

# Prova Final 2012 – 2.ª chamada

Cotações

1. Um saco contém várias bolas com o número 1, várias bolas com o número 2 e várias bolas com o número 3.

As bolas são indistinguíveis ao tato.

A Maria realizou dez vezes o seguinte procedimento: retirou, ao acaso, uma bola do saco, registou o número inscrito na bola e colocou novamente a bola no saco.

Em seguida, a Maria calculou a frequência relativa de cada um dos números 1, 2 e 3 e elaborou uma tabela.

Nessa tabela, substituiu-se a frequência relativa do número 2 por  $a$ , obtendo-se a seguinte tabela.

| Número inscrito na bola | Frequência relativa |
|-------------------------|---------------------|
| 1                       | 0,3                 |
| 2                       | $a$                 |
| 3                       | 0,4                 |

- 1.1. Qual é o valor de  $a$ ?

5

Assinala a opção correta.

☐ 0,2

☐ 0,3

☐ 0,4

☐ 0,5

- 1.2. Admite que, no saco, **metade** das bolas têm o número 1.

5

Admite ainda que se vai retirar uma bola do saco um milhão de vezes, seguindo o procedimento da Maria.

Será de esperar que a frequência relativa do número 1 se mantenha igual a 0,3?

Justifica a tua resposta.

2. Um certo conjunto de cartas de jogar é constituído por doze cartas vermelhas e por algumas cartas pretas.

5

Escolhe-se, ao acaso, uma carta deste conjunto.

Sabe-se que a probabilidade de essa carta ser vermelha é 75%.

Quantas cartas pretas há neste conjunto?

Assinala a opção correta.

☐ 3

☐ 4

☐ 6

☐ 9

3. Seja  $r$  um número real positivo.

5

Sabe-se que as expressões  $\frac{1}{2r} \times 10^{-20}$  e  $r \times 10^{30}$  representam as medidas dos comprimentos de dois lados consecutivos de um certo retângulo.

Qual das expressões seguintes é a medida da área desse retângulo?

Assinala a opção correta.

☐  $2 \times 10^9$

☐  $2 \times 10^{10}$

☐  $5 \times 10^9$

☐  $5 \times 10^{10}$

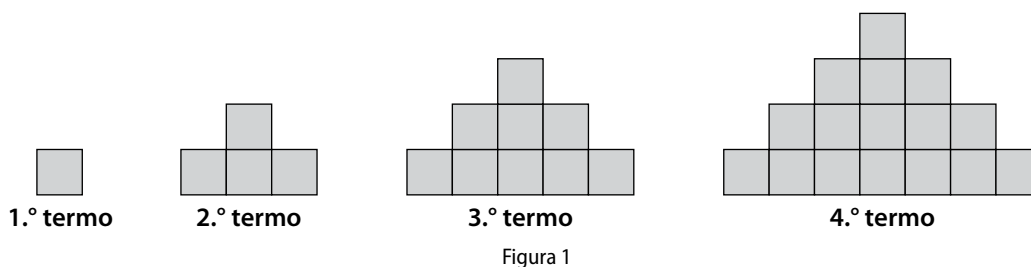
4. Escreve um número compreendido entre 3,14 e  $\pi$ .

4

**Resposta:** \_\_\_\_\_

5. Na Figura 1, estão representados os quatro primeiros termos de uma sequência de figuras, constituídas por quadrados geometricamente iguais, que segue a lei de formação sugerida.

6



Existe algum termo nesta sequência constituído por 200 quadrados geometricamente iguais ao do primeiro termo da sequência?

Justifica a tua resposta.

6. A distância,  $d$ , em milhões de quilómetros, percorrida pela luz em  $t$  segundos pode ser dada por  $d = 0,3t$ .

- 6.1. Interpreta, no contexto da situação descrita, a afirmação seguinte.

4

«Tem-se  $d = 0,6$  quando  $t = 2$ »

**Resposta:** \_\_\_\_\_

- 6.2. Admite que a distância do Sol à Terra é 150 milhões de quilómetros. Determina quanto tempo demora a chegar à Terra a luz emitida pelo Sol.

6

Apresenta o resultado em minutos e segundos.

Mostra como chegaste à tua resposta.

7. Resolve a inequação seguinte:

6

$$x - \frac{1}{2}(x - 6) \leq 5x + \frac{10}{3}$$

Apresenta o conjunto-solução na forma de um intervalo de números reais.

Apresenta os cálculos que efetuares.

8. Resolve a equação seguinte:

6

$$x(x - 2) + 3(x - 2) = 0$$

Apresenta os cálculos que efetuares.

9. Um grupo de amigos foi a Coimbra visitar o Portugal dos Pequenitos.

5

O grupo era constituído por seis adultos e dez crianças. Pagaram, ao todo, 108,70 euros pelas entradas. Os preços dos bilhetes de adulto e de criança eram diferentes.

O Pedro, a criança mais velha do grupo, pensou: «Se eu já pagasse bilhete de adulto, o nosso grupo iria pagar mais 3,45 euros pelas entradas». Admite que o Pedro pensou corretamente.

Seja  $x$  o preço do bilhete de adulto e seja  $y$  o preço do bilhete de criança.

Escreve um sistema de equações que permita determinar o preço do bilhete de adulto (valor de  $x$ ) e o preço do bilhete de criança (valor de  $y$ ).

**Resposta:** \_\_\_\_\_

10. Qual das expressões seguintes é equivalente a  $(x - a)^2 + 2ax$  ?

5

Assinala a opção correta.

☐  $x^2 + a^2 + 2ax$

☐  $x^2 - a^2 + 2ax$

☐  $x^2 - a^2$

☐  $x^2 + a^2$

11. A Figura 2 representa um modelo geométrico de uma rampa de skate. O modelo não está desenhado à escala.

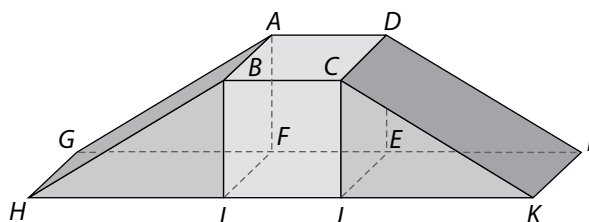


Figura 2

Este modelo é um sólido que pode ser decomposto no cubo  $[ABCDEFGHIJ]$  e nos prismas triangulares retos  $[BHIFAG]$  e  $[CKJEDL]$ , geometricamente iguais.

As bases dos prismas são triângulos retângulos.

Sabe-se ainda que:

•  $\overline{HI} = 5 \text{ m}$

•  $\hat{IHB} = 32^\circ$

**11.1.** Identifica, usando as letras da Figura 2, a interseção dos planos  $HIB$  e  $JCD$ .

5

**Resposta:** \_\_\_\_\_

**11.2.** Determina o volume do sólido representado na Figura 2.

6

Apresenta o resultado em metros cúbicos, arredondado às unidades.

Apresenta os cálculos que efetuares.

**Nota:** Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, três casas decimais.

**12.** Na Figura 3, está representada uma circunferência de centro no ponto  $O$ .

Sabe-se que:

- os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertencem à circunferência;
- as retas  $AD$  e  $CD$  são tangentes à circunferência nos pontos  $A$  e  $C$ , respetivamente;
- o ponto  $E$  pertence à reta  $CD$ .

Admite que  $\hat{AOC} = 140^\circ$ .

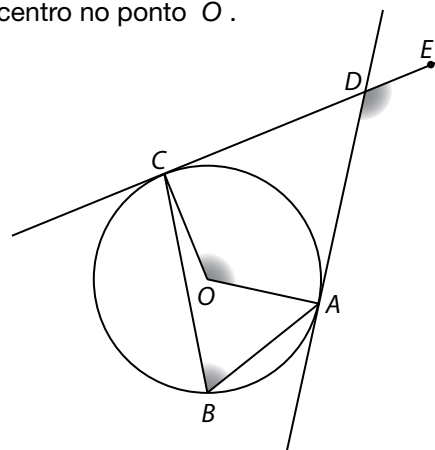


Figura 3

**12.1.** Qual é a amplitude, em graus, do ângulo  $ABC$ ?

5

Assinala a opção correta.

☐  $35^\circ$

☐  $70^\circ$

☐  $140^\circ$

☐  $280^\circ$

**12.2.** Determina a amplitude, em graus, do ângulo  $ADE$ .

6

Mostra como chegaste à tua resposta.

**13.** Relativamente à Figura 4, sabe-se que:

- os triângulos  $[ABC]$  e  $[AFC]$  são retângulos em  $A$  ;
- o triângulo  $[AFC]$  é isósceles;
- o ponto  $E$  pertence ao segmento de reta  $[BC]$  ;
- o ponto  $D$  pertence ao segmento de reta  $[AB]$  ;
- os segmentos de reta  $[AC]$  e  $[DE]$  são paralelos;
- $\overline{AC} = 12$  cm ;
- o perímetro do triângulo  $[ABC]$  é 48 cm ;
- o perímetro do triângulo  $[DBE]$  é 16 cm .

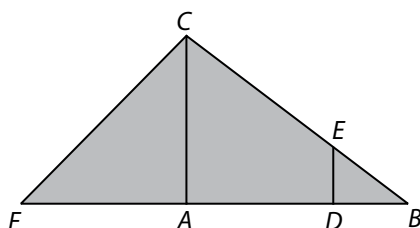


Figura 4

**Nota:** A figura não está desenhada à escala.

**13.1.** Qual dos valores seguintes é a medida, em centímetros, do comprimento do segmento de reta  $[DE]$  ? 5

Assinala a opção correta.

- ☐ 3
- ☐ 3,5
- ☐ 4
- ☐ 4,5

**13.2.** Determina o comprimento da circunferência que passa nos pontos  $A$  ,  $F$  e  $C$  . 6

Apresenta o resultado em centímetros, arredondado às unidades.

Apresenta os cálculos que efetuares.

**Nota:** Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais.

14. Considera o triângulo  $[ABC]$  representado no referencial da Figura 5.

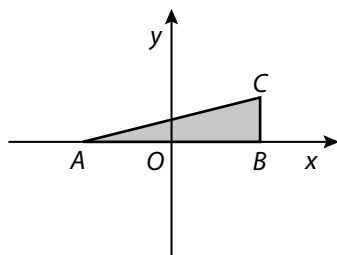
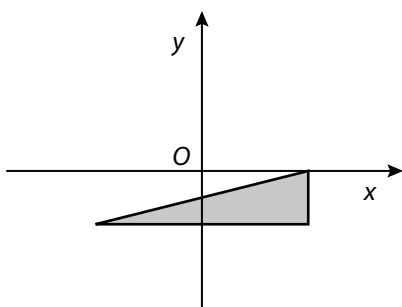


Figura 5

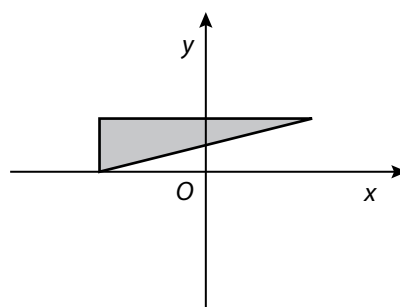
Em qual das opções seguintes está representado o transformado do triângulo  $[ABC]$  por meio da rotação de centro no ponto  $O$  e amplitude  $180^\circ$ ?

Assinala a opção correta.

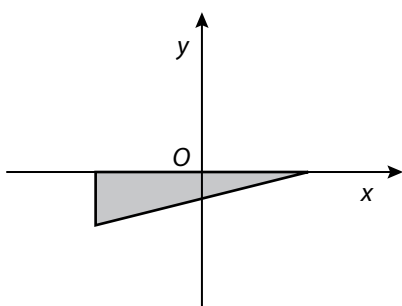
☐ Opção A



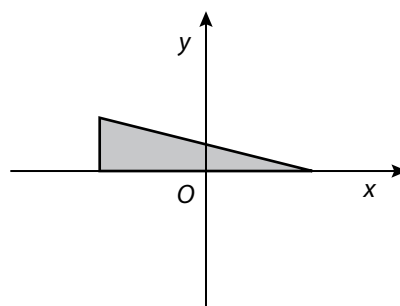
☐ Opção B



☐ Opção C



☐ Opção D



# PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

## Prova Final 2012 (2.ª Chamada)

1.1. A soma das frequências relativas é igual a 1.

$$a = 1 - 0,3 - 0,4 = 0,3$$

**Resposta:** A opção correta é 0,3.

1.2. Como a experiência é repetida um elevado número de vezes e metade das bolas do saco têm o número 1, então seria espetável que a frequência relativa do número 1 fosse um valor próximo de 0,5.

Logo, não é de esperar que a frequência relativa seja 0,3.

$$2. P(\text{sair carta vermelha}) = 75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = \frac{12}{16}$$

No total, há 16 cartas, 4 das quais são pretas ( $16 - 12 = 4$ ).

**Resposta:** A opção correta é 4.

3. A área do retângulo  $A = \text{base} \times \text{altura}$ .

$$A = \frac{1}{2r} \times 10^{-20} \times r \times 10^{30} = \frac{r}{2r} \times 10^{-20} \times 10^{30} = 0,5 \times 10^{10} = 5 \times 10^9$$

**Resposta:** A opção correta é  $5 \times 10^9$ .

4.  $\pi = 3,14159\dots$  Por exemplo,  $3,14 < 3,1405 < \pi$ .

**Resposta:** 3,1405

5. A sequência numérica que representa o número de quadrados é: 1, 4, 9, 16, ... Cada termo é igual ao quadrado da respetiva ordem. Como 200 não é um quadrado perfeito ( $\sqrt{200} \notin \mathbb{N}$ , pois  $\sqrt{200} = 14,142\dots$ ), então não há qualquer termo da sequência constituído por 200 quadrados.

6.1. Por exemplo: A luz percorre 0,6 milhões de quilómetros em 2 segundos.

$$6.2. d = 0,3t; d = 150; 150 = 0,3t \Leftrightarrow t = \frac{150}{0,3} \Leftrightarrow t = 500$$

$$500 = 8 \times 60 + 20 \rightarrow 500 \text{ s} = 8 \text{ min } 20 \text{ s}$$

Logo, a luz emitida pelo Sol demora 8 min 20 s a chegar à Terra.

$$7. x - \frac{1}{2}(x-6) \leq 5x + \frac{10}{3} \Leftrightarrow \underset{(\times 6)}{x} - \underset{(\times 3)}{\frac{1}{2}x} + \underset{(\times 3)}{6} \leq \underset{(\times 6)}{5x} + \underset{(\times 2)}{\frac{10}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x - 3x + 18 \leq 30x + 20 \Leftrightarrow 6x - 3x - 30x \leq 20 - 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -27x \leq 2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{27}$$

$$\text{Logo, } S = \left[ -\frac{2}{27}, +\infty \right).$$

$$8. x(x-2)+3(x-2)=0 \Leftrightarrow x^2-2x+3x-6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1-5}{2} \vee x = \frac{-1+5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-6}{2} \vee x = \frac{4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$$

Logo,  $S = \{-3, 2\}$ .

**Outro processo:**

$$x(x-2)+3(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \vee x+3=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-3$$

9.  $6x \rightarrow$  quantia paga pelos seis bilhetes para adultos

$10y \rightarrow$  quantia paga pelos dez bilhetes para crianças

Como, ao todo pagaram 108,70 €, vem  $6x + 10y = 108,70$ .

Se o Pedro pagasse bilhete de adulto, teríamos:

$7x \rightarrow$  quantia paga pelos sete bilhetes para adultos

$9y \rightarrow$  quantia paga pelos nove bilhetes para crianças

Como o grupo pagaria mais 3,45 €, pagaria, ao todo, 112,15 € ( $108,70 + 3,45 = 112,15$ ), pelo que, vem:

$$7x + 9y = 112,15$$

**Resposta:**  $6x + 10y = 108,70 \wedge 7x + 9y = 112,15$  ou

$$\begin{cases} 6x + 10y = 108,70 \\ 7x + 9y = 112,15 \end{cases}$$

$$10. (x-a)^2 + 2ax = x^2 - 2ax + a^2 + 2ax = x^2 + a^2$$

**Resposta:** A opção correta é  $x^2 + a^2$ .

11.1. Os planos  $HIB$  e  $JCD$  são perpendiculares.

Logo, interseccionam-se numa reta.

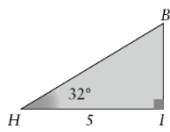
**Resposta:** Reta  $CJ$ .

## PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

- 11.2. Os prismas  $[BHIFAG]$  e  $[CKJEDL]$  são congruentes, pelo que têm o mesmo volume.

Cálculos auxiliares:

$$\operatorname{tg} 32^\circ = \frac{\overline{BI}}{5} \Leftrightarrow \overline{BI} = 5 \operatorname{tg} 32^\circ$$



$$\text{Assim, } V_{[BHIFAG]} = \frac{\overline{HI} \times \overline{IB}}{2} \times \overline{AB}; \quad \overline{HI} = 5; \quad \overline{IB} = \overline{AB} = 5 \operatorname{tg} 32^\circ$$

$$V_{[BHIFAG]} = \frac{5 \times 5 \operatorname{tg} 32^\circ}{2} \times 5 \operatorname{tg} 32^\circ = \frac{125 \times \operatorname{tg}^2 32^\circ}{2}$$

$$V_{[ABCDEFL]} = \left(\overline{AB}\right)^3; \quad \overline{AB} = 5 \operatorname{tg} 32^\circ; \quad V_{[ABCDEFL]} = (5 \times \operatorname{tg} 32^\circ)^3 = 125 \operatorname{tg}^3 32^\circ$$

$$V_{\text{sólido}} = \frac{2 \times 125 \operatorname{tg}^2 32^\circ}{2} + 125 \operatorname{tg}^3 32^\circ \approx 79$$

Logo, o volume do sólido pedido é  $79 \text{ m}^3$ .

- 12.1. O ângulo  $ABC$  é um ângulo inscrito na circunferência cujo arco correspondente está, também, compreendido entre os lados do ângulo ao centro  $AOC$ .

$$\text{Logo, } \hat{ABC} = \frac{AOC}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ.$$

**Resposta:** A opção correta é  $70^\circ$ .

- 12.2. A soma das amplitudes dos ângulos internos do quadrilátero  $[ADCO]$  é  $360^\circ$ .

Como  $\hat{DAO} = \hat{OCD} = 90^\circ$ , pois as retas tangentes a uma circunferência são perpendiculares aos raios que contêm os pontos de tangência, então  $\hat{CDA} = 360^\circ - 140^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 40^\circ$ .

Dado que os ângulos  $ADE$  e  $CDA$  são suplementares, conclui-se que  $\hat{ADE} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ .

Logo, a amplitude do ângulo  $ADE$  é  $140^\circ$ .

- 13.1. Os triângulos  $[ABC]$  e  $[DBE]$  são semelhantes,

porque têm, de um para o outro, dois ângulos congruentes:

- $\hat{BAC} = \hat{BDE} = 90^\circ$  ( $[AB] \perp [AC]$ ,  $[AB] \parallel [DB]$  e  $[AC] \parallel [DE]$ , pelo que  $[DB] \perp [DE]$ .)
- $\hat{EBD} = \hat{CBA}$  (ângulo comum)

Logo, os comprimentos dos lados congruentes são diretamente proporcionais. Como a razão dos perímetros é igual à razão de semelhança, a razão de semelhança na redução é  $r = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$ .

$$\text{Portanto, } \overline{DE} = \frac{1}{3} \overline{AC}, \text{ ou seja, } \overline{DE} = \frac{1}{3} \times 12 = 4.$$

**Resposta:** A opção correta é 4.

- 13.2. O triângulo  $[ACF]$  é isósceles e retângulo no ponto  $A$ , pelo que o centro da circunferência que contém os  $A$ ,  $F$  e  $C$  é o ponto médio do segmento de reta  $[CF]$  e, portanto,  $[CF]$  é um dos seus diâmetros.

Pelo Teorema de Pitágoras  $\overline{CF}^2 = \overline{FA}^2 + \overline{AC}^2$ , ou seja,

$$\overline{CF}^2 = 12^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{CF}^2 = 144 + 144 \Leftrightarrow \overline{CF}^2 = 288$$

Como  $\overline{CF}$  é a medida de um comprimento, então  $\overline{CF} = \sqrt{288} \text{ cm}$ .

O comprimento da circunferência é igual a  $\pi \times d$ , sendo  $d$  o diâmetro da circunferência.  $\pi \times \sqrt{288} \approx 53$

Logo, o comprimento da circunferência pedido é 53 cm.

14. A opção correta é a opção (C).