 EQUAÇÕES LITERAIS E SISTEMAS

Págs. 72 a 103

#### Atividades iniciais

Pág. 73

1. a) São equivalentes.

b) São equivalentes.

c) Não são equivalentes.

2. a)  $a = 3$  e  $b \neq -8$

b)  $a = 3$  e  $b = -8$

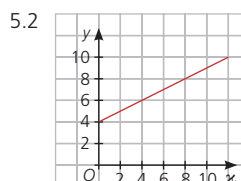
c) Ao cuidado do aluno. Por exemplo:  $a = 5$  e  $b = -6$

3. 3.1 -1 só é solução da equação B.

3.2 A: C. S. = {2}; B: C. S. = {-1}.

4. Foram vendidas 400 fatias de bolo.

5. 5.1 O transporte tem uma taxa inicial de 4 €, independentemente do número de quilómetros.



5.3 7 €

**7.1** Equações literais \_\_\_\_\_ Pág. 74**Tarefa 1:**

- 114 km/h (arredondado às unidades).
- 23,6 km
- 14 minutos e 24 segundos.

**Verificar a aprendizagem** \_\_\_\_\_ Pág. 76

- B e D.
- $x = 110 - 2a$
- $c = 4 + d$
  - $d = c - 4$
  - $c = \frac{A}{\ell}$
  - $a = \frac{5 - 2b}{3}$
  - $f = \frac{9e - 2}{2}$
  - $I = R \times V$
  - $t = \frac{e}{v}$
  - $b = \frac{2A}{h}$
  - $p = 3g - 2$
  - $x = \frac{y + 4}{2}$
- $x + 2y = 40$
  - $x = 40 - 2y; y = \frac{40 - x}{2}$
- $x = \sqrt{2a} \vee x = -\sqrt{2a}$
  - $x = 0 \vee x = \frac{2a}{3}$
  - $x = -a \vee x = a$
  - $x = -a$

**Aplicar** \_\_\_\_\_ Pág. 76

- 188 €
  - $h = \frac{c - 20}{42}$
  - 6 h 30 min
- 16 cm de base e 2 cm de altura, por exemplo.
  - $h = \frac{2A}{b}$
- | Base/cm | Altura/cm |
|---------|-----------|
| 1       | 32        |
| 2       | 16        |
| 4       | 8         |
| 8       | 4         |
| 16      | 2         |
| 32      | 1         |

- 1 g/cm<sup>3</sup>
  - 19,3 g/cm<sup>3</sup>
  - $m = \rho \times V$
  - 525 g
  - $V = \frac{m}{\rho}$

8.6 Aproximadamente 1002 cm<sup>3</sup>.

9. 9.1  $P = 0,05b + 20$

9.2 25 €

9.3 400 bolas

9.4  $b = \frac{p - 20}{0,05}$

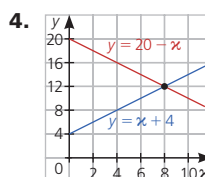
- | p/€ | 50  | 60  | 65  | 70   |
|-----|-----|-----|-----|------|
| b   | 600 | 800 | 900 | 1000 |

9.6 Facilitar o cálculo do valor de  $b$ , sabendo o valor de  $p$ .**Tarefas de investigação** \_\_\_\_\_ Pág. 77

10. Ao cuidado do aluno.

**7.2** Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas \_\_\_\_\_ Pág. 78**Tarefa 2:**

- $x + y = 20$
- $y = x + 4$
- A Sofia gastou 8 € e o Diogo, 12 €.



5. As duas retas interseccionam-se num único ponto. As coordenadas deste ponto correspondem à solução do problema.

**Verificar a aprendizagem** \_\_\_\_\_ Pág. 80

- Por exemplo: (50; 0); (40; 20); (30; 40); (20; 60).
- C
- D
- Nenhum dos pares ordenados é solução do sistema.
  - Só o par ordenado (2; -1) é solução.
  - Só o par ordenado (-1; 2) é solução.
  - Os dois pares ordenados são solução do sistema.
- A
- Não é solução do sistema, porque não verifica a segunda equação  $6 + 3 = 9 \neq 5$ .
  - Por exemplo, (3; 2).
  - $$\begin{cases} -4 + 1 = -3 \\ 4 + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -3 \\ 5 = 5 \end{cases}$$
  - Os sistemas são equivalentes, pois a equação  $x - y = 3$  é equivalente à equação  $-x + y = -3$  e a equação  $2x + 2y = 10$  é equivalente à equação  $x + y = 5$ .

**Aplicar** \_\_\_\_\_ Pág. 81

- O par ordenado (1, -2) não é solução do sistema  $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$ . Logo, os sistemas não são equivalentes, porque não têm o mesmo conjunto de soluções.
- (5; 11)
- $g$ : preço de cada gelado;  $s$ : preço de cada sumo.
  - $$\begin{cases} 3g + 2s = 4 \\ 2g + 4s = 4 \end{cases}$$

9.3 Cada gelado custa 1 € e cada sumo, 0,50 €.

$$9.4 \begin{cases} 3 \times 1 + 2 \times 0,50 = 4 \\ 2 \times 1 + 4 \times 0,50 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4 \text{ (Verdadeiro)} \\ 4 = 4 \text{ (Verdadeiro)} \end{cases}$$

10.  $\begin{cases} x = y + 3 \\ 0,80x + 0,30y = 4,60 \end{cases}$

11. Por exemplo:  $\begin{cases} 2x + y = 35 \\ \frac{x}{2} - y = -10 \end{cases}$

12.  $a = 9$  e  $b = 2$ .

13.  $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = -36 \end{cases}$

### 7.3 Interpretação geométrica de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas

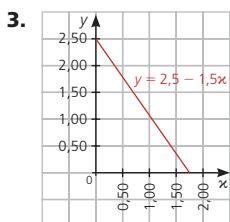
Pág. 82

#### Tarefa 3:

1.  $\begin{cases} 30x + 20y = 50 \\ 45x + 30y = 75 \end{cases}$

em que  $x$  é o preço de cada rifa com prémio e  $y$  é o preço de cada rifa das que podem ter prémio ou não.

2.  $\begin{cases} y = 2,5 - 1,5x \\ y = 2,5 - 1,5x \end{cases}$



4. Não, porque o sistema tem um número infinito de soluções.

#### Verificar a aprendizagem

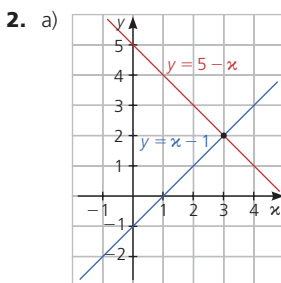
Pág. 85

1. 1.1 (3; 1)

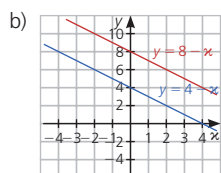
1.2 Uma solução, porque as retas que representam o sistema são concorrentes, logo têm um único ponto de interseção.

1.3  $\begin{cases} x + y = -1 \\ x + y = 4 \end{cases}$

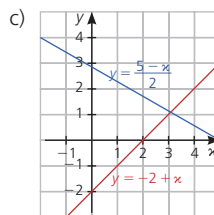
1.4  $\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = -3 \end{cases}$



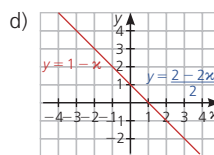
Tem uma solução (3, 2).



Não tem solução.



Tem uma solução (3, 1).



Tem infinitas soluções.

3. A — 3 — II; B — 2 — III; C — 1 — I

4. 4.1 a)  $\begin{cases} x + y = 3 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

b) Por exemplo:  $\begin{cases} y = x + 2 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$

c) Por exemplo:  $\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + 2y = -2 \end{cases}$

4.2 Solução: (0,5; 2,5).

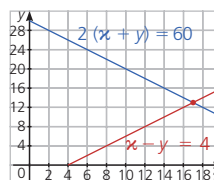
4.3  $\begin{cases} \frac{y}{2} = x - 1 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

#### Aplicar

Pág. 86

5.  $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2(x + y) = 60 \end{cases}$

considerando  $x$  a idade da amiga e  $y$  a idade da Joana. A amiga tem 17 anos e a Joana tem 13 anos.



6. 6.1 e 6.3

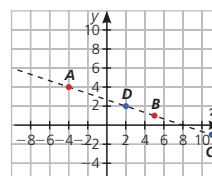
TABELA 1

| $x$ | $y = (8 - x)/3$ | Pontos   |
|-----|-----------------|----------|
| -4  | 4               | A(-4; 4) |
| 5   | 1               | B(5; 1)  |

TABELA 2

| $y$ | $x = 8 - 3y$ | Pontos    |
|-----|--------------|-----------|
| -1  | 11           | C(11; -1) |
| 2   | 2            | D(2; 2)   |

6.2 e 6.4



6.5 Os pontos pertencem todos à mesma reta.

7. a) Por exemplo:  $\begin{cases} 2(x + y) = 8 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2(x + y) = 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$

c) Por exemplo:  $\begin{cases} 2(x + y) = 8 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

## Tarefas de investigação

Pág. 86

8. 8.1 (5,2; -2,2)  
8.2 Ao cuidado do aluno.

## 7.4

## Resolução de sistemas de equações

Pág. 87

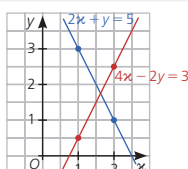
## Tarefa 4:

1. C. 3200 g  
D. 1800 g  
E. 600 g  
F. 400 g  
2. Ao cuidado do aluno.

## Verificar a aprendizagem

Pág. 90

1. 1.1



- 1.2 É possível indicar uma estimativa da solução do sistema, mas não se consegue apresentar o seu valor exato. Esta é uma das limitações do método gráfico.

1.3  $x = \frac{13}{8}; y = \frac{7}{4}$

2. a) Solução: (4; 8).  
b) Solução: (4; 3).  
c) Solução: (-7; 8).  
3. a) A incógnita  $x$  deveria ter desaparecido na 1.ª equação depois da substituição.  
b) Deveria ficar:  

$$\begin{cases} y = 5 - 3x \\ x + 2 \times (5 - 3x) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x \\ x + 10 - 6x = 9 \end{cases}$$
c) Deveria ficar:  

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ x - (2 - 2x) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ x - 2 + 2x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ x + 2x = 10 + 2 \end{cases}$$
d) Deveria ficar:  

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 6 - 2x \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6 + 2x \\ 2x + 2(-6 + 2x) = 3 \end{cases}$$
4. a) Solução: (4; 2)  
b) Solução:  $(\frac{4}{3}; 4)$   
c) Solução: (6; -1)  
d) Solução:  $(\frac{9}{2}; \frac{5}{2})$   
e) Solução:  $(\frac{9}{2}; \frac{1}{2})$   
f) Solução: (4; -1)  
g) Solução:  $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$   
h) Solução:  $(2; -\frac{2}{5})$   
i) Solução: (-7; 5)

5. a)  $\begin{cases} x - y = 3 \\ -\frac{x}{2} + y = -2 \end{cases}$  Solução: (2; -1)  
b)  $\begin{cases} 2x + 2y = -4 \\ -3x + y = 2 \end{cases}$  Solução: (-1; -1)  
c)  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + \frac{y}{2} = 2 \end{cases}$  Solução:  $(\frac{1}{2}; 0)$   
d)  $\begin{cases} x - 5y = -3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$  Solução: (7; 2)  
e)  $\begin{cases} -3x + y = 0 \\ x + 2y = \frac{1}{2} \end{cases}$  Solução:  $(\frac{1}{14}; \frac{3}{14})$   
f)  $\begin{cases} 8x + 3y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$  Solução:  $(-\frac{7}{5}; \frac{27}{5})$

## Aplicar

Pág. 91

6. a) Solução: (76; 7)  
b) Solução:  $(\frac{1}{3}; 1)$   
7. 7.1 C  
7.2 (700; 500)  
7.3 Foram engarrafados 700 garrafas de 5 L e 500 de 2 L.  
8. Cada peça de roupa custou 15 € e cada par de sapatos, 17,50 €.  
9. Um caixote tem 38 caixas e o outro tem 56 caixas.  
10. O canteiro tem 4,5 m de comprimento e 3 m de largura.  
11. 15 € por dia.  
12.  $a = 25$  e  $b = 32,5$ .  
13. 99 % no 1.º teste e 89 % no 2.º teste.  
14. 14,80 € cada.

## Atividades globais

Págs. 94 a 97

1. A  
2. B  
3. B  
4. D  
5. B  
6. D  
7. 7.1  $a = 2$   
7.2 12  
8. 8.1 É a taxa fixa mensal.  
8.2 201,25 €  
8.3  $c = \frac{v - 2,05}{0,83}$   
8.4 400 m³  
8.5 Facilitar o cálculo do valor de  $c$ , sabendo o valor de  $v$ .  
9. 9.1 A população coincide com o número de animais capturados na 1.ª amostra.  
9.2 25 trutas.  
10. Para  $x = 4$  e  $y = 4$ .  
11. 10 segundos.  
12. Encontram-se passado 1 h 30 min, a 18 km de casa do Jaime.  
13. A. Falso, duas retas coincidentes têm a mesma ordenada na origem e o sistema é possível e indeterminado.  
B. Falso, o sistema é possível e determinado de solução (0; 0).



14. 14.1 I.  $y = 3x - 1$  e II.  $y = -2x + 1$ .

14.2 
$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

14.3  $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$

14.4  $(0, 4; 0, 2)$

14.5 Por exemplo,  $y = -2x + 2$ .

15.  $6x^2 = ax \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x^2 - ax = 0 \Leftrightarrow x(6x - a) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee 6x - a = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{a}{6}$

16. 16.1  $p = 4x$  e  $a = x^2$

16.2  $x = \frac{p}{4}$  e  $x = \sqrt{a}$ , pelo que

$\frac{p}{4} = \sqrt{a} \Leftrightarrow p = 4\sqrt{a} \Leftrightarrow p^2 = 16a$

16.3 Não existe nenhum quadrado com estas características.

17. 17.1 3600 joules

17.2  $m = \frac{2E_c}{v^2}$

17.3 80 kg

17.4  $v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$  (a velocidade é positiva)

17.5 20 m/s

18. 18.1 A afirmação é falsa: o IMC é de 24,6, o que corresponde a um peso ideal.

18.2  $\text{Peso} = \text{IMC} \times (\text{altura})^2$

18.3 69,8 kg

18.4  $\text{Altura} = \sqrt{\frac{\text{Peso}}{\text{IMC}}}$  (a altura é positiva)

18.5 1,84 m

19. Ao cuidado do aluno.

20. Ao cuidado do aluno.

#### AUTOAVALIAÇÃO

Págs. 98 e 99

1. 1.1 105,8 °F

1.2  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

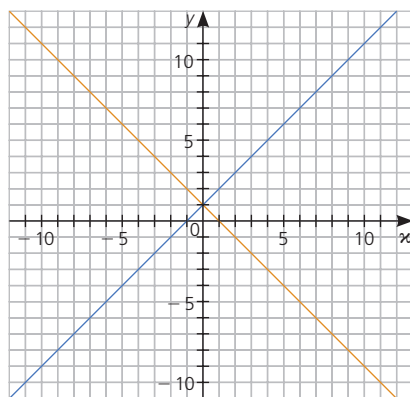
1.3 25 °C

1.4 373 K

1.5  $F = \frac{9}{5}K - 459,4$

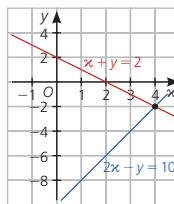
2. C

3.



O sistema tem uma única solução, o par ordenado  $(0, 1)$ .

4. 4.1



Solução do sistema I:  $(4; -2)$ .

4.2 Sistema II: possível e determinado. Solução:  $(8; 2)$ .

Sistema III: possível e indeterminado.

5. Por exemplo: 
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

6. B

7. D

8. Cada baralho de cartas custa 15 €.

9.  $\hat{A} = 70^\circ$ ;  $\hat{B} = 35^\circ$ ;  $\hat{C} = 75^\circ$ .

## 8

### ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS

Págs. 104 a 127

#### Atividades iniciais

Pág. 105

1. 1.1 50, 51, 51, 51, 51, 52, 52, 52, 52, 53, 54, 54, 54, 55, 55, 55, 57, 57, 57, 58, 58, 58, 59, 59, 59, 60, 62, 63, 63, 63, 64, 64, 64, 65, 65, 65, 65, 67, 67, 68, 68, 69

1.2 58

1.3 60 %, aproximadamente.

1.4 Exemplo 1: 58, 58, 58

Exemplo 2: 51, 58, 63

2. 2.1 2000 kcal

2.2 62,5 %

2.3 572 kcal

2.4 47 kg

## 8.1

### Medidas de localização

Pág. 106

#### Tarefa 1:

1. Não, porque cada um dos amigos contribuiu com valores diferentes.

2. Por exemplo: 5 €, 6 € e 10 € ou 6 €, 7 € e 8 €

#### Verificar a aprendizagem

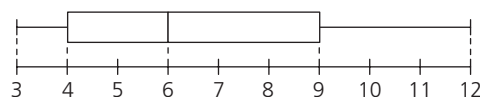
Pág. 111

1. a) Mediana: 7,5;  $Q_1 = 6$ ;  $Q_2 = 7,5$ ;  $Q_3 = 11$

b) Mediana: 24;  $Q_1 = 15$ ;  $Q_2 = 24$ ;  $Q_3 = 28$

c) Mediana: 6,5;  $Q_1 = 1,5$ ;  $Q_2 = 6,5$ ;  $Q_3 = 8$

2. 2.1



2.2 75 %; 6 €; 6,625 €; 50 %.

3. 3.1  $Q_1 = 7$ ;  $Q_2 = 13$ ;  $Q_3 = 21$

3.2 Verdadeiro, porque o 1.º quartil é 7.

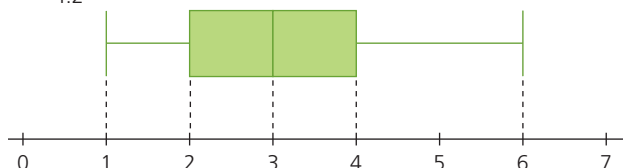
3.3 Não, a Espanha tinha um número de pontos inferior ao 3.º quartil.

## Aplicar

Pág. 112

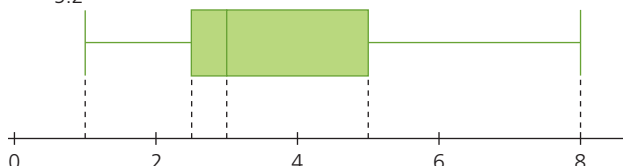
4. 4.1 Mínimo = 1; máximo = 6,  $Q_1 = 2$ ;  $Q_2 = 3$  e  $Q_3 = 4$

4.2



5. 5.1 Mínimo = 1; Máximo = 8,  $Q_1 = 2,5$ ;  $Q_2 = 3$  e  $Q_3 = 5$

5.2



6. 6.1 45; 95

6.2  $Q_1 = 60$ ;  $Q_2 = 67$  e  $Q_3 = 72$

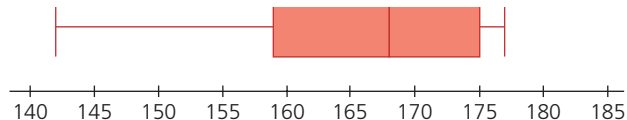
- 6.3 Poderão existir mais alunos com peso compreendido entre 45 kg e 60 kg do que entre 60 kg e 67 kg, porque a percentagem dos pesos dos alunos em cada um dos casos é de, aproximadamente, 25 %. Essa diferença não se deve ao facto de  $60 - 45 > 67 - 60$ .

7. 7.1 Mínimo: 142. Corresponde à altura do(s) aluno(s) mais baixo(s).  
Máximo: 177. Corresponde à altura do(s) aluno(s) mais alto(s).

- 7.2  $Q_1$ : 159. Pelo menos 75 % dos alunos têm altura maior ou igual a 159 cm.  
 $Q_2$ : 168. Cerca de 50 % dos alunos têm altura inferior ou igual a 168 cm.  
 $Q_3$ : 175. Pelo menos 75 % dos alunos têm altura inferior ou igual a 175 cm.

7.3 O segundo.

7.4

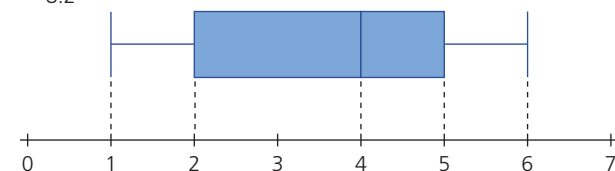


- 7.5 Sim, pois 174 cm é um valor muito próximo de  $Q_3$ .

- 7.6 A cada um dos valores dos extremos e dos quartis será retirado também 2 cm.

8. 8.1 Mínimo: 1. Corresponde ao menor número de golos marcado pelas equipas.  
Máximo: 6. Corresponde ao maior número de golos marcado pelas equipas.  
 $Q_1$ : 2. Pelo menos 75 % das equipas marcaram 2 ou mais golos.  
 $Q_2$ : 4. Cerca de 50 % das equipas marcaram até 4 golos.  
 $Q_3$ : 5. Pelo menos 75 % das equipas marcaram 5 ou menos golos.

8.2



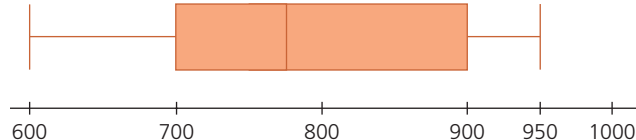
9. 9.1 Mínimo 600. O ordenado mínimo na empresa de informática Divertida é 600 euros.  
Máximo 950. O ordenado máximo na empresa de informática Divertida é 950 euros.

9.2  $Q_1$ : 700.

$Q_2$ : 775.

$Q_3$ : 900.

9.3



## Tarefa de investigação

Pág. 113

10. Ao cuidado do aluno.

## 8.2

Medidas de dispersão Pág. 114

## Tarefa 2:

Para concordar com algum dos amigos, deveria existir mais informação, por exemplo, como é distribuída a maior parte dos valores.

## Verificar a aprendizagem

Pág. 116

1. a) 4

b) 67

c) 2

2. 2.1 8

2.2 32

2.3  $Q_1 = 6$ ;  $Q_2 = 6$ ;  $Q_3 = 10$

2.4 4

3. 3.1 Sim.

3.2

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| B | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| C | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 |

3.3 e 3.4

| Medida de dispersão    | Estudo A | Estudo B | Estudo C |
|------------------------|----------|----------|----------|
| $Q_1$                  | 2        | 1        | 2,5      |
| $Q_2$                  | 3        | 2        | 4        |
| $Q_3$                  | 4        | 3,5      | 5        |
| Amplitude              | 4        | 4        | 4        |
| Amplitude interquartis | 2        | 2,5      | 2,5      |

3.5 superior; igual; inferior

## Aplicar

Pág. 117

4. 4.1 Em Sagres, pois a intensidade do vento esteve próximo de 50 km/h, enquanto em Monção não ultrapassou os 15 km/h.

4.2 Sagres: 40 km/h; Monção: 13,75 km/h.

5. 5.1 Tanto em 2008 como em 2009 a amplitude foi de 30 e a amplitude interquartis de 15.

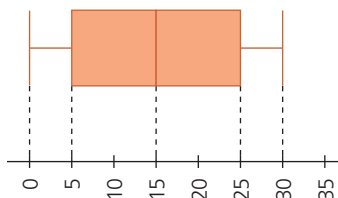
5.2 Não.

- 5.3 Em 2008, venderam-se por mês, em média, 74,4 jornais. Em 2009, venderam-se por mês, em média, 84,4 jornais. Venderam-se mais jornais em 2009 do que em 2008.
6. 6.1 Média dos tempos: 90,1 s; mediana: 42,5 s.  
 6.2 Amplitude: 473; amplitude interquartis: 8.  
 6.3 A média e a amplitude são muito influenciadas por um valor muito alto (ou muito baixo), o mesmo não acontece com a mediana e com a amplitude interquartis.  
 6.4 Média:  $\approx 43,3$ ; mediana: 42; amplitude: 12; amplitude interquartis: 7,5. Deixou de existir uma diferença acentuada entre a primeira e a segunda medidas de cada uma das alíneas.

#### Atividades globais

Pág. 120 e 121

1. 1.1 B  
 1.2 C  
 1.3 B
2. D
3. C
4. A
5. B
6. 6.1 Os trabalhadores da empresa de recolha e de reciclagem de resíduos.  
 6.2 Mínimo: 500; Máximo: 1300  
 6.3 Mínimo: 500; Máximo: 1300;  $Q_1 = 600$ ;  $Q_2 = 750$  e  $Q_3 = 1000$   
 6.4 Amplitude = 800  
 Amplitude interquartis = 400  
 6.5 Verdadeiro, a amplitude é 800 e o 3.º quartil é 1000.
7. 7.1 30  
 7.2  $Q_1 = 5$ ;  $Q_2 = 15$ ;  $Q_3 = 25$   
 7.3 20  
 7.4

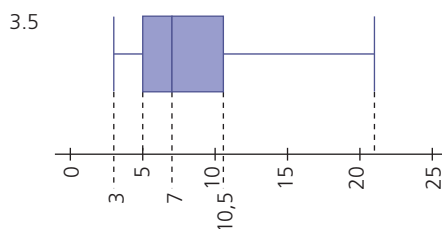


- 7.5 Verdadeiro, em dezembro cerca 26,7 % dos funcionários enviou pelo menos 25 e-mails.

#### AUTOAVALIAÇÃO

Pág. 122 e 123

1. 1.1 C  
 1.2 B
2. C
3. 3.1 18  
 3.2 5  
 3.3 7  
 3.4 Não, é 10,5, porque o 3.º quartil está localizado entre os elementos 16.º e 17.º, depois de ordenar os dados por ordem crescente, que são 10 e 11, respetivamente.



3.6  $10,5 - 5 = 5,5$

4. 4.1 34

4.2  $Q_1 = 19$ ;  $Q_2 = 26$  e  $Q_3 = 37$ .

4.3



4.4  $37 - 19 = 18$

- 4.5 O 3.º quartil está localizado entre os elementos 15.º e 16.º, depois de ordenar os dados por ordem crescente, que são iguais a 37, logo,

$$Q_3 = \frac{37 + 37}{2} = 37.$$

O 1.º quartil está situado entre o 5.º e o 6.º elementos que têm o valor 18 e 20, respetivamente, logo

$$Q_1 = \frac{18 + 20}{2} = 19.$$

O 2.º quartil está situado entre o 10.º e o 11.º elementos que têm o valor 24 e 28, respetivamente, logo

$$Q_2 = \frac{24 + 28}{2} = 26.$$

4.6

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 4 | 8 | 8 |   |   |
| 2 | 0 | 2 | 3 | 4 | 4 | 8 |   |
| 3 | 0 | 2 | 5 | 7 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 1 | 4 |   |   |   |   |   |

Com o diagrama de caule-e-folhas temos acesso à totalidade dos dados, enquanto pela análise do diagrama de extremos e quartis não sabemos quais são os dados.

5. A afirmação do gestor está errada. A amplitude do intervalo é o dobro mas o número de dados é o mesmo.
6. 13, 20 e 22.



## FONTES FOTOGRÁFICAS

Capa: Esferas — Getty Images

### Agência LUSA

P. 82 Banca de rifas  
P. 94 Vendedor de bolos

### Casa da Imagem

P. 66 *Composição VIII, de Wassily Kandinsky*

### Getty Images

P. 4 Corredores na pista de atletismo  
P. 14 Discos Blu-ray  
P. 18 Ilha da Madeira  
P. 27 Carro num túnel  
P. 36 Quadro com equações  
P. 60 Jogo de petanca  
P. 72 Mulher chinesa com cestos  
P. 106 Bilheteira de cinema

### PhotoXpress

P. 47 Piscina — Christian Rycx  
P. 67 Bolas de ténis — DF  
P. 69 Porco — Nathalie P.  
P. 91 Camisas — Fxprod  
P. 105 Maças — Andrei Merkulov

### Reuters

P. 74 Corrida de fórmula 1 — Laszlo Balogh

### Vários

P. 60 Automóvel — Jaromir Gula  
P. 77 Praticante de *paintball* — James H-K  
P. 99 Cartas — Wizards of the Coast  
P. 104 Peões, peças de *puzzle* e globo — Sanja Gjenero  
P. 127 Criança a segurar globo terrestre — Flavio Takemoto;  
computadores — Svyatoslav Paleny e Emre Nacigi

O Projeto **Desafios** de Matemática destinado ao 8.º ano de escolaridade, 3.º Ciclo do Ensino Básico, é uma obra coletiva, concebida e criada pelo Departamento de Investigações e Edições Educativas da Santillana, sob a direção de Sílvia Vasconcelos.

**EQUIPA TÉCNICA**

Chefe de Equipa Técnica: Patrícia Boleto

Modelo Gráfico e Capa: Carla Julião

Ilustrações: Ana Mesquita, Félix e Paulo Oliveira

Paginação: Célia Neves, Leonor Ferreira e Sérgio Pires

Documentalista: Paulo Ferreira

Revisão: Ana Abranches e Catarina Pereira

**EDITORA**

Paula Inácio

**A edição revista de acordo com as novas metas curriculares é da responsabilidade de Arnaldo Rolo e Maria Helena Lopes.**



© 2014

Rua Mário Castelhana, 40 – Queluz de Baixo  
2734-502 Barcarena, Portugal

**APOIO AO PROFESSOR**

Tel.: 214 246 901

[apoioaoprofessor@santillana.com](mailto:apoioaoprofessor@santillana.com)

**APOIO AO LIVREIRO**

Tel.: 214 246 906

[apoioaolivreiro@santillana.com](mailto:apoioaolivreiro@santillana.com)

Internet: [www.santillana.pt](http://www.santillana.pt)

Impressão e Acabamento: Lidergraf

ISBN: 978-989-708-539-0

C. Produto: 411 010 204

2.ª Edição

4.ª Tiragem

Depósito Legal: 369979/14



A **cópia ilegal** viola os direitos dos autores.  
Os prejudicados somos todos nós.