

1. Uma escola básica tem duas turmas de 9.º ano: a turma *A* e a turma *B*. Os alunos da turma *A* distribuem-se, por idades, de acordo com o seguinte diagrama circular.

Idades dos alunos da turma *A*



Os alunos da turma *B* distribuem-se, por idade e por sexo, de acordo com a tabela seguinte.

Turma *B*

	14 anos	15 anos	16 anos
Raparigas	9	3	4
Rapazes	6	1	3

- 1.1. Escolhe-se, ao acaso, um aluno da turma *A*. Seja p a probabilidade de o aluno escolhido ter 15 anos. 5

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

Transcreve a letra da opção correta.

(A) $p \in \left] 0, \frac{1}{4} \right[$

(B) $p \in \left] \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right[$

(C) $p \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right[$

(D) $p \in \left] \frac{3}{4}, 1 \right[$

- 1.2. Para um certo número natural n , a expressão $\frac{9 \times 14 + 3 \times 15 + 4 \times 16}{n}$ representa a média das idades das raparigas da turma *B*. 4

Qual é o valor de n ?

- 1.3. Vão ser escolhidos, ao acaso, dois alunos da turma *B* com 15 anos. 6

Determina a probabilidade de os dois alunos escolhidos serem do mesmo sexo.

Mostra como chegaste à tua resposta.

2. Considera o conjunto $A =]-\pi, -1]$.

5

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

Transcreve a letra da opção correta.

(A) $-3,1 \in A$

(B) $-\pi \in A$

(C) $\pi \in A$

(D) $-3,14 \in A$

3. Para um certo número inteiro k , a expressão 3^k é igual a $\left(\frac{1}{9}\right)^4$.

5

Qual é esse número k ?

4. Na Figura 1, estão representados os cinco primeiros termos de uma sequência de conjuntos de círculos que segue a lei de formação sugerida.

6

Os dois primeiros termos são formados só por círculos pretos. Os restantes são formados por círculos pretos e círculos brancos.

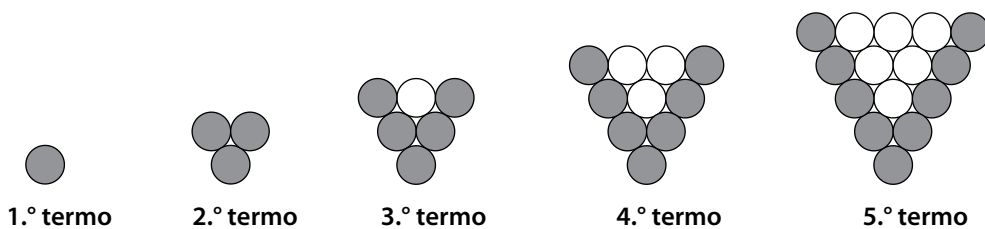


Figura 1

Existe um termo desta sequência que tem um número total de círculos igual à soma dos 100 primeiros números naturais.

Quantos círculos pretos tem esse termo? Mostra como chegaste à tua resposta.

5. Resolve a equação seguinte:

8

$$\frac{(x-1)^2}{6} - \frac{2x+1}{3} = 1$$

Apresenta os cálculos que efetuares.

6. Na Figura 2, estão representadas, num referencial cartesiano, as retas r e s .

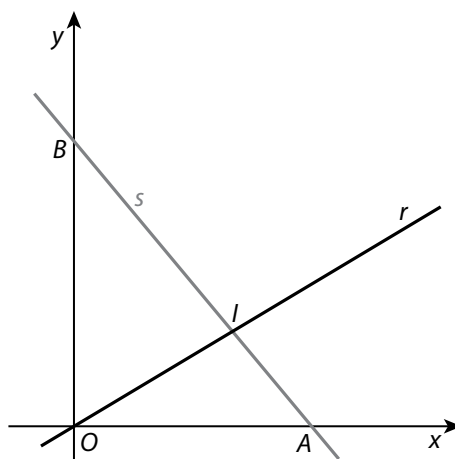


Figura 2

Sabe-se que:

- a reta r é definida por $y = 0,6x$;
- a reta s é definida por $y = -1,2x + 4,5$;
- o ponto A é o ponto de interseção da reta s com o eixo das abcissas;
- o ponto B é o ponto de interseção da reta s com o eixo das ordenadas;
- o ponto I é o ponto de interseção das retas r e s .

- 6.1. Qual é a ordenada do ponto B ?

4

- 6.2. Qual é a medida do comprimento do segmento de reta $[OA]$?

5

Transcreve a letra da opção correta.

- (A) 3,5
- (B) 3,75
- (C) 4,5
- (D) 4,75

- 6.3. Determina as coordenadas do ponto I .

8

Mostra como chegaste à tua resposta.

7. No referencial cartesiano da Figura 3, está representada parte do gráfico da função f definida por:

$$y = \frac{10}{x} \quad (x > 0)$$

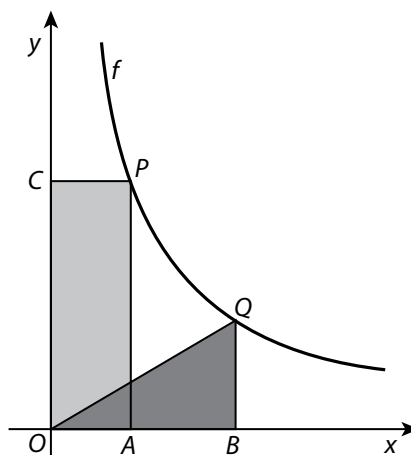


Figura 3

Sabe-se que:

- os pontos P e Q pertencem ao gráfico da função f ;
- os pontos A e B pertencem ao eixo das abcissas;
- o ponto C pertence ao eixo das ordenadas;
- as abcissas dos pontos A e P são iguais;
- as abcissas dos pontos B e Q são iguais.

- 7.1. Qual é a área do retângulo $[OAPC]$?

5

Transcreve a letra da opção correta.

(A) 5

(B) 10

(C) 15

(D) 20

- 7.2. Admite que $\overline{OB} = 4$.

7

Determina o perímetro do triângulo $[OBQ]$.

Apresenta o resultado arredondado às décimas.

Mostra como chegaste à tua resposta.

Nota: Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais.

8. Na Figura 4, estão representados um retângulo $[ABCD]$ e uma circunferência de centro no ponto O e raio r .

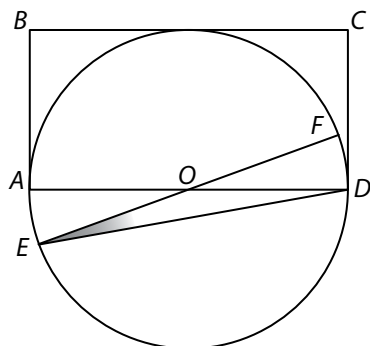


Figura 4

Sabe-se que:

- o ponto E pertence à circunferência e é exterior ao retângulo $[ABCD]$;
- $[AD]$ e $[EF]$ são diâmetros da circunferência;
- o lado $[BC]$ do retângulo é tangente à circunferência;
- $\widehat{DEF} = 10^\circ$.

- 8.1. Admite que o perímetro do retângulo $[ABCD]$ é igual a 30 cm .

8

Determina o comprimento da circunferência.

Apresenta o resultado em centímetros, arredondado às décimas.

Mostra como chegaste à tua resposta.

Nota: Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais.

- 8.2. Determina a amplitude de uma rotação de centro em O que transforme o ponto F no ponto A .

8

Mostra como chegaste à tua resposta.

- 8.3. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

5

Transcreve a letra da opção correta.

- (A) O ponto B pertence à mediatriz do segmento de reta $[ED]$.
- (B) O ponto O pertence à mediatriz do segmento de reta $[ED]$.
- (C) O ponto B pertence à mediatriz do segmento de reta $[CD]$.
- (D) O ponto O pertence à mediatriz do segmento de reta $[CD]$.

9. Relativamente à Figura 5, sabe-se que:

- $[ABCDEFGH]$ é um prisma quadrangular reto;
- $[ABCDI]$ é uma pirâmide quadrangular regular;
- o ponto I é o centro da face $[EFGH]$ do prisma;
- o volume do prisma $[ABCDEFGH]$ é 27 cm^3 .

Supõe agora que ao prisma $[ABCDEFGH]$ se vai retirar a pirâmide $[ABCDI]$.

Qual é o volume, em cm^3 , do sólido que se obtém depois de retirada a pirâmide ao prisma?

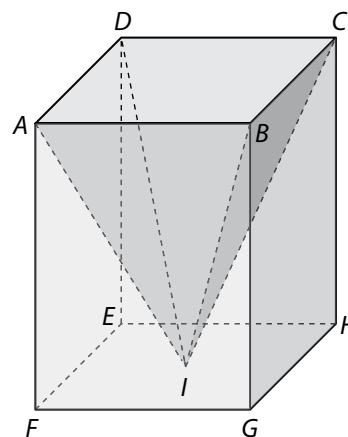


Figura 5

10. Relativamente à Figura 6, sabe-se que:

- o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C ;
- o ponto E pertence ao segmento de reta $[AB]$;
- o ponto D pertence ao segmento de reta $[AC]$;
- o triângulo $[ADE]$ é retângulo em E .

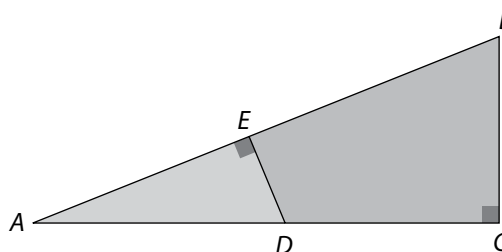


Figura 6

Sabe-se ainda que:

- $\overline{ED} = 2 \text{ cm}$;
- $\overline{AE} = \frac{1}{2} \overline{AC}$;
- a área do triângulo $[ABC]$ é 20 cm^2 .

Determina $\overline{AC}$.

Apresenta a tua resposta em centímetros.

Mostra como chegaste à tua resposta.

FIM

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

Teste intermédio 2012

- 1.1. Na turma A, a probabilidade, p , de escolher um aluno que tem 15 anos é $p = 67\% = 0,67$.

$$\text{Ora, } \frac{1}{4} = 0,25 ; \frac{1}{2} = 0,5 \text{ e } \frac{3}{4} = 0,75 .$$

$$\text{Logo, } p \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right] .$$

Resposta: A opção correta é (C).

- 1.2. n representa o número de raparigas da turma B.

$$n = 9 + 3 + 4 = 16$$

Resposta: $n = 16$

- 1.3. Vamos resolver esta equação recorrendo, por exemplo, a uma tabela de dupla entrada.

M_1 representa o rapaz que tem 15 anos. F_1 , F_2 e F_3 representam as raparigas que têm 15 anos.

	M_1	F_1	F_2	F_3
M_1		(M_1, F_1)	(M_1, F_2)	(M_1, F_3)
F_1	(F_1, M_1)		(F_1, F_2)	(F_1, F_3)
F_2	(F_2, M_1)	(F_2, F_1)		(F_2, F_3)
F_3	(F_3, M_1)	(F_3, F_1)	(F_3, F_2)	

Como não interessa a ordem pela qual os alunos são escolhidos, vem:

Número de casos possíveis: 12

Número de casos favoráveis: 6

$$P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Resposta: A probabilidade de os alunos escolhidos serem do mesmo sexo é $\frac{1}{2}$.

2. $-\pi = -3,14159\dots$

Assim $-3,15 \notin A$; $-\pi \notin A$; $\pi \notin A$; $-3,14 \in A$.

Resposta: A opção correta é (D).

$$3. \left(\frac{1}{9}\right)^4 = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^8 = 3^{-8}$$

Como $3^k = \left(\frac{1}{9}\right)^4 = 3^{-8}$, então $k = -8$.

Resposta: $k = -8$

4. Em cada termo da sequência, o número total de círculos é igual à soma dos primeiros n números naturais, sendo n a ordem do termo.

Assim, conclui-se que o número de círculos do centésimo termo da sequência é igual à soma dos 100 números naturais.

Por outro lado, o número de círculos pretos é igual ao dobro da ordem do respetivo termo menos uma unidade.

$$2 \times 100 - 1 = 199$$

Logo, o termo mencionado, centésimo termo da sequência, tem 199 círculos pretos.

$$5. \frac{(x-1)^2}{6} - \frac{2x+1}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{6} - \frac{2x+1}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{6} - \frac{2(2x+1)}{6} = \frac{6}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{6} - \frac{4x+2}{6} = \frac{6}{6} \Leftrightarrow x^2-2x+1-4x-2=6$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x-7=0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times (-7)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 8}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6-8}{2} \vee x = \frac{6+8}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2}{2} \vee x = \frac{14}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 7$$

Logo, o conjunto-solução da equação é $S = \{-1, 7\}$.

- 6.1. A ordenada do ponto B é a ordenada na origem da reta que representa graficamente a função $y = -1,2x + 4,5$, que no caso, é 4,5.

Resposta: A ordenada do ponto B é 4,5.

- 6.2. O comprimento do segmento de reta [OA] é igual à abscissa do ponto A, ponto de interseção da reta s com o eixo das abscissas.

Para determinar a abscissa do ponto A, vamos resolver a equação $-1,2x + 4,5 = 0$. Assim, vem:

$$-1,2x + 4,5 = 0 \Leftrightarrow -1,2x = -4,5 \Leftrightarrow x = \frac{-4,5}{-1,2} \Leftrightarrow x = 3,75$$

Logo, $\overline{OA} = 3,75$.

Resposta: A opção correta é (B).

- 6.3. O ponto I é o ponto de interseção das retas r e s.

$$\begin{cases} y = 0,6x \\ y = -1,2x + 4,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,6x \\ 0,6x = -1,2x + 4,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,6x \\ 0,6x + 1,2x = 4,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,6x \\ 1,8x = 4,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,6x \\ x = \frac{4,5}{1,8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,6 \times 2,5 \\ x = 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1,5 \\ x = 2,5 \end{cases}$$

Logo, $I \in (2,5; 1,5)$.

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

7.1. Seja $A(x, 0)$ e $P(x, y)$.

A área do retângulo $[OAPC]$ é dada por $A = \overline{OA} \times \overline{AP} = x \times y$.

Como $y = \frac{10}{x} \Leftrightarrow x \times y = 10$, então a área do retângulo $[OAPC]$ é 10.

Resposta: A opção correta é (B).

7.2. O perímetro do triângulo $[OBQ]$ é $P = \overline{OB} + \overline{BQ} + \overline{OQ}$.

$\overline{OB} = 4$ (enunciado)

$\overline{BQ}$ é igual à ordenada de $Q(4, y)$.

Sendo $x = 4$, $y = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$. Logo, $\overline{BQ} = \frac{5}{2}$.

Pelo Teorema de Pitágoras, vem:

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BQ}^2 \Leftrightarrow \overline{OQ} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{BQ}^2}$$

$$\overline{OQ} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{1} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{64 + 25}{4}} = \sqrt{\frac{89}{4}} = \frac{\sqrt{89}}{2}$$

$$P = 4 + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{89}}{2} \approx 11,2$$

Logo, o perímetro do triângulo $[OBQ]$ é aproximadamente igual a 11,2.

8.1. Seja r o comprimento do raio, em centímetros.

O perímetro do retângulo $[ABCD]$ é $P = 2 \times \overline{AD} + 2 \times \overline{AB}$, com $\overline{AD} = 2r$ e $\overline{AB} = r$.

Deste modo, $P = 2 \times 2r + 2 \times r = 6r$.

Assim, $6r = 30 \Leftrightarrow r = \frac{30}{6} \Leftrightarrow r = 5$.

Portanto, o raio da circunferência é 5 cm.

Como $2\pi \times 5 = 10\pi \approx 31,4$, então o comprimento da circunferência é 31,4 cm, aproximadamente.

8.2. O ponto F transforma-se no ponto A pela rotação de centro O e amplitude igual a $\widehat{FOA}$.

Sabemos que:

$\widehat{FOA} = \widehat{FA}$ (A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados.)

$\widehat{FA} = \widehat{DA} - \widehat{DF} = 180^\circ - \widehat{DF}$ (A amplitude de uma semicircunferência é 180° .)

$\widehat{DF} = 2 \times \widehat{DEF} = 2 \times 10^\circ = 20^\circ$ (A amplitude de um arco é igual ao dobro da amplitude do ângulo inscrito correspondente.)

Portanto, $\widehat{FOA} = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$.

Logo, conclui-se que a amplitude da rotação é 160° .

Ou -200° ($360^\circ - 160^\circ = 200^\circ$).

8.3. O ponto O pertence à mediatriz do segmento de reta $[ED]$, pois está à mesma distância de E e de D , uma vez que $[OE]$ e $[OD]$ são raios de uma circunferência.

Resposta: A opção correta é (B).

9. Como o prisma e a pirâmide têm a mesma base e a mesma altura, então:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} V_{\text{prisma}} = \frac{1}{3} \times 27 = \frac{27}{3} = 9$$

$$V_{\text{prisma}} - V_{\text{pirâmide}} = 27 - 9 = 18$$

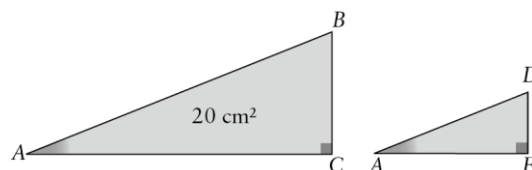
Resposta: O volume pedido é 18 cm^3 .

10. Os triângulos $[ABC]$ e $[AED]$ são semelhantes, pois têm dois ângulos congruentes:

- $\widehat{AED} = \widehat{BCA} = 90^\circ$
- $\widehat{DAE} = \widehat{CAB}$ (ângulo comum)

Assim, os lados correspondentes destes triângulos têm comprimentos diretamente proporcionais, ou seja:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$$



Considerando as duas primeiras razões e tendo em conta que

$\overline{AE} = \frac{1}{2} \overline{AC}$, vem:

$$\frac{\overline{AC}}{\frac{1}{2} \overline{AC}} = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2 \times 2 \Leftrightarrow \overline{BC} = 4$$

Como $A_{[ABC]} = 20 \text{ cm}^2$ e $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2}$, então

$$\frac{\overline{AC} \times 4}{2} = 20 \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{2 \times 20}{4} \Leftrightarrow \overline{AC} = 10$$

Logo, $\overline{AC} = 10 \text{ cm}$.