

Prova Final 2012 – 1.ª chamada

Cotações

1. Num acampamento de verão, estão jovens de três nacionalidades: jovens portugueses, espanhóis e italianos. Nenhum dos jovens tem dupla nacionalidade.

Metade dos jovens do acampamento são portugueses e há mais espanhóis do que italianos.

- 1.1. Escolhe-se, ao acaso, um dos jovens do acampamento.

5

Qual dos valores seguintes pode ser o valor exato da probabilidade de o jovem escolhido ser espanhol?

Assinala a opção correta.

☐ 25%

☐ 30%

☐ 50%

☐ 60%

- 1.2. Admite que, no acampamento, os jovens ficam alojados em tendas.

6

Numa das tendas dormem um português, um espanhol e um italiano. Numa outra tenda dormem um português e um espanhol.

Vão ser escolhidos, ao acaso, dois jovens, um de cada uma dessas tendas.

Qual é a probabilidade de os dois jovens escolhidos terem a mesma nacionalidade?

Apresenta a resposta na forma de fração.

Mostra como chegaste à tua resposta.

2. Considera três números naturais **diferentes**, dos quais 1 é o menor e a é o maior.

4

Sabe-se que o valor exato da média aritmética desses três números é 11.

Qual é o maior valor que a pode tomar?

Resposta: _____

3. Considera os conjuntos $A =]-1, +\infty[$ e $B =]-4, 2]$.

5

Qual dos seguintes conjuntos é igual a $A \cap B$?

Assinala a opção correta.

☐ $] -4, -1[$

☐ $] -1, 2]$

☐ $] -4, 2]$

☐ $] -1, +\infty[$

4. Na tabela seguinte, estão indicados os quatro primeiros termos de uma sequência de intervalos de números reais que segue a lei de formação sugerida.

6

1.º termo	2.º termo	3.º termo	4.º termo	...
$[1, 2]$	$[3, 5]$	$[6, 9]$	$[10, 14]$	...

Determina o oitavo termo dessa sequência.

Mostra como chegaste à tua resposta.

5. Seja n um número natural, diferente de 1.

5

Admite que $n^3 = k$.

Qual é o valor de n^{-3} ?

Assinala a opção correta.

☐ $-k$

☐ k

☐ $\frac{1}{k}$

☐ $-\frac{1}{k}$

6. Qual das inequações seguintes é equivalente à inequação $-2x < 4$?

5

Assinala a opção correta.

☐ $x < -2$

☐ $x > -2$

☐ $x < 2$

☐ $x > 2$

7. Na Figura 1, está representada a maqueta de um terreno plano, de forma quadrada, que tem uma parte em cimento, também de forma quadrada, e uma parte relvada.

Na Figura 2, está uma representação geométrica dessa maqueta.

Sabe-se que:

- $[ABCD]$ e $[AEFG]$ são quadrados;
- o ponto B pertence ao segmento de reta $[AE]$;
- o ponto D pertence ao segmento de reta $[AG]$;
- o lado do quadrado $[AEFG]$ mede mais 2 metros do que o lado do quadrado $[ABCD]$.

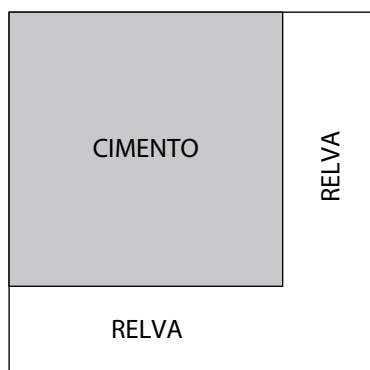


Figura 1

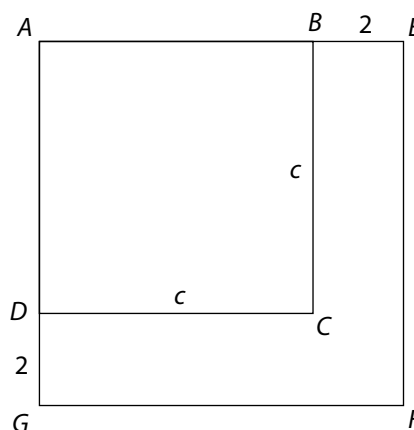


Figura 2

- 7.1. Seja c o comprimento, em metros, do lado do quadrado $[ABCD]$.

4

Explica o que representa a expressão $(c + 2)^2 - c^2$ no contexto da situação descrita.

Resposta: _____

- 7.2. Qual é o transformado do ponto E por meio da rotação de centro no ponto F e amplitude 90° (sentido contrário ao dos ponteiros do relógio)?

5

Resposta: _____

8. Resolve a equação seguinte:

6

$$(x + 2)^2 = 3x^2 + 2x$$

Apresenta os cálculos que efetuares.

9. Resolve o sistema de equações seguinte:

6

$$\begin{cases} x - \frac{y-1}{2} = 3 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$$

Apresenta os cálculos que efetuares.

10. Para um certo valor de k ($k \neq 0$ e $k \neq 1$), a expressão $y = \frac{k}{x}$ traduz a relação entre as variáveis x e y . 5

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

Assinala a opção correta.

- ☐ As variáveis x e y são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é $\frac{1}{k}$.
- ☐ As variáveis x e y são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é $\frac{1}{k}$.
- ☐ As variáveis x e y são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é k .
- ☐ As variáveis x e y são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é k .

11. Na Figura 3, está representada parte do gráfico de uma função de proporcionalidade inversa. 6

O ponto de coordenadas $(8, 4)$ pertence ao gráfico da função.

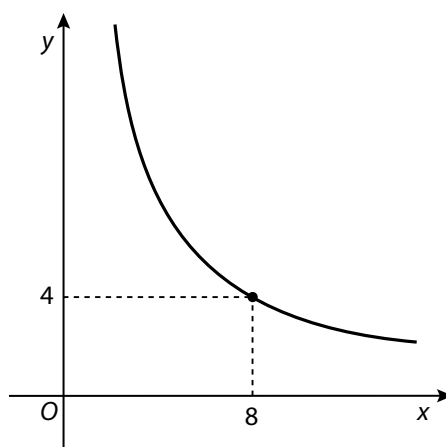


Figura 3

Determina a ordenada do ponto do gráfico que tem abcissa 2.

Mostra como chegaste à tua resposta.

- 12.** A Figura 4 é uma fotografia de um barco rabelo, atualmente usado para transportar turistas na travessia do rio Douro.

A Figura 5 representa um modelo geométrico, em tamanho reduzido, da parte coberta desse barco.



Figura 4

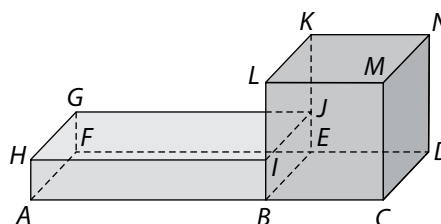


Figura 5

O modelo representado na Figura 5 é um sólido que pode ser decomposto no cubo $[BCDEKL MN]$ e no paralelepípedo retângulo $[ABEFGHIJ]$. O modelo não está desenhado à escala.

Sabe-se ainda que:

- o ponto I pertence ao segmento de reta $[BL]$ e $\overline{BI} = \frac{1}{3} \overline{BL}$;
- $\overline{AB} = 2 \overline{BC}$;
- o volume total do sólido é 25 cm^3 .

- 12.1.** Seja a a medida, em centímetros, da aresta do cubo.

6

Determina o valor exato de a .

Mostra como chegaste à tua resposta.

- 12.2.** Indica, usando as letras da Figura 5, uma reta que passe no ponto I e seja perpendicular ao plano FGH .

5

Resposta: _____

- 13.** Relativamente à Figura 6, sabe-se que:

- o triângulo $[ABC]$ é escaleno e é retângulo em B ;
- os pontos E e P pertencem ao segmento de reta $[AC]$;
- o ponto D pertence ao segmento de reta $[AB]$;
- o triângulo $[ADE]$ é retângulo em D ;
- o ponto Q pertence ao segmento de reta $[BC]$;
- PCQ é um arco de circunferência.

A figura não está desenhada à escala.

- 13.1.** Admite que $\overline{AD} = 20$, $\overline{AE} = 25$ e $\overline{AC} = 40$.

Determina $\overline{BC}$.

Mostra como chegaste à tua resposta.

- 13.2.** Admite agora que a amplitude do ângulo DAE é 37° .

Determina a amplitude, em graus, do arco PCQ .

Mostra como chegaste à tua resposta.

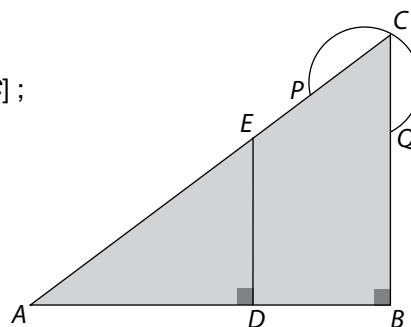


Figura 6

5

6

13.3. Qual das afirmações seguintes é verdadeira? Assinala a opção correta.

5

☐ $\sin \hat{ACB} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

☐ $\sin \hat{ACB} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

☐ $\cos \hat{ACB} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

☐ $\cos \hat{ACB} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

14. Na Figura 7, está representado um recipiente com tinta. Nesse recipiente mergulhou-se um 5
cubo branco, tal como se ilustra na Figura 8. Desta forma, a parte do cubo que ficou sub-
mersa adquiriu a cor da tinta.

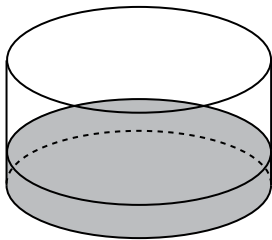


Figura 7

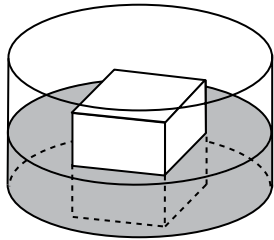
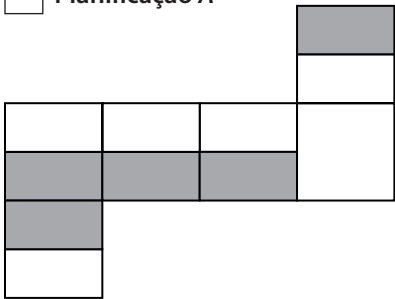


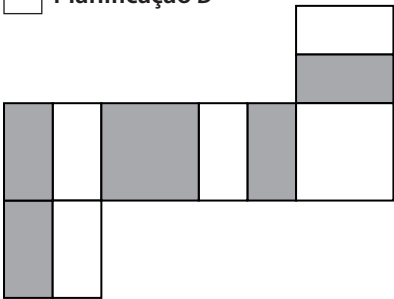
Figura 8

Em qual das opções seguintes pode estar uma planificação desse cubo depois de retirado
do recipiente? Assinala a opção correta.

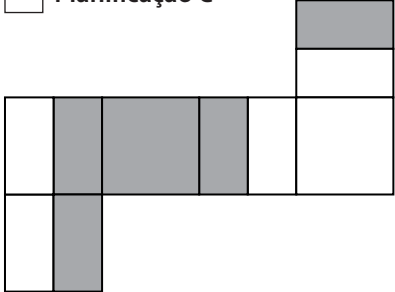
☐ Planificação A



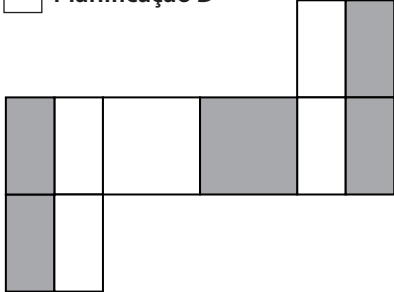
☐ Planificação B



☐ Planificação C



☐ Planificação D



FIM

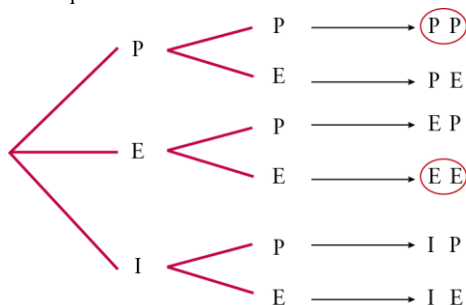
PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

Prova Final 2012 (1.ª Chamada)

- 1.1. Metade dos jovens do acampamento são espanhóis e italianos. Mas, como há mais espanhóis do que italianos, a probabilidade de o jovem escolhido ser espanhol é maior que 25% e menor que 50%.

Resposta: A opção correta é 30%.

- 1.2. Vamos recorrer a um diagrama em árvore, por exemplo, para resolver a questão.



Número de casos possíveis: 6

Número de casos favoráveis: 2

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Resposta: A probabilidade de os dois jovens escolhidos terem a mesma nacionalidade é $\frac{1}{3}$.

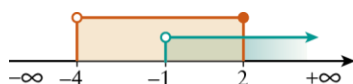
2. A soma dos três números naturais é 33, pois a respetiva média é 11 e $3 \times 11 = 33$.

Assim, a toma o maior valor possível se o valor intermédio for o menor possível, ou seja, 2.

$$\frac{1+2+a}{3} = 11 \Leftrightarrow 1+2+a = 33 \Leftrightarrow a = 33-1-2 \Leftrightarrow a = 30$$

Resposta: O maior valor que a pode tomar é 30.

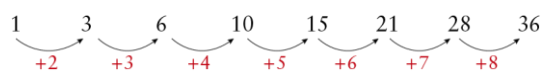
3.



$$A \cap B = [-1, 2]$$

Resposta: A opção correta é $[-1, 2]$.

4. Vamos considerar a sequência dos extremos inferiores dos intervalos:



O extremo inferior do 8.º termo é 36.

Por outro lado, as amplitudes dos intervalos são iguais às respetivas ordens: $2 - 1 = 1$; $5 - 3 = 2$; $9 - 6 = 3$; ...

Como $36 + 8 = 44$, o 8.º termo da sequência é $[36, 44]$.

5. Como $n^3 = k$, então $n^{-3} = \frac{1}{n^3} = \frac{1}{k}$.

6. $-2x < 4 \Leftrightarrow 2x > -4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{2} \Leftrightarrow x > -2$

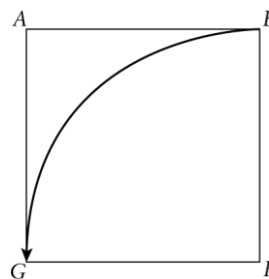
Resposta: A opção correta é $x > -2$.

- 7.1. $c + 2$ representa o comprimento, em metros, do

Quadrado $[AEFG]$. Assim, $(c + 2)^2$ representa a área do quadrado $[AGFE]$ e c^2 representa a área do quadrado $[ABCD]$.

Logo, no contexto do problema, a expressão $(c + 2)^2 - c^2$ representa a área da parte relvada do terreno.

7.2.



$$\overline{FE} = \overline{FG}$$

$[FE]$ e $[FG]$ são dois dos lados do quadrado $[AEFG]$.

$$\widehat{EFG} = 90^\circ$$

Resposta: O transformado do ponto E pedido é o ponto G .

8. $(x + 2)^2 = 3x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 = 3x^2 + 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x^2 + 4x - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times (-2) \times 4}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 6}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2-6}{-4} \vee x = \frac{-2+6}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-8}{-4} \vee x = \frac{4}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

Logo, o conjunto-solução da equação dada é $S = \{-1, 2\}$.

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
 9. \quad \begin{cases} x - \frac{y-1}{2} = 3 \\ 3x - y = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{2} - \frac{y-1}{2} = \frac{6}{2} \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 6 \\ -y = 6 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6 - 3x + 1 = 6 \\ y = -6 + 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3x = 6 - 6 - 1 \\ y = -6 + 3x \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -x = -1 \\ y = -6 + 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -6 + 3 \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Logo, o conjunto-solução da equação dada é $S = \{(1, -3)\}$.

$$10. \quad y = \frac{k}{x} \Leftrightarrow xy = k$$

A opção correta é «As variáveis x e y são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é k ».

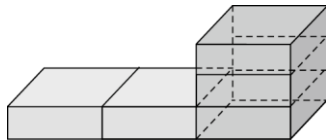
11. Duas variáveis, x e y , são inversamente proporcionais se o seu produto é constante: $x \times y = k$.

Neste caso, $k = 8 \times 4 = 32$.

Como $2 \times y = 32$, então $y = \frac{32}{2} = 16$.

Resposta: A ordenada do ponto pedida é 16.

- 12.1. Tendo em conta os dados do enunciado, podemos decompor o sólido em 5 paralelepípedos retângulos congruentes.



O volume de cada um dos paralelepípedos é $\frac{25 \text{ cm}^3}{5} = 5 \text{ cm}^3$.

Logo, o volume do cubo é $3 \times 5 \text{ cm}^3 = 15 \text{ cm}^3$.

A medida da aresta do cubo é $a = \sqrt[3]{15} \text{ cm}$.

Resposta: $a = \sqrt[3]{15} \text{ cm}$

- 12.2. A reta pedida é IH .

- 13.1. Os triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$ são semelhantes, porque têm, de um para o outro, dois ângulos congruentes (critério AA):

$\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$ (ângulo comum aos dois triângulos)

$\widehat{EDA} = \widehat{CBA} = 90^\circ$ (ângulos retos)

Assim, os comprimentos dos lados correspondentes são

diretamente proporcionais, pelo que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$.

Para calcular $\overline{BC}$ é necessário calcular, previamente, $\overline{DE}$.

Pelo Teorema de Pitágoras, vem:

$$\overline{DE}^2 + 20^2 = 25^2 \Leftrightarrow \overline{DE}^2 = 25^2 - 20^2 \Leftrightarrow \overline{DE}^2 = 225$$

Como $\overline{DE}$ é a medida de um comprimento, então

$$\overline{DE} = \sqrt{225} = 15.$$

Assim, $\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{40}{25}$, pelo que $\overline{BC} = \frac{15 \times 40}{25} \Leftrightarrow \overline{BC} = 24$.

Logo, $\overline{BC} = 24 \text{ cm}$.

- 13.2. A amplitude do arco PCQ é $360^\circ - \widehat{PQ} = 360^\circ - 2 \times \widehat{ACB}$, pois numa circunferência, a amplitude de um arco é igual ao dobro da amplitude do ângulo inscrito correspondente.

Ora, $\widehat{ACB} = 180^\circ - 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$ e $360^\circ - 2 \times 53^\circ = 254^\circ$.

Logo, a amplitude do arco PCQ é 254° .

- 13.3. Relativamente ao ângulo ACB : $[AB]$ é o cateto oposto; $[BC]$ é o cateto adjacente; $[AC]$ é a hipotenusa.

Assim, $\sin \widehat{ACB} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ e $\cos \widehat{ACB} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$.

Resposta: A opção correta é $\cos \widehat{ACB} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$.

14. Depois de retirado do recipiente, uma face do cubo está completamente pintada, assim como metade de quatro das faces do cubo.

Adjacente à face completamente pintada, estão as partes pintadas de duas das faces parcialmente pintadas e adjacente à face não pintada, estão as partes não pintadas de duas faces parcialmente pintadas.

Resposta: A opção correta é a planificação C.