

PI9

MATEMÁTICA 9º ANO

Fátima Cerqueira Magro
Fernando Fidalgo
Pedro Louçano

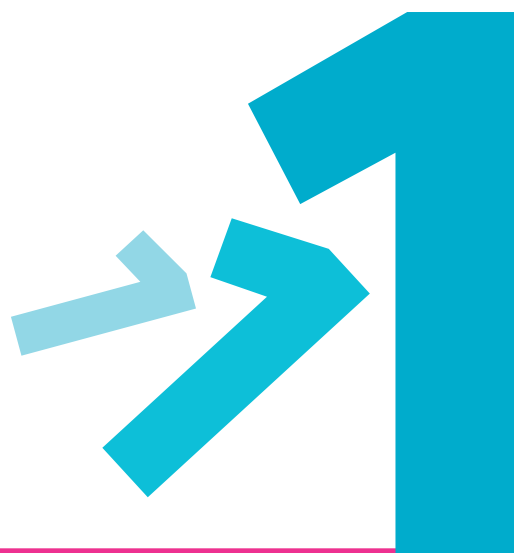
GUIA DO PROFESSOR

- Propostas de resolução de todas as atividades:
 - Manual
 - Caderno de Atividades

Disponível em
20 AULA DIGITAL
para projeção

ÍNDICE

1. Projeto <i>Pi</i>	3
Introdução.....	5
Componentes do projeto.....	7
2. Grelhas de apoio	9
3. Propostas de resolução	11
Manual.....	12
Caderno de Atividades	158



PROJETO *PI*

Introdução

O projeto *Pi* de 9º ano foi construído tendo como base os mesmos princípios de qualidade científico-didática com que foram elaborados os projetos *Pi* de 7º ano e *Pi* de 8º ano. O documento Novo Programa e Metas Curriculares de Matemática esteve subjacente a todo o trabalho e foi integralmente respeitado, com a convicção de que do 7º ano ao 9º ano subsistiu um fio condutor, garante da coesão e coerência do projeto.

Pensamos que o Manual escolar cumpre o seu papel quando, nas mãos do estudante, o desafia, o motiva, o apoia e lhe permite autoavaliar-se no processo de consolidação de novos saberes. O Manual deve, pois, ser encarado como uma ferramenta de trabalho do aluno, como um utensílio que lhe permita prolongar os momentos de aprendizagem, visitar as palavras, as perguntas, os problemas e as reflexões colocadas pelo Professor e, mais do que isso, consolidar a apropriação dos conceitos, das técnicas e dos procedimentos que conheceu em cenário de aula, ou seja, o Manual deve estimular a autonomia do aluno, abrindo-lhe portas para a recuperação e a reinterpretação das vivências da aula.

O projeto *Pi* pretende fomentar a autonomia pedagógica do aluno, incentivando-o a “aprender a aprender” ao longo da vida. Esta vertente está presente ao longo de todo o Manual, desde a elaboração do texto informativo e respetiva exemplificação, passando pela gradação de dificuldade dos exercícios, pelas rubricas *Rever*, *Projeto*, *Não esquecer*, e pela possibilidade de os alunos fazerem a sua autoavaliação, recorrendo a uma tabela associada à rubrica *Não esquecer*.

Sabendo-se de antemão as dificuldades que, por vezes, os alunos evidenciam na seleção, interpretação e aplicação dos conteúdos, optámos por idealizar uma estrutura de Manual que, no nosso entender, poderá contribuir para a colmatação de tais lacunas: blocos de quatro páginas – duas de teoria, seguidas de duas com exercícios de aplicação direta dos conteúdos (*Aplicar*) – para que os alunos possam ler, tentar entender e, de imediato, aplicar.

Dando cumprimento à necessidade de ser um Manual para o aluno, a linguagem é simples e clara, recorrendo-se sistematicamente a situações retiradas da “vida real”, nomeadamente na motivação/introdução de conceitos. O recurso a situações da “vida real” prende-se com o facto de todos os autores do projeto serem docentes da disciplina de Matemática e de, no exercício quotidiano da sua função, terem sentido tal necessidade, reconhecendo a importância do recurso a este método para transmitirem os conteúdos. Numa sociedade em que os adolescentes vivem num mundo cada vez mais concreto e imediato e em que as suas motivações não se encontram orientadas para a apreensão e entendimento de conceitos, é fundamental apresentar a Matemática como algo imprescindível na estruturação do desenvolvimento cognitivo.

O recurso ao tratamento personalizado e direto ao leitor (na 2ª pessoa) tem por base a busca de uma aproximação à Matemática, através de uma boa relação do aluno com o seu livro, tentando, assim, captar a sua atenção. Esta postura, conscientemente adotada, resulta da experiência obtida na atividade letiva, da recolha de opiniões de professores efetuada em encontros pedagógicos e em reflexões sobre “psicologia da adolescência”.

Sabendo que qualquer docente de Matemática é, acima de tudo, um educador, a construção da cidadania dos alunos não foi descurada. Pretendemos que o aluno realize uma análise crítica do que o rodeia, preparando-se para ser um cidadão ativo num futuro próximo. Neste sentido, idealizaram-se tarefas, projetos e atividades que envolvem os alunos numa aprendizagem significativa de valores, tradições e costumes culturais.

Uma das traves-mestras do nosso projeto é tentar fornecer ao aluno uma ideia de continuidade. É fundamental que os alunos percebam que o conhecimento matemático não é estanque, dividido em compartimentos.

No *Pi* de 9º ano, tal como nos anteriores, é frequente fazer-se o apelo à memória e aos conhecimentos prévios dos alunos. A necessária articulação de conhecimentos é garantida, no essencial, através da secção *Rever*.

O projeto *Pi* pretende, de forma efetiva, levar os alunos à superação destas dificuldades. Assim, os exemplos introdutórios são, na sua grande maioria, problemas que, com o decurso do texto, acabam por ser resolvidos; os exemplos, cuidadosamente escolhidos, explicitam raciocínios, aproximando os alunos de uma correta comunicação matemática; os problemas propostos ao longo de todo o Manual têm em consideração os objetivos gerais e específicos de cada uma das três capacidades transversais. Nesta perspetiva, o tipo de exercícios, problemas e atividades propostos estão estruturados de forma a mobilizar as aprendizagens em situações problemáticas próximas da vida real e a requerer processos cognitivos de nível cada vez mais elevado, insistindo na explicitação de raciocínios.

Ao longo do manual são propostas questões retiradas de alguns exames nacionais e estrangeiros. No final de cada unidade surge ainda a rubrica *Praticar para a prova final*, com duas ou quatro páginas de exercícios devidamente selecionados ou adaptados de exames nacionais do ensino básico. Com esta rubrica pretende-se fornecer ao aluno um leque de exercícios criteriosamente selecionados, de provas de avaliação nacionais, relacionadas com os conteúdos em estudo.

Todas as atividades são apresentadas em três níveis de dificuldade, permitindo quer a diferenciação do trabalho na sala de aula quer um aumento da autonomia do aluno:

- As rubricas *Aplicar e Praticar* contêm exercícios acessíveis que contribuem para uma consolidação da confiança do aluno na utilização dos conceitos apreendidos. Desta forma, o aluno adquire competências que lhe permitem uma progressão sustentada para exercícios mais complexos. Fazendo uma analogia com o semáforo, utilizamos a cor verde para identificar os exercícios mais simples.

A secção amarela das mesmas rubricas corresponderá a um conjunto de exercícios com um grau de dificuldade um pouco mais elevado. O aluno está convidado a resolver exercícios que apelem à sua capacidade para organizar o raciocínio e que o ajudem a interligar conteúdos estudados.

A secção vermelha contempla exercícios mais exigentes, que, na sua generalidade, remetem para a resolução de problemas, valorizando o raciocínio matemático e apelando à comunicação matemática. Como John Stuart Mill afirmou: “O aluno a quem nunca se pediu para fazer o que não é capaz, nunca faz aquilo que realmente consegue fazer”.

Componentes do projeto

Manual (edição do Professor e edição do Aluno)

Na edição do professor encontrará o Manual edição do aluno e informação exclusiva do professor, nomeadamente **guiões de exploração de tarefas e notas laterais** (remissões estabelecendo a ligação entre as páginas de tarefas e as de teoria; **sugestões metodológicas**; **soluções** das tarefas e de todos os exercícios propostos; remissões para os recursos **multimédia** que constarão de **20 AULA DIGITAL**; sugestões de **articulação** de todos os materiais do projeto).

Caderno de atividades

Em completa articulação com todas as unidades do Manual, o Caderno de Atividades:

- estimula um **trabalho individual do aluno**, que poderá, autonomamente, **rever os conteúdos teóricos** (*Resumir*), **aplicá-los** (*Praticar*) e **consolidá-los** (*Testar*);
- reforça a aprendizagem através de **propostas de exercícios estruturados em três níveis de dificuldade**, diferenciados por cor;
- **prepara os alunos para os momentos formais de avaliação**, disponibilizando-lhes três provas globais;
- encerra com **soluções de todas as atividades**.

Provas finais modelo

Publicação de oferta ao aluno que visa a preparação para a prova final de ciclo. É composta por 4 provas-modelo e sugestões de resolução.

Guia do Professor

Contém as resoluções de todas as atividades do Manual e do Caderno de Atividades, também disponíveis em formato projetável em **20 AULA DIGITAL**.

Fichas

Publicação exclusiva do Professor que propõe:

- conjunto de **fichas de trabalho**, com finalidades distintas – de **diagnóstico**, de **reforço** (duas por Unidade), de **recuperação** (duas por Unidade) e de **desenvolvimento** (duas por Unidade);
- conjunto de exercícios de exame organizados por assunto, que podem ser usados para testar as aprendizagens e para preparar a Prova Final de Ciclo;
- **soluções de todas as atividades propostas**.

Todas as fichas se encontram disponíveis, em formato editável, em **20 AULA DIGITAL**, para que o professor as possa adaptar ao(s) seu(s) grupo-turma(s).

Planos de aula

Os planos de aula abarcam todos os **conteúdos abordados no Manual** e evidenciam a **articulação entre todos os componentes do projeto**; além disso, elencam os **conhecimentos prévios** que os alunos devem ter e os **objetivos específicos** a atingir em cada aula.

Os planos de aula estão disponíveis em formato editável em **20 AULA DIGITAL**, constituindo, desta forma, uma base de trabalho que o professor poderá personalizar e adequar às necessidades das suas turmas.

O **20 AULA DIGITAL** possibilita a fácil exploração do projeto *Pi 9*, através das novas tecnologias em sala de aula. Trata-se de uma ferramenta inovadora que permite:

- a projeção e exploração das páginas do Manual em sala de aula;
- o acesso a um **vasto conjunto de conteúdos multimédia integrados com o Manual**:
 - **animações** – abordam de forma interativa os diversos conteúdos, possibilitando uma avaliação do aluno através de atividades de consolidação.
 - **aplicações realizadas em GeoGebra** – exploram de forma dinâmica conteúdos dos seis temas abordados, desenvolvendo ainda algumas das tarefas apresentadas ao longo do Manual.
 - **fichas (formato Word)** – conjunto de fichas editáveis de consolidação de conhecimentos.
 - **testes interativos** – banco de testes interativos, personalizáveis e organizados pelos diversos capítulos do Manual.
 - **apresentações em PowerPoint** – resoluções de exercícios e atividades do Manual e do Caderno de Atividades, bem como as conclusões e extensões das tarefas do Manual.
 - **jogos** – atividades lúdicas que permitem a revisão dos conteúdos, de forma divertida, conjugando as vertentes lúdica e didática.
 - **links Internet** – endereços para páginas na Internet, de apoio às matérias, de forma a complementar os conteúdos destacados no *Pi 9*.
- a **disponibilização dos Planos de Aula, em formato Word**, para que o professor os possa adaptar de acordo com as características de cada turma:
 - utilizando sequências de recursos digitais propostas em cada plano, com o recurso a um projetor ou um quadro interativo;
 - personalizando os Planos de Aula com outros recursos.
- a **avaliação dos alunos**:
 - utilização de testes predefinidos ou criação de novos, a partir de uma base de cerca de 250 questões;
 - a impressão de testes para distribuição.



GRELHAS DE APOIO

As grelhas apresentadas de seguida
estão disponíveis, em formato editável,
em **20** AULA DIGITAL

- TPC
- Trabalho de grupo
- Comportamento
- Material
- Relatório
- Ficha de avaliação
- Avaliação intermédia
- Avaliação periodal

Matemática 9 | Guia do Professor

Escola: _____ Ano Letivo: _____

REGISTO DE OBSERVAÇÃO DIRETA - MATEMÁTICA

TURMA: 9º _____ TPC

Período: _____

Nº	NOME	Data
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		

TPC

Matemática 9 | Guia do Professor

Escola: _____ Ano Letivo: _____

REGISTO DE OBSERVAÇÃO DIRETA - MATEMÁTICA

TURMA: 9º _____ TRABALHO DE GRUPO

Período: _____ ATIVIDADE: _____

GRUPO I	GRUPO II	GRUPO III	GRUPO IV	GRUPO V	GRUPO VI

Trabalho de grupo

Matemática 9 | Guia do Professor

Escola: _____ Ano Letivo: _____

REGISTO DE OBSERVAÇÃO DIRETA - MATEMÁTICA

TURMA: 9º _____ COMPORTAMENTO

Período: _____

Nº	NOME	Data
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		

Comportamento

Matemática 9 | Guia do Professor

Escola: _____ Ano Letivo: _____

REGISTO DE OBSERVAÇÃO DIRETA - MATEMÁTICA

TURMA: 9º _____ MATERIAL

Período: _____

Nº	NOME	Data
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		

Material

Matemática 9 | Guia do Professor

Escola: _____ Ano Letivo: _____

REGISTO DE OBSERVAÇÃO DIRETA - MATEMÁTICA

TURMA: 9º _____ RELATÓRIO

Período: _____ PROPOSTO EM: _____

Nº	NOME	Entregou		AVALIAÇÃO QUALITATIVA	OBSERVAÇÕES
		SI	NAO		
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					

Relatório

Matemática 9 | Guia do Professor

Escola: _____ Ano Letivo: _____

REGISTO DE OBSERVAÇÃO DIRETA - MATEMÁTICA

TURMA: 9º _____ FICHA DE AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA Nº: _____

Período: _____

Nº	NOME	QUESTÃO					COTAÇÃO	Total
		1	2	3	4	5		
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								

Ficha de avaliação

Matemática 9 | Guia do Professor

Escola: _____ Ano Letivo: _____

MATEMÁTICA

TURMA: 9º _____ Avaliação - NOVEMBRO

Nº	NOME	Avaliação	PLANO de _____
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			

Avaliação intermédia

Matemática 9 | Guia do Professor

Escola: _____ Ano Letivo: _____

MATEMÁTICA

TURMA: 9º _____ Avaliação - 1º PERÍODO

Nº	NOME	Avaliação	PLANO de _____	Notas	Notas
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					

Avaliação periodal



PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

Manual e Caderno de Atividades

As resoluções assinaladas com **20** encontram-se
disponíveis em formato projetável, em **20 AULA DIGITAL**.

Volume 1

Unidade 1 – Probabilidades

Aplicar – página 9

1. Loja favorita: Variável qualitativa.
Tempo médio de uma visita ao centro: Variável quantitativa contínua.
Número de deslocações: Variável quantitativa discreta.
2. Que animais de estimação tens em casa? Variável qualitativa.
Quantos animais de estimação tens em casa? Variável quantitativa discreta.
Quanto pesa o teu animal de estimação preferido? Variável quantitativa contínua.
3. Idade: Variável quantitativa discreta.
Número de refeições realizadas por dia: Variável quantitativa discreta.
Altura: Variável quantitativa contínua.
Nacionalidade: Variável qualitativa.
Código postal: Variável qualitativa.
- 4.
- 4.1. Tipo de filme: Variável qualitativa.
- 4.2. Por exemplo, *Quantos amigos do Álvaro têm os filmes de comédia como tipo de filme preferido?*
- 4.3. Comenta a afirmação: “Mais de metade dos amigos do Álvaro têm os filmes de comédia como tipo de filme preferido.”

Aplicar – página 11

20 1.

1.1.

Meio de transporte	Frequência absoluta	Frequência relativa
Autocarro	9	$45\% \left(\frac{9}{20} = 0,45 \right)$
Bicicleta	2	$10\% \left(\frac{2}{20} = 0,1 \right)$
Automóvel	5	$25\% \left(\frac{5}{20} = 0,25 \right)$
A pé	4	$20\% \left(\frac{4}{20} = 0,2 \right)$
TOTAL	20	$100\% \left(\frac{20}{20} = 1 \right)$

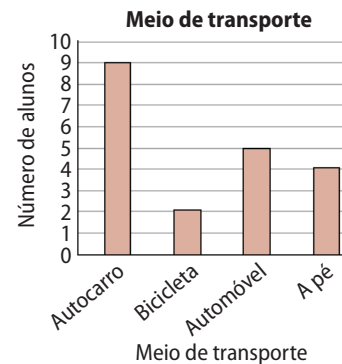
Cálculos auxiliares

$$0,45 \times 20 = 9$$

$$20 - 9 - 2 - 4 = 5$$

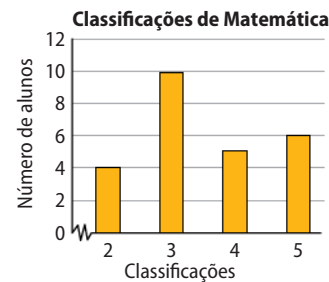
- 1.2. O meio de transporte mais utilizado pelos colegas da Mariana é o autocarro.
- 1.3. A afirmação D.
- 1.4. Não é possível construir um diagrama de extremos e quartis, pois os dados apresentados são de natureza qualitativa.

1.5.



20 2.

2.1.



Cálculo auxiliar

$$25 - 4 - 10 - 6 = 5$$

2.2.

Classificações de Matemática	Frequência absoluta	Frequência relativa
2	4	$16\% \left(\frac{4}{25} = 0,16 \right)$
3	10	$40\% \left(\frac{10}{25} = 0,4 \right)$
4	5	$20\% \left(\frac{5}{25} = 0,2 \right)$
5	6	$24\% \left(\frac{6}{25} = 0,24 \right)$
TOTAL	25	$100\% \left(\frac{25}{25} = 1 \right)$

$$2.3. \bar{x} = \frac{2 \times 4 + 3 \times 10 + 4 \times 5 + 5 \times 6}{25}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{8 + 30 + 20 + 30}{25}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{88}{25}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = 3,52$$

R.: 3,52 é a média das classificações obtidas pelos alunos da turma da Raquel, no final do 3º período, na disciplina de Matemática.

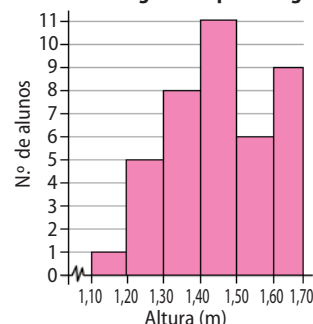
Aplicar – páginas 20 e 21

20 2.

2.1.

Altura	Frequência absoluta	Frequência relativa
[1,10; 1,20[	1	$\frac{1}{40} = 0,025; 2,5\%$
[1,20; 1,30[	5	$\frac{5}{40} = 0,125; 12,5\%$
[1,30; 1,40[	8	$\frac{8}{40} = 0,2; 20\%$
[1,40; 1,50[	11	$\frac{11}{40} = 0,275; 27,5\%$
[1,50; 1,60[	6	$\frac{6}{40} = 0,15; 15\%$
[1,60; 1,70[	9	$\frac{9}{40} = 0,225; 22,5\%$
TOTAL	40	$\frac{40}{40} = 1; 100\%$

2.2. Alturas registadas pelo Diogo



$$2.3. 1 + 5 + 8 = 14$$

R.: 14 alunos.

$$2.4. 8 + 11 = 19$$

R.: 19 alunos.

$$2.5. 25\% + 12,5\% + 20\% + 27,5\% = 62,5\%$$

R.: 62,5% dos alunos têm menos de 1,50 m de altura.

20 3.

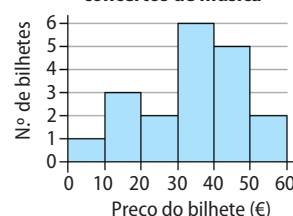
3.1.

$$\begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ 082 \\ 58 \\ 470253 \\ 91052 \\ 25 \end{array}, \text{ ou seja, } \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ 028 \\ 58 \\ 023457 \\ 01259 \\ 25 \end{array}$$

Preço do bilhete	Frequência
[0, 10[	1
[10, 20[	3
[20, 30[	2
[30, 40[	6
[40, 50[	5
[50, 60[	2
Total	19

3.2.

Preço dos bilhetes dos concertos de música



3.3. Analisando as duas representações gráficas, observa-se que cada caule tem “penduradas” as folhas correspondentes aos elementos de cada uma das classes consideradas para o histograma, pelo que as representações são visualmente semelhantes.

3.4. Utilizaria o histograma, porque para 100 concertos o diagrama de caule-e-folhas tornar-se-ia muito extenso e de difícil interpretação.

20 4.

$$4.1. 2 + 4 + 6 + 12 + 18 + 30 + 35 + 12 = 119$$

R.: Foram alvo desse estudo 119 famílias.

4.2. A empresa dividiu os dados recolhidos em oito classes, com 50 kWh de amplitude.

4.3. A classe [300, 350[é a que tem o maior número de famílias. Esta classe designa-se por classe modal.

4.4.

Consumo energia elétrica (kWh)	Frequência absoluta	Frequência relativa
[0, 50[	2	$\frac{2}{119} \approx 0,017$
[50, 100[	4	$\frac{4}{119} \approx 0,034$
[100, 150[	6	$\frac{6}{119} \approx 0,050$
[150, 200[	12	$\frac{12}{119} \approx 0,10$
[200, 250[	18	$\frac{18}{119} \approx 0,15$
[250, 300[	30	$\frac{30}{119} \approx 0,25$
[300, 350[	35	$\frac{35}{119} \approx 0,29$
[350, 400[	12	$\frac{12}{119} \approx 0,10$
Total	119	$\approx 1,00$

$$4.5. 30 + 35 + 12 = 77$$

R.: 77 famílias têm um consumo mensal de energia elétrica igual ou superior a 250 kWh.

4.6. $6 + 12 = 18$

$\frac{18}{119} \approx 0,15$, ou seja, 15% das famílias tem um consumo mensal de energia igual ou superior a 100 kWh e inferior a 200 kWh.

4.7. Não é possível, a partir do gráfico apresentado, verificar qual o consumo das famílias citadas.

Aplicar – páginas 24 e 25

2.

- 2.1. Experiência determinista
- 2.2. Experiência aleatória
- 2.3. Experiência determinista
- 2.4. Experiência aleatória
- 2.5. Experiência determinista

3.

- 3.1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- 3.2. $\Omega = \{\text{cinzento, roxo, cor de laranja, verde, vermelho}\}$

4.

- 4.1. $\Omega = \{\text{amarelo, cor de laranja, verde, azul}\}$
- 4.2. a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b) $A = \{2, 4, 6\}$
c) $B = \{1, 2, 3, 6\}$
d) Sair um número ímpar no lançamento do dado.

5.

5.1.

1.º lançamento \ 2.º lançamento	1	2	3	4
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)

O universo de resultados tem 16 elementos.

- 5.2. Números primos inscritos no dado: 2 e 3
 $A = \{(1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4)\}$

6.

- 6.1. $\Omega = \{\text{face europeia, face nacional}\}$
- 6.2. Espaço de acontecimentos:
 $\{\emptyset, \{\text{face europeia}\}, \{\text{face nacional}\}, \{\text{face europeia, face nacional}\}\}$

Aplicar – páginas 28 e 29

2.

- 2.1. $A = \{2\}$
Acontecimento elementar
- 2.2. $B = \{2, 4, 6\} \neq \Omega$
Acontecimento composto mas não certo
- 2.3. $C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \neq \Omega$
Acontecimento composto mas não certo
- 2.4. $D = \{\}$
Acontecimento impossível
- 2.5. $E = \{2, 4, 6\} \cup \{2, 3, 5\} = \{2, 3, 4, 5, 6\} \neq \Omega$
Acontecimento composto mas não certo
- 2.6. $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$
Acontecimento composto e certo

3.

- 3.1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- 3.2. a) Por exemplo, “sair o número 4”.
b) Por exemplo, “sair um número par”.
c) Por exemplo, “sair um número menor do que 10”.
d) Por exemplo, “sair o número 15”.
- 3.3. O acontecimento contrário de A é: “sair um setor com um número ímpar inscrito”.
- 3.4. Por exemplo, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{5\}$
Os acontecimentos B e C são incompatíveis mas não contrários, uma vez que $B \cap C = \{1, 2, 3\} \cap \{5\} = \{\}$ e $B \cup C = \{1, 2, 3\} \cup \{5\} = \{1, 2, 3, 5\} \neq \Omega$

4.

- 4.1. O conjunto de resultados tem 52 elementos.
- 4.2. Um acontecimento elementar é: “sair ás de copas”
Um acontecimento composto é: “sair uma carta de copas”

- 20 4.3. A afirmação é falsa. Trata-se de um acontecimento composto, pois existem quatro naipes e, portanto, quatro ases. Assim, é um acontecimento constituído por mais do que um elemento do universo de resultados.

5.

- 5.1. a) Como $A = \{2, 3, 4\}$ e $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, então $\overline{A} = \{1, 5\}$
b) $A \cup B = \{2, 3, 4\} \cup \{3, 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$
c) $A \cap B = \{2, 3, 4\} \cap \{3, 5\} = \{3\}$
d) Como $B = \{3, 5\}$ e $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, então $\overline{B} = \{1, 2, 4\}$. Logo, $\overline{B} \cap A = \{1, 2, 4\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 4\}$
- 5.2. Os acontecimentos A e B não são compatíveis, uma vez que $A \cap B = \{3\} \neq \{\}$.

- 5.3. Consideremos $D = \{1, 2\}$ e $E = \{3\}$. Os acontecimentos D e E são incompatíveis mas não contrários, uma vez que $D \cap E = \{1, 2\} \cap \{3\} = \{\}$ e $D \cup E = \{1, 2\} \cup \{3\} = \{1, 2, 3\} \neq \Omega$

6.

6.1. $\Omega = \{(N, N), (N, E), (E, N), (E, E)\}$

6.2. $A = \{(N, N), (N, E), (E, N)\}$

- 6.3. Seja B o acontecimento “sair face europeia nos dois lançamentos”. Então, $B = \{(E, E)\}$.
Logo, $\overline{B} = \{(N, N), (N, E), (E, N)\}$.

7. $A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{2, 4\}$

Assim, $\overline{A \cap B} = \{1, 3, 5, 6\}$, ou seja, “sair face ímpar ou face 6”

8. A afirmação é verdadeira.

Consideremos $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$ e $B = \{4\}$.

Assim, $A \cap B = \{1, 2\} \cap \{4\} = \{\}$ e $A \cup B = \{1, 2\} \cup \{4\} = \{1, 2, 4\} \neq \Omega$. Logo, os acontecimentos A e B são incompatíveis mas não contrários.

Aplicar – páginas 32 e 33

3. A afirmação falsa é a [B]. Observando a roleta verificamos que é mais provável ocorrer a cor vermelha do que a cor azul.

4.

- 4.1. a) Por exemplo, “sair a dama de ouros”.

- b) Por exemplo, “não sair um ás”.

4.2. $P(C) < P(B) < P(A)$

5. A afirmação é falsa, pois os acontecimentos referidos são equiprováveis: no lançamento do dado cúbico, é igualmente provável sair uma face numerada com um número par ou sair uma face numerada com um número ímpar; no lançamento de uma moeda ao ar é igualmente provável sair face nacional ou face europeia.

6.

- 6.1. A. A afirmação é falsa. A probabilidade de ocorrer a cor azul na roleta 2 é igual à probabilidade de ocorrer a cor azul na roleta 3.

- B. A afirmação é verdadeira.

- C. A afirmação é falsa. Apenas nas roletas 2 e 3 se verifica que todas as cores têm a mesma probabilidade de ocorrer.

- D. A afirmação é falsa. Na roleta 4, a cor que tem menos probabilidade de ocorrer é a azul.

- 6.2. a) Por exemplo, “sair cor preta na roleta 1”.

- b) Por exemplo, “sair cor amarela, azul, vermelha ou verde na roleta 3”.

7. A probabilidade de um acontecimento é um número maior ou igual a 0 e menor ou igual a 1. Assim, dos valores apresentados, $\frac{11}{9}$ e $\frac{\sqrt{9}}{2}$, não correspondem à probabilidade de um acontecimento.

R.: A Inês não acertou na resposta.

8.

- 8.1. 18 bolas azuis

- 8.2. Para a saída de uma bola azul ser um acontecimento impossível, o saco não pode conter bolas dessa cor.

Por exemplo, 10 bolas amarelas e 8 bolas verdes.

- 8.3. Para os acontecimentos serem igualmente prováveis, o saco tem de ter na sua constituição o mesmo número de bolas azuis e amarelas.

Por exemplo, 9 bolas azuis e 9 bolas amarelas.

- 8.4. Para a probabilidade de sair uma bola amarela ser 50%, o saco terá de ter tantas bolas amarelas quantas as bolas de outras cores.

Por exemplo, 9 bolas amarelas, 2 bolas verdes e 7 bolas azuis.

- 8.5. Para a probabilidade de sair uma bola amarela ser 0%, o saco não pode ter bolas amarelas.

Por exemplo, 15 bolas azuis e 3 bolas verdes.

- 8.6. Para tal se verificar, o saco terá de ter o mesmo número de bolas amarelas, azuis e verdes, ou seja, 6 bolas amarelas, 6 bolas azuis e 6 bolas verdes.

9. A afirmação do João é falsa, pois apenas o número 2 é simultaneamente par e primo. Assim, há uma grande probabilidade de lançar o dado e obter um número que não satisfaça as duas condições (ser par e primo) simultaneamente. Por outras palavras, podemos dizer que lançar o dado e obter um número que seja simultaneamente par e primo não é um acontecimento certo e, portanto, a sua probabilidade não é 100%.

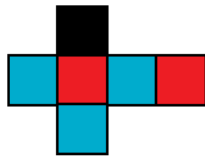
Aplicar – páginas 36 e 37

- 20 2.** Começemos por “completar” a tabela acrescentando a coluna relativa à frequência relativa.

Cor da face	Frequência absoluta	Frequência relativa
Azul	3006	0,501 (50,1%)
Preto	1004	≈ 0,167 (16,7%)
Vermelho	1990	≈ 0,332 (33,2%)
Verde	0	0 (0%)
Total	6000	1 (100%)

Como o número de repetições foi significativo, podemos afirmar que metade do número de faces do dado terá a cor azul. Assim, três das faces serão azuis ($6 \times 0,5 = 3$). Em cerca de 33% dos lançamentos saiu face vermelha, motivo pelo qual o dado terá duas faces com uma cor ($6 \times 33\% \approx 2$). A última face será preta.

De facto, em cerca de 17% dos lançamentos saiu uma face com esta cor ($6 \times 17\% \approx 1$). O dado não terá faces verdes: a frequência absoluta desta cor é 0. Pintando a planificação do cubo da Augusta, obtemos, por exemplo:



3.

- 3.1.** De acordo com a Lei dos Grandes Números, quando o número de repetições da experiência aleatória é elevado, a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar num valor que se adota como probabilidade desse acontecimento.

Neste caso, verificamos que existe uma diferença significativa entre a frequência absoluta do acontecimento “sair face 5” e as frequências absolutas das restantes faces do dado. Podemos deduzir que essa diferença também ocorrerá na frequência relativa desses acontecimentos. Assim, o dado não é equilibrado.

- 3.2.** A frequência absoluta do acontecimento “sair um número ímpar” é 3627 ($1554 + 1550 + 523 = 3627$), de acordo com os dados da tabela. Assim:

$$f_r(\text{sair um número ímpar}) = \frac{3627}{8453} \approx 0,429 (\approx 43\%)$$

R.: Lançando esse dado uma vez, a probabilidade de sair uma face com um número ímpar é, aproximadamente, 43%.

4.

- 4.1.** Sabemos que $f_r(\text{face } 2) = \frac{f_a}{120} = 0,35$, sendo f_a o número de vezes que a face 2 ficou voltada para baixo. Então, $f_a = 120 \times 0,35 = 42$.

R.: Nos primeiros 120 lançamentos, a face 2 ficou 42 vezes voltada para baixo.

- 4.2.** Apesar de a frequência relativa da face 2 se aproximar do valor teórico da probabilidade expectável, nada podemos concluir acerca do valor da frequência relativa das restantes faces. Logo, os dados do problema não permitem responder a esta questão.

Aplicar – páginas 40 e 41

- 2.** Existem três bolas vermelhas num total de cinco bolas. Logo,

$$P(\text{“sair uma bola vermelha”}) = \frac{3}{5}$$

- 3.** $20 - 12 = 8$

Na turma da Catarina há 8 raparigas num total de 20 alunos.

$$P(\text{“ser escolhida uma rapariga”}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

- 4.** Sabemos que 70% das vezes, a formiga opta pelo caminho da esquerda.

$$100\% - 70\% = 30\%$$

Como se trata de uma bifurcação e a formiga não volta para trás, sabemos que em 30% das vezes, a formiga opta pelo caminho da direita.

R.: A formiga tem 30% de probabilidade de ser apanhada pela aranha.

5.

- 5.1.** Existem cinco números pares num total de dez números (números 2, 4, 6, 8 e 10).

$$P(\text{“obter um número par”}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

- 5.2.** Dos números apresentados, os números 4, 6, 8, 9 e 10 são compostos.

$$P(\text{“obter um número composto”}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

- 5.3.** Dos números apresentados, dois são múltiplos de 5 (números 5 e 10).

$$P(\text{“obter um número múltiplo de cinco”}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

- 5.4.** Dos números apresentados os números 1, 4 e 9 são quadrados perfeitos.

$$P(\text{“obter um quadrado perfeito”}) = \frac{3}{10}$$

20 6.

- 6.1. Existem sete selos da França num total de 49 selos.

$$P(\text{"ser um selo da França"}) = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$$

- 6.2. O Brasil e a Venezuela são países da América do Sul. Assim, existem 23 selos de países da América do Sul num total de 49 selos.

$$P(\text{"ser um selo de um país da América do Sul"}) = \frac{23}{49}$$

- 6.3. Dos 49 selos da coleção do Carlos, apenas sete são de França, ou seja, 42 selos não são de França.

$$P(\text{"não ser um selo de França"}) = \frac{42}{49} = \frac{6}{7}$$

ou

$$P(\text{"não ser um selo de França"}) = 1 - P(\text{"ser um selo de França"}) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

7. Começamos por calcular quantas moedas de 20 centavos e quantas moedas de 50 centavos tem o Guilherme, no seu mealheiro.

$$7 : 0,20 = 35$$

$$14,5 : 0,50 = 29$$

Há 64 moedas no mealheiro do Guilherme (35 + 29 = 64), das quais 35 são de 20 centavos:

$$P(\text{"tirar uma moeda de 20 centavos"}) = \frac{35}{64}$$

20 8.

Vamos calcular a área do trapézio [ABCD] e a área da zona sombreada da figura, ou seja, a área do triângulo [ABD].

$$A_{[ABCD]} = \frac{B+b}{2} \times h$$

$$A_{[ABCD]} = \frac{15 \times 3}{2} \Leftrightarrow A_{[ABCD]} = \frac{45}{2} \text{ cm}^2$$

$$A_{[ABD]} = \frac{b+h}{2}$$

$$A_{[ABD]} = \frac{10 \times 3}{2} \Leftrightarrow A_{[ABD]} = \frac{30}{2} \Leftrightarrow A_{[ABD]} = 15 \text{ cm}^2$$

Então:

$$P(\text{"ponto do trapézio estar na zona sombreada"}) = \frac{15}{45} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$$

9. A Inês foi desafiada a acertar na carta retirada pela Filipa sabendo que saiu o naipe de espadas. Sabendo que há 13 cartas do naipe de espadas,

$$P(\text{"Inês acertar na carta"}) = \frac{1}{13}$$

20 10.

Vejamos de quantas maneiras diferentes se podem dispor as três cartas em linha. Cada carta pode ocupar três posições diferentes e, para cada uma dessas posições, as outras duas cartas podem alternar entre si.

Esquematizando, obtemos essas seis possibilidades:

8	9	R
8	R	9
9	8	R
R	8	9
9	R	8
R	9	8

Facilmente compreendemos que em duas dessas possibilidades, o 9 e o rei não ficam juntos.

$$P(\text{"o 9 e o rei não ficarem juntos"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

11. Vamos calcular o número total de alunos da turma (n) conhecendo o número de rapazes e a probabilidade de, escolhendo um aluno ao acaso, ser um rapaz.

Sabemos que $P(\text{"ser um rapaz"}) = \frac{1}{3}$ e, por outro

$$\text{lado, } P(\text{"ser um rapaz"}) = \frac{9}{n}$$

$$\text{Então, } \frac{1}{3} = \frac{9}{n} \Leftrightarrow n = 27$$

Assim, a turma tem 27 alunos, dos quais 9 são rapazes. Então, há 18 raparigas (27 - 9 = 18).

R.: A turma tem 18 raparigas.

12. Vamos esquematizar todas as possibilidades e verificar, de entre todas, quais apresentam dois homens e duas mulheres.

Seja ♂ o símbolo para representar o homem e ♀ o símbolo para representar a mulher.

As possibilidades de escolha são:

♂ ♂ ♂ ♂	♂ ♂ ♂ ♀	♂ ♂ ♀ ♂	♂ ♂ ♀ ♀
♂ ♀ ♂ ♂	♂ ♀ ♂ ♀	♂ ♀ ♀ ♂	♂ ♀ ♀ ♀
♀ ♂ ♂ ♂	♀ ♂ ♂ ♀	♀ ♂ ♀ ♂	♀ ♂ ♀ ♀
♀ ♀ ♂ ♂	♀ ♀ ♂ ♀	♀ ♀ ♀ ♂	♀ ♀ ♀ ♀

Assim, existem seis possibilidades de escolher dois homens e duas mulheres.

Então:

$$P(\text{"serem escolhidos dois homens e duas mulheres"}) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Aplicar – páginas 44 e 45

20 2.

2.1.

		2ª extração			
		1	2	3	4
1ª extração	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)

R.: Há 16 casos possíveis.

2.2. Seja A o acontecimento: “sair a bola 2 na primeira extração e a bola 3 na segunda extração”.

$$\text{Assim, } P(A) = \frac{1}{16}.$$

2.3. Os números 2 e 3 são primos e apenas o número 4 é composto. Portanto, para ambas as bolas terem números compostos é necessário tirar o número 4 na primeira e na segunda extrações.

Seja B o acontecimento: “ambas as bolas têm números compostos”.

$$\text{Então, } P(B) = \frac{1}{16}.$$

20 3.

3.1.

		2ª extração			
		1	2	3	4
1ª extração	1	–	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
	2	(2, 1)	–	(2, 3)	(2, 4)
	3	(3, 1)	(3, 2)	–	(3, 4)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	–

R.: Há 12 casos possíveis.

3.2. Seja A o acontecimento: “sair a bola 2 na primeira extração e a bola 3 na segunda extração”.

$$\text{Assim, } P(A) = \frac{1}{12}.$$

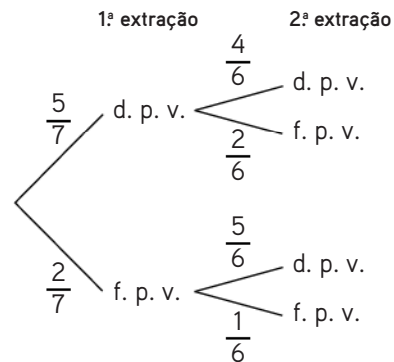
3.3. Das quatro bolas, que têm um número primo são as que contêm o número 2 ou o número 3. Por observação da tabela concluímos que em 10 das possibilidades está presente a bola 2 e/ou a bola 3.

Seja B o acontecimento “pelo menos uma das bolas extraídas ter um número primo”. Então:

$$P(B) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

20 4.

Vamos construir um diagrama de árvore para clarificar o que acontece em cada uma das extrações: podemos tirar um rebuçado dentro do prazo de validade (d. p. v.) ou fora do prazo de validade (f. p. v.)

Seja A o acontecimento “tirar sucessivamente dois rebuçados fora do prazo de validade”. Então:

$$P(A) = \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{42} = \frac{1}{21}$$

20 5.

5.1.

		2ª extração			
		1	2	3	4
1ª extração	1	–	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
	2	–	–	(2, 3)	(2, 4)
	3	–	–	–	(3, 4)
	4	–	–	–	–

R.: Há seis casos possíveis.

$$5.2. P(\text{“sair a bola 2 e a bola 3”}) = \frac{1}{6}$$

20 6.

6.1.

+	5	6	7	8	9
1	6	7	8	9	10
2	7	8	9	10	11
3	8	9	10	11	12
4	9	10	11	12	13

$$6.2. a) P(A) = \frac{3}{20}$$

$$b) P(B) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

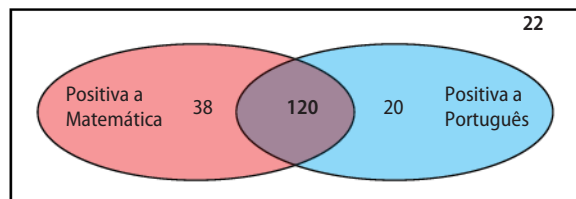
$$c) P(C) = \frac{20}{20} = 1$$

$$d) P(D) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

- 20 7.** Vamos traduzir a informação recolhida através de um diagrama de Venn: dos 200 alunos inquiridos, 22 não tiveram positiva nem a Português nem a Matemática. Dos restantes (178), 158 tiveram positiva a Matemática e 140 tiveram positiva a Português.

Cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned} 200 - 22 &= 178 & 158 + 140 &= 298 \\ 298 - 178 &= 120 & 158 - 120 &= 38 \\ 140 - 120 &= 20 \end{aligned}$$

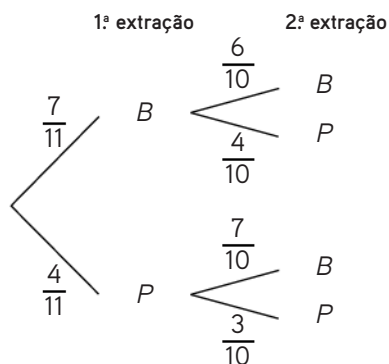


De acordo com os dados, apenas 20 alunos tiveram positiva só a Português.

Assim:

$$P(\text{"o aluno ter tirado só positiva a Português"}) = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$$

- 20 8.** Vamos construir um diagrama de árvore para esquematizar as extrações: podemos tirar uma bola branca (*B*) ou uma bola preta (*P*).



8.1. $P(\text{"ambas as bolas serem pretas"}) = \frac{4}{11} \times \frac{3}{10} = \frac{12}{110} = \frac{6}{55}$

8.2. $P(\text{"segunda bola ser preta se a primeira bola for branca"}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

- 9.** A probabilidade de um casal ter uma criança do sexo masculino é a mesma probabilidade de ter uma criança do sexo feminino.

Vejamos as possibilidades que o casal tem após os três nascimentos (seja *M* para menina e *R* para rapaz):

RRR RRM RMR RMM MRR MRM MMR MMM

Destas oito possibilidades, apenas duas representam as hipóteses de os três filhos serem do mesmo sexo. Então:

$$P(\text{"os três filhos serem do mesmo sexo"}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Praticar – páginas 46 a 51

1.

- 1.1. Acontecimento elementar
- 1.2. Acontecimento composto mas não certo
- 1.3. Acontecimento composto mas não certo
- 1.4. Acontecimento impossível
- 1.5. Acontecimento composto e certo
- 1.6. Acontecimento composto mas não certo
- 1.7. Acontecimento composto mas não certo
- 1.8. Acontecimento composto mas não certo
- 1.9. Acontecimento composto e certo

2.

Vamos calcular a probabilidade de tirar uma bola vermelha de cada uma das caixas e escolher aquela em que a probabilidade seja maior.

$$P(\text{"tirar bola vermelha da caixa A"}) = \frac{2}{5}$$

$$P(\text{"tirar bola vermelha da caixa B"}) = \frac{5}{13}$$

R.: Escolheria a caixa A, pois nesta caixa a probabilidade de tirar uma bola vermelha é maior.

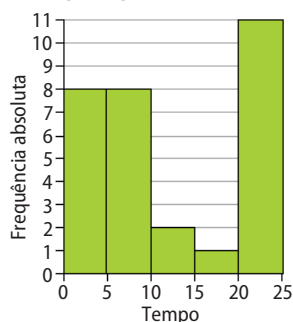
20 3.

3.1. A Eva inquiriu 30 alunos.

3.2.

Tempo	Frequência absoluta	Frequência relativa
[0, 5[	8	$\frac{8}{30} \approx 0,27$
[5, 10[	8	$\frac{8}{30} \approx 0,27$
[10, 15[	2	$\frac{2}{30} \approx 0,07$
[15, 20[	1	$\frac{1}{30} \approx 0,03$
[20, 25[	11	$\frac{11}{30} \approx 0,36$
Total	30	≈ 1

3.3. Tempo do percurso casa-escola



3.4. $2 + 1 + 11 = 14$

$$\frac{14}{30} \approx 0,47$$

R.: Aproximadamente 47% dos alunos demoram pelo menos 10 minutos a fazer percurso casa-escola.

3.5. $\frac{8}{30} \approx 0,27$

R.: Aproximadamente 27% dos alunos demoram pelo menos de 5 minutos a fazer percurso casa-escola.

4. A Joana é uma de entre os 400 sócios mais antigos.

$$P(\text{"Joana ser premiada"}) = \frac{1}{400}$$

5. No total, o André tem 29 CD.

5.1. $P(\text{"escolher um CD de música clássica"}) = \frac{9}{29}$

5.2. $P(\text{"escolher um CD que não seja de música rock"}) = \frac{22}{29}$

6.

6.1. a) $P(\text{"sair o número 5"}) = \frac{1}{20}$

b) $P(\text{"sair um par número par"}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

c) $P(\text{"sair um número menor do que 10"}) = \frac{9}{20}$

d) $P(\text{"sair um número primo e ímpar"}) = \frac{7}{20}$

6.2. Nesta experiência, todos os números têm a mesma probabilidade de serem extraídos. Dado que são 20 números, é esperado que saia 25 vezes cada um, pois $500 : 20 = 25$.

R.: É de esperar que a bola com o número 13 saia 25 vezes.

7. Há 20 alunos na turma do Gonçalo.

7.1. $P(\text{"escolher um aluno com 15 anos"}) = \frac{0}{20} = 0$

7.2. $P(\text{"escolher um aluno com mais de 11 anos"}) = \frac{7}{20}$

7.3. $P(\text{"escolher um aluno com menos de 14 anos"}) = \frac{19}{20}$

7.4. $P(\text{"escolher um aluno, no máximo, com 13 anos"}) = \frac{19}{20}$

7.5. $P(\text{"escolher um aluno com, pelo menos, 12 anos"}) = \frac{7}{20}$

20 8.

8.1. a) $P(\text{"ser o Filipe a ganhar"}) = \frac{12}{450} = \frac{2}{75}$

b) $P(\text{"ser o Tiago a ganhar"}) = \frac{40}{450} = \frac{4}{45}$

c) $P(\text{"não ser o Tiago a ganhar"}) = 1 - \frac{4}{45} = \frac{45}{45} - \frac{4}{45} = \frac{41}{45}$

d) $P(\text{"não ser nenhum dos irmãos a ganhar"}) = \frac{398}{450} = \frac{199}{225}$

8.2. Sabemos que a Carla tem 6% de probabilidade de ganhar o cabaz. Seja n o número de rifas que a Carla comprou. Então:

$$P(\text{"ser a Carla a ganhar"}) = \frac{n}{450} \text{ e } P(\text{"ser a Carla a ganhar"}) = 0,06$$

Vamos calcular n :

$$\frac{n}{450} = 0,06 \Leftrightarrow n = 27$$

R.: A Carla comprou 27 rifas.

9.

9.1. Se A , B , C e D são os quatro acontecimentos elementares da experiência, então a soma das probabilidades desses acontecimentos é igual a 1 (probabilidade do acontecimento certo). Então:

$$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$$

Sabendo que os acontecimentos C e D são equiprováveis, temos que:

$$0,3 + 0,1 + P(C) + P(D) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2P(C) = 1 - 0,3 - 0,1$$

$$\Leftrightarrow 2P(C) = 0,6$$

$$\Leftrightarrow 2P(C) = 0,3$$

$$\text{R.: } P(C) = 0,3 \text{ e } P(D) = 0,3$$

9.2. $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,3 = 0,7$

$$\text{R.: } P(\bar{D}) = 0,7$$

10.

- 10.1. De entre os cinco alunos da associação de estudantes, dois são rapazes. Então:

$$P(\text{"ser escolhida uma rapariga"}) = \frac{3}{5}$$

- 10.2. Não podem ser escolhidos três rapazes, visto que só existem dois rapazes na associação de estudantes. Logo, a probabilidade de os alunos serem todos rapazes é nula.

$$P(\text{"serem todos rapazes"}) = 0$$

11.

- 11.1. Por exemplo, "sair R".

- 11.2. Por exemplo, "sair R ou T".

- 11.3. "Sair 1, R, 2, R ou 3".

- 11.4. Por exemplo, "sair A".

20 12.

- 12.1. Dados de natureza:

- qualitativa: garagem
- quantitativa: número de habitação, número de asoalhadas, área e preço.

- 12.2.

Área	Frequência absoluta	Frequência relativa
[0, 60[	0	$\frac{0}{40} = 0$
[60, 80[	10	$\frac{10}{40} = 0,25$
[80, 100[	13	$\frac{13}{40} = 0,325$
[100, 120[	8	$\frac{8}{40} = 0,2$
[120, 140[	3	$\frac{3}{40} = 0,075$
[140, 160[	2	$\frac{2}{40} = 0,05$
[160, 180[	4	$\frac{4}{40} = 0,1$
Total	40	≈ 1

- 12.3. O intervalo onde se encontra o maior número de habitações é o [80, 100[. Este intervalo designa-se por classe modal.

- 12.4. $3 + 2 + 4 = 9$

$$\frac{9}{40} = 0,225$$

R.: 22,5% das habitações têm pelo menos 120 m².

- 12.5. $13 + 8 + 3 = 24$

$$\frac{24}{40} = 0,6$$

R.: 60% das habitações têm área igual ou superior a 80 m² e inferior a 140 m².

20 13.

- 13.1. A probabilidade do acontecimento "sair uma caneta vermelha" não pode ser zero, pois esse acontecimento não é impossível, ou seja, no estojo existem canetas vermelhas.

- 13.2. O acontecimento "sair uma caneta azul" não é muito provável, ou seja, no estojo existem mais canetas pretas do que azuis.

- 13.3. A probabilidade de qualquer acontecimento é um número não negativo inferior ou igual a 1.

$\frac{5}{4} > 1$, portanto, não representa a probabilidade de um acontecimento.

14. Para se obter uma aguarela e um lápis de cera da mesma cor, é necessário que o lápis de cera seja azul, visto que a aguarela retirada foi azul.

Num total de doze lápis de cera, queremos tirar aquele que é azul, logo:

$$P(\text{"retirar um lápis de cera azul"}) = \frac{1}{12}$$

R.: A probabilidade de se obter uma aguarela e um lápis de cera da mesma cor é $\frac{1}{12}$.

15.

- 15.1. $204 + 58 + 104 + 30 + 34 + 128 + 96 + 140 = 830$.

R.: A escola tem 830 alunos.

- 15.2. a) Há 432 rapazes na escola.

$$P(\text{"ser rapaz"}) = \frac{432}{830} = \frac{216}{415}$$

- b) 186 alunos da escola preferem voleibol.

$$P(\text{"o aluno preferir voleibol"}) = \frac{186}{830} = \frac{93}{415}$$

- c) Há 34 raparigas que preferem futebol.

$$P(\text{"ser rapariga e preferir futebol"}) = \frac{34}{830} = \frac{17}{415}$$

- d) Há 432 rapazes e 34 raparigas que preferem futebol, num total de 466 alunos nas condições do enunciado.

$$P(\text{"ser rapaz ou preferir o futebol"}) = \frac{466}{830} = \frac{233}{415}$$

- 15.3. Há 432 rapazes na escola. Desses, 240 escolhem o futebol como modalidade desportiva preferida.

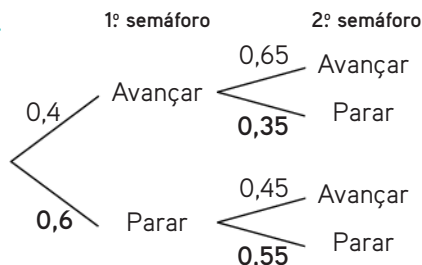
$$P(\text{"um rapaz escolhido preferir o futebol"}) = \frac{240}{432} = \frac{5}{9}$$

- 15.4. 186 alunos responderam que a sua modalidade desportiva preferida é o voleibol. Desses, 128 alunos eram raparigas.

$$P(\text{"um aluno que prefira voleibol ser rapariga"}) = \frac{128}{186} = \frac{64}{93}$$

20 16.

16.1.



- 16.2. a) Seja A o acontecimento: "um automóvel encontrar os dois semáforos verdes". Então:

$$P(A) = 0,4 \times 0,65 = 0,26$$

- b) Seja B o acontecimento: "um automóvel encontrar um, e um só, dos semáforos verdes". Então:

$$P(B) = 0,4 \times 0,35 + 0,6 \times 0,45 = 0,41$$

- c) Seja C o acontecimento: "um automóvel não encontrar os dois semáforos vermelhos".

Comecemos por calcular a probabilidade do acontecimento $\bar{C}$, ou seja, a probabilidade de um automóvel encontrar os dois semáforos vermelhos: $P(\bar{C}) = 0,6 \times 0,55 = 0,33$

$$\text{Então, } P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0,33 = 0,67.$$

- 20 17. Vamos construir tabelas de dupla entrada para calcular as somas e os produtos dos pontos obtidos nos dados, e assim calcular as probabilidades pedidas.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Relativamente aos acontecimentos A e B , há 36 casos possíveis.

$$P(A) = \frac{15}{36} \text{ e } P(B) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

R.: O acontecimento A tem maior probabilidade de ocorrer.

18.

18.1. $P(\text{"ponto pertencer ao segmento de reta } [AC]\text{")} = \frac{1}{6}$

18.2. $P(\text{"ponto pertencer ao segmento de reta } [DF]\text{")} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

18.3. $P(\text{"ponto pertencer ao segmento de reta } [CG]\text{")} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

20 19.

Consideremos os acontecimentos A : "sair uma barra de cereais com chocolate", B : "sair uma barra de cereais com pera e C : "sair uma barra de cereais com frutos silvestres".

- 19.1. Como há três tipos de barras de cereais, a soma das probabilidades de tirar cada um deles é igual a 1 (probabilidade do acontecimento certo), ou seja, $P(A) + P(B) + P(C) = 1$

Então:

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{4} + P(C) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(C) = 1 - \frac{6}{20} - \frac{5}{20}$$

$$\Leftrightarrow P(C) = \frac{20}{20} - \frac{11}{20}$$

$$\Leftrightarrow P(C) = \frac{9}{20} \text{ c.q.d.}$$

- 19.2. $P(\text{"sair uma barra de cereais com chocolate ou com frutos silvestres"}) = \frac{3}{10} + \frac{9}{20} = \frac{6}{20} + \frac{9}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

- 19.3. a) Seja n o número total de barras de cereais na caixa.

$$\begin{array}{l} 18 \text{ barras} \quad \text{---} \quad \frac{9}{20} \\ n \text{ barras} \quad \text{---} \quad 1 \end{array}$$

$$n = \frac{18}{\frac{9}{20}} \Leftrightarrow n = \frac{360}{9} \Leftrightarrow n = 40$$

R.: Há 40 barras de cereais na caixa.

- b) Vamos calcular quantas barras de cereais com chocolate (c) estão na caixa:

$$\begin{array}{l} 40 \text{ barras} \quad \text{---} \quad 1 \\ c \quad \text{---} \quad \frac{3}{10} \end{array}$$

$$c = 40 \times \frac{3}{10} \Leftrightarrow c = \frac{120}{10} \Leftrightarrow c = 12$$

Das 40 barras de cereais, 12 são barras de cereais com chocolate e 18 são barras de cereais com frutos silvestres.

- i. Se a Leonor comeu uma barra de cereais com chocolate ficaram na caixa 39 barras de cereais, das quais 11 são de cereais com chocolate. Seja D o acontecimento: “tirar uma barra de cereais com chocolate sabendo que anteriormente havia sido retirada uma barra de cereais de chocolate”. Então:

$$P(D) = \frac{11}{39}$$

- ii. Se a Leonor comeu uma barra de cereais que não era de chocolate ficaram na caixa 39 barras de cereais, das quais 12 são de cereais com chocolate. Seja E o acontecimento: “tirar uma barra de cereais com chocolate sabendo que anteriormente havia sido retirada uma barra de cereais que não era de chocolate”. Então:

$$P(E) = \frac{12}{39} = \frac{4}{13}$$

20

- 20.1. O Filipe está a tirar conclusões precipitadas. O número de lançamentos não é suficientemente grande para se poder averiguar se o dado está viciado ou não.

- 20.2.a) Num dado equilibrado, todas as faces têm a mesma probabilidade de sair $\frac{1}{6}$. 2000 lançamentos

é um número suficientemente grande para que a frequência relativa esperada de cada face coincida com o valor da probabilidade da saída dessa face.

Neste caso, a face 3 saiu 660 vezes em 2000 lançamentos. Como $\frac{660}{2000} = \frac{33}{100}$ e $\frac{33}{100} \neq \frac{1}{6}$ podemos concluir que, dado o número elevado de lançamentos, o dado está viciado.

- b) Como em 2000 lançamentos a face 3 saiu 660 vezes, as outras faces saíram nos restantes 1340 lançamentos ($2000 - 660 = 1340$).

$$P(A) = \frac{1340}{2000} = 0,67$$

- c) Se as faces 1, 2, 4, 5 e 6 são equiprováveis, cada uma delas terá saído 268 vezes ($1340 : 5 = 268$), perfazendo 1340 lançamentos. Assim, as faces 1, 2 e 4 terão saído em 804 lançamentos ($3 \times 268 = 804$).

$$P(B) = \frac{804}{2000} = 0,402$$

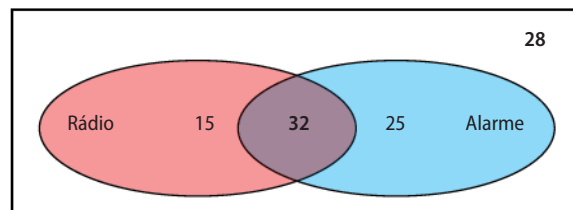
21. Num dado equilibrado, cada face tem igual probabilidade de sair $\frac{1}{6}$. Pela Lei dos Grandes Números

(dado que o número de lançamentos é elevado), a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar num valor que se adota como probabilidade desse acontecimento. Assim, em 6000 lançamentos, é de esperar que cada face saia 1000 vezes.

$$\begin{aligned} 1000 \times 1 + 1000 \times 2 + 1000 \times 3 + 1000 \times 4 + 1000 \times 5 + 1000 \times 6 = \\ = 1000 + 2000 + 3000 + 4000 + 5000 + 6000 = \\ = 21\,000 \end{aligned}$$

R.: [B] 21 000

22. Vamos traduzir a informação recolhida através de um diagrama de Venn: dos 100 automóveis vendidos, 28 não tinham nem alarme nem rádio. Dos restantes 72 ($100 - 28 = 72$), 47 vinham equipados com rádio e 57 vinham equipados com alarme.



- 22.1. $P(\text{"ter comprado automóvel sem alarme e sem rádio"}) = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$

- 22.2. $P(\text{"ter comprado automóvel apenas com rádio"}) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$

- 22.3. $P(\text{"automóvel com rádio e com alarme"}) = \frac{32}{100} = \frac{8}{25}$

23

- 23.1. Para tirar duas bolas brancas da caixa, no 1º lançamento do dado saiu a face 2.

$$P(\text{"sair a face 2 no 1º lançamento do dado"}) = \frac{1}{6}$$

- 23.2. Se no 1º lançamento do dado saiu a face 5, então retiraram-se cinco bolas brancas da caixa. Para que a caixa fique com seis bolas é necessário que se coloquem cinco bolas pretas. Para tal, é necessário que no 2º lançamento do dado saia a face 5.

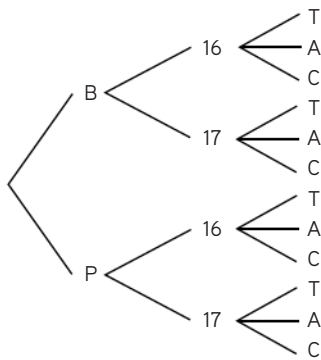
$$P(\text{"sair a face 5 no 2º lançamento do dado"}) = \frac{1}{6}$$

23.3. Se no 1º lançamento do dado saiu a face 3, então foram retiradas três bolas brancas da caixa. Para que a caixa fique com mais do que seis bolas é necessário que, no mínimo, entrem quatro bolas pretas na caixa. Isto significa que, no 2º lançamento do dado, é necessário que saia a face 4 ou a face 5 ou a face 6.

$$P(\text{"sair a face 4, 5 ou 6 no 2º lançamento do dado"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

20 24.

24.1. Cor Jante Estofos



R.: A mãe do Filipe pode personalizar 12 automóveis diferentes.

24.2. a) Seja A o acontecimento: "escolher um automóvel de cor preta".

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

b) Seja B o acontecimento: "escolher um automóvel de cor branca e com jantes de 17 polegadas".

$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

c) Seja C o acontecimento: "escolher um automóvel com estofos em alcântara".

$$P(C) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

25.

25.1. Na roleta A há 4 cores possíveis e na roleta B há 3 possíveis. Assim, no total, existem 7 cores possíveis.

R.: Nesta experiência aleatória há 7 casos possíveis.

25.2. a) Na roleta B há 3 casos possíveis.

$$P(\text{"sair setor azul na roleta B"}) = \frac{1}{3}$$

b) O concorrente poderá escolher uma das duas roletas e essa escolha é aleatória. Logo, a probabilidade de escolher a roleta A é igual à probabilidade de escolher a roleta B, ou seja, $\frac{1}{2}$. Se escolher a roleta A tem $\frac{1}{4}$ de hipóteses de sair o setor azul enquanto que se escolher a roleta B tem $\frac{1}{3}$ de hipóteses de sair a cor azul. Assim:

$$P(\text{"concorrente ser premiado"}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{3}{24} + \frac{4}{24} = \frac{7}{24}$$

26. Numa experiência aleatória com três acontecimentos elementares A , B e C , podemos assegurar que $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

Sabemos que $P(A) = P(B)$ e que $P(C) = \frac{P(B)}{2}$.

$$\text{Assim, } P(A) + P(A) + \frac{P(A)}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2P(A) + \frac{P(A)}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4P(A)}{2} + \frac{P(A)}{2} = \frac{2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 5P(A) = 2$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{5}$$

Logo, como $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ temos

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Praticar para a prova final – páginas 52 a 55

1. Das 210 pessoas entrevistadas, 140 responderam que a relação entre o seu cão e o seu gato é boa. Seja A o acontecimento: "a relação entre o meu cão e o meu gato é boa".

$$P(A) = \frac{140}{210} = \frac{2}{3}$$

2.

2.1. Nos primeiros três meses do ano foram vendidas, para Madrid, 1413 viagens.

$$\bar{x} = \frac{1413}{3} = 471$$

R.: Em média, foram vendidas 471 viagens para Madrid, por mês.

- 2.2. Em março foram vendidas 2400 viagens. Dessas, 528 foram viagens para Paris.

$$P(\text{"sair o prêmio a um cliente que comprou uma viagem a Paris"}) = \frac{528}{2400} = 0,22$$

3. O prisma quadrangular foi cortado em 12 cubos iguais. Dado que as faces do prisma foram pintadas, oito cubos têm três faces pintadas e quatro cubos têm apenas duas faces pintadas. Então:

$$P(\text{"escolher um cubo só com duas faces pintadas"}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

4. Por observação da tabela, existem 13 bolas dentro do saco, cada uma com um número inscrito, que varia entre 1 e 6.

Os números pares superiores a 3 que se procuram podem ser o "4" ou o "6". Assim, existem cinco bolas nessas condições.

$$P(\text{"tirar uma bola com um número par superior a 3"}) = \frac{5}{13}$$

5. Sabendo que a turma é constituída por rapazes e por raparigas, calculemos a probabilidade de, escolhendo um aluno ao acaso, este ser rapariga conhecendo a probabilidade de ser rapaz.

$$P(\text{"ser rapaz"}) + P(\text{"ser rapariga"}) = 1$$

$$\text{Logo, } P(\text{"ser rapariga"}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Seja n o número total de alunos da turma. Sabemos que

$$P(\text{"ser rapariga"}) = \frac{1}{3} \text{ e que } P(\text{"ser rapariga"}) = \frac{6}{n}.$$

$$\text{Assim, } \frac{1}{3} = \frac{6}{n} \Leftrightarrow n = 18$$

$18 - 6 = 12$, logo há 12 rapazes na turma.

R.: [C] 12

6.

- 6.1. 12 anos: $4 + 15 = 19$
 13 anos: $14 + 12 = 26$
 14 anos: $10 + 9 = 19$
 15 anos: $9 + 9 = 18$
 16 anos: $5 + 3 = 8$

Logo, a moda das idades dos alunos do 3.º ciclo da escola é 13 anos.

- 6.2. Sabemos que:

- a turma do 5.º ano tem 20 alunos.
- a turma do 6.º ano tem 30 alunos.
- o número de rifas distribuídas ao 5.º ano é:
 $1 \times 20 = 20$
- o número de rifas distribuídas ao 6.º ano é:
 $2 \times 30 = 60$

Assim, o número total de rifas é: $20 + 60 = 80$. Seja A: "a rifa premiada pertence a um aluno do 6.º ano".

$$P(A) = \frac{60}{80} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

20 7.

- 7.1. As idades dos nove primos do Roberto devem ser escritas por ordem, seja ela crescente ou decrescente. Como o número de primos é ímpar, à idade que ocupar a posição central (5.ª posição) corresponde a mediana das idades.

- 7.2. Seja n o número de primos rapazes do Roberto.

Sabemos que $P(\text{"ser rapaz"}) = \frac{1}{3}$ e que $P(\text{"ser rapaz"}) = \frac{n}{9}$.

$$\frac{1}{3} = \frac{n}{9} \Leftrightarrow n = \frac{9}{3} \Leftrightarrow n = 3$$

Assim, o Roberto 3 primos rapazes.

$$9 - 3 = 6$$

R.: O Roberto tem seis primas raparigas.

8. Dos 50 números naturais considerados (de 1 a 50) apenas os pares que terminem em zero são simultaneamente divisíveis por 2 e por 5 (10, 20, 30, 40, 50). Destes, apenas o 30 é divisível por 3. Assim, de entre os 50 números considerados apenas um número (30) é simultaneamente divisível por 2, 3 e 5.

$$P(\text{"escolher um n.º simultaneamente divisível por 2, 3 e 5"}) = \frac{1}{50}$$

20 9.

- 9.1. Cada um dos membros da família tem igual probabilidade de ficar com qualquer um dos automóveis. A mãe não ficará com o automóvel preto se lhe sair o automóvel branco ou o automóvel cinzento.

$$P(\text{"automóvel preto não ser atribuído à mãe"}) = \frac{2}{3}$$

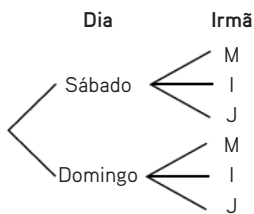
R.: [B]

- 9.2. Um dos elementos da família pode ficar com um dos três carros e os outros dois são distribuídos pelos dois elementos restantes. A tabela seguinte resume todos os casos possíveis.

Pai	P	P	C	C	B	B
Mãe	C	B	P	B	C	P
Filho	B	C	B	P	P	C

R.: Seis maneiras.

- 20 10. Vamos construir um diagrama de árvore para clarificar a informação dada.



$$P(\text{"a Teresa ir ao arraial no sábado com a Maria"}) = \frac{1}{6}$$

R.: [D]

20 11.

- 11.1. Vamos construir uma tabela de dupla entrada para representar os produtos dos números das bolas extraídas. Obviamente, o mesmo número não pode sair duas vezes.

×	1	2	3	4
1	-	2	3	4
2	2	-	6	8
3	3	6	-	12
4	4	8	12	-

R.: O Pedro pode obter seis produtos diferentes.

- 11.2. O Pedro tirou a bola roxa do saco. Logo, restam três bolas dentro do saco (duas azuis e uma verde).

$$P(\text{"a segunda bola retirada pelo Pedro ser azul"}) = \frac{2}{3}$$

- 20 12. Vamos construir uma tabela de dupla entrada para representar a soma dos valores dos dois dados lançados.

+	1	2	3	4	5	6
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
-5	-4	-3	-2	-1	0	1
-4	-3	-2	-1	0	1	2
-3	-2	-1	0	1	2	3
-2	-1	0	1	2	3	4
-1	0	1	2	3	4	5

Dos 36 resultados possíveis, 15 são negativos, portanto:

$$P(\text{"a soma ser um número negativo"}) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

13. Com os dados do enunciado, sabemos que a probabilidade de o Miguel chegar atrasado à escola (quando no dia anterior se deitou depois das 22 h) é maior do que 0,5. Isto porque sabemos que a probabilidade de um qualquer acontecimento é um número compreendido entre 0 e 1 inclusive.

Dos três valores apresentados, sabemos que:

$$\frac{2}{5} < 0,5 \quad \frac{3}{5} > 0,5 \quad \frac{6}{5} > 1$$

Assim, $\frac{2}{5}$ não pode ser resposta correta à questão, pois é inferior a 0,5 (o que contradiz o enunciado).

$\frac{6}{5}$ também não pode ser a resposta correta, pois é superior a 1.

14. O número total de alunos é: $10 + 5 + 7 = 22$

Consideremos A: "ter olhos azuis".

$$\text{Assim, } P(A) = \frac{5}{22}.$$

20 15.

- 15.1. Vamos esquematizar todas as possibilidades.

♂ representa os rapazes e ♀ representa as raparigas.

♂ ♀₁ ♀₂
 ♂ ♀₂ ♀₁
 ♀₁ ♀₂ ♂
 ♀₂ ♀₁ ♂
 ♀₁ ♂ ♀₂
 ♀₂ ♂ ♀₁

Assim, sendo A: "as raparigas ficaram juntas",

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

R.: [C]

- 15.2. Seja x: "idade do rapaz"

Sabemos que:

$$\frac{x + 15 + 15}{3} = 14$$

$$\Leftrightarrow x + 30 = 42$$

$$\Leftrightarrow x = 12$$

R.: O rapaz tem 12 anos.

20 Testar – páginas 62 e 63

1.

1.1. A experiência é aleatória, pois é impossível prever o resultado que se obterá quando se roda o pião.

1.2. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

- 1.3. a) Por exemplo, “sair um número primo e par”.
b) Por exemplo, “sair um número menor do que 5”.
c) Por exemplo, “sair um número menor do que 9”.
d) Por exemplo, “sair um número maior do que 10”.

2. Não, essa conclusão seria muito precipitada. O número de lançamentos não é suficientemente grande para se poder averiguar se o dado está viciado ou não.

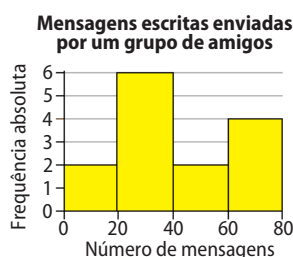
3.

3.1. O grupo é composto por 14 amigos.

3.2.

Nº de mensagens	Frequência absoluta	Frequência relativa
[0; 20[	2	$\frac{2}{14} = 0,14$
[20; 40[	6	$\frac{6}{14} = 0,43$
[40; 60[	2	$\frac{2}{14} = 0,14$
[60; 80[	4	$\frac{4}{14} = 0,29$
Total	14	$\frac{4}{14} = 1$

3.3.



3.4. Mais de 49, são 52, 58, 61, 64, 67 e 72, ou seja, 6 amigos.

$$\frac{6}{14} \approx 0,43$$

R.: Aproximadamente 43% dos amigos enviou mais de 49 mensagens.

4. O concorrente selecionado para a final pode ganhar ou não ganhar o concurso. Seja A o acontecimento: “o concorrente ganha o concurso”. Sabemos que a probabilidade de ganhar é 0,85, então:

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0,85 \\ P(A) + P(\bar{A}) = 1 \end{array} \right\} P(\bar{A}) = 1 - 0,85 \Leftrightarrow P(\bar{A}) = 0,15$$

R.: A probabilidade de o concorrente não ganhar o concurso é 0,15.

5.

5.1. $P(\text{“sair o número 7”}) = \frac{1}{20}$

5.2. Os números 6, 12 e 18 são simultaneamente múltiplos de 2 e de 3.

$$P(\text{“sair um número simultaneamente múltiplo de 2 e de 3”}) = \frac{3}{20}$$

5.3. Os números 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 e 20 são múltiplos de 2 ou múltiplos de 3.

$$P(\text{“sair um número múltiplo de 2 ou múltiplo de 3”}) = \frac{13}{20}$$

6. Consideremos os acontecimentos: A : “sair um disco verde”, B : “sair um disco vermelho” e C : “sair um disco azul”

6.1. Sabemos que $P(A) + P(B) + P(C) = 1$, $P(A) = \frac{2}{5}$ e $P(C) = \frac{1}{4}$.

Assim,

$$P(B) = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = 1 - \frac{8}{20} - \frac{5}{20}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{20}{20} - \frac{13}{20}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{7}{20}$$

R.: A probabilidade de sair um disco vermelho é $\frac{7}{20}$.

6.2. Seja n o número total de discos. Sabemos que

$$P(A) = \frac{16}{n} \text{ e } P(A) = \frac{2}{5}.$$

Assim,

$$\frac{16}{n} = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 2n = 80$$

$$\Leftrightarrow n = 40$$

R.: Há 40 discos no saco.

7. O saco tem treze bolas. A primeira bola extraída é azul, portanto ficam no saco doze bolas (cinco bolas azuis e sete bolas amarelas).

$$\text{Logo, } P(\text{"a segunda bola ser amarela"}) = \frac{7}{12}$$

8. O setor circular corresponde a um quarto de circunferência de raio 10 cm. Vamos calcular a área do setor circular e a área do quadrado.

$$A_{\text{quadrado}} = l \times l$$

$$A_{\text{quadrado}} = 10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{setor circular}} = \frac{1}{4} A_{\text{O}} = \frac{1}{4} \pi r^2$$

$$A_{\text{setor circular}} = \frac{1}{4} (\pi \times 10^2) = \frac{100}{4} \pi = 25\pi \text{ cm}^2$$

Seja A o acontecimento: "escolhendo um ponto qualquer do quadrado, esse ponto pertence ao setor circular".

$$P(A) = \frac{20}{100} \pi = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Então, } P(\bar{A}) = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4 - \pi}{4} \approx 0,21.$$

9.

- 9.1. É o número -1.

- 9.2. A menor soma possível corresponde à soma do menor número do dado com ele próprio. Como -3 é o menor número que pode sair, a menor soma possível corresponde a $(-3) + (-3) = -6$.

R.: A menor soma que posso obter é -6.

- 9.3. Num total de seis números possíveis (um em cada face do dado) existem três números negativos (-3, -2, -1) e dois números positivos (2 e 3).

$$P(\text{"sair um número negativo"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{"sair um número positivo"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

O Vítor tem maior probabilidade de ganhar, por isso concordo com a Rita.

- 9.4. Vamos construir uma tabela de dupla entrada.

X	-3	-2	-1	0	2	3
-3	9	6	3	0	-6	-9
-2	6	4	2	0	-4	-6
-1	3	2	1	0	-2	-3
0	0	0	0	0	0	0
2	-6	-4	-2	0	4	6
3	-9	-6	-3	0	6	9

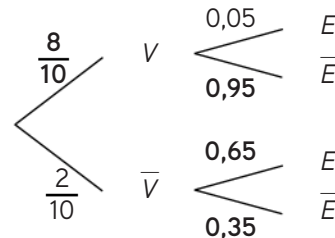
$$P(\text{"sair um número negativo"}) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{"sair um número negativo"}) = \frac{13}{36}$$

R.: É mais provável sair um número positivo.

10.

10.1.



- 10.2. $P(\text{"o iogurte estar dentro da validade mas estragado"}) = \frac{8}{10} \times 0,05 = 0,04$

Unidade 2 – Funções

Aplicar – página 67

20 1.

- 1.1. O gráfico III representa uma função de proporcionalidade direta uma vez que todos os pontos do gráfico estão sobre uma reta que passa na origem do referencial.

1.2. I. $y = -\frac{1}{2}x + 2$ II. $y = 2x + 2$

III. $y = 5x$ IV. $y = 2$

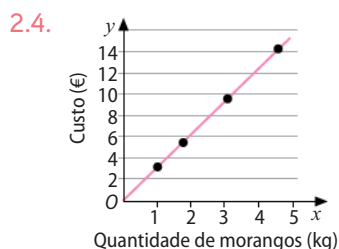
2.

- 2.1. Trata-se de uma situação de proporcionalidade direta, pois a razão entre os valores correspondentes das duas variáveis (peso e custo), tomadas pela mesma ordem, é constante. A constante de proporcionalidade é 3,2 e representa o preço de 1 kg de morangos.

2.2.

Quantidade de morangos (kg)	1	1,7	3	4,5
Custo (€)	3,2	5,44	9,6	14,4

- 2.3. A variável independente é a quantidade de morangos e a variável dependente é o custo.

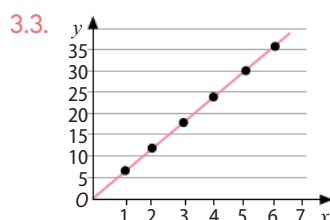


20 3. A função f pode ser definida pela expressão analítica $f(x) = 6x$.

3.1. $f(4) = 6 \times 4 = 24$

3.2. $f(x) = 66$

$$6x = 66 \Leftrightarrow x = \frac{66}{6} \Leftrightarrow x = 11$$



Trata-se do gráfico de uma função de proporcionalidade direta porque todos os seus pontos estão sobre uma reta que passa na origem do referencial.

20 4.

4.1. Numa hora de trabalho, o João ganha 8 €. Em trinta minutos ganha 4 €.

4.2. $V = 8t$

4.3. $V(t) = 96$
 $8t = 96$
 $\Leftrightarrow t = \frac{96}{8}$

$\Leftrightarrow t = 12$

R.: Para receber 96 €, o João terá que trabalhar 12 horas.

4.4. Vamos verificar quanto ganharia o João em 2 horas de trabalho:

$V(2) = 8 \times 2 = 16$

R.: Nesse dia, por ter saído mais cedo 2 horas, o João perdeu 16 €.

Aplicar – páginas 74 e 75

2.

2.1. Os pares de grandezas não podem ser inversamente proporcionais.

2.2. Os pares de grandezas podem ser inversamente proporcionais.

2.3. Os pares de grandezas não podem ser inversamente proporcionais.

2.4. Os pares de grandezas podem ser inversamente proporcionais.

20 3.

• 1 operário demora 8 horas.

4 operários demoram 2 horas.

Para passar de 1 para 4 é necessário multiplicar por $\frac{4}{1} = 4$.

Para passar de 8 para 2 é necessário multiplicar por $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

(Inversamente, para passar de 2 para 8 multiplica-se por $\frac{8}{2} = 4$).

• 1 operário demora 8 horas.

16 operários demoram $\frac{1}{2}$ hora.

Para passar de 1 para 16 é necessário multiplicar por $\frac{16}{1} = 16$.

Para passar de 8 para $\frac{1}{2}$ é necessário multiplicar por $\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

(Inversamente, para passar de 16 para 1 multiplica-se por $\frac{1}{16}$ e para passar de $\frac{1}{2}$ para 8 multiplica-se por 16).

• 4 operários demoram 2 horas.

16 operários demoram $\frac{1}{2}$ hora.

Para passar de 4 para 16 é necessário multiplicar por $\frac{16}{4} = 4$.

Para passar de 2 para $\frac{1}{2}$ é necessário multiplicar por $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

(Inversamente, para passar de 16 para 4 multiplica-se por $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ e para passar de $\frac{1}{2}$ para 2 é necessário multiplicar por $\frac{2}{1} = 2$).

Podemos, então, concluir que a grandeza “número de operários” é inversamente proporcional à grandeza “tempo”, uma vez que depende dela de tal forma que, fixadas unidades, ao multiplicar a medida da segunda por um dado número positivo, a medida da primeira fica multiplicada pelo inverso desse número.

20 4.

- 4.1. As grandezas são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 18:

$$x \times y = 1 \times 18 = 2 \times 9 = 2,25 \times 8 = 3 \times 6 = 3,6 \times 5$$

- 4.2. As grandezas são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 2:

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{2} = \frac{9}{4,5} = \frac{12}{6} = \frac{14}{7} = \frac{20}{10}$$

- 4.3. Não se verifica proporcionalidade entre as duas grandezas.

- 4.4. Não se verifica proporcionalidade entre as duas grandezas.

- 20 5.** Uma grandeza é inversamente proporcional a outra quando dela depende de tal forma que, fixadas unidades, ao multiplicar a medida da segunda por um dado número positivo, a medida da primeira fica multiplicada pelo inverso desse número.

- 5.1. Como as grandezas x e y são inversamente proporcionais, temos que $3 \times 5 = 15$ é a constante de proporcionalidade inversa. Assim:

$$5 \times a = 15 \Leftrightarrow a = \frac{15}{5} \Leftrightarrow a = 3$$

$$b \times 30 = 15 \Leftrightarrow b = \frac{15}{30} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$1 \times c = 15 \Leftrightarrow c = \frac{15}{1} \Leftrightarrow c = 15$$

$$d \times \frac{15}{2} = 15 \Leftrightarrow d = \frac{15}{\frac{15}{2}} \Leftrightarrow d = \frac{30}{15} \Leftrightarrow d = 2$$

x	3	5	$\frac{1}{2}$	1	2
y	5	3	30	15	$\frac{15}{2}$

- 5.2. Como as grandezas x e y são inversamente proporcionais, temos que $2 \times 20 = 40$ é a constante de proporcionalidade inversa. Assim:

$$10 \times a = 40 \Leftrightarrow a = \frac{40}{10} \Leftrightarrow a = 4$$

$$5 \times b = 40 \Leftrightarrow b = \frac{40}{5} \Leftrightarrow b = 8$$

$$8 \times c = 40 \Leftrightarrow c = \frac{40}{8} \Leftrightarrow c = 5$$

$$d \times 40 = 40 \Leftrightarrow d = \frac{40}{40} \Leftrightarrow d = 1$$

x	10	2	5	8	1
y	4	20	8	5	40

- 5.3. Como as grandezas x e y são inversamente proporcionais, temos que $1 \times 100 = 100$ é a constante de

proporcionalidade inversa. Assim:

$$10 \times a = 100 \Leftrightarrow a = \frac{100}{10} \Leftrightarrow a = 10$$

$$2 \times b = 100 \Leftrightarrow b = \frac{100}{2} \Leftrightarrow b = 50$$

$$c \times 25 = 100 \Leftrightarrow c = \frac{100}{25} \Leftrightarrow c = 4$$

$$\frac{1}{2} \times d = 100 \Leftrightarrow d = \frac{100}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow d = 200$$

x	10	2	1	4	$\frac{1}{2}$
y	10	50	100	25	200

- 5.4. Como as grandezas x e y são inversamente proporcionais, temos que $\frac{1}{2} \times 36 = \frac{36}{2} = 18$ é a constante de proporcionalidade inversa. Assim:

$$1 \times a = 12 \Leftrightarrow a = 12$$

$$3 \times b = 12 \Leftrightarrow b = \frac{12}{3} \Leftrightarrow b = 4$$

$$c \times 24 = 12 \Leftrightarrow c = \frac{12}{24} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$48 \times d = 12 \Leftrightarrow d = \frac{12}{48} \Leftrightarrow d = \frac{1}{4}$$

x	$\frac{1}{3}$	1	3	$\frac{1}{2}$	48
y	36	12	4	24	$\frac{1}{4}$

- 20 6.** As grandezas “número de alunos” e “número de rebuçados a receber por cada aluno” são inversamente proporcionais, uma vez que o número de rebuçados a distribuir é constante e igual a $25 \times 8 = 200$. Assim, podemos construir a seguinte tabela:

Número de alunos	25	20
Número de rebuçados a receber por cada aluno	8	x

Como as grandezas são inversamente proporcionais, $25 \times 8 = 20 \times x$, logo, $x = \frac{25 \times 8}{20} = \frac{200}{20} = 10$.

Assim, podemos concluir que cada aluno receberia 10 rebuçados.

- 7.** Uma vez que o produto do número de premiados pelo prémio a receber é constante e igual ao valor do prémio, que, nesta situação, se assume como a constante de proporcionalidade inversa, é possível afirmar que o prémio a receber por cada um é inversamente proporcional ao número de premiados.

8.

8.1. Como a e b são duas grandezas diretamente proporcionais, então $\frac{a}{b} = \text{constante}$.

$$\text{Neste caso, } \frac{a}{b} = \frac{24}{6} = 4.$$

a) Temos, então:

$$\frac{a}{5} = 4 \Leftrightarrow a = 20$$

b) Temos, então:

$$\frac{40}{b} = 4 \Leftrightarrow 4b = 40 \Leftrightarrow b = \frac{40}{4} \Leftrightarrow b = 10$$

8.2. Como a e b são duas grandezas inversamente proporcionais, então $a \times b = \text{constante}$.

$$\text{Neste caso, } a \times b = 24 \times 6 = 144.$$

a) Temos, então:

$$5 \times a = 144 \Leftrightarrow a = 28,8$$

b) Temos, então:

$$40 \times b = 144 \Leftrightarrow b = 3,6$$

20 9. O volume de um cilindro é dado pela fórmula:

$$V = A_b \times h$$

em que V representa o volume, A_b representa a área da base e h representa a altura. Se o volume é constante, então as grandezas “área da base” e “altura” são inversamente proporcionais, independentemente da medida do volume. Logo, a afirmação é verdadeira.

20 10. Como R e r^2 são inversamente proporcionais, temos que $R \times r^2 = k$, sendo k a constante de proporcionalidade inversa. Assim, tendo em conta que, segundo a tabela, um fio com um raio de 2 mm apresenta uma resistência de 2500 ohms, temos que:

$$2500 \times 2^2 = k \Leftrightarrow 2500 \times 4 = k \Leftrightarrow k = 10\,000$$

Então:

$$500 \times A^2 = 10\,000 \Leftrightarrow A^2 = \frac{10\,000}{500} \Leftrightarrow A^2 = 20$$

$$\text{Logo, } A = \sqrt{20} \approx 4,47.$$

$$B \times 15^2 = 10\,000 \Leftrightarrow B = \frac{10\,000}{225} \Leftrightarrow B = 44,44$$

$$250 = \frac{10\,000}{C^2} \Leftrightarrow C^2 = \frac{10\,000}{250} \Leftrightarrow C^2 = 40$$

$$\text{Logo, } C = \sqrt{40} \approx 6,32.$$

$$D = \frac{10\,000}{100^2} \Leftrightarrow D = \frac{10\,000}{10\,000} \Leftrightarrow D = 1$$

Raio (mm)	2	4,47	15	6,32	100
Resistência (ohms)	2500	500	44,44	250	1

Aplicar – páginas 78 e 79

20 2. A constante de proporcionalidade inversa é $40 \times 5 = 200$. Logo, $f(x) = \frac{200}{x}$, sendo f a função de proporcionalidade inversa associada.

3.

3.1. Se a razão entre os valores correspondentes das duas grandezas, tomados pela mesma ordem, for constante.

3.2. Se o produto dos valores correspondentes das duas grandezas for constante e não nulo.

20 4. Numa função de proporcionalidade inversa, o produto dos valores correspondentes das duas grandezas é constante e não nulo. Assim, $3 \times 16 = 48$ é a constante de proporcionalidade inversa.

Como, $a \times b = 48$, logo, $b = \frac{48}{a}$. Então:

$$12 \times ? = 48 \Leftrightarrow ? = \frac{48}{12} \Leftrightarrow ? = 4$$

$$? \times 2 = 48 \Leftrightarrow ? = \frac{48}{2} \Leftrightarrow ? = 24$$

$$? \times 0,8 = 48 \Leftrightarrow ? = \frac{48}{0,8} \Leftrightarrow ? = 60$$

$$? \times \frac{48}{7} = 48 \Leftrightarrow ? = \frac{48}{\frac{48}{7}} \Leftrightarrow ? = 7$$

Logo:

a	12	24	3	0,8	7
b	4	2	16	60	$\frac{48}{7}$

5. As funções $y = 3x$, $y = x + 1$, $y = \frac{3}{2}x$, $y = \frac{4}{x} + 1$ e $y = \frac{3}{7}x^2$ não representam funções de proporcionalidade inversa, uma vez que as suas expressões analíticas não são da forma $f(x) = \frac{k}{x}$, (com $k = f(1)$, $k \neq 0$ e $x \neq 0$).
 $y = \frac{5}{x}$ é uma função de proporcionalidade inversa e a constante de proporcionalidade inversa é 5.
 $y = \frac{0,3}{x}$ é uma função de proporcionalidade inversa e a constante de proporcionalidade inversa é 0,3.
 $y = \frac{3}{2x}$ é uma função de proporcionalidade inversa e a constante de proporcionalidade inversa é $\frac{3}{2}$.

6. Se h é uma função de proporcionalidade inversa, sendo 28 a constante de proporcionalidade, então:

$$f(x) = \frac{28}{x}$$

Logo:

$$\begin{aligned} h(2) - 2 \times h(3) &= \frac{28}{2} - 2 \times \frac{28}{3} = \frac{28}{2} - \frac{56}{3} = \\ &= \frac{84}{6} - \frac{112}{6} = -\frac{28}{6} = -\frac{14}{3} \end{aligned}$$

7. Se a é inversamente proporcional a b e se $b = 30$, quando $a = 10$, então 10×30 é a constante de proporcionalidade inversa. Logo, $a \times b = 30$.

7.1. $a \times b = 30 \Leftrightarrow a = \frac{30}{b}$

7.2. Se $b = 6$, $a = \frac{30}{6} = 5$.

7.3. $a \times b = 30 \Leftrightarrow b = \frac{30}{a}$

7.4. Se $a = 15$, $b = \frac{30}{15} = 2$.

8. Sabe-se que $g(x) = \frac{m}{x}$ e que $g(4) = 8$. Então, $8 = \frac{m}{4} \Leftrightarrow m = 32$.

9. Como f uma função de proporcionalidade inversa e $f(2) = 4$, então $2 \times 4 = 8$ é a constante de proporcionalidade inversa. Assim, e uma vez que $f(b) = 1$, $b \times 1 = 8 \Leftrightarrow b = 8$.

10. Sabe-se que $F_g = \frac{k}{d^2}$, sendo k a constante de proporcionalidade inversa. Assim, e uma vez que quando os corpos estão separados 2 m a força que os atrai tem 24 unidades, temos que $k = 2 \times 24 = 48$. Logo, $F_g = \frac{48}{d^2}$.

Então, se a força que atrai dois corpos é de 6 unidades, temos que:

$$6 = \frac{48}{d^2} \Leftrightarrow d^2 = \frac{48}{6} = d^2 = 8$$

Logo, a distância que os separa é $\sqrt{8}$ cm.

11. A. Quando o comprimento de um retângulo diminui, a sua largura **aumenta**.
B. Quando o comprimento de um retângulo aumenta, a sua largura **diminui**.
C. Quando o comprimento de um retângulo duplica, a sua largura **diminui para metade**.
D. Se um retângulo tem 2 cm de comprimento, a sua largura é **15 cm**.

- E. O comprimento e a largura de um retângulo são variáveis **inversamente proporcionais**.

- F. A relação entre o comprimento (c) e a largura (l) de um retângulo pode ser traduzida pela expressão $c = \frac{30}{l}$.

12.

- 12.1. Como o triângulo tem 36 cm^2 de área, então:

$$\frac{b \times h}{2} = 36 \Leftrightarrow b \times h = 2 \times 36 \Leftrightarrow b \times h = 72$$

Como o produto da medida de b pela medida de h é constante e igual a 72, então as variáveis b e h são inversamente proporcionais. Assim:

$$18 \times a = 72 \Leftrightarrow a = \frac{72}{18} \Leftrightarrow a = 4$$

$$b \times 9 = 72 \Leftrightarrow b = \frac{72}{9} \Leftrightarrow b = 8$$

$$7,2 \times c = 72 \Leftrightarrow c = \frac{72}{7,2} \Leftrightarrow c = 10$$

$$d \times 2 = 72 \Leftrightarrow d = \frac{72}{2} \Leftrightarrow d = 36$$

$$6 \times e = 72 \Leftrightarrow e = \frac{72}{6} \Leftrightarrow e = 12$$

Base, em cm (b)	18	8	7,2	36	6
Altura, em cm (h)	4	9	10	2	12

12.2. a) $f(b) = \frac{72}{b}$

A constante é 72 e corresponde ao dobro da área dos triângulos.

b) $f(10) = \frac{72}{10} = 7,2$

A altura do triângulo é 7,2 cm.

Aplicar – páginas 82 e 83

20 3.

- 3.1. Para realizar a tarefa em 2 horas são necessários quatro pintores.

- 3.2. Sabemos que o ponto de coordenadas (4, 2) pertence ao gráfico da função. A função representada é da forma $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$.

$$\text{Então, } 2 = \frac{k}{4} \Leftrightarrow k = 8.$$

Assim, a expressão algébrica que define a função é $y = \frac{8}{x}$.

3.3. $f(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{8}{x} = 4 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$

$$3.4. \left. \begin{aligned} f(2) &= \frac{8}{2} = 4 \\ f(4) &= \frac{8}{4} = 2 \end{aligned} \right\} \frac{f(2)}{f(4)} = \frac{4}{2} = 2$$

4. Sabemos que o ponto de coordenadas (1, 3) pertence ao gráfico da função. A função representada é da forma $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$.

$$\text{Então, } 3 = \frac{k}{1} \Leftrightarrow k = 3.$$

Assim, a expressão algébrica que define a função é $y = \frac{3}{x}$.

5. A velocidade (v) corresponde à razão entre a distância (d) e o tempo (t). Sabemos que em 3 horas o carro percorre uma determinada distância, d , numa velocidade média de 60 km/h. Calculemos d :

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{d}{t} \\ v &= 60 \text{ km/h} \\ t &= 3 \text{ h} \end{aligned} \right\} 60 = \frac{d}{3} \Leftrightarrow d = 180 \text{ km}$$

Vamos calcular o tempo necessário para fazer a mesma viagem (180 km) a uma velocidade média de 90 km/h:

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{d}{t} \\ v &= 90 \text{ km/h} \\ d &= 180 \text{ km} \end{aligned} \right\} 90 = \frac{180}{t} \Leftrightarrow 90t = 180 \text{ km} \Leftrightarrow t = 2$$

R.: São necessárias 2 horas para fazer a mesma viagem a uma velocidade média de 90 km/h.

20 6.

- 6.1. Como são 12 pedaços, cada um com 2 metros, então o comprimento do arame é $12 \times 2 = 24$.

R.: O rolo que o José comprou tem 24 m.

- 6.2. As grandezas “número de pedaços” e “comprimento de cada pedaço” são inversamente proporcionais. Sabe-se que a constante de proporcionalidade inversa, k , é 24, pois representa o tamanho total do rolo. Assim, a expressão analítica da função de proporcionalidade inversa que traduz o problema é

$$y = \frac{24}{x}, x \neq 0.$$

Logo, se considerarmos seis pedaços, ou seja, $x = 6$, temos:

$$y = \frac{24}{6} \Leftrightarrow y = 4$$

R.: Cada um desses seis pedaços terá 4 m.

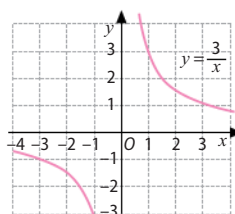
- 6.3. Utilizando os dados e o raciocínio da alínea anterior, sabemos agora que cada pedaço tem 3 metros, ou seja, $y = 3$, e queremos determinar o número de pedaços. Logo,

$$3 = \frac{24}{x} \Leftrightarrow x = \frac{24}{3} \Leftrightarrow x = 8$$

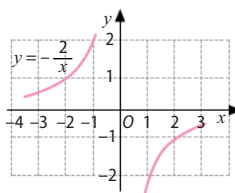
R.: O José obterá oito pedaços, cada um com 3 m.

20 7.

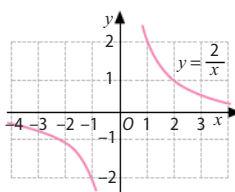
- 7.1. a)



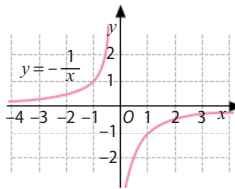
- b)



- c)



- d)



- 7.2. Se k for um valor positivo, os dois ramos da hipérbole encontram-se nos 1º e 3º quadrantes. Se for um valor negativo, encontram-se nos 2º e 4º quadrantes.

- Se k é positivo, quanto menor for o valor de k , mais a hipérbole se aproxima da origem do referencial.
- Se k é negativo, quanto maior for o valor de k , mais a hipérbole se aproxima da origem do referencial.

8. As grandezas “número de funcionárias”, y , e “tempo que demoram a realizar o trabalho”, x , são inversamente proporcionais. Assim, a constante de proporcionalidade inversa é $k = 6 \times 2 = 12$. Logo, a expressão analítica da função de proporcionalidade inversa que traduz este problema é $y = \frac{12}{x}$.

Vamos calcular o tempo (x) que as quatro funcionárias ($y = 4$) demoraram a realizar o trabalho, mantendo o ritmo:

$$4 = \frac{12}{x} \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{4} \Leftrightarrow x = 3$$

R.: A limpeza das salas passou a demorar 3 horas.

9. Cada um dos cinco caminhões transporta 12 m^3 de areia, ou seja, são transportados 60 m^3 ($5 \times 12 \text{ m}^3 = 60 \text{ m}^3$) de areia no total. Mantendo a quantidade de areia necessária, as grandezas “número de caminhões”, y , e “quantidade de areia que cada caminhão transporta”, x , são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade inversa é 60.

Uma expressão analítica da função de proporcionalidade inversa que traduz o problema é $y = \frac{60}{x}$.

Se considerarmos que cada caminhão tem capacidade para 10 m^3 , temos que $x = 10$. Calculemos, então, o número de caminhões necessários:

$$y = \frac{60}{10} \Leftrightarrow y = 6$$

R.: São necessários seis caminhões.

20 10.

- 10.1. Sabemos que o Jaime lê o livro em 20 dias se, em cada dia, ler 16 páginas. As grandezas “número de páginas” e “número de dias” são inversamente proporcionais. Logo, se diminuirmos a grandeza “número de dias” para metade, para 10 dias, a grandeza “número de páginas” aumentará para o dobro, ou seja, para $16 \times 2 = 32$ páginas.

$$16 \times 2 = 32$$

R.: O Jaime deve ler 32 páginas por dia.

- 10.2. Seguindo o raciocínio da alínea anterior, se o Jaime ler 64 páginas por dia, está a aumentar a grandeza “número de páginas” para o quádruplo. Assim, a grandeza “número de dias” diminuirá para a quarta parte, ou seja, para $20 : 4 = 5$ dias.

R.: O Jaime demora cinco dias a ler o livro.

- 10.3. A constante de proporcionalidade representa o número de páginas do livro que o Jaime está a ler.

- 10.4. Vamos começar por calcular a constante de proporcionalidade, k :

$$k = 20 \times 16 \Leftrightarrow k = 320$$

Logo, a expressão analítica é $d = \frac{320}{n}$.

Aplicar – páginas 86 e 87

2.

2.1. Concavidade voltada para cima.

2.2. Concavidade voltada para baixo.

2.3. Concavidade voltada para cima.

2.4. Concavidade voltada para baixo.

3. A função h tem uma expressão analítica da forma $y = ax^2$ pois todos os pontos do seu gráfico estão sobre uma parábola e o ponto $(0, 0)$ pertence ao seu gráfico.

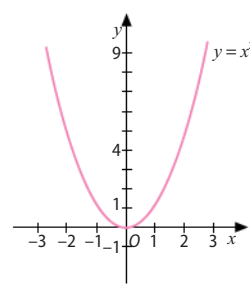
4. Consideremos um dos pontos pertencente ao gráfico da função, que não o $(0, 0)$. Por exemplo, o ponto $(-2, 8)$. Assim, como a função é representada por uma expressão analítica do tipo $y = ax^2$, temos que:

$$8 = a \times (-2)^2 \Leftrightarrow 8 = 4a \Leftrightarrow a = 2$$

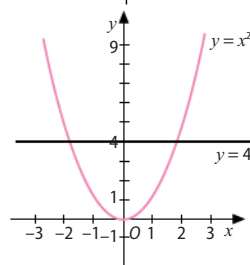
Logo, a função é definida por $y = 2x^2$.

20 5.

5.1.



5.2.



- 5.3. Gráficamente, verifica-se que os gráficos das duas funções se intersectam nos pontos $(-2, 4)$ e $(2, 4)$. Estes pontos são, então, as soluções do sistema.

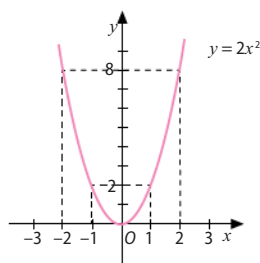
$$5.4. x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{4} \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$$

$$\text{C.S.} = \{-2, 2\}$$

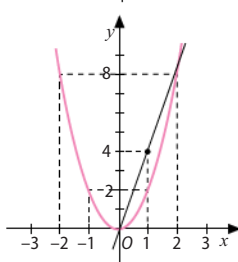
As soluções da equação são as abscissas dos pontos que são solução do sistema resolvido na alínea anterior.

20 6.

6.1.



6.2.



As soluções da equação $2x^2 = 4$ são o 0 e o 2.

20 7.

Todas as funções são da forma $y = ax^2$ e, por isso, todas são representadas graficamente por uma parábola. Se a for positivo, a parábola tem concavidade voltada para cima; caso contrário, tem concavidade voltada para baixo. Além disso, quanto maior for o valor absoluto de a , menor será a abertura da parábola. Assim, facilmente se conclui que:

1 – função h ; 2 – função f ; 3 – função i ;
4 – função k ; 5 – função g ; 6 – função j

$$8. A_{[AOB]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OB}}{2}$$

$$\text{Como } A_{[AOB]} = 32, \text{ temos } \frac{\overline{AB} \times \overline{OB}}{2} = 32.$$

Sabemos que $\overline{AB} = 2$ e que $\overline{OB}$ é igual à ordenada dos pontos B e A . Como $y = ax^2$, a ordenada do ponto A é $y = a \times 2^2 \Leftrightarrow y = 4a$.

$$\text{Assim, } \frac{2 \times 4a}{2} = 32$$

$$\Leftrightarrow 4a = 32$$

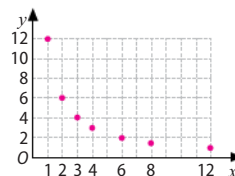
$$\Leftrightarrow a = \frac{32}{4}$$

$$\Leftrightarrow a = 8$$

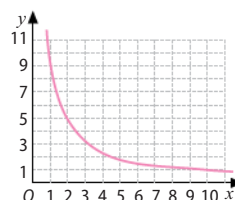
Praticar – páginas 88 a 93

20 1.

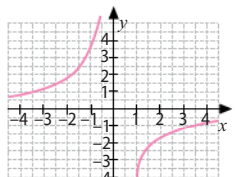
$$1.1. f(x) = \frac{12}{x}$$



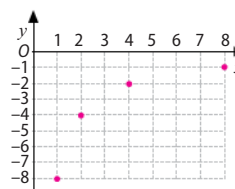
$$1.2. h(x) = \frac{10}{x}$$



$$1.3. i(x) = -\frac{4}{x}$$



$$1.4. g(x) = -\frac{8}{x}$$



20 2.

2.1. Seja k a constante de proporcionalidade direta.

$$\text{Então, } k = \frac{20}{5} \Leftrightarrow k = 4$$

Assim:

$$\frac{a}{1} = 4 \Leftrightarrow a = 4$$

$$\frac{50}{b} = 4 \Leftrightarrow b = 12,5$$

$$\frac{1}{c} = 4 \Leftrightarrow c = 0,25$$

$$\frac{8}{d} = 4 \Leftrightarrow d = 2$$

$$\frac{e}{10} = 4 \Leftrightarrow e = 40$$

$$\frac{f}{2} = 4 \Leftrightarrow \frac{5f}{2} = 4 \Leftrightarrow f = \frac{8}{5}$$

x	1	12,5	0,25	5	2	10	$\frac{2}{5}$
$f(x)$	4	50	1	20	8	40	1,6

2.2. Seja k a constante de proporcionalidade direta.

$$\text{Então, } k = 20 \times 5 \Leftrightarrow k = 100$$

Assim:

$$a \times 1 = 100 \Leftrightarrow a = 100$$

$$50 \times b = 100 \Leftrightarrow b = 2$$

$$1 \times c = 100 \Leftrightarrow c = 100$$

$$8 \times d = 100 \Leftrightarrow d = 12,5$$

$$e \times 10 = 100 \Leftrightarrow e = 10$$

$$f \times \frac{2}{5} = 100 \Leftrightarrow f = \frac{100}{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow f = 250$$

x	1	2	100	5	12,5	10	$\frac{2}{5}$
$f(x)$	100	50	1	20	8	10	250

3.

3.1. A função f pois, na sua representação gráfica, todos os pontos estão sobre uma reta que passa na origem do referencial.

3.2. Uma função de proporcionalidade direta é da forma $y = kx$, com k constante e $k \neq 0$.

Como o ponto (2, 1) pertence ao gráfico da função, então:

$$1 = k \times 2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

Assim, a expressão analítica da função f é $y = \frac{1}{2}x, x \geq 0$.

3.3. A função g pois, na sua representação gráfica, todos os pontos estão sobre uma linha curva, designada por ramo da hipérbole e, para além disso, o produto das coordenadas dos pontos do seu gráfico é constante e igual a 3.

3.4. Uma função de proporcionalidade inversa é da forma

$$y = \frac{k}{x}, x \neq 0, \text{ com } k \text{ constante e } k \neq 0.$$

$$\text{Como o ponto (3, 1) pertence à função, então } 1 = \frac{k}{3} \Leftrightarrow k = 3.$$

Assim, a expressão analítica da função g é $y = \frac{3}{x}, x > 0$.

3.5. As representações gráficas das funções h e k são parábolas, logo as suas expressões analíticas são da forma $y = ax^2, a \neq 0$.

Como o ponto (2, 1) pertence à função h , então:

$$1 = a \times 2^2 \Leftrightarrow 1 = 4a \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

Assim, a expressão analítica da função h é $y = \frac{1}{4}x^2$.

Como o ponto (2, -1) pertence à função k , então:

$$-1 = a \times 2^2 \Leftrightarrow -1 = 4a \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$$

Assim, a expressão analítica da função k é $y = -\frac{1}{4}x^2$.

20 4.

4.1. A função f é uma função de proporcionalidade inversa, pois é uma função dada por uma expressão da forma $f(x) = \frac{k}{x}$, (com $k = f(1)$, $k \neq 0$ e $x \neq 0$).

$$4.2. a) f(4) = \frac{300}{4} \Leftrightarrow f(4) = 75$$

$$b) \frac{300}{x} = 10 \Leftrightarrow 10x = 300 \Leftrightarrow x = 30$$

5. O problema traduz uma situação de proporcionalidade inversa, cuja função é $y = \frac{140}{x}$.

Vejamos quanto tempo demora a Anabela a fazer a viagem se se deslocar a 70 km/h e se se deslocar a 50 km/h:

$$\bullet y = \frac{140}{70} \Leftrightarrow y = 2$$

$$\bullet y = \frac{140}{50} \Leftrightarrow y = 2,8$$

Como cada hora tem 60 minutos, sabemos que:

• se a Anabela se deslocar a 70 km/h, demora 2 horas a chegar à sua terra natal, ou seja, demora 120 minutos;

• se a Anabela se deslocar a 50 km/h, demora 2,8 horas a chegar à sua terra natal, ou seja, demora 168 minutos.

$$168 - 120 = 48$$

R.: A Anabela poupa 48 minutos.

6. Sabendo que o número de gatos é inversamente proporcional ao número de ratos, podemos garantir que se o número de gatos diminui para metade, então o número de ratos aumenta para o dobro. Se inicialmente eram três os ratos no celeiro, hoje são seis ($2 \times 3 = 6$).

R.: Há seis ratos no celeiro.

7. (2, 3) e (4, 1) são pontos do gráfico da função g . Se g fosse uma função de proporcionalidade inversa, o produto das coordenadas dos pontos do seu gráfico seria constante. Contudo, $2 \times 3 = 6$ e $4 \times 1 = 4$. Logo, g não é uma função de proporcionalidade inversa.

8. Vamos começar por calcular a capacidade da piscina da casa da Isabel:

$$\frac{400}{1} = \frac{x}{6}$$

$$x = 400 \times 6 \Leftrightarrow x = 2400$$

As grandezas “número de horas que demora a encher a piscina” e “quantidade de água debitada pela mangueira, por hora” são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 2400.

A função que traduz este problema é, então,

$$y = \frac{2400}{x}.$$

Assim, para encher a piscina em 1,5 horas, a mangueira teria de debitar 1600 litros por hora, uma vez que:

$$y = \frac{2400}{1,5} \Leftrightarrow y = 1600$$

R.: [B] 1600 l/h

9. As grandezas “número de galinhas” e “número de dias que a ração dura” são inversamente proporcionais.

A constante de proporcionalidade (k) é:

$$k = 20 \times 20 \Leftrightarrow k = 400$$

Assim, função que traduz o problema é $y = \frac{400}{x}$, $x \neq 0$.

- 9.1. Se a Madalena comprar mais 5 galinhas, fica com 25 galinhas:

$$y = \frac{400}{25} \Leftrightarrow y = 16$$

R.: Se a Madalena tiver 25 galinhas, a ração dá para 16 dias.

- 9.2. Se morrerem 4 galinhas, a Madalena fica com 16 galinhas:

$$y = \frac{400}{16} \Leftrightarrow y = 25$$

R.: Se morrerem quatro galinhas, a ração dá para 25 dias.

10.

- 10.1. As funções $y = 3x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ e $y = -\frac{1}{3}x^2$ são funções quadráticas, pois as suas expressões analíticas são do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$.

- 10.2. $y = 3x^2$ tem a concavidade voltada para cima.

$$y = \frac{x^2}{2} \text{ tem a concavidade voltada para cima.}$$

$$y = -\frac{1}{3}x^2 \text{ tem a concavidade voltada para baixo.}$$

- 20 11. Sabemos que as grandezas “tempo necessário para que um utente seja atendido” e “número de funcionários ao serviço” são inversamente proporcionais.

- 11.1. Se o “número de funcionários ao serviço” aumentar para o dobro, significa que o “tempo necessário para que um utente seja atendido” diminui para metade. Assim, se o número de funcionários passar a ser 4, o tempo necessário para que um utente seja atendido será 10 minutos.

- 11.2. Se o “tempo necessário para que um utente seja atendido” diminui para a quarta parte, então o “número de funcionários ao serviço” aumentará para o quádruplo.

Assim, 8 funcionários têm de estar ao serviço para um tempo de espera de 5 minutos.

12.

- 12.1. As grandezas v e t são inversamente proporcionais porque o produto dos valores correspondentes das duas variáveis é constante e não nulo.

- 12.2. A função que relaciona as duas grandezas é uma expressão da forma $y = \frac{k}{x}$, sendo k a constante de proporcionalidade inversa. Como o ponto (4, 10) pertence ao gráfico da função, então:

$$10 = \frac{k}{4} \Leftrightarrow k = 40$$

A constante de proporcionalidade é 40 e representa a distância entre a casa e o emprego da Paula.

- 12.3. $80 = \frac{40}{t} \Leftrightarrow 80t = 40 \Leftrightarrow t = \frac{40}{80} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

R.: A Paula demoraria meia hora, ou seja, 30 minutos.

- 12.4. 45 minutos correspondem a três quartos de hora.

$$v = \frac{40}{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow v = \frac{160}{3} \approx 53,33 \text{ (2 c.d.)}$$

R.: A Paula deve deslocar-se a, aproximadamente, 53 km/h.

13. Como o volume, V , de uma esfera é diretamente proporcional ao cubo do seu raio, temos que $V = k \times r^3$, sendo k a constante de proporcionalidade.

$$\text{Assim, } V = k \times r^3 \Leftrightarrow k = \frac{V}{r^3}.$$

Como o volume da esfera é dado por $\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$,
temos que $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$.

$$\text{Então, } k = \frac{\frac{4}{3} \pi \times r^3}{r^3} = \frac{4}{3} \pi$$

Logo, podemos concluir que a constante é $\frac{4}{3} \pi$.

14.

14.1. $4 = \frac{E}{t} \Leftrightarrow E = 4t$

14.2. a) $12 = 4t \Leftrightarrow t = \frac{12}{4} \Leftrightarrow t = 3$

R.: O Rafael demorará 3 horas.

b) Como 30 minutos = $\frac{1}{2}$ hora, então:

$$E = 4 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow E = 2$$

R.: O Rafael terá percorrido 2 km.

14.3. Como a velocidade média aumentou para 6 km/h, a expressão da função que relaciona o espaço percorrido com o tempo de treino é $E = 6 \times t$. Como a corrida matinal é de 12 km, temos:

$$12 = 6t \Leftrightarrow t = \frac{12}{6} \Leftrightarrow t = 2$$

Podemos, então, concluir que a sua corrida demorará 2 horas.

15.

15.1. Sabe-se que a força a aplicar é inversamente proporcional à distância da dobradiça a que é aplicada. Assim, se reduzirmos a distância para metade, a força terá de ser aumentada para o dobro.
 $450 \times 2 = 900$

R.: Será necessária uma força de 900 N.

15.2. Seguindo o mesmo raciocínio da alínea anterior, como as grandezas são inversamente proporcionais, se a força aplicada for reduzida para a sua quinta parte ($450 : 5 = 90$), a distância será aumentada para o quádruplo: $2 \times 5 = 10$.

R.: A força deve ser aplicada a 10 cm da dobradiça.

20 16. Como o valor do aluguer do salão é dividido igualmente por todos os participantes, para determinar os valores de a , b , c , d e e , basta dividir os 800 € pelo número de amigos participantes ou pelo valor a pagar por cada um.

16.1. $a = 800 : 8 = 100$
 $b = 800 : 80 = 10$
 $c = 80 : 16 = 50$
 $d = 800 : 20 = 40$
 $e = 800 : 32 = 25$

Número de amigos participantes (n)	8	10	16	20	25
Valor a pagar por cada amigo (v)	100	80	50	40	32

16.2. Como as grandezas n e v são inversamente proporcionais, f é uma função de proporcionalidade inversa. Logo, é da forma $f(x) = \frac{k}{x}$ (com $k = f(1)$, $k \neq 0$ e $x \neq 0$), sendo k a constante de proporcionalidade. Neste caso, $k = 800$, logo $f(n) = \frac{800}{n}$.

20 17.

17.1. $A_{\text{Losango}} = \frac{d \times D}{2}$

Assim, $\frac{d \times D}{2} = 45$

$$\Leftrightarrow d \times D = 90$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{90}{d}$$

Logo, $f(d) = \frac{90}{d}$.

17.2. Por exemplo:

d	5	15	30
D	18	6	3

17.3. As grandezas d e D são inversamente proporcionais porque o seu produto é constante.

17.4. Nos pontos que pertencem ao gráfico de uma função de proporcionalidade inversa, o produto da abcissa pela ordenada é constante e igual à constante de proporcionalidade inversa.

Como a função f é uma função de proporcionalidade inversa, sendo 90 a constante de proporcionalidade, temos que:

$$10 \times a = 90 \Leftrightarrow a = \frac{90}{10} \Leftrightarrow a = 9$$

$$b \times 45 = 90 \Leftrightarrow b = \frac{90}{45} \Leftrightarrow b = 2$$

18.

18.1. $100 \text{ km/h} \times 4 \text{ h} = 400 \text{ km}$

R.: A distância entre as duas localidades é 400 km.

- 18.2. As grandezas “velocidade média” e “tempo gasto na viagem” são inversamente proporcionais, pelo que o produto das duas grandezas é constante. Assim:

$$10 \times 4 = b \times 5 \Leftrightarrow b = \frac{400}{5} \Leftrightarrow b = 80$$

$$100 \times 4 = 50 \times a \Leftrightarrow a = \frac{400}{50} \Leftrightarrow a = 8$$

19.

- 19.1. Considerando que se coloca o mesmo número de radiadores, as grandezas “número de funcionários” e “tempo para realizar a tarefa” são inversamente proporcionais. Assim, se o número de funcionários aumenta para o dobro, o tempo para realizar essa tarefa diminui para metade. Então, é necessária meia hora, ou seja, 30 minutos.

- 19.2. Sabemos que, numa hora, um funcionário coloca 12 radiadores, portanto, numa hora, três funcionários colocam 36 radiadores (as grandezas “número de funcionários” e “número de radiadores” são diretamente proporcionais).

Se, numa hora, três funcionários colocam 36 radiadores, vejamos em quanto tempo esses mesmos funcionários colocam 100 radiadores:

$$\frac{1}{x} = \frac{36}{100}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{100 \times 1}{36}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{25}{9}$$

Temos, ainda que:

$$\frac{25}{9} h = \frac{18}{9} h + \frac{7}{9} h = 2 h + \frac{7}{9} h$$

$$\text{Como } \frac{7}{9} h = \frac{7}{9} \times 60 \text{ min} \approx 47 \text{ min.}$$

Podemos concluir que são necessárias, aproximadamente, 2 h 47 min.

- 19.3. Vamos utilizar o mesmo raciocínio da alínea anterior: sabemos que numa hora, um funcionário coloca 12 radiadores, portanto, numa hora, dez funcionários colocam 120 radiadores (as grandezas “número de funcionários” e “número de radiadores” são diretamente proporcionais).

Se, numa hora, dez funcionários colocam 120 radiadores, vejamos em quanto tempo esses mesmos funcionários colocam 500 radiadores:

$$\frac{1}{x} = \frac{120}{500}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{500}{120}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{25}{6}$$

Temos, ainda que:

$$\frac{25}{6} h = \frac{24}{6} h + \frac{1}{6} h = 4 h + \frac{1}{6} h$$

$$\text{Como } \frac{1}{6} h = \frac{1}{6} \times 60 \text{ min} = 10 \text{ min.}$$

Podemos concluir que são necessárias, aproximadamente, 4 h 10 min.

20 20. $\frac{y}{3} = \frac{7}{x} \Leftrightarrow xy = 21 \Leftrightarrow y = \frac{21}{x}$

Então, trata-se de uma função de proporcionalidade inversa.

R.: Não concordo com o António, pois a expressão define uma função de proporcionalidade inversa.

21.

- 21.1. Como o ponto de coordenadas (10, 20) pertence ao gráfico de uma função de proporcionalidade inversa, o produto da abscissa pela ordenada é constante, sendo essa constante a constante de proporcionalidade inversa. Assim,

$$k = 10 \times 20 = 200$$

- 21.2. Tal como em 21.1., temos que:

$$40 \times a = 200 \Leftrightarrow a = \frac{200}{40} \Leftrightarrow a = 5$$

- 21.3. Tal como em 21.1., temos que:

$$b \times (-10) = 200 \Leftrightarrow b = \frac{200}{-10} \Leftrightarrow b = -20$$

22.

22.1. $A_{[ABCD]} = \frac{B+b}{2} \times h = \frac{\overline{BC} + \overline{AE}}{2} \times \overline{AB}$

Como o ponto D tem abscissa 1 e pertence ao gráfico de g , então tem ordenada igual a $g(1) = 3 \times 1^2 = 3$.

O ponto C tem a mesma ordenada de D e pertence ao gráfico de f . Logo, tem coordenadas (3, 3). O ponto E tem abscissa 1 e pertence ao gráfico de f , pelo que tem coordenadas (1, 1). Assim, $\overline{BC} = 3$, $\overline{AE} = 1$ e $\overline{AB} = 3 - 1 = 2$.

$$\text{Logo, } A_{[ABCD]} = \frac{3+1}{2} \times 2 = 4$$

R.: $A = 4$ u.a.

22.2. [D] $-3x^2$

- 20 23.** Cada camioneta transporta 54 alunos. Assim, se forem 107 ou 108 alunos inscritos, serão necessárias duas camionetas com um custo total de 500 €. Se os alunos inscritos forem 109, 110 ou 111, haverá necessidade de três camionetas com um custo de 750 €. O preço mínimo corresponde ao aluguer de duas camionetas para serem utilizadas por 108 alunos e o preço máximo corresponde ao aluguer de três camionetas para serem utilizadas por 109 alunos:
- $$500 : 108 \approx 4,63$$
- $$750 : 109 \approx 6,88$$
- R.: O preço a pagar por cada aluno varia entre 4,63 € e 6,88 €.

24.

- 24.1.** Como b é diretamente proporcional ao quadrado de a , temos que $b = k \times a^2$. Como $b = 18$, quando $a = 3$, temos:

$$18 = k \times 3^2$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{18}{9}$$

$$\Leftrightarrow k = 2$$

Assim, $b = 2 \times a^2$.

Como $b = 5$, temos que:

$$5 = 2 \times a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = -\sqrt{\frac{5}{2}} \vee a = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Como a é um número não negativo, $a = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

- 24.2.** Do mesmo modo, uma vez que $a = 4$, temos que $b = 2 \times 4^2 = 2 \times 16 = 32$.

20 25.

- 25.1.** A intensidade da corrente que percorre um circuito é inversamente proporcional à resistência. Logo, a opção correta é a [A].
- 25.2.** A intensidade da corrente que percorre um circuito é diretamente proporcional à tensão aplicada. Logo, a opção correta é a [B].
- 25.3.** A intensidade da corrente que percorre um circuito é diretamente proporcional à tensão aplicada.

a) 1 A — 12 V

x A — 24 V

$$x = \frac{24}{12} \Leftrightarrow x = 2$$

R.: Forneceria à lâmpada 2 A de intensidade.

b) 1 A — 12 V

3 A — y

$$y = 3 \times 12 \Leftrightarrow y = 36$$

R.: A tensão a aplicar seria de 36 V.

- 25.4. a)** A intensidade da corrente que percorre um circuito é inversamente proporcional à resistência. A expressão que as relaciona é da forma $R = \frac{k}{I}$, com k constante e $k \neq 0$.

Vamos calcular k sabendo que $R = 12 \, \Omega$ e $I = 1$ A:

$$12 = \frac{k}{1} \Leftrightarrow k = 12$$

A expressão será $R = \frac{12}{I}$.

b) $R = \frac{12}{2} \Leftrightarrow R = 6$

R.: $R = 6 \, \Omega$

c) $48 = \frac{12}{I} \Leftrightarrow I = \frac{12}{48} \Leftrightarrow I = 0,25$

R.: $I = 0,25$ A

- 20 26.** Os oito pintores contratados trabalharam durante 34 dias. Sabe-se que apenas trabalharam sozinhos durante 10 dias, ou seja, nessa altura juntaram-se a eles outros 24 pintores (perfazendo um total de 32 pintores).

O número de pintores é inversamente proporcional ao número de dias de trabalho nessa obra. Sabemos que 8 pintores precisariam de 24 dias ($34 - 10$) para terminar o trabalho. Se o número de pintores aumenta para o quádruplo ($8 \times 4 = 32$), então o número de dias diminui para a quarta parte ($24 : 4 = 6$). Foram necessários 10 dias com 8 pintores e 6 dias com 32 pintores.

R.: Para concluir o trabalho, são necessários 16 dias.

Praticar para a prova final – páginas 94 a 97

- 1.** A expressão analítica da função representada é da forma $f(x) = \frac{k}{x}$ (com $k = f(1)$, $k \neq 0$ e $x \neq 0$).

Como o ponto (4, 10) pertence ao gráfico da função, então $k = 4 \times 10 \Leftrightarrow k = 40$.

Assim, a representação analítica da função é $y = \frac{40}{x}$ e a opção correta é a [A].

2. A opção [B] não é a correta porque $y = x + 2$ é uma reta com ordenada na origem 2. Além disso, esta reta tem declive positivo, pelo que a opção [D] também não é a correta.

A representação gráfica de $y = \frac{3}{x}$, com $x > 0$ é um ramo de hipérbole que passa no ponto de coordenadas (1, 3).

Logo, a opção [C] não é a correta e, portanto, a opção correta é a [A].

3. [D] Se x aumenta para o dobro, então y diminui para metade.

20 4.

- 4.1. Por observação do gráfico, $\overline{PC} = 6$.

- 4.2. Sabemos que quando $x = 4$, a área (a) do triângulo [APC] é igual a 12.

$$A_{[APC]} = \frac{\overline{AC} \times x}{2}, \text{ onde } x = 4 \text{ e } A_{[APC]} = 12$$

$$\text{Assim, } 12 = \frac{4 \overline{AC}}{2} \Leftrightarrow 4 \overline{AC} = 24 \Leftrightarrow \overline{AC} = 6.$$

- 4.3. Como o gráfico que relaciona x e a é uma reta que passa na origem do referencial, é da forma $a = kx$, com $k \neq 0$. Como o ponto de coordenadas (4, 12) pertence ao gráfico, temos

$$12 = k \times 4$$

$$\Leftrightarrow 4k = 12$$

$$\Leftrightarrow k = 3$$

Logo, $a = 3x$ e a opção correta é a [A].

20 5.

- 5.1. No máximo, a Ana pode ter a pele exposta ao sol durante 40 minutos.

- 5.2. Vamos calcular D sabendo que quando $i = 5$, $t = 40$.
 $D = 5 \times 40 \Leftrightarrow D = 200$

R.: De acordo com os dados da tabela, a Ana tem o cabelo ruivo.

6.

- 6.1. No instante inicial, $t = 0$, a distância da cabina ao ponto A é igual a 0. Assim, as opções [B] e [D] não são as corretas.

Como a cabina não efetua paragens durante o seu percurso, a opção [C] não pode ser a correta e, portanto, a opção correta é a [A].

- 6.2. Na fórmula $n \times c = 3$, o número 3 representa o número de quilómetros referentes a uma volta completa. Uma cabine dará o maior número possível de voltas se a sua velocidade média for 17 km/h (velocidade média máxima).

$$\frac{17}{3} = 5,6$$

R.: O maior número possível de voltas completas é 5.

20 Testar – páginas 102 e 103

1. Numa situação de proporcionalidade inversa, o produto das grandezas é constante. Logo, a opção correta é a [D].

2. Numa situação de proporcionalidade inversa, o produto das grandezas é constante. Logo, a opção correta é a [A].

3. Como $f(x) = kx$, f é uma função afim e, portanto, o seu gráfico é uma reta.

Assim, a sua representação gráfica é a III.

$g(x) = kx^2$ é uma função quadrática. Logo, a sua representação gráfica é uma parábola, ou seja, é a representação I.

A representação gráfica de h é uma hipérbole. Logo, é a representação II.

4.

- 4.1. Sabemos que $y = \frac{8}{x}$. Assim,

$$\text{Se } x = -16, \text{ então } y = \frac{8}{-16} = -0,5$$

$$\text{Se } x = -8, \text{ então } y = \frac{8}{-8} = -1$$

$$\text{Se } x = -4, \text{ então } y = \frac{8}{-4} = -2$$

$$\text{Se } x = -2, \text{ então } y = \frac{8}{-2} = -4$$

$$\text{Se } x = -1, \text{ então } y = \frac{8}{-1} = -8$$

$$\text{Se } x = 1, \text{ então } y = \frac{8}{1} = 8$$

$$\text{Se } x = 2, \text{ então } y = \frac{8}{2} = 4$$

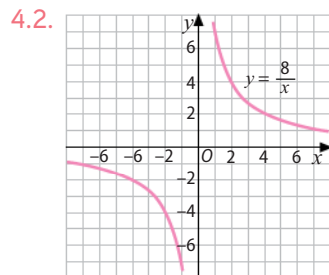
$$\text{Se } x = 4, \text{ então } y = \frac{8}{4} = 2$$

$$\text{Se } x = 8, \text{ então } y = \frac{8}{8} = 1$$

$$\text{Se } x = 16, \text{ então } y = \frac{8}{16} = 0,5$$

Logo,

x	-16	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8	16
$f(x)$	-0,5	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1	0,5



5. A função representada graficamente é uma função quadrática, uma vez que o seu gráfico é uma parábola. Logo, é da forma $y = ax^2$, com $a \neq 0$. Como o ponto de coordenadas (2, 2) pertence ao gráfico, temos;

$$2 = a \times 2^2$$

$$\Leftrightarrow 4a = 2$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2}{4}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Logo, $y = \frac{1}{2}x^2$ e a opção correta é a [D].

6. Na situação real, o Mário e os seus três irmãos têm de dividir a herança entre eles. Vejamos quanto recebe cada um: $10\,000 : 4 = 2500$ €

Na situação hipotética, seriam cinco irmãos a dividir a mesma herança. Vamos calcular quanto receberia cada um: $10\,000 : 5 = 2000$ €

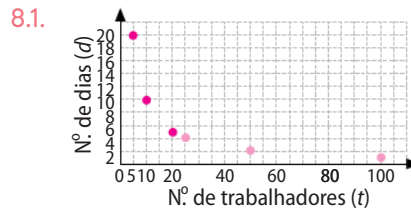
$$2500 - 2000 = 500$$

R.: Se o Mário tivesse quatro irmãos receberia menos 500 €.

7. Dado que as duas grandezas referidas (“quantidade de reagente” e “tempo”) são inversamente proporcionais podemos garantir que se a quantidade de reagente aumenta para o dobro, então o tempo diminui para metade. Assim, $4 : 2 = 2$.

R.: A reação química terá uma duração de 2 segundos.

8.



- 8.2. Como as grandezas t e d são inversamente proporcionais, $t \times d = k$, sendo k a constante de proporcionalidade inversa.

Por observação da tabela, concluímos que $k = 100 \times 1 = 100$.

Logo, $t \times d = 100$ e a opção correta é a [D].

- 8.3. Sabemos, pelo gráfico, que para que a vindima se realizasse em quatro dias eram necessários 25 trabalhadores na apanha da uva. Se apanharam 80 000 kg de uva, vamos calcular quantos quilos apanhou cada trabalhador, em média: $80\,000 : 25 = 3200$. Se cada trabalhador apanhou 3200 kg de uva nesses quatro dias, vamos calcular quanto apanhou, por dia, em média, cada um, $3200 : 4 = 800$.

R.: Em média, cada trabalhador apanhou, por dia, 800 kg de uva.

Unidade 3 – Equações

20 Aplicar – página 107

1.

1.1. $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

1.2. $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$

1.3. $(-2x - 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

1.4. $\left(\frac{x}{3} - 1\right)^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{2}{3}x + 1$

1.5. $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$

1.6. $(x - 6)(x + 6) = x^2 - 36$

1.7. $\left(x - \frac{2}{5}\right)\left(x + \frac{2}{5}\right) = x^2 - \frac{4}{25}$

1.8. $(-x - 5)(x - 5) = -x^2 + 25$

1.9. $(x + 3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$

1.10. $(5x - z)(z + 5x) = 25x^2 - z^2$

1.11. $(-4wz - 6t)^2 = 16w^2z^2 + 48wzt + 36t^2$

1.12. $(-4r - 5t)(4r - 5t) = -16r^2 + 25t^2$

2.

2.1. É o desenvolvimento do quadrado de um binômio.

2.2. Não é o desenvolvimento do quadrado de um binômio.

2.3. É o desenvolvimento do quadrado de um binômio.

2.4. Não é o desenvolvimento do quadrado de um binômio.

20 3.

3.1. $x^2 - 12x + 36$

3.2. $9x^2 + 24x + 16$

3.3. $x^2 + 16 + 8x$

3.4. $4a^2 + 25b^2 + 20ab$

20 4.

4.1. $(x - 6)(x + 6) = x^2 - 36$

4.2. $(4g - 5)(4g + 5) = 16g^2 - 25$

4.3. $(3a + (-7))^2 = 9a^2 - 42a + 49$

4.4. $(3y - 4x)^2 = 9y^2 - 24yx + 16x^2$

20 5.

5.1. $3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$

5.2. $2a - 3ab = a(2 - 3b)$

5.3. $5d^2 - 25d = 5d(d - 5)$

5.4. $26h^2 - 13h^3 = 13h^2(2 - h)$

20 6.

6.1. $4x^2 - 16 = (2x + 4)(2x - 4)$

6.2. $a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2 = (a - 2)(a - 2)$

6.3. $36x^2 - 100 = (6x + 10)(6x - 10)$

6.4. $5h^2 - 12\sqrt{5}h + 36 = (\sqrt{5}h - 6)^2 = (\sqrt{5}h - 6)(\sqrt{5}h - 6) = (\sqrt{5}h - 6)^2$

7. $100x^2 - 20x + 1 = (10x - 1)^2$

Sabemos que $l \times l = a$, em que "l" representa o comprimento do lado do quadrado e "a" representa a sua área.

A expressão que representa o comprimento dos lados desse quadrado é $10x - 1$.

20 8.

$4x^2 - 15x + 14 =$

$= 4x^2 - 8x - 7x + 14 =$

$= (4x^2 - 8x) - (7x - 14) =$

$= 4x(x - 2) - 7(x - 2) =$

$= (x - 2)(4x - 7)$

Aplicar – página 109

 20 1. Uma equação do 2º grau é uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

1.1. $3x^2 - 4x - 12 = 0$

É uma equação do 2º grau

1.2. $-x^2 - 5x = -5(x - 12)$

$\Leftrightarrow -x^2 - 5x = -5x + 60$

$\Leftrightarrow -x^2 + 60 = 0$

É uma equação do 2º grau

1.3. $4^2 - 3x - 16 = 0$

$\Leftrightarrow 16 - 3x - 16 = 0$

$\Leftrightarrow -3x = 0$

Não é uma equação do 2º grau

1.4. $-4(x - 1)x = 0$

$\Leftrightarrow (-4x + 4)x = 0$

$\Leftrightarrow -4x^2 + 4x = 0$

É uma equação do 2º grau

2.

2.1. $3f - 12f^2 = 16 \Leftrightarrow -12f^2 + 3f - 16 = 0$

2.2. $(w - 13)^2 = 100 \Leftrightarrow w^2 - 26w + 169 - 100 = 0$
 $\Leftrightarrow w^2 - 26w + 69 = 0$

2.3. $4(2y - 5)(2y + 5) = 13 \Leftrightarrow 4(4y^2 - 25) - 13 = 0$
 $\Leftrightarrow 16y^2 - 100 - 13 = 0$
 $\Leftrightarrow 16y^2 - 113 = 0$

 20 3. A. O coeficiente do termo em x^2 é -2 . Logo, a afirmação é falsa.

B. $x + (-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$

A afirmação é falsa, pois a equação dada é do 1º grau.

C. $3x^2 + x = 1 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 1 = 0$

A afirmação é verdadeira.

4.

4.1. $x^2 - 3x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$

Equação do 2º grau completa.

4.2. $5x^2 - 1 = 0$

Equação do 2º grau incompleta.

4.3. $3x^2 = 0$

Equação do 2º grau incompleta.

4.4. $x = 5 + x^2 \Leftrightarrow -x^2 + x - 5 = 0$

Equação do 2º grau completa.

4.5. $2 = x(1 - x)$

$\Leftrightarrow 2 = x - x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0$

Equação do 2º grau completa.

4.6. $x(x+2) = 1 + 2x$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 - 2x = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$
 Equação do 2.º grau incompleta.

20 5.

5.1. $(x-5)(x+2) = 0$
 $\Leftrightarrow x-5 = 0 \vee x+2 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -2$
 C.S. = $\{-2, 5\}$

5.2. $(3x-1)(x+6) = 0$
 $\Leftrightarrow 3x-1 = 0 \vee x+6 = 0$
 $\Leftrightarrow 3x = 1 \vee x = -6$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = -6$

C.S. = $\left\{-6, \frac{1}{3}\right\}$

5.3. $\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{3x-2}{4}-5\right) = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{x}{2}-1 = 0 \vee \frac{3x-2}{4}-5 = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 1 \vee \frac{3x-2}{4} = 5$
 $\Leftrightarrow x = 2 \vee 3x-2 = 20$
 $\Leftrightarrow x = 2 \vee 3x = 22$
 $\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{22}{3}$
 C.S. = $\left\{2, \frac{22}{3}\right\}$

6. Um certo quadrado tem x cm de lado. Sabe-se que a diferença entre a área do quadrado e o triplo do seu perímetro é igual a 6. Quanto mede o lado do referido quadrado?

7. $\frac{x \times 2x}{2} = 128$

20 8. Não concordo com a resolução da Xi Lu. A lei do anulamento do produto só se aplica quando o produto de fatores é nulo.

Aplicar – página 111

20 1.

1.1. $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 C.S. = $\{0\}$

1.2. $3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 C.S. = $\{0\}$

1.3. $-500x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 C.S. = $\{0\}$

1.4. $-\frac{2}{3}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 C.S. = $\{0\}$

2.

2.1. $x^2 - 16 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-4)(x+4) = 0$
 $\Leftrightarrow x-4 = 0 \vee x+4 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4$
 C.S. = $\{-4, 4\}$

2.2. $2x^2 - 50 = 0$
 $\Leftrightarrow 2x^2 = 50$
 $\Leftrightarrow x^2 = 25$
 $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25}$
 $\Leftrightarrow x = \pm 5$
 C.S. = $\{-5, 5\}$

2.3. $-x^2 = -17$
 $\Leftrightarrow x^2 = 17$
 $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{17}$
 C.S. = $\{-\sqrt{17}, \sqrt{17}\}$

2.4. $17(x^2 + 18) = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 + 18 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 = -18$
 Equação impossível
 C.S. = $\{\}$

20 3.

3.1. $3x^2 + x = 0$
 $\Leftrightarrow x(3x+1) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee 3x+1 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee 3x = -1$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{3}$
 C.S. = $\left\{-\frac{1}{3}, 0\right\}$

3.2. $5x - x^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x(5-x) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee 5-x = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee -x = -5$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$
 C.S. = $\{0, 5\}$

$$\begin{aligned}
 3.3. \quad & x - x^2 = 0 \\
 & \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \\
 & \Leftrightarrow x = 0 \vee 1 - x = 0 \\
 & \Leftrightarrow x = 0 \vee -x = -1 \\
 & \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \\
 & \text{C.S.} = \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.4. \quad & 2\left(x^2 + \frac{x}{3}\right) = \\
 & \Leftrightarrow x^2 + \frac{x}{3} = 0 \Leftrightarrow x \cdot x + \frac{1}{3} = 0 \\
 & \Leftrightarrow x = 0 \vee x + \frac{1}{3} = 0 \\
 & \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{3} \\
 & \text{C.S.} = \left\{-\frac{1}{3}, 0\right\}
 \end{aligned}$$

20 4.

$$\begin{aligned}
 4.1. \quad & (x - 12)(x + 4) = 0 \\
 & \Leftrightarrow x - 12 = 0 \vee x + 4 = 0 \\
 & \Leftrightarrow x = 12 \vee x = -4 \\
 & \text{C.S.} = \{-4, 12\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.2. \quad & 4x^2 - 25 = 0 \\
 & \Leftrightarrow (2x - 5)(2x + 5) = 0 \\
 & \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \vee 2x + 5 = 0 \\
 & \Leftrightarrow 2x = 5 \vee 2x = -5 \\
 & \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \vee x = -\frac{5}{2} \\
 & \text{C.S.} = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.3. \quad & 3x^2 - 12 = 0 \\
 & \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \\
 & \Leftrightarrow x^2 = 4 \\
 & \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \\
 & \Leftrightarrow x = \pm 2 \\
 & \text{C.S.} = \{-2, 2\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.4. \quad & x^2 - 12x + 36 = 0 \\
 & \Leftrightarrow (x - 6)^2 = 0 \\
 & \Leftrightarrow x - 6 = 0 \\
 & \Leftrightarrow x = 6 \\
 & \text{C.S.} = \{6\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.5. \quad & 4x^2 - 12x = -9 \\
 & \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0 \\
 & \Leftrightarrow (2x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \\
 & \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \\
 & \text{C.S.} = \left\{\frac{3}{2}\right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.6. \quad & (x - 5)^2 - 7(x - 5) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (x - 5)(x - 5 - 7) = 0 \\
 & \Leftrightarrow x - 5 = 0 \vee x - 12 = 0 \\
 & \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 12 \\
 & \text{C.S.} = \{5, 12\}
 \end{aligned}$$

 5. Seja x o número que procuramos:

$$\begin{aligned}
 & x^2 - 4x = -4 \\
 & \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \\
 & \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \\
 & \Leftrightarrow x - 2 = 0 \\
 & \Leftrightarrow x = 2 \\
 & \text{C.S.} = \{2\}
 \end{aligned}$$

R.: Trata-se do número 2.

 6. Seja c o comprimento do retângulo e l a sua largura.

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 2l + 2c = 60 \\ l \times c = 225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l + c = 30 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 30 - l \\ \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} l(30 - l) = 225 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -l^2 + 30l - 225 = 0 \\ \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} l^2 - 30l + 225 = 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (l - 15)^2 = 0 \\ \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} l - 15 = 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 15 \\ \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} c = 30 - 15 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 15 \\ l = 15 \end{cases}
 \end{aligned}$$

R.: O retângulo tem 15 m de comprimento e 15 m de largura.

20 7. Sabemos que $A_O = 64\pi$ e $r = 2t - 1$. Assim, como **20 3.**

$$A_O = \pi \times r^2:$$

$$(2t - 1)^2 \pi = 64\pi$$

$$\Leftrightarrow (2t - 1)^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow 2t - 1 = \pm \sqrt{64}$$

$$\Leftrightarrow 2t - 1 = \pm 8$$

$$\Leftrightarrow 2t = -8 + 1 \vee 2t = 8 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2t = -7 \vee 2t = 9$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{7}{2} \vee t = \frac{9}{2}$$

Para $t = -\frac{7}{2}$, $2t - 1 < 0$. Logo, $t = \frac{9}{2}$.

R.: $t = 4,5$ cm

20 8. Seja c o comprimento do retângulo e l a sua largura.

$$\begin{cases} l = c + 10 \\ c \times l = 600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ c(c + 10) = 600 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ c^2 + 10c = 600 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ c^2 + 10c + 25 = 600 + 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ (c + 5)^2 = 625 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ c + 5 = \pm \sqrt{625} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ c + 5 = \pm 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ c = -30 \vee c = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l = -20 \\ c = -30 \end{cases} \vee \begin{cases} l = 30 \\ c = 20 \end{cases}$$

Como $l > 0$ e $c < 0$, vem que $l = 30$ e $c = -20$.

R.: O retângulo tem 20 cm de comprimento e 30 cm de largura.

Aplicar – páginas 118 e 119

20 2.

$$\begin{aligned} 2.1. \quad x^2 + 2x + 2 &= (x^2 + 2x) + 2 = \\ &= (x^2 + 2x + 1^2) + 2 - 1^2 = \\ &= (x + 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.2. \quad x^2 + 4x - 40 &= (x^2 + 4x) - 40 = \\ &= (x^2 + 4x + 2^2) - 44 = \\ &= (x + 2)^2 - 44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.1. \quad x^2 + 16x &= x^2 + 16x + 8^2 - 8^2 = \\ &= (x + 8)^2 - 8^2 = \\ &= (x + 8)^2 - 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2. \quad x^2 - 12x &= x^2 - 12x + (-6)^2 - (-6)^2 = \\ &= (x - 6)^2 - 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.3. \quad x^2 + 2x &= x^2 + 2x + 1^2 - 1^2 = \\ &= (x + 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4. \quad x^2 - 10x &= x^2 - 10x + (-5)^2 - (-5)^2 = \\ &= (x - 5)^2 - 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.5. \quad x^2 - 4x &= x^2 - 4x + (-2)^2 - (-2)^2 = \\ &= (x - 2)^2 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.6. \quad x^2 + 24x &= x^2 + 24x + 12^2 - 12^2 = \\ &= (x + 12)^2 - 144 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} 4.1. \quad x^2 + 4x + c \\ \frac{4}{2} = 2. \text{ Logo, } c = 2^2 = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.2. \quad x^2 - 16x + c \\ \frac{-16}{2} = -8. \text{ Logo, } c = (-8)^2 = 64. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.3. \quad x^2 - 12x + c \\ \frac{-12}{2} = -6. \text{ Logo, } c = (-6)^2 = 36. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.4. \quad x^2 - 6x + c \\ \frac{-6}{2} = -3. \text{ Logo, } c = (-3)^2 = 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.5. \quad x^2 - 11x + c \\ \frac{-11}{2} = \frac{11}{2}. \text{ Logo, } c = \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.6. \quad x^2 - \frac{4}{3}x + c \\ \frac{-\frac{4}{3}}{2} = -\frac{2}{3}. \text{ Logo, } c = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.7. \quad x^2 - \frac{2}{3}x + c \\ \frac{-\frac{2}{3}}{2} = -\frac{1}{3}. \text{ Logo, } c = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.8. \quad x^2 - \frac{x}{2} + c \\ \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}. \text{ Logo, } c = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

20 5.

$$\begin{aligned}
 5.1. \quad x^2 - 4x + 8 &= (x^2 - 4x) + 8 = \\
 &= (x - 2)^2 + 8 - (-2)^2 = \\
 &= (x - 2)^2 + 8 - 4 = \\
 &= (x - 2)^2 + 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.2. \quad x^2 - 10x + 22 &= (x^2 - 10x) + 22 = \\
 &= (x - 5)^2 + 22 - (-5)^2 = \\
 &= (x - 5)^2 + 22 - 25 = \\
 &= (x - 5)^2 - 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.3. \quad x^2 + 6x + 9 &= (x^2 + 6x) + 9 = \\
 &= (x + 3)^2 + 9 - 3^2 = \\
 &= (x + 3)^2 + 9 - 9 = \\
 &= (x + 3)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.4. \quad x^2 + 12x - 12 &= (x^2 + 12x) - 12 = \\
 &= (x + 6)^2 - 12 - 6^2 = \\
 &= (x + 6)^2 - 12 - 36 = \\
 &= (x + 6)^2 - 48
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.5. \quad x^2 + 2x - 122 &= (x^2 + 2x) - 122 = \\
 &= (x + 1)^2 - 122 - 1^2 = \\
 &= (x + 1)^2 - 123
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.6. \quad x^2 - 8x - \frac{1}{4} &= (x^2 - 8x) - \frac{1}{4} = \\
 &= (x - 4)^2 - \frac{1}{4} - 4^2 = \\
 &= (x - 4)^2 - \frac{1}{4} - 16 = \\
 &= (x - 4)^2 - \frac{65}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.7. \quad x^2 + 5x - 3 &= (x^2 + 5x) - 3 = \\
 &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 3 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \\
 &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 3 - \frac{25}{4} = \\
 &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{37}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.8. \quad x^2 + 7x + \frac{5}{2} &= (x^2 + 7x) + \frac{5}{2} = \\
 &= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \\
 &= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} - \frac{49}{4} = \\
 &= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{39}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.9. \quad x^2 + \frac{7}{2}x &= \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \\
 &= \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.10. \quad x^2 - x + 1 &= (x^2 - x) + 1 = \\
 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \\
 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4} = \\
 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
 6.1. \quad 4x^2 - 8x + 2 &= (4x^2 - 8x) + 2 = \\
 &= 4(x^2 - 2x) + 2 = \\
 &= 4((x - 1)^2 - (-1)^2) + 2 = \\
 &= 4(x - 1)^2 - 4 + 2 = \\
 &= 4(x - 1)^2 - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.2. \quad 5x^2 - 30x + 2 &= (5x^2 - 30x) + 2 = \\
 &= 5(x^2 - 6x) + 2 = \\
 &= 5((x - 3)^2 - (-3)^2) + 2 = \\
 &= 5((x - 3)^2 - 9) + 2 = \\
 &= 5(x - 3)^2 - 45 + 2 = \\
 &= 5(x - 3)^2 - 43
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.3. \quad 2x^2 - 16x + 4 &= (2x^2 - 16x) + 4 = \\
 &= 2(x^2 - 8x) + 4 = \\
 &= 2((x - 4)^2 - (-4)^2) + 4 = \\
 &= 2((x - 4)^2 - 16) + 4 = \\
 &= 2(x - 4)^2 - 32 + 4 = \\
 &= 2(x - 4)^2 - 28
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.4. \quad 3x^2 + 12x - 1 &= (3x^2 + 12x) - 1 = \\
 &= 3(x^2 + 4x) - 1 = \\
 &= 3((x + 2)^2 - 2^2) - 1 = \\
 &= 3((x + 2)^2 - 4) - 1 = \\
 &= 3(x + 2)^2 - 12 - 1 = \\
 &= 3(x + 2)^2 - 13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.5. \quad -x^2 - 12x - 100 &= (-x^2 - 12x) - 100 = \\
 &= -(x^2 + 12x) - 100 = \\
 &= -((x + 6)^2 - 6^2) - 100 = \\
 &= -((x + 6)^2 - 36) - 100 = \\
 &= -(x + 6)^2 + 36 - 100 = \\
 &= -(x + 6)^2 - 64
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.6. \quad -x^2 + 7x - 3 &= (-x^2 + 7x) - 3 = \\
 &= -(x^2 - 7x) - 3 = \\
 &= -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 3 = \\
 &= -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} - 3 = \\
 &= -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{49}{4} - 3 = \\
 &= -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{37}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.7. \quad 3x^2 + x - 8 &= (3x^2 + x) - 8 = \\
 &= 3\left(x^2 + \frac{x}{3}\right) - 8 = \\
 &= 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 8 = \\
 &= 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} - 8 = \\
 &= 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} - 8 = \\
 &= 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{97}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.8. \quad 5x^2 + 35x + \frac{7}{2} &= (5x^2 + 35x) + \frac{7}{2} = \\
 &= 5(x^2 + 7x) + \frac{7}{2} = \\
 &= 5\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} = \\
 &= 5\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{7}{2} = \\
 &= 5\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{245}{4} + \frac{7}{2} = \\
 &= 5\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{231}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.9. \quad 11x^2 + x &= 11\left(x^2 + \frac{x}{11}\right) = \\
 &= 11\left(x + \frac{1}{22}\right)^2 - \left(\frac{1}{22}\right)^2 = \\
 &= 11\left(x + \frac{1}{22}\right)^2 - \frac{1}{484} = \\
 &= 11\left(x + \frac{1}{22}\right)^2 - \frac{1}{44}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.10. \quad 7x^2 - 2x + \frac{1}{49} &= (7x^2 - 2x) + \frac{1}{49} = \\
 &= 7\left(x^2 - \frac{2}{7}x\right) + \frac{1}{49} = \\
 &= 7\left(x - \frac{1}{7}\right)^2 - \left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \frac{1}{49} = \\
 &= 7\left(x - \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{1}{49} + \frac{1}{49} = \\
 &= 7\left(x - \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{1}{7} + \frac{1}{49} = \\
 &= 7\left(x - \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{6}{49}
 \end{aligned}$$

R.: A altura máxima atingida pela bola é 6 m.

Aplicar – páginas 122 e 123

$$\begin{aligned}
 20 \quad 2. \quad 2x^2 - 4x - 48 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x^2 - 2x) - 24 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 24 - 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x - 1)^2 &= 25 \\
 \Leftrightarrow x - 1 = -\sqrt{25} \vee x - 1 &= \sqrt{25} \\
 \Leftrightarrow x = -4 \vee x &= 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20 \quad 3. \quad 3.1. \quad (x - 6)^2 &= 25 \\
 \Leftrightarrow x - 6 = -\sqrt{25} \vee x - 6 &= \sqrt{25} \\
 \Leftrightarrow x = -5 + 6 \vee x &= 5 + 6 \\
 \Leftrightarrow x = 1 \vee x &= 11 \\
 \text{C.S.} &= \{1, 11\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.2. \quad & (x-1)^2 = 4 \\
 \Leftrightarrow & x-1 = -\sqrt{4} \vee x-1 = \sqrt{4} \\
 \Leftrightarrow & x = 1-2 \vee x = 1+2 \\
 \Leftrightarrow & x = -1 \vee x = 3 \\
 \text{C.S.} = & \{1, 3\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.3. \quad & (2x-4)^2 = 16 \\
 \Leftrightarrow & 2x-4 = -\sqrt{16} \vee 2x-4 = \sqrt{16} \\
 \Leftrightarrow & 2x = -4+4 \vee 2x = 4+4 \\
 \Leftrightarrow & 2x = 0 \vee 2x = 8 \\
 \Leftrightarrow & x = 0 \vee x = 4 \\
 \text{C.S.} = & \{0, 4\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.4. \quad & (x-2)^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x-2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = 2 \\
 \text{C.S.} = & \{2\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.5. \quad & (x-4)^2 = 0 \\
 & \text{Equação impossível} \\
 \text{C.S.} = & \emptyset
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.6. \quad & (x+4)^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x+4 = -\sqrt{8} \vee x+4 = \sqrt{8} \\
 \Leftrightarrow & x = -4-\sqrt{8} \vee x = -4+\sqrt{8} \\
 \text{C.S.} = & \{-4-\sqrt{8}, -4+\sqrt{8}\}
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 4.1. \quad & (x+3)^2 - 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x+3)^2 = 1 \\
 \Leftrightarrow & x+3 = -\sqrt{1} \vee x+3 = \sqrt{1} \\
 \Leftrightarrow & x = -1-3 \vee x = 1-3 \\
 \Leftrightarrow & x = -4 \vee x = -2 \\
 \text{C.S.} = & \{-4, -2\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.2. \quad & (x+7)^2 - 9 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x+7)^2 = 9 \\
 \Leftrightarrow & x+7 = -\sqrt{9} \vee x+7 = \sqrt{9} \\
 \Leftrightarrow & x = -3-7 \vee x = 3-7 \\
 \Leftrightarrow & x = -10 \vee x = -4 \\
 \text{C.S.} = & \{-10, -4\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.3. \quad & (3x-12)^2 - 25 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (3x-12)^2 = 25 \\
 \Leftrightarrow & 3x-12 = -\sqrt{25} \vee 3x-12 = \sqrt{25} \\
 \Leftrightarrow & 3x = -5+12 \vee 3x = 5+12 \\
 \Leftrightarrow & 3x = 7 \vee 3x = 17 \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{7}{3} \vee x = \frac{17}{3} \\
 \text{C.S.} = & \left\{ \frac{7}{3}, \frac{17}{3} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.4. \quad & -7 + (3x-1)^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (3x-1)^2 = 7 \\
 \Leftrightarrow & 3x-1 = -\sqrt{7} \vee 3x-1 = \sqrt{7} \\
 \Leftrightarrow & 3x = 1-\sqrt{7} \vee 3x = 1+\sqrt{7} \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{1-\sqrt{7}}{3} \vee x = \frac{1+\sqrt{7}}{3} \\
 \text{C.S.} = & \left\{ \frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.5. \quad & 2(x+2)^2 - 50 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2(x+2)^2 = 50 \\
 \Leftrightarrow & (x+2)^2 = 25 \\
 \Leftrightarrow & x+2 = -\sqrt{25} \vee x+2 = \sqrt{25} \\
 \Leftrightarrow & x = -5-2 \vee x = 5-2 \\
 \Leftrightarrow & x = -7 \vee x = 3 \\
 \text{C.S.} = & \{-7, 3\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.6. \quad & (x+9)^2 + 27 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x+9)^2 = -27 \\
 & \text{Equação impossível} \\
 \text{C.S.} = & \emptyset
 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
 5.1. \quad & x^2 - 6x + 3 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x^2 - 6x) + 3 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x^2 - 6x + (-3)^2) + 3 - (-3)^2 = 0 \\
 & \uparrow \\
 & \boxed{\frac{6}{2} = -3} \\
 \Leftrightarrow & (x-3)^2 + 3 - 9 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x-3)^2 - 6 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x-3)^2 = 6 \\
 \Leftrightarrow & x-3 = -\sqrt{6} \vee x-3 = \sqrt{6} \\
 \Leftrightarrow & x = 3-\sqrt{6} \vee x = 3+\sqrt{6} \\
 \text{C.S.} = & \{3-\sqrt{6}, 3+\sqrt{6}\}
 \end{aligned}$$

5.2. $x^2 + 3x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3x) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left((x^2 + 3x) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right) - 4 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - 4 - \frac{9}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 = 4 + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{25}{4}} \vee x + \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \vee x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{2} \vee x = \frac{2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$$

C.S. = $\{-4, 1\}$

5.3. $x^2 + 10x + 9 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 10x) + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 10x + 5^2) - 5^2 + 9 = 0$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\frac{10}{2}=5}$$

$$\Leftrightarrow (x + 5)^2 - 25 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 5)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x + 5 = -\sqrt{16} \vee x + 5 = \sqrt{16}$$

$$\Leftrightarrow x = -4 - 5 \vee x = 4 - 5$$

$$\Leftrightarrow x = -9 \vee x = -1$$

C.S. = $\{-9, -1\}$

5.4. $x^2 + 8x + 16 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 8x) = -16$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 8x + 4^2) - 4^2 = -16$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\frac{8}{2}=4}$$

$$\Leftrightarrow (x + 4)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -4$$

C.S. = $\{-4\}$

5.5. $2x^2 - 20x + 50 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 10x) = -25$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 10x + (-5)^2) - (-5)^2 = -25$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\frac{-10}{2}=-5}$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 - 25 = -25$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

C.S. = $\{5\}$

5.6. $x^2 - 4x = 12$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + (-2)^2) - (-2)^2 = 12$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\frac{-4}{2}=-2}$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 - 4 = 12$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = -\sqrt{16} \vee x - 2 = \sqrt{16}$$

$$\Leftrightarrow x = -4 + 2 \vee x = 4 + 2$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 6$$

C.S. = $\{-2, 6\}$

5.7. $2(x - 1)^2 = x^2 - 4$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1) = x^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = x^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x) = -6$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + (-2)^2) - (-2)^2 = -6$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\frac{-4}{2}=-2}$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 - 4 = -6$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = -2$$

Equação impossível

C.S. = $\{ \}$

5.8. $3(x-2)^2 - 2(x^2 + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 4) - 2x^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 - 2x^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 12x + (-6)^2) - (-6)^2 = -4$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\frac{-12}{2} = -6}$$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2 - 36 = -4$$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2 = 32$$

$$\Leftrightarrow x-6 = \sqrt{32} \vee x-6 = -\sqrt{32}$$

$$\Leftrightarrow x = 6 + \sqrt{32} \vee x = 6 - \sqrt{32}$$

$$\text{C.S.} = \{6 - \sqrt{32}, 6 + \sqrt{32}\}$$

6. $x^2 = 2(x-15)$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2x - 30$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = -30$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + (-1)^2) - (-1)^2 = -30$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\frac{-2}{2} = -1}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 = -30$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = -29$$

Equação impossível

$$\text{C.S.} = \{ \}$$

7.

7.1. $2x^2 - 8x - 16 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 8$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + (-2)^2) - (-2)^2 = 8$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\frac{4}{2} = 2}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 = 8$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow x-2 = \sqrt{12} \vee x-2 = -\sqrt{12}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{12} \vee x = 2 - \sqrt{12}$$

$$\text{C.S.} = \{2 - \sqrt{12}, 2 + \sqrt{12}\}$$

7.2. $x^2 - \frac{13}{2}x + \frac{15}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{13}{2}x + \left(-\frac{13}{4}\right)^2\right) - \left(-\frac{13}{4}\right)^2 = -\frac{15}{2}$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\frac{13}{2} = -\frac{13}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{169}{16} = -\frac{15}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{13}{4}\right)^2 = -\frac{15}{2} + \frac{169}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{13}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{13}{4} = \sqrt{\frac{49}{16}} \vee x - \frac{13}{4} = -\sqrt{\frac{49}{16}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13}{4} + \frac{7}{4} \vee x = \frac{13}{4} - \frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6}{4} \vee x = \frac{20}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = 5$$

$$\text{C.S.} = \left\{\frac{3}{2}, 5\right\}$$

7.3. $4x^2 - 20x = 6(-5+x)$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 20x = -30 + 6x$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 26x = -30$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{13}{2}x = -\frac{15}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = 5$$

$$\uparrow$$

Pelo exercício anterior

$$\text{C.S.} = \left\{\frac{3}{2}, 5\right\}$$

7.4. $\left(2x - \frac{4}{7}\right)^2 + \frac{11}{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(2x - \frac{4}{7}\right)^2 = -\frac{11}{3}$$

Equação impossível

$$\text{C.S.} = \{ \}$$

$$\begin{aligned}
 7.5. \quad & \left(w - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{9} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left(w - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{7}{9} \\
 \Leftrightarrow & w - \frac{2}{3} = -\sqrt{\frac{7}{9}} \vee w - \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{7}{9}} \\
 \Leftrightarrow & w = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3} \vee w = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} \\
 \Leftrightarrow & w = \frac{2 - \sqrt{7}}{3} \vee w = \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \\
 \text{C.S.} = & \left\{ \frac{2 - \sqrt{7}}{3}, \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.6. \quad & k^2 - \frac{6}{5}k + 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left(k^2 - \frac{6}{5}k + \left(-\frac{3}{5}\right)^2\right) - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = -1 \\
 & \uparrow \\
 & \boxed{\frac{-\frac{6}{5}}{2} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}} \\
 \Leftrightarrow & \left(k - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{9}{25} = -1 \\
 \Leftrightarrow & \left(k - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} - 1 \\
 \Leftrightarrow & \left(k - \frac{3}{5}\right)^2 = -\frac{16}{25} \\
 & \text{Equação impossível} \\
 & \text{C.S.} = \{ \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad & L(x) = -\frac{1}{8}(x^2 - 40x) \\
 18\,000 \text{ €} &= 18 \text{ milhares de euros} \\
 L(x) &= 18 \\
 \Leftrightarrow & -\frac{1}{8}(x^2 - 40x) = 18 \\
 \Leftrightarrow & x^2 - 40x = -144 \\
 \Leftrightarrow & \left(x^2 - 40x + (-20)^2\right) - (-20)^2 = -144 \\
 & \uparrow \\
 & \boxed{\frac{-40}{2} = -20} \\
 \Leftrightarrow & (x - 20)^2 - 400 = -144 \\
 \Leftrightarrow & (x - 20)^2 = 256 \\
 \Leftrightarrow & x - 20 = -\sqrt{256} \vee x - 20 = \sqrt{256} \\
 \Leftrightarrow & x = -16 + 20 \vee x = 16 + 20 \\
 \Leftrightarrow & x = 4 \vee x = 36
 \end{aligned}$$

Como $x > 1$, $x = 36$.

Logo, a editora vendeu 3600 álbuns.

Aplicar – páginas 126 e 127

2.

$$2.1. \quad a = 1; b = -6 \text{ e } c = 8$$

$$2.2. \quad a = -1; b = 5 \text{ e } c = 0$$

$$2.3. \quad a = -7; b = -4 \text{ e } c = 5$$

$$2.4. \quad a = 4; b = 2 \text{ e } c = 1$$

$$2.5. \quad a = -5; b = 0 \text{ e } c = 0$$

$$20 \quad 3. \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

Se $x = -3$:

$$(-3)^2 - 3(-3) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9 + 9 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 14 = 0$$

Proposição falsa, -3 não é solução da equação.

Se $x = -1$:

$$(-1)^2 - 3(-1) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

Proposição verdadeira

Se $x = 0$:

$$0^2 - 3 \times 0 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - 0 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4 = 0$$

Proposição falsa, 0 não é solução da equação.

R.: -1 é solução da equação.

4.

$$4.1. \quad \text{I.} \quad x(x + 4) = 5x + 12$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x = 5x + 12$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$\text{II.} \quad (x - 1)(x + 1) = 2x(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x^2 + 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\text{III.} \quad x^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 25 = 0$$

$$\text{IV.} \quad 8x(5x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 40x^2 + 8x = 0$$

4.2. As equações I. e II. são equações do 2.º grau completas.

4.3.

I. $x^2 - x - 12 = 0$ $a = 1; b = -1; c = -12$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -3$$

$$\text{C.S.} = \{-3, 4\}$$

II. $-x^2 - 2x - 1 = 0$ $a = -1; b = -2; c = -1$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-1) \times (-1)}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{-2} \Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{C.S.} = \{-1\}$$

III. $x^2 - 25 = 0$ $a = 1; b = 0; c = -25$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \times 1 \times (-25)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{\pm \sqrt{100}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{10}{2} \Leftrightarrow x = \pm 5$$

$$\text{C.S.} = \{-5, 5\}$$

IV. $40x^2 + 8x = 0$ $a = 40; b = 8; c = 0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 40 \times 0}}{2 \times 40}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 0}}{80}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm 8}{80}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 - 8}{80} \vee x = \frac{-8 + 8}{80}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{16}{80} \vee x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5} \vee x = 0$$

$$\text{C.S.} = \left\{-\frac{1}{5}, 0\right\}$$

5.

5.1. $x^2 + 3x - 4 = 0$ $a = 1; b = 3; c = -4$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 - 5}{2} \vee x = \frac{-3 + 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8}{2} \vee x = \frac{2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$$

$$\text{C.S.} = \{-4, 1\}$$

5.2. $-x^2 + x + 20 = 0$ $a = -1; b = 1; c = 20$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-1) \times 20}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 9}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10}{-2} \vee x = \frac{8}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -4$$

$$\text{C.S.} = \{-4, 5\}$$

5.3. $x^2 - 12x + 36 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 6)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

$$\text{C.S.} = \{6\}$$

5.4. $x^2 - 4x + 6 = 0$ $a = 1; b = -4; c = 6$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

$$\text{Equação impossível}$$

$$\text{C.S.} = \{\}$$

5.5. $(x - 7)^2 = 36$

$$\Leftrightarrow x - 7 = \pm \sqrt{36}$$

$$\Leftrightarrow x - 7 = \pm 6$$

$$\Leftrightarrow x = -6 + 7 \vee x = 6 + 7$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 13$$

$$\text{C.S.} = \{1, 13\}$$

5.6. $x^2 - 2x + 6 = 0$ $a=1; b=-2; c=6$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{2}$$

Equação impossível

C.S. = {}

5.7. $(3x - 3)(x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x - 3 = 0 \quad \vee \quad x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x = 3 \quad \vee \quad x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = -1$$

C.S. = {-1, 1}

5.8. $(x - 3)^2 - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{2} \quad \vee \quad x = 3 + \sqrt{2}$$

C.S. = {3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}}

5.9. $-x^2 + 7 = 0$

$$\Leftrightarrow -x^2 = -7$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7}$$

C.S. = {-\sqrt{7}, \sqrt{7}}

5.10. $-2x^2 - 10x = 0$

$$\Leftrightarrow x(-2x - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad -2x - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad -2x = 10$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = -5$$

C.S. = {-5, 0}

5.11. $10x + 21 = -x^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 21 = 0$$

$$a=1; b=10; c=21$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \times 1 \times 21}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \quad \vee \quad x = -7$$

C.S. = {-7, -3}

5.12. $(x - 4)^2 - 5(x - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x - 4 - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 0 \quad \vee \quad x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \quad \vee \quad x = 9$$

C.S. = {4, 9}

5.13. $\frac{x^2 - 2}{3} + \frac{x - 3}{6} = 8$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4}{6} + \frac{x - 3}{6} = \frac{48}{6}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4 + x - 3 = 48$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 7 - 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 55 = 0$$

$$a=2; b=1; c=-55$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-55)}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 440}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 21}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{22}{4} \quad \vee \quad x = \frac{20}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{11}{2} \quad \vee \quad x = 5$$

C.S. = \left\{-\frac{11}{2}, 5\right\}

5.14. $\frac{x^2}{4} - 2x + 4 = 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} - 2 = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{4}{2} = \pm \frac{2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = \pm 2$$

$$\Leftrightarrow x = -2 + 4 \quad \vee \quad x = 2 + 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad \vee \quad x = 6$$

C.S. = {2, 6}

5.15. $2x + 112 = x(x + 8)$

$$\Leftrightarrow 2x + 112 = x^2 + 8x$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 6x + 112 = 0$$

$$a=-1; b=-6; c=112$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times (-1) \times 112}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 448}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{484}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 22}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = -14 \quad \vee \quad x = 8$$

C.S. = {-14, 8}

5.16. $2,5x^2 - 0,9x = 2(1,5x^2 + 0,1)$
 $\Leftrightarrow 2,5x^2 - 0,9x = 3x^2 + 0,2$
 $\Leftrightarrow 2,5x^2 - 3x^2 - 0,9x - 0,2 = 0$
 $\Leftrightarrow -0,5x^2 - 0,9x - 0,2 = 0$
 $a = -0,5; b = -0,9; c = -0,2$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-(-0,9) \pm \sqrt{(-0,9)^2 - 4 \times (-0,5) \times (-0,2)}}{2 \times (-0,5)}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{0,9 \pm \sqrt{0,81 - 0,4}}{-1} \Leftrightarrow x = \frac{0,9 \pm \sqrt{0,41}}{-1}$
 $\Leftrightarrow x = -0,9 - \sqrt{0,41} \vee x = -0,9 + \sqrt{0,41}$
C.S. = $\{-0,9 - \sqrt{0,41}; -0,9 + \sqrt{0,41}\}$

5.17. $(5x - 3)^2 + 0,5(x - 1) = \frac{-12 + x}{2}$
 $\Leftrightarrow 25x^2 - 30x + 9 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = -\frac{12}{2} + \frac{1}{2}x$
 $\Leftrightarrow \frac{50}{2}x^2 + \frac{60}{2}x + \frac{18}{2} - \frac{1}{2} + \frac{12}{2} = 0$
 $\Leftrightarrow 50x^2 + 60x + 29 = 0$
 $a = 50; b = 60; c = 29$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \times 50 \times 29}}{2 \times 50}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-60 \pm \sqrt{3600 - 5800}}{100}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-60 \pm \sqrt{-2200}}{100}$
Equação impossível
C.S. = $\{\}$

5.18. $3x^2 - \frac{(2x - 5)(2x + 5)}{3} = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{9x^2}{3} - \frac{4x^2 - 25}{3} = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{9x^2}{3} - \frac{4x^2}{3} + \frac{25}{3} = 0$
 $\Leftrightarrow 5x^2 + 25 = 0$
 $\Leftrightarrow 5x^2 = -25$
 $\Leftrightarrow x^2 = -5$
Equação impossível
C.S. = $\{\}$

20 6. $x^2 - kx - 3 = 0$
 $x = -3$
 $(-3)^2 - k(-3) - 3 = 0$
 $\Leftrightarrow 9 + 3k - 3 = 0$
 $\Leftrightarrow 3k = -6$
 $\Leftrightarrow k = -2$
Vamos resolver a equação conhecendo o valor de k , de modo a descobrir a outra solução:

$x^2 - (-2)x - 3 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$
 $a = 1; b = 2; c = -3$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2}$
 $\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$
C.S. = $\{-3, 1\}$

A outra solução é $x = 1$.

20 7. $\frac{n(n-1)}{2} = 66$
 $\Leftrightarrow n^2 - n - 132 = 0$
 $\Leftrightarrow n^2 - n - 132 = 0$
 $a = 1; b = -1; c = -132$
 $\Leftrightarrow n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-132)}}{2 \times 1}$
 $\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 528}}{2}$
 $\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{529}}{2}$
 $\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 23}{2}$
 $\Leftrightarrow n = -11 \vee n = 12$
C.S. = $\{-11, 12\}$

Como o número de equipes participantes é maior do que zero, nesse campeonato de voleibol participaram 12 equipes.

20 5. Vamos calcular o binómio discriminante de cada uma das equações e, de seguida, indicar o número de soluções:

5.1. $\Delta = 4^2 - 4 \times 7 \times 0 \Leftrightarrow \Delta = 16 - 0 \Leftrightarrow \Delta = 16$

2 soluções

5.2. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 \Leftrightarrow \Delta = 16 - 16 \Leftrightarrow \Delta = 0$

1 solução

5.3. $\Delta = 0^2 - 4 \times 6 \times (-5) \Leftrightarrow \Delta = 0 + 120 \Leftrightarrow \Delta = 120$

2 soluções

5.4. $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times 5 \Leftrightarrow \Delta = 9 + 20 \Leftrightarrow \Delta = 29$

2 soluções

6. $\Delta = (-11)^2 - 4 \times 1 \times 0 = 121 - 0 > 0$

Logo, a equação tem duas soluções, pelo que é possível. Assim, o Filipe não tem razão.

7. A afirmação é falsa. Se $\Delta = 0$, a equação correspondente também é possível.

8. $b^2 = 4ac \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$

Logo, a equação tem uma solução.

9. Uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ tem uma solução duando o binómio discriminante, Δ , é 0. Assim:

9.1. $(-4)^2 - 4 \times 1 \times k = 0$

$$\Leftrightarrow 16 - 4k = 0$$

$$\Leftrightarrow -4k = -16$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{16}{4}$$

$$\Leftrightarrow k = 4$$

9.2. $(-k)^2 - 4 \times (-2) \times (-5) = 0$

$$\Leftrightarrow k^2 - 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 40$$

$$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{40}$$

$$\Leftrightarrow k = -\sqrt{40} \vee k = \sqrt{40}$$

10.

10.1. Para a equação admitir duas soluções, $\Delta > 0$.

Assim:

$$b^2 - 4 \times 2 \times (-12) > 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 + 96 > 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 > -96$$

Como $b^2 \geq 0$, qualquer $b \in \mathbb{R}$ torna a equação possível e com duas soluções. Um possível valor de b será o 0.

10.2. Seja $b = 0$

Logo:

$$2x^2 + 0x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

Para $b = 0$, C.S. = $\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$.

11. $\Delta = b^2 - 4ac$

Na equação $ax^2 + c = 0$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$ e $b = 0$

Logo, relativamente a esta equação, $\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4ac = -4ac$.

Como sabemos que a mesma tem duas soluções, -2 e 10 , $\Delta > 0$, isto é, $-4ac > 0$.

Logo, o sinal de $-4 \times a \times c$ é positivo.

12. $\Delta = b^2 - 4ac$

Considerando a equação $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$:

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times 0 = b^2 - 0 = b^2$$

Como $b \neq 0$, $\Delta > 0$.

Assim, qualquer equação do tipo $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$ admite sempre duas soluções distintas.

13. $x^2 - mx - 3 = 0$

$$a = 1; b = -m; c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-m)^2 - 4 \times 1 \times (-3)$$

$$= m^2 + 12 > 0$$

Logo, independentemente do valor de m , a equação terá sempre duas soluções distintas.

14. $\Delta = b^2 - 4ac$

Considerando a equação $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$:

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times 0 = b^2 \geq 0$$

Logo, qualquer equação do tipo $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$ é sempre possível, podendo ter uma ou duas soluções distintas.

20 15.

15.1. Se a equação do 2.º grau tem uma solução dupla, então o binómio discriminante é igual a zero.

$$\Delta = b^2 - 4ac, a = 3, b = -m, c = 1$$

$$(-m)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow m = -\sqrt{12} \vee m = \sqrt{12}$$

- 15.2. a) Para que a equação seja impossível é necessário que $b^2 - 4ac < 0$. Sabemos que $a = 3$, $b = -m$ e $c = 1$.
 $(-m)^2 - 4 \times 3 \times 1 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 12 < 0$
 Por exemplo, se $m = 0$, a equação será impossível, pois $0^2 - 12 = -12 < 0$.
- b) Para que a equação tenha duas soluções distintas é necessário que $b^2 - 4ac > 0$. Sabemos que $a = 3$, $b = -m$ e $c = 1$.
 $(-m)^2 - 4 \times 3 \times 1 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 12 > 0$
 Por exemplo, se $m = 5$, a equação terá duas soluções distintas, pois verificamos que $5^2 - 12 = 25 - 12 = 13 > 0$.

Aplicar – páginas 134 e 135

3. Sejam α e β as soluções das equações.

3.1. $x^2 + 2x - 2 = 0$
 $a = 1; b = 2; c = -2$
 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$
 $\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = -\frac{2}{1} = -2$

3.2. $x^2 + x - 20 = 0$
 $a = 1; b = 1; c = -20$
 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{1} = -1$
 $\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = -\frac{20}{1} = -20$

3.3. $2x^2 + 24x - 40 = 0$
 $a = 2; b = 24; c = -40$
 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{24}{2} = -12$
 $\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = -\frac{40}{2} = -20$

3.4. $(x - 3)^2 - 4x + 6 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - 4x + 6 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 10x + 15 = 0$
 $a = 1; b = -10; c = 15$
 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-10}{1} = 10$
 $\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{15}{1} = 15$

4. $2x^2 + 4x - 6 = 0$
 $a = 2; b = 4; c = -6$
 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} = -2$
 $\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-6}{2} = -3$
 $\frac{\alpha + \beta}{\alpha \times \beta} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

R.: [A]

5. Sejam α e β as soluções de uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Então, a equação também pode ser escrita na forma $x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha \times \beta) = 0$. Assim:

- 5.1. 2 e 3 são soluções

$$2 + 3 = 5; 2 \times 3 = 6$$

Logo, uma possível equação será $x^2 - 5x + 6 = 0$.

- 5.2. 5 e -1 são soluções

$$(-5) + (-1) = -6; (-5) \times (-1) = 5$$

Logo, uma possível equação será $x^2 + 6x + 5 = 0$.

- 5.3. 4 e 0 são soluções

$$-4 + 0 = -4; -4 \times 0 = 0$$

Logo, uma possível equação será $x^2 + 4x + 0 = x^2 + 4x$.

- 5.4. $-\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$ são soluções

$$-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{4}{6} + \frac{3}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$-\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Logo, uma possível equação será: $x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$

6. $x^2 + 6x + 8 = 0$

Sejam m e n as soluções da equação.

Logo, $-(m + n)$ e $m \times n = 8$, ou seja, $m + n = -6$ e $m \times n = 8$.

Assim, $(m \times n)(m + n) = 8 \times (-6) = -48$.

7. $2(x + 2)^2 = 24$

7.1. $2(x + 2)^2 = 24$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + 4x + 4) = 24$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 12$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 8 = 0$$

$$\begin{aligned}
 7.2. \quad & x^2 + 4x - 8 = 0 \\
 & a = 1; b = 4; c = -8 \\
 & \Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 4^2 - 4 \times 1 \times (-8) \\
 & = 16 + 32 = 48 > 0
 \end{aligned}$$

Logo, a equação tem duas soluções.

$$\begin{aligned}
 7.3. \quad & x^2 + 4x - 8 = 0 \\
 & a = 1; b = 4; c = -8 \\
 & \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{1} = -4
 \end{aligned}$$

$$7.4. \quad \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = -\frac{8}{1} = -8$$

$$\begin{aligned}
 7.5. \quad & x^2 + 4x - 8 = 0 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2 \times 1} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 32}}{2} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{-4 \pm 4\sqrt{3}}{2} \\
 \Leftrightarrow x &= -2 \pm 2\sqrt{3} \\
 \text{C.S.} &= \{-2 - 2\sqrt{3}, -2 + 2\sqrt{3}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.6. \quad & 2(x+2)^2 = 24 \\
 \Leftrightarrow (x+2)^2 &= 12 \\
 \Leftrightarrow x+2 &= \pm\sqrt{12} \\
 \Leftrightarrow x &= -2 \pm \sqrt{12} \\
 \Leftrightarrow x &= -2 \pm 2\sqrt{3} \\
 \text{C.S.} &= \{-2 - 2\sqrt{3}, -2 + 2\sqrt{3}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad & \\
 8.1. \quad & (x-1)^2 - 4 = 3 \\
 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 4 &= 3 \\
 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 6 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8.2. \quad & x^2 - 2x - 6 = 0 \\
 & a = 1; b = -2; c = -6 \\
 & \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2
 \end{aligned}$$

Contudo, considerando os valores obtidos pelo Aníbal, -5 e 11 , $-5 + 11 = 6 \neq 2$.

$$\begin{aligned}
 8.3. \quad & (x-1)^2 - 4 = 3 \\
 \Leftrightarrow (x-1)^2 &= 7 \\
 \Leftrightarrow x-1 &= \pm\sqrt{7} \\
 \Leftrightarrow x &= 1 \pm \sqrt{7} \\
 \text{C.S.} &= \{1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad & x^2 + (2k-3)x - 6 = 0 \\
 & a = 1; b = 2k-3; c = -6 \\
 & \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{2k-3}{1} = -2k+3
 \end{aligned}$$

Logo, para a soma ser igual a 2:

$$\begin{aligned}
 & -2k+3 = 2 \\
 \Leftrightarrow -2k &= -1 \\
 \Leftrightarrow k &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad & \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) \\
 \text{Como } x^2 + 5x - 14 &= 0, \text{ sabemos que } \alpha\beta = -14 \text{ e} \\
 \text{que } \alpha + \beta &= -5.
 \end{aligned}$$

Logo:

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -14 \times (-5) = 70$$

$$\begin{aligned}
 11. \quad & x^2 - (2m+n)x - 3m = 0 \\
 \text{Sabe-se que a soma e o produto das raízes da} \\
 \text{equação são, respectivamente, } 5 \text{ e } -6. \\
 \text{Assim, } 2m+n &= 5 \text{ e } 3m = -6.
 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{cases} 2m+n=5 \\ -3m=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times 2 + n = 5 \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

12. Processo 1

Sejam x e y dois números.

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x+y=-8 \\ xy=12 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-8-y \\ (-8-y)y=12 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8-y \\ -8y-y^2=12 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-8-y \\ y^2+8y+12=0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8-y \\ y=\frac{-8 \pm \sqrt{64-4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-8-y \\ y=\frac{-8 \pm 4}{2} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8-y \\ y=\frac{-8-4}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-8-y \\ y=\frac{-8+4}{2} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8-(-6) \\ y=-6 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-8-(-2) \\ y=-2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-6 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-6 \\ y=-2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Assim, os números serão o -2 e o -6 .

Processo 2

Sejam α e β esses números.

Sabe-se que $\alpha + \beta = -8$ e $\alpha \times \beta = 12$.

Logo:

$$\begin{aligned}x^2 - (-8)x + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 8x + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-8 \pm 4}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-8 - 4}{2} \vee x = \frac{-8 + 4}{2} \\ \Leftrightarrow x &= -6 \vee x = -2\end{aligned}$$

Assim, os números são o -2 e o -6.

- 13.** Consideremos α e β as soluções da equação dada. Então, podemos dizer que $\alpha + \beta = -k$ e $\alpha\beta = 8$. De acordo com o enunciado, uma das soluções é o dobro da outra, portanto $\alpha = 2\beta$. Vamos calcular α e β e, de seguida, determinar o valor de k .

$$\begin{aligned}\begin{cases} \alpha\beta = 8 \\ \alpha = 2\beta \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta^2 = 8 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 = 4 \\ \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \pm\sqrt{4} \\ \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \vee \beta = 2 \\ \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 4 \end{cases}\end{aligned}$$

Ora, $\alpha + \beta = -k \Leftrightarrow k = -\alpha - \beta$

Assim:

$$\begin{aligned}k &= -(-4) - (-2) \vee k = -4 - 2 \\ \Leftrightarrow k &= 6 \vee k = -6\end{aligned}$$

R.: A variável k pode tomar o valor -6 ou 6 de modo a satisfazer as condições do enunciado.

Aplicar – páginas 138 e 139

- 20 2.** Os pontos A e B são os pontos de interseção das funções f e g . Então:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -\frac{x}{3} + 3 \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{aligned}x^2 &= -\frac{x}{3} + 3 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{x}{3} - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + x - 6 &= 0 \\ a &= 2; b = 1; c = -6 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-6)}}{2 \times 2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1 \pm 7}{4} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1 - 7}{4} \vee x = \frac{-1 + 7}{4} \\ \Leftrightarrow x &= -2 \vee x = \frac{6}{4} \\ \Leftrightarrow x &= -2 \vee x = \frac{3}{2} \\ \text{C.S.} &= \left\{ -2, \frac{3}{2} \right\}\end{aligned}$$

Para $x = -2$, $x = (-2)^2 = 4$.

Para $y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

Assim, $A(-2, 4)$ e $B\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

20 3.

- 3.1.** Os pontos A e B são os pontos de interseção das funções f e g . Então:

$$\begin{aligned}\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x + 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x^2 = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x = \frac{-1 \pm 5}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x = \frac{-6}{2} \vee x = \frac{4}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 \\ x = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 4 \\ x = 2 \end{cases}\end{aligned}$$

As coordenadas dos pontos A e B são $A(2, 4)$ e $B(-3, 9)$.

- 3.2. Seja C o ponto de interseção da reta $y = -x + 6$ com o eixo dos yy . Logo, para $x = 0$, $y = 6$. Assim, $C(0, 6)$.

$$\begin{aligned} A_{[OAB]} &= A_{[OAC]} + A_{[OCB]} \\ A_{[OAB]} &= \frac{6 \times 2}{2} + \frac{6 \times 3}{2} = \\ &= 6 + 9 = \\ &= 15 \end{aligned}$$

R.: $A = 15$ u.a.

4.
$$\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = 100 \\ y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \\ y = 100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{25} \\ y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 100 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 \\ y = 100 \end{cases}$$

C.S. = $\{(-5, 100); (5, 100)\}$

5.

- 5.1. O ponto B pertence ao gráfico de g .
 $g(x) = -x + 6$ e B tem ordenada 4.

Logo:

$$\begin{aligned} 4 &= -x + 6 \\ \Leftrightarrow x &= 6 - 4 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

Assim, $B(2, 4)$. Logo, a abcissa do ponto B é 2.

- 5.2. $B(2, 4)$ e $f(x) = ax^2$

Como B pertence ao gráfico de f :

$$\begin{aligned} 4 &= a \times 2^2 \\ \Leftrightarrow 4 &= 4a \\ \Leftrightarrow a &= 1 \end{aligned}$$

Assim, $f(x) = 1x^2 = x^2$.

- 5.3. Para calcular a área do triângulo $[DBC]$, considere-mos $[CB]$ como base e a distância de $[CB]$ ao eixo Ox como altura do triângulo. Assim,

$$A_{[DBC]} = \frac{\overline{CB} \times 4}{2}$$

Para determinar $\overline{CB}$ é necessário descobrir as coordenadas de C .

Sabe-se que a ordenada de C é 4 e que C é um ponto do gráfico de h .

Logo, $\frac{2}{x} = 4 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Assim, $C\left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

Desta forma, $\overline{CB} = \left| 2 - \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{2}$.

Como tal:

$$A_{[DBC]} = \frac{\frac{3}{2} \times 4}{2} = 3$$

R.: $A = 3$ u.a.

6.

- 6.1. O ponto B pertence ao gráfico da função f .
Logo:

$$6 = a \times 2^2 \Leftrightarrow 6 = a \times 4 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Assim, $f(x) = \frac{3}{2}x^2$.

Desta forma, $f(-2) = \frac{3}{2} \times (-2)^2 = \frac{3}{2} \times 4 = 6$

- 6.2. Como g é uma função de proporcionalidade inversa,

$$g(x) = \frac{k}{x} \Leftrightarrow k = x \times g(x).$$

Assim, atendendo a que o ponto B pertence ao gráfico de g , podemos descobrir o valor de $k = 2 \times 6 = 12$:

Desta forma, $g(x) = \frac{12}{x}$

Como o ponto $C(c; 1,2)$ pertence ao gráfico de g :

$$1,2 = \frac{12}{c} \Leftrightarrow 1,2c = 12 \Leftrightarrow c = \frac{12}{1,2} \Leftrightarrow c = 10$$

Logo, $c = 10$.

- 6.3. $B(2, 6)$

$C(10; 1,2)$

h é uma função afim.

Os gráficos de funções afins são retas não verticais da forma $y = ax + b$ onde a designa o declive da reta e b a ordenada na origem.

$$a = \frac{6 - 1,2}{2 - 10} = \frac{4,8}{-8} = -0,6$$

Logo, $y = 0,6x + b$.

Como $B(2, 6)$ pertence ao gráfico da função:

$$6 = -0,6 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 6 + 1,2 \Leftrightarrow b = 7,2$$

Assim, $h(x) = -0,6x + 7,2$

6.4. $h(x) = -0,6x + 7,2$ e $f(x) = \frac{3}{2}x^2$

$$h(x) = f(x)$$

$$-0,6x + 7,2 = \frac{3}{2}x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 + 0,6x - 7,2 = 0$$

$$a = 1,5; b = 0,6; c = -7,2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-0,6 \pm \sqrt{0,6^2 - 4 \times 1,5 \times (-7,2)}}{2 \times 1,5}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-0,6 \pm \sqrt{43,56}}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-0,6 \pm 6,6}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-0,6 - 6,6}{3} \vee x = \frac{-0,6 + 6,6}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = -2,4 \vee x = 2$$

Para $x = -2,4$, $y = \frac{3}{2} \times (-2,4)^2 = 8,64$.

Para $x = 2$, $y = \frac{3}{2} \times 2^2 = \frac{3}{2} \times 4 = 6$.

Logo, os pontos de interseção dos gráficos das funções f e h são $(2, 6)$ e $(-2, 4; 8, 64)$.

Aplicar – páginas 142 e 143

2. $x(x+4) = 45$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 45 = 0$$

$$a = 1; b = 4; c = -45$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-45)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 180}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{196}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 14}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -9 \vee x = 5$$

Como $x > 0$, pois representa a altura do retângulo, então $x = 5$.

3. Seja n o número positivo que procuramos:

$$n^2 = 3n$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n = 0$$

$$\Leftrightarrow n(n - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 0 \vee n - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 0 \vee n = 3$$

Como n é um número positivo, então $n = 3$.

4. Seja n o número de anos que procuramos descobrir.

Daqui a n anos o Francisco terá $(14 + n)$ anos e a Eliana terá $(16 + n)$ anos. Nessa altura, a soma do quadrado da idade do Francisco com o dobro da idade da Eliana é igual a 364. Vamos calcular n :

$$(14 + n)^2 + 2(16 + n) = 364$$

$$\Leftrightarrow 196 + 28n + n^2 + 32 + 2n - 364 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 30n - 136 = 0$$

$$a = 1; b = 30; c = -136$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \times 1 \times (-136)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-30 \pm \sqrt{900 + 544}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-30 \pm \sqrt{1444}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-30 \pm 38}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -34 \vee n = 4$$

Como $n > 0$, pois corresponde a um período de tempo (número de anos), então, daqui a 4 anos é satisfeita a condição do enunciado.

5. Começamos por aplicar o teorema de Pitágoras para determinar o valor de x :

$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 4x + 1 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$a = 1; b = -2; c = -3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

Como $x > 0$, pois representa a altura do triângulo, $x = 3$.

$$A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{\Delta} = \frac{(3+1) \times 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow A_{\Delta} = \frac{4 \times 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow A_{\Delta} = 6$$

R.: O triângulo tem 6 u.a.

6. A área lateral deste prisma quadrangular corresponde à área das quatro faces laterais, ou seja, quatro retângulos, cada um com x cm de largura e $(x+5)$ cm de comprimento (o comprimento de uma aresta lateral excede em 5 cm o comprimento de uma aresta da base).

$$A_l = 4 \times (x(x+5))$$

$$\Leftrightarrow A_l = 4(x^2 + 5x)$$

$$\Leftrightarrow A_l = 4x^2 + 20x$$

Vamos calcular x , sabendo que o prisma tem 200 m^2 de área lateral:

$$4x^2 + 20x = 200$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 20x - 200 = 0$$

$$a = 4; b = 20; c = -200$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \times 4 \times (-200)}}{2 \times 4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 3200}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{3600}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-20 \pm 60}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = -10 \vee x = 5$$

Sabemos que $x > 0$, pois corresponde à medida de uma das arestas do prisma, logo $x = 5$ m.

As bases do prisma são quadrados com 5 m de lado e altura 10 m. Vamos calcular o volume do prisma:

$$\left. \begin{array}{l} V_{\text{prisma}} = A_b \times h \\ A_b = 5 \times 5 \\ h = 10 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} V_{\text{prisma}} = 5 \times 5 \times 10 \\ V_{\text{prisma}} = 250 \end{array} \right\}$$

R.: O prisma tem 250 m^3 de volume.

7.

- 7.1. As bases de um prisma hexagonal são hexágonos, ou seja têm 6 lados.

$$\left. \begin{array}{l} n(n+1) + 2n \\ n = 6 \end{array} \right\} 6 \times 7 + 2 \times 6 = 42 + 12 = 54$$

R.: Um prisma hexagonal tem um total de 54 diagonais.

- 7.2. Vamos calcular n , ou seja, o número de lados da base desse prisma cujo número de diagonais é 88:

$$n(n+1) + 2n = 88$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n + 2n - 88 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n - 88 = 0$$

$$a = 1; b = 3; c = -88$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-88)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 352}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{361}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm 19}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -11 \vee n = 8$$

Como $n > 0$, pois corresponde ao número de lados da base do prisma, $n = 8$

A base desse prisma regular tem oito lados, portanto é um octógono.

8. Sejam x e y dois números inteiros positivos.

Logo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y = 3 \\ xy = 208 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + y \\ (3 + y)y = 208 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + y \\ 3y + y^2 = 208 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + y \\ 3y + y^2 = 208 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ y^2 + 3y - 208 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ y = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-208)}}{2 \times 1} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ y = \frac{-3 \pm 29}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ y = \frac{-3 - 29}{2} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ y = \frac{-3 + 29}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ y = -16 \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ y = 13 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + (-16) \\ y = -16 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 + 13 \\ y = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ y = -16 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 16 \\ y = 13 \end{cases}$$

Como os números são inteiros positivos, $x = 16$ e $y = 13$.

9.

$$9.1. A_{[EFG]} = \frac{EF \times FG}{2}$$

$$A_{[EFG]} = \frac{6 \times (x - 2)}{2} = 3(x - 2) = 3x - 6$$

$$9.2. A_{\text{amarelo}} = 76$$

$$\Leftrightarrow A_{[ABCD]} - A_{[EFG]} = 76$$

$$\text{Assim, } x^2 - (3x - 6) = 76$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 6 - 76 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 70 = 0$$

$$a = 1; b = -3; c = -70$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-70)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 280}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 280}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 17}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 - 17}{2} \vee x = \frac{3 + 17}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -7 \vee x = 10$$

Como $x > 0$, pois representa a medida de um lado do quadrado, $x = 10$.

10. Dois números x e y são recíprocos se $xy = 1$.
Assim:

$$\begin{cases} x + y = \frac{58}{21} \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{58}{21} - y \\ \left(\frac{58}{21} - y\right)y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 + \frac{58}{21}y - 1 = 0 \\ -21y^2 + 58y - 21 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-58 \pm \sqrt{58^2 - 4 \times (-21) \times (-21)}}{2 \times (-21)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-58 \pm 40}{-42} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-58 - 40}{-42} \\ y = \frac{-58 + 40}{-42} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-58 + 40}{-42} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-98}{-42} \\ y = \frac{-18}{-42} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{3} \\ y = \frac{3}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{58}{21} - \frac{7}{3} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{58}{21} - \frac{3}{7} \\ y = \frac{3}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{3}{7} \end{cases}$$

R.: O número poderá ser o $\frac{3}{7}$ ou o $\frac{7}{3}$.

11.

$$11.1. h(0) = -4,9 \times 0^2 + 64$$

$$\Leftrightarrow h(0) = 0 + 64$$

$$\Leftrightarrow h(0) = 64$$

O resultado corresponde à altura da bola na posição inicial (64 m), ou seja, a altura do prédio de onde a bola é largada.

- 11.2. Sabemos que $h(t) = -4,9t^2 + 64$ e que $h(t) = 15$.
Assim,

$$-4,9t^2 + 64 = 15$$

$$\Leftrightarrow -4,9t^2 = 15 - 64$$

$$\Leftrightarrow -4,9t^2 = -49$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{49}{4,9}$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow t = -\sqrt{10} \vee t = \sqrt{10}$$

$t > 0$, pois corresponde ao número de segundos passados até a bola atingir os 15 m de altura.

Assim, $t = \sqrt{10} \approx 3,16$.

R.: A bola atinge os 15 m de altura, aproximadamente, aos 3,16 segundos.

- 11.3. Quando a bola atinge o solo, a altura é igual a zero. Assim, como $h(t) = -4,9t^2 + 64$, temos:

$$\begin{aligned} -4,9t^2 + 64 &= 0 \\ \Leftrightarrow -4,9t^2 &= -64 \\ \Leftrightarrow t^2 &= \frac{64}{4,9} \\ \Leftrightarrow t &= -\sqrt{\frac{64}{4,9}} \vee t = \sqrt{\frac{64}{4,9}} \end{aligned}$$

$t > 0$, pois corresponde ao número de segundos passados até a bola atingir o solo. Assim:

$$t = \sqrt{\frac{64}{4,9}} \approx 3,61$$

R.: A bola atinge o solo passados, aproximadamente, 3,61 segundos.

12. Se $\overline{AP} = 2$, então $\overline{PD} = x - 2$. Vamos calcular a medida do lado do quadrado $[PQRS]$ (l) conhecendo a sua área.

$$A = l^2$$

$$l^2 = 20 \Leftrightarrow l = -\sqrt{20} \vee l = \sqrt{20}$$

Como se trata de uma medida, então $l > 0$, logo $l = \sqrt{20}$.

$[PDS]$ é um triângulo retângulo do qual conhecemos a hipotenusa ($\sqrt{20}$) e cujos catetos medem 2 e $(x - 2)$ respectivamente. Aplicando o teorema de Pitágoras, vamos calcular o valor de x :

$$\begin{aligned} (\sqrt{20})^2 &= 2^2 + (x-2)^2 \\ \Leftrightarrow 20 &= 4 + x^2 - 4x + 4 \\ \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 20 - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 12 &= 0 \\ a &= -1; b = 4; c = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times (-1) \times 12}}{2 \times (-1)} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{-2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{-2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-4 \pm 8}{-2} \\ \Leftrightarrow x &= 6 \vee x = -2 \end{aligned}$$

$x > 0$, pois corresponde à medida do lado do quadrado $[ABCD]$. Assim, $x = 6$.

Praticar – páginas 144 a 149

1. [D] $\pi^2x + 5x - 3 = 0$, pois não tem o termo em x de 2º grau.

2.

$$\begin{aligned} 2.1. \quad -5x &= -(x-3)(x+3) \\ \Leftrightarrow -5x &= -(x^2-9) \\ \Leftrightarrow -5x &= -x^2+9 \\ \Leftrightarrow -5x+x^2-9 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2-5x-9 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.2. \quad -5(x-3)^2 &= 30x-2 \\ \Leftrightarrow -5(x^2-6x+9) &= 30x-2 \\ \Leftrightarrow -5x^2+30x-45 &= 30x-2 \\ \Leftrightarrow -5x^2-45+2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -5x^2-43 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.3. \quad (-3w+4)^2-5 &= -3w \\ \Leftrightarrow 9w^2-24w+16-5+3w &= 0 \\ \Leftrightarrow 9w^2-21w+11 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.4. \quad 5x + \frac{2-(x-3)^2}{3} &= -1 \\ \Leftrightarrow \frac{15x}{3} + \frac{2-(x^2-6x+9)}{3} &= -\frac{3}{3} \\ \Leftrightarrow 15x+2-x^2+6x-9+3 &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^2+21x-4 &= 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 3.1. \quad x^2-8x+3 &= (x^2-8x)+3= \\ &= (x^2-8x+(-4)^2)-(-4)^2+3= \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \boxed{\frac{8}{2}=-4} \\ &= (x-4)^2-16+3= \\ &= (x-4)^2-13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2. \quad 2x^2-10x+1 &= 2(x^2-5x)+1= \\ &= 2x^2-5x+\frac{5^2}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2+1= \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \boxed{\frac{5}{2}} \\ &= 2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+1= \\ &= 2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{2}+1= \\ &= 2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{23}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.3. \quad 3x^2 - 15x - 4 &= 3(x^2 - 5x) - 4 = \\
 &= 3\left(x^2 - 5x + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - \left(-\frac{5}{2}\right)^2\right) - 4 = \\
 &\quad \uparrow \boxed{\frac{5}{2}} \\
 &= 3\left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right) - 4 = \\
 &= 3\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{75}{4} - 4 = \\
 &= 3\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{91}{4}
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 4.1. \quad 2(x-4)^2 &= 32 \\
 \Leftrightarrow (x-4)^2 &= 16 \\
 \Leftrightarrow x-4 &= \pm\sqrt{16} \\
 \Leftrightarrow x &= 4 \pm 4 \\
 \Leftrightarrow x &= 0 \vee x = 8 \\
 \text{C.S.} &= \{0, 8\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.2. \quad 3x^2 - 18x + 15 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 3(x^2 - 6x) &= -15 \\
 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + (-3)^2 - (-3)^2) &= -5 \\
 &\quad \uparrow \boxed{\frac{6}{2} = -3} \\
 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 &= -5 \\
 \Leftrightarrow (x-3)^2 &= 9 - 5 \\
 \Leftrightarrow (x-3)^2 &= 4 \\
 \Leftrightarrow x-3 &= \pm\sqrt{4} \\
 \Leftrightarrow x &= 3 \pm 2 \\
 \Leftrightarrow x &= 3 - 2 \vee x = 3 + 2 \\
 \Leftrightarrow x &= 1 \vee x = 5 \\
 \text{C.S.} &= \{1, 5\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.3. \quad x^2 - x - 6 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^2 - x &= 6 \\
 \Leftrightarrow \left(x^2 - x + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) &= 6 \\
 &\quad \uparrow \boxed{\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}} \\
 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} &= 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= 6 + \frac{1}{4} \\
 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} &= \pm\sqrt{\frac{25}{4}} \\
 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} &= -\frac{5}{2} \vee x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\
 \Leftrightarrow x &= -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \vee x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow x &= 2 \vee x = 3 \\
 \text{C.S.} &= \{2, 3\}
 \end{aligned}$$

5. As equações 2.1., 2.3. e 2.4. são equações do 2.º grau completas.

6.

$$\begin{aligned}
 6.1. \quad (2x-4)(x-3) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2x-4 &= 0 \vee x-3 = 0 \\
 \Leftrightarrow 2x &= 4 \vee x = 3 \\
 \Leftrightarrow x &= 2 \vee x = 3 \\
 \text{C.S.} &= \{2, 3\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.2. \quad (x-6)^2 &= -\frac{1}{3} \\
 \text{Equação impossível} \\
 \text{C.S.} &= \emptyset
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.3. \quad x^2 - 11x + 30 &= 0 \\
 a &= 1; b = -11; c = 30 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \times 1 \times 30}}{2 \times 1} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{2} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{11 \pm 1}{2} \\
 \Leftrightarrow x &= 5 \vee x = 6 \\
 \text{C.S.} &= \{5, 6\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.4. \quad x^2 - 3x &= -\frac{9}{4} \\
 a &= 1; b = -3; c = \frac{9}{4} \\
 \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times \left(\frac{9}{4}\right)}}{2 \times 1} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 9}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

6.5. $(2x-1)^2 - \frac{x-6}{3} = -2$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 - \frac{x-6}{3} = -\frac{6}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{12x^2 - 12x + 3}{3} - \frac{x-6}{3} = -\frac{6}{3}$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - 12x + 3 - x + 6 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - 13x + 15 = 0$$

$$a = 12; b = -13; c = 15$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \times 12 \times 15}}{2 \times 12}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 720}}{24}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{-551}}{24}$$

Equação impossível

$$\text{C.S.} = \{\}$$

20 7.

7.1. $\Delta = b^2 - 4ac$ $\left\{ \begin{array}{l} \Delta = (-2)^2 - 4 \times 8 \times (-1) \\ a = 8, b = -2, \\ c = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \Delta = 4 + 32 \Leftrightarrow \Delta = 36$

Como $\Delta > 0$, então a equação tem duas soluções distintas.

7.2. $8x^2 - 2x - 1 = 0$

$$a = 8; b = -2; c = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 8 \times (-1)}}{2 \times 8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{16}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 6}{16}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{16} \vee x = \frac{8}{16}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \vee x = \frac{1}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\}$$

8. Como $y = 2x^2 - 5x$ e $y = 12$ temos:

$$2x^2 - 5x = 12$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 12 = 0$$

$$a = 2; b = -5; c = -12$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 2 \times (-12)}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 11}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{6}{4} \vee x = \frac{16}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = 4$$

Quando $y = 12$, x pode tomar o valor $-\frac{3}{2}$ ou o valor 4.

9. [C] Nessa equação, $b^2 - 4ac = 0$.

10.

10.1. $x^2 - 12x + 6 = 0$

Soma = 12 e Produto = 6

10.2. $6x^2 - 6x - 180 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 30 = 0$

Soma = 1 e Produto = -30

11.

11.1. É possível aplicar a fórmula resolvente simplificada nas equações II. e III. pois são equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) nas quais b é um número par.

11.2. II. $-x^2 - 4x + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\left(\frac{-4}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-1) \times 6}}{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{4 + 6}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{10}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -2 - \sqrt{10}, -2 + \sqrt{10} \right\}$$

III. $2x^2 - 18x + 70 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\left(\frac{-18}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-18}{2}\right)^2 - 2 \times 70}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 140}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{-59}}{2}$$

Equação impossível

$$\text{C.S.} = \{\}$$

12.

12.1. Consideremos uma equação do 2.º grau escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Para que a equação seja impossível basta garantir que o binómio discriminante seja negativo, ou seja, $b^2 - 4ac < 0$. Por exemplo, se $a = 2$, $b = 5$ e $c = 6$, temos:

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 6 = -1$$

Uma equação do 2.º grau impossível poderá ser, por exemplo, $2x^2 + 5x + 6 = 0$.

12.2. $(x + 4)(x - 6) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 4x - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$$

Uma equação do 2.º grau que admita as soluções -4 e 6 poderá ser, por exemplo, $x^2 - 2x - 24 = 0$.

12.3. Uma equação do 2.º grau que admita como solução única o 5 tem uma solução dupla: o número 5.

$$(x - 5)(x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 5x + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$$

A equação poderá ser, por exemplo, $x^2 - 10x + 25 = 0$.

13. Seja x o número negativo que procuramos:

$$2x^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \vee \quad x = 2$$

Como procuramos um número negativo, $x = -2$.

20 14. Seja l a medida do lado desse quadrado:

$$A = l^2$$

$$l^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow l = \pm\sqrt{100}$$

$$\Leftrightarrow l = -10 \quad \vee \quad l = 10$$

$l > 0$, pois representa a medida do lado do quadrado, logo esse quadrado tem 10 cm de lado.

20 15. Vamos começar por calcular o raio desse círculo para, posteriormente, calcular o seu perímetro:

$$A_{\circ} = \pi \times r^2$$

$$\pi \times r^2 = 156\pi$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 156$$

$$\Leftrightarrow r = -\sqrt{156} \quad \vee \quad r = \sqrt{156}$$

Como $r > 0$, $r = \sqrt{156}$.

$$\text{Como } P_{\circ} = 2\pi r, P = 2\pi\sqrt{156}.$$

R.: O círculo tem $(2\pi\sqrt{156})$ cm de perímetro.

16. Seja $2n$ um número par, com $n > 0$. Então, $2n$ e $2n + 2$ são números pares consecutivos.

$$2n(2n+2) = 1848$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 4n - 1848 = 0$$

$$a = 4; b = 4; c = -1848$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \times 4 \times 1848}}{2 \times 4}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 29568}}{8}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-4 \pm \sqrt{29584}}{8}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-4 \pm 172}{8}$$

$$\Leftrightarrow n = -22 \quad \vee \quad n = 21$$

Como $n > 0$, então $n = 21$.

$$2n = 2 \times 21 = 42 \text{ e } 2n + 2 = 42 + 2 = 44$$

R.: Os números pares consecutivos são o 42 e o 44.

17. Do referido retângulo sabemos que tem x cm de largura e $(x + 10)$ cm de comprimento. Além disso, sabemos que a sua diagonal mede 50 cm.

A diagonal de um retângulo divide-o em dois triângulos retângulos: a hipotenusa mede 50 cm e os catetos medem x cm e $(x + 10)$ cm. Calculemos x aplicando o teorema de Pitágoras.

$$x^2 + (x + 10)^2 = 50^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 20x + 100 = 2500$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 20x + 100 - 2500 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 20x - 2400 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 1200 = 0$$

$$a = 1; b = 10; c = -1200$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \times 1 \times (-1200)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 4800}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{4900}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm 70}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -40 \quad \vee \quad x = 30$$

$x > 0$, pois corresponde à largura do retângulo, logo $x = 30$.

R.: O retângulo tem 30 cm de largura e 40 cm de comprimento.

20 18.

- 18.1. O avião foi lançado no instante inicial, ou seja, quando $t = 0$. Vamos calcular a altura do avião nesse instante:

$$h(0) = -\frac{2}{3} \times 0^2 + \frac{4}{3} \times 0 + 2$$

$$\Leftrightarrow h(0) = 2$$

R.: O avião foi lançado de uma altura de 2 m.

- 18.2. Vamos calcular quanto tempo decorreu desde que o avião foi lançado até ao momento em que tocou no chão.

$$-\frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{3}t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2t^2 + 4t + 6 = 0$$

$$a = -2; b = 4; c = 6$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times (-2) \times 6}}{2 \times (-2)}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-4 \pm 8}{-4}$$

$$\Leftrightarrow t = 3 \vee t = -1$$

Como $t > 0$, então $t = 3$.

R.: O avião manteve-se no ar durante 3 segundos.

19. Seja s a idade do Sebastião. Então:

$$s^2 - 4s = 192$$

$$a = 1; b = -4; c = -192$$

$$\Leftrightarrow s^2 - 4s - 192 = 0$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times (-192)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 768}}{2}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{4 \pm \sqrt{784}}{2}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{4 \pm 28}{2}$$

$$\Leftrightarrow s = -12 \vee s = 16$$

Como $s > 0$, então $s = 16$.

R.: O Sebastião tem 16 anos.

20. Sejam n e $n + 1$ os números positivos, inteiros e consecutivos que procuramos:

$$n(n+1) = 1056$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 1056 = 0$$

$$a = 1; b = 1; c = -1056$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-1056)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4224}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm 65}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -33 \vee n = 32$$

Como $n > 0$, $n = 32$.

R.: Os números são o 32 e o 33.

21. Existindo triângulos nestas condições, os seus lados terão comprimento n , $n + 1$ e $n + 2$. Além disso, verificar-se-á o teorema de Pitágoras:

$$(n+2)^2 = n^2 + (n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 4n + 4 = n^2 + n^2 + 2n + 1$$

$$\Leftrightarrow -n^2 + 2n + 3 = 0$$

$$a = -1; b = 2; c = 3$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 3}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm 4}{-2}$$

$$\Leftrightarrow n = 3 \vee n = -1$$

Como $n > 0$, pois é um comprimento, $n = 3$.

Só existe um triângulo nessas condições e os seus lados medem 3, 4 e 5 unidades de comprimento.

22.

22.1. $f(3) = 3^2 - 5 \times 3$

$$\Leftrightarrow f(3) = 9 - 15$$

$$\Leftrightarrow f(3) = -6$$

22.2. $f(x) = -6$
 $\Leftrightarrow x^2 - 5x = -6$
 $a = 1; b = -5; c = 6$
 $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2}$
 $\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$

20 23. Vamos calcular a área da zona de campismo:
 $A = 30 \times 50 \Leftrightarrow a = 1500 \text{ m}^2$
 A zona de segurança tem, também, 1500 m^2 .
 Supondo que a largura dessa zona é $x \text{ m}$, vamos decompor a zona em quatro retângulos: dois deles têm 50 m de comprimento e $x \text{ m}$ de largura e os outros dois têm $(30 + 2x) \text{ m}$ de altura e $x \text{ m}$ de largura.

$$2(50x) + 2((30 + 2x)x) = 1500$$

$$\Leftrightarrow 100x + 2x(30 + 2x) = 1500$$

$$\Leftrightarrow 100x + 60x + 4x^2 - 1500 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 160x - 1500 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 40x - 375 = 0$$

$$a = 1; b = 40; c = -375$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \times 1 \times (-375)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 - 1500}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-40 \pm \sqrt{3100}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-40 - \sqrt{3100}}{2} \vee x = \frac{-40 + \sqrt{3100}}{2}$$

Como $x > 0$, pois é uma medida, $x = \frac{-40 + \sqrt{3100}}{2}$

Ora, $\frac{-40 + \sqrt{3100}}{2} \approx 7,84 \text{ (2 c.d.)}$.

R.: A zona de segurança tem, aproximadamente, $7,84 \text{ m}$ de largura.

24. Consideremos os números a e b :

$$\begin{cases} a + b = 56 \\ ab = 663 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 56 - b \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b(56 - b) = 663 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b^2 + 56b - 663 = 0 \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-56 \pm \sqrt{56^2 - 4 \times (-1) \times (-663)}}{2 \times (-1)} \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-56 \pm \sqrt{3136 - 2652}}{-2} \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-56 \pm \sqrt{484}}{-2} \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-56 \pm 22}{-2} \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 39 \vee b = 17 \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 17 \vee \\ b = 39 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 39 \\ b = 17 \end{cases}$$

R.: Os números são o 17 e o 39.

25.

25.1. $\frac{100(100 + 1)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$

25.2. $\frac{n(n + 1)}{2} = 1653$

$$\Leftrightarrow n^2 + n = 3306$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 3306 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-3306)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 13\,224}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{13\,225}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm 115}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -58 \vee n = 57$$

Como n é positivo, temos que adicionar 57 números naturais para obtermos a soma 1653.

20 26.

26.1. Cálculos auxiliares:

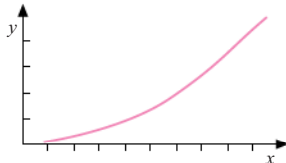
$$\begin{aligned} \bullet \quad 12,5 &= \frac{v^2}{100} \times \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{v^2}{200} &= 12,5 \\ \Leftrightarrow v^2 &= 2500 \\ \Leftrightarrow v &= \pm \sqrt{2500} \\ \Leftrightarrow v &= -50 \vee v = 50 \end{aligned}$$

Como $v > 0$, $v = 50$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad D_t &= \left(\frac{90}{10}\right)^2 \times \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow D_t &= 9^2 \times \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow D_t &= \frac{81}{2} \\ \Leftrightarrow D_t &= 40,5 \\ \bullet \quad 78 &= \frac{v^2}{100} \times \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{v^2}{200} &= 78 \\ \Leftrightarrow v^2 &= 15600 \\ \Leftrightarrow v &= \pm \sqrt{15600} \\ \Leftrightarrow v &= -\sqrt{15600} \vee v = \sqrt{15600} \\ \text{Como } v > 0, v &= \sqrt{15600} \approx 124,9 \end{aligned}$$

Velocidade (v) (km/h)	30	50	70	90	110	$\approx 124,9$
Distância de travagem (D_t) (metros)	4,5	12,5	24,5	40,5	60,5	78

26.2.



26.3. Vamos calcular a velocidade do condutor para podermos determinar se tem razão ou não:

$$\begin{aligned} \bullet \quad 20 &= \frac{v^2}{100} \times \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{v^2}{200} &= 20 \\ \Leftrightarrow v^2 &= 4000 \\ \Leftrightarrow v &= \pm \sqrt{4000} \\ \Leftrightarrow v &\approx -63,25 \vee v \approx 63,25 \\ \text{Como } v > 0, v &\approx 63,25. \end{aligned}$$

O condutor circulava a, aproximadamente 63,25 km/h, portanto encontrava-se em excesso de velocidade. As testemunhas têm razão.

27. Sabendo que no saco apenas existem bolas pretas e bolas brancas, podemos dizer que $P(\text{"a bola retirada é branca"}) + P(\text{"a bola retirada é preta"}) = 1$
Assim:

$$x^2 - 0,4x - 0,3x + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 0,7x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 0,7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 0,7$$

$x > 0$, pois $P(\text{"a bola retirada é branca"}) > 0$.

Logo,

$$P(\text{"a bola retirada é branca"}) = 0,7^2 - 0,4 \times 0,7 = 0,21$$

$$P(\text{"a bola retirada é preta"}) = -0,3 \times 0,7 + 1 = 0,79$$

R.: O saco contém 79 bolas pretas e 21 bolas brancas.

28.

28.1. $L(38) = 250(38 - 30)(90 - 38)$

$$\Leftrightarrow L(38) = 250 \times 8 \times 52$$

$$\Leftrightarrow L(38) = 104\,000$$

R.: A empresa tem 104 000 € de lucro.

28.2. $250(x - 30)(90 - x) = 225\,000$

$$\Leftrightarrow 90x - x^2 - 2700 + 30x = 900$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 120x - 3600 = 0$$

$$a = -1; b = 120; c = -3600$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-120 \pm \sqrt{120^2 - 4 \times (-1) \times (-3600)}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-120 \pm \sqrt{14\,400 - 14\,400}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-120 \pm 0}{-2} \Leftrightarrow x = 60$$

R.: A empresa tem de vender 60 000 parafusos.

29.

Seja l o comprimento do lado do quadrado Q . Então, a sua área será l^2 .

Do retângulo R sabe-se que tem $(l + 15)$ cm de comprimento, $(l - 6)$ cm de largura e l^2 cm² de área. Vamos calcular l :

$$(l + 15)(l - 6) = l^2$$

$$\Leftrightarrow l^2 - 6l + 15l - 90 = l^2$$

$$\Leftrightarrow 9l = 90$$

$$\Leftrightarrow l = 10$$

Conhecendo o valor de l , podemos dizer que o retângulo tem 25 cm de comprimento e 4 cm de largura. Agora podemos calcular o seu perímetro:

$$P = 25 + 25 + 4 + 4 \Leftrightarrow P = 58$$

R.: O retângulo R tem 58 cm de perímetro.

30. Como o triângulo $[EBF]$ é isósceles, podemos garantir que $\overline{BF} = x$.

Relativamente ao trapézio sabemos que tem $(x + 1)$ cm de altura, a base maior tem $(7 + x)$ cm e a base menor tem $(2 + x)$ cm. Vamos calcular x , sabendo que a área do trapézio é 30 cm^2 .

Sabemos que:

$$A_T = \frac{(x+7) + (2+x)}{2} \times (x+1)$$

$$A_T = 30$$

Logo:

$$\frac{(x+7) + (2+x)}{2} \times (x+1) = 30$$

$$\Leftrightarrow (2x+9)(x+1) = 60$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 9x + 9 - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 11x - 51 = 0$$

$$a = 2; b = 11; c = -51$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \times 2 \times (-51)}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 408}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{529}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-11 \pm 23}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -8,5 \vee x = 3$$

$x > 0$, pois é a medida de dois dos lados do triângulo $[EBF]$, logo $x = 3$.

Vamos calcular a área do triângulo $[EBF]$:

$$A_{[EBF]} = \frac{x^2}{2} \text{ e } x = 3.$$

$$\text{Logo, } A_{[EBF]} = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$$

A área da zona sombreada corresponde à diferença entre a área do trapézio e a área do triângulo.

Assim:

$$A_{\text{zona sombreada}} = 30 - 4,5 = 25,5$$

R.: A zona sombreada tem $25,5 \text{ cm}^2$ de área.

31.

$$31.1. \quad 2s + 2r + 2s = 10$$

$$\Leftrightarrow 4s = 10 - 2r$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{10}{4} - \frac{2r}{4}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{5}{2} - \frac{r}{2}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}r$$

$$31.2. \quad A_{3 \text{ círculos}} = 2(\pi \times s^2) + \pi r^2 =$$

$$= 2\pi \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}r \right)^2 + \pi r^2 =$$

$$= 2\pi \left(\frac{25}{4} - \frac{5}{2}r + \frac{1}{4}r^2 \right) + \pi r^2 =$$

$$= \frac{25}{2}\pi - 5\pi r + \frac{1}{2}\pi r^2 + \pi r^2 =$$

$$= \frac{25}{2}\pi - 5\pi r + \frac{1}{2}\pi r^2 + \pi r^2 =$$

$$\frac{3}{2}\pi r^2 - 5\pi r + \frac{25}{2}\pi$$

$$31.3. \quad \text{Se } r = 2, A_{3 \text{ círculos}} =$$

$$= \frac{3}{2}\pi \times 2^2 - 5\pi \times 2 + \frac{25}{2}\pi =$$

$$= 6\pi - 10\pi + \frac{25}{2}\pi = \frac{17}{2}\pi$$

$$31.4. \quad A = 20\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\pi r^2 - 5\pi r + \frac{25}{2}\pi = 20\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\pi r^2 - 5\pi r + \frac{25}{2}\pi - 20\pi = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\pi r^2 - 5\pi r - \frac{15}{2}\pi = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}r^2 - 5r - \frac{15}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3r^2 - 10r - 15 = 0$$

$$a = 3; b = -10; c = -15$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times 3 \times (-15)}}{2 \times 3}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{10 \pm \sqrt{280}}{6}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{10 - \sqrt{280}}{6} \vee r = \frac{10 + \sqrt{280}}{6}$$

$$\text{Como } r > 0, r = \frac{10 + \sqrt{280}}{6}.$$

Assim, $r \approx 4,46$ (2 c.d.).

- 32.** A equação terá uma solução dupla quando o binômio discriminante ($b^2 - 4ac$) for igual a zero. Na equação dada, $a = k$, $b = -10k - 6$ e $c = 108$.

$$\begin{aligned} (-10k - 6)^2 - 4 \times k \times 108 &= 0 \\ \Leftrightarrow 100k^2 + 120k + 36 - 432k &= 0 \\ \Leftrightarrow 100k^2 - 312k + 36 &= 0 \\ \Leftrightarrow 25k^2 - 78k + 9 &= 0 \end{aligned}$$

$$a = 25; b = -78; c = 9$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-(-78) \pm \sqrt{(-78)^2 - 4 \times 25 \times 9}}{2 \times 25}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{78 \pm \sqrt{6084 - 900}}{50}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{78 \pm \sqrt{5184}}{50}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{78 \pm 72}{50}$$

$$\Leftrightarrow k = 0,12 \vee k = 3$$

$$\text{C.S.} = \{0,12; 3\}$$

A equação terá uma solução dupla se k tomar o valor 0,12 ou o valor 3.

- 33.** Sejam n e $n + 1$ os dois números inteiros consecutivos.

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} &= (n+1)^2 - 153 \\ \Leftrightarrow \frac{n^2 + n}{2} &= n^2 + 2n + 1 - 153 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n = 2(n^2 + 2n - 152)$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n = 2n^2 + 4n - 304$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 2n^2 - 4n + 304 = 0$$

$$\Leftrightarrow -n^2 - 3n + 304 = 0$$

$$a = -1; b = -3; c = 304$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times (-1) \times 304}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 1216}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{1225}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{3 \pm 35}{-2}$$

$$\Leftrightarrow n = 16 \vee n = -19$$

Se $n = -19$, então $n + 1 = -18$.

Se $n = 16$, então $n + 1 = 17$.

Os números que satisfazem a condição do enunciado são o -19 e o -18 ou o 16 e o 17.

- 34.** Seja x a medida do lado do terreno quadrangular original do Sr. Manuel. O terreno redimensionado é retangular e tem $(x - 2)$ m de largura, $(x + 4)$ m de comprimento e 112 m^2 de área. Vamos calcular o valor de x e posteriormente calcular a área do terreno original.

$$(x + 4)(x - 2) = 112$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 4x - 8 - 112 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 120 = 0$$

$$a = 1; b = 2; c = -120$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-120)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 480}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{484}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 22}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -12 \vee x = 10$$

Como $x > 0$, pois é a medida do lado do quadrado, então $x = 10$.

Vamos calcular a área do terreno original:

$$A_{\square} = 10 \times 10 \Leftrightarrow A_{\square} = 100 \text{ m}^2$$

Se o terreno original tinha 100 m^2 e o terreno redimensionado tem 112 m^2 , então o Sr. Manuel ficou a ganhar com o negócio.

- 35.** Consideremos que o terreno tem x m de largura e y m de comprimento. De acordo com a figura e sabendo que um dos lados do terreno confina com o lago, os três lados restantes que são vedados com a rede correspondem a $2x + y$.

$$\begin{cases} 2x + y = 90 \\ xy = 700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 90 - 2x \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(90 - 2x) = 700 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 90x - 2x^2 - 700 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 45x - 350 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-45 \pm \sqrt{45^2 - 4 \times (-1) \times (-350)}}{2 \times (-1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-45 \pm 25}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-45 - 25}{-2} \\ y = \frac{-45 + 25}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35 \\ x = 10 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 90 - 70 \\ y = 70 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 35 \\ x = 10 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 20 \\ y = 70 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 10 \\ x = 10 \end{cases}$$

R.: O terreno tem 20 m de comprimento e 35 m de largura ou tem 70 m de comprimento e 10 m de largura.

20 36.

36.1. a) $t = 0$

$$\begin{aligned} h(0) &= -0,75(0 - 1)^2 + 3 \\ \Leftrightarrow h(0) &= -0,75 \times (-1)^2 + 3 \\ \Leftrightarrow h(0) &= -0,75 \times 1 + 3 \\ \Leftrightarrow h(0) &= -0,75 + 3 \\ \Leftrightarrow h(0) &= 2,25 \end{aligned}$$

R.: No momento do lançamento, a bola encontrava-se a 2,25 m do solo.

b) $t = 1$

$$\begin{aligned} h(1) &= -0,75(1 - 1)^2 + 3 \\ \Leftrightarrow h(1) &= -0,75 \times 0^2 + 3 \\ \Leftrightarrow h(1) &= -0,75 \times 0 + 3 \\ \Leftrightarrow h(1) &= 0 + 3 \\ \Leftrightarrow h(1) &= 3 \end{aligned}$$

R.: Um segundo após o lançamento, a bola encontrava-se a 3 m do solo.

36.2. Sabemos que $h(t) = 2,25$ e que $h(t) = -0,75(t - 1)^2 + 3$. Logo,

$$\begin{aligned} -0,75(t - 1)^2 + 3 &= 2,25 \\ \Leftrightarrow -0,75(t^2 - 2t + 1) + 0,75 &= 0 \\ \Leftrightarrow 0,75t^2 + 1,5t - 0,75 + 0,75 &= 0 \\ \Leftrightarrow t(-0,75t + 1,5) &= 0 \\ \Leftrightarrow t = 0 \vee -0,75t + 1,5 &= 0 \\ \Leftrightarrow t = 0 \vee -0,75t &= -1,5 \\ \Leftrightarrow t = 0 \vee t &= 2 \end{aligned}$$

A bola encontra-se duas vezes a 2,25 m de altura. A primeira vez é no instante em que é lançada (ver alínea anterior) e a segunda é passados 2 segundos.

36.3. Quando a bola toca o solo, sem atingir o cesto (portanto a trajetória não tem "obstáculos"), a altura é zero, ou seja, $h(t) = 0$.

$$\begin{aligned} -0,75(t - 1)^2 + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow -0,75(t^2 - 2t + 1) + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow -0,75t^2 + 1,5t - 0,75 + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow -0,75t^2 + 1,5t + 2,25 &= 0 \\ \Leftrightarrow -t^2 + 2t + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times (-1) \times 3}}{2 \times (-1)} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{-2 \pm 4}{-2} \\ \Leftrightarrow t &= 3 \vee t = -1 \end{aligned}$$

Como $t > 0$, sabemos que ao fim de três segundos a bola toca no solo.

37.

37.1. O ponto P pertence à reta r representada e, como qualquer ponto dessa reta, as suas coordenadas podem ser representadas genericamente por $(x, x + 2)$.

37.2. $\overline{AO} = x$ e $\overline{AP} = x + 2$, logo vamos calcular x sabendo que a área do triângulo é de 12 m².

$$\begin{aligned} A_{\text{Triângulo}} &= \frac{b \times h}{2} \\ A_{\text{Triângulo}} &= \frac{\overline{AO} \times \overline{AP}}{2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{x(x + 2)}{2} &= 12 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x &= 24 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-24)}}{2 \times 1} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-2 \pm 10}{2} \\ \Leftrightarrow x &= -6 \vee x = 4 \end{aligned}$$

Como a abscissa dos pontos A e P é positiva, logo $x = 4$.

Assim, $A(4, 0)$ e $P(4, 6)$.

- 20 38.** Consideremos x o lado do quadrado maior e y o lado do quadrado menor. Pelos dados do enunciado, o perímetro do terreno pode ser traduzido por $4x + 2y$ e a área do terreno pode ser traduzida por $x^2 + y^2$.

Assim:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 296 \\ 4x + 2y = 76 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ 2y = 76 - 4x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ y = 38 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (38 - 2x)^2 = 296 \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1444 - 152x + 4x^2 - 296 = 0 \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 152x + 1148 = 0 \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-(-152) \pm \sqrt{(-152)^2 - 4 \times 5 \times 1148}}{2 \times 5} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{152 \pm \sqrt{23\,104 - 22\,960}}{10} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{152 \pm \sqrt{144}}{10} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{152 \pm 12}{10} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{152 - 12}{10} \vee x = \frac{152 + 12}{10} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \vee x = 16,4 \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = 38 - 2 \times 14 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 16,4 \\ y = 38 - 2 \times 16,4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = 10 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 16,4 \\ y = 5,2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$14 + 10 = 24 \text{ e } 16,4 + 5,2 = 21,6$$

O lado maior do terreno mede $x + y$, ou seja, poderá medir 24 m ou 21,6 m.

Praticar para a prova final – páginas 150 e 151

1. $(x - 2)^2 - 9 = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 9$
 $\Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{9}$
 $\Leftrightarrow x - 2 = \pm 3$
 $\Leftrightarrow x = 2 - 3 \vee x = 2 + 3$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5$
 C.S. = $\{-1, 5\}$

20 2. $x(x - 1) + 2x = 6 - 4x^2$
 $\Leftrightarrow x^2 - x + 2x - 6 + 4x^2 = 0$
 $\Leftrightarrow 5x^2 + x - 6 = 0$
 $a = -1; b = 5; c = 6$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 5 \times (-6)}}{2 \times 5}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{10}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{10}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 11}{10}$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{6}{5} \vee x = 1$
 C.S. = $\left\{-\frac{6}{5}, 1\right\}$

3. $(x + 3)^2 - 3 = 2x^2 + x$
 $\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - 3 - 2x^2 - x = 0$
 $\Leftrightarrow -x^2 + 5x + 6 = 0$
 $a = -1; b = 5; c = 6$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times (-1) \times 6}}{2 \times (-1)}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{-2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{-2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 7}{-2}$
 $\Leftrightarrow x = 6 \vee x = -1$
 C.S. = $\{-1, 6\}$

4. $x(x-3) + 2x = 6$
 $\Leftrightarrow x(x-3) + 2x - 6 = 0$
 $\Leftrightarrow x(x-3) + 2(x-3) = 0$
 $\Leftrightarrow (x+2)(x-3) = 0$
 $\Leftrightarrow x+2 = 0 \vee x-3 = 0$
 $\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$
 C.S. = $\{-2, 3\}$

5. $x(-2x-3) = 1$
 $\Leftrightarrow -2x^2 - 3x - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$
 $a = 5; b = 4; c = -1$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{4}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{4}$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{2}$
 C.S. = $\left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$

6. $6x^2 + 2x = 5 + x$
 $\Leftrightarrow 6x^2 + 2x - 5 - x = 0$
 $\Leftrightarrow 6x^2 + x - 5 = 0$
 $a = 6; b = 1; c = -5$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 6 \times (-5)}}{2 \times 6}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{12}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{12}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 11}{12}$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{5}{6}$
 C.S. = $\left\{-1, \frac{5}{6}\right\}$

7. $4(x^2 + x) = 1 - x^2$
 $\Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 1 + x^2 = 0$
 $\Leftrightarrow 5x^2 + 4x - 1 = 0$
 $a = 5; b = 4; c = -1$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 5 \times (-1)}}{2 \times 5}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{10}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{10}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 6}{10}$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{5}$
 C.S. = $\left\{-1, \frac{1}{5}\right\}$

8. $2(x^2 - 1) = 3x$
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 2 - 3x = 0$
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$
 $a = 2; b = -3; c = -2$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{4}$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$
 C.S. = $\left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$

9. $x + (x-1)^2 = 3$
 $\Leftrightarrow x + (x^2 - 2x + 1) - 3 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$
 $a = 1; b = -1; c = -2$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2}$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$
C.S. = $\{-1, 2\}$

10. $\frac{x^2-1}{3} = 1-x$
 $\Leftrightarrow x^2 - 1 = 3(1-x)$
 $\Leftrightarrow x^2 - 1 - 3 + 3x = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$
 $a = 1; b = 3; c = -4$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{2}$
 $\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$
C.S. = $\{-4, 1\}$

20 11. $3(x-1)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x-1 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1$
C.S. = $\{1\}$
Duas equações equivalentes têm o mesmo conjunto-solução.

[A] $x^2 - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 = 1$
 $\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{1}$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$
C.S. = $\{-1, 1\}$

[B] $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x-1 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1$
C.S. = $\{1\}$

[C] $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ Impossível
C.S. = $\{\}$

[D] $x^2 + 2x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x+1 = 0$
 $\Leftrightarrow x = -1$
C.S. = $\{-1\}$

A equação [B] é equivalente à dada.

12. $x^2 = 2(4-x)$
 $\Leftrightarrow x^2 = 8-2x$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$
 $a = 1; b = 2; c = -8$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2 \times 1}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 6}{2}$
 $\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 2$
C.S. = $\{-4, 2\}$

20 Testar – páginas 156 e 157

1.
 - 1.1. Por exemplo, $5x^2 + 2x - 10 = 0$.
 - 1.2. Por exemplo, $2x^2 + 7x = 0$.
 - 1.3. Por exemplo, $2x^2 - 12x + 5 = 0$.
 - 1.4. Para uma equação do 2.º grau admitir uma solução dupla, o seu binómio discriminante ($b^2 - 4ac$) deve ser igual a zero. Por exemplo, se $a = 1$, $b = 12$ e $c = 36$, temos que $12^2 - 4 \times 1 \times 36 = 144 - 144 = 0$.
Por exemplo, $x^2 + 12x = -36$.
 - 1.5. Por exemplo, $x^2 = -10$.
 - 1.6. Vamos calcular a soma e o produto das soluções:
 $-3 + 6 = 3$ e $-3 \times 6 = -18$.
Por exemplo, $x^2 - 3x - 18 = 0$.

2.

2.1. Lei do anulamento do produto.

2.2. $x^2 - 16x = 0$

$a = 1; b = -16; c = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \times 1 \times 0}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{256}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{16 \pm 16}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 16$$

$$\text{C.S.} = \{0, 16\}$$

3.

3.1. I. $25x^2 - 16 = 0$

$a = 25; b = 0; c = -16$

$$\Leftrightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \times 25 \times (-16)}}{2 \times 25}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{1600}}{50}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{0 \pm 40}{50}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-40}{50} \vee x = \frac{40}{50}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{5} \vee x = \frac{4}{5}$$

$$\text{C.S.} = \left\{-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right\}$$

II. $3x^2 + 4x = 0$

$a = 3; b = 4; c = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 3 \times 0}}{2 \times 3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 0}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 4}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{6} \vee x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \vee x = 0$$

$$\text{C.S.} = \left\{-\frac{4}{3}, 0\right\}$$

III. $x^2 - 2x - 3 = 0$

$a = 1; b = -2; c = -3$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

$$\text{C.S.} = \{-1, 3\}$$

3.2. I. $25x^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow 25x^2 = 16$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{25}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{5} \vee x = \frac{4}{5}$$

$$\text{C.S.} = \left\{-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right\}$$

II. $3x^2 + 4x = 0$

$\Leftrightarrow x(3x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee 3x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee 3x = -4$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{4}{3}$$

$$\text{C.S.} = \left\{-\frac{4}{3}, 0\right\}$$

III. $x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 3 = 1$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow x - 1 = \pm \sqrt{4}$

$\Leftrightarrow x - 1 = \pm 2$

$\Leftrightarrow x = 1 - 2 \vee x = 1 + 2$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

$$\text{C.S.} = \{-1, 3\}$$

4. A opção [C] é falsa, pois todas as equações do 2º grau podem ser resolvidas utilizando a fórmula resolvente, independentemente de serem completas ou não. Neste caso, seria $b = 0$ e $c = 0$.

5. Vamos calcular o binómio discriminante ($b^2 - 4ac$):
 $(-4)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 16 - 24 = -8$
 Como o binómio discriminante é menor do que zero, podemos concluir que a equação é impossível.

6. Sabemos que $A_T = \frac{(2x+3)(x+2)}{2}$ e que $A_T = 60 \text{ m}^2$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{(2x+3)(x+2)}{2} &= 60 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 3x + 6 &= 120 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 7x - 114 &= 0 \\ a &= 2; b = 7; c = -114 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 2 \times (-114)}}{2 \times 2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 912}}{4} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-7 \pm \sqrt{961}}{4} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-7 \pm 31}{4} \\ \Leftrightarrow x &= -9,5 \vee x = 6 \end{aligned}$$

Como x não pode tomar o valor negativo, pois a medida dos lados de um triângulo é positiva, então $x = 6$.

7. Vamos calcular as coordenadas dos pontos A e B que correspondem aos pontos de interseção entre as duas funções representadas.

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 \\ y = x - 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 = x - 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 - 2x + 8 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 8}}{2 \times (-1)} \end{cases} & \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{-2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{-2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \pm 6}{-2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \vee x = -4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -8 \\ x = -4 \end{cases} & \end{aligned}$$

As coordenadas dos pontos A e B são $A(2, -2)$ e $B(-4, -8)$. Consideremos também o ponto $Q(0, -4)$, que é o ponto de interseção entre a reta representada e o eixo das ordenadas.

Assim, a área do triângulo $[AOB]$ corresponde à soma das áreas dos triângulos $[AOQ]$ e $[OQB]$. Relativamente ao triângulo $[AOQ]$ sabemos que a base tem 4 unidades (pois a ordenada do ponto Q é -4) e a altura tem 2 unidades (a abcissa do ponto A é 2). Relativamente ao triângulo $[OQB]$ sabemos que a base tem 4 unidades (a ordenada do ponto Q é -4) e a altura tem 4 unidades (a abcissa do ponto B é -4).

$$\text{Então, } A_{[AOQ]} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

$$A_{[OQB]} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

$$A_{[AOB]} = 4 + 8 = 12 \text{ u.a.}$$

R.: O triângulo $[AOB]$ tem 12 u.a.

8.

- 8.1. Cada um dos quadrados tem x cm de lado. Os triângulos têm $(14 - 2x)$ cm de base e $(5 - x)$ cm de altura.

$$\begin{aligned} A_{\text{quadrado}} &= x^2 \\ A_{\text{triângulo}} &= \frac{(14 - 2x)(5 - x)}{2} = \\ &= \frac{70 - 10x - 14x + 2x^2}{2} \\ &= 35 - 12x + x^2 \\ A_{\text{total}} &= 2(35 - 12x + x^2) + 4x^2 = \\ &= 70 - 24x + 2x^2 + 4x^2 = 6 \\ &= 6x^2 - 24x + 70 \end{aligned}$$

A área da parte em metal da placa decorativa é dada, em função de x , por:

$A(x) = 6x^2 - 24x + 70$, como queríamos demonstrar.

- 8.2. a) $6x^2 - 24x + 70 = 70$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 24x = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x = 0 \vee x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

$$\text{C.S.} = \{0, 4\}$$

Sabemos que $x \in]0, 5[$, logo $x = 4$.

- b) $A_{[ABCD]} = 14 \times 10 = 140 \text{ cm}^2$

Se a área em metal é igual à área da parte em madeira, então cada uma das partes terá 70 cm^2 de área. Deste modo, estamos na situação da alínea anterior, a qual já sabemos ser satisfeita quando $x = 4$.

Volume 2

Unidade 4 – Geometria

Aplicar – página 7

1.

- 1.1. As figuras A, B, D e E representam polígonos.
- 1.2. Os polígonos B e E são regulares.
- 1.3. A – quadrilátero; B – heptágono; D – quadrilátero; E – triângulo
- 1.4. A – côncavo; B – convexo; D – convexo; E – convexo

2.

$$2.1. A_{\text{Polígono}} = \frac{P}{2} \times ap$$

$$P = 5 \times 4,4 = 22$$

Logo,

$$A_{\text{Polígono}} = \frac{22}{2} \times 3 =$$

$$= 11 \times 3 =$$

$$= 33$$

$$\text{Logo, } A = 33 \text{ cm}^2.$$

$$2.2. A_{\text{Polígono}} = \frac{P}{2} \times ap$$

$$P = 6 \times 6 = 36$$

Logo,

$$A_{\text{Polígono}} = \frac{36}{2} \times 5,2 =$$

$$= 18 \times 5,2 =$$

$$= 93,6$$

$$\text{Logo, } A = 93,6 \text{ cm}^2.$$

$$2.3. A_{\text{Polígono}} = \frac{P}{2} \times ap$$

$$A_{\text{Polígono}} = \frac{168}{2} \times 24,9 =$$

$$= 84 \times 24,9 =$$

$$= 2091,6$$

$$\text{Logo, } A = 2091,6 \text{ cm}^2.$$

$$3. P = 5 \times 3 = 15$$

$$A_{\text{Polígono}} = \frac{P}{2} \times ap$$

Como a medida do comprimento do apótema do polígono é igual à medida do comprimento do raio da circunferência,

$$A_{\text{Polígono}} = \frac{15}{2} \times 2,06 =$$

$$= 7,5 \times 2,06 =$$

$$= 15,45$$

$$\text{Logo, } A = 15,45 \text{ cm}^2.$$

$$4. A_{\text{Polígono}} = \frac{P}{2} \times ap$$

$$\text{Assim, } 6,88 = \frac{20}{2} \times ap, \text{ ou seja, } 6,88 = 10 \times ap.$$

$$\text{Logo, } ap = \frac{6,88}{2} = 0,688 \text{ cm}$$

5. Como o polígono [ABCDEF] é regular, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$. Por outro lado, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF}$, pois os segmentos correspondentes são raios da mesma circunferência. Assim, os triângulos em que o polígono [ABCDEF] ficou decomposto são isósceles e geometricamente iguais (critério LLL da igualdade de triângulos). Em particular, os ângulos ao centro que cada um desses triângulos definem são geometricamente iguais. Desta forma, a amplitude de cada um deles é $60^\circ \left(\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ \right)$.

Como tal, a amplitude de cada um dos restantes ângulos internos de cada triângulo isósceles é dada por $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$.

Logo, os três ângulos internos de qualquer um dos triângulos isósceles em que o polígono ficou dividido têm 60° de amplitude. Desta forma, os triângulos são equiláteros, pois a ângulos de igual amplitude opõem-se lados de igual comprimento.

6.

$$6.1. \ell = 2 \times ap$$

$$6.2. A_{\text{quadrado}} = \frac{P}{2} \times ap = \frac{4\ell}{2} \times \frac{1}{2} \ell = \ell \times \ell$$

Aplicar – página 9

1. A. A afirmação é falsa.
320 ml = 32 cl. 320 mililitros são 32 centilitros.
- B. $18 \ell = 18 \text{ dm}^3 = 0,018 \text{ m}^3$.
Logo, a afirmação é verdadeira.
- C. A afirmação é falsa.
 $47 \text{ dm}^3 = 47 \ell = 4,7 \text{ da}\ell$. 47 decímetros cúbicos são 47 litros.

$$2. V_{\text{prisma}} = A_b \times h$$

$$\text{A. Sabe-se que } A_b = 10 \text{ cm}^2 \text{ e } h = 18 \text{ cm.}$$

$$\text{Então, } V_{\text{prisma}} = 10 \times 18 = 180.$$

“O volume de um prisma com 10 cm^2 de área da base e 18 cm de altura é igual a **180 cm}^3**.”

$$\text{B. Sabe-se que } V_{\text{prisma}} = 28,8 \text{ m}^3 \text{ e } h = 1,2 \text{ m.}$$

$$\text{Então, } 28,8 = A_b \times 1,2$$

$$\Leftrightarrow A_b = \frac{28,8}{1,2}$$

$$\Leftrightarrow A_b = 24$$

"A área da base de um prisma com 1,2 m de altura e volume $28,8 \text{ m}^3$ é igual a 24 m^2 ."

C. Sabe-se que $V_{\text{prisma}} = 4,4 \text{ dm}^3$ e $A_b = 2 \text{ dm}^2$.

$$\text{Então, } 4,4 = 2 \times h$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{4,4}{2}$$

$$\Leftrightarrow h = 2,2$$

"A altura de um prisma com 2 dm^2 de área da base e volume $4,4 \text{ dm}^3$ é igual a $2,2 \text{ dm}$."

3.

3.1. Sabe-se que $V_{\text{cubo}} = a^3$ e $a = 7 \text{ mm}$.

$$\text{Então, } V_{\text{cubo}} = 7^3 = 343$$

R.: O cubo tem 343 mm^3 de volume.

3.2. Sabe-se que $V_{\text{paralelepípedo}} = c \times \ell \times a$, $c = 3 \text{ m}$, $\ell = 1 \text{ m}$ e $a = 2 \text{ m}$.

$$\text{Então, } V_{\text{paralelepípedo}} = 3 \times 1 \times 2 = 6.$$

R.: O paralelepípedo tem 6 m^3 de volume.

3.3. Sabe-se que $A_b = \pi r^2$ e $r = \frac{6 \text{ dm}}{2} = 3 \text{ dm}$.

$$\text{Então, } A_b = \pi \times 3^2 \Leftrightarrow A_b = 9\pi$$

$$\text{Além disso, } V_{\text{cilindro}} = A_b \times h, A_b = 9\pi \text{ dm}^2 \text{ e } h = 7 \text{ dm}.$$

$$\text{Então, } V_{\text{cilindro}} = 9\pi \times 7 = 63\pi \approx 197,9.$$

$$\text{R.: } V = 63\pi \text{ dm}^3 \approx 197,9 \text{ dm}^3.$$

4. O sólido resulta da junção de um cubo (3 cm de aresta) com um cilindro (5 cm de altura e cujo círculo da base tem 1,5 cm de raio).

$$V_{\text{cubo}} = a^3 \text{ e } a = 3 \text{ cm. Então, } V_{\text{cubo}} = 3^3 = 27$$

$$V_{\text{cilindro}} = A_b \times h$$

$$\text{Sabe-se que } A_b = \pi r^2 \text{ e } r = \frac{3 \text{ cm}}{2} = 1,5 \text{ cm}.$$

$$\text{Então, } A_b = \pi \times (1,5)^2 = 2,25\pi$$

$$V_{\text{cilindro}} = A_b \times h, A_b = 2,25\pi \text{ cm}^2 \text{ e } h = 5 \text{ cm}.$$

$$\text{Logo, } V_{\text{cilindro}} = 2,25\pi \times 5 = 11,25\pi$$

O volume do sólido corresponde à soma do volume do cubo com o volume do cilindro.

$$V_{\text{sólido}} = V_{\text{cubo}} + V_{\text{cilindro}}$$

$$V_{\text{sólido}} = 27 + 11,25\pi \approx 62,34 \text{ (2 c.d.)}$$

$$\text{R.: } V = (27 + 11,25\pi) \text{ cm}^3 \approx 62,34 \text{ cm}^3.$$

5. $4,3 \ell = 430 \text{ cl}$

$$430 : 33 \approx 13,03$$

Dividindo a quantidade da bebida energética pelo número de garrafas, enchemos totalmente 13 garrafas.

R.: A bebida dá para 13 treinos.

6. Utilizando 10 vezes a capacidade do copo obtemos 330 cl. Portanto, $V_{\text{prisma}} = 330 \text{ cl}$.

$$330 \text{ cl} = 3,3 \ell = 3,3 \text{ dm}^3 = 3300 \text{ cm}^3$$

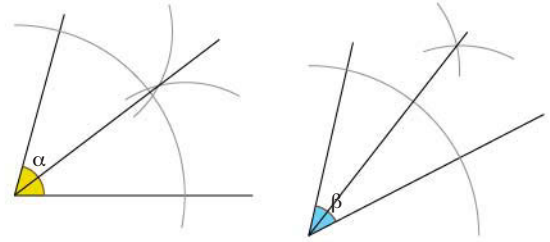
Sabe-se que $V_{\text{prisma}} = A_b \times h$, $V_{\text{prisma}} = 3300 \text{ cm}^3$ e $A_b = 100 \text{ cm}^2$.

$$\text{Então, } 3300 = 100 h \Leftrightarrow h = \frac{3300}{100} \Leftrightarrow h = 33.$$

R.: O prisma tem 33 cm de altura.

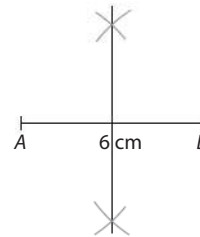
Aplicar – página 11

20 1.



2.

2.1.



2.2. O ponto C está à mesma distância dos pontos A e B.

3.

$$3.1. \left. \begin{array}{l} P = 2\pi \times r \\ r = 5 \text{ cm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P = 2\pi \times 5 \\ \Leftrightarrow P = 10\pi \\ \Leftrightarrow P \approx 31,42 \end{array}$$

R.: O círculo tem aproximadamente 31,42 cm de perímetro.

3.2. Se o círculo tem 28 cm de diâmetro, então tem 14 cm de raio (o diâmetro tem o dobro do comprimento do raio).

$$\left. \begin{array}{l} A = \pi \times r^2 \\ r = 14 \text{ cm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = \pi \times 14^2 \\ \Leftrightarrow A = 196\pi \\ \Leftrightarrow A \approx 615,75 \end{array}$$

R.: O círculo tem aproximadamente $615,75 \text{ cm}^2$ de área.

$$3.3. \left. \begin{array}{l} A = \pi \times r^2 \\ A = 16\pi \end{array} \right\} \begin{array}{l} 16\pi = \pi \times r^2 \\ \Leftrightarrow 16 = r^2 \\ \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{16} \\ \Leftrightarrow r = \cancel{4} \vee r = 4 \end{array}$$

R.: O raio desse círculo tem 4 cm de comprimento.

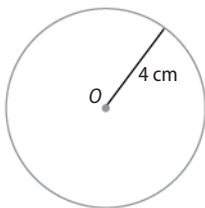
$$3.4. \left. \begin{array}{l} P = 2\pi \times r \\ P = 42\pi \end{array} \right\} \begin{array}{l} 42\pi = 2\pi \times r \\ \Leftrightarrow 42 = 2r \\ \Leftrightarrow r = 21 \end{array}$$

$$2 \times 21 = 42$$

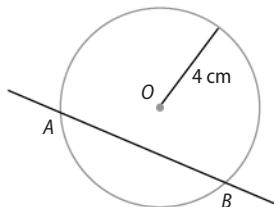
R.: O círculo tem 21 cm de raio. Sabendo que o diâmetro tem o dobro do comprimento do raio, podemos dizer que o círculo tem 42 cm de diâmetro.

20 4.

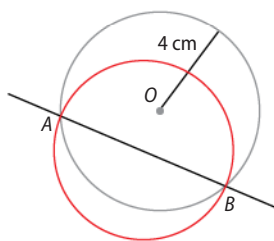
4.1.



4.2.



4.3.



5. A figura é composta por um triângulo (com 4 m de base e 4 m de altura) e por um retângulo (com 3 m de largura e 5 m de comprimento) do qual lhe foi “retirado” um semicírculo com 3 m de diâmetro.

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

$$A_{\text{retângulo}} = b \times h$$

$$A_{\text{retângulo}} = 5 \times 3 = 15$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi \times 1,5^2 = 2,25\pi$$

$$A_{\text{figura}} = 8 + 15 - \frac{2,25\pi}{2} = 23 - 1,125\pi \approx 19,47$$

R.: A figura tem aproximadamente 19,47 cm² de área.

6. Na figura estão representadas quatro circunferências com 2,5 cm de raio.

Os seus centros são os vértices do quadrado [PQRS] cujo lado mede 5 cm.

$$A_{\text{quadrado}} = \ell \times \ell$$

$$A_{\text{quadrado}} = 5 \times 5 = 25$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi \times 2,5^2 = 6,25\pi$$

$$A_{\text{figura}} = 25 - 4 \left(\frac{1}{4} \times 6,25\pi \right) = 25 - 6,25\pi \approx 5,37$$

R.: A região sombreada tem aproximadamente 5,37 cm² de área.

7. Seja x o raio da circunferência de centro A . Então, a circunferência de centro B tem $2x$ cm de raio e a circunferência de centro C tem $4x$ cm de raio.

O comprimento do segmento de reta $[BC]$ é $6x$.

Vamos calcular o perímetro das três circunferências (de centro A (P_A), de centro B (P_B) e de centro C (P_C)):

$$P_{\text{circunferência}} = 2\pi r$$

$$P_A = 2x\pi$$

$$P_B = 2 \times 2x\pi = 4x\pi$$

$$P_C = 2 \times 4x\pi = 8x\pi$$

$$2x\pi + 4x\pi + 8x\pi = 14\pi$$

$$\Leftrightarrow 14x\pi = 14\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{14\pi}{14\pi}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Como $\overline{BC} = 6x$, então $\overline{BC} = 6$.

R.: O segmento de reta $[BC]$ tem 6 cm de comprimento.

8. Considere-se a circunferência de centro O e raio r da figura. Sejam A e B dois quaisquer pontos da circunferência. Sabe-se que $\overline{AB} < \overline{OA} + \overline{OB}$, pois **num triângulo, o comprimento de qualquer um dos lados é menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois**. Como $\overline{OA} = r$ e $\overline{OB} = r$, então $\overline{AB} < 2r$, como queríamos provar.

Aplicar – página 13

- Os ângulos representados nas figuras A e D, pois têm o vértice no centro da circunferência.
- Os polígonos representados nas figuras B e D, pois todos os seus vértices são pontos da circunferência.

3. Os polígonos representados nas figuras A e C, pois todos os seus lados são tangentes à circunferência.
4. A reta r é uma reta exterior à circunferência porque não tem pontos em comum com a circunferência. A reta s é uma reta secante à circunferência porque intersesta a circunferência em dois pontos. A reta t é uma reta tangente à circunferência porque tem um único ponto em comum com a circunferência.
5. Como a reta r é tangente à circunferência no ponto A , a reta r é perpendicular ao raio da circunferência em A .

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{AO} \times \overline{AB}}{2}$$

$$6 = \frac{3 \times \overline{AB}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{6 \times 2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 4$$

Logo, $\overline{AB} = 4$ cm.

Aplicar – páginas 32 e 33

2.

- 2.1. Não é uma proposição porque não é possível associar-lhe um dos valores “verdadeiro” ou “falso”.
- 2.2. É uma proposição porque é possível associar-lhe um dos valores “verdadeiro” ou “falso”.
- 2.3. É uma proposição porque é possível associar-lhe um dos valores “verdadeiro” ou “falso”.
- 2.4. É uma proposição porque é possível associar-lhe um dos valores “verdadeiro” ou “falso”.
- 2.5. É uma proposição porque é possível associar-lhe um dos valores “verdadeiro” ou “falso”.

3.

- 3.1. Não está frio.
- 3.2. Se está a nevar, então está frio.
- 3.3. Está frio se e só se está a nevar.

4.

- 4.1. $\sim q$
- 4.2. $p \Rightarrow q$
- 4.3. $q \Leftrightarrow p$

5. Para provar que a proposição é verdadeira, basta encontrar um número primo entre 33 e 39. Como 37 é um número primo, a proposição é verdadeira.

6. Para provar que a proposição é falsa, basta encontrar um contraexemplo.
Contraexemplo: 100 é um quadrado perfeito maior do que 90 e menor do que 105.

7. Observa a tabela.

a	2	3	4
$2a^2 - 1$	7	17	31
Primo?	Sim	Sim	Sim

Pela tabela, fica provado que $2a^2 - 1$ é um número primo se a é um número inteiro e $2 \leq a < 5$.

8. O erro da demonstração está no passo em que se dividem ambos os membros da equação por $b - a$. Se se considerou, inicialmente, que $b = a$, então $b - a = 0$, e não é possível dividir por zero.

9.

- 9.1. Se multiplicarmos dois números inteiros pares, então o produto é par.
- 9.2. Hipótese: dois números inteiros são pares.
Tese: o seu produto é par.

10. Seja A : “a Luzia não está em boas condições físicas” e B : “a Luzia não é convocada”.

Sabemos que $A \Rightarrow B$.

Como se trata de uma implicação, a implicação recíproca pode não ser verdadeira. Assim, não podemos concluir que $B \Rightarrow A$, ou seja, não podemos concluir que o facto de não ser convocada implique que não esteja em boas condições físicas.

A Luzia pode não ser convocada, por exemplo, por opção técnica.

11. A regra define que se uma carta tem um número par de um dos lados, então tem uma vogal do outro lado. Assim,
 - a carta com a letra B tem de ser virada pois, se tiver um número par do outro lado a regra não é verdadeira (teríamos uma carta com um número par de um lado e uma consoante do outro lado).
 - a carta com a letra A não precisa de ser virada, porque o facto de ter uma vogal de um dos lados não implica que do outro lado esteja um número par (o que a regra define é a implicação recíproca).

- a carta com o número 8 tem de ser virada para confirmar que do outro lado está uma vogal. Se não estiver, então a regra não é verdadeira, uma vez que teríamos uma carta com um número par de um lado e uma consoante do outro.
- a carta com o número 5 não tem de ser virada. Do outro lado tanto pode estar uma vogal como uma consoante, que a regra mantém-se verdadeira.

Logo, é necessário virar duas cartas para confirmar se a regra é verdadeira.

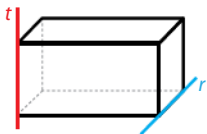
Aplicar – páginas 38 e 39

2.

- 2.1. a) Retas concorrentes perpendiculares.
b) Retas não coplanares.
c) Retas concorrentes oblíquas.
- 2.2. A afirmação é verdadeira. Uma reta e um ponto que não lhe pertença definem um plano.
3. [E] Se r e s são paralelas, então são coplanares. Como as retas r e s são paralelas, então pertencem ao mesmo plano, ou seja, são coplanares.

4. Como as retas AB e CD estão contidas em planos distintos, não existe nenhum plano que as contenha. Logo, são não coplanares e a opção correta é a [D].

- 20 5. A afirmação é falsa. Se as retas não são paralelas, então se forem coplanares, são concorrentes. Contudo, as retas podem ser não coplanares. Por exemplo,



As retas t e r não são paralelas e não são concorrentes.

6.

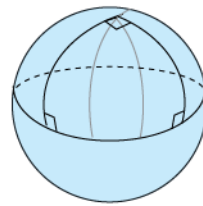
- 6.1. a) Por exemplo, a reta BE .
b) Por exemplo, a reta AB .
c) Por exemplo, as retas AB e DE .
- 6.2. A afirmação é verdadeira. As retas EG e BC são paralelas porque contêm lados opostos de um retângulo. A reta s pertence ao mesmo plano que EG e BC e é paralela à reta BC . Sabemos que, num plano, duas retas paralelas a uma terceira são paralelas

entre si. Logo, como s é paralela a EG e BC é paralela a EG , então s é paralela a BC .

7.

- 7.1. a) Por exemplo, as retas AB e EF .
b) Por exemplo, as retas EF e BC .
c) Por exemplo, a reta EG .
- 7.2. A afirmação é falsa. As retas são não coplanares.
- 7.3. a) Sabemos que:
- r é paralela a EF , segundo o enunciado;
 - EF é paralela a HG , pois são retas que contêm lados opostos de um quadrado;
 - num plano, duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.
- Então, como r é paralela a EF e HG é paralela a EF , então r é paralela a HG .
- b) Sabemos que r é paralela a EF e que a reta EG é secante às duas. Sabemos também que se duas retas paralelas forem intersectadas por uma secante, os ângulos correspondentes por elas determinados são geometricamente iguais. Logo, os ângulos FES e XSG são geometricamente iguais pois são ângulos correspondentes.

20 8.



Aplicar – páginas 42 e 43

2.

- 2.1. a) Por exemplo, a reta AB .
b) Por exemplo, os planos EBC e ABC .
c) Por exemplo, a reta FG .
d) Por exemplo, as retas JL e AB .
e) Por exemplo, a reta EB .
- 2.2. Sabemos que duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si. Assim, como s é paralela a JL e FG também é paralela a JL , podemos concluir que s e FG são paralelas.
- 3.
- 3.1. Por exemplo, a reta EH .
3.2. Por exemplo, a reta PC .
3.3. O plano EHG .
3.4. Por exemplo, a reta BP .

4.

4.1. Sim, podemos concluir que a reta r também é secante ao plano do chão porque se uma reta é secante a um de dois planos paralelos, então também é secante ao outro plano.

4.2. Por exemplo, as retas MN e NK .

4.3. A reta de interseção dos planos IJF e EFG é paralela à reta de interseção do plano IJF com o plano do chão, pois se um plano é concorrente com um de dois planos paralelos, então é concorrente com o outro e as retas de interseção do primeiro com cada um dos outros dois são paralelas.

5.

5.1. A reta AB é paralela ao plano EFG porque é paralela à reta EF que está contida nesse plano. A reta BC é paralela ao plano EFG porque é paralela à reta FG que está contida nesse plano.

Assim, o plano ABC é paralelo ao plano EFG porque contém duas retas concorrentes, AB e BC , que são paralelas ao plano EFG .

5.2. Existe apenas um plano que, contendo M , é paralelo ao plano EFG , pois por um ponto exterior a um plano passa um único plano paralelo ao primeiro.

5.3. Por exemplo, a reta EC .

5.4. Se uma reta é secante a um de dois planos paralelos, então também é secante ao outro plano. Assim, como os planos ABC e EFG são paralelos, se t é secante a ABC , então também é secante a EFG . Logo, t não é paralela ao plano EFG .

5.5. Para três pontos não definirem um plano, basta que estejam alinhados, ou seja, que sejam colineares. Assim, o ponto K pode ser, por exemplo, o ponto médio da aresta $[EF]$.

5.6. A interseção do plano EFG com o plano definido pelas retas BC e EH é a reta EH .

6.

- 6.1. 1 – A
- 2 – B
- 3 – D
- 4 – A
- 5 – D

6.2. A interseção dos planos PRS e ZWX é a reta ZW .

6.3. A interseção da reta ST com o plano α é o ponto X .

6.4. Sabemos que TP e XZ são duas retas paralelas. Como duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si, então como a reta v também é paralela a TP , podemos concluir que as retas v e XZ são paralelas.

6.5. Apenas um plano paralelo a α passa por S , pois por um ponto exterior a um plano passa um único plano paralelo ao primeiro.

6.6. Sabemos que dois planos paralelos a um terceiro são paralelos entre si. Assim, como β é paralelo a α e o plano que passa por S também é paralelo a α , podemos afirmar que este plano e β também são paralelos.

Aplicar – páginas 48 e 49

2. Para ter a certeza que o mastro fica perpendicular ao chão Basta garantir que o mastro é perpendicular a duas retas imaginárias, marcadas no chão, que passem no local onde o mastro vai ser colocado.

3. [C] Qualquer reta de β é paralela a α .

4.

4.1. Por exemplo, a reta KI .

4.2. O plano EHD .

4.3. Ponto C .

4.4. Plano BDH .

4.5. Plano ABC .

4.6. Por exemplo, a reta DC .

5.

5.1. Por exemplo, as retas AB e CF .

5.2. Se r é perpendicular ao plano α no ponto B , então é perpendicular a todas as retas do plano α que passem em B . Logo, r é perpendicular às retas BC e BF .

5.3. Os planos ABC e ABF são concorrentes oblíquos.

5.4. O plano ACF é perpendicular ao plano α porque contém uma reta, AF , que é perpendicular a α .

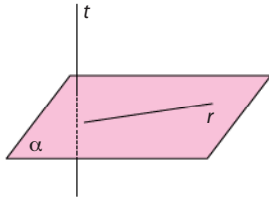
20 6.

6.1. A afirmação é falsa. Para uma reta ser perpendicular a um plano é necessário que seja perpendicular a duas retas concorrentes desse plano. Neste caso, como só sabemos que s é perpendicular a r , nada se pode concluir sobre o facto de s ser perpendicular ao plano α .

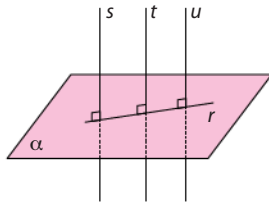
6.2. As afirmações C e D são falsas.

Contraexemplos:

Existem retas perpendiculares a α que não são perpendiculares a r . A reta t e a reta r são não coplanares.



Existe mais do que uma reta perpendicular, simultaneamente, a α e a r .



7.

7.1. Por exemplo, C , T e E .

7.2. Quanto à amplitude dos ângulos, o triângulo é retângulo. Como os planos α e β são perpendiculares e DE e CD são perpendiculares a AB em D , o ângulo EDC é reto.

Quanto ao comprimento dos lados é isósceles, pois $\overline{DE} = \overline{CD}$.

7.3. Como CD é perpendicular ao plano α no ponto D , é perpendicular a todas as retas do plano α que passam em D . Assim, as retas PD e CD são perpendiculares.

7.4. É o ponto D .

7.5. É o ponto D .

7.6. A distância de um ponto a um plano é definida como a distância desse ponto à sua projeção ortogonal no plano. Assim, a distância de E ao plano β é $\overline{ED} = 10$ cm.

7.7. A afirmação é verdadeira. Se um plano é perpendicular a uma de duas retas paralelas, então também é perpendicular à outra. O plano α é perpendicular a reta CD , que é paralela a s . Logo, o plano α é perpendicular a s .

7.8. As retas r e DE são paralelas. Se duas retas são perpendiculares a um mesmo plano, então são paralelas. Como r e DE são ambas perpendiculares a β , então são paralelas.

7.9. As retas AB e CT são não coplanares.

7.10. a) O plano θ é perpendicular ao plano β porque contém a reta DE , que é perpendicular a β .

b) O plano θ é perpendicular ao plano α porque contém a reta CD , que é perpendicular a α .

Aplicar – páginas 54 e 55

2.

2.1. Cubo com 4 m de aresta. Como $V_{\text{Cubo}} = a^3$,
 $V_{\text{Cubo}} = 4^3$

$$\Leftrightarrow V_{\text{Cubo}} = 64$$

R.: O sólido tem 64 m³ de volume.

2.2. Prisma triangular com 6 cm de altura. A base é um triângulo com 3 cm de base e 4 cm de altura.

$$V_{\text{Prisma}} = A_b \times h$$

$$A_b = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_b = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

Assim,

$$V = 6 \times 6 \Leftrightarrow V = 36$$

R.: O sólido tem 36 cm³ de volume.

2.3. Pirâmide com 10 cm de altura, cuja base é um retângulo com 5 cm de largura e 6 cm de comprimento.

$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} A_b \times h$$

$$A_b = b \times h$$

$$A_b = 6 \times 5 = 30$$

Logo,

$$V = \frac{1}{3} \times 30 \times 10$$

$$\Leftrightarrow V = 100$$

R.: O sólido tem 100 cm³ de volume.

2.4. Cilindro com 4 cm de altura e uma base com 3 cm de raio.

$$V_{\text{Cilindro}} = A_b \times h$$

$$A_b = \pi \times r^2$$

$$A_b = \pi \times 3^2 = 9\pi$$

Logo,

$$V = 9\pi \times 4$$

$$\Leftrightarrow V = 36\pi \text{ cm}^3 \approx 113,10 \text{ (2 c.d.)}$$

R.: O sólido tem 36π cm³ de volume.

2.5. Cone com 0,3 dm de altura. A base é um círculo com 10 mm de raio.

Reduzindo às mesmas unidades: 0,3 dm = 3 cm e 10 mm = 1 cm.

$$V_{\text{Cone}} = \frac{1}{3} A_b \times h$$

$$A_b = \pi \times r^2$$

$$A_b = \pi \times 1^2 = \pi$$

Logo,

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3$$

$$\Leftrightarrow V = \pi \approx 3,14 \text{ (2 c.d.)}$$

R.: O sólido tem $\pi \text{ cm}^3$ de volume.

- 2.6. O sólido resulta da junção de um paralelepípedo (8 cm de comprimento, 3 cm de largura e 4 cm de altura) com uma pirâmide com 6 cm de altura, cuja base é um retângulo com 3 cm de largura e 8 cm de comprimento:

$$\left. \begin{array}{l} V_{\text{paralelepípedo}} = A_b \times h \\ A_b = b \times h \\ A_b = 8 \times 3 = 24 \\ h = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} V_{\text{paralelepípedo}} = 24 \times 4 \\ \Leftrightarrow V_{\text{paralelepípedo}} = 96 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_b \times h \\ A_b = b \times h \\ A_b = 8 \times 3 = 24 \\ h = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 24 \times 6 \\ \Leftrightarrow V_{\text{pirâmide}} = 48 \end{array}$$

$$V_{\text{sólido}} = 96 \text{ cm}^3 + 48 \text{ cm}^3 = 144 \text{ cm}^3$$

R.: O sólido tem 144 cm^3 de volume.

3.

$$\begin{aligned} 3.1. \quad A_{\text{bases}} &= 2 \times (15 \times 13) = 390 \\ A_{\text{faces laterais}} &= 2 \times (14 \times 13) + 2 \times (15 \times 14) = \\ &= 364 + 420 = 784 \\ A_{\text{Total}} &= 390 + 784 = 1174 \end{aligned}$$

R.: A área da superfície do sólido é 1174 mm^2 .

$$\begin{aligned} 3.2. \quad A_{\text{bases}} &= 2 \times (10 \times 3) = 60 \\ A_{\text{faces laterais}} &= 2 \times (3 \times 4) + 2 \times (10 \times 4) = 24 + 80 = 104 \\ A_{\text{Total}} &= 60 + 104 = 164 \end{aligned}$$

R.: A área da superfície do sólido é 164 cm^2 .

- 3.3. A base do sólido é um quadrado com 6 cm de aresta. Além disso, o sólido tem quatro faces laterais triangulares. Sabe-se que a altura desses triângulos corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos medem 3 cm e 4 cm.

$$\begin{aligned} h^2 &= 3^2 + 4^2 \\ \Leftrightarrow h^2 &= 9 + 16 \\ \Leftrightarrow h^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow h &= -\sqrt{25} \vee h = \sqrt{25} \\ \Leftrightarrow h &= -5 \vee h = 5 \end{aligned}$$

Como $h > 0$, $h = 5$.

$$\text{Assim: } A_{\text{base}} = 6 \times 6 = 16$$

$$A_{\text{faces laterais}} = 4 \times \left(\frac{6 \times 5}{2} \right) = 60$$

$$A_{\text{Total}} = 16 + 60 = 96$$

R.: A área da superfície do sólido é 96 cm^2 .

4.

- 4.1. A superfície lateral é constituída por um retângulo com 14 cm de altura e cujo comprimento corresponde ao perímetro do círculo da base.

$$P_o = 2\pi r \text{ e } r = 4$$

$$P_o = 2 \times \pi \times 4 \Leftrightarrow P_o = 8\pi$$

$$A_{\text{bases}} = 2 \times (\pi \times 4^2) = 2 \times 16\pi = 32\pi$$

$$A_{\text{faces laterais}} = 14 \times 8\pi = 112\pi$$

$$A_{\text{Total}} = 32\pi + 112\pi = 144\pi$$

R.: A área da superfície do sólido é $144\pi \text{ cm}^2 \approx 452,39 \text{ cm}^2$ (2 c.d.).

- 4.2. A superfície lateral é constituída por quatro triângulos, cada qual com 15 cm de base e 18 cm de altura. A base é um quadrado com 15 cm de aresta.

$$A_{\text{base}} = 15 \times 15 = 225$$

$$A_{\text{faces laterais}} = 4 \times \left(\frac{15 \times 18}{2} \right) = 540$$

$$A_{\text{Total}} = 225 + 540 = 765$$

R.: A área da superfície do sólido é 765 cm^2 .

- 4.3. O sólido tem duas bases triangulares e duas faces laterais retangulares. Para calcular a área desses retângulos precisamos saber a sua largura, que corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos medem 6 m e 8 m.

$$\begin{aligned} h^2 &= 6^2 + 8^2 \\ \Leftrightarrow h^2 &= 36 + 64 \\ \Leftrightarrow h^2 &= 100 \\ \Leftrightarrow h &= -\sqrt{100} \vee h = \sqrt{100} \\ \Leftrightarrow h &= -10 \vee h = 10 \end{aligned}$$

Como $h > 0$, $h = 10$.

$$A_{\text{bases}} = 2 \times \left(\frac{12 \times 8}{2} \right) = 96$$

$$A_{\text{faces laterais}} = 2 \times (10 \times 16) + (12 \times 16) = 320 + 192 = 512$$

$$A_{\text{Total}} = 96 + 512 = 608$$

R.: A área da superfície do sólido é 608 m^2 .

5. Cilindro A:

$$\left. \begin{array}{l} V_A = A_b \times h \\ \text{Raio} = r \\ A_b = \pi \times r^2 \\ \text{altura} = h \end{array} \right\} V_A = \pi \times r^2 \times h$$

Cilindro B:

$$\left. \begin{array}{l} V_B = A_b \times h \\ \text{Raio} = 2r \\ A_b = \pi \times (2r)^2 \\ \text{altura} = h \end{array} \right\} V_B = \pi \times (2r)^2 \times h \Leftrightarrow V_B = \pi \times 4r^2 \times h$$

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{\pi \times 4r^2 \times h}{\pi \times r^2 \times h} = \frac{4}{1}$$

Logo, a razão é 4 : 1.

6.

6.1. A planificação corresponde a uma pirâmide quadrangular.

6.2. A área lateral corresponde à área dos quatro triângulos que têm 8 cm de base e 5 cm de altura.

$$A_{\text{faces laterais}} = 4 \times \left(\frac{8 \times 5}{2} \right) = 80$$

R.: O sólido tem 80 cm² de área lateral.

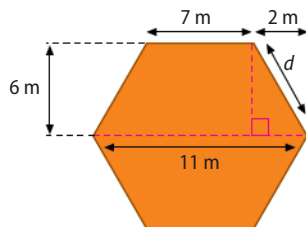
6.3. $A_{\text{faces laterais}} = 80$

$$A_{\text{base}} = 8 \times 8 = 64$$

$$A_{\text{Total}} = 80 + 64 = 144$$

R.: O sólido tem 144 cm² de área de superfície.

20 7. Para calcular a área da superfície do prisma, temos que calcular a área de todas as faces. Começemos por calcular d , aplicando o teorema de Pitágoras.



$$\begin{aligned} d^2 &= 6^2 + 2^2 \\ \Leftrightarrow d^2 &= 36 + 4 \\ \Leftrightarrow d^2 &= 40 \\ \Leftrightarrow d &= -\sqrt{40} \vee d = \sqrt{40} \\ \text{Como } d > 0, d &= \sqrt{40}. \end{aligned}$$

Assim, o sólido tem quatro faces retangulares com 10 m de comprimento e $\sqrt{40}$ m de largura; duas faces retangulares com 7 m de largura e 10 m de comprimento e duas faces hexagonais (cada face hexagonal pode ser decomposta em dois trapézios de 6 m de altura, cuja base maior tem 11 m e a menor tem 7 m).

Assim:

$$A_{\text{faces retangulares}} = 4 \times (10 \times \sqrt{40}) + 2 \times (7 \times 10) = 40\sqrt{40} + 140$$

$$A_{\text{faces hexagonais}} = 2 \times \left[2 \times \left(\frac{11+7}{2} \times 6 \right) \right] = 4 \times 54 = 216$$

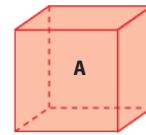
$$A_{\text{Total}} = 40\sqrt{40} + 140 + 216 = 356 + 40\sqrt{40}$$

R.: A área de superfície do prisma é $(356 + 40\sqrt{40}) \text{ m}^2 \approx 608,98 \text{ m}^2$ (2 c.d.).

20 8. Dois sólidos dizem-se equivalentes se tiverem o mesmo volume. Para provar que a afirmação é falsa basta considerar o seguinte exemplo:

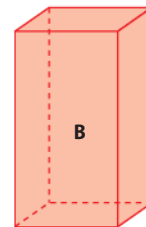
Sólido A: Cubo com 4 cm de aresta

Sólido B: prisma quadrangular de 16 cm de altura e cuja base (quadrado) tem 2 cm de aresta



$$A_{\text{lateral}} = 4 \times (4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}) = 64 \text{ cm}^2$$

$$V = 4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 64 \text{ cm}^3$$



$$A_{\text{lateral}} = 4 \times (2 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}) = 128 \text{ cm}^2$$

$$V = 2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 16 \text{ cm} = 64 \text{ cm}^3$$

Os dois sólidos são equivalentes e não têm a mesma área lateral.

9. Queremos calcular o volume do cone. Para isso precisamos conhecer a sua altura e a área da sua base.

Podemos aplicar o teorema de Pitágoras para calcular a altura do cone.

$$\begin{aligned} 11,5^2 &= h^2 + 2,25^2 \\ \Leftrightarrow h^2 &= 132,25 - 5,0625 \\ \Leftrightarrow h^2 &= 127,1875 \\ \Leftrightarrow h &= -\sqrt{127,1875} \vee h = \sqrt{127,1875} \\ \text{Como } h > 0, h &= \sqrt{127,1875}. \end{aligned}$$

A base do cone é um círculo cujo raio mede 2,25 cm. Assim:

$$\left. \begin{array}{l} A_b = \pi \times r^2 \\ r = 2,25 \end{array} \right\} A_b = \pi \times 2,25^2 \Leftrightarrow A_b = 5,0625\pi$$

Então,

$$\left. \begin{array}{l} V = \frac{1}{3} A_b \times h \\ A_b = 5,0625\pi \text{ cm}^2 \\ h = \sqrt{127,1875} \text{ cm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} V = \frac{1}{3} \times 5,0625\pi \times \sqrt{127,1875} \\ \Leftrightarrow V \approx 59,79 \text{ (2c.d.)} \end{array}$$

R.: O volume de gelado que se encontra dentro do cone é, aproximadamente, 59,79 cm³.

10. Considerando r o raio de cada uma das esferas, sabemos que a altura do cilindro será de $6r$ (pois a altura corresponde a 3 diâmetros, ou seja, 6 raios). Vamos calcular o volume do cilindro e de uma esfera.

$$\left. \begin{array}{l} V_{\text{cilindro}} = A_b \times h \\ A_b = \pi r^2 \\ h = 6r \end{array} \right\} \begin{array}{l} V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \times 6r \\ \Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = 6\pi r^3 \end{array}$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Assim, o volume da caixa que não é ocupado pelas esferas será a diferença entre o volume do cilindro e o volume de três esferas.

$$V = V_{\text{cilindro}} - 3 \times V_{\text{esfera}} = 6\pi r^3 - 3 \times \frac{4}{3} \pi r^3 = 2\pi r^3$$

Por fim calculemos metade do volume das três esferas.

$$V = \frac{3 \times V_{\text{esfera}}}{2} = \frac{3 \times \frac{4}{3} \pi r^3}{2} = \frac{4\pi r^3}{2} = 2\pi r^3$$

Podemos então concluir que o volume da caixa que não é ocupado pelas esferas é igual a metade do volume das três esferas.

Aplicar – páginas 58 e 59

2.

$$\left. \begin{array}{l} 2.1. \quad A_{\text{sup. esférica}} = 4 \times \pi \times r^2 \\ r = 1 \text{ cm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_{\text{sup. esférica}} = 4\pi \times 1 \\ \Leftrightarrow A_{\text{sup. esférica}} = 4\pi \end{array}$$

R.: A área da superfície do sólido é $4\pi \text{ cm}^2 \approx 12,57 \text{ cm}^2$ (2 c.d.).

$$\left. \begin{array}{l} 2.2. \quad A_{\text{sup. esférica}} = 4 \times \pi \times r^2 \\ r = 4 \text{ cm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_{\text{sup. esférica}} = 4\pi \times 16 \\ \Leftrightarrow A_{\text{sup. esférica}} = 64\pi \end{array}$$

R.: A área da superfície do sólido é $64\pi \text{ cm}^2 \approx 201,06 \text{ cm}^2$ (2 c.d.).

$$\left. \begin{array}{l} 2.3. \quad P_{\text{base}} = 2\pi \times r \\ r = 4 \text{ cm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P_{\text{base}} = 2\pi \times 4 \Leftrightarrow P_{\text{base}} = 8\pi \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{\text{lateral}} = \frac{P_{\text{base}}}{2} \times \text{geratriz} \\ P_{\text{base}} = 8\pi \\ \text{geratriz} = 13 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_{\text{lateral}} = \frac{8\pi}{2} \times 13 \\ \Leftrightarrow A_{\text{lateral}} = 52\pi \end{array}$$

$$A_{\text{base}} = \pi \times 4^2 = 16\pi$$

$$A_{\text{superfície}} = 52\pi + 16\pi = 68\pi$$

R.: A área da superfície do sólido é $68\pi \text{ cm}^2 \approx 213,63 \text{ cm}^2$ (2 c.d.).

$$\left. \begin{array}{l} 2.4. \quad P_{\text{base}} = 2\pi \times r \\ r = 28 \text{ m} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P_{\text{base}} = 2\pi \times 28 \Leftrightarrow P_{\text{base}} = 56\pi \end{array}$$

A geratriz, g , corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 28 m e 45 m.

Assim:

$$\begin{aligned} g^2 &= 45^2 + 28^2 \\ \Leftrightarrow g^2 &= 2025 + 784 \\ \Leftrightarrow g^2 &= 2809 \\ \Leftrightarrow g &= \sqrt{2809} \vee g = \sqrt{2809} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow g = -53 \vee g = 53$$

Como $g > 0 = g = 53$.

$$\left. \begin{array}{l} A_{\text{lateral}} = \frac{P_{\text{base}}}{2} \times \text{geratriz} \\ P_{\text{base}} = 56\pi \\ \text{geratriz} = 53 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_{\text{lateral}} = \frac{56\pi}{2} \times 53 \\ \Leftrightarrow A_{\text{lateral}} = 1484\pi \end{array}$$

$$A_{\text{base}} = \pi \times 28^2 = 784\pi$$

$$A_{\text{superfície}} = 1484\pi + 784\pi = 2268\pi$$

R.: A área da superfície do sólido é $2268\pi \text{ cm}^2 \approx 7125,13 \text{ m}^2$ (2 c.d.).

3. Este sólido é composto por um cilindro e uma semiesfera. A área da sua superfície será a soma da área da superfície da semiesfera (metade da área da superfície esférica que lhe deu origem), com a área lateral do cilindro e com a área de uma base do cilindro:

$$\left. \begin{array}{l} A_{\text{sup. semiesfera}} = \frac{4 \times \pi \times r^2}{2} \\ r = 30 \text{ cm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_{\text{sup. semiesfera}} = \frac{4\pi \times 900}{2} \\ \Leftrightarrow A_{\text{sup. semiesfera}} = 1800\pi \end{array}$$

A área lateral do cilindro é um retângulo com 70 cm de altura e cujo comprimento coincide com o perímetro do círculo da base do cilindro.

$$\left. \begin{array}{l} P_o = 2 \times \pi \times r \\ r = 30 \text{ cm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P_o = 2\pi \times 30 \Leftrightarrow P_o = 60\pi \end{array}$$

$$A_{\text{lateral}} = 70 \times 60\pi = 4200\pi$$

A área da base é a área de um círculo com 30 cm de raio:

$$\left. \begin{array}{l} A_{\text{base}} = \pi r^2 \\ r = 30 \text{ cm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_{\text{base}} = \pi \times 30^2 \Leftrightarrow A_{\text{base}} = 900\pi \end{array}$$

$$A_{\text{superfície}} = 1800\pi + 4200\pi + 900\pi = 6900\pi$$

R.: A área da superfície do sólido é $6900\pi \text{ cm}^2 \approx 21\,676,99 \text{ cm}^2$ (2 c.d.).

4. Vamos começar por calcular a área da superfície esférica (planeta).

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{sup. esférica}} &= 4 \times \pi \times r^2 \\ r &= \frac{12756}{2} = 6378 \text{ km} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A_{\text{sup. esférica}} &= \\ &= 4\pi \times 40\,678\,884 \\ A_{\text{sup. esférica}} &= \\ &= 162\,715\,536\pi \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{array}{rcl} 162\,715\,536\pi & \text{---} & 100\% \\ x & \text{---} & 75\% \end{array}$$

$$x = \frac{162\,715\,536\pi \times 75}{100} \Leftrightarrow x \approx 383\,389\,449,4$$

R.: A área da superfície terrestre coberta por água é, aproximadamente, 383 389 449,4 km².

5.

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{sup. esférica}} &= 4 \times \pi \times r^2 \\ A_{\text{sup. esférica}} &= 36\pi \text{ cm}^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 4\pi \times r^2 &= 36\pi \\ \Leftrightarrow r^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow r &= -\sqrt{9} \vee r = \sqrt{9} \\ \Leftrightarrow r &= -3 \vee r = 3 \end{aligned}$$

Como $r > 0$, $r = 3$.

Então, a esfera tem 6 cm de diâmetro ($2 \times 3 \text{ cm} = 6$).

6. Como podemos observar, a geratriz do cone construído corresponde ao raio do semicírculo, ou seja, 20 cm. Assim, comecemos por determinar o raio do círculo da base do cone.

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{semicírculo}} &= \frac{\pi \times r^2}{2} \\ r &= 20 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A_{\text{semicírculo}} &= \frac{\pi \times 20^2}{2} \\ \Leftrightarrow A_{\text{semicírculo}} &= 200\pi \end{aligned}$$

Como a área do semicírculo corresponde à área lateral do cone, temos que:

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{semicírculo}} &= \frac{P_{\text{base}}}{2} \times \text{geratriz} \\ A_{\text{semicírculo}} &= 200\pi \\ \text{geratriz} &= 20 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{P_{\text{base}}}{2} \times 20 &= 200\pi \\ \Leftrightarrow P_{\text{base}} &= 20\pi \end{aligned}$$

Conhecendo o perímetro do círculo da base calcula-se o raio:

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{base}} &= 20\pi \\ P_{\text{base}} &= 2\pi \times r \end{aligned} \right\} 2\pi \times r = 20\pi \Leftrightarrow r = 10$$

Por fim, para calcular a altura do cone, a , conhecemos a hipotenusa (geratriz do cone) e um dos catetos (raio da base do cone) de um triângulo retângulo. Portanto, basta aplicar o teorema de Pitágoras.

$$20^2 = a^2 + 10^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 400 - 100$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 300$$

$$\Leftrightarrow a = -\sqrt{300} \vee a = \sqrt{300}$$

Como $a > 0$, $a = \sqrt{300}$.

R.: $a = \sqrt{300}$.

7.

- 7.1. O sólido é composto por um cone (com 13 cm de altura e 7 cm de raio da base) e uma semiesfera (raio 7 cm).

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{cone}} &= \frac{1}{3} A_b \times h \\ A_b &= \pi \times 7^2 = 49\pi \\ h &= 13 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} V_{\text{cone}} &= \frac{1}{3} \times 49\pi \times 13 \\ \Leftrightarrow V_{\text{cone}} &= \frac{637}{3} \pi \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{semiesfera}} &= \frac{\frac{4}{3} \times \pi \times r^3}{2} \\ r &= 7 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} V_{\text{semiesfera}} &= \frac{\frac{4}{3} \times \pi \times 7^3}{2} \\ \Leftrightarrow V_{\text{semiesfera}} &= \frac{686}{3} \pi \end{aligned}$$

$$V = \frac{637}{3} \pi + \frac{686}{3} \pi \Leftrightarrow V = \frac{1323}{3} \pi \Leftrightarrow V = 441\pi$$

R.: O volume do sólido é $441\pi \text{ cm}^3 \approx$

$\approx 1385,44 \text{ cm}^3$ (2 c.d.).

- 7.2. $441\pi \times 0,94 \approx 1302,32 \text{ g} \approx 1,3 \text{ kg}$

R.: O sólido terá, aproximadamente, 1,3 kg.

- 7.3. A geratriz do cone corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 7 cm e 13 cm. Assim:

$$g^2 = 7^2 + 13^2$$

$$\Leftrightarrow g^2 = 49 + 169$$

$$\Leftrightarrow g^2 = 218$$

$$\Leftrightarrow g = -\sqrt{218} \vee g = \sqrt{218}$$

Como $g > 0$, $g = \sqrt{218}$.

Calcula-se, agora, a área da superfície lateral do cone.

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{lateral}} &= \frac{P_{\text{base}}}{2} \times \text{geratriz} \\ P_{\text{base}} &= 2 \times \pi \times 7 = 14\pi \\ \text{geratriz} &= \sqrt{218} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A_{\text{lateral}} &= \frac{14\pi}{2} \times \sqrt{218} \\ \Leftrightarrow A_{\text{lateral}} &= 7\pi\sqrt{218} \end{aligned}$$

R.: A área da superfície lateral do cone é

$7\pi\sqrt{218} \text{ cm}^2 \approx 324,70 \text{ cm}^2$ (2 c.d.).

- 7.4. Comecemos por calcular a área da superfície da semiesfera (metade da área da superfície esférica).

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{sup. semiesfera}} &= \frac{4 \times \pi \times r^2}{2} \\ r &= 7 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A_{\text{sup. semiesfera}} &= \\ &= 2\pi \times 49 = 98\pi \end{aligned}$$

Para pintar a superfície do sólido, gastaram-se 26 €.

$$A_{\text{superfície do sólido}} = 7\pi\sqrt{218} + 98\pi = (7\pi\sqrt{218} + 98)\pi$$

$$(7\pi\sqrt{218} + 98)\pi \text{ cm}^2 \xrightarrow{\quad\quad\quad} 26 \text{ €}$$

$$1 \text{ cm}^2 \xrightarrow{\quad\quad\quad} x$$

$$x = \frac{26}{(\sqrt{218} + 98)\pi} \Leftrightarrow x \approx 0,04$$

R.: A tinta custa, aproximadamente, 4 centavos por cm^2 .

8. Com os dados fornecidos, podemos calcular o perímetro da base e, de seguida, o raio do círculo da base.

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{sup. lateral}} &= \frac{P_{\text{base}}}{2} \times \text{geratriz} \\ A_{\text{sup. lateral}} &= 9919\pi \\ \text{geratriz} &= 109 \end{aligned} \right\} \frac{P_{\text{base}}}{2} \times 109 = 9919\pi$$

$$\Leftrightarrow P_{\text{base}} = 182\pi$$

Conhecendo o perímetro do círculo da base, calcula-se o raio.

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{base}} &= 182\pi \\ P_{\text{base}} &= 2\pi \times r \end{aligned} \right\} 2\pi \times r = 182\pi \Leftrightarrow r = 91$$

Para calcular a altura do cone, a, recorremos ao teorema de Pitágoras pois conhecemos a hipotenusa (geratriz do cone) e um dos catetos (raio da base) de um triângulo retângulo.

$$109^2 = a^2 + 91^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 11\,881 - 8\,281$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 3\,600$$

$$\Leftrightarrow a = -\sqrt{3\,600} \vee a = \sqrt{3\,600}$$

$$\Leftrightarrow a = -60 \vee a = 60$$

Como $a > 0$, $a = 60$.

R.: O cone tem 60 cm de altura.

20 9.

- 9.1. A área da superfície do frasco pintada de dourado é a área dos dois círculos, de raios 3 cm e 12 cm, que constituem as bases do frasco.

Círculo 1:

$$\left. \begin{aligned} A_o &= \pi \times r^2 \\ r &= 3 \text{ cm} \end{aligned} \right\} A_o = \pi \times 3^2 \Leftrightarrow A_o = 9\pi$$

Círculo 2:

$$\left. \begin{aligned} A_o &= \pi \times r^2 \\ r &= 12 \text{ cm} \end{aligned} \right\} A_o = \pi \times 12^2 \Leftrightarrow A_o = 144\pi$$

Então, $9\pi + 144\pi = 153\pi$

R.: A área da superfície do frasco pintada de dourado é $153\pi \text{ cm}^2$.

- 9.2. Os dois triângulos são semelhantes pois tem dois ângulos geometricamente iguais (Critério AA):

$$\angle DEC = \angle AEB \text{ e } \angle EDC = \angle EAB$$

Como os triângulos são semelhantes, têm os lados proporcionais:

$$\frac{EA}{AB} = \frac{ED}{DC}$$

$$\frac{35}{12} = \frac{a}{3} \Leftrightarrow 12a = 105 \Leftrightarrow a = 8,75$$

R.: $a = 8,75 \text{ cm}$.

- 9.3. Vamos utilizar o teorema de Pitágoras para descobrir $\overline{EC}$ e $\overline{EB}$:

$$\overline{EC}^2 = 8,75^2 + 3^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{EC}^2 = 85,5625$$

$$\Leftrightarrow \overline{EC} = \sqrt{85,5625} \vee \overline{EC} = -\sqrt{85,5625}$$

$$\Leftrightarrow \overline{EC} = 9,25 \vee \overline{EC} = -9,25$$

Como $\overline{EC} > 0$, $\overline{EC} = 9,25$.

$$\overline{EB}^2 = 35^2 + 12^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{EB}^2 = 1369$$

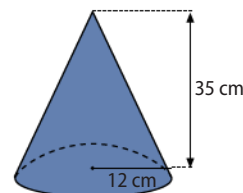
$$\Leftrightarrow \overline{EB} = \sqrt{1369} \vee \overline{EB} = -\sqrt{1369}$$

$$\Leftrightarrow \overline{EB} = 37 \vee \overline{EB} = -37$$

Como $\overline{EB} > 0$, $\overline{EB} = 37$.

R.: $\overline{EC} = 9,25 \text{ cm}$ e $\overline{EB} = 37 \text{ cm}$.

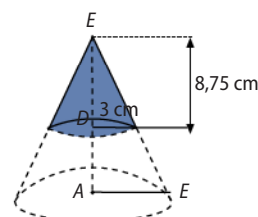
- 9.4. Cone 1: raio da base = 12 cm.



$$\left. \begin{aligned} A_{\text{superfície}} &= \frac{P_{\text{base}}}{2} \times \text{geratriz} \\ P_{\text{base}} &= 2 \times \pi \times 12 = 24\pi \\ \text{geratriz} &= \overline{EB} = 37 \end{aligned} \right\} A_{\text{superfície}} = \frac{24\pi}{2} \times 37$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{superfície}} = 444\pi$$

Cone 2: raio da base = 3 cm



$$\left. \begin{aligned} A_{\text{superfície}} &= \frac{P_{\text{base}}}{2} \times \text{geratriz} \\ P_{\text{base}} &= 2 \times \pi \times 3 = 6\pi \\ \text{geratriz} &= \overline{EC} = 9,25 \end{aligned} \right\} A_{\text{superfície}} = \frac{6\pi}{2} \times 9,25$$

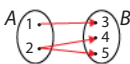
$$\Leftrightarrow A_{\text{superfície}} = 27,75\pi$$

$$A_{\text{superfície}} = 444\pi - 27,75\pi = 416\pi \approx 1307,6$$

R.: A área da superfície do frasco pintada de preto é aproximadamente igual a $1307,6 \text{ cm}^2$.

Praticar 1 – páginas 60 a 65

1. A. A afirmação é verdadeira.
B. A afirmação é falsa.
Contraexemplo: “O cão é mortal e não é humano”.
C. A afirmação é falsa.
Contraexemplo: “O retângulo de dimensões 3 por 2 não é um quadrado”.
D. A afirmação é verdadeira.
E. A afirmação é verdadeira.
F. A afirmação é falsa.
Contraexemplo: “10,2 é menor do que 17 e não é inteiro”.
G. A afirmação é falsa.
Contraexemplo: “ $\sqrt{2}$ é um número real e não é um número racional”.
H. A afirmação é falsa.
Contraexemplo: “A correspondência não é uma função”.



2. Seja A : “O Carlos corar” e B : “O Carlos roubou”. Sabemos que $A \Rightarrow B$. B é uma condição necessária para que A ocorra, ou seja, se B não ocorrer, então A também não ocorre ($\sim B \Rightarrow \sim A$). Assim, a opção correta é a [D] Se o Carlos não roubou, então não vai corar.
3. As retas não coplanares são AB e CD ; AC e BD ; AD e BC , porque não existe nenhum plano que contenha cada um dos pares de retas.
4. A proposição é falsa porque, por exemplo, 2 é divisor de 60 (5×12) e 2 não divide 5. Assim, trata-se de uma implicação falsa porque o consequente é falso.
5. Se a esfera tem diâmetro 10 cm, então tem 5 cm de raio.

$$A_{\text{Superfície esférica}} = 4\pi r^2$$

$$A_{\text{Superfície esférica}} = 4 \times \pi \times 5^2 =$$

$$= 100\pi$$

$$\approx 314,1$$
 Logo, $A_{\text{Superfície esférica}} \approx 314,1 \text{ cm}^2$.

- 6.
- 6.1. $V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} Ab \times h$

$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 9 \times 5 \times 12 = 180$$

Logo, $V_{\text{Pirâmide}} = 180 \text{ cm}^3$.

- 6.2. $V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} Ab \times h$

$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 17^2 \times 21 = 2023$$
 Logo, $V_{\text{Pirâmide}} = 2023 \text{ cm}^3$.
- 6.3. $V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} Ab \times h$

$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} \times \frac{10 \times 7}{2} \times 14 = \frac{490}{3}$$
 Logo, $V_{\text{Pirâmide}} = \frac{490}{3} \text{ cm}^3$.

- 7.
- 7.1. Através do esquema, facilmente verificamos que a geratriz corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 5 cm (raio do círculo) e 21 cm (altura do cone). Assim, para determinar o seu comprimento, basta aplicar o teorema de Pitágoras:

$$g^2 = 5^2 + 21^2$$

$$\Leftrightarrow g^2 = 25 + 441$$

$$\Leftrightarrow g^2 = 466$$

$$\Leftrightarrow g = -\sqrt{466} \vee g = \sqrt{466}$$

Como $g > 0$, $g = \sqrt{466}$.

R.: O comprimento da geratriz do cone é $\sqrt{466} \text{ cm} \approx \approx 21,59 \text{ cm}$ (2 c.d.).

- 7.2.
$$\left. \begin{array}{l} A_b = \pi r^2 \\ r = 5 \end{array} \right\} A_b = \pi \times 5^2 \Leftrightarrow A_b = 25\pi$$

$$\left. \begin{array}{l} V = \frac{1}{3} \times A_b \times h \\ A_b = 25\pi \\ h = 21 \end{array} \right\} V = \frac{1}{3} \times 25\pi \times 21 \Leftrightarrow V = 175\pi$$

R.: O volume do cone é $175\pi \text{ cm}^3 \approx 549,78 \text{ cm}^3$ (2 c.d.).

- 8.
- 8.1. Pode obter-se um paralelepípedo.
- 8.2. $A_{\text{bases}} = 2 \times (12 \times 6) = 144$
 $A_{\text{faces laterais}} = 2 \times (12 \times 3) + 2 \times (3 \times 6) = 108$
 $A_{\text{Total}} = 144 + 108 = 252$
 R.: A área da superfície do sólido é 252 m^2 .

- 9.
- 9.1. A pirâmide tem 22 m de altura e a sua base é um quadrado com 34 m de lado.

$$\left. \begin{array}{l} V = \frac{1}{3} \times A_b \times h \\ A_b = 34 \times 34 = 1156 \\ h = 22 \end{array} \right\} \begin{array}{l} V = \frac{1}{3} \times 1156 \times 22 \\ \Leftrightarrow V = \frac{25\,432}{3} \end{array}$$

R.: O volume da pirâmide é $\frac{25\,432}{3} \text{ m}^3 \approx 8477,33 \text{ m}^3$ (2 c.d.).

- 9.2. A área lateral corresponde à área dos quatro triângulos das faces laterais.

Para calcular a área de cada um desses triângulos temos que determinar a sua altura. A altura corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 22 m e 17 m (metade do lado do quadrado da base da pirâmide). Aplicando o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} h^2 &= 22^2 + 17^2 \\ \Leftrightarrow h^2 &= 484 + 289 \\ \Leftrightarrow h^2 &= 773 \\ \Leftrightarrow h &= -\sqrt{773} \vee h = \sqrt{773} \\ \text{Como } h > 0, h &= \sqrt{773}. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{\text{triângulo}} = \frac{b \times h}{2} \\ A_b = 34 \\ h = \sqrt{773} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_{\text{triângulo}} = \frac{34\sqrt{773}}{2} \\ \Leftrightarrow A_{\text{triângulo}} = 17\sqrt{773} \end{array}$$

Temos então:

$$\begin{aligned} A_{\text{lateral}} &= 4 \times 17\sqrt{773} \\ A_{\text{lateral}} &= 68\sqrt{773} \text{ m}^2 \approx 1890,60 \text{ m}^2 \text{ (2 c.d.)}. \end{aligned}$$

10.

- 10.1. a) as retas AC e EG são estritamente paralelas.
b) a reta FG é paralela ao plano IHA .
c) os planos DCB e IKJ são estritamente paralelos.
d) as retas CB e DK são não coplanares.

- 10.2. A. A reta FB é perpendicular ao plano ADC porque é perpendicular às retas AB e BC , que são concorrentes e estão contidas no plano ADC .

B. O plano ABC é paralelo ao plano EFG porque contém duas retas concorrentes, AB e BC que são paralelas ao plano EFG .

- 10.3. Para calcular o volume do sólido, basta somar o volume do paralelepípedo e o volume do prisma.

Começamos por calcular o comprimento do segmento de reta AB , utilizando o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + 3^2 &= 5^2 \\ \Leftrightarrow \overline{AB}^2 &= 25 - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow \overline{AB} &= -\sqrt{16} \vee \overline{AB} = \sqrt{16} \\ \Leftrightarrow \overline{AB} &= -4 \vee \overline{AB} = 4 \\ \text{Como } \overline{AB} > 0, \overline{AB} &= 4. \end{aligned}$$

O prisma tem 3 cm de altura e a sua base é um triângulo com 4 cm de base e 3 cm de altura. O paralelepípedo tem 4 cm de comprimento, 3 cm de largura e 2 cm de altura. Assim:

$$\left. \begin{array}{l} V_{\text{prisma}} = A_b \times h \\ A_b = \frac{4 \times 3}{2} \\ h = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} V_{\text{prisma}} = \frac{4 \times 3}{2} \times 3 \\ \Leftrightarrow V_{\text{prisma}} = 18 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} V_{\text{paralelepípedo}} = A_b \times h \\ A_b = (4 \times 3) \\ h = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} V_{\text{paralelepípedo}} = 4 \times 3 \times 2 \\ \Leftrightarrow V_{\text{paralelepípedo}} = 24 \end{array}$$

$$V = 18 \text{ cm}^3 + 24 \text{ cm}^3 = 42 \text{ cm}^3$$

R.: O volume do sólido é 42 cm^3 .

11.

- 11.1. a) ABC e β , pois a sua interseção é um plano.
b) Por exemplo, EA e BC porque não existe nenhum plano que contenha estas duas retas.
c) Por exemplo, AB e BC porque têm um único ponto em comum, o ponto B .
d) Por exemplo, EA porque EA não é paralela nem está contida no plano β e intersesta-o exatamente num ponto, o ponto A .
e) E , F e C porque os três pontos definem a reta EC .

- 11.2. As retas r e AD são perpendiculares porque a reta AD está contida no plano β e a reta r é perpendicular a β em A .

- 11.3. A reta que contém a altura da pirâmide e passa no ponto E é perpendicular a β e a um plano que contém o ponto E e é paralelo a β .

12. Como $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} A_b \times h$ e $V_{\text{cilindro}} = A_b \times h$, o volume de água que fica no cilindro é $A_b \times h - \frac{1}{3} A_b \times h = \frac{2}{3} A_b \times h$.

$$\text{Assim, a razão é igual a } \frac{\frac{1}{3} A_b \times h}{\frac{2}{3} A_b \times h} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

13.

13.1. I. é uma condição necessária e suficiente para II.

Três pontos não colineares definem um plano e um plano é definido por três pontos não colineares.

13.2. I. é uma condição necessária para II.

Para ser um quadrado é necessário ter quatro ângulos retos, mas não é suficiente.

13.3. I. é uma condição necessária para II.

Para ser um quadrado é necessário ter quatro lados com o mesmo comprimento, mas não é suficiente.

13.4. I. é uma condição necessária e suficiente para II.

Um polígono com três lados é um triângulo e um triângulo é um polígono com três lados.

14. A demonstração apresentada pelo Filipe não está correta. Falta considerar o caso em que $x = 0$, ou seja, o quadrado de zero é igual a zero.
A proposição que o Filipe pretende demonstrar é falsa.

15.

15.1. A reta l é perpendicular ao plano definido pelas retas AC e BC porque l é perpendicular às retas AC e BC , que pertencem ao mesmo plano, por elas definido.

15.2. A reta l e o ponto C não definem um plano porque para definir um plano é necessário ter três pontos não colineares.

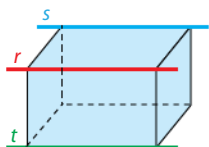
15.3. A opção [A] é falsa. A reta r é perpendicular a todas as retas contidas no plano definido por AC e BC que passam por C .

A opção [B] é falsa. A reta l só é perpendicular às retas que passam por C , mas que estão contidas no plano definido pelas retas AC e BC .

A opção [C] é falsa. A reta l não é perpendicular a retas do plano definido pelas retas AC e BC que não contenham o ponto C .

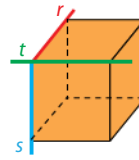
A opção [D] é verdadeira. A reta l é perpendicular ao plano definido pelas retas AC e BC no ponto C .

20 16. A.



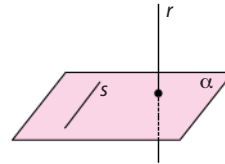
As retas r , s e t são paralelas e não são coplanares.

B.



As retas r e s são perpendiculares a t e não são paralelas entre si.

C.



A reta r é perpendicular ao plano α , mas não é perpendicular à reta s .

D.



A reta r não intersecta a reta s e r e s são coplanares.

17.

17.1. A parte em cimento da floreira corresponde à parte não ocupada pela terra. Assim, basta calcular a diferença entre o volume total da floreira (cubo com 50 cm de aresta) e o volume da parte que vai ficar com terra (prisma quadrangular de 50 cm de altura e cuja base é um quadrado com 40 cm de lado).

$$V_{\text{cubo}} = 50^3 = 125\,000$$

$$V_{\text{prisma}} = (40 \times 40) \times 50 = 80\,000$$

$$V = 125\,000 \text{ cm}^3 - 80\,000 \text{ cm}^3 = 45\,000 \text{ cm}^3$$

R.: A parte de cimento da floreira tem $45\,000 \text{ cm}^3$ de volume.

17.2. a) Por exemplo, as retas MN e NO .

b) A reta BC .

c) O plano ABC .

d) O plano IAC .

17.3. a) A distância do ponto N ao plano ADC é a distância do ponto N à sua projeção ortogonal no plano ADC , ou seja, $\overline{NF} = 50 \text{ cm}$.

b) 50 cm.

17.4. A reta JB é perpendicular ao plano ABC (plano que contém a base da floreira) porque é perpendicular às retas concorrentes AB e BC que estão contidas nesse plano.

18.

18.1. Reta BD .

18.2. Os planos BCG e ADH são estritamente paralelos. Sabemos isso porque o plano BCG contém duas retas concorrentes, BC e CG que são paralelas ao plano ADH .

18.3. a) A base da pirâmide (também uma das faces do cubo) é um quadrado com a cm de lado. A altura da pirâmide é, também, a cm. Então:

$$\left. \begin{array}{l} V = \frac{1}{3} \times A_b \times h \\ V = 9 \\ A_b = a^2 \\ h = a \end{array} \right\} \frac{1}{3} \times a^2 \times a = 9 \Leftrightarrow \frac{a^3}{3} = 9$$

$$\Leftrightarrow a^3 = 27 \Leftrightarrow a = 3$$

R.: A aresta do cubo tem 3 cm.

b) $D = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} \Leftrightarrow D = \sqrt{27}$

R.: A diagonal espacial tem $\sqrt{27}$ cm $\approx 5,20$ cm (2 c.d.).

c) A área lateral da pirâmide corresponde à área das quatro faces triangulares. Sabemos que a base do triângulo mede 3 cm, mas desconhecemos a sua altura. No entanto, sabemos que a sua altura que procuramos corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 cm e 1,5 cm.

$$h^2 = 3^2 + 1,5^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 9 + 2,25$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 11,25$$

$$\Leftrightarrow h = -\sqrt{11,25} \vee h = \sqrt{11,25}$$

Como $h > 0$, $h = \sqrt{11,25}$.

Calculemos então, a área do triângulo com 3 cm de base e $\sqrt{11,25}$ cm de altura:

$$A = \frac{3 \text{ cm} \times \sqrt{11,25} \text{ cm}}{2} \Leftrightarrow A = \frac{3\sqrt{11,25}}{2} \text{ cm}^2$$

Agora podemos calcular a área lateral pretendida:

$$A_{\text{lateral}} = 4 \times \frac{3\sqrt{11,25} \text{ cm}^2}{2} \Leftrightarrow A_{\text{lateral}} = 6\sqrt{11,25} \text{ cm}^2$$

R.: A área lateral da pirâmide é $6\sqrt{11,25} \text{ cm}^2 \approx 20,12 \text{ cm}^2$ (2 c.d.).

d) O volume do cubo não ocupado pela pirâmide corresponde à diferença entre o volume do cubo e o volume da pirâmide.

$$V_{\text{cubo}} = 3^3 = 27$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times (3 \times 3) \times 3 = 9$$

$$V = 27 \text{ cm}^3 - 9 \text{ cm}^3 = 18 \text{ cm}^3$$

R.: 18 cm^3 é o volume do cubo não ocupado pela pirâmide.

19.

$$\left. \begin{array}{l} V_{\text{cubo}} = a^3 \\ V_{\text{cubo}} = 8 \text{ dm}^3 \end{array} \right\} a^3 = 8 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow a = 2$$

R.: A aresta do cubo tem 2 dm.

19.2. As bases do cilindro são círculos com 1 dm de raio. A face lateral do cilindro é um retângulo com 2 dm de altura e cujo comprimento corresponde ao perímetro do círculo da base do cilindro.

$$\left. \begin{array}{l} A_b = \pi r^2 \\ r = 1 \end{array} \right\} A_b = \pi \times 1^2 \Leftrightarrow A_b = \pi$$

$$\left. \begin{array}{l} P_o = 2\pi r \\ r = 1 \end{array} \right\} P_o = 2\pi \times 1 \Leftrightarrow P_o = 2\pi$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 2 \times A_b + A_l \\ A_b = \pi \\ A_l = 2\pi \times 2 = 4\pi \end{array} \right\} A = 2 \times \pi + 4\pi \Leftrightarrow A = 6\pi$$

R.: A área total do cilindro é $6\pi \text{ dm}^2 \approx 18,85 \text{ dm}^2$ (2 c.d.).

$$\left. \begin{array}{l} V = A_b \times h \\ A_b = \pi \text{ dm}^2 \\ h = 2 \text{ dm} \end{array} \right\} V = \pi \times 2 \Leftrightarrow V = 2\pi$$

R.: O volume do cilindro é $2\pi \text{ dm}^3 \approx 6,28 \text{ dm}^3$ (2 c.d.).

20. 1º O dono da casa do centro (3ª casa) bebe leite. 8

2º O norueguês vive na 1ª casa. 9

3º O norueguês vive ao lado da casa azul, ou seja, a 2ª casa é azul. 14

4º A casa verde fica à esquerda da casa branca, ou seja, a casa verde é a 4ª casa. 4

5º O dono da casa verde (4ª casa) bebe café. 5

6º A casa branca é a 5ª casa porque a verde fica à sua esquerda. 4

7º O inglês vive na casa vermelha, ou seja, na 3ª casa. 1

8º O norueguês só pode viver na casa amarela, a 1ª casa.

9º O dono da casa amarela (1ª casa) joga voleibol. 7

10º O homem que cria cavalos vive ao lado do que joga voleibol, ou seja, na 2ª casa. 11

11º O homem que joga futebol é vizinho do que bebe água, ou seja, água na 1ª casa e futebol na 2ª casa. 15

12º O homem que joga golfe bebe sumo (5ª casa).

12

13º O alemão faz surf (4ª casa) 13

14º O inglês pratica natação (3ª casa).

15º O homem que pratica natação cria pássaros (3ª casa). 6

16º O homem da casa azul bebe chá, por exclusão de partes, é o dinamarquês. 3

17º O homem que joga futebol vive ao lado do que tem gatos, ou seja, o norueguês tem gatos (1ª casa). 10

18º Como o sueco tem cães e o alemão está na casa 4, os cães são da 5ª casa. 2

Então, por exclusão de partes, o alemão tem um peixe.

norueguês amarela voleibol água gatos	dinamarquês azul futebol chá cavalos	inglês vermelha natação leite pássaros	alemão verde surf café peixe	sueco branca golf sumo cães
Casa 1	Casa 2	Casa 3	Casa 4	Casa 5

21. Método da prova direta

Proposição: Se x é um número par e y é um número ímpar, então $x + y$ é um número ímpar.

Hipótese: x é um número par e y é um número ímpar

Tese: $x + y$ é um número ímpar

Demonstração: Se x é um número par, então é da forma $2a$, com $a \in \mathbb{Z}$.

Como y é um número ímpar, então é da forma $2b + 1$, com $b \in \mathbb{Z}$.

Então, $x + y = 2a + 2b + 1 = 2(a + b) + 1$.

Como $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$, então $a + b \in \mathbb{Z}$. Seja $w = a + b$.

Então, $w \in \mathbb{Z}$.

Como $x + y = 2w + 1$, com $w \in \mathbb{Z}$, então $x + y$ é um número ímpar.

22.

$$\left. \begin{array}{l} V_{\text{cubo}} = a^3 \\ V_{\text{cubo}} = 64 \end{array} \right\} a^3 = 64 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow a = 4$$

Assim, provamos que a aresta do cubo tem 4 cm de comprimento.

Para calcular o volume da pirâmide basta conhecer a área da sua base (a base da pirâmide é um quadrado com 4 cm de lado) e a sua altura (a altura da pirâmide é igual a metade do comprimento da aresta do cubo). Então:

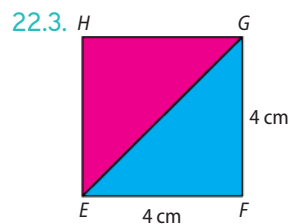
$$\left. \begin{array}{l} V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_b \times h \\ A_b = 4 \times 4 = 16 \\ h = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times (4 \times 4) \times 2 \\ \Leftrightarrow V_{\text{pirâmide}} = \frac{32}{3} \end{array}$$

R.: O volume da pirâmide é $\frac{32}{3} \text{ cm}^3 \approx 10,67 \text{ cm}^3$ (2 c.d.).

22.2. O volume do cubo não ocupado pela pirâmide corresponde à diferença entre o volume do cubo e o volume da pirâmide:

$$\left. \begin{array}{l} V_{\text{cubo}} = 64 \\ V_{\text{pirâmide}} = \frac{32}{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} V = 64 - \frac{32}{3} \\ \Leftrightarrow V = \frac{192}{3} - \frac{32}{3} \Leftrightarrow V = \frac{160}{3} \end{array}$$

R.: O volume do cubo não ocupado pela pirâmide é $\frac{160}{3} \text{ cm}^3 \approx 53,33 \text{ cm}^3$ (2 c.d.).



$$h^2 = 4^2 + 4^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 16 + 16$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 32$$

$$\Leftrightarrow h = -\sqrt{32} \vee h = \sqrt{32}$$

Como $h > 0$, $h = \sqrt{32}$.

Diagonal espacial:

$$D = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} \Leftrightarrow D = \sqrt{48}$$

R.: A diagonal facial tem $\sqrt{32} \text{ cm}$ ($\approx 5,66 \text{ cm}$) e a diagonal espacial tem $\sqrt{48} \text{ cm}$ ($\approx 6,93 \text{ cm}$).

22.4. A área total da pirâmide resulta da soma da área da base com a área lateral.

A área lateral da pirâmide corresponde à área das quatro faces triangulares. Sabemos que a base do triângulo mede 4 cm, mas desconhecemos a altura. No entanto, sabemos que a altura corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 2 cm e 2 cm.

$$h^2 = 2^2 + 2^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 4 + 4$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow h = -\sqrt{8} \vee h = \sqrt{8}$$

Como $h > 0$, $h = \sqrt{8}$.

Calculemos então, a área do triângulo com 4 cm de base e $\sqrt{8} \text{ cm}$ de altura:

$$A = \frac{4 \text{ cm} \times \sqrt{8} \text{ cm}}{2} \Leftrightarrow A = 2\sqrt{8} \text{ cm}^2$$

Agora, podemos calcular a área lateral pretendida:

$$A_{\text{lateral}} = 4 \times 2\sqrt{8} \text{ cm}^2 = 8\sqrt{8} \text{ cm}^2$$

Calculando a área total:

$$\left. \begin{array}{l} A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} \\ A_{\text{lateral}} = 8\sqrt{8} \\ A_{\text{base}} = 4 \times 4 = 16 \end{array} \right\} A_{\text{total}} = 8\sqrt{8} + 16$$

R.: A área lateral da pirâmide é $(8\sqrt{8} + 16) \text{ cm}^2 \approx 38,64 \text{ cm}^2$.

22.5. a) Por exemplo, planos EFG e EFV .

b) Por exemplo, planos ABC e BCG .

c) Por exemplo, retas EF e FG .

22.6. a) Por exemplo, reta FG .

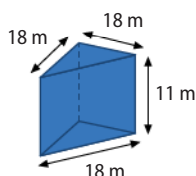
b) Por exemplo, reta BC .

c) Por exemplo, plano EHV .

22.7. As retas AB e VF são não coplanares porque não há nenhum plano que as contenha.

20 23.

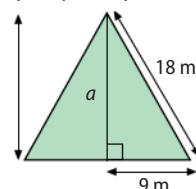
23.1.



As faces laterais são três retângulos com 41 m de comprimento e 18 m de largura.

$$A_{\text{lateral}} = 3 \times (18 \text{ m} \times 41 \text{ m}) = 2214 \text{ m}^2$$

As bases deste sólido são triângulos equiláteros (porque o prisma é regular). Assim:

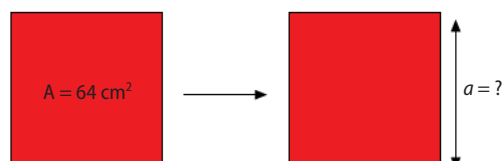


$$\begin{aligned} 18^2 &= a^2 + 9^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 324 - 81 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 243 \\ \Leftrightarrow a &= -\sqrt{243} \vee a = \sqrt{243} \\ \text{Como } a > 0, a &= \sqrt{243}. \end{aligned}$$

$$\text{Então, } A_{\text{bases}} = 2 \times \frac{18 \times \sqrt{243}}{2} = 18\sqrt{243}$$

$$A_{\text{superfície}} = (2214 + 18\sqrt{243}) \text{ m}^2 \approx 2494,59 \text{ m}^2 \text{ (2 c.d.)}.$$

23.2. A base é um quadrado com 64 m^2 de área. Vamos calcular a medida da aresta:



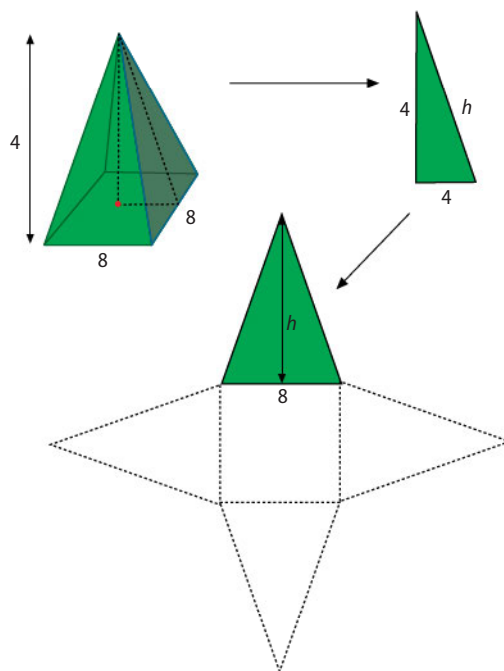
$$a^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow a = -\sqrt{64} \vee a = \sqrt{64}$$

$$\Leftrightarrow a = -8 \vee a = 8$$

Como $a > 0$, $a = 8$.

Calculemos a altura dos triângulos que constituem as faces laterais da pirâmide.



$$h^2 = 4^2 + 4^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 16 + 16$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 32$$

$$\Leftrightarrow h = -\sqrt{32} \vee h = \sqrt{32}$$

Como $h > 0$, $h = \sqrt{32}$.

$$\text{Assim, } A_{\text{faces laterais}} = 4 \times \frac{8 \times \sqrt{32}}{2} = 16\sqrt{32}.$$

$$A_{\text{base}} = 8 \times 8 = 64 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{superfície}} = (64 + 16\sqrt{32}) \text{ m}^2 \approx 154,51 \text{ m}^2 \text{ (2 c.d.)}.$$

24.

24.1. Sabemos que:

$$\left. \begin{array}{l} A_{\text{superfície}} = A_{\text{lateral}} + 50\pi \\ A_{\text{superfície}} = A_{\text{lateral}} + 2 \times A_{\text{base}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \times A_{\text{base}} = 50\pi \\ \Leftrightarrow A_{\text{base}} = 25\pi \end{array}$$

Também sabemos que $A_{\text{base}} = \pi r^2$.

$$\text{Então, } \pi r^2 = 25\pi$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{25\pi}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow r = -\sqrt{25} \vee r = \sqrt{25}$$

$$\Leftrightarrow r = -5 \vee r = 5$$

Como $r > 0$, $r = 5$.

R.: A base do cilindro tem 5 mm de raio.

24.2. A área lateral do cilindro corresponde à área de um retângulo com 10 mm de altura e cujo comprimento coincide com o perímetro do círculo da base do cilindro.

$$\left. \begin{array}{l} P_o = 2 \times \pi \times r \\ r = 5 \text{ mm} \end{array} \right\} P_o = 2\pi \times 5 \Leftrightarrow P_o = 10\pi \text{ mm}$$

Então, $A_{\text{lateral}} = 10\pi \times 10 = 100\pi$.

R.: A área lateral do cilindro é $100\pi \text{ mm}^2 \approx 314,16 \text{ mm}^2$ (2 c.d.).

25.

25.1. Como BD é perpendicular ao plano α , e β e α são paralelos, então a reta BD também é perpendicular ao plano β .

25.2. a) Por exemplo, a reta AD .

b) A reta AB .

c) O ponto D .

d) Por exemplo, as retas AB e AD .

e) Plano α .

25.3. Os ângulos DAB e ADC são ângulos alternos internos.

25.4. A distância entre os planos α e β é igual a $\overline{BD}$. Vamos calcular $\overline{BD}$, utilizando o teorema de Pitágoras.

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$$

$$\text{Assim, } \overline{BD}^2 = 5^2 - 3^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 25 - 9$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = 4$$

Logo, a distância entre os dois planos é 4 cm.

25.5. Sabemos que duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si. Como as retas AB e CD são paralelas, sendo s paralela à reta AB então também é paralela à reta CD .

25.6. Como se trata de um prisma quadrangular, tem duas faces de dimensões 3 por 3 e quatro faces de dimensões 3 por 4.

$$A_{[ABCD]} = 3 \times 4 = 12$$

$$A_{\text{Total}} = \frac{3 \times 4 \times 4}{\text{Área de 4 faces laterais}} + \frac{3 \times 3 \times 2}{\text{Área de 2 bases}} = 66$$

Logo, $A = 66 \text{ cm}^2$.

25.7. $V = Ab \times h$

$$V = \overline{CD}^2 \times \overline{BD}$$

$$V = 3 \times 3 \times 4 = 36$$

Logo, $V = 36 \text{ cm}^3$.

25.8. As retas v e AC são perpendiculares. Como a reta BD é perpendicular ao plano α e a reta AC é paralela à reta BD , então a reta AC é perpendicular ao plano α .

26.

26.1. Sabemos que o comprimento do arco AB (do setor circular representado) corresponde ao perímetro do círculo da base do cone, de raio 2 cm, ou seja:

$$P = 2 \times \pi \times 2 \text{ cm} = 4\pi \text{ cm}$$

Calculemos agora o perímetro do círculo com 12 cm de raio:

$$P = 2 \times \pi \times 12 \text{ cm} = 24\pi \text{ cm}$$

Assim, para determinar α :

$$24\pi \text{ cm} \text{ ————— } 360^\circ$$

$$4\pi \text{ cm} \text{ ————— } \alpha$$

$$\alpha = \frac{4\pi \times 360}{24\pi} = 60^\circ$$

R.: O ângulo α tem 60° de amplitude.

26.2. A área da superfície do cone corresponde à soma da área da base (círculo com 2 cm de raio) com a área lateral (setor circular de 12 cm de raio e com 60° de amplitude):

$$\left. \begin{array}{l} A_{\text{base}} = \pi \times r^2 \\ r = 2 \end{array} \right\} A_{\text{base}} = \pi \times 2^2 \Leftrightarrow A_{\text{base}} = 4\pi$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{\text{círculo}} = \pi \times r^2 \\ r = 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_{\text{círculo}} = \pi \times 12^2 \\ \Leftrightarrow A_{\text{círculo}} = 144\pi \end{array}$$

Sabemos a área do círculo com 12 cm de raio, contudo, a área pretendida é a área do setor circular com 60° de amplitude:

$$144\pi \text{ cm} \text{ ————— } 360^\circ$$

$$x \text{ ————— } 60^\circ$$

$$x = \frac{144\pi \times 60}{360} = 24\pi \text{ cm}^2$$

Então, a área da superfície do cone será:

$$A_{\text{superfície}} = A_{\text{base}} + A_{\text{setor circular}}$$

$$A_{\text{superfície}} = 4\pi \text{ cm}^2 + 24\pi \text{ cm}^2 = 28\pi \text{ cm}^2$$

R.: A área da superfície do cone é $28\pi \text{ cm}^2 \approx 87,96 \text{ cm}^2$ (2 c.d.).

26.3. Já calculamos a área da base do cone, na alínea anterior. Calculemos a altura do cone, sabendo que essa altura corresponde a um dos catetos de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é a geratriz do cone (12 cm) e o outro cateto é o raio da base (2 cm). Então, aplicando o teorema de Pitágoras:

$$a^2 + 2^2 = 12^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 144 - 4$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 140$$

$$\Leftrightarrow a = -\sqrt{140} \vee a = \sqrt{140}$$

Como $a > 0$, $a = \sqrt{140}$.

Assim:

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times h \\ A_{\text{base}} &= 4\pi \\ h &= \sqrt{140} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times 4\pi \times \sqrt{140} \\ \Leftrightarrow V &= \frac{4\sqrt{140}}{3} \pi \end{aligned}$$

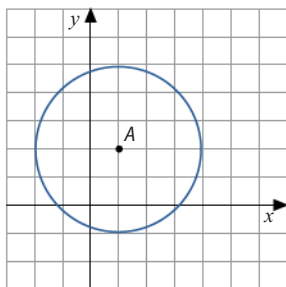
R.: O volume do cone é $\frac{4\sqrt{140}}{3} \pi \text{ cm}^3 \approx 49,56 \text{ cm}^3$ (2 c.d.).

Aplicar – páginas 68 e 69

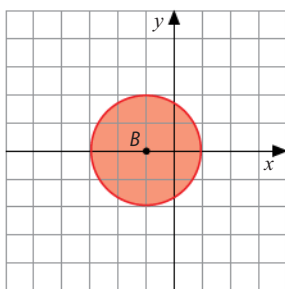
2. [C] a mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

20 3.

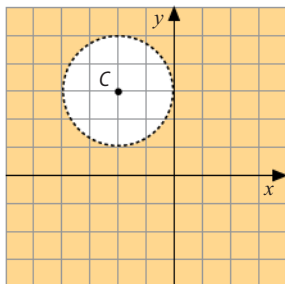
3.1.



3.2.

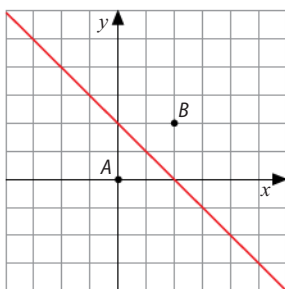


3.3.



20 4.

4.1.

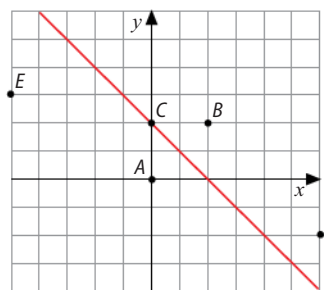


4.2. Se M é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, então as coordenadas do ponto M são $(1, 1)$. O segmento de reta $[AM]$ corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1 unidade. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \overline{AM}^2 &= 1^2 + 1^2 \\ \Leftrightarrow \overline{AM}^2 &= 1 + 1 \\ \Leftrightarrow \overline{AM}^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow \overline{AM} &= \sqrt{2} \vee \overline{AM} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

R.: Como o comprimento de um segmento de reta é sempre positivo, então $\overline{AM} = \sqrt{2}$.

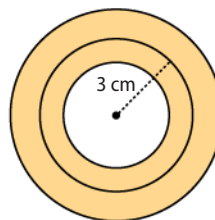
4.3.



O ponto C pertence à mediatriz do segmento de reta $[AB]$, mas os pontos D e E não pertencem, como podemos constatar graficamente.

5. [C] verifica, simultaneamente, as condições I. e II.

20 6.



7.

7.1. $P_{[ABC]} = \overline{AP} + \overline{PB} + \overline{AB}$

$$P_{[ABC]} = 5 + 5 + 6 = 16$$

Logo, $P_{[ABC]} = 16 \text{ cm}$

7.2. Pelo teorema de Pitágoras, sabemos que

$$\overline{AP}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{AM}^2$$

Assim, $5^2 = \overline{MP}^2 + 3^2$

$$\Leftrightarrow \overline{MP}^2 = 25 - 9$$

$$\Leftrightarrow \overline{MP}^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \overline{MP} = \pm 4$$

Como $\overline{MP} > 0$, então $\overline{MP} = 4 \text{ cm}$.

- 20 8.** No desenho, o terreno retangular tem 18 m de comprimento e 4 m de largura.

$$1 \text{ — } 200$$

$$x \text{ — } 4$$

$$x = \frac{4}{200} = 0,02 \text{ m} = 2 \text{ cm}$$

$$1 \text{ — } 200$$

$$y \text{ — } 18$$

$$y = \frac{18}{200} = 0,09 \text{ m} = 9 \text{ cm}$$

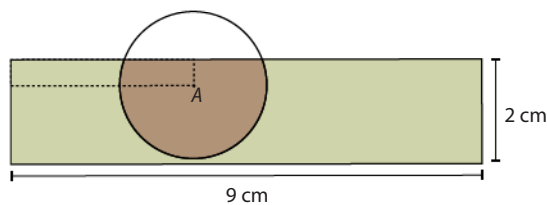
$$1 \text{ — } 200$$

$$z \text{ — } 7$$

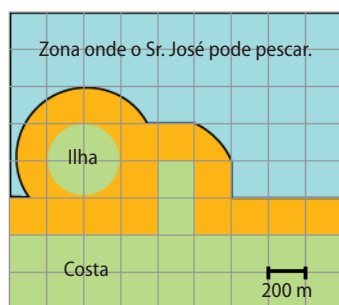
$$z = \frac{7}{200} = 0,035 \text{ m} = 3,5 \text{ cm}$$

Aplicando a escala, o terreno no esquema terá 2 cm de largura e 9 cm de comprimento. 7 m do terreno correspondem a 3,5 cm no esquema e 3 m correspondem a 1,5 cm.

Assim, a cabra alcança a parte do terreno compreendido no círculo de raio 1,5 cm representado, ou seja, a parte colorida do esquema:



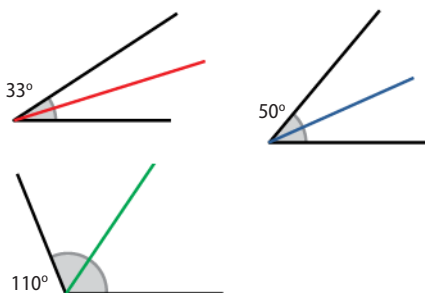
- 20 9.**



Aplicar – páginas 72 e 73

- 20 2.**

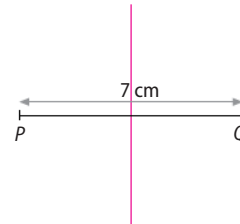
2.1.



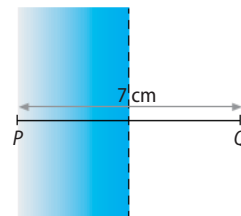
- 2.2. “Com a construção da bissetriz, cada um dos ângulos ficou dividido em **dois ângulos geometricamente iguais.**”

- 20 3.**

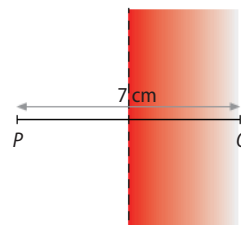
3.1.



3.2.

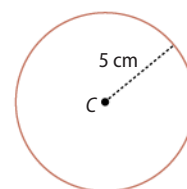


3.3.

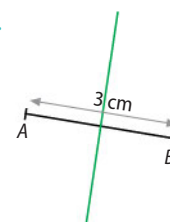


- 20 4.**

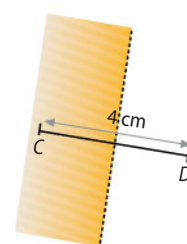
4.1.



4.2.

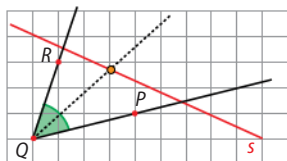


4.3.



5. Lugar geométrico dos pontos do plano que distam 3 cm ou menos do ponto C e que estão mais próximos do ponto A do que do ponto B .

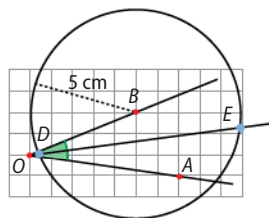
- 20 6. Vamos desenhar a bissetriz do ângulo PQR e intersecá-la com a reta s .
(o ponto pretendido está representado a laranja)



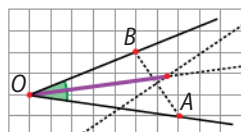
7. É uma reta paralela às retas paralelas consideradas no enunciado, que passa pelos centros das circunferências tangentes, ou seja, é uma reta equidistante das duas retas paralelas consideradas.
8. É uma circunferência com o mesmo centro mas com 5 cm de raio.

20 9.

- 9.1. Os pontos que distam 5 cm do ponto B são os pontos da circunferência representada. Os pontos que procuramos são os pontos D e E , que além de pertencerem à circunferência, pertencem também à bissetriz do ângulo.



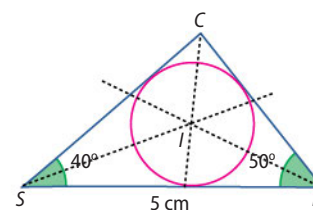
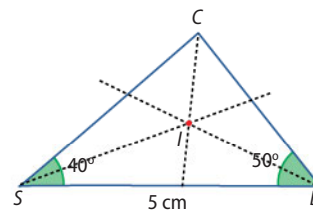
- 9.2. Vamos traçar a mediatriz do segmento de reta $[AB]$ para determinar os pontos (pertencentes à bissetriz) que se encontram mais próximos de B do que de A . Esses pontos estão marcados a violeta.



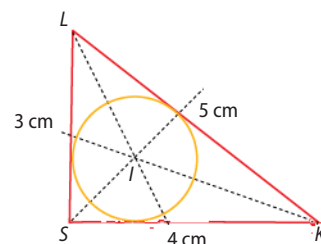
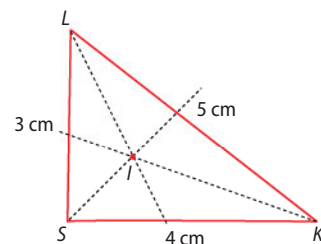
Aplicar – páginas 78 e 79

20 2.

- 2.1. Vamos determinar o incentro do triângulo $[SCB]$.

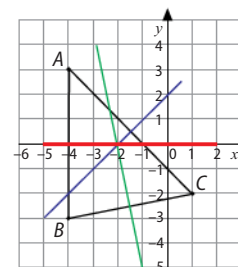


- 2.2. Vamos determinar o incentro do triângulo $[SLK]$.



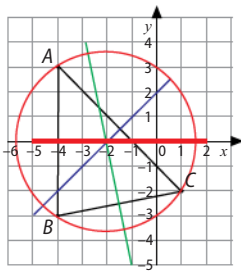
20 3.

- 3.1. Na figura estão representadas as mediatrizes dos segmentos de reta $[AB]$, $[AC]$ e $[BC]$.



- 3.2. O ponto de interseção das três retas representadas designa-se por circuncentro.

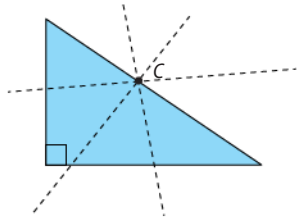
3.3.



20 4. A. A afirmação é verdadeira.

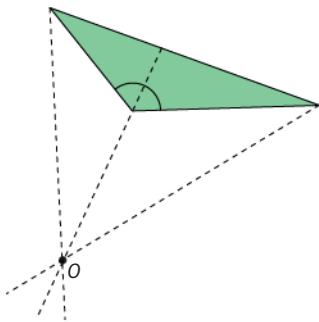
B. A afirmação é falsa.

O circuncentro de um triângulo retângulo situa-se na hipotenusa.



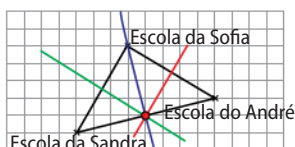
C. A afirmação é falsa.

O ortocentro de um triângulo obtusângulo situa-se no exterior da circunferência.



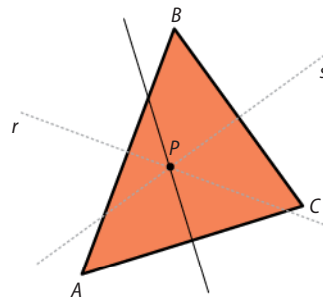
D. A afirmação é verdadeira.

20 5. Se “desenharmos” os caminhos que unem as três escolas obtemos um triângulo. Calcular o ponto equidistante dos três vértices desse triângulo consiste em determinar o circuncentro do triângulo. Para isso, basta traçar as mediatrizes e encontrar o ponto comum (representado a vermelho). Esse ponto representa o local onde está escondida a chave.



20 6.

6.1.



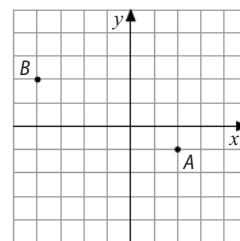
6.2. Circuncentro

6.3. $\frac{3}{2}$ da medida encontrada.

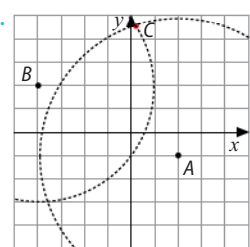
7. O centro da circunferência coincide com o circuncentro de um qualquer triângulo inscrito na circunferência. O Ângelo deveria construir um triângulo inscrito na circunferência, traçar as mediatrizes e encontrar o ponto de interseção (centro da circunferência).

20 8.

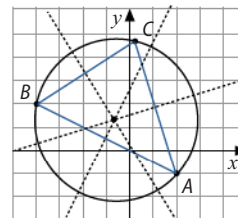
8.1.



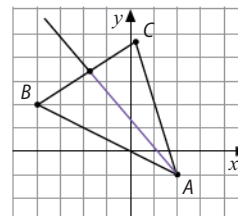
8.2.



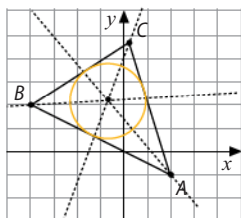
8.3. Para inscrever um triângulo numa circunferência, começamos por traçar as mediatrizes e assim encontrar o centro da circunferência.



8.4. Encontram-se assinalados a roxo os pontos do triângulo que pertencem ao eixo de simetria do ângulo CAB.



- 8.5. A circunferência tangente aos lados do triângulo é a circunferência inscrita no triângulo. Para a traçar devemos encontrar o incentro do triângulo, ou seja, o ponto de interseção das bissetrizes dos seus ângulos internos.



- 8.6. Observando as mediatrizes desenhadas em 8.3., facilmente compreendemos que nenhum dos vértices pertence à mediatriz do segmento de reta que lhe é oposto, portanto, o triângulo é escaleno. De novo, observando as mediatrizes, podemos constatar que o triângulo é acutângulo, pois o circuncentro encontra-se no interior do triângulo. Basta pensar que, se fosse retângulo, a mediatriz de qualquer um dos catetos dividiria o triângulo em dois triângulos semelhantes e intersectaria a hipotenusa no seu ponto médio, fazendo com que o circuncentro fosse um ponto do triângulo. Aplicando o mesmo raciocínio, se fosse obtusângulo, o circuncentro seria um ponto exterior ao triângulo.

9. Como MN é paralela a AC , os triângulos $[ABC]$ e $[MBN]$ são semelhantes. Assim, como NS é paralela a CM , NS é uma mediana do triângulo $[MBN]$ e, por isso, S é o ponto médio de $[BM]$.

A razão da semelhança que transforma o triângulo $[MNP]$ no triângulo $[ACP]$ é igual a 2.

$$\text{Assim, } \frac{\overline{AP}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AP} + \overline{PN}} = \frac{2 \times \overline{NP}}{3 \times \overline{NP}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Logo, } \overline{AP} = \frac{2}{3} \overline{AN}.$$

Aplicar – páginas 82 e 83

- 20 2. Sim, o arco CD é geometricamente igual ao arco FE . O quadrilátero $[CDEF]$ é um retângulo, logo os segmentos de reta $[EC]$ e $[FD]$ são paralelos. Arcos compreendidos entre cordas paralelas são geometricamente iguais, portanto os arcos CD e FE são geometricamente iguais.

20 3.

- 3.1. Como a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, podemos dizer que $x = 68^\circ$.

Os ângulos x e y são suplementares, logo a soma das suas amplitude é 180° . Assim, $y = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$.

- 3.2. x é verticalmente oposto a um ângulo ao centro cuja amplitude do arco correspondente é de 44° . Como dois ângulos verticalmente opostos têm a mesma amplitude e como a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, então $x = 44^\circ$.

Os ângulos x e y são suplementares, logo a soma das suas amplitudes é de 180° . Assim, $y = 180^\circ - 44^\circ = 136^\circ$.

- 3.3. Como a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, podemos dizer que $x = 282^\circ$.

Então, $y = 360^\circ - 282^\circ = 78^\circ$.

4.

- 4.1. Como a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, então a amplitude do ângulo JKA é 36° .

$$\widehat{GKJ} = 180^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 108^\circ$$

- 4.2. Sim, as cordas $[FG]$ e $[JA]$ são geometricamente iguais, pois numa circunferência, a ângulos ao centro geometricamente iguais correspondem cordas geometricamente iguais.

20 5.

Qualquer trapézio tem um par de lados paralelos. Neste trapézio em particular, os segmentos de reta $[DA]$ e $[CB]$ são paralelos. Sabemos que cordas compreendidas entre cordas paralelas são geometricamente iguais, logo os segmentos de reta $[DC]$ e $[AB]$ têm o mesmo comprimento, ou seja, o trapézio é isósceles.

Num qualquer trapézio inscrito numa circunferência, os lados não paralelos são compreendidos entre duas cordas paralelas, logo esses lados são geometricamente iguais e, portanto, o trapézio é isósceles.

6. A tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência, logo o triângulo $[CDA]$ é retângulo em D .

$$\widehat{DAC} = 180^\circ - 41^\circ - 90^\circ = 49^\circ \text{ (a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é } 180^\circ \text{).}$$

Sabemos que a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo o arco DE tem 49° de amplitude. Assim, $\widehat{DBE} = 360^\circ - 49^\circ = 311^\circ$.

20 7.

7.1. a) A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo $\widehat{GF} = 87^\circ$.

b) $\widehat{FIG} = 360^\circ - 87^\circ = 273^\circ$

7.2. Arcos compreendidos entre cordas paralelas são geometricamente iguais, logo $\widehat{DG} = \widehat{FC}$.

7.3. a) $\widehat{DG} = \widehat{DF} - \widehat{GF}$
 $\widehat{DG} = 121^\circ - 87^\circ = 34^\circ$

Pela alínea anterior, podemos dizer que $\widehat{CF} = 34^\circ$.

b) $\widehat{DGC} = 34^\circ + 87^\circ + 34^\circ = 155^\circ$

Então, $\widehat{CID} = 360^\circ - 155^\circ = 205^\circ$.

7.4. Num triângulo, a lados de igual comprimento opõem-se ângulos com a mesma amplitude. Os segmentos de reta $[AG]$ e $[AF]$ têm o mesmo comprimento, pois são ambos raios da circunferência, logo $\widehat{FGA} = \widehat{AFG}$.

7.5. a) Sabendo que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° e utilizando a alínea anterior:

$$\widehat{FGA} = \frac{180^\circ - 87^\circ}{2} \Leftrightarrow \widehat{FGA} = 46,5^\circ$$

b) As cordas $[DC]$ e $[GF]$ são paralelas, logo:

$$\widehat{AEH} = \widehat{AFG} = 46,5^\circ$$

Então, $\widehat{CEA} = 180^\circ - 46,5^\circ = 133,5^\circ$.

8. Vamos começar por traçar as retas r e s , perpendiculares a HJ e que passam por A e por C , respetivamente.

Os segmentos de reta $[HE]$ e $[EJ]$ são cordas das circunferências de centros A e C respetivamente. Qualquer reta perpendicular a uma corda no seu ponto médio divide a corda em duas partes geometricamente iguais. Assim:

– se M é o ponto médio da corda $[HE]$, então $\overline{HM} = \overline{ME}$;

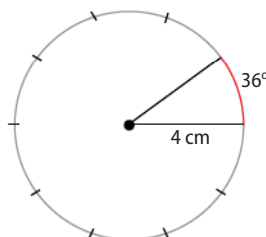
– se N o ponto médio da corda $[EJ]$, então $\overline{EN} = \overline{NJ}$.

As retas r e s são paralelas, pois são ambas perpendiculares a HJ e os segmentos de reta $[AC]$ e $[HJ]$ são paralelos, pois são ambos perpendiculares à reta r . Então, os segmentos de reta $[AC]$ e $[MN]$ são geometricamente iguais, ou seja, $\overline{AC} = \overline{MN}$.

Tendo em conta todas estas igualdades, vamos reescrever o comprimento do segmento de reta $[HJ]$:

$$\begin{aligned} \overline{HJ} &= \overline{HM} + \overline{MN} + \overline{NJ} \\ \Leftrightarrow \overline{HJ} &= \overline{ME} + \overline{AC} + \overline{EN} \\ \Leftrightarrow \overline{HJ} &= \overline{ME} + \overline{EN} + \overline{AC} \\ \Leftrightarrow \overline{HJ} &= \overline{AC} + \overline{AC} \\ \Leftrightarrow \overline{HJ} &= 2\overline{AC} \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

9.



20 10. Qualquer reta perpendicular a uma corda no seu ponto médio divide os arcos em duas partes geometricamente iguais.

Então, $\widehat{AD} = \widehat{DB} = 144^\circ$ e, consequentemente, $\widehat{AB} = 360^\circ - 144^\circ - 144^\circ = 72^\circ$.

Numa circunferência, a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco correspondente, logo $\widehat{AOB} = 72^\circ$.

O triângulo $[AOB]$ é isósceles, pois dois dos lados têm o mesmo comprimento (são raios da circunferência). A lados de igual comprimento opõem-se ângulos com a mesma amplitude:

$$\widehat{ABO} = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} \Leftrightarrow \widehat{ABO} = 54^\circ$$

20 11.

11.1. $\widehat{ED} = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$

Numa circunferência, a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco correspondente, logo $\widehat{DGE} = 60^\circ$.

11.2. $[FC]$ é um diâmetro da circunferência.

$$\widehat{EGF} = 60^\circ \text{ e } \widehat{DGE} = 60^\circ$$

$$\widehat{CGD} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

O triângulo $[GDC]$ é isósceles, pois dois dos seus lados têm o mesmo comprimento (são raios da circunferência). A lados de igual comprimento opõem-se ângulos com a mesma amplitude:

$$\widehat{CDG} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} \Leftrightarrow \widehat{CDG} = 60^\circ$$

Assim, os três ângulos internos do triângulo $[GDC]$ têm 60° de amplitude. Como, num triângulo, a ângulos de igual amplitude opõem-se lados com o mesmo comprimento, então o triângulo é equilátero.

Aplicar – páginas 86 e 87

2. O comprimento de um arco de circunferência com x° de amplitude pode ser calculado da seguinte forma:

$$\text{Comprimento do arco} = \frac{x \pi r}{180}$$

A área de um setor circular com x° de amplitude pode ser calculada da seguinte forma:

$$\text{Área do setor circular} = \frac{x \pi r^2}{360}$$

- 2.1. raio = 1 cm

$$\text{Comprimento do arco} = \frac{180\pi \times 1}{180} = \pi$$

$$\text{Área do setor circular} = \frac{180\pi \times 1^2}{360} = \frac{1}{2} \pi$$

R.: O arco tem π cm de comprimento e o setor circular tem $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ cm² de área.

- 2.2. raio = 2 cm

$$\text{Comprimento do arco} = \frac{54\pi \times 2}{180} = \frac{108\pi}{180} = \frac{3}{5} \pi$$

$$\text{Área do setor circular} = \frac{54\pi \times 2^2}{360} = \frac{3}{5} \pi$$

R.: O arco tem $\left(\frac{3}{5} \pi\right)$ cm de comprimento e o setor circular tem $\left(\frac{3}{5} \pi\right)$ cm² de área.

- 2.3. raio = 10 cm

$$\text{Comprimento do arco} = \frac{230\pi \times 10}{180} = \frac{2300\pi}{180} = \frac{115}{9} \pi$$

$$\text{Área do setor circular} = \frac{230\pi \times 10^2}{360} = \frac{575}{9} \pi$$

R.: O arco tem $\left(\frac{115}{9} \pi\right)$ cm de comprimento e o setor circular tem $\left(\frac{575}{9} \pi\right)$ cm² de área.

3. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados:

$$3.1. \hat{\alpha} = \frac{43}{2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 21,5^\circ$$

$$3.2. \hat{\alpha} = \frac{32}{2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 16^\circ$$

$$3.3. \hat{\alpha} = \frac{180}{2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 90^\circ$$

4.

- 4.1. O ângulo ABC é um ângulo inscrito no mesmo arco do ângulo ao centro AOB . Como a amplitude de um ângulo ao centro é o dobro da amplitude do ângulo

inscrito correspondente e $\hat{ABC} = 60^\circ$, então $\hat{AOC} = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$.

- 4.2. O ângulo ao centro do setor circular representado tem 120° de amplitude e a área do setor circular é igual a $\frac{4}{3} \pi$ cm².

$$\text{Assim, } \frac{120^\circ \times A_{\text{circular}}}{360^\circ} = \frac{4}{3} \pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{120^\circ \times \pi \times r^2}{360^\circ} = \frac{4}{3} \pi$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{4}{3} \pi \times \frac{360^\circ}{120^\circ \pi}$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow r = \pm 2$$

Como $r > 0$, então $r = 2$ cm.

20 5.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{x \pi r}{180} \\ \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{\pi}{27} \\ r = 12 \text{ mm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{x \pi \times 12}{180} = \frac{\pi}{27} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{15} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 27x = 15 \\ \Leftrightarrow x = \frac{15}{27} \Leftrightarrow x = \frac{5}{9} \end{array}$$

O arco BA tem $\left(\frac{5}{9}\right)^\circ$ de amplitude. A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Assim, $\hat{BOA} \approx 0,56^\circ$.

6.

- 6.1. $\hat{BCA} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$, porque a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Área do setor} \\ \text{circular} = \frac{x \pi r^2}{360} \\ \text{Área do setor circular} = \frac{\pi}{2} \\ x = 30^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{30\pi r^2}{360} = \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{r^2}{12} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2r^2 = 12 \\ \Leftrightarrow r^2 = 6 \\ \Leftrightarrow r = -\sqrt{6} \vee r = \sqrt{6} \end{array}$$

R.: A circunferência tem $\sqrt{6}$ cm de raio.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{x \pi r}{180} \\ r = \sqrt{6} \\ x = 30 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Comprimento do arco} = \\ = \frac{30\sqrt{6}\pi}{180} = \frac{\sqrt{6}}{6} \pi \end{array}$$

R.: O arco BA tem $\left(\frac{\sqrt{6}}{6} \pi\right)$ cm de comprimento.

- 6.3. O setor circular assinalado a amarelo tem 330° de amplitude. Vamos calcular a sua área sabendo que tem $\sqrt{6}$ cm de raio.

$$\text{Área do setor circular} = \frac{x \pi r^2}{360}$$

$$\text{Área do setor circular} = \frac{330\pi \times (\sqrt{6})^2}{360}$$

$$\Leftrightarrow \text{Área do setor circular} = \frac{198\pi}{36}$$

$$\Leftrightarrow \text{Área do setor circular} = \frac{11}{2} \pi$$

R.: O setor circular assinalado a amarelo tem

$$\left(\frac{11}{2} \pi\right) \text{ cm}^2 \text{ de área.}$$

20 7.

- 7.1. A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Então, $\widehat{FAB} = 40^\circ$.

Pela mesma razão, sabendo que $\widehat{GAC} = 40^\circ$, então $\widehat{GC} = 40^\circ$.

- 7.2. Os ângulos FAB e DAI são verticalmente opostos, portanto têm a mesma amplitude. Se $\widehat{DAI} = 40^\circ$, então o arco compreendido entre os seus lados tem 40° . Assim, $\widehat{DI} = 40^\circ$.

$\widehat{FB} = \widehat{DI}$, como queríamos demonstrar.

- 7.3. Sabemos que comprimento do arco $= \frac{x \pi r}{180}$.

Como $r = 10$ e $x = 40^\circ$, então

$$\text{Comprimento do arco} = \frac{40\pi \times 10}{180}$$

$$\Leftrightarrow \text{Comprimento do arco} = \frac{20}{9} \pi$$

R.: O arco DI tem $\left(\frac{20}{9} \pi\right)$ cm² de comprimento.

- 7.4. $\overline{AC} = \frac{3}{5} \times 10 = 6$ cm

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{FB} + \widehat{BD} = 180^\circ \\ \widehat{FB} = 40^\circ \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \widehat{BD} = 180^\circ - 40^\circ \\ \widehat{BD} = 140^\circ \end{array}$$

A zona colorida corresponde à diferença entre a área do setor circular com 10 cm de raio e 140° de amplitude e o setor circular com a mesma amplitude e 6 cm de raio.

$$A = \frac{140\pi \times 10^2}{360} - \frac{140\pi \times 6^2}{360}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{14000}{360} \pi - \frac{5040}{360} \pi$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{350}{9} \pi - \frac{126}{9} \pi$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{224}{9} \pi$$

R.: A zona colorida tem $\left(\frac{224}{9} \pi\right)$ cm² de área.

Aplicar- páginas 90 e 91

20 2.

- 2.1. A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo $\widehat{x} = 110^\circ$.

A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo $\widehat{y} = 55^\circ$.

- 2.2. Ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência são geometricamente iguais. Então, $\widehat{x} = 36^\circ$ e $\widehat{y} = 36^\circ$.

- 2.3. Ângulos inscritos numa semicircunferência são retos. O triângulo representado é isósceles e sabemos que, num triângulo, a lados de igual comprimento opõem-se ângulos com a mesma amplitude. Então, $\widehat{x} = \widehat{y}$ e $\widehat{x} + \widehat{y} = 90^\circ$.

$$\widehat{x} = 45^\circ \text{ e } \widehat{y} = 45^\circ$$

3. Como δ é um ângulo inscrito numa semicircunferência, $\delta = 90^\circ$.

Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , logo:

$$\widehat{\alpha} + 24^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\alpha} = 66^\circ$$

Como a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente, logo $\widehat{\beta} = 2 \times 24^\circ = 48^\circ$.

20 4.

- 4.1. A tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência, logo:

$$\widehat{x} + 65^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{x} = 25^\circ$$

Ângulos inscritos numa semicircunferência são retos. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Então:

$$\widehat{y} + 25^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{y} = 65^\circ$$

- 4.2. Ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência são geometricamente iguais. Então, $\widehat{x} = 38^\circ$.

Ângulos verticalmente opostos têm a mesma amplitude. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

Então:

$$\widehat{y} + 111^\circ + 38^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{y} = 31^\circ$$

4.3. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , logo $\hat{x} + 90^\circ + 28^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{x} = 62^\circ$. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente, logo $\hat{y} = 31^\circ$.

5. Como a amplitude de um ângulo de um segmento é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados e $B\hat{V}A = 70^\circ$, então $B\hat{V} = 2 \times 70^\circ = 140^\circ$. Então, $V\hat{C}B = 360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$.

6. Como o ângulo CBA é um ângulo ex-inscrito, $C\hat{B}A = \frac{\widehat{DB} + \widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{DBC}}{2} = \frac{360^\circ - \widehat{DC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} - \frac{\widehat{DC}}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{DC}}{2}$. Como o arco DC é o arco correspondente ao ângulo inscrito DBC , então $D\hat{B}C = \frac{\widehat{DC}}{2}$ e, portanto, $C\hat{B}A = 180^\circ - D\hat{B}C$.

20 7. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , logo:

$$E\hat{D}C + 22^\circ + 81^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow E\hat{D}C = 77^\circ$$

Consideremos a reta r que contém os pontos D e C . A reta r intersesta as cordas paralelas $[FC]$ e $[ED]$, logo $F\hat{C}D = 180^\circ - 77^\circ \Leftrightarrow F\hat{C}D = 103^\circ$ e, em consequência disso, $F\hat{C}E = 103^\circ - 81^\circ \Leftrightarrow F\hat{C}E = 22^\circ$.

A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo $E\hat{D} = 162^\circ$ e $D\hat{C} = 44^\circ$ e, portanto, $E\hat{D}C = 206^\circ$. Então, $C\hat{F}E = 103^\circ$.

Calculemos a amplitude de α , um dos ângulos internos do triângulo $[EFC]$, sabendo que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° :

$$\alpha + 22^\circ + 103^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 55^\circ$$

20 8. Os três ângulos internos de um triângulo equilátero têm 60° de amplitude. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo $\widehat{DF} = 120^\circ$.

A tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Então, $C\hat{B}D = 90^\circ - 51^\circ \Leftrightarrow C\hat{B}D = 39^\circ$. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo $\widehat{CD} = 78^\circ$.

Como $[ABC]$ é um triângulo isósceles e a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então $B\hat{A}C = 180^\circ - (2 \times 39^\circ) \Leftrightarrow B\hat{A}C = 102^\circ$.

A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo $\widehat{CB} = 102^\circ$.

$$\widehat{BF} = 360^\circ - 120^\circ - 102^\circ - 78^\circ \Leftrightarrow \widehat{BF} = 60^\circ$$

Aplicar – páginas 94 e 95

2. O ângulo α é um ângulo excêntrico, cujo vértice se encontra no interior da circunferência mas não é o centro da circunferência:

$$2.1. \alpha = \frac{60^\circ + 40^\circ}{2} \Leftrightarrow \alpha = 50^\circ$$

$$2.2. \alpha = \frac{127^\circ + 74^\circ}{2} \Leftrightarrow \alpha = 100,5^\circ$$

$$2.3. \alpha = \frac{45^\circ + 26^\circ}{2} \Leftrightarrow \alpha = 35,5^\circ$$

3. O ângulo β é um ângulo excêntrico cujo vértice se encontra no exterior da circunferência:

$$3.1. \beta = \frac{119^\circ - 42^\circ}{2} \Leftrightarrow \beta = 38,5^\circ$$

$$3.2. \beta = \frac{119^\circ - 31^\circ}{2} \Leftrightarrow \beta = 44^\circ$$

$$3.3. \beta = \frac{198^\circ - 50^\circ}{2} \Leftrightarrow \beta = 74^\circ$$

20 4. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo $F\hat{C}G = 21^\circ$.

Ângulos verticalmente opostos têm a mesma amplitude, logo:

$$C\hat{H}G = \frac{360^\circ - 84^\circ - 84^\circ}{2} \Leftrightarrow C\hat{H}G = 96^\circ$$

A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , logo:

$$H\hat{G}C = 180^\circ - 21^\circ - 96^\circ \Leftrightarrow H\hat{G}C = 63^\circ$$

Mais uma vez, sabendo que a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, podemos concluir que $\widehat{CE} = 126^\circ$.

O ângulo α é um ângulo excêntrico cujo vértice se encontra no exterior da circunferência:

$$\alpha = \frac{126^\circ - 42^\circ}{2} \Leftrightarrow \alpha = 42^\circ$$

R.: O ângulo α tem 42° de amplitude.

- 20 5.** Ângulos verticalmente opostos têm a mesma amplitude, logo:

$$\widehat{EGD} = \frac{360^\circ - 48^\circ - 48^\circ}{2} \Leftrightarrow \widehat{EGD} = 132^\circ$$

O ângulo EGD é excêntrico e o seu vértice encontra-se no interior da circunferência. Então:

$$\frac{\widehat{CF} + 77^\circ}{2} = 132^\circ \Leftrightarrow \widehat{CF} + 77^\circ = 264^\circ \Leftrightarrow \widehat{CF} = 187^\circ$$

R.: O arco CF tem 187° de amplitude.

- 20 6.** Como $\widehat{DÔB} = 74^\circ$, então $\widehat{BD} = 74^\circ$ porque $\widehat{DÔB}$ é um ângulo ao centro.

ACB é um ângulo com o vértice no exterior da circunferência. Logo, $ACB = \frac{\widehat{BD} - \widehat{FE}}{2}$.

$$\text{Assim, } 25^\circ = \frac{74^\circ - \widehat{FE}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 50^\circ = 74^\circ - \widehat{FE}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{FE} = 24^\circ$$

$\widehat{BÂD}$ também é um ângulo com o vértice no exterior da circunferência. Logo, $\widehat{BÂD} = \frac{\widehat{BE} - \widehat{BD}}{2}$

$$\text{Assim, } 60^\circ = \frac{\widehat{BE} - 74^\circ}{2}$$

$$\Leftrightarrow 120^\circ = \widehat{BE} - 74^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BE} = 194^\circ$$

Então, como $\widehat{BF} = \widehat{BE} - \widehat{FE}$, $\widehat{BF} = 194^\circ - 24^\circ = 170^\circ$.

- 20 7.** O ângulo α é um ângulo excêntrico cujo vértice se encontra no exterior da circunferência:

$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{GF} + 12^\circ - (\widehat{GF} - 52^\circ)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\alpha} = \frac{\widehat{GF} + 12^\circ - \widehat{GF} + 52^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = \frac{64^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 32^\circ$$

R.: O ângulo α tem 32° de amplitude.

Aplicar – páginas 98 e 99

- 3.** A soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono com n lados é dada pela fórmula:

$$S = (n - 2) \times 180^\circ$$

3.1. $n = 6$

$$S = (6 - 2) \times 180^\circ = 720^\circ$$

3.2. $n = 10$

$$S = (10 - 2) \times 180^\circ = 1440^\circ$$

3.3. $n = 50$

$$S = (50 - 2) \times 180^\circ = 8640^\circ$$

4.

4.1. $S = 360^\circ$

4.2. $S = 360^\circ$

4.3. $S = 360^\circ$

- 5.** A amplitude de cada um dos ângulos internos de um polígono regular com n lados é dada pela fórmula

$$\text{Amp.} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

5.1. $n = 6$

$$\text{Amp.} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 120^\circ$$

5.2. $n = 8$

$$\text{Amp.} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{8} = 135^\circ$$

5.3. $n = 14$

$$\text{Amp.} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{14} = \frac{1260^\circ}{7} - \frac{180^\circ}{7} = \frac{1080^\circ}{7} \approx 154,29^\circ \text{ (2 c.d.)}$$

- 6.** A amplitude de cada um dos ângulos externos de um polígono regular com n lados é dada pela fórmula

$$\text{Amp.} = \frac{360^\circ}{n}$$

6.1. $n = 6$

$$\text{Amp.} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

6.2. $n = 8$

$$\text{Amp.} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

6.3. $n = 14$

$$\text{Amp.} = \frac{360^\circ}{14} \approx 25,71^\circ \text{ (2 c.d.)}$$

7.

7.1. $(n - 2) \times 180 = 540 \Leftrightarrow 180n - 360 = 540$

$$\Leftrightarrow 180n = 900$$

$$\Leftrightarrow n = 5$$

R.: O polígono tem cinco lados.

7.2. $(n - 2) \times 180 = 900 \Leftrightarrow 180n - 360 = 900$

$$\Leftrightarrow 180n = 1260$$

$$\Leftrightarrow n = 7$$

R.: O polígono tem sete lados.

7.3. $(n - 2) \times 180 = 3240 \Leftrightarrow 180n - 360 = 3240$

$$\Leftrightarrow 180n = 3600$$

$$\Leftrightarrow n = 20$$

R.: O polígono tem 20 lados.

8.

8.1. Seja n o número de lados desse polígono:

$$180 - \frac{360}{n} = 90 \Leftrightarrow 180n - 360 = 90n$$

$$\Leftrightarrow 90n = 360 \Leftrightarrow n = \frac{360}{90} \Leftrightarrow n = 4$$

R.: O polígono tem quatro lados.

8.2. Seja n o número de lados desse polígono:

$$180 - \frac{360}{n} = 120 \Leftrightarrow 180n - 360 = 120n$$

$$\Leftrightarrow 60n = 360 \Leftrightarrow n = \frac{360}{60} \Leftrightarrow n = 6$$

R.: O polígono tem seis lados.

8.3. Seja n o número de lados desse polígono:

$$180 - \frac{360}{n} = 170 \Leftrightarrow 180n - 360 = 170n$$

$$\Leftrightarrow 10n = 360 \Leftrightarrow n = \frac{360}{10} \Leftrightarrow n = 36$$

R.: O polígono tem 36 lados.

9.

9.1. Seja n o número de lados desse polígono:

$$\frac{360}{n} = 90 \Leftrightarrow 90n = 360$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{360}{90}$$

$$\Leftrightarrow n = 4$$

R.: O polígono tem quatro lados.

9.2. Seja n o número de lados desse polígono:

$$\frac{360}{n} = 120 \Leftrightarrow 120n = 360$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{360}{120}$$

$$\Leftrightarrow n = 3$$

R.: O polígono tem três lados.

9.3. Seja n o número de lados desse polígono:

$$\frac{360}{n} = 170 \Leftrightarrow 170n = 360 \Leftrightarrow n = \frac{360}{170}$$

$$\Leftrightarrow n \approx 2,12 \text{ (2 c.d.)}$$

Esta situação não é possível, por isso não existe nenhum polígono nestas condições.

- 20 10.** A soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono com seis lados é dada pela fórmula:
 $(6 - 2) \times 180^\circ = 720^\circ$
 Vamos calcular a amplitude do ângulo α , sabendo as amplitudes dos restantes cinco ângulos internos, e

conhecendo a soma das amplitudes de todos os ângulos internos:

$$\hat{\alpha} + 81^\circ + 156^\circ + 107^\circ + 88^\circ + 146^\circ = 720^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{\alpha} = 720^\circ - 578^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{\alpha} = 142^\circ$$

R.: O ângulo α tem 142° de amplitude.

- 11.** Vamos determinar quantos lados tem esse polígono regular e depois calcular a soma das amplitudes de todos os ângulos internos.

$$180 - \frac{360}{n} = 144$$

$$\Leftrightarrow 180n - 360 = 144n$$

$$\Leftrightarrow 36n = 360$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{360}{36}$$

$$\Leftrightarrow n = 10$$

O polígono regular tem 10 lados. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono com 10 lados é dada por $(10 - 2) \times 180^\circ = 1440^\circ$.

R.: A soma das amplitudes de todos os ângulos internos desse polígono é 1440° .

- 12.** Num polígono regular com n lados, a amplitude de um ângulo interno é calculada por $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ e a amplitude de um ângulo externo é $\frac{360^\circ}{n}$.

Pelos dados do enunciado, podemos encontrar uma equação que nos permite descobrir o número de lados desse polígono:

$$180 - \frac{360}{n} = 5 \left(\frac{360}{n} \right)$$

$$\Leftrightarrow 180n - 360 = 1800$$

$$\Leftrightarrow 180n = 2160$$

$$\Leftrightarrow n = 12$$

R.: Esse polígono tem 12 lados.

- 13.** Vejamos se existe algum polígono regular nas condições do enunciado, ou seja, cuja soma das amplitudes dos ângulos internos seja 1100° .

$$(n - 2) \times 180 = 1100 \Leftrightarrow 180n - 360 = 1100$$

$$\Leftrightarrow 180n = 1460$$

$$\Leftrightarrow n \approx 8,11 \text{ (2 c.d.)}$$

O número de lados de um polígono é um número inteiro, logo não existe nenhum polígono regular cuja soma dos seus ângulos internos seja 1100° .

14. $\frac{360^\circ}{n} = 50^\circ \Leftrightarrow n = 7,2$

Se existisse um polígono regular que tivesse um dos ângulos externos com 50° de amplitude, teria 7,2 lados. Ora, isto é impossível, pois o número de lados de um polígono é um número inteiro.

R.: Não existe nenhum polígono nas condições do enunciado.

- 20 15. Vamos começar por determinar x para sabermos a amplitude do ângulo interno e do ângulo externo deste polígono.

$$x^2 - 2380x + 10 = 180 \Leftrightarrow x^2 + x - 2550 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 10200}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 101}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -51 \vee x = 50$$

O ângulo externo deste polígono regular tem 60° de amplitude. Vamos calcular o número de lados:

$$\frac{360^\circ}{n} = 60^\circ \Leftrightarrow n = 6$$

R.: Este polígono regular tem seis lados.

Aplicar – páginas 102 e 103

2. A soma das amplitudes dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência é 180° .

2.1. $\hat{\beta} = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$

2.2. $\hat{\beta} = 180^\circ - 113^\circ = 67^\circ$

- 2.3. Vamos calcular a amplitude do ângulo α , suplementar do ângulo β :

$$\hat{\alpha} = 180^\circ - 91^\circ = 89^\circ$$

$$\text{Então, } \hat{\beta} = 180^\circ - 89^\circ = 91^\circ.$$

- 20 3. Os ângulos ao centro de um polígono regular inscrito numa circunferência são todos geometricamente iguais.

$$\hat{\alpha} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\hat{\beta} = 3 \times \frac{360^\circ}{7} \approx 154,29^\circ \text{ (2 c.d.)}$$

4. Seja n o número de lados desse polígono:

$$\frac{360^\circ}{n} = 20^\circ \Leftrightarrow n = 18$$

R.: O polígono tem 18 lados.

5. $\frac{360^\circ}{n} = 27^\circ \Leftrightarrow n \approx 13,33 \text{ (2 c.d.)}$

Se esse polígono existisse teria aproximadamente 13,33 lados, o que é absurdo!

R.: Não existe nenhum polígono nas condições do enunciado.

6. $2 \times \frac{360^\circ}{5} = 144^\circ$

O ângulo BOA tem 144° de amplitude. A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Assim, o arco menor AB tem 144° de amplitude.

- 20 7. Os ângulos ao centro de um polígono regular inscrito numa circunferência são todos geometricamente iguais.

$$\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$\hat{\alpha} = 3 \times 45^\circ = 135^\circ$$

A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados:

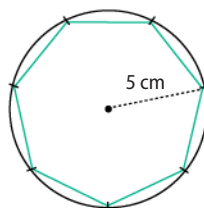
O arco FGD tem $6 \times 45^\circ = 270^\circ$ de amplitude. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo $\hat{\beta} = 135^\circ$. O arco HBC tem $3 \times 45^\circ = 135^\circ$ de amplitude. Usando o mesmo raciocínio usado anteriormente, temos um ângulo inscrito $\hat{\epsilon} = 67,5^\circ$.

O arco menor GH tem 45° de amplitude. Pela mesma razão, temos $\hat{\theta} = 22,5^\circ$.

8. Começamos por desenhar uma circunferência com 5 cm de raio.

$$\frac{360^\circ}{7} \approx 51,43^\circ$$

Marcamos um raio e com um transferidor marcamos aproximadamente $51,43^\circ$. Com o auxílio de um compasso, terminamos a construção do polígono.



20 9.

- 9.1. α é um ângulo excêntrico cujo vértice se encontra no interior da circunferência. Vamos calcular a amplitude dos arcos EFG e DCI .

$$\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados:
O arco DCI tem $4 \times 40^\circ = 160^\circ$ de amplitude e o arco EFG tem $2 \times 40^\circ = 80^\circ$ de amplitude. Então:

$$\hat{\alpha} = \frac{160^\circ + 80^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 120^\circ$$

9.2. $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

Se o pentágono fosse regular, o ângulo NLR teria 72° de amplitude. Assim, podemos dizer que o pentágono $[NOPQR]$ não é regular.

- 9.3. Os ângulos ε e β são ângulos inscritos, logo as suas amplitudes serão metade das amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados. Então:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} + \hat{\beta} &= \frac{68^\circ + NO + OP}{2} + \frac{PQ + QR + 68^\circ}{2} \\ \Leftrightarrow \hat{\varepsilon} + \hat{\beta} &= \frac{68^\circ + NO + OP + PQ + QR}{2} + \frac{68^\circ}{2} \\ \Leftrightarrow \hat{\varepsilon} + \hat{\beta} &= \frac{360^\circ}{2} + \frac{68^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\varepsilon} + \hat{\beta} = \frac{428^\circ}{2} \\ \Leftrightarrow \hat{\varepsilon} + \hat{\beta} &= 214^\circ \end{aligned}$$

R.: A soma das amplitudes dos ângulos ε e β é 214° .

Praticar 2 – páginas 104 a 109

1. [C] a circunferência do centro A , que tem 5 cm de raio.

2.

- 2.1. Lugar geométrico dos pontos do plano que estão mais próximos do ponto B do que do ponto A .
2.2. Lugar geométrico dos pontos do plano que se encontram a, pelo menos, 50 mm do ponto C .
2.3. Lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância ao ponto A é menor ou igual a 35 mm e cuja distância ao ponto B é menor ou igual a 20 mm.
2.4. Lugar geométrico dos pontos do plano que se encontram a, pelo menos, 1 cm do ponto A e cuja distância a esse mesmo ponto é menor ou igual a 3 cm.

3. Sabemos que a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo $\widehat{DC} = 103^\circ$.
Assim, $\widehat{CE} = 360^\circ - 156^\circ - 103^\circ = 101^\circ$.

4.

- 4.1. Ângulos inscritos numa semicircunferência são retos.

Então, $\widehat{CED} = 90^\circ$. Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , podemos dizer que $\widehat{CDE} + \widehat{ECD} = 90^\circ$.

- 4.2. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Então, $\widehat{ECD} = 35^\circ$.

Pela alínea anterior, $\widehat{CDE} + 35^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{CDE} = 55^\circ$.

5.

- 5.1. Os vértices do hexágono são pontos pertencentes à circunferência. Assim, sendo o hexágono regular, pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros. O raio da circunferência será de 6 cm.

- 5.2. O hexágono tem 36 cm de perímetro. Vamos calcular o apótema do hexágono:

$$\begin{aligned} ap^2 + 3^2 &= 6^2 \\ \Leftrightarrow ap^2 + 9 &= 36 \\ \Leftrightarrow ap^2 &= 27 \\ \Leftrightarrow ap &= -\sqrt{27} \vee ap = \sqrt{27} \end{aligned}$$

Como $ap > 0$, então $ap = \sqrt{27}$.

$$A = \frac{P}{2} \times ap$$

$$A = \frac{36}{2} \times \sqrt{27}$$

$$\Leftrightarrow A = 18\sqrt{27}$$

$$\Leftrightarrow A \approx 94$$

R.: O hexágono tem, aproximadamente, 94 cm^2 de área.

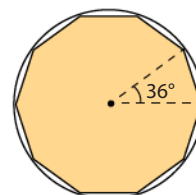
20 6.

Começamos por desenhar uma circunferência.

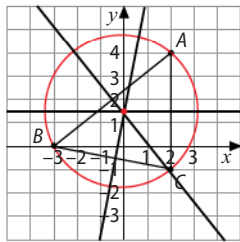
$$\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

Um decágono tem dez lados, e cada um dos vértices divide o arco da circunferência em dez partes iguais, cada uma com 36° .

Marcamos um raio e com um transferidor marcamos 36° . Com o auxílio de um compasso, terminamos a construção do polígono.



- 20.7.** Depois de assinalarmos os pontos A , B e C , é necessário encontrar o circuncentro do triângulo $[ABC]$ para podermos traçar a circunferência que passa nesses pontos. Para tal, devemos começar por desenhar o triângulo e traçar as mediatrizes de cada um dos lados. À interseção das mediatrizes chamamos circuncentro.



- 8.** Os triângulos $[AOB]$ e $[BOC]$ são isósceles, pois dois dos seus lados são raios da circunferência. A lados de igual comprimento opõem-se ângulos de igual amplitude. Assim: $\hat{a} = \hat{b}$ e $\hat{c} = \hat{d}$

$$\hat{a} + \hat{b} = 180^\circ - 100^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2\hat{a} = 80^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{a} = 40^\circ$$

$$\hat{b} = 40^\circ$$

$$\hat{COB} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \text{ (ângulos suplementares)}$$

$$\hat{c} + \hat{d} = 180^\circ - 80^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2\hat{c} = 100^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{c} = 50^\circ$$

$$\hat{d} = 50^\circ$$

- 9.** A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Assim, $\widehat{EBC} = 150^\circ$.

$$58^\circ + \widehat{BC} = 150^\circ \Leftrightarrow \widehat{BC} = 92^\circ$$

A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Assim, o ângulo CAB tem 92° de amplitude.

- 10.** O triângulo $[ABC]$ é equilátero, logo os seus vértices dividem o arco em três arcos de igual amplitude, cada um com 120° ($360^\circ : 3 = 120^\circ$).

- 10.1.** A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Assim, o ângulo ADC tem 120° de amplitude.

- 10.2.** A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Assim, o ângulo CKB tem 60° de amplitude.

- 10.3.** A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Assim, o ângulo BKA tem 60° de amplitude.

- 10.4.** A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Assim, o ângulo CKA tem 120° de amplitude.

11.

- 11.1.** A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente. Assim, o ângulo ACB tem 110° de amplitude. O triângulo $[ABC]$ é isósceles (dois dos seus lados são raios da circunferência e, a lados de igual comprimento opõem-se ângulos de igual amplitude). Além disso, a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Assim:

$$\widehat{BAC} = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2} \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 35^\circ$$

- 11.2.** O arco AB tem 110° de amplitude (mesma amplitude do ângulo ao centro em cujos lados está compreendido). A circunferência tem 4 m de raio, logo:

$$\text{Comprimento do arco} = \frac{110^\circ \times 2\pi \times 4}{360^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \text{Comprimento do arco} = \frac{22}{9} \pi$$

$$\Leftrightarrow \text{Comprimento do arco} \approx 7,7$$

R.: O arco AB tem, aproximadamente, 7,7 m de comprimento.

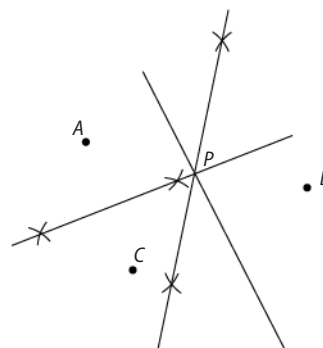
- 12.** O ângulo EGD (com 94° de amplitude) é excêntrico e o seu vértice encontra-se no interior da circunferência. Então:

$$\frac{123^\circ - \widehat{DE}}{2} = 94^\circ \Leftrightarrow \widehat{DE} + 123^\circ = 188^\circ \Leftrightarrow \widehat{DE} = 65^\circ$$

R.: O arco DE tem 65° de amplitude.

13.

- 13.1.** 1º Marcar os três pontos, A , B e C , não colineares.
2º Traçar as mediatrizes dos segmentos de reta $[AB]$, $[AC]$ e $[BC]$.
3º Marcar o ponto de interseção das mediatrizes, P .

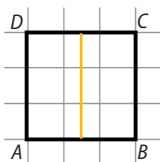


13.2. O ponto encontrado é único.

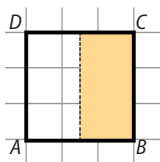
Os pontos A , B e C nas condições pedidas não são únicos. Pertencem à circunferência de centro P e raio $[PA]$.

14.

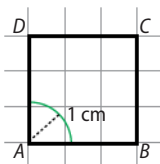
14.1.



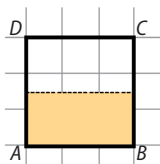
14.2.



14.3.

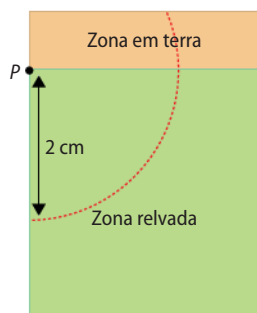


14.4.



20 15.

15.1. Segundo as medições do esquema e visto que 1 cm na representação, corresponde a 1 m na realidade, podemos constatar que a zona em terra tem 0,8 m de largura e 3,1 m de comprimento e que a zona relvada tem o mesmo comprimento e 3,4 m de largura.

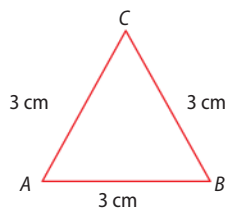


15.2. A área da parte relvada em que a cabra pode comer corresponde a um quarto de circunferência com 2 m de raio.

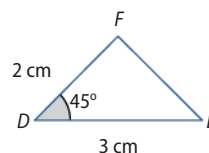
$$A = \frac{1}{4} \times \pi \times 2^2 \Leftrightarrow A = \pi \text{ m}^2$$

20 16. Vamos construir os três triângulos.

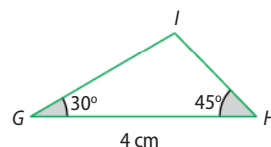
I. Triângulo $[ABC]$



II. Triângulo $[DEF]$

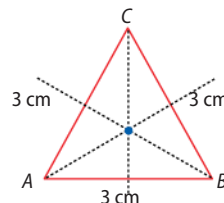


III. Triângulo $[GHI]$

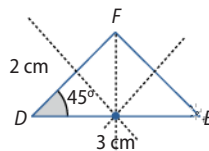


16.1. Para determinar o circuncentro de cada um dos triângulos, devemos interseccionar as mediatrizes dos lados dos triângulos. O circuncentro de cada um dos triângulos está representado a azul.

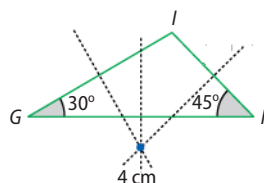
I. Triângulo $[ABC]$



II. Triângulo $[DEF]$

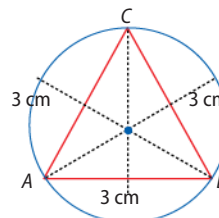


III. Triângulo $[GHI]$

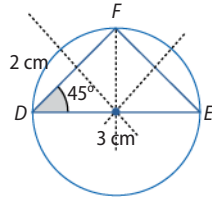


16.2. Aproveitando o circuncentro de cada um dos triângulos (já desenhado na alínea anterior) como centro da circunferência circunscrita, basta traçar a circunferência que passa nos vértices do triângulo. Essa circunferência está representada a azul.

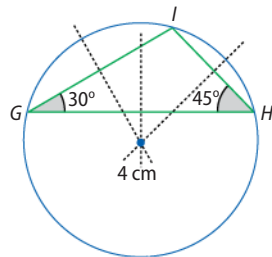
I. Triângulo $[ABC]$



II. Triângulo [DEF]

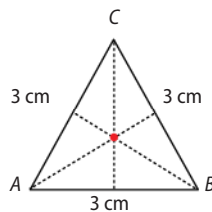


III. Triângulo [GHI]

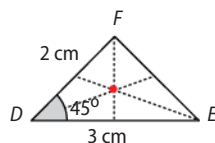


- 16.3. O incentro de um triângulo corresponde ao ponto de interseção das suas bissetrizes. Vamos representar esse ponto a vermelho.

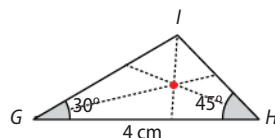
I. Triângulo [ABC]



II. Triângulo [DEF]

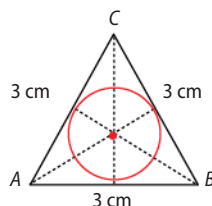


III. Triângulo [GHI]

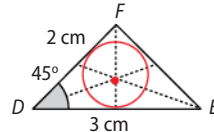


- 16.4. Aproveitando o incentro de cada um dos triângulos (já desenhado na alínea anterior) como centro da circunferência inscrita, basta traçar a circunferência tangente aos lados do triângulo. Essa circunferência está representada a vermelho.

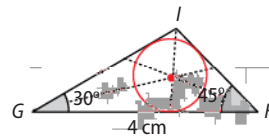
I. Triângulo [ABC]



II. Triângulo [DEF]



III. Triângulo [GHI]



- 20 17. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Ora, o ângulo FDE tem 67° de amplitude ($30^\circ + 37^\circ = 67^\circ$), portanto o arco ECF tem 134° de amplitude. O arco FDE tem, então, 226° de amplitude ($360^\circ - 134^\circ = 226^\circ$).

18. A tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Assim, os ângulos AFG e FGC são retos.

A soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° , logo:

$$\hat{\beta} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 83^\circ \Leftrightarrow \hat{\beta} = 97^\circ$$

19.

- 19.1. Como numa circunferência a cordas iguais correspondem arcos geometricamente iguais, $\widehat{AB} = \widehat{CD}$. Então, $\widehat{BD} = \widehat{AC}$ porque $\widehat{BD} = \widehat{AB} + \widehat{AD} = \widehat{CD} + \widehat{AD} = \widehat{AC}$

19.2. $360^\circ - 185^\circ - 80^\circ = 95^\circ$

Assim, $\widehat{AB} + \widehat{CD} = 95^\circ$. Logo, como $\widehat{AB} = \widehat{CD}$, $\widehat{AB} = \frac{95^\circ}{2} = 47,5^\circ$

Como o ângulo CAD é um ângulo inscrito na circunferência, $\widehat{CAD}$ é igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, ou seja,

$$\widehat{CAD} = \frac{47,5^\circ}{2} = 23,75^\circ.$$

20.

20.1. $(n - 2) \times 180^\circ = 2700^\circ \Leftrightarrow n - 2 = 15 \Leftrightarrow n = 17$

R.: O polígono convexo tem 17 lados.

20.2. a) $\text{Amp} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{17} \Leftrightarrow \text{Amp} \approx 158,82^\circ$

R.: Cada um dos ângulos internos tem, aproximadamente, $158,82^\circ$ de amplitude.

$$b) \text{ Amp} = \frac{360^\circ}{17} \Leftrightarrow \text{Amp} \approx 21,18^\circ$$

R.: Cada um dos ângulos externos tem, aproximadamente, $21,18^\circ$ de amplitude.

21. A área colorida corresponde à diferença entre a área do setor circular com 8 cm de raio e 54° de amplitude e a área do setor circular com a mesma amplitude e 4 cm de raio:

$$A = \left(\frac{54^\circ \times \pi \times 8^2}{360^\circ} \right) - \left(\frac{54^\circ \times \pi \times 4^2}{360^\circ} \right)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{(3456 - 864) \pi}{360}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{2592}{360} \pi$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{36}{5} \pi$$

$$\Leftrightarrow A \approx 22,62$$

R.: A região sombreada tem, aproximadamente, $22,62 \text{ cm}^2$ de área.

22. O eneágono tem nove lados. Os ângulos ao centro de um polígono regular inscrito numa circunferência são geometricamente iguais, logo cada um terá 40° de amplitude. A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Então, $\widehat{FG} = 40^\circ$ e $\widehat{DCA} = 120^\circ$. x é um ângulo excêntrico cujo vértice se encontra no exterior da circunferência, logo:

$$\hat{x} = \frac{120^\circ - 40^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{x} = 40^\circ$$

R.: O ângulo x tem 40° de amplitude.

23.

- 23.1. O ângulo FAD tem 121° de amplitude, pois é suplementar do ângulo DAB que, como sabemos, tem 59° de amplitude ($180^\circ - 59^\circ = 121^\circ$).

O triângulo ADF é isósceles e, como a lados de igual comprimento se opõem ângulos de igual amplitude, então:

$$\hat{\alpha} = \frac{180^\circ - 121^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 29,5^\circ$$

A amplitude do ângulo AFD é de $29,5^\circ$ e β é o seu suplementar.

$$\hat{\beta} = 180^\circ - 29,5^\circ \Leftrightarrow \hat{\beta} = 150,5^\circ$$

- 23.2. O arco DF da circunferência tem 5 cm de raio e 121° de amplitude.

$$\text{Comprimento do arco} = \frac{121^\circ \times \pi \times 5}{36} = \frac{121}{36} \pi \approx 10,56$$

R.: O arco DF tem, aproximadamente, 10,56 cm de comprimento.

- 23.3. O ângulo BDP é obtuso, logo $\widehat{BDP} = \widehat{BDA} + \widehat{ADP}$. O triângulo ABD é isósceles e, como a lados de igual comprimento se opõem ângulos de igual amplitude, então:

$$\widehat{BDA} = \frac{180^\circ - 59^\circ}{2} \Leftrightarrow \widehat{BDA} = 60,5^\circ$$

A tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência, logo o ângulo ADP tem 90° de amplitude.

$$\text{Assim, } \widehat{BDP} = 60,5^\circ + 90^\circ = 150,5^\circ.$$

24.

- 24.1. Os segmentos de reta $[FO]$ e $[CD]$ são perpendiculares, logo os arcos CF e FD têm a mesma amplitude e o mesmo comprimento.

$$\text{Assim, o arco } CF \text{ tem } \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ cm de comprimento.}$$

- 24.2. Usando o mesmo raciocínio da alínea anterior, $\overline{CA} = \overline{AD}$.

Como $\overline{CD} = 4 \text{ cm}$, então o segmento de reta $[AD]$ tem 2 cm de comprimento.

- 24.3. A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Assim, o ângulo COD tem 90° de amplitude e, portanto, o triângulo $[COD]$ é retângulo em O . Os seus catetos correspondem a raios da circunferência e a hipotenusa mede 4 cm. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$r^2 + r^2 = 4^2$$

$$\Leftrightarrow 2r^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow r = -\sqrt{8} \vee r = \sqrt{8}$$

$$\text{Como } r > 0, \text{ então } r = \sqrt{8}.$$

O raio da circunferência mede $\sqrt{8} \text{ cm}$.

- 24.4. O triângulo $[AOD]$ é retângulo em A .

$$\overline{OA}^2 + 2^2 = (\sqrt{8})^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 8 - 4$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA} = -2 \vee \overline{OA} = 2$$

Como $\overline{OA} > 0$, então $\overline{OA} = 2 \text{ cm}$.

25.

25.1. Lugar geométrico dos pontos do plano que distam 3 cm ou menos do ponto A e que distam mais de 4 cm do ponto B .

25.2. Lugar geométrico dos pontos do plano que distam 3 cm ou menos do ponto A ou que distam 1 cm ou menos do ponto B .

20 26.

26.1. a) $\overline{AB} = 3,2$ cm

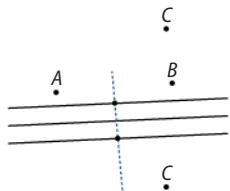
b) 18,75 km

c) 75 km

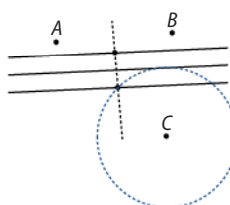
26.2.



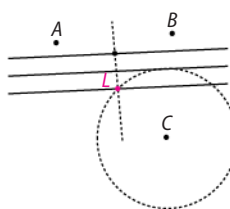
26.3.



26.4.



26.5.



27.

27.1. A amplitude dos ângulos internos de um polígono regular com cinco lados é calculada da seguinte forma:

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$$

Então, $\widehat{BIM} = 108^\circ$.

27.2. A amplitude dos ângulos internos de um polígono regular com sete lados é calculada da seguinte forma:

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{7} \approx 128,57^\circ$$

Então, o ângulo HGF tem, aproximadamente, $128,57^\circ$ de amplitude.

27.3. A amplitude dos ângulos CBH e HGF é a mesma, pois ambos são ângulos internos do mesmo polí-

gono regular. Da mesma forma, podemos afirmar que os ângulos KBI e BIM têm a mesma amplitude. Então:

$$\widehat{IBH} \approx 180^\circ - 128,57^\circ \Leftrightarrow \widehat{IBH} \approx 51,43^\circ$$

$$\widehat{KBH} \approx 108^\circ - 51,43^\circ \Leftrightarrow \widehat{KBH} \approx 56,57^\circ$$

28. Os triângulos $[ABD]$ e $[BDC]$ são retângulos em A e em C respectivamente. Esses triângulos têm a mesma hipotenusa (segmento de reta $[DB]$) e cada um deles tem um cateto com o comprimento do raio da circunferência. Aplicando o teorema de Pitágoras, facilmente compreendemos que os segmentos de reta $[AB]$ e $[CB]$ são geometricamente iguais.

20 29.

O triângulo $[DAE]$ é isósceles (os lados $[AD]$ e $[AE]$ correspondem a raios da circunferência). Como a lados de igual comprimento se opõem ângulos de igual amplitude, então $\widehat{ADE} = 39^\circ$.

$\widehat{EAD} = 180^\circ - 39^\circ - 39^\circ = 102^\circ$, pois a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo $\widehat{DE} = 102^\circ$ e, consequentemente,

$$\widehat{EC} = 180^\circ - 102^\circ = 78^\circ. \text{ Assim, } \widehat{EAC} = 78^\circ.$$

A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, portanto $\hat{\alpha} = 39^\circ$.

O triângulo $[EAC]$ é isósceles (os lados $[AE]$ e $[AC]$ correspondem a raios da circunferência). Como a lados de igual comprimento se opõem ângulos de igual amplitude e como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então:

$$\hat{\beta} = \frac{180^\circ - 78^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\beta} = 51^\circ$$

30.

30.1. Ângulos inscritos numa semicircunferência são retos, $\hat{\alpha} = 90^\circ$.

A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo $\widehat{GDE} = 250^\circ$ e, consequentemente, $\widehat{GHE} = 110^\circ$.

A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, portanto $\hat{\beta} = 110^\circ$. O seu ângulo suplementar (ângulo DAG) terá, então, 70° de amplitude ($180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$).

O triângulo $[GAD]$ é isósceles (os lados $[AD]$ e $[AG]$ correspondem a raios da circunferência). Como a

lados de igual comprimento se opõem ângulos de igual amplitude e como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\varepsilon} = \hat{\gamma} \\ \hat{\varepsilon} + \hat{\gamma} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ \end{array} \right\} \Leftrightarrow \hat{\varepsilon} = 55^\circ, \text{ logo } \hat{\gamma} = 55^\circ$$

- 30.2. O arco GD tem 70° de amplitude (a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados). O segmento de reta AE é um raio da circunferência. Vamos, então, calcular o comprimento do raio:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco } GD = \frac{175}{9}\pi \\ \text{Comprimento} \\ \text{do arco } GD = \frac{x\pi r}{180} \\ x = 70^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{175}{9}\pi = \frac{70\pi r}{180} \\ \Leftrightarrow \frac{175}{9} = \frac{7r}{18} \\ \frac{175}{9} \\ \Leftrightarrow r = \frac{9}{7} \cdot \frac{175}{18} \\ \Leftrightarrow r = 50 \end{array}$$

O raio tem 50 cm de comprimento, logo $\overline{AE} = 50$ cm.

- 30.3. Se o segmento de reta $[GD]$ for o lado de um polígono regular inscrito na circunferência, então os vértices do polígono dividem a circunferência em arcos de 70° de amplitude cada.

$$360^\circ : 70^\circ \approx 5,14$$

O número de lados do polígono é um número inteiro, logo podemos concluir que o segmento de reta $[GD]$ não é um lado de um polígono regular inscrito na circunferência.

20 31.

- 31.1. Seja C o centro da circunferência. Então, os triângulos $[CPT]$ e $[CRT]$ são retângulos em P e em R , respetivamente (sabemos isso porque as retas TP e TR são tangentes à circunferência nos pontos P e R , respetivamente).

Os segmentos de reta $[CP]$ e $[CR]$ são raios da circunferência, portanto têm o mesmo comprimento. Assim, os triângulos retângulos $[CPT]$ e $[CRT]$ têm a mesma hipotenusa (o segmento de reta $[CT]$) e um dos seus catetos tem o mesmo comprimento. Podemos concluir que os segmentos de reta $[PT]$ e $[TR]$ (os outros catetos) têm o mesmo comprimento e, portanto, o triângulo $[PTR]$ é isósceles.

- 31.2. a) A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus

lados, logo o arco QR tem 76° de amplitude. Vamos calcular as amplitudes dos arcos QP e PR sabendo que o arco da circunferência tem 360° de amplitude e que o ângulo PTR é excêntrico e o vértice se encontra no exterior da circunferência.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{QP} + \widehat{PR} + 76^\circ = 360^\circ \\ \frac{\widehat{QP} + 76^\circ - \widehat{PR}}{2} = 38^\circ \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{QP} + \widehat{PR} = 284^\circ \\ \widehat{QP} + 76^\circ - \widehat{PR} = 76^\circ \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{QP} = \widehat{PR} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\widehat{PR} = 284^\circ \\ \widehat{PR} = 142^\circ \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{PR} = 142^\circ \\ \widehat{QP} = 142^\circ \end{array} \right. \end{aligned}$$

Como a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, então $\widehat{RQP} = 71^\circ$.

- b) $\widehat{PQR} = 218^\circ$

A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo $\widehat{PSR} = 109^\circ$.

32.

- 32.1. Os ângulos BAD e BCD são ângulos inscritos na circunferência. Logo, a amplitude de cada um dos ângulos é igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

Como o arco correspondente ao ângulo BAD é $\widehat{BD}$, $\widehat{BAD} = \frac{\widehat{BD}}{2}$.

Como o arco correspondente ao ângulo BCD é $\widehat{DAB}$ e $\widehat{DAB} = 360^\circ - \widehat{BD}$, então $\widehat{BCD} = \frac{360^\circ - \widehat{BD}}{2}$.

- 32.2. $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{360^\circ - \widehat{BD}}{2} = \\ &= \frac{\widehat{BD} + 360^\circ - \widehat{BD}}{2} = \\ &= \frac{360^\circ}{2} = \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

Praticar para a prova final – páginas 110 a 113

1.

$$\begin{aligned}
 1.1. \quad V_{\text{Prisma}} &= 42 \text{ cm}^3 \\
 V_{\text{Prisma}} &= V_{\text{Cubo}} = 42 \text{ cm}^3 \\
 \text{Como } V_{\text{Cubo}} &= a^3, \text{ então} \\
 a^3 &= 42 \\
 \Leftrightarrow a &= \sqrt[3]{42} \\
 \Leftrightarrow a &\approx 3,5
 \end{aligned}$$

Logo, a opção correta é a [C].

1.2. Por exemplo, a reta CF .

2.

$$\begin{aligned}
 2.1. \quad V_{\text{Sólido}} &= V_{\text{Paralelepípedo}} + V_{\text{Prisma}} \\
 V_{\text{Paralelepípedo}} &= Ab \times h \\
 V_{\text{Paralelepípedo}} &= 15^2 \times 6 = 1350 \\
 V_{\text{Prisma}} &= Ab \times h \\
 V_{\text{Prisma}} &= \frac{15 \times 6}{2} \times 15 = \\
 &= 45 \times 15 = 675 \\
 \text{Assim, } V_{\text{Sólido}} &= 1350 + 675 = 2025 \\
 \text{R.: } V_{\text{Sólido}} &= 2025 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

2.2. Por exemplo, a reta JD .

3. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo $\widehat{DB} = 100^\circ$.

A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo $\widehat{DC} = 60^\circ$.

$$\text{Assim, } \widehat{CB} = 100^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{CB} = 40^\circ.$$

4.

4.1. Como a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, então o arco CD tem 80° de amplitude. Sabemos que $[AD]$ é um diâmetro da circunferência, portanto:

$$\widehat{AC} = 180^\circ - 80^\circ \Leftrightarrow \widehat{AC} = 100^\circ$$

4.2. Aplicando o teorema de Pitágoras, podemos determinar o comprimento do segmento de reta $[AD]$, ou seja, determinamos o diâmetro da circunferência:

$$\begin{aligned}
 \overline{AD}^2 &= 3,2^2 + 6,8^2 \\
 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 &= 10,24 + 46,24 \\
 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 &= 56,48 \\
 \Leftrightarrow \overline{AD} &= \sqrt{56,48} \vee \overline{AD} = \sqrt{56,48} \\
 \text{Como } \overline{AD} > 0, \text{ então } \overline{AD} &= \sqrt{56,48}.
 \end{aligned}$$

$$P = \sqrt{56,48} \Leftrightarrow P = 23,6 \text{ (1 c.d.)}$$

A circunferência tem 23,6 cm de perímetro.

20 5.

5.1. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, então o arco AC tem 56° de amplitude.

5.2. Qualquer reta perpendicular a uma corda no seu ponto médio divide a corda em duas partes geometricamente iguais. Assim, $\overline{AD} = 3,2$ cm. A circunferência tem 6,8 cm de raio.

Usando o teorema de Pitágoras, vamos calcular o comprimento do segmento de reta $[OD]$.

$$\begin{aligned}
 \overline{OD}^2 + 3,2^2 &= 6,8^2 \\
 \Leftrightarrow \overline{OD}^2 &= 46,24 - 10,24 \\
 \Leftrightarrow \overline{OD}^2 &= 36 \\
 \Leftrightarrow \overline{OD} &= -6 \vee \overline{OD} = 6 \\
 \text{Como } \overline{OD} > 0, \text{ então } \overline{OD} &= 6.
 \end{aligned}$$

$$\text{Então, } \overline{DE} = 6,8 - 6 \Leftrightarrow \overline{DE} = 0,8.$$

R.: O segmento de reta $[DE]$ tem 0,8 cm de comprimento.

6. Os ângulos AOC e β são suplementares, logo:

$$\widehat{AOC} = 180^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{AOC} = 120^\circ$$

O triângulo $[AOC]$ é isósceles (os lados $[AO]$ e $[OC]$ correspondem a raios da circunferência). Como a lados de igual comprimento se opõem ângulos de igual amplitude e como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então:

$$\hat{\alpha} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 30^\circ$$

20 7.

7.1. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo o ângulo BAP tem 40° de amplitude.

Ângulos verticalmente opostos têm a mesma amplitude, logo o ângulo BPA tem 85° de amplitude.

A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então:

$$\begin{aligned}
 \widehat{DBA} &= 180^\circ - 85^\circ - 40^\circ \\
 \Leftrightarrow \widehat{DBA} &= 55^\circ
 \end{aligned}$$

7.2. Os dois triângulos são semelhantes e os lados $[DP]$ e $[AP]$ são proporcionais. A razão de semelhança é 2, portanto a razão entre as áreas será 4.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{A_{[DCP]}}{A_{[ABP]}} = 4 \\ A_{[ABP]} = 6 \end{array} \right\} A_{[DCP]} = 4 \times 6 \Leftrightarrow A_{[DCP]} = 24$$

Logo, a opção correta é a [C].

20 8.

8.1. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente. O ângulo HAB é reto, portanto $\widehat{B\hat{H}} = 45^\circ$.

8.2. O quadrado tem 4 unidades de lado e cada uma das circunferências tem 2 unidades de raio.

$$\left. \begin{array}{l} A_{\square} = 4 \times 4 = 16 \\ A_{\square} = \pi \times 2^2 = 4\pi \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 16 - 4\left(\frac{1}{4} \times 4\pi\right) \\ \Leftrightarrow A = 16 - 4\pi \\ \Leftrightarrow A \approx 3,4 \text{ (1 c.d.)} \end{array}$$

R.: A região sombreada tem 3,4 unidades de área.

8.3. O segmento de reta $[IA]$ corresponde ao raio da circunferência de centro A , logo tem 2 unidades de comprimento.

O segmento de reta $[AO]$ corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 2 unidades.

$$\begin{aligned} \overline{AO}^2 &= 2^2 + 2^2 \\ \Leftrightarrow \overline{AO}^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow \overline{AO} &= \sqrt{8} \vee \overline{AO} = -\sqrt{8} \\ \text{Como } \overline{AO} &> 0, \text{ então } \overline{AO} = \sqrt{8}. \end{aligned}$$

$$\text{Então, } \overline{IO} = 2 + \sqrt{8} \Leftrightarrow \overline{IO} \approx 4,8 \text{ (1 c.d.)}$$

O segmento de reta $[IO]$ tem 4,8 unidades de comprimento.

9. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, portanto um dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$ é reto.

O triângulo $[ABC]$ não pode ser equilátero, pois nenhum dos ângulos internos de um triângulo equilátero pode ter 90° de amplitude.

10. Um polígono regular inscrito numa circunferência divide o seu arco em arcos de igual amplitude. Neste caso, como se trata de um octógono (8 vértices), cada arco da circunferência entre dois pontos consecutivos, tem 45° de amplitude.

Sabemos que a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

$$\text{Como } \widehat{HGD} = 4 \times 45^\circ = 180^\circ, \text{ então } \widehat{HBD} = 90^\circ.$$

Da mesma forma, concluímos que os quatro ângulos internos do quadrilátero são retos.

As diagonais do quadrilátero ($[HD]$ e $[FB]$) são diâmetros da circunferência (os arcos FB e HD têm 180° de amplitude), portanto têm o mesmo comprimento.

Se as duas diagonais têm o mesmo comprimento, então os quatro lados são geometricamente iguais, ou seja, o quadrilátero é um quadrado.

11.

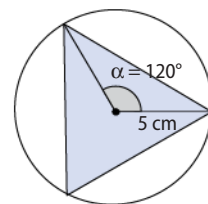
11.1. Um polígono regular inscrito numa circunferência divide o seu arco em arcos de igual amplitude. Neste caso, como se trata de um decágono (10 vértices), cada arco da circunferência entre dois pontos consecutivos, tem 36° de amplitude.

$36^\circ \times 4 = 144^\circ$, logo o ponto que ocupava previamente essa posição era o ponto G .

11.2. Os ângulos CDI e CHI estão inscritos no mesmo arco de circunferência (arco CBI), portanto têm a mesma amplitude.

11.3. Começamos por desenhar uma circunferência com 5 cm de raio.

Um triângulo tem três lados e cada um dos vértices divide o arco da circunferência em três partes iguais, cada um com 120° .



12.

12.1. Circunferência de centro em A e raio $\overline{AP}$.

12.2. Como a amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da amplitude do arco correspondente, então $\widehat{B\hat{O}C} = 2 \times \widehat{B\hat{A}C}$, ou seja, $\widehat{B\hat{O}C} = 2 \times 65^\circ = 130^\circ$.

Logo, a opção correta é a [C].

20 Testar – páginas 124 e 125

1.

$$\begin{aligned}
 1.1. \quad & \left. \begin{aligned} V_{\text{pirâmide}} &= \frac{1}{3} \times A_b \times h \\ A_b &= 230 \times 230 \\ &= 52\,900 \\ h &= 148 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times 52\,900 \times 148 \\ \Leftrightarrow V &= \frac{7829\,200}{3} \text{ m}^3 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

R.: O volume da pirâmide é $\frac{7829\,200}{3} \text{ m}^3 \approx 2609\,733,33 \text{ m}^3$ (2 c.d.).

1.2. Para calcularmos a área total da pirâmide, temos que calcular a área de cada um dos triângulos das faces laterais. Para isso, é necessário conhecer a altura desse triângulo.

A altura dos triângulos das faces laterais corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 148 m (altura da pirâmide) e 115 m (metade do comprimento do lado da base da pirâmide). Aplicando o teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 148^2 + 115^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 21\,904 + 13\,225$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 35\,129$$

$$\Leftrightarrow h = -\sqrt{35\,129} \vee h = \sqrt{35\,129}$$

$$\text{Como } h > 0, h = \sqrt{35\,129}.$$

$$A_{\text{lateral}} = 4 \times \left(\frac{230 \times \sqrt{35\,129}}{2} \right) = 460\sqrt{35\,129}$$

$$A_b = 230 \times 230 = 52\,900$$

$$\text{Então, } A_{\text{total}} = 460\sqrt{35\,129} \text{ m}^2 + 52\,900 \text{ m}^2 \approx 139\,116,57 \text{ m}^2 \text{ (2 c.d.).}$$

1.3. a) Por exemplo, planos DEB e ABE .

b) Por exemplo, retas DC e AE .

c) Por exemplo, a reta AE .

d) Ponto O .

1.4. A reta AO é perpendicular ao plano BCD porque é perpendicular às retas CE e DB , concorrentes e perpendiculares a esse plano.

15. A afirmação é verdadeira. Se um plano é perpendicular a uma de duas retas paralelas, então também é perpendicular à outra reta.

1.6. As retas DE , CB e s estão contidas no plano BCD . Como num plano, duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si, então as retas s e CB são paralelas.

1.7. Um único plano, pois por um ponto exterior a um plano passa um único plano paralelo ao primeiro.

2.

2.1. O cilindro metálico tem 200 cm de altura e a sua base é um círculo com 10 cm de raio. A área total será a soma das áreas das duas bases com a área lateral. A área lateral corresponde à área de um retângulo com 200 cm de comprimento e cuja largura coincide com o perímetro do círculo da base do cilindro.

$$\left. \begin{aligned} P_o &= 2\pi \times r \\ A_o &= \pi \times r^2 \\ r &= 10 \end{aligned} \right\} P_o = 20\pi \text{ e } A_o = 100\pi$$

$$A_{\text{base}} = 2 \times 100\pi = 200\pi$$

$$A_{\text{lateral}} = 20\pi \times 200 = 4000\pi$$

$$\text{Então, } A_{\text{total}} = 200\pi \text{ cm}^2 + 4000\pi \text{ cm}^2 = 4200\pi \text{ cm}^2$$

R.: A área total do cilindro metálico é $4200\pi \text{ cm}^2$.

2.2. O volume do papel corresponde à diferença entre o “volume total” e o volume do cilindro metálico. O cilindro total tem 30 cm de raio da base enquanto que o cilindro metálico tem 10 cm de raio da base. Ambos têm 200 cm de altura.

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{total}} &= A_b \times h \\ A_b &= \pi \times 30^2 = 900\pi \\ h &= 200 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} V_{\text{total}} &= 900\pi \times 200 = \\ &= 180\,000\pi \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{cil. metálico}} &= A_b \times h \\ A_b &= \pi \times 10^2 = 100\pi \\ h &= 200 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} V_{\text{cil. metálico}} &= \\ &= 100\pi \times 200 = 20\,000\pi \end{aligned}$$

Então, o volume do papel é:

$$180\,000\pi \text{ cm}^3 - 20\,000\pi \text{ cm}^3 = 160\,000\pi \text{ cm}^3$$

R.: O volume do papel é $160\,000\pi \text{ cm}^3 \approx$

$$\approx 502\,654,82 \text{ cm}^3 \text{ (2 c.d.).}$$

2.3. A folha de papel tem $160\,000\pi \text{ cm}^3$ de volume, como calculamos na alínea anterior. Também sabemos que, desenrolada, a folha de papel é um paralelepípedo com 150 m de comprimento, 200 cm de largura e uma determinada espessura, e, que queremos determinar:

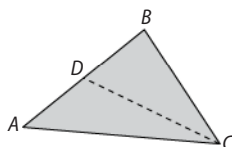
$$\left. \begin{aligned} V_{\text{paralelepípedo}} &= c \times \ell \times e \\ V_{\text{paralelepípedo}} &= 160\,000\pi \\ c &= 150 \text{ m} = 15\,000 \text{ cm} \\ \ell &= 200 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 15\,000 \times 200 \times e &= 160\,000\pi \\ \Leftrightarrow 3\,000\,000e &= 160\,000\pi \\ \Leftrightarrow e &= \frac{160\,000\pi}{3\,000\,000} \\ \Leftrightarrow e &= \frac{16\pi}{300} \Leftrightarrow e = \frac{4}{75}\pi \end{aligned}$$

A folha terá, então, $\frac{4}{75} \pi \text{ cm} \approx 0,168 \text{ cm} = 1,68 \text{ mm}$ (2 c.d.).

R.: A folha de papel tem, aproximadamente, 1,68 mm de espessura.

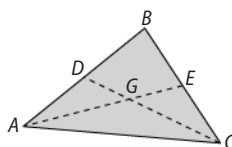
3.

3.1.

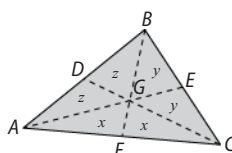


3.2. Como D é o ponto médio de $[AB]$, então $\overline{AD} = \overline{DB}$. Logo, os triângulos $[BCD]$ e $[ACD]$ têm bases com medidas iguais. Além disso, têm a mesma altura. Como triângulos com a mesma base e a mesma altura têm a mesma área, podemos concluir que os triângulos $[BCD]$ e $[ACD]$ têm a mesma área.

3.3.



3.4.



Como triângulos com a mesma base e a mesma altura têm a mesma área, temos:

- Os triângulos $[AGF]$ e $[FGC]$ têm a mesma área. Designemos a sua área por x .
- Os triângulos $[CGE]$ e $[EGB]$ têm a mesma área. Designemos a sua área por y .
- Os triângulos $[ADG]$ e $[BGD]$ têm a mesma área. Designemos a sua área por z .

Como os triângulos $[BCD]$ e $[ACD]$ têm a mesma área, $z + 2y = z + 2x$, ou seja, $y = x$.

Por outro lado, os triângulos $[ABF]$ e $[BCF]$ também têm a mesma área. Logo, $x + 2z = x + 2y$, ou seja, $z = y$. Assim, $x = y = z$, o que nos leva a concluir que as três medianas dividem o triângulo $[ABC]$ em seis triângulos com a mesma área.

4. Ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência são geometricamente iguais, logo o ângulo α tem 29° de amplitude.

A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

Assim, podemos dizer que $\widehat{CE} = 58^\circ$ e, consequentemente, podemos calcular a amplitude do arco $\widehat{FD}$: $\widehat{FD} = 360^\circ - 58^\circ - 91^\circ - 100^\circ \Leftrightarrow \widehat{FD} = 111^\circ$

Então, $\hat{\beta} = 55,5^\circ$ e $\hat{\epsilon} = 55,5^\circ$

A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , logo:

$$\hat{\theta} = 180^\circ - 55,5^\circ - 29^\circ \Leftrightarrow \hat{\theta} = 95,5^\circ$$

5.

5.1. O ângulo CEA é um ângulo inscrito no arco CA . Logo, $\hat{CA} = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$.

$$\text{Assim, } \hat{CEA} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

5.2. Comprimento do arco = $\frac{\widehat{FD} \times \pi \times r}{180^\circ}$

O raio é igual a 5 cm e $\widehat{FD} = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$.

$$\text{Logo, Comprimento do arco} = \frac{120^\circ \times \pi \times 5}{180^\circ} = \frac{10\pi}{3}$$

$$\text{R.: } \frac{10\pi}{3} \text{ cm}$$

5.3. Como $[ABCDEF]$ é um hexágono regular, $\overline{AG} = \overline{AF} = 5 \text{ cm}$.

Então, pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AG}^2 = \overline{GM}^2 + \overline{AM}^2$.

$$\overline{GM}^2 = 25 - 6,25$$

$$\Leftrightarrow \overline{GM}^2 = 18,75$$

$$\Leftrightarrow \overline{GM} = \pm \sqrt{18,75}$$

Como $\overline{GM} > 0$, então $\overline{GM} = \sqrt{18,75} \approx 4,33$.

$$\text{R.: } \overline{GM} \approx 4,33 \text{ cm}$$

54. $A_{\text{Paralelogramo}} = b \times h$
 $A_{\text{Paralelogramo}} = \sqrt{18,75} \times 5 \approx 21,65$

$$\text{R.: } A \approx 21,65 \text{ cm}^2$$

5.5. $A_{[AGF]} = \frac{b \times h}{2}$

$$A_{[AGF]} = \frac{5 \times \sqrt{18,75}}{2}$$

$$A_{\text{Setor circular}} = \frac{x \times \pi \times r^2}{360}$$

$$A_{\text{Setor circular}} = \frac{60 \times \pi \times 5^2}{360} =$$

$$= \frac{60 \times \pi \times 25}{360} =$$

$$= \frac{1500\pi}{360} =$$

$$= \frac{25\pi}{6}$$

Como o segmento de círculo é a região do círculo compreendida entre a corda $[AF]$ e arco por ela subtendido, $\widehat{AF}$, temos:

$$A_{\text{Segmento de círculo}} = \frac{5 \times \sqrt{18,75}}{2} - \frac{25\pi}{6} \approx 2,265$$

$$\text{R.: } A \approx 2,265 \text{ cm}^2$$

6.

6.1. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono pode ser calculada usando a fórmula $(n - 2) \times 180^\circ$. Neste caso, $n = 5$, pois trata-se de um pentágono.

$3 \times 180^\circ = 540^\circ$, logo a soma das amplitudes dos ângulos internos deste pentágono é 540° .

6.2. Vamos começar por calcular a amplitude do ângulo EAD sabendo que os ângulos ADF e GEA são retos (a reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência). Assim, $\widehat{EAD} = 540^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 83^\circ - 149^\circ \Leftrightarrow \widehat{EAD} = 128^\circ$.

A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo o arco menor ED tem 128° de amplitude.

6.3. O ângulo DXE é um ângulo excêntrico, cujo vértice está no exterior da circunferência e cujos lados são tangentes à circunferência, então

$$\widehat{DXE} = \frac{(360^\circ - 128^\circ) - 128^\circ}{2} = 52^\circ.$$

6.4. $A_{\text{Setor circular}} = \frac{x \times \pi \times r^2}{360}$

Como $d = 10$ cm, $r = 5$ cm

$$A_{\text{Setor circular}} = \frac{128 \times \pi \times 5^2}{360} =$$

$$= \frac{128 \times \pi \times 25}{360} =$$

$$= \frac{3200\pi}{360} =$$

$$= \frac{80\pi}{9}$$

$$\text{R.: } A = \frac{80\pi}{9} \text{ cm}^2$$

7.

7.1. Como $\overline{AC} = \overline{AB}$, o triângulo é isósceles.

Por outro lado, num triângulo, a lados de igual comprimento opõem-se ângulos de igual amplitude, $\widehat{CBA} = \widehat{ABC}$.

$$\widehat{CBA} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$$

7.2. Os arcos ED e CB são arcos compreendidos entre cordas paralelas, então são arcos geometricamente iguais.

Como BAC é um ângulo ao centro cujo arco correspondente é $\widehat{CB}$ e $\widehat{BAC} = 50^\circ$, então $\widehat{CB} = 50^\circ$.

Logo, $\widehat{ED} = 50^\circ$ porque $\widehat{ED} = \widehat{CB}$.

7.3. $A_{[BCDE]} = \frac{\overline{DB} + \overline{EC}}{2} \times \overline{FA}$ e $A_{[ABCF]} = \frac{\overline{AB} + \overline{FC}}{2} \times \overline{AF}$.

Como $\overline{EC} = 2 \times \overline{FC}$ e $\overline{DB} = 2 \times \overline{AB}$, então

$$A_{[BCDE]} = \frac{2 \times \overline{AB} + 2 \times \overline{FC}}{2} \times \overline{FA}$$

$$\Leftrightarrow A_{[BCDE]} = 2 \times \left(\frac{\overline{AB} + \overline{FC}}{2} \right) \times \overline{FA}$$

$$\Leftrightarrow A_{[BCDE]} = 2 \times A_{[ABCF]}$$

Unidade 5 – Números reais. Inequações

Aplicar – página 129

1.

1.1. a) $\frac{1}{10} = 0,1$

b) $\frac{23}{100} = 0,23$

c) $\frac{502}{10} = 50,2$

d) $\frac{343}{100} = 3,43$

e) $\frac{12\,345}{1000} = 12,345$

1.2. a) $0,7 = \frac{7}{10}$

b) $0,77 = \frac{77}{100}$

c) $4,56 = \frac{456}{100}$

d) $13,376 = \frac{13\,376}{1000}$

e) $0,009 = \frac{9}{1000}$

2.

2.1. Os números inteiros são:

$$5; \frac{16}{2}; \frac{22}{22}; 12$$

2.2. Os números fracionários são:

$$\frac{4}{8}; 0,67; -\frac{1}{9}; 0,6; -\frac{10}{20}; 12,54$$

2.3.

A. A afirmação é falsa. Por exemplo, o número π não é racional.

B. A afirmação é falsa. -12 é um número inteiro e, portanto, é racional.

3.

3.1. Por exemplo, $\frac{1}{2}$.

3.2. Por exemplo, $\frac{1}{3}$.

4.

$$4.1. 4,(7) = \frac{47,(7) - 4,(7)}{9} = \frac{43}{9}$$

$$4.2. 2,(34) = \frac{234,(34) - 2,(34)}{99} = \frac{232}{99}$$

$$4.3. 32,(1) = \frac{321,(1) - 32,(1)}{9} = \frac{289}{9}$$

20 5.

5.1. Há mais bolas verdes, pois $\frac{8}{25} > \frac{9}{50}$.

5.2. A expressão representa a quantidade de bolas amarelas, verdes e cor de laranja existentes na piscina.

$$\frac{1}{10} + \frac{8}{25} + \frac{9}{50} = \frac{5}{50} + \frac{16}{50} + \frac{9}{50} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

$$5.3. 1 - \frac{3}{5} = \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Dois quintos das bolas existentes na piscina são azuis ou vermelhas. Como a quantidade de bolas azuis é igual à quantidade de bolas vermelhas, então $\frac{1}{5}$ das bolas são azuis.

6.

6.1. $\frac{2}{5}$ é uma fração decimal porque o denominador não tem fatores diferentes de 2 e de 5.

6.2. $\frac{37}{20} = \frac{37}{2^2 \times 5}$ é uma fração decimal porque o denominador ($2^2 \times 5$) não tem fatores diferentes de 2 e de 5.

6.3. $\frac{17}{30} = \frac{17}{2 \times 3 \times 5}$ não é uma fração decimal porque o denominador ($30 = 2 \times 3 \times 5$) tem um fator (3) diferente de 2 e de 5.

6.4. $\frac{9}{30} = \frac{3^2}{2 \times 3 \times 5} = \frac{3}{2 \times 5}$ é uma fração decimal porque o denominador ($10 = 2 \times 5$) não tem fatores diferentes de 2 e de 5.

Aplicar – página 131

1. A. A afirmação é verdadeira porque o conjunto dos números reais é igual à reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

B. A afirmação é verdadeira porque, por exemplo, $\sqrt{2}$ é um número real e não é um número racional.

C. A afirmação é falsa porque os números irracionais são números reais e não são números racionais.

2.

$$2.1. 7 \in \mathbb{Z}$$

$$2.2. -7 \in \mathbb{R}$$

$$2.3. \sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$$

$$2.4. -\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

$$2.5. \sqrt{16} \in \mathbb{Z}$$

$$2.6. -\frac{2}{5} \in \mathbb{R}$$

$$2.7. \pi \notin \mathbb{Z}$$

$$2.8. -17,(3) \in \mathbb{Q}$$

$$2.9. 7,375 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} 20 3. \quad P &= \sqrt{3} + (\sqrt{3} + 1) + \sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2} + 3\sqrt{3} = \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{3} + 3\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 + 1 = \\ &= 5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 2 \\ R.: P &= (5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 2) \text{ cm} \end{aligned}$$

20 4.

$$\begin{aligned} 4.1. \quad 3(\sqrt{3} + 2) - 4\sqrt{3} &= \\ &= 3\sqrt{3} + 6 - 4\sqrt{3} = \\ &= 6 + (3 - 4)\sqrt{3} = \\ &= 6 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.2. \quad (\sqrt{3} - 1)^2 &= \\ &= (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1 = \\ &= 3 - 2\sqrt{3} + 1 = \\ &= 4 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.3. \quad (\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} + 1) &= \\ &= (\sqrt{7})^2 - 1^2 = \\ &= 7 - 1 = \\ &= 6 \end{aligned}$$

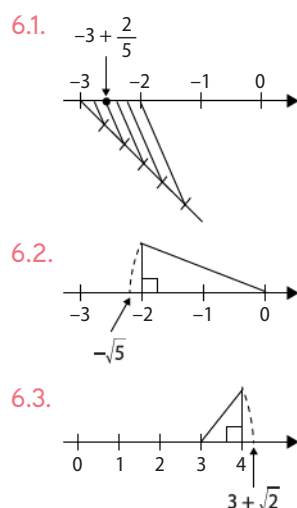
$$\begin{aligned} 4.4. \quad -3(\sqrt{5} - 1) + (4\sqrt{7} - 2) &= \\ &= -3\sqrt{5} + 3 + 4\sqrt{7} - 2 = \\ &= 1 - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.5. \quad (5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 &= \\ &= 25 \times 2 - 3 = \\ &= 50 - 3 = \\ &= 47 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.6. \quad 7(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{7})^2 &= \\ &= 7\sqrt{3} - 7 + 7 = \\ &= 7\sqrt{3} \end{aligned}$$

5. Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.
 Como o triângulo é isósceles, $\overline{AB} = \overline{BC}$.
 Logo, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BC}^2$.
 Assim, $\overline{AC}^2 = 3^2 + 3^2$
 $\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 9 + 9$
 $\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 18$
 $\Leftrightarrow \overline{AC} = \pm \sqrt{18}$
 Como $\overline{AC} > 0$, então $\overline{AC} = \sqrt{18}$.
 Como o ponto A tem abscissa 1, então o ponto D tem abscissa $1 + \sqrt{18} = 1 + 3\sqrt{2}$.

20 6.



Aplicar – páginas 138 e 139

1.

- 1.1. Como $x > 12$, então $x + 7 > 19$.
 1.2. Sabendo que $x > 12$, então $2x > 24$.
 1.3. Como $x > 12$, então $3x + 4 > 40$.

2.

- 2.1. Sabendo que $k < 13$, então: $k - 15 < -2$
 2.2. Sabendo que $k < 13$, então: $2k < 26$
 2.3. Sabendo que $k < 13$, então: $-3k > -39$
 2.4. Sabendo que $k < 13$, então: $-k + 4 > -9$

3.

- 3.1. $k < 13$
 $\Leftrightarrow k - 15 < 13 - 15$
 $\Leftrightarrow k - 15 < -2$
 3.2. $k < 13$
 $\Leftrightarrow 2k < 2 \times 13$
 $\Leftrightarrow 2k < 26$

- 3.3. $k < 13$
 $\Leftrightarrow -3k > -3 \times 13$
 $\Leftrightarrow -3k > -39$
 3.3. $k < 13$
 $\Leftrightarrow -k > -13$
 $\Leftrightarrow -k + 4 > -13 + 4$
 $\Leftrightarrow -k + 4 > -9$

4. Seja x o número em que a Filipa pensou e y o número em que a Catarina pensou.
 Sabemos que $x < 12$ e $y < 15$.
 Então, podemos ter, por exemplo, $x = -20$ e $y = -10$.
 Assim, a Cidália não tem razão porque $x \times y = -20 \times (-10) = 200$ e 200 não é menor do que 180.

5.

- 5.1. $16 < x + 5 < 37$
 5.2. $33 < 3x < 96$
 5.3. $51 < 5x - 4 < 156$

6.

- 6.1. Aproximação por defeito: 11,123
 Aproximação por excesso: 11,124
 6.2. Aproximação por defeito: 12,123
 Aproximação por excesso: 12,372
 6.3. Aproximação por defeito: 19,615
 Aproximação por excesso: 19,620

20 7.

- 7.1. a) O lado do quadrado mede x , portanto o perímetro do quadrado é $4x$.
 Por exemplo, $12,56 < 4x < 12,6$.
 b) O lado do quadrado mede x , portanto a área do quadrado é x^2 .
 Por exemplo, $9,8596 < x^2 < 9,9225$.
 7.2. Pela alínea anterior, sabemos que a área do quadrado está enquadrada entre 9,8596 e 9,9225. Assim, não poderia ser 16!
 O Paulo tem razão.
 7.3. Pela alínea 7.1. a) sabemos que o perímetro do quadrado está compreendido entre 12,56 e 12,6.
 Ora, $12,56 < 4\pi < 12,6$, portanto o quadrado poderá ter 4π unidades de perímetro.
 8. Sabe-se que $3 < x < 12$ e que $-5 < y < -1$.
 8.1. $3 - 5 < x + y < 12 - 1$
 $\Leftrightarrow -2 < x + y < 11$

8.2. $3^2 < x^2 < 122$

$$\Leftrightarrow 9 < x^2 < 144$$

8.3. Como $3 < 12$, então $\frac{1}{12} < \frac{1}{3}$.

Assim, $3 < x < 12 \Leftrightarrow \frac{1}{12} < \frac{1}{x} < \frac{1}{3}$.

9. Sejam a e b dois números reais positivos tais que $a < b$.

Como $a < b$, então $a \times \frac{1}{a} < b \times \frac{1}{a}$.

Assim, $\frac{1}{b} \times a \times \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \times b \times \frac{1}{a}$, ou seja, $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

10.

10.1. Se $b > a$, então $b - a$ é **positivo**.

$$\text{Sabe-se que } b - a = b - a + 0 = b - a + c - c = (b + c) - (a + c).$$

$$\text{Como } b - a > 0, \text{ então } (b + c) - (a + c) > 0, \text{ ou seja, } b + c > a + c.$$

10.2. Se $a > b$, então $a - b$ é **positivo**.

Sabe-se, também, que $c > 0$ (pelo enunciado).

Então, $(a - b) \times c = a \times c - b \times c > 0$, pois o produto de dois números positivos é **positivo**.

Logo, como $ac - bc > 0$, temos $ac > bc$.

10.3. Sejam a e b dois números reais positivos e c um número real negativo, tais que $a > b$ e $c < 0$.

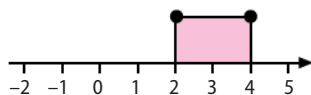
Então, $a \times c < 0$ e $b \times c < 0$.

Assim, $b \times c > a \times c \Leftrightarrow a \times c < b \times c$.

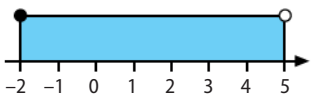
Aplicar – páginas 142 e 143

2.

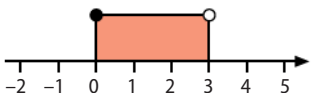
2.1.



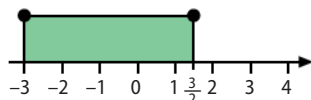
2.2.



2.3.



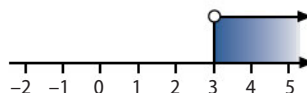
2.4.



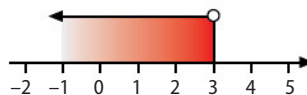
2.5.



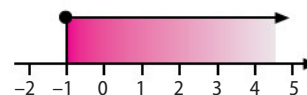
2.6.



2.7.



2.8.



3.

3.1. $[-3, 4] = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 4\}$

3.2. $]3, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$

3.3. $]-\infty, 4] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 4\}$

3.4. $] -6, 2[= \{x \in \mathbb{R} : -6 < x < 2\}$

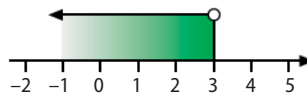
3.5. $] -30, 40] = \{x \in \mathbb{R} : -30 < x \leq 40\}$

3.6. $]-\infty, 70[= \{x \in \mathbb{R} : x < 70\}$

4. $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

20 5.

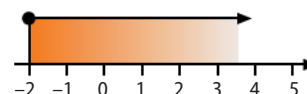
5.1.



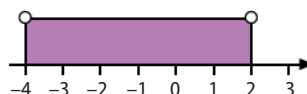
5.2.



5.3.



5.4.



6.

6.1. $A =]-5, +\infty[$

6.2. $B =]-4, 2[$

6.3. $C =]-\infty, 3]$

6.4. $D = [-2, 5]$

7.

7.1. $[-3, 10] = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 10\}$

7.2. $]-\infty, 50] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 50\}$

7.3. $[4, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 4\}$

7.4. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{x \in \mathbb{N} : -3 < x \leq 6\}$

7.5. Por exemplo, $\{2, 3, 4, 5\} = \{x \in \mathbb{Z} : 2 \leq x \leq 5\}$

8. $[C]]-\infty; 1,415]$

9. Os números são o 0, o 1, o 2 e o 3.

10.

10.1. 1, 2, 3 e 4

10.2. Por exemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e π .10.3. [D] 9^{-3}

10.4. O número 4.

10.5. O número 5.

10.6. No universo dos números reais, só podemos conceber raízes de números não negativos, portanto devemos garantir que $k + 2$ é não negativo. Assim, $k \geq -2$.

Além disso, $\sqrt{k+2} \leq 4$, ou seja, $k+2 \leq 16$.

$$k+2 \leq 16$$

$$\Leftrightarrow k+2-2 \leq 16-2$$

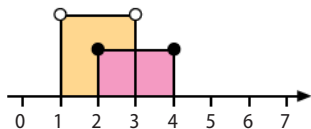
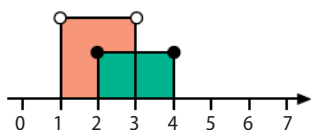
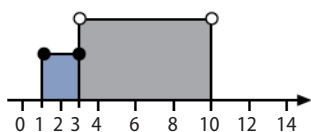
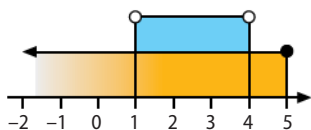
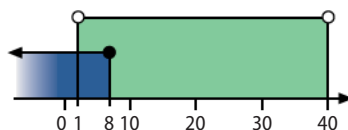
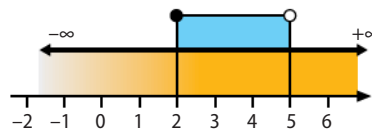
$$\Leftrightarrow k \leq 14$$

Então, k pode tomar os valores $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$ e 14 .

10.7. $]4, +\infty[$

Aplicar – páginas 146 e 147

20 2.

2.1. $[2, 4] \cap]1, 3[= [2, 3[$ 2.2. $[2, 4] \cup]1, 3[=]1, 4]$ 2.3. $[1, 3] \cup]3, 10[= [1, 10[$ 2.4. $]-\infty, 5] \cap]1, 4[=]1, 4[$ 2.5. $]-\infty, 8] \cup]1, 40[=]-\infty, 40[$ 2.6. $\mathbb{R} \cup [2, 5[= \mathbb{R}$ 

3.

3.1. $A \cap B = \{ \}$ 3.2. $A \cup B =]-4, 15]$ 3.3. $A \cap \mathbb{R} = A$ 3.4. $B \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$ 4. [B] $[2, 6[$ 5. $B = [\pi; 3,15]$

6.

6.1. Por exemplo, $\sqrt{6}$.6.2. Por exemplo, $\sqrt{10}$.6.3. Por exemplo, $\sqrt{2}$.

7. 2 e 3.

8. [C] $\{4, \sqrt{144}\}$ 9. [D] $\{-\sqrt{7}, +\infty\}$ 10. [C] $A = [-4, 9] \cap [-5, 7]$ 11. [A] $]0, +\infty[$

20 12.

12.1. a) Por exemplo, $\sqrt{3}$.

b) Não existe nenhum número nestas condições, pois todos os elementos de B pertencem a A .

12.2. Não existe nenhum número nestas condições. Um número que pertence à interseção de dois conjuntos, pertence a cada um desses conjuntos. Neste caso, um número que pertença à interseção de A com B , pertence a A e pertence a B .

Aplicar – páginas 152 e 153

20 2. Como 12 é uma aproximação de a com erro inferior a $\frac{1}{10}$, então $12 - \frac{1}{10} < a < 12 + \frac{1}{10}$.

Como 3 é uma aproximação de b com erro inferior a $\frac{1}{10}$, então $3 - \frac{1}{10} < b < 3 + \frac{1}{10}$.

Como todas as quantidades são positivas, podemos concluir que:

$$\left(3 - \frac{1}{10}\right) \times \left(12 - \frac{1}{10}\right) < a \times b < \left(3 + \frac{1}{10}\right) \times \left(12 + \frac{1}{10}\right),$$

ou seja,

$$\frac{29}{10} \times \frac{119}{10} < a \times b < \frac{31}{10} \times \frac{121}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3451}{100} < a \times b < \frac{3751}{100}$$

$$\Leftrightarrow 34,51 < a \times b < 37,51$$

- 20 3.** Como 7 é uma aproximação de a com erro inferior a 0,3, então $7 - 0,3 < a < 7 + 0,3$.

Como 5 é uma aproximação de b com erro inferior a 0,2, então $5 - 0,2 < b < 5 + 0,2$.

Como todas as quantidades são positivas, podemos concluir que:

$$(7 - 0,3) \times (5 - 0,2) < a \times b < (7 + 0,3) \times (5 + 0,2),$$

ou seja,

$$6,7 \times 4,8 < a \times b < 7,3 \times 5,2$$

$$\Leftrightarrow 32,16 < a \times b < 37,96$$

Assim, como $7 \times 5 = 35$, temos:

$$32,16 - 35 < a \times b - 35 < 37,96 - 35$$

$$\Leftrightarrow -2,84 < a \times b - 35 < 2,96$$

Como $|-2,84| < |2,96|$, podemos concluir que o erro máximo que se pode cometer ao aproximar $a \times b$ por 7×5 é 2,96.

- 4.** Sabemos que $33 \times 10^2 = 3300$.

Pela tabela, $57^2 < 33 \times 10^2 < 58^2$

Logo,

$$\left(\frac{57}{10}\right)^2 < 33 < \left(\frac{58}{10}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 5,7 < \sqrt{33} < 5,8$$

- 5.** Sabemos que $4^2 < 17 < 5^2$. Multiplicando por 10^2 , temos:

$$4^2 \times 10^2 < 17 \times 10^2 < 5^2 \times 10^2$$

$$\Leftrightarrow 40^2 < 17 \times 10^2 < 50^2$$

Pelo método da dicotomia,

Como $45^2 = 2025$ e $2025 > 1700$, temos

$$40^2 < 17 \times 10^2 < 45^2.$$

Como $42^2 = 1764$ e $1764 > 1700$, temos

$$40^2 < 17 \times 10^2 < 42^2.$$

Como $41^2 = 1681$ e $1681 < 1700$,

temos $41^2 < 17 \times 10^2 < 42^2$.

Assim,

$$41^2 < 17 \times 10^2 < 42^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{41}{10}\right)^2 < 17 < \left(\frac{42}{10}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4,1 < \sqrt{17} < 4,2$$

- 6.** Sabemos que $3 \times 10^3 = 3000$.

Pela tabela, $14^3 < 3 \times 10^3 < 15^3$

Logo,

$$\left(\frac{14}{10}\right)^3 < 3 < \left(\frac{15}{10}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 1,4 < \sqrt[3]{3} < 1,5$$

- 7.** No exercício 5 vimos que $4,1 < \sqrt{17} < 4,2$.

Logo, $4,1 + 12 < \sqrt{17} + 12 < 4,2 + 12$, ou seja,

$$16,1 < \sqrt{17} + 12 < 16,2.$$

- 8.** Se 5,099 é um valor aproximado de $\sqrt{26}$, com erro inferior a 0,001, e 6,083 é um valor aproximado de $\sqrt{37}$, com erro inferior a 0,001, então 11,182 é um valor aproximado de $\sqrt{37} + \sqrt{26}$ com erro inferior a 0,002.

- 9.**

9.1. $P = \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ cm

- 9.2.** O pentágono tem, aproximadamente, 8,7 cm de perímetro.

9.3. $8 < P < 9$

- 10.** Para determinar um intervalo que contenha $\sqrt[3]{7}$ nas condições pedidas, basta enquadrar $\sqrt[3]{7}$, por números racionais com erro inferior a $\frac{1}{3}$. Assim, enquadrando $3^3 \times 7 = 189$ por dois cubos perfeitos consecutivos, temos:

$$125 < 189 < 216$$

$$\Leftrightarrow 5^3 < 3^3 < 7 < 7^3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^3 < 7 < \left(\frac{6}{3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} < \sqrt[3]{7} < 2$$

Logo, basta considerar, por exemplo, o intervalo

$$\left] \frac{5}{3}, 2 \right[.$$

11.

11.1. Como 3 é uma aproximação de x com erro inferior a $\frac{3}{10}$, então $3 - \frac{3}{10} < x < 3 + \frac{3}{10}$.

Como -4 é uma aproximação de y com erro inferior a $\frac{4}{10}$, então $-4 - \frac{4}{10} < y < -4 + \frac{4}{10}$.

Assim,

$$\frac{27}{10} < x < \frac{33}{10} \text{ e } -\frac{44}{10} < y < -\frac{36}{10}.$$

Multiplicando esta última desigualdade por -1 ,

$$\text{obtem-se } \frac{36}{10} < -y < \frac{44}{10}$$

Podemos então concluir que:

$$\frac{27}{10} \times \frac{36}{10} < x \times (-y) < \frac{33}{10} \times \frac{44}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{972}{100} < x \times (-y) < \frac{1452}{100}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1452}{100} < x \times y < -\frac{972}{100}$$

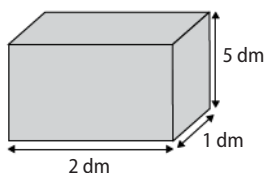
$$\text{Destas desigualdades resulta que } -\frac{1452}{100} - (-12) < x \times y - (-12) < -\frac{972}{100} - (-12)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{252}{100} < x \times y - (-12) < -\frac{228}{100}$$

Como $\left| -\frac{252}{100} \right| > \left| -\frac{228}{100} \right|$, o erro máximo que se pode cometer ao aproximar $x \times y$ por -12 é $\frac{252}{100} = 2,52$.

Adaptado de *Caderno de Apoio às Metas Curriculares* – 3º ciclo

20 12.



$$V_{\text{Depósito}} = 2 \times 1 \times 5 = 10$$

Logo, o volume do novo depósito com a forma de um cubo é 10 dm^3 .

Como $V_{\text{Cubo}} = 10$, então a aresta do cubo mede $\sqrt[3]{10} \text{ cm}$. Pretende-se então determinar uma aproximação por defeito, com erro inferior a uma décima, da medida da aresta do cubo, ou seja, de $\sqrt[3]{10}$.

Sabemos que $2^3 < 10 < 3^3$. Multiplicando por 10^3 , temos:

$$2^3 \times 10^3 < 10 \times 10^3 < 3^3 \times 10^3$$

$$\Leftrightarrow 20^3 < 10 \times 10^3 < 30^3$$

Pelo método da dicotomia,

Como $25^3 = 15\,625$ e $15\,625 > 10\,000$, temos

$$20^3 < 10 \times 10^3 < 25^3.$$

Como $22^3 = 10\,648$ e $10\,648 > 10\,000$, temos

$$20^3 < 10 \times 10^3 < 22^3.$$

Como $21^3 = 9\,261$ e $9\,261 < 10\,000$, temos

$$21^3 < 10 \times 10^3 < 22^3.$$

Assim,

$$21^3 < 10 \times 10^3 < 22^3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{21}{10}\right)^3 < 10 < \left(\frac{22}{10}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 2,1 < \sqrt[3]{10} < 2,2$$

Logo, 2,1 é uma aproximação por defeito, com erro inferior a uma décima, da medida da aresta do cubo.

Aplicar – páginas 158 e 159

20 2.

$$2.1. \quad x + 5 \geq 8$$

$$\Leftrightarrow x \geq 8 - 5$$

$$\Leftrightarrow x \geq 3$$

$$\text{C.S.} = [3, +\infty[$$

$$2.2. \quad d + 12 < 16$$

$$\Leftrightarrow d < 16 - 12$$

$$\Leftrightarrow d < 4$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 4[$$

$$2.3. \quad 1 - j \leq -2$$

$$\Leftrightarrow -j \leq -2 - 1$$

$$\Leftrightarrow -j \leq -3$$

$$\Leftrightarrow j \geq 3$$

$$\text{C.S.} = [3, +\infty[$$

$$2.4. \quad 3b + 4 < -5b + 9$$

$$\Leftrightarrow 4 - 9 < -5b - 3b$$

$$\Leftrightarrow -b < -8b$$

$$\Leftrightarrow -8b > -5$$

$$\Leftrightarrow b < \frac{5}{8}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{5}{8} \right[$$

$$2.5. \quad 3 \leq -g + 5$$

$$\Leftrightarrow 3 - 5 \leq -g$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq -g$$

$$\Leftrightarrow -g \geq -2$$

$$\Leftrightarrow g \leq 2$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 2]$$

$$2.6. \quad 12f - 4 \leq 8f - 7$$

$$\Leftrightarrow 12f - 8f \leq -7 + 4$$

$$\Leftrightarrow 4f \leq -3$$

$$\Leftrightarrow f \leq -\frac{3}{4}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, -\frac{3}{4} \right]$$

2.7. $-12 + 3a \leq -6a$

$$\Leftrightarrow -12 \leq -6a - 3a$$

$$\Leftrightarrow -12 \leq -9a$$

$$\Leftrightarrow -9a \geq -12$$

$$\Leftrightarrow a \leq \frac{12}{9}$$

$$\Leftrightarrow a \leq \frac{4}{3}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{4}{3} \right]$$

2.8. $4c - 12 > 5c - 12$

$$\Leftrightarrow 4c > 5c$$

$$\Leftrightarrow 4c - 5c > 0$$

$$\Leftrightarrow -c > 0$$

$$\Leftrightarrow c < 0$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 0[$$

2.9. $6x \leq 8x - 5$

$$\Leftrightarrow 6x - 8x \leq -5$$

$$\Leftrightarrow -2x \leq -5$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left[\frac{5}{2}, +\infty \right[$$

3. As inequações $x + 5 \geq 8$ e $1 - j \leq -2$ são equivalentes porque têm o mesmo conjunto-solução.

4.

4.1. $z < 17$

4.2. $x + 3x \geq 18$

4.3. $15 - 2x \leq 30$

4.4. $x \times 6 \leq 400$

4.5. $\frac{k}{5} > 18$

5.

5.1. $-4(x - 6) < 3x - 1$

$$\Leftrightarrow -4x + 24 < 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow -4x - 3x < -24 - 1$$

$$\Leftrightarrow -7x < -25$$

$$\Leftrightarrow 7x > 25$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{25}{7}$$

$$\text{C.S.} = \left] \frac{25}{7}, +\infty \right[$$

5.2. Não. $\frac{25}{7}$ não é solução da equação, uma vez que não pertence ao conjunto-solução calculado na alínea anterior.

5.3. O menor número inteiro que é solução da inequação é o 4.

6.

6.1. • $x^2 \leq -3$ é uma inequação do 2º grau, uma vez que o termo de maior grau, x^2 , tem grau grau 2.

$$\bullet 2(x - 6) - 3 > -3x$$

$$\Leftrightarrow 2x - 12 - 3 > -3x$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3x - 15 > 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 15 > 0$$

É uma inequação do 1º grau, uma vez que o termo de maior grau, $5x$, tem grau grau 1.

• $-2x^2 < 6$ é uma inequação do 2º grau, uma vez que o termo de maior grau, $-2x^2$, tem grau grau 2.

6.2. $x^2 \leq -3$ é uma inequação impossível porque o quadrado de um número é sempre maior ou igual a zero (nunca é negativo).

7.
$$\frac{2(x - 6) + 3}{5} \geq -3x + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x - 12 + 3}{5} \geq \frac{-15x + 20}{5}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 15x \geq 20 + 12 - 3$$

$$\Leftrightarrow 17x \geq 29$$

20 8.

8.1. $\frac{x}{3} - 4(x - 6) > -2$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} - 4x + 24 > -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} - 4x > -26$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} - \frac{12x}{3} > -\frac{78}{3}$$

$$\Leftrightarrow -11x > -78$$

$$\Leftrightarrow 11x < 78$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{78}{11}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{78}{11} \right[$$

8.2. $-2\left(\frac{x - 4}{3} - 1\right) \leq 5$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} + 2 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}x \leq 3 - \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}x \leq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow -2x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -2x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[$$

$$8.3. \quad -\frac{5x-2}{3} \geq \frac{x}{2} - 4(x-3)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5x}{3} + \frac{2}{3} - \frac{x}{2} \geq -4x + 12$$

$$\Leftrightarrow -\frac{10x}{6} + \frac{3x}{6} \geq -\frac{24x}{6} + \frac{72}{6} - \frac{4}{6}$$

$$\Leftrightarrow -13x \geq -24x + 68$$

$$\Leftrightarrow 13x \leq 24x - 68$$

$$\Leftrightarrow 13x - 24x \leq -68$$

$$\Leftrightarrow -11x \leq -68$$

$$\Leftrightarrow 11x \geq 68$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{68}{11}$$

$$\text{C.S.} = \left[\frac{68}{11}, +\infty \right[$$

$$8.4. \quad -\frac{2a-5}{3} - 4a < -(a-3)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2a}{3} + \frac{5}{3} - \frac{12}{3}a < -\frac{3a}{3} + \frac{9}{3}$$

$$\Leftrightarrow -14a + 5 < -3a + 9$$

$$\Leftrightarrow -14a < -3a + 4$$

$$\Leftrightarrow -14a > 3a - 4$$

$$\Leftrightarrow 11a > -4$$

$$\Leftrightarrow a > -\frac{4}{11}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\frac{4}{11}, +\infty \right[$$

$$8.5. \quad -\frac{2(y-5)-3}{2} \leq -\frac{3-y}{-2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2y-10-3}{2} \leq \frac{3-y}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2y - 13 \leq 3 - y$$

$$\Leftrightarrow -13 - 3 \leq -y - 2y$$

$$\Leftrightarrow -16 \leq -3y$$

$$\Leftrightarrow 16 \geq 3y$$

$$\Leftrightarrow y \leq \frac{16}{3}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{16}{3} \right]$$

$$8.6. \quad \frac{x-\frac{2}{3}}{4} - \frac{3(x-5)}{12} > -\frac{1}{3} - x$$

$$\Leftrightarrow \frac{3y-2}{12} - \frac{3x-15}{12} > -\frac{4}{12} - \frac{12x}{12}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2 - 3x + 15 > -4 - 12x$$

$$\Leftrightarrow 13 > -4 - 12x$$

$$\Leftrightarrow -4 - 12x < 13$$

$$\Leftrightarrow 4 + 12x > -13$$

$$\Leftrightarrow 12x > -17$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{17}{12}$$

$$\text{C.S.} = \left] \frac{17}{12}, +\infty \right[$$

$$9. \quad \frac{2(x-4)}{3} > -4x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x - 8 > -12x + 3$$

$$\Leftrightarrow -8 - 3 > -12x - 2x$$

$$\Leftrightarrow -11 > -14x$$

$$\Leftrightarrow -14x < -11$$

$$\Leftrightarrow 14x > 11$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{11}{14}$$

$$\text{C.S.} = \left] \frac{11}{14}, +\infty \right[$$

R.: O menor número inteiro que satisfaz a condição é o 1.

10.

$$10.1. \quad -\frac{2-4}{2} + 10 < 2$$

$$1 + 10 < 2$$

$$11 < 2$$

Proposição falsa

$$10.2. \quad -\frac{8-4}{2} + 10 < 8$$

$$-2 + 10 < 8$$

$$8 < 8$$

Proposição falsa

$$10.3. \quad -\frac{\frac{26}{3}-4}{2} + 10 < \frac{26}{3}$$

$$-\frac{14}{3} + 10 < \frac{26}{3}$$

$$-\frac{14}{6} + \frac{60}{6} < \frac{52}{6}$$

$$46 < 52$$

Proposição verdadeira

$$10.4. \quad -\frac{\pi-4}{2} + 10 < \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} + 12 < \pi$$

$$-\pi + 24 < \pi$$

$$-2\pi < -24$$

Proposição falsa

R.: Apenas $\frac{26}{3}$ é solução da inequação.

20 11. Vamos começar por simplificar a expressão:

$$-\frac{2x+10}{3} - 4x = -\frac{2}{3}x - \frac{10}{3} - \frac{12}{3}x = -\frac{14}{3}x - \frac{10}{3}$$

A expressão pode tomar valores entre -4 (não incluído) e 12 (inclusive). Então:

$$\bullet -\frac{14}{3}x - \frac{10}{3} > -4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{14}{3}x - \frac{10}{3} > -\frac{12}{3}$$

$$\Leftrightarrow 14x + 10 < 12$$

$$\Leftrightarrow 14x < 2$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{2}{14}$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{7}$$

$$\bullet -\frac{14}{3}x - \frac{10}{3} \leq 12$$

$$\Leftrightarrow -\frac{14}{3}x - \frac{10}{3} \leq \frac{36}{3}$$

$$\Leftrightarrow 14x + 10 \geq -36$$

$$\Leftrightarrow 14x < -46$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{46}{14}$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{23}{7}$$

R.: x pode tomar os valores pertencentes ao inter-

$$\text{valo} \left[-\frac{23}{7}, \frac{1}{7} \right[.$$

12.

12.1. Uma equação do 2º grau com duas soluções reais distintas garante que o binómio discriminante seja positivo. Assim:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$a = 1, b = -6, c = k$$

$$(-6)^2 - 4 \times 1 \times k > 0$$

$$\Leftrightarrow 36 - 4k > 0$$

$$\Leftrightarrow -4k > -36$$

$$\Leftrightarrow -4k < 36$$

$$\Leftrightarrow k < \frac{36}{4}$$

$$\Leftrightarrow k < 9$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 9[$$

12.2. Uma equação do 2º grau impossível em $\mathbb{R}$ garante que o binómio discriminante seja negativo. Assim:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$a = k, b = -5, c = 3$$

$$(-5)^2 - 4 \times k \times 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow 25 - 12k < 0$$

$$\Leftrightarrow -12k < -25$$

$$\Leftrightarrow 12k > 25$$

$$\Leftrightarrow k > \frac{25}{12}$$

$$\text{C.S.} = \left] \frac{25}{12}, +\infty \right[$$

12.3. Uma equação do 2º grau sem soluções é impossível em $\mathbb{R}$, por isso devemos garantir que o binómio discriminante seja negativo. Assim:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$a = -1, b = 6, c = 3k$$

$$6^2 - 4 \times (-1) \times 3k < 0$$

$$\Leftrightarrow 36 + 12k < 0$$

$$\Leftrightarrow 12k < -36$$

$$\Leftrightarrow k < -\frac{36}{12}$$

$$\Leftrightarrow k < -3$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, -3[$$

13. Temos que garantir que o perímetro do hexágono é inferior a 100 mm:

$$6(4x + 1) < 100$$

$$\Leftrightarrow 24x + 6 < 100$$

$$\Leftrightarrow 24x < 94$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{94}{24}$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{47}{12}$$

Além disso, temos que garantir que o lado do hexágono é positivo:

$$4x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow 4x > -1$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$$

$$\text{Assim, } x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{47}{12} \right[.$$

20 14.

14.1. O triângulo tem 5 cm de altura (o lado $[DC]$ coincide com o lado do quadrado).

Vamos procurar uma expressão simplificada para a área do triângulo e, depois, garantir que não ultrapassa metade da área do quadrado.

$$A = \frac{\left(\frac{5(x-1)}{4} + x \right) \times 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{5}{2} \times \left(\frac{5x}{4} - \frac{5}{4} + \frac{4x}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{5}{2} \times \left(\frac{9x}{4} - \frac{5}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{45x}{8} - \frac{25}{8}$$

Assim:

$$\frac{45x}{8} - \frac{25}{8} \leq \frac{25}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{45x}{8} \leq \frac{25}{8} + \frac{100}{8}$$

$$\Leftrightarrow 45x \leq 125$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{125}{45}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{25}{9}$$

Além disso, devemos garantir que a base do triângulo seja um número positivo:

$$\frac{5(x-1)}{4} + x > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x}{4} - \frac{5}{4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 9x > 5$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{5}{9}$$

Então, para garantir as condições do enunciado,

$$x \in \left] \frac{5}{9}, \frac{25}{9} \right].$$

Aplicar – páginas 162 e 163

20 2.

2.1. $x \geq 10 \vee 2x \leq -40$

$$\Leftrightarrow x \geq 10 \vee x \leq -\frac{40}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 10 \vee x \leq -20$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, -20[\cup [10, +\infty[$$

2.2. $3x - 4 \leq 0 \vee x \geq 0$

$$\Leftrightarrow 3x \leq 4 \vee x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3} \vee x \geq 0$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{4}{3} \right] \cup [0, +\infty[= \mathbb{R}$$

2.3. $\frac{5x-10}{2} > -3 \vee -3(x-2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 5x - 10 > -6 \vee -3x + 6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 5x > 4 \vee -3x \geq 6$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{4}{5} \vee -x \leq 2$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 2] \cup \left] \frac{4}{5}, +\infty[= \mathbb{R}$$

2.4. $\frac{3x}{2} - 5 \leq -x \vee 2(x-4) - x \geq -3$

$$\Leftrightarrow 3x - 10 \leq -2x \vee 2x - 8 - x \geq -3$$

$$\Leftrightarrow -10 \leq -5x \vee x \geq 5$$

$$\Leftrightarrow 5x \leq 10 \vee x \geq 5$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2 \vee x \geq 5$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 2] \cup [5, +\infty[$$

20 3.

3.1. $x \geq 8 \wedge x \leq -5$

$$\text{C.S.} =]-\infty, -5] \cup [8, +\infty[= \emptyset$$

3.2. $3x \leq 12 \wedge -2x < -16$

$$\Leftrightarrow 3x \leq 12 \wedge 2x > 16$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{12}{3} \wedge x > \frac{16}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \leq 4 \wedge x > 8$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 4] \cup]8, +\infty[= \emptyset$$

3.3. $-3x - \frac{x}{3} \leq -2 \wedge x - (3x - 4) \geq 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{9}{3}x - \frac{1}{3}x \leq -2 \wedge x - 3x + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{10}{3}x \leq -\frac{6}{3} \wedge -2x \geq -4$$

$$\Leftrightarrow 10x \geq 6 \wedge 2x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{5} \wedge x \leq 2$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 2] \cap \left[\frac{3}{5}, +\infty[= \left[\frac{3}{5}, 2 \right]$$

3.4. $\frac{2x-10}{3} \leq 0 \wedge \frac{-3(x-6)}{2} > -4(x-1)$

$$\Leftrightarrow 2x - 10 \leq 0 \wedge -3x + 18 > -8(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 10 \wedge -3x > -8x + 8 - 18$$

$$\Leftrightarrow x \leq 5 \wedge -3x > -8x - 10$$

$$\Leftrightarrow x \leq 5 \wedge 3x < 8x + 10$$

$$\Leftrightarrow x \leq 5 \wedge -5x < 10$$

$$\Leftrightarrow x \leq 5 \wedge x > -2$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 5] \cap]-2, +\infty[=]-2, 5]$$

4. $2x - 4 > 0 \wedge x \leq 6$

$$\Leftrightarrow 2x > 4 \wedge x \leq 6$$

$$\Leftrightarrow x > 2 \wedge x \leq 6$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 6] \cap]2, +\infty[=]2, 6]$$

Por exemplo, o número 3 satisfaz simultaneamente as duas condições.

20 5.

$$5.1. \begin{cases} 5x - 3 > -4 \\ x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x > -1 \\ x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{5} \\ x \leq 7 \end{cases}$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 7] \cap \left]-\frac{1}{5}, +\infty\right[= \left]-\frac{1}{5}, 7\right]$$

$$5.2. \begin{cases} \frac{x-4}{3} \leq 1 \\ 2x-4 \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \leq 3 \\ 2x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 7] \cap \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[= \left[\frac{3}{2}, 7\right]$$

$$5.3. \begin{cases} x \geq \frac{2x-1}{3} \\ -3(x-4) \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 2x-1 \\ -3x+12 \geq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ -3x \geq -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq \frac{13}{3} \end{cases}$$

$$\text{C.S.} = \left]-\infty, \frac{13}{3}\right] \cap [-1, +\infty[= \left[-1, \frac{13}{3}\right]$$

$$5.4. \begin{cases} \frac{3(x-1)}{2} \leq \frac{x-4}{4} \\ \frac{-2x-4}{3} \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x-1) \leq x-4 \\ -2x-4 \leq -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-6 \leq x-4 \\ -2x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \leq 2 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{5} \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{C.S.} = \left]-\infty, \frac{2}{5}\right] \cap \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[= \left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right]$$

20 6. Vamos definir os conjuntos A e B sob a forma de intervalo:

Conjunto A:

$$2(x-1) \leq \frac{x}{3}$$

$$\Leftrightarrow 6(x-1) \leq x$$

$$\Leftrightarrow 6x-6 \leq x$$

$$\Leftrightarrow 5x \leq 6$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{6}{5}$$

$$\text{C.S.} = \left]-\infty, \frac{6}{5}\right]$$

Conjunto B:

$$3x - \frac{3}{2} > \frac{5x-6}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6x-3 > 5x-6$$

$$\Leftrightarrow x > -3$$

$$\text{C.S.} =]-3, +\infty[$$

$$6.1. A \cup B = \left]-\infty, \frac{6}{5}\right] \cup]-3, +\infty[= \mathbb{R}$$

$$6.2. A \cap B = \left]-\infty, \frac{6}{5}\right] \cap]-3, +\infty[= \left]-3, \frac{6}{5}\right]$$

$$6.3. A \cup \mathbb{N} = \left]-\infty, \frac{6}{5}\right] \cap \mathbb{N} = \{1\}$$

$$7. \frac{-3(x-1)}{2} + 4 > 0 \wedge \frac{-3(x-1)}{2} + 4 < 4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{8}{2} > 0 \wedge -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} > 0 \wedge -\frac{3}{2}x < -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow -3x > -11 \wedge 3x > 3$$

$$\Leftrightarrow 3x < 11 \wedge x > 1$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{11}{3} \wedge x > 1$$

$$\text{C.S.} = \left]-\infty, \frac{11}{3}\right[\cap]1, +\infty[= \left]1, \frac{11}{3}\right[$$

A expressão dada representa simultaneamente um valor positivo e menor do que 4 quando x toma os valores inteiros 2 e 3.

8.

$$8.1. -3 \leq -2x-10 \wedge -2x-10 < 0$$

$$\Leftrightarrow -3+10 \leq -2x \wedge -2x < 10$$

$$\Leftrightarrow -2x \geq 7 \wedge 2x > -10$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq -7 \wedge x > -5$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{2} \wedge x > -5$$

$$\text{C.S.} = \left]-\infty, -\frac{7}{2}\right[\cap]-5, +\infty[= \left]-5, -\frac{7}{2}\right]$$

$$8.2. 10 > -\frac{x-4}{3} + 2(-x-1) \wedge \frac{x-4}{2} + 2x(-x-1) > -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{30}{3} > -\frac{x}{3} + \frac{4}{3} - \frac{6}{3}x - \frac{6}{3} \wedge -\frac{x}{3} + \frac{4}{3} - \frac{6}{3}x - \frac{6}{3} > -\frac{3}{3}$$

$$\Leftrightarrow 30 > -7x-2 \wedge -7x-2 > -3$$

$$\Leftrightarrow -7x < 32 \wedge -7x > -1$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{32}{7} \wedge x < \frac{1}{7}$$

$$\text{C.S.} = \left]-\infty, \frac{1}{7}\right[\cap \left]-\frac{32}{7}, +\infty\right[= \left]-\frac{32}{7}, \frac{1}{7}\right[$$

9. $3(x + 1) \geq 2x$

$$\Leftrightarrow 3x + 3 \geq 2x$$

$$\Leftrightarrow x \geq -3$$

$$\text{C.S.} = [-3, +\infty[$$

Os números inteiros negativos são o -3, o -2 e o -1.

10. $\frac{1}{2}(x + 10) < 3x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{10}{2} < \frac{6}{2}x$$

$$\Leftrightarrow x - 6x < -10$$

$$\Leftrightarrow 5x > 10$$

$$\Leftrightarrow x > 2$$

$$\text{C.S.} =]2, +\infty[$$

Como os números reais que procuramos são menores do que 15, então pertencem ao intervalo $]2, 15[$.

20 11. Usando a desigualdade triangular, temos:

$$4 < \frac{2x - 10}{3} + 3 \wedge \frac{2x - 10}{3} < 4 + 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x - 10}{3} > 1 \wedge \frac{2x - 10}{3} < 7$$

$$\Leftrightarrow 2x - 10 > 3 \wedge 2x - 10 < 21$$

$$\Leftrightarrow 2x > 13 \wedge 2x < 31$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{13}{2} \wedge x < \frac{31}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{31}{2} \right[\cap \left] \frac{13}{2}, +\infty \right[= \left] \frac{13}{2}, \frac{31}{2} \right[$$

R.: x pode tomar os seguintes valores inteiros: 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15

Praticar – páginas 164 a 169

1. A. Se $x > 9$, então $x + 11 > 9 + 11 \Leftrightarrow x + 11 > 20$.

(Propriedade da monotonia da adição em $\mathbb{R}$)

B. Se $x > 5$ e $y > 11$, então $x + y > 5 + 11 \Leftrightarrow x + y > 16$

(Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$).

C. Se $3 < x < 7$, então $\frac{1}{7} < \frac{1}{x} < \frac{1}{3}$

(Se $a < b$, então $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, com a e $b \in \mathbb{R}^+$).

2.

2.1. $a < 7$

$$\Leftrightarrow 3 \times a < 3 \times 7$$

$$\Leftrightarrow 3a < 21$$

2.2. $a \geq 6$

$$\Leftrightarrow -a \leq -6$$

$$\Leftrightarrow -2a \leq -6 \times 2$$

$$\Leftrightarrow -2a \leq -12$$

2.3. $3a > 5b$

Sabemos que se $a > b$, então $a^2 > b^2$, com a e $b \in \mathbb{R}^+$.

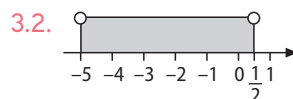
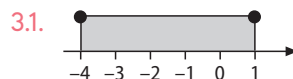
Assim, $(3a)^2 > (5b)^2$, ou seja, $9a^2 > 25b^2$

2.4. Sabemos que se $a < b$, então $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, com a e $b \in \mathbb{R}^+$.

Assim, como $a \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq a$, temos $\frac{1}{a} \leq 3$.

2.5. Se $a < 11$ e $b < 13$, então $a + b < 11 + 13 \Leftrightarrow a + b < 24$.

3.



4.

4.1. $[-2, +\infty[$

4.2. $]0, 10]$

5. Como $\frac{3}{2} = 1,5$, o único número natural pertencente ao intervalo $\left] -5, \frac{1}{2} \right[$ é o 1.

6.

6.1. $P = 2(3\sqrt{5} - 2) + 2(4\sqrt{5} + 5)$

$$\Leftrightarrow P = 6\sqrt{5} - 4 + 8\sqrt{5} + 10$$

$$\Leftrightarrow P = 6 + 14\sqrt{5}$$

R.: O retângulo tem $(6 + 14\sqrt{5})$ cm de perímetro.

6.2. O perímetro do retângulo é, aproximadamente, 37,4 cm.

6.3. $A = (3\sqrt{5} - 2)(4\sqrt{5} + 5)$

$$\Leftrightarrow A = 12 \times 5 + 15\sqrt{5} - 8\sqrt{5} - 10$$

$$\Leftrightarrow A = 50 + 7\sqrt{5}$$

R.: O retângulo tem $(50 + 7\sqrt{5})$ cm² de área.

6.4. A área do retângulo é, aproximadamente, 65,65 cm².

7.

7.1. 3

7.2. -3

7.3. 1, 2, 3 e 4

7.4. 1 e 2

8.

8.1. O José resolveu corretamente a inequação.

8.2. O Francisco não trocou o sentido da desigualdade quando dividiu ambos os membros da inequação por um número negativo.

20 9.

9.1. $-4(-x - 1) < 2x$

$$\Leftrightarrow 4x + 4 < 2x$$

$$\Leftrightarrow 2x < -4$$

$$\Leftrightarrow x < -2$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 2[$$

9.2. $3x - 4 \geq 2(x - 6) + 3x$

$$\Leftrightarrow 3x - 4 \geq 2x + 3x - 12$$

$$\Leftrightarrow -2x \geq -8$$

$$\Leftrightarrow x \leq 4$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 4]$$

9.3. $\frac{3x - 3}{2} < -x - 1$

$$\Leftrightarrow 3x - 3 < -2x - 2$$

$$\Leftrightarrow -1 < -5x$$

$$\Leftrightarrow 5x < 1$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{5}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{1}{5} \right[$$

10. $x + 6 > 18 \Leftrightarrow x > 12$

$$\text{C.S.} =]12, +\infty[$$

R.: O Filipe tinha inicialmente mais de 12 € no cartão.

20 11.

11.1. $x - 4 > \frac{1}{2}x$

11.2. $x - 4 > \frac{1}{2}x$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2}x - \frac{8}{2} - \frac{1}{2}x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 8$$

$$\text{C.S.} =]8, +\infty[$$

R.: A solução significa, no contexto do problema, que a capacidade do recipiente é superior a 8 litros.

12. $2x > 370 \Leftrightarrow x > 185$

$$\text{C.S.} =]185, +\infty[$$

R.: No mínimo, devem entrar 186 alunos no baile, por forma a que a associação de estudantes tenha lucro com a sua organização.

13. $3x < x + 6$

$$\Leftrightarrow 2x < 6$$

$$\Leftrightarrow x < 3$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 3[$$

R.: 2 é o maior número inteiro que x pode representar.

14. $(x - 3) + 3 + (x - 1) + x < 60 \wedge \frac{(x - 3) + (x - 1)}{2} \times 3 \geq 20$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 < 60 \wedge \frac{2x - 4}{2} \times 3 \geq 20$$

$$\Leftrightarrow 3x < 61 \wedge 3(x - 2) \geq 20$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{61}{3} \wedge 3x \geq 20 + 6$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{61}{3} \wedge 3x \geq 26$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{61}{3} \wedge x \geq \frac{26}{3}$$

$$\text{Então, } x \in \left[\frac{26}{3}, \frac{61}{3} \right[$$

15.

A. Às vezes.

Por exemplo:

$$2 < 3 \text{ e } \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \text{ verifica a afirmação.}$$

$$-3 < 2 \text{ e } \frac{1}{2} < -\frac{1}{3} \text{ não verifica a afirmação.}$$

B. Sempre.

Sabemos que se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$.

C. Às vezes.

Por exemplo, $-1 < 1$ e $(-1)^2 = 1^2$.

D. Nunca.

Sabemos que se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$.

E. Às vezes.

Por exemplo, $5 < 8$ e $0 < 3$, e $5 - 0 = 8 - 3$.

F. Sempre.

Sabemos que se $a > b$, então $a^3 > b^3$, com a e $b \in \mathbb{R}$.

16.

16.1. Por exemplo, $-\pi$.

Para que o número real pertença ao conjunto A e não pertença ao conjunto B , o número deve ser superior a -4 e inferior a -3 .

16.2. Por exemplo, -1 .

Para que o número inteiro pertença ao conjunto B e não pertença ao conjunto A , o número deve ser superior ou igual a -2 e inferior ou igual a 2 .

16.3. Como $A \cap B = [-4, -2] \cap]-3, 2] =]-3, -2]$, o único número inteiro pertencente a este intervalo é -2.

16.4. Como $A \cup C = [-4, -2] \cup]4, 6[$, o único número natural pertencente a este intervalo é 5.

17. Pelo teorema de Pitágoras, temos $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.

$$\text{Assim, } \overline{AB}^2 = 3^2 + 5^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 9 + 25$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 34$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \pm\sqrt{34}$$

Como $\overline{AB} > 0$, então $\overline{AB} = \sqrt{34}$.

Vamos enquadrar $\overline{AB}$ por números racionais, com erro inferior a 0,1.

Sabemos que $5^2 < 34 < 6^2$. Multiplicando por 10^2 , temos:

$$5^2 \times 10^2 < 34 \times 10^2 < 6^2 \times 10^2$$

$$\Leftrightarrow 50^2 < 34 \times 10^2 < 60^2$$

Pelo método da dicotomia,

Como $55^2 = 3025$ e $3025 < 3400$, temos

$$55^2 < 34 \times 10^2 < 60^2.$$

Como $58^2 = 3364$ e $3364 < 3400$, temos

$$58^2 < 34 \times 10^2 < 60^2.$$

Como $59^2 = 3481$ e $3481 > 3400$, temos

$$58^2 < 17 \times 10^2 < 59^2.$$

Assim,

$$58^2 < 34 \times 10^2 < 59^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{58}{10}\right)^2 < 34 < \left(\frac{59}{10}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 5,8 < \sqrt{34} < 5,9$$

18.

18.1. $-4b \geq 16$

$$\Leftrightarrow b \leq -\frac{16}{4}$$

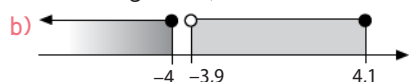
$$\Leftrightarrow b \leq -4$$

Logo, $A =]-\infty, -4]$.

18.2. Todos os números inteiros inferiores ou iguais a -4 pertencem a A.

Por exemplo, -6 e -4.

18.3. a) Como todos os elementos de A são números reais negativos, $A \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$.



Como os conjuntos A e B não têm elementos em comum, a interseção dos dois conjuntos é vazia.

Logo, $A \cap B =]-\infty, -4] \cap]-3,9; 4,1] = \emptyset$.

19. Por exemplo, $x > -3 \wedge x \leq 12$.

20. Por exemplo, $x < 3 \vee x \leq 12$.

20 21.

21.1. $\frac{3x-4}{2} \leq -3(2x-1) - \frac{x}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{9x-12}{6} \leq -\frac{18}{6}(2x-1) - \frac{2x}{6}$$

$$\Leftrightarrow 9x-12 \leq -36x+18-2x$$

$$\Leftrightarrow 9x+38x \leq 18+12$$

$$\Leftrightarrow 47x \leq 30$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{30}{47}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{30}{47} \right]$$

21.2. $\frac{-3-x}{4} - 2x > -\left(2 - \frac{x}{6}\right) + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{6(-3-x)}{24} - \frac{48}{24}x > -\frac{24}{24} + \frac{4x}{24}$$

$$\Leftrightarrow 18-6x-48x > -24+4x$$

$$\Leftrightarrow 18-54x > 4x-24$$

$$\Leftrightarrow -58x > -6$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{6}{58}$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{3}{29}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{3}{29} \right[$$

22. $-4 \leq -\frac{4x-1}{2} + 3(x-2) \wedge -\frac{4x-1}{2} + 3(x-2) < 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{8}{2} \leq -\frac{4x-1}{2} + \frac{6}{2}x - \frac{12}{2} \wedge -\frac{4x-1}{2} + \frac{6}{2}x - \frac{12}{2} \leq \frac{20}{2}$$

$$\Leftrightarrow -8 \leq -4x+6x+1-12 \wedge -4x+6x+1-12 < 20$$

$$\Leftrightarrow -8+11 \leq 2x \wedge 2x < 20+11$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq 2x \wedge 2x < 31$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2} \wedge x < \frac{31}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{31}{2} \right[\cap \left[\frac{3}{2}, +\infty \right[= \left[\frac{3}{2}, \frac{31}{2} \right[$$

20 23.

23.1.
$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{P}{2} \times ap \\ P = 8 \times 6 = 48 \\ ap = x \end{array} \right\} A = \frac{48}{2}x \Leftrightarrow A = 24x$$

23.2. $24x \leq 120 \Leftrightarrow x \leq 5$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 5]$$

Como x é a medida do apótema, então x é positivo.

Assim, $x \in]0, 5]$.

$$24. \quad -2(x - 4) < -4 \wedge \frac{3x + 8}{2} \leq 16$$

$$\Leftrightarrow -2x + 8 < -4 \wedge 3x + 8 \leq 32$$

$$\Leftrightarrow -2x < -12 \wedge 3x \leq 24$$

$$\Leftrightarrow x > 6 \wedge x \leq 8$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 8] \cap]6, +\infty[= \{7, 8\}$$

Os números que permitem abrir o cofre são o 7 e o 8.

25. Seja x o preço do livro de exercícios de Matemática e y o preço do dicionário Inglês – Inglês. Então, sabemos que $y + 3 = 2x$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ x + y \leq 30 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + 2x - 3 \leq 30 \\ \Leftrightarrow 3x \leq 33 \Leftrightarrow x \leq 11 \end{array}$$

O livro de exercícios pode custar, no máximo, 11 €.

$$26. \quad 16 + x < \frac{1}{3}(58 + x)$$

$$\Leftrightarrow 3x + 48 < 58 + x$$

$$\Leftrightarrow 2x < 10$$

$$\Leftrightarrow x < 5$$

Durante 4 anos, a idade da Margarida será menor do que a terça parte da idade do pai.

20 27.

27.1. Modalidade A: $2 \times 10 = 20$ €

Modalidade B: $10 + 1,25 \times 10 = 22,5$ €

Usando a modalidade A, o Filipe pagou 20 €. Se optasse pela modalidade B pagaria 22,5 €, portanto o Filipe fez a escolha mais acertada.

27.2. $1,25x + 10 < 2x$

$$\Leftrightarrow -0,75x < -10$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{10}{0,75}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1000}{75}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{40}{3}$$

$$\text{C.S.} = \left] \frac{40}{3}, +\infty \right[$$

A casa da Catarina teria de ficar a mais de $\frac{40}{3}$ km do aeroporto.

28.

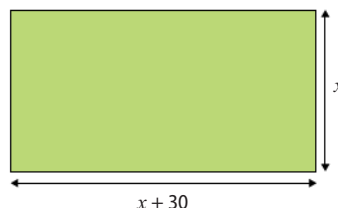
$$28.1. \quad \left. \begin{array}{l} 54 \times 12 = 648 \\ 64 \times 12 = 768 \end{array} \right\} 648 \text{ cm} < c < 768 \text{ cm}$$

$$28.2. \quad \left. \begin{array}{l} 54 \times 5 = 270 \\ 64 \times 5 = 320 \end{array} \right\} 270 \text{ cm} < l < 320 \text{ cm}$$

$$28.3. \quad \left. \begin{array}{l} 12 + 5 + 12 + 5 = 34 \\ 54 \times 34 = 1836 \\ 64 \times 34 = 2176 \end{array} \right\} 1836 \text{ cm} < P < 2176 \text{ cm}$$

$$28.4. \quad \left. \begin{array}{l} 12 \times 54 \times 5 \times 54 = \\ = 174\,960 \\ 12 \times 64 \times 5 \times 64 = \\ = 245\,760 \end{array} \right\} 174\,960 \text{ cm}^2 < A < 245\,760 \text{ cm}^2$$

29.



$$P = 2x + 2x + 60 \Leftrightarrow P = 4x + 60$$

$$\text{Como } 80 < P < 100, \text{ então } 80 < 4x + 60 < 100$$

$$\Leftrightarrow 80 - 60 < 4x + 60 - 60 < 100 - 60$$

$$\Leftrightarrow 20 < 4x < 40$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{4} < \frac{4x}{4} < \frac{40}{4}$$

$$\Leftrightarrow 5 < x < 10$$

30.

$$\frac{x}{2} \leq \frac{2x + 7}{3}$$

$$(\times 3) \quad (\times 2)$$

$$\Leftrightarrow 3x \leq 4x + 14$$

$$\Leftrightarrow 3x - 4x \leq 14$$

$$\Leftrightarrow -x \leq 14$$

$$\Leftrightarrow x \geq -14$$

Todos os números inteiros positivos satisfazem a inequação dada porque todos os números inteiros positivos são superiores a -14 .

31.

A opção [A] é sempre verdadeira.

A opção [B] nem sempre é verdadeira.

Por exemplo, se $a = -1$ e $b = -1$, temos $a \leq b$, $-2 \times a = -2 \times (-1) = 2$ e $-2 \times b = -2 \times (-1) = 2$. Logo, como $4 > 2$, neste caso temos $-2 \times a > -2 \times b$.

A opção [C] nem sempre se verifica. Por exemplo, se $a = 5$ e $b = 8$, temos $a \leq b$, $11 - a = 11 - 5 = 6$ e $11 - b = 11 - 8 = 3$. Logo, como $6 > 3$, neste caso temos $11 - a > 11 - b$.

A opção [D] nem sempre é verdadeira. Por exemplo, se $a = -5$ e $b = 2$, temos $a \leq b$, $a^2 = (-5)^2 = 25$ e $b^2 = 2^2 = 4$. Logo, como $25 > 4$, neste caso temos $a^2 > b^2$.

A opção [E] nem sempre se verifica. Por exemplo, se $a = -5$ e $b = 2$, temos $a \leq b$, $a^2 = (-5)^2 = 25$ e $a \times b = -5 \times 2 = -10$. Logo, como $25 > -10$, neste caso temos $a^2 > a \times b$.

A opção [F] é sempre verdadeira.

32.

32.1. $x < x$

$$\Leftrightarrow x - x < 0$$

$$\Leftrightarrow 0x < 0$$

$$\text{C.S.} = \{ \}$$

32.2. $x \leq x$

$$\Leftrightarrow x - x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0x \leq 0$$

$$\text{C.S.} = \mathbb{R}$$

32.3. $x + 10 > x$

$$\Leftrightarrow x - x > -10$$

$$\Leftrightarrow 0x > -10$$

$$\text{C.S.} = \mathbb{R}$$

33. A afirmação I é verdadeira. A afirmação II é falsa. Por exemplo, $6 \leq 6$ e 6 não é menor do que 6.

34.

34.1. $\widehat{BFC} = 360^\circ : 5 = 72^\circ$

$$\text{Logo, comprimento do arco } BC = \frac{72^\circ \times \pi \times 10}{180^\circ} = 4\pi$$

$$\text{R.: } 4\pi \text{ cm}$$

34.2. O comprimento do arco CE é o dobro do comprimento do arco BC, ou seja, é igual a 8π cm.

Como $8\pi \approx 25,1327\dots$, então um enquadramento nas condições pedidas é, por exemplo,

$$25,1 \text{ cm} < 8\pi \text{ cm} < 25,2 \text{ cm}$$

35.

35.1. Se $k < 0$, $kx \geq 9k \Leftrightarrow \frac{kx}{k} \leq \frac{9k}{k} \Leftrightarrow x \leq 9$

35.2. Se $k > 0$, $kx \geq 9k \Leftrightarrow \frac{kx}{k} \geq \frac{9k}{k} \Leftrightarrow x \geq 9$

36. [D] $]3,31, \sqrt{12}]$

37. Três números pares consecutivos são da forma $2x$, $2x + 2$ e $2x + 4$.

$$\text{Assim, } 2x + 2x + 2 + 2x + 4 < 55$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2x + 2x < 55 - 2 - 4$$

$$\Leftrightarrow 6x < 49$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{49}{6}$$

Ou seja, $x \leq 8$.

Se $x = 1$:

$$2x = 2 \times 1 = 2, 2x + 2 = 2 \times 1 + 2 = 4, 2x + 4 = 2 \times 1 + 4 = 6$$

$$\{2, 4, 6\}$$

Se $x = 2$:

$$2x = 2 \times 2 = 4, 2x + 2 = 2 \times 2 + 2 = 6, 2x + 4 = 2 \times 2 + 4 = 8$$

$$\{4, 6, 8\}$$

Se $x = 3$:

$$2x = 2 \times 3 = 6, 2x + 2 = 2 \times 3 + 2 = 8, 2x + 4 = 2 \times 3 + 4 = 10$$

$$\{6, 8, 10\}$$

Se $x = 4$:

$$2x = 2 \times 4 = 8, 2x + 2 = 2 \times 4 + 2 = 10, 2x + 4 = 2 \times 4 + 4 = 12$$

$$\{8, 10, 12\}$$

Se $x = 5$:

$$2x = 2 \times 5 = 10, 2x + 2 = 2 \times 5 + 2 = 12, 2x + 4 = 2 \times 5 + 4 = 14$$

$$\{10, 12, 14\}$$

Se $x = 6$:

$$2x = 2 \times 6 = 12, 2x + 2 = 2 \times 6 + 2 = 14, 2x + 4 = 2 \times 6 + 4 = 16$$

$$\{12, 14, 16\}$$

Se $x = 7$:

$$2x = 2 \times 7 = 14, 2x + 2 = 2 \times 7 + 2 = 16, 2x + 4 = 2 \times 7 + 4 = 18$$

$$\{14, 16, 18\}$$

Se $x = 8$:

$$2x = 2 \times 8 = 16, 2x + 2 = 2 \times 8 + 2 = 18, 2x + 4 = 2 \times 8 + 4 = 20$$

$$\{16, 18, 20\}$$

20 38.

38.1. $2t + 8 \leq 16$

$$\Leftrightarrow 2t \leq 8$$

$$\Leftrightarrow t \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -2t + t \leq -2t + 4$$

$$\Leftrightarrow -t \leq -2t + 4$$

$$\Leftrightarrow t \geq 2t - 4$$

38.2. $2t + 8 \leq 16$

$$\Leftrightarrow 2t \leq 8$$

$$\Leftrightarrow t \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -2t + t \geq -2t + 4$$

$$\Leftrightarrow -t \geq -2t + 4$$

$$\Leftrightarrow t \geq 2t - 4$$

$$\Leftrightarrow t + 4 \geq 2t$$

38.3. $2t + 8 \leq 16$

$$\Leftrightarrow 2t \leq 8$$

$$\Leftrightarrow t \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -2t + t \leq -2t + 4$$

$$\Leftrightarrow -t \leq -2t + 4$$

$$\Leftrightarrow t \geq 2t - 4$$

$$\Leftrightarrow 2t \geq 3t - 4$$

$$\Leftrightarrow 2t - 3t + 4 + 20 \geq 3t - 4$$

$$\Leftrightarrow 2t + (-3t + 24) \geq 3t - 4$$

38.4. $2t + 8 \leq 16$

$$\Leftrightarrow 2t \leq 8$$

$$\Leftrightarrow t \leq 4$$

$$\Leftrightarrow t + t \leq t + 4$$

$$\Leftrightarrow 2t - 5 \leq t + 4 - 5$$

$$\Leftrightarrow 2t - 5 \geq t - 1$$

38.5. $2t + 8 \leq 16$

$$\Leftrightarrow 2t \leq 8$$

$$\Leftrightarrow t \leq 4$$

$$\Leftrightarrow t - 3 \leq 4 - 3$$

$$\Leftrightarrow t - 3 \leq 1$$

38.6. $2t + 8 \leq 16$

$$\Leftrightarrow 2t \leq 8$$

$$\Leftrightarrow t \leq 4 \vee -2t + t \leq -2t + 4$$

$$\Leftrightarrow -t \leq -2t + 4$$

$$\Leftrightarrow t \geq 2t - 4$$

$$\Leftrightarrow t - 2t - 4 \geq -4 - 4$$

$$\Leftrightarrow -t - 4 \geq -8$$

20 39.

39.1. $-\frac{4x-2}{6} > -\frac{5}{3} \wedge x > -2$

$$\Leftrightarrow 4x - 2 < 10 \wedge x > -2$$

$$\Leftrightarrow 4x < 12 \wedge x > -2$$

$$\Leftrightarrow x < 3 \wedge x > -2$$

$$B = \{-1, 0, 1, 2\}$$

39.2. $\frac{2}{3}(x+3) > \frac{4}{3}2x - 3 < 7$

$$\Leftrightarrow 2x + 6 > 4 \wedge 2x < 10$$

$$\Leftrightarrow 2x > -2 \wedge x < 5$$

$$\Leftrightarrow x > -1 \wedge x < 5$$

$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$

40.

$$\begin{cases} -3(x-2) \geq -\frac{x}{4} \\ \frac{x-2}{3} < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12x + 24 \geq -x \\ x - 2 < 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x \leq x + 24 \\ x - 3x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x \leq 24 \\ -2x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{24}{11} \\ x > -1 \end{cases}$$

$$C.S. = \{0, 1, 2\}$$

R.: Em $\mathbb{Z}$, x pode tomar os valores 0, 1 e 2.

41.

$$-4(s-4) - 3 > -3$$

$$\Leftrightarrow -4s + 16 - 3 + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow -4s > -16$$

$$\Leftrightarrow s < 4$$

R.: O maior valor inteiro que s pode assumir é o 3.

42.

Seja l a largura desse retângulo e $l + 6$ o seu comprimento. Então, o perímetro do retângulo é definido pela expressão $4l + 12$.

$$4l + 12 \geq 44$$

$$\Leftrightarrow 4l \geq 32$$

$$\Leftrightarrow l \geq 8$$

R.: No mínimo, o retângulo tem 8 cm de largura e 14 cm de comprimento.

43.

$$\frac{50 + 90 + 78 + 72 + x}{5} \geq 70$$

$$\Leftrightarrow 290 + x \geq 350$$

$$\Leftrightarrow x \geq 60$$

R.: No mínimo, a Catarina deve ter 60%.

20 44.

44.1. $d^2 = 8^2 + 10^2$

$$\Leftrightarrow d^2 = 164$$

$$\Leftrightarrow d = -\sqrt{164} \vee d = \sqrt{164}$$

Como $d > 0$, então $d = \sqrt{164}$.

O comprimento da diagonal é de aproximadamente, 12,807 cm.

44.2. Seja h a hipotenusa de um desses triângulos retângulos. Então:

$$h^2 = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{4}x^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{18}{4}x^2$$

$$\Leftrightarrow h = -\frac{\sqrt{18}}{2}x \vee h = \frac{\sqrt{18}}{2}x$$

Como $h > 0$, então $h = \frac{\sqrt{18}}{2}x$.

Se $x = 2$, o perímetro do triângulo é:

$$P = \frac{\sqrt{18}}{2} \times 2 + 2 \times \left(\frac{3}{2} \times 2\right)$$

$$\Leftrightarrow P = \sqrt{18} + 6$$

Quando $x = 2$, cada um dos triângulos isósceles tem $(6 + \sqrt{18})$ cm de perímetro.

$$\begin{aligned}
 44.3. \quad & (8 - 2x) + 4x + 2\left(10 - x - \frac{3}{2}x\right) + 2\left(\frac{\sqrt{18}}{2}x\right) + \\
 & + \left(8 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x\right) > 33 \\
 \Leftrightarrow & 8 + 2x + 20 - 2x - 3x + \sqrt{18}x + 8 - 3x > 33 \\
 \Leftrightarrow & 28 - 6x + 8 + \sqrt{18}x > 33 \\
 \Leftrightarrow & -6x + \sqrt{18}x > 33 - 36 \\
 \Leftrightarrow & -6x + \sqrt{18}x > -3 \\
 \Leftrightarrow & (-6x + \sqrt{18}x) > -3 \\
 \Leftrightarrow & x < \frac{3}{6 - \sqrt{18}}
 \end{aligned}$$

Como x representa o comprimento do lado de um quadrado, então é um valor positivo.

$$\text{Logo, } 0 < x < \frac{3}{6 - \sqrt{18}}$$

Praticar para a prova final – páginas 170 e 171

1. [B] $\sqrt{2,5}$

2. [D] $\sqrt{3}, \pi$

3. [A] $-\sqrt{27}$ e π

4. [C] 3

5. [B] -3

6. [B] $\{x \in \mathbb{R}: x > -1 \wedge x \leq 4\}$

7. [C] $]-\infty, +\infty[$

8. $A =]\sqrt{10}, 7]$

9.
9.1. [D] $A = [-1, 1[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$

9.2. $3 + \frac{1-x}{2} \leq 4$

$$\Leftrightarrow 6 + 1 - x \leq 8$$

$$\Leftrightarrow -x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1$$

$$\text{C.S.} = [-1, +\infty[$$

O conjunto-solução desta inequação é o conjunto A.

10. Por exemplo, $\sqrt{18}$.

11.

11.1. Os números são: -2, -1, 0, 1, 2

11.2. $\left[-\frac{7}{3}, \pi\right]$

12. $x + \frac{1-2x}{3} \leq \frac{x}{2}$

$$\Leftrightarrow 6x + 2 - 4x \leq 3x$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3x \leq -2$$

$$\Leftrightarrow -x \leq -2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\text{C.S.} = [2, +\infty[$$

13. [D] $3,1 \times 10^1$

14. Por exemplo, $\frac{17}{7}$.

15. $\frac{12}{5}x - 4 \geq \frac{5}{2}(x - 3)$

$$\Leftrightarrow 24x - 40 \geq 25x - 75$$

$$\Leftrightarrow -x \geq -35$$

$$\Leftrightarrow x \leq 35$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 35]$$

20 Testar – páginas 178 e 179

1. A opção é a [C], pois não se verifica para o caso de $a = b$.

2. Se $-x > a$, então $x < -a$.

Se $-x < b$, então $x > -b$.

Assim, se $a < -x < b$, então $-a < x < -b$

3. Pelo teorema de Pitágoras,

$$x^2 = 3^2 + 1^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{10}$$

$$\text{Como } x > 0, x = \sqrt{10}$$

Assim, pertencem ao intervalo todos os números reais superiores a $\sqrt{10}$ e, portanto, a opção correta é a [C].

4. A opção [A] não é a correta porque $17 \notin]-\infty, \sqrt{2}]$.

A opção [B] também não é a correta porque

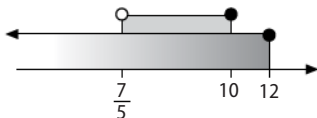
$$\sqrt{3} \notin]-\infty, \sqrt{2}].$$

A opção [C] é a correta porque $-300 \in]-\infty, \sqrt{2}]$ e

$$\sqrt{2} \in]-\infty, \sqrt{2}].$$

A opção [D] não é a correta porque $\frac{13}{2} \notin]-\infty, \sqrt{2}]$.

5.



Logo, $P = \left] \frac{7}{5}, 10 \right]$ e a opção correta é a [A].

6. Como 15 é uma aproximação de a com erro inferior a $\frac{1}{100}$, então $15 - \frac{1}{100} < a < 15 + \frac{1}{100}$.

Como 7 é uma aproximação de b com erro inferior a $\frac{1}{100}$, então $7 - \frac{1}{100} < b < 7 + \frac{1}{100}$.

Como todas as quantidades são positivas, podemos concluir que:

$$\left(15 - \frac{1}{100}\right) \times \left(7 - \frac{1}{100}\right) < a \times b < \left(15 + \frac{1}{100}\right) \times$$

$$\times \left(7 + \frac{1}{100}\right), \text{ ou seja,}$$

$$\frac{1499}{100} \times \frac{699}{100} < a \times b < \frac{1501}{100} \times \frac{701}{100}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1\,047\,801}{10\,000} < a \times b < \frac{1\,052\,201}{10\,000}$$

$$\Leftrightarrow 104,7801 < a \times b < 105,2201$$

7. Sabemos que $r = 0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Enquadrando o produto $2^3 \times 13 = 104$ por dois cubos perfeitos consecutivos, obtemos:

$$64 < 104 < 125$$

$$\Leftrightarrow 4^3 < 2^3 \times 13 < 5^3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{2}\right)^3 < 13 < \left(\frac{5}{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 2^3 < 13 < \left(\frac{5}{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 2 < \sqrt[3]{13} < 2,5$$

8.

8.1. Os números são: -8, -7, -6, -5, -4 e -3.

8.2. -11

8.3. Por exemplo, $\sqrt{\frac{59}{5}}$.

9.

9.1. $A_{\text{Retângulo}} = b \times h$

$$A_{\text{Retângulo}} = 5 \times 2 = 10$$

Se $A_{\text{Quadrado}} = 10$, então $l^2 = 10 \Leftrightarrow l = \sqrt{10}$

R.: $l = \sqrt{10}$ cm

9.2. Sabemos que $3^2 < 10 < 4^2$. Multiplicando por 10^2 , temos:

$$3^2 \times 10^2 < 10 \times 10^2 < 4^2 \times 10^2$$

$$\Leftrightarrow 30^2 < 17 \times 10^2 < 40^2$$

Pelo método da dicotomia,

Como $35^2 = 1225$ e $1225 > 1000$, temos $30^2 < 10 \times 10^2 < 35^2$.

Como $32^2 = 1024$ e $1024 > 1000$, temos $30^2 < 10 \times 10^2 < 32^2$.

Como $31^2 = 961$ e $961 < 1000$, temos $31^2 < 10 \times 10^2 < 32^2$.

Assim,

$$31^2 < 10 \times 10^2 < 32^2$$

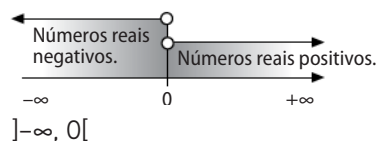
$$\Leftrightarrow \left(\frac{31}{10}\right)^2 < 10 < \left(\frac{32}{10}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3,1 < \sqrt{10} < 3,2$$

R.: $3,1 < l < 3,2$

10.

10.1.



11.

11.1.

$$1 - \frac{x}{2} \leq -\frac{2(x-1)}{3}$$

$$\Leftrightarrow 6 - 3x \leq -4(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 6 - 3x \leq -4x + 4$$

$$\Leftrightarrow -3x + 4x \leq 4 - 6$$

$$\Leftrightarrow x \leq -2$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, -2]$$

11.2. -1

12. $A_{\square} = b \times h$ e $A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2}$

$$A_{\square} = (x-1)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow A_{\square} = x^2 + 3x - x - 3$$

$$\Leftrightarrow A_{\square} = x^2 + 2x - 3$$

$$A_{\Delta} = \frac{2x(x+1)}{2} \Leftrightarrow A_{\Delta} = x^2 + x$$

$$x^2 + x \geq x^2 + 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow x - 2x \geq -3$$

$$\Leftrightarrow -x \geq -3$$

$$\Leftrightarrow x \leq 3$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 3]$$

Além disso, temos de garantir que todos os lados dos polígonos têm comprimentos positivos.

Assim: $x - 1 > 0$, ou seja, $x > 1$

$$x + 3 > 0, \text{ ou seja, } x > -3$$

$$x + 1 > 0, \text{ ou seja, } x > -1$$

$$2x > 0, \text{ ou seja, } x > 0$$

Deste modo, podemos concluir que $x \in]1, 3]$.

13. Seja x o número de jogos. Então:

$$15 + 2x < 6x$$

$$\Leftrightarrow -4x < -15$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{15}{4}$$

$$\text{C.S.} = \left] \frac{15}{4}, +\infty \right[$$

R.: O clube de futebol tem de realizar, no mínimo, quatro jogos em casa para que compense ao Filipe tornar-se sócio.

14. $2\left(\frac{x}{3} - 1\right) > \frac{3x-1}{2} \wedge 2x + 4 \geq -12$

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{6} - \frac{12}{6} > \frac{3x}{6} - \frac{3}{6} \wedge 2x \geq -16$$

$$\Leftrightarrow 4x - 9x > -3 + 12 \wedge x \geq -8$$

$$\Leftrightarrow -5x > 9 \wedge x \geq -8$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{9}{5} \wedge x \geq -8$$

Então, $A = \{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2\}$.

Unidade 6 – Trigonometria no triângulo retângulo

Aplicar – página 183

20 1.

1.1. $\widehat{ACB} = 180^\circ - 90^\circ - 29^\circ \Leftrightarrow \widehat{ACB} = 61^\circ$

Como $\widehat{ABC} = \widehat{GHI}$ e $\widehat{ACB} = \widehat{GIH}$, então, pelo critério AA de semelhança de triângulos, os triângulos $[ABC]$ e $[GHI]$ são semelhantes.

1.2. $\frac{\overline{HI}}{2} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow \overline{HI} = \frac{12}{3} \Leftrightarrow \overline{HI} = 4$

R.: O segmento de reta $[HI]$ tem 4 cm de comprimento.

20 2.

2.1. $\frac{8}{4} = 2, \frac{6}{3} = 2, \frac{4}{2} = 2$

Os três lados dos triângulos são proporcionais logo, pelo critério LLL de semelhança de triângulos, os triângulos são semelhantes.

2.2. Os ângulos correspondentes de dois triângulos semelhantes são geometricamente iguais. Assim, podemos garantir que os ângulos α e β têm a mesma amplitude.

$$\widehat{\beta} = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ \Leftrightarrow \widehat{\beta} = 75^\circ$$

20 3.

3.1. Dois ângulos verticalmente opostos têm a mesma amplitude, logo os ângulos NPM e QPR são geometricamente iguais.

Pelo critério AA de semelhança de triângulos, os triângulos $[MNP]$ e $[PRQ]$ são semelhantes.

3.2. $\frac{\overline{NP}}{5} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow \overline{NP} = \frac{30}{3} \Leftrightarrow \overline{NP} = 10$

Aplicando o teorema de Pitágoras:

$$\overline{MP}^2 = 10^2 - 6^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{MP}^2 = 100 - 36$$

$$\Leftrightarrow \overline{MP}^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow \overline{MP} = -8 \vee \overline{MP} = 8$$

Como $\overline{MP} > 0$, então $\overline{MP} = 8$.

Assim, $P = 6 + 8 + 10 \Leftrightarrow P = 24$

R.: O triângulo $[MNP]$ tem 24 cm de perímetro.

Aplicar – páginas 190 e 191

20 2.

2.1. $\text{sen } \alpha = \frac{20}{29}; \cos \alpha = \frac{21}{29}; \text{tg } \alpha = \frac{20}{21}$

2.2. $\text{sen } \beta = \frac{8}{10} \Leftrightarrow \text{sen } \beta = \frac{4}{5}$

$$\cos \beta = \frac{6}{10} \Leftrightarrow \cos \beta = \frac{3}{5}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{8}{6} \Leftrightarrow \text{tg } \beta = \frac{4}{3}$$

2.3. $\text{sen } \delta = \frac{9}{15} \Leftrightarrow \text{sen } \delta = \frac{3}{5}$

$$\cos \delta = \frac{12}{15} \Leftrightarrow \cos \delta = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg } \delta = \frac{9}{12} \Leftrightarrow \text{tg } \delta = \frac{3}{4}$$

2.4. $\text{sen } \gamma = \frac{12}{15} \Leftrightarrow \text{sen } \gamma = \frac{4}{5}$

$$\cos \gamma = \frac{9}{15} \Leftrightarrow \cos \gamma = \frac{3}{5}$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{12}{9} \Leftrightarrow \text{tg } \gamma = \frac{4}{3}$$

3.

3.1. Começamos por calcular a hipotenusa do triângulo:

$$h^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 9 + 16$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow h = -5 \vee h = 5$$

Como $h > 0$, então $h = 5$.

Assim, $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}$ e $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$.

- 3.2. Começemos por calcular o cateto desconhecido do triângulo:

$$c^2 = 10^2 - 8^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 100 - 64$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow c = -6 \vee c = 6$$

Como $c > 0$, então $c = 6$.

$$\text{Assim, } \sin \beta = \frac{8}{10} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{4}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{6}{10} \Leftrightarrow \cos \beta = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{8}{6} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$$

- 3.3. Começemos por calcular os catetos do triângulo (de igual comprimento):

$$c^2 + c^2 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow 2c^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow c = -\sqrt{2} \vee c = \sqrt{2}$$

Como $c > 0$, então $c = \sqrt{2}$.

$$\text{Assim, } \sin \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \gamma = 1$$

20 4.

- 4.1. Como $\widehat{NMP} = \widehat{PQR}$ e $\widehat{MPN} = \widehat{RPQ}$ (são ângulos verticalmente opostos), então, pelo critério AA de semelhança de triângulos, os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são semelhantes.

- 4.2. As razões trigonométricas não dependem do comprimento dos lados do triângulo mas apenas da amplitude dos seus ângulos. Como os triângulos são semelhantes:

a) $\sin \beta = \frac{5}{13}$, $\cos \beta = \frac{12}{13}$ e $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{12}$

b) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ e $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$

- 4.3. O triângulo $[JK]$ é semelhante ao triângulo $[ABC]$. Como as razões trigonométricas não dependem do comprimento dos lados do triângulo mas apenas da amplitude dos seus ângulos, então as razões trigonométricas do ângulo de menor amplitude do triângulo $[JK]$ são iguais às razões trigonométricas do ângulo de menor amplitude do triângulo $[ABC]$, ou seja, do ângulo δ (ângulo que se opõe ao lado de menor comprimento).

Seja λ o ângulo de menor amplitude do triângulo $[JK]$.

$$\text{Então, } \sin \lambda = \frac{5}{13}, \cos \lambda = \frac{12}{13} \text{ e } \operatorname{tg} \lambda = \frac{5}{12}.$$

5.

- 5.1. Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , temos:

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 180^\circ - 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

Logo, α e β são complementares.

5.2. $\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

$$\cos \beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Logo, $\sin \alpha = \cos \beta$ e, portanto, o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complementar, isto é, $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$.

20 6.

- 6.1. Os dois triângulos têm um ângulo em comum (o ângulo DAE) e, além disso, são retângulos. Pelo critério AA de semelhança de triângulos, os triângulos $[ABC]$ e $[AED]$ são semelhantes.

- 6.2. Começemos por calcular o cateto adjacente (lado $[CB]$ do triângulo):

$$c^2 = 10^2 - \sqrt{75}^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 100 - 75$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow c = -5 \vee c = 5$$

Como $c > 0$, então $c = 5$.

$$\text{Então, } \cos \alpha = \frac{5}{10} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

- 6.3. Processo 1:

$$\frac{5}{\overline{ED}} = \frac{10}{4} \Leftrightarrow \overline{ED} = \frac{4 \times 5}{10} \Leftrightarrow \overline{ED} = 2$$

Processo 2:

$$\frac{\sqrt{75}}{\overline{AD}} = \frac{10}{4} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{4\sqrt{75}}{10} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{2\sqrt{75}}{5}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras:

$$\overline{ED}^2 = 4^2 - \left(\frac{2\sqrt{75}}{5}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{ED}^2 = 16 - \frac{4 \times 75}{25}$$

$$\Leftrightarrow \overline{ED}^2 = 16 - 12$$

$$\Leftrightarrow \overline{ED}^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \overline{ED} = -2 \vee \overline{ED} = 2$$

Como $\overline{ED} > 0$, então $\overline{ED} = 2$.

R.: O segmento de reta $[ED]$ tem 2 unidades de comprimento.

- 6.4. Já calculamos (na alínea anterior) o comprimento dos segmentos de reta $[AD]$ e $[ED]$.

$$A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{\Delta} = \frac{\frac{2\sqrt{75}}{5} \times 2}{2} \Leftrightarrow A_{\Delta} = \frac{2\sqrt{75}}{5}$$

R.: O triângulo tem $\frac{2\sqrt{75}}{5}$ unidades de área.

- 20 7. Sabemos que $\sin \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$.

Portanto, o seno de um ângulo é positivo e nunca é superior a 1.

Logo, o seno de um ângulo x não pode ser 1,7 e, portanto, a afirmação é falsa.

Aplicar – páginas 194 e 195

3. $\sin 74^\circ \approx 0,96$
 $\cos 13^\circ \approx 0,97$
 $\tan 52^\circ \approx 1,28$

4.

4.1. $x = 45^\circ$

4.2. $x = 60^\circ$

4.3. $x = 30^\circ$

5. Sabe-se que $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

$$\text{Assim, } \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \tan \alpha = 1$$

6. Sabe-se que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ e que $\sin x = \frac{1}{3}$.
 Assim,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{9}{9} - \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{8}{9}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{8}}{3}$$

Como x é um ângulo agudo, então $\cos x = \frac{\sqrt{8}}{3}$.

20 7.

- 7.1. Pretende-se determinar a medida do cateto oposto ao ângulo de amplitude 22° , conhecida a medida do cateto adjacente.

$$\text{Sabe-se que } \tan \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}.$$

$$\text{Logo, } \tan 22^\circ = \frac{x}{7} \Leftrightarrow x \approx 2,83$$

- 7.2. Pretende-se determinar a medida da hipotenusa do triângulo, conhecida a medida do cateto oposto ao ângulo de amplitude 30° .

$$\text{Sabe-se que } \sin \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}.$$

$$\text{Logo, } \sin 30^\circ = \frac{11}{x} \Leftrightarrow x \approx 22$$

- 7.3. Pretende-se determinar a medida da hipotenusa do triângulo, conhecida a medida do cateto adjacente ao ângulo de amplitude 50° .

$$\text{Sabe-se que } \cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}.$$

$$\text{Logo, } \cos 50^\circ = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x \approx 6,22$$

20 8.

- 8.1. São conhecidas as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo x .

$$\text{Sabe-se que } \tan x = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}}.$$

$$\text{Logo, } \tan x = \frac{14}{5} \Leftrightarrow \hat{x} \approx 70,3^\circ$$

- 8.2. São conhecidas as medidas da hipotenusa do triângulo e do cateto adjacente ao ângulo x .

$$\text{Sabe-se que } \cos x = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}.$$

$$\text{Logo, } \cos x = \frac{13}{21} \Leftrightarrow \hat{x} \approx 51,8^\circ$$

- 8.3. São conhecidas as medidas da hipotenusa do triângulo e do cateto oposto ao ângulo x .

$$\text{Sabe-se que } \sin x = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}.$$

$$\text{Logo, } \sin x = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \hat{x} \approx 24,6^\circ$$

9. Seja h a altura da árvore.

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h \approx 3,5$$

R.: A árvore tem, aproximadamente, 3,5 metros.

10. Sabe-se que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ e que $\cos x = \frac{2}{5}$.

Assim,

$$\sin^2 x + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{25}{25} - \frac{4}{25}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{21}{25}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \pm \sqrt{\frac{21}{25}}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Como x é um ângulo agudo, então $\sin x = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Como $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, tem-se:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

Assim,

$$\sin x + 2 \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{21}}{5} + 2 \left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right) = \frac{\sqrt{21}}{5} + \frac{5\sqrt{21}}{5} = \frac{6\sqrt{21}}{5}$$

11.

$$11.1. 7 \times (\sin^2 x + \cos^2 x)^{12 \cdot 345} = 7 \times 1^{12 \cdot 345} = 7 \times 1 = 7$$

$$11.2. (\operatorname{tg} x \times \cos x)^2 + \cos^2 x = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \times \cos x\right)^2 + \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

20 12.

- 12.1. a) Pretende-se determinar a medida do cateto oposto ao ângulo α , $\overline{BC}$, conhecida a medida do cateto adjacente, $\overline{AB}$.

Sabe-se que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}$.

$$\text{Logo, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{4} \Leftrightarrow \overline{BC} = 4 \operatorname{tg} \alpha$$

$$b) A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{\Delta} = \frac{4 \times 4 \operatorname{tg} \alpha}{2} \Leftrightarrow A_{\Delta} = 8 \operatorname{tg} \alpha$$

- c) Como $P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$, resta determinar a medida do segmento de reta $[AC]$. Pretende-se determinar a medida da hipotenusa, conhecida, por exemplo, a medida do cateto adjacente.

$$\cos \alpha = \frac{4}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{4}{\cos \alpha}$$

$$\text{Assim, } P = 4 + 4 \operatorname{tg} \alpha + \frac{4}{\cos \alpha}.$$

- 12.2. Sabe-se que $A = 8 \operatorname{tg} \alpha$ e que $\alpha = 45^\circ$.

Assim, $A = 8 \times 1 \Leftrightarrow A = 8$.

Por outro lado, $P = 4 + 4 \operatorname{tg} \alpha + \frac{4}{\cos \alpha}$ e $\alpha = 45^\circ$.
Logo, $P \approx 13,66$.

13. $(\sin x + \cos x)^2 =$
 $= \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x =$
 $= \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + 2 \sin x \cos x =$
 $= 1 + 2 \sin x \cos x$, como queríamos demonstrar.

12. Num triângulo retângulo, a soma das amplitudes dos ângulos internos agudos é 90° . Então, neste triângulo, um dos ângulos agudos é α e o outro tem amplitude $(90^\circ - \alpha)$.

Então:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{b}{c} \\ \cos (90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c} \end{array} \right\} \sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$$

20 Aplicar – páginas 198 e 199

2.

$$2.1. \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2.2. \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$2.3. \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{6}{6} = 1$$

$$\sin 45^\circ = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3.

- 3.1. Como $[ABC]$ é um triângulo equilátero, a altura $[MC]$ divide a base $[AB]$ em duas partes iguais. Logo,

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{1}{2}.$$

3.2. Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2$.

$$\text{Assim, } 1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \overline{MC}^2$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{4} + \overline{MC}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{MC}^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MC}^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MC} = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\text{Como } \overline{MC} > 0, \overline{MC} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3.3. Sabe-se que $\overline{AC} = 1$, $\overline{AM} = \frac{1}{2}$ e $\overline{MC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Logo, } \text{tg } 30^\circ = \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{\overline{MC}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4.

$$4.1. \text{sen } 30^\circ - \text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$4.2. \text{tg } 45^\circ \times \text{cos } 45^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$4.3. (\text{cos } 45^\circ + \text{sen } 45^\circ)^2 = 1$$

$$4.4. \frac{1}{\text{cos } 30^\circ} \times \text{tg } 60^\circ - 2 \text{sen } 45^\circ =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \sqrt{3} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} - \sqrt{2} =$$

$$= 2 - \sqrt{2}$$

20 5.

5.1. Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , temos:

$$\hat{ABC} = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

Logo, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B .

$$5.2. P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$$

Sabemos que $\overline{AB} = 12$.

Vamos determinar $\overline{BC}$:

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{12}{\overline{BC}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{12}{\text{tg } 60^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{12\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 4\sqrt{3}$$

Vamos determinar $\overline{CA}$:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{12}{\overline{AC}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{12}{\text{sen } 60^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{24}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{24\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 8\sqrt{3}$$

$$\text{Assim, } P = 12 + 4\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 12 + 12\sqrt{3} \approx 32,78.$$

$$\text{R.: } P \approx 32,78 \text{ cm}$$

6. Como $[XYZ]$ é um triângulo equilátero, $\hat{XZY} = 60^\circ$ e $\hat{AZY} = 30^\circ$.

Assim, $\text{sen } 30^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{AZ}}$, ou seja,

$$\overline{AZ} = \frac{4}{\text{sen } 30^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AZ} = \frac{4}{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AZ} = 8$$

Consideremos agora o triângulo $[ZAY]$.

$[ZAY]$ é um triângulo retângulo em A , pois $[ZA]$ é a altura do triângulo relativa ao lado $[XY]$.

Logo, $\text{tg } 30^\circ = \frac{\overline{YA}}{\overline{AZ}}$, ou seja,

$$\overline{YA} = \text{tg } 30^\circ \times \overline{AZ}$$

$$\Leftrightarrow \overline{YA} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 8$$

$$\Leftrightarrow \overline{YA} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Assim, } \overline{XY} = 2 \times \overline{YA} = 2 \times \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Logo, } A_{[XYZ]} = \frac{\frac{16\sqrt{3}}{3} \times 8}{2} = \frac{64\sqrt{3}}{3}.$$

20 7.

7.1. Sabe-se que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B .

$$\text{Logo, } \sin(\hat{BAC}) = \frac{5}{10}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\hat{BAC}) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \hat{BAC} = 30^\circ$$

Assim, como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , $\hat{ACD} = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$.

Logo, o triângulo $[ADC]$ não é retângulo.

7.2. $A_{[ADC]} = \frac{\overline{AD} \times \overline{BC}}{2}$

Sabe-se que $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$.

Vamos determinar $\overline{AB}$:

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{AB}}{10}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 10 \times \cos 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{10\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 5\sqrt{3}$$

Como o triângulo $[BDC]$ é isósceles, $\overline{BD} = 5$.

Assim, $\overline{AD} = 5\sqrt{3} + 5$.

$$\text{Logo, } A_{[ADC]} = \frac{(5\sqrt{3} + 5) \times 5}{2} =$$

$$= \frac{25\sqrt{3} + 25}{2}$$

20 8.

$$V_{\text{cilindro}} = Ab \times h$$

Sabe-se que $Ab = 36\pi$.

Sendo r o raio da base, $\pi \times r^2 = 36\pi$

$$\Leftrightarrow r^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow r = \pm\sqrt{36}$$

$$\Leftrightarrow r = \pm 6$$

Como $r > 0$, $r = 6$.

Assim, $d = \overline{AB} = 2 \times 6 = 12$.

$$\text{Logo, } \text{tg } 30^\circ = \frac{12}{\overline{AC}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{12}{\text{tg } 30^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{36}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{36\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 12\sqrt{3}$$

$$\text{Então, } V_{\text{cilindro}} = 36\pi \times 12\sqrt{3} = 432\sqrt{3}\pi$$

Aplicar – páginas 202 e 203

2.

2.1. Seja h a distância do solo ao topo da escada. Utilizando as razões trigonométricas, temos:

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{3} \Leftrightarrow h \approx 2,6$$

R.: O topo da escada encontra-se a, aproximadamente, 2,6 metros do solo.

2.2. Seja b a distância da parede à base da escada. Utilizando as razões trigonométricas, temos:

$$\cos 60^\circ = \frac{b}{3} \Leftrightarrow b \approx 1,5$$

R.: A base da escada encontra-se a 1,5 metros da parede.

3. $\text{tg } 80^\circ = \frac{a}{15} \Leftrightarrow a \approx 85,069$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{b}{15} \Leftrightarrow b \approx 8,66$$

$$\text{Altura} = 85,069 + 8,66 \approx 93,73$$

R.: A torre da catedral tem, aproximadamente, 94 metros de altura.

4. O prédio tem 10 metros de altura ($2 \times 5 = 10$).

Seja d a distância a que a Ana se encontra do prédio. Utilizando as razões trigonométricas, temos:

$$\text{tg } 36^\circ = \frac{10}{d} \Leftrightarrow d \approx 13,764$$

R.: A Ana encontra-se a, aproximadamente, 14 metros do prédio.

20 5.

5.1. Um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto, logo o triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo. Vamos calcular o comprimento do segmento de reta $[AB]$, utilizando as razões trigonométricas:

$$\cos 40^\circ = \frac{5}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} \approx 6,527$$

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow r \approx 3,26$$

R.: O raio da circunferência tem, aproximadamente, 3,26 cm.

$$5.2. A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{\Delta} = \frac{\overline{CB} \times \overline{AC}}{2}$$

Vamos calcular o comprimento do segmento de reta [CB], utilizando as razões trigonométricas:

$$\operatorname{tg} 40^{\circ} = \frac{\overline{CB}}{5} \Leftrightarrow \overline{CB} \approx 4,196$$

Assim,

$$A_{\Delta} = \frac{\overline{CB} \times \overline{AC}}{2}$$

$$A_{\Delta} = \frac{4,196 \times 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow A_{\Delta} = 10,49$$

R.: O triângulo [ABC] tem, aproximadamente, 10,49 cm² de área.

- 20 6.** Seja O o ponto do solo perpendicular ao helicóptero de modo que os triângulos [AHO] e [BHO] sejam retângulos, conforme sugere a figura.

Então:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{\overline{HO}}{\overline{BO}} \\ \operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{\overline{HO}}{15 + \overline{BO}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{HO} = \overline{BO} \times 1 \\ \overline{HO} = 15 \operatorname{tg} 30^{\circ} + \overline{BO} \operatorname{tg} 30^{\circ} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{HO} = \overline{BO} \\ \overline{BO}(1 - \operatorname{tg} 30^{\circ}) = 15 \operatorname{tg} 30^{\circ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{HO} = \overline{BO} \\ \overline{BO} = \frac{15 \operatorname{tg} 30^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 30^{\circ}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{HO} \approx 20,49 \\ \overline{BO} \approx 20,49 \end{cases}$$

R.: O helicóptero encontra-se a, aproximadamente, 20,5 metros de altura.

20 7.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 60^{\circ} = \frac{d}{2-x} \\ \operatorname{tg} 75^{\circ} = \frac{d}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \operatorname{tg} 60^{\circ} - x \operatorname{tg} 60^{\circ} \\ d = x \operatorname{tg} 75^{\circ} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \operatorname{tg} 75^{\circ} = 2 \operatorname{tg} 60^{\circ} - x \operatorname{tg} 60^{\circ} \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(\operatorname{tg} 75^{\circ} + \operatorname{tg} 60^{\circ}) = 2 \operatorname{tg} 60^{\circ} \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \operatorname{tg} 60^{\circ}}{\operatorname{tg} 75^{\circ} + \operatorname{tg} 60^{\circ}} \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 0,634 \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 0,634 \\ d \approx 2,37 \end{cases}$$

R.: O projetor encontra-se a, aproximadamente, 2,4 metros da tela de projeção.

Praticar – páginas 204 a 209

1.

1.1. $\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}$, $\cos \theta = \frac{4}{5}$ e $\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{4}$

1.2. $\operatorname{sen} \theta = \frac{48}{50} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{24}{25}$

$$\cos \theta = \frac{14}{50} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{7}{25}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{48}{14} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{24}{7}$$

1.3. $\operatorname{sen} \theta = \frac{15}{17}$, $\cos \theta = \frac{8}{17}$ e $\operatorname{tg} \theta = \frac{15}{8}$

2.

2.1. $\operatorname{sen} 35^{\circ} \approx 0,5736$

2.2. $\cos 48^{\circ} \approx 0,6691$

2.3. $\operatorname{tg} 45^{\circ} = 1$

2.4. $\cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$

3.

3.1. $\hat{\beta} = 30^{\circ}$

3.2. $\hat{\beta} \approx 45^{\circ}$

3.3. $\hat{\beta} = 60^{\circ}$

3.4. $\hat{\beta} \approx 84^{\circ}$

4.

4.1. $\cos \alpha = \frac{3}{6} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 60,0^{\circ}$

4.2. $\operatorname{sen} \alpha = \frac{14}{24} \Leftrightarrow \hat{\alpha} \approx 35,7^{\circ}$

4.3. $\cos \alpha = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \hat{\alpha} \approx 29,0^{\circ}$

4.4. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{14} \Leftrightarrow \hat{\alpha} \approx 32,7^{\circ}$

5. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,8}{2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} \approx 42^{\circ}$

- 20 6.** Vamos calcular a hipotenusa (h) do triângulo representado:

$$h^2 = 15^2 + 8^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 225 + 64$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 289$$

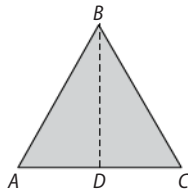
$$\Leftrightarrow c = -17 \vee c = 17$$

Como $c > 0$, então $c = 17$.

Assim, $\sin \theta = \frac{15}{17}$ e $\operatorname{tg} \theta = \frac{15}{8}$.

$$\begin{aligned} 2\sin \theta - \operatorname{tg} \theta &= 2 \times \frac{15}{17} - \frac{15}{8} \\ \Leftrightarrow 2\sin \theta - \operatorname{tg} \theta &= \frac{240}{136} - \frac{255}{136} \\ \Leftrightarrow 2\sin \theta - \operatorname{tg} \theta &= -\frac{15}{136} \end{aligned}$$

20 7.



7.1. Na figura está representado o triângulo equilátero $[ABC]$ e a altura $[BD]$ relativa ao vértice B .

Como o triângulo é equilátero, os ângulos internos são iguais pelo que $\widehat{BAC} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$, tendo-se assim $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Por outro lado, $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{4}$.

Finalmente, $\frac{\overline{BD}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = 2\sqrt{3}$$

R.: $\overline{BD} = 2\sqrt{3}$ cm

7.2. $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2}$

Utilizando a alínea anterior, $A_{[ABC]} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

Logo, $A_{[ABC]} = 4\sqrt{3}$ cm²

Adaptado de *Caderno de Apoio às Metas Curriculares*, 3º ciclo

8. $\operatorname{tg} 34^\circ = \frac{a}{4} \Leftrightarrow a \approx 2,698$

$$1,75 + 2,698 = 4,448$$

R.: O poste tem, aproximadamente, 4,45 metros de altura.

20 9.

9.1. $\sin 30^\circ = \frac{2}{d} \Leftrightarrow d = 4$

Utilizando o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} h^2 &= 4^2 - 2^2 \\ \Leftrightarrow h^2 &= 16 - 4 \\ \Leftrightarrow h^2 &= 12 \\ \Leftrightarrow h &= -\sqrt{12} \vee h = \sqrt{12} \end{aligned}$$

Como $h > 0$, então $h = \sqrt{12}$.

Assim, $d = 4$ m e $h \approx 3$ m.

9.2. O “triângulo de trabalho” tem 10 m de base e 3 m de altura (considerando $h = 3$).

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

$$A = \frac{10 \times 3}{2} \Leftrightarrow A = 15$$

R.: $A = 15$ m²

10. Sabemos que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{25}{25} - \frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

Como α é um ângulo agudo, então $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

11. Começamos por calcular a hipotenusa (h) do triângulo retângulo do qual conhecemos a amplitude de um dos ângulos internos (64°) e o comprimento de um dos catetos (100 dm):

$$\sin 64^\circ = \frac{100}{h} \Leftrightarrow h = \frac{100}{\sin 64^\circ}$$

Agora, calculemos x :

$$\sin 70^\circ = \frac{\frac{100}{\sin 64^\circ}}{x} \Leftrightarrow x = \frac{100}{\sin 64^\circ \sin 70^\circ}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{100}{\sin 64^\circ \sin 70^\circ} \Leftrightarrow x \approx 118,4 \text{ dm}$$

12. Seja h a altura do poste. Utilizando as razões trigonométricas, tem-se:

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{16} \Leftrightarrow h = 16 \times \sin 60^\circ \Leftrightarrow h \approx 13,856$$

R.: O poste tem, aproximadamente, 13,9 metros de altura.

13. Começamos por calcular a altura do triângulo referente ao lado $[OC]$:

$$\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{\overline{PS}}{80} \Leftrightarrow \overline{PS} = 80 \times \operatorname{tg} 70^\circ$$

Agora, podemos calcular o comprimento do segmento de reta $[OP]$:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 40^\circ &= \frac{80 \times \operatorname{tg} 70^\circ}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{OP} = \frac{80 \times \operatorname{tg} 70^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ} \\ \Leftrightarrow \overline{OP} &\approx 341,945\end{aligned}$$

R.: O segmento de reta $[OP]$ tem, aproximadamente, 341,9 unidades de comprimento.

14.

- 14.1. Seja d o comprimento da diagonal de uma das faces do cubo:

$$\begin{aligned}d^2 &= 10^2 + 10^2 \\ \Leftrightarrow d^2 &= 100 + 100 \\ \Leftrightarrow d^2 &= 200 \\ \Leftrightarrow d &= -\sqrt{200} \vee d = \sqrt{200} \\ \text{Como } d > 0, \text{ então } d &= \sqrt{200}.\end{aligned}$$

R.: A diagonal de uma das faces do cubo mede $\sqrt{200}$ cm.

14.2. $\overline{AB}^2 = 10^2 + \sqrt{200}^2$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \overline{AB}^2 &= 100 + 200 \\ \Leftrightarrow \overline{AB}^2 &= 300 \\ \Leftrightarrow \overline{AB} &= -\sqrt{300} \vee \overline{AB} = \sqrt{300} \\ \text{Como } AB > 0, \text{ então } \overline{AB} &= \sqrt{300}.\end{aligned}$$

Assim, $\overline{AB} = \sqrt{300}$.

- 14.3. Utilizando as razões trigonométricas, tem-se:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{300}}, \text{ logo } \hat{\theta} \approx 35,3^\circ.$$

20 15.

- 15.1. Vamos começar por calcular o comprimento do segmento de reta $[DA]$.

$$\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{\overline{DA}}{5} \Leftrightarrow \overline{DA} = 5 \times \operatorname{tg} 70^\circ$$

Então:

$$\operatorname{sen}(\widehat{DCA}) = \frac{5 \operatorname{tg} 70^\circ}{20}, \text{ logo } \widehat{DCA} \approx 43,38^\circ$$

- 15.2. Agora que conhecemos a amplitude do ângulo DCA , vamos determinar o comprimento do segmento de reta $[AC]$:

$$\cos 43,38^\circ = \frac{\overline{AC}}{20} \Leftrightarrow \overline{AC} \approx 14,5$$

$$\text{Então, } \overline{BC} \approx 14,5 - 5 \Leftrightarrow \overline{BC} \approx 9,5.$$

R.: O segmento de reta $[BC]$ tem, aproximadamente, 9,5 cm.

20 16.

Como as retas r e AB são paralelas, então:

$$\widehat{DCB} = 90^\circ - 56^\circ \Leftrightarrow \widehat{DCB} = 34^\circ$$

$$\text{Assim, } \widehat{ACD} = 56^\circ - 31^\circ \Leftrightarrow \widehat{ACD} = 25^\circ, \text{ logo:}$$

$$\widehat{ACB} = 25^\circ + 34^\circ \Leftrightarrow \widehat{ACB} = 59^\circ$$

Utilizando as razões trigonométricas, tem-se:

$$\operatorname{tg} 34^\circ = \frac{\overline{DB}}{40} \Leftrightarrow \overline{DB} = 40 \times \operatorname{tg} 34^\circ \Leftrightarrow \overline{DB} \approx 26,98$$

$$\operatorname{tg} 59^\circ = \frac{\overline{AB}}{40} \Leftrightarrow \overline{AB} = 40 \times \operatorname{tg} 59^\circ \Leftrightarrow \overline{AB} \approx 66,57$$

Agora, podemos calcular o comprimento do segmento de reta $[AD]$:

$$\overline{AD} \approx 66,57 - 26,98 \Leftrightarrow \overline{AD} \approx 39,59 \text{ cm}$$

17.

- 17.1. Como $\cos \alpha = \frac{d}{f}$ e $\operatorname{sen} \beta = \frac{f}{d}$, então $\cos \alpha = \operatorname{sen} \beta$.

- 17.2. Como $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ$, pode concluir-se que:
 $\cos(90^\circ - \hat{\beta}) = \operatorname{sen} \hat{\beta}$

17.3. a) $\hat{\alpha} = 90^\circ - 75^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 15^\circ$

b) $\hat{\alpha} = 90^\circ - 81^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 9^\circ$

c) $\hat{\alpha} = 45^\circ$

d) $\hat{\alpha} = 41^\circ$

- 17.4. Como $90^\circ - 69^\circ = 21^\circ$, então $\cos 21^\circ = 0,9336$.

18. Seja H o ponto do segmento de reta $[AB]$ tal que $[HP]$ corresponde à altura do triângulo referente ao lado $[AB]$.

Um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto, portanto o ângulo APB tem 90° de amplitude e, consequentemente, o ângulo ABP tem 50° de amplitude (a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°).

Assim:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{\overline{OP}}{\overline{AO}} \\ \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{\overline{OP}}{12 - \overline{AO}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{OP} = \overline{AO} \times \operatorname{tg} 40^\circ \\ \overline{OP} = -\overline{AO} \times \operatorname{tg} 50^\circ + 12 \operatorname{tg} 50^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AO} \times \operatorname{tg} 40^\circ = -\overline{AO} \times \operatorname{tg} 50^\circ + 12 \operatorname{tg} 50^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AO} (\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ) = 12 \operatorname{tg} 50^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AO} = \frac{12 \operatorname{tg} 50^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AO} \approx 7,042 \end{cases} \end{cases}$$

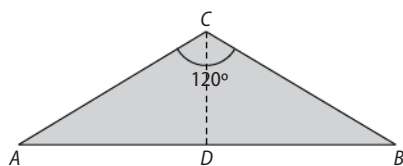
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{OP} \approx 5,909 \\ \overline{AO} \approx 7,042 \end{cases}$$

Agora, podemos calcular a área do triângulo:

$$A \approx \frac{12 \times 5,909}{2} \Leftrightarrow A \approx 35,454$$

R.: O triângulo $[APB]$ tem, aproximadamente, $35,5 \text{ cm}^2$ de área.

- 20 19.** Como o ângulo ACB é obtuso, os outros dois ângulos internos do triângulo são agudos e geometricamente iguais pois, num triângulo, a lados de igual comprimento ($[AC]$ e $[BC]$) opõem-se ângulos de igual amplitude.



$$\text{Assim, } \widehat{CAB} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Como $\overline{AC} = \overline{BC}$ e sendo $[CD]$ a altura do triângulo relativa ao vértice C , $\overline{AD} = \overline{DB}$. Logo, $\overline{AD} = 1,5 \text{ cm}$.

Como $\text{tg}(\widehat{CAB}) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CD}}{1,5}$ e $\text{tg}(\widehat{CAB}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, então

$$\frac{\overline{CD}}{1,5} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CD} = 1,5 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Assim, } A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{R.: } A_{[ABC]} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

Adaptado de *Caderno de Apoio às Metas Curriculares*, 3º ciclo

- 20.** O círculo representado tem 1 unidade de raio.

$$\text{sen } 52^\circ = \frac{a}{1} \Leftrightarrow a = \text{sen } 52^\circ \approx \frac{100}{\text{sen } 64^\circ}$$

$$\text{tg } 52^\circ = \frac{b}{1} \Leftrightarrow b = \text{tg } 52^\circ$$

$$\cos 52^\circ = \frac{1}{c} \Leftrightarrow c = \frac{1}{\cos 52^\circ}$$

$$\cos 52^\circ = \frac{d}{1} \Leftrightarrow d = \cos 52^\circ$$

- 21.** Seja d a distância que o Custódio tem de percorrer. Aplicando as razões trigonométricas, tem-se:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{60}{d} \Leftrightarrow d \approx 84,85$$

R.: Para atravessar o rio, o Custódio terá de percorrer, aproximadamente, 85 m.

- 22.** Seja h a altura a que o compartimento de carga se encontra do solo. Então:

$$\text{sen } 25^\circ = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h \approx 0,845$$

R.: O compartimento de carga da carrinha encontra-se a, aproximadamente, 0,8 m do solo.

- 23.** Se esse ângulo β existir, terá de verificar a fórmula fundamental da trigonometria, ou seja,

$$\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1.$$

$$\text{Assim, } \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{16} = 1 \quad \text{Falso}$$

Logo, podemos concluir que não existe nenhum ângulo β que satisfaça as condições do enunciado.

- 24.** Seja α o ângulo que a escada faz com o solo. Então,

$$\cos \alpha = \frac{10}{35}, \text{ logo } \hat{\alpha} \approx 73,4^\circ.$$

R.: A escada faz um ângulo de, aproximadamente, $73,4^\circ$ de amplitude com o solo.

- 25.** O valor do seno de um ângulo agudo varia sempre entre 0 e 1.

Como $\frac{7}{6} = 1$, então a Joana tem razão.

- 20 26.** De acordo com a fórmula fundamental da trigonometria, $\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$. Então,

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}$$

Como o cosseno de um ângulo agudo é positivo, então $\cos \alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}$

A opção correta é a **[B]**.

- 21.** Seja d a distância que o Custódio tem de percorrer. Aplicando as razões trigonométricas, tem-se:
- 20 27.** Sabemos que $\text{sen } 35^\circ = \cos (90^\circ - 35^\circ)$, ou seja: $\text{sen } 35^\circ = \cos 55^\circ$

Assim, $\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ = \cos^2 55^\circ + \sin^2 55^\circ$.

Pela fórmula fundamental da trigonometria, podemos concluir que:

$$\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ = \cos^2 55^\circ + \sin^2 55^\circ = 1$$

28.

28.1. Se unirmos todos os pontos médios dos lados do heptágono, obtemos um outro heptágono, também regular, inscrito na circunferência de raio 4 cm. Os vértices de um polígono regular inscrito numa circunferência dividem a circunferência em arcos de igual amplitude. Neste caso, cada um tem $\left(\frac{360}{7}\right)^\circ$ de amplitude.

O arco maior IK tem, então, $\left(5 \times \frac{360}{7}\right)^\circ$ de amplitude.

Como comprimento do arco = $\frac{x \pi r}{180}$, temos:

$$\text{Comprimento do arco} = \frac{5 \times 360 \times 4}{7 \times 180} \pi$$

$$\Leftrightarrow \text{Comprimento do arco} = \frac{5 \times 360 \times 4}{7 \times 180} \pi$$

$$\Leftrightarrow \text{Comprimento do arco} = \frac{7200}{1260} \pi$$

$$\Leftrightarrow \text{Comprimento do arco} = \frac{40}{7} \pi$$

28.2. O apótema do heptágono tem 4 cm de comprimento.

Como I é o ponto médio do segmento de reta $[AG]$,

$$I\hat{H}G = \frac{A\hat{H}G}{2}.$$

Sabemos que $A\hat{H}G = \frac{360^\circ}{7}$, logo

$$I\hat{H}G = \frac{\frac{360}{7}}{2} \Leftrightarrow I\hat{H}G = \frac{180}{7} \Leftrightarrow I\hat{H}G \approx 25,714^\circ$$

Utilizando as razões trigonométricas no triângulo retângulo $[IHG]$, podemos determinar $\overline{IG}$ e, assim, determinar o perímetro do heptágono.

$$\text{tg } 25,714^\circ = \frac{\overline{IG}}{4} \Leftrightarrow \overline{IG} = 4 \times \text{tg } 25,714^\circ$$

Então,

$$P = 14 \times \overline{IG}, \text{ ou seja,}$$

$$P = 14 \times 4 \times \text{tg } 25,714^\circ$$

$$\Leftrightarrow P = 56 \times \text{tg } 25,714^\circ$$

Assim,

$$A = \frac{P}{2} \times ap$$

$$A = \frac{56 \times \text{tg } 25,714^\circ}{2} \times 4$$

$$\Leftrightarrow A \approx 53,9$$

R.: O heptágono tem, aproximadamente, 53,9 cm² de área.

29.

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{b}{c} \\ \sin \beta = \frac{b}{c} \end{array} \right\} \cos \alpha = \sin \beta$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{a}{c} \\ \cos \beta = \frac{a}{c} \end{array} \right\} \sin \alpha = \cos \beta$$

Então,

$$\cos \alpha \times \sin \beta + \sin \alpha \times \cos \beta = \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1.$$

↑

Fórmula fundamental da trigonometria

30.

Seja l a largura do retângulo e $2l$ o seu comprimento. Designando por α o ângulo desconhecido indicado. Utilizando as razões trigonométricas, tem-se:

$$\text{tg } \alpha = \frac{2l}{l} \Leftrightarrow \text{tg } \alpha = 2, \text{ logo } \alpha \approx 63,4^\circ$$

31.

31.1. Sabemos que $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$.

$$\text{Então, } 1 - \sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha = 3\cos^2 \alpha.$$

$$31.2. (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)^7 = 1^7 = 1$$

32.

$$32.1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

32.2. Pela alínea anterior, sabemos que $1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

Através desta fórmula, vamos calcular $\text{tg } \alpha$ conhecendo o valor do $\cos \alpha$:

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\frac{2}{4}} - 1 \Leftrightarrow \text{tg}^2 \alpha = \frac{4}{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{4}{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cancel{\operatorname{tg} \alpha = -1} \vee \operatorname{tg} \alpha = 1$$

Então,

$$(\operatorname{tg} \alpha + 2)^2 = (1 + 2)^2 = 3^2 = 9$$

32.3. Utilizemos a fórmula da alínea **32.1.** que relaciona o cosseno com a tangente de um ângulo:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + 1^2 = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 1 = \frac{1}{\frac{2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow 2 = 2$$

Sim, existe um ângulo que verifica as condições do enunciado.

20 33. Seja h a altura da árvore. Designemos por x a distância entre o ponto A e a base da árvore. Utilizando as razões trigonométricas, temos:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 44^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 25^\circ = \frac{h}{18+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = x \operatorname{tg} 44^\circ \\ h = x \operatorname{tg} 25^\circ + 18 \operatorname{tg} 25^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \operatorname{tg} 44^\circ = x \operatorname{tg} 25^\circ + 18 \operatorname{tg} 25^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x (\operatorname{tg} 44^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ) = 18 \operatorname{tg} 25^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{18 \operatorname{tg} 25^\circ}{\operatorname{tg} 44^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 16,808 \\ h \approx 16,231 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h \approx 16,231 \\ h \approx 16,808 \end{cases}$$

R.: A árvore tem, aproximadamente, 16,2 m de altura.

20 34. Consideremos que as coordenadas do ponto A são $(1, h)$.
O triângulo representado tem 1 unidade de base.

Vamos calcular a sua altura.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{1} \Leftrightarrow h = \operatorname{tg} \alpha$$

Então,

$$A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{\Delta} = \frac{1 \times \operatorname{tg} \alpha}{2} \Leftrightarrow A_{\Delta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$$

$$A_{\circ} = \pi r^2$$

$$A_{\circ} = \pi \times 1^2 \Leftrightarrow A_{\circ} = \pi$$

$$\text{Assim, } A = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

A expressão que representa a área da região sombreada é $\frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$, ou seja, a opção correta é a **[A]**.

20 35.

35.1. Um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto, portanto o ângulo ADB tem 90° de amplitude.

35.2. Relativamente ao ângulo agudo DBA do triângulo retângulo $[ADB]$ conhecemos o comprimento do cateto adjacente e da hipotenusa. Usando as razões trigonométricas, tem-se:

$$\cos (DBA) = \frac{56}{65}, \text{ logo } DBA \approx 30,5^\circ.$$

35.3. Seja P o ponto de interseção do diâmetro $[AB]$ com a circunferência de centro D .

O triângulo $[DPB]$ é retângulo em P .

Usando as razões trigonométricas, vamos determinar o comprimento do segmento de reta $[DP]$ (que tem o mesmo comprimento que o segmento de reta $[DG]$, pois ambos são raios da circunferência de centro D).

$$\sin 30,5^\circ = \frac{\overline{DP}}{56} \Leftrightarrow \overline{DP} \approx 28,4$$

R.: O segmento de reta $[DG]$ tem, aproximadamente, 28,4 cm.

35.4. A área da zona sombreada corresponde à diferença entre a área do triângulo $[ADB]$ (com 65 cm de base e aproximadamente 28,4 cm de altura) e a área do quarto de círculo cujo raio mede, aproximadamente, 28,4 cm.

$$A = \frac{65 \times 28,4}{2} - \frac{1}{4} (\pi \times 28,4^2)$$

$$\Leftrightarrow A = 923 - 201,64\pi$$

$$\Leftrightarrow A \approx 289,529$$

R.: A zona sombreada tem, aproximadamente, 289,5 cm² de área.

Praticar para a prova final – páginas 210 a 213

1. Utilizando as razões trigonométricas, tem-se:

$$\operatorname{sen} 40^\circ = \frac{a}{2,8} \Leftrightarrow a \approx 1,8$$

R.: A outra cadeira pode estar a uma altura máxima de, aproximadamente, 1,8 m.

2. Utilizando as razões trigonométricas:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{15}{30} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 30^\circ$$

R.: O ângulo de visão do João é superior a 26° , portanto o João tem uma visão clara do filme.

3. [A] $\operatorname{sen} x = \frac{b}{a}$

20 4.

- 4.1. [A] As retas DP e BC são concorrentes.

- 4.2. O triângulo $[DPH]$ é retângulo em D e tem 5 cm de base. Precisamos de descobrir a sua altura, ou seja, o comprimento do segmento de reta $[DH]$. Para isso, utilizamos as razões trigonométricas:

$$\operatorname{tg} 32^\circ = \frac{\overline{DH}}{5} \Leftrightarrow \overline{DH} = 5 \operatorname{tg} 32^\circ$$

$$\text{Então, } A = \frac{5 \times 5 \operatorname{tg} 32^\circ}{2} \Leftrightarrow A \approx 7,811.$$

R.: O triângulo $[DPH]$ tem, aproximadamente, $7,8 \text{ cm}^2$ de área.

- 4.3. A área da base da pirâmide é metade da área da face do paralelepípedo onde ela está inserida. A altura da pirâmide é igual à altura do paralelepípedo. Então:

$$\left. \begin{array}{l} V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} A_b \times h \\ V_{\text{Pirâmide}} = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_b \times h = 3 \times 10 \\ \Leftrightarrow A_b \times h = 30 \end{array}$$

$$V_{\text{Paralelepípedo}} = 2 A_b \times h$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{Paralelepípedo}} = 2 \times 30$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{Paralelepípedo}} = 60$$

R.: O paralelepípedo tem 60 cm^3 de volume.

5. Utilizando as razões trigonométricas, tem-se:

$$\operatorname{sen} 3^\circ = \frac{20}{c} \Leftrightarrow c \approx 382,1461$$

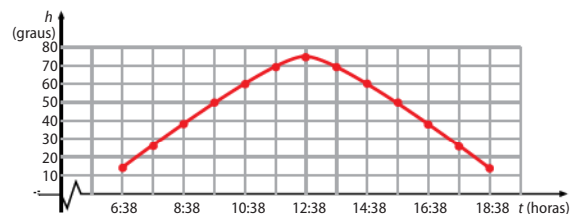
$$382,1461 \text{ cm} \approx 3,8 \text{ m}$$

R.: A rampa tem, aproximadamente, 3,8 m.

6.

- 6.1. Durante 4 horas.

- 6.2. Às 15 h 38 m, os raios solares formavam com o plano do horizonte, um ângulo com 50° de amplitude.



$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{30}{c} \Leftrightarrow c \approx 25,173$$

R.: A sombra projetada no chão, pelo monumento, tem, aproximadamente, 25 m de comprimento.

- 20 7. Vamos utilizar as razões trigonométricas para determinar a altura da antena.

Começamos por determinar x , a distância entre a vara e o ponto onde os raios solares atingem o solo:

$$\operatorname{tg} 43^\circ = \frac{1,8}{x} \Leftrightarrow x = 1,8 \operatorname{tg} 43^\circ$$

Agora, calculemos h :

$$\operatorname{tg} 43^\circ = \frac{h}{14 + 1,8 \operatorname{tg} 43^\circ}$$

$$\Leftrightarrow h = 14 \operatorname{tg} 43^\circ + 1,8 \operatorname{tg}^2 43^\circ$$

$$\Leftrightarrow h \approx 14,620$$

R.: A antena tem, aproximadamente, 15 m de altura.

20 8.

- 8.1. [C] A reta FB é paralela ao plano que contém a face $[ADGE]$.

- 8.2. O triângulo $[ABE]$ é retângulo em A . Utilizando as razões trigonométricas, tem-se:

$$\operatorname{sen} 35^\circ = \frac{2}{\overline{EB}} \Leftrightarrow \overline{EB} \approx 3,487$$

R.: O segmento de reta $[EB]$ tem, aproximadamente, 3 m de comprimento.

8.3.
$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{2 \times 2}{2} \right) \times 5$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{20}{6}$$

$$\Leftrightarrow V \approx 3,33$$

R.: A pirâmide triangular sombreada tem, aproximadamente, $3,3 \text{ m}^3$ de volume.

20 Testar – páginas 218 e 219

1. Vamos determinar o comprimento do cateto desconhecido e da hipotenusa usando as razões trigonométricas:

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{\overline{CB}}{8} \Leftrightarrow \overline{CB} = 8 \operatorname{tg} 40^\circ$$

$$\cos 40^\circ = \frac{8}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{8}{\cos 40^\circ}$$

Então:

$$P = 8 + 8 \operatorname{tg} 40^\circ + \frac{8}{\cos 40^\circ} \Leftrightarrow P \approx 25,156$$

$$A = \frac{8 \times 8 \operatorname{tg} 40^\circ}{2} \Leftrightarrow A \approx 26,851$$

R.: O triângulo da figura tem, aproximadamente, 25,2 m de perímetro e 26,9 m² de área.

2. Seja h a altura do pinheiro. Usando as razões trigonométricas, tem-se:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{18} \Leftrightarrow h = 18 \operatorname{tg} 30^\circ \Leftrightarrow h \approx 10,392$$

R.: O pinheiro tem, aproximadamente, 10,4 m de altura.

3. Vamos começar por determinar o comprimento do segmento de reta $[BC]$ e, depois, aplicando o teorema de Pitágoras, vamos determinar o comprimento do outro cateto do triângulo (segmento de reta $[AB]$).

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{7} \\ \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{BC}}{21} \end{array} \right\} \frac{\overline{BC}}{21} = \frac{4}{7} \Leftrightarrow \overline{BC} = 12$$

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= 21^2 - 12^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 441 - 144 \\ \Leftrightarrow \overline{AB}^2 &= 297 \Leftrightarrow \overline{AB} = -\sqrt{297} \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{297} \end{aligned}$$

Como $\overline{AB} > 0$, então $\overline{AB} = \sqrt{297}$.

Logo:

$$P = 21 + 12 + \sqrt{297} \Leftrightarrow P = 33 + \sqrt{297} \Leftrightarrow P \approx 50,234$$

$$A = \frac{12 \times \sqrt{297}}{2} \Leftrightarrow A = 6 \times \sqrt{297} \Leftrightarrow A \approx 103,402$$

R.: O triângulo tem, aproximadamente, 50,2 cm de perímetro e 103,4 cm² de área.

4. [C] $\operatorname{tg} 34^\circ = \frac{4}{\overline{AB}}$

5. Sabendo o cosseno desse ângulo, vamos determinar o seno (utilizando a fórmula fundamental da trigonometria) e depois a tangente desse mesmo ângulo:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \begin{aligned} &\operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{2}{4} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee \operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{(\sqrt{2})^2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1$$

5.1. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + 1 = 2$

5.2. $2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$
 $= \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$

6.

6.1. $\cos \alpha \times \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha \times \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - \operatorname{sen} \alpha =$
 $= \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha = 0$

6.2. $\cos^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \cos^2 \alpha \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) =$
 $= \cos^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha \times \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} =$
 $= \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$

7. Se existir um ângulo nessas condições, então terá de verificar a fórmula fundamental da trigonometria:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \\ \operatorname{sen} \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \beta = \sqrt{3} \end{array} \right\} \begin{aligned} &\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \sqrt{3}^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{4} + 3 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 3 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{7}{2} = 1 \quad \text{Falso} \end{aligned}$$

R.: Não existe nenhum ângulo β que satisfaça as condições do enunciado.

8.

8.1. $b = 90^\circ - 15^\circ \Leftrightarrow b = 75^\circ$

8.2. $b = 90^\circ - 45^\circ \Leftrightarrow b = 45^\circ$

9.

9.1. $\sin(\widehat{DAB}) = \frac{9}{27} \Leftrightarrow \sin(\widehat{DAB}) = \frac{1}{3}$

Utilizando a fórmula fundamental da trigonometria:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2(\widehat{DAB}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\widehat{DAB}) = \frac{9}{9} - \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\widehat{DAB}) = \frac{8}{9}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{DAB}) = -\frac{\sqrt{8}}{3} \vee \cos(\widehat{DAB}) = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

Então, o cosseno do ângulo DAB é de, aproximadamente, 0,94.

9.2. $\sin(\widehat{DAB}) = \frac{9}{27} \Leftrightarrow \sin(\widehat{DAB}) = \frac{1}{3}$, logo:

$$\widehat{DAB} \approx 19,47^\circ.$$

9.2. A amplitude do ângulo ACB será de, aproximadamente, $90^\circ - 19,47^\circ$, ou seja, de $70,53^\circ$.

Assim:

$$\sin 70,53^\circ = \frac{9}{BC} \Leftrightarrow \overline{BC} \approx 9,55$$

10.

10.1. Ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência têm a mesma amplitude. Assim, o ângulo DEB tem 39° de amplitude.

10.2. Ângulos inscritos numa semicircunferência são retos.

Assim, o ângulo EDB é reto e, portanto, o triângulo $[EBD]$ é um triângulo retângulo.

10.3. Utilizando as razões trigonométricas, tem-se:

$$\sin 39^\circ = \frac{10}{EB} \Leftrightarrow \overline{EB} \approx 15,890$$

O comprimento do raio do círculo é metade do comprimento do seu diâmetro. Logo,

$$r = \frac{15,890}{2} \Leftrightarrow r = 7,945$$

R.: O círculo tem, aproximadamente, 7,9 cm de raio.

10.4. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Assim, $\widehat{DB} = 78^\circ$.Como comprimento do arco $= \frac{x \pi r}{180}$, temos:

$$\text{Comprimento do arco} = \frac{78 \times 7,9}{180} \pi$$

$$\Leftrightarrow \text{Comprimento do arco} = \frac{616,2}{180} \pi$$

$$\Leftrightarrow \text{Comprimento do arco} \approx 10,755$$

R.: O arco DB tem, aproximadamente, 10,8 cm de comprimento.11. Seja h a altura do triângulo.

$$\begin{cases} \text{tg } 35^\circ = \frac{h}{x} \\ \text{tg } 20^\circ = \frac{h}{19-x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \text{ tg } 35^\circ \\ h = -x \text{ tg } 20^\circ + 19 \text{ tg } 20^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x \text{ tg } 35^\circ = -x \text{ tg } 20^\circ + 19 \text{ tg } 20^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x (\text{tg } 35^\circ + \text{tg } 20^\circ) = 19 \text{ tg } 20^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x = \frac{19 \text{ tg } 20^\circ}{\text{tg } 35^\circ + \text{tg } 20^\circ} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x \approx 6,498 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h \approx 4,550 \\ x \approx 6,498 \end{cases}$$

Calculando a área do triângulo vem:

$$A \approx \frac{19 \times 4,550}{2}$$

$$\Leftrightarrow A \approx 43,225$$

R.: O triângulo tem, aproximadamente, 43,23 cm² de área.

12.

12.1. A circunferência tem 3,6 cm de raio.

O triângulo $[ABC]$ é isósceles. Para calcularmos a sua área precisamos de calcular a sua base e a sua altura. Seja P o ponto médio do segmento de reta $[CB]$. Como os segmentos de reta $[GH]$ e $[CB]$ são paralelos, podemos garantir que o triângulo $[APB]$ é

retângulo em P , a hipotenusa tem 3,6 cm e o ângulo PBA tem 56° de amplitude (os ângulos ACB e CBA têm a mesma amplitude pois opõem-se a lados de igual comprimento e a soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$ é igual a 180° .) Utilizando as razões trigonométricas, temos:

$$\sin 56^\circ = \frac{\overline{AP}}{3,6} \Leftrightarrow \overline{AP} = 3,6 \sin 56^\circ$$

$$\cos 56^\circ = \frac{\overline{PB}}{3,6} \Leftrightarrow \overline{PB} = 3,6 \cos 56^\circ$$

Assim, vamos calcular a área do setor circular cujo arco tem 68° de amplitude e cujo raio mede 3,6 cm:

$$\text{Área do setor circular} = \frac{x \pi r^2}{360}$$

$$\text{Área do setor circular} = \frac{68 \times 12,96}{360} \pi$$

$$\Leftrightarrow \text{Área do setor circular} = 2,448\pi$$

Por outro lado, podemos calcular a área do triângulo $[ABC]$:

$$A = \frac{2 \times 3,6 \cos 56^\circ \times 3,6 \sin 56^\circ}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = 3,6(\cos 56^\circ + \sin 56^\circ)$$

Deste modo, podemos calcular a área da parte da circunferência que não é limitada pela zona vermelha:

$$\begin{aligned} 2(2,448\pi - 3,6(\cos 56^\circ + \sin 56^\circ)) &= \\ = 4,896\pi - 7,2(\cos 56^\circ + \sin 56^\circ) &\approx 5,386 \end{aligned}$$

Por fim, vamos calcular a área do círculo e a área da zona limitada pela linha vermelha.

$$A_O = \pi r^2$$

$$A_O = \pi \times 3,6^2$$

$$\Leftrightarrow A_O \approx 12,96\pi$$

$$A \approx 12,96\pi - 5,386$$

$$\Leftrightarrow A \approx 35,329$$

R.: A zona limitada pela linha vermelha tem, aproximadamente, $35,33 \text{ cm}^2$ de área.

12.2. Pelos dados da alínea anterior, podemos determinar o comprimento do segmento de reta $[CB]$ e, conseqüentemente, o comprimento do segmento de reta $[DE]$.

$$\overline{CB} = 2 \times 3,6 \cos 56^\circ \Leftrightarrow \overline{CB} = 7,2 \cos 56^\circ$$

$$\text{Assim, } \overline{DE} = 7,2 \cos 56^\circ.$$

O arco EHB e o arco CGD têm o mesmo comprimento, pois são arcos compreendidos entre cordas paralelas. Cada um deles tem 112° de amplitude, pois:

$$\text{Amplitude} = \frac{360^\circ - 2 \times 68^\circ}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{Amplitude} = 112^\circ$$

$$\text{Comprimento do arco } EHB = \frac{112 \times 3,6\pi}{180}$$

$$\Leftrightarrow \text{Comprimento do arco } EHB = 2,24\pi$$

Assim, o comprimento da linha vermelha é $2,24\pi + 2,24\pi + 7,2 \cos 56^\circ + 7,2 \cos 56^\circ \approx 22,127$

R.: A linha vermelha tem, aproximadamente, $22,127 \text{ cm}$ de comprimento.

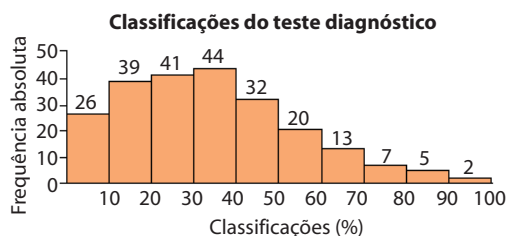
Caderno de Atividades

Unidade 1 – Estatística e probabilidades

Praticar – páginas 7 a 9

1.

1.1.



1.2. [30, 40[

1.3. 14 alunos.

1.4. 46%

2.

2.1. Cinco classes de amplitude 5.

2.2. [35, 40[. Esta classe designa-se por classe modal.

2.3. A turma da Sílvia tem 24 alunos ($7 + 5 + 6 + 4 + 2 = 24$).

2.4. A turma da Sílvia tem 12 alunos que pesam menos de 45 quilogramas ($7 + 5 = 12$).

2.5. Existem 6 alunos com, pelo menos, 50 quilogramas ($4 + 2 = 6$).

Como $\frac{12}{24} \times 100 = 50$, então 50% dos alunos pesam, pelo menos, 50 quilogramas.

2.6. A afirmação é falsa.

Como $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$, então $\frac{1}{2}$ dos alunos pesa menos de 45 quilogramas ($\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$).

3.

3.1. $P(\text{"relógio ter bracelete preta"}) = \frac{1}{4}$

3.2. $P(\text{"relógio ter mostrador redondo"}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

3.3. $P(\text{"relógio ter bracelete em aço"}) = \frac{3}{4}$

4.

4.1. a) $P(\text{"sair uma carta de paus"}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

b) $P(\text{"sair o ás de espadas"}) = \frac{1}{52}$

c) $P(\text{"sair uma dama vermelha"}) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

d) $P(\text{"sair uma figura"}) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

e) $P(\text{"sair uma carta vermelha ou preta"}) = \frac{52}{52} = 1$

f) $P(\text{"sair um ás que não seja de ouros"}) = \frac{3}{52}$

4.2. a) Sim. O acontecimento "sair uma carta vermelha ou preta".

b) Sim. O acontecimento "sair o ás de espadas".

c) Nenhum dos acontecimentos anteriores é impossível.

5. A afirmação é falsa. Se a moeda da experiência é equilibrada significa que a experiência é aleatória, ou seja, é impossível prever o resultado que se obtém. Não podemos saber qual é a face que sairá na próxima vez que lançarmos a moeda. Assim, os acontecimentos "sair face nacional" e "sair face euro" são equiprováveis.

6.

6.1. $100\% - 42\% - 15\% - 5\% = 38\%$

R.: A probabilidade de o centro comercial ser construído no terreno D é de 38%.

6.2. Se o centro comercial não for construído nem no terreno A nem no terreno D, significa que terá de ser construído no terreno B ou no terreno C.

$P(\text{"centro comercial não ser construído nem no terreno A nem no terreno D"}) = 20\%$

20 7. **Afirmiação A:**

$P(\text{"sair um número par"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ e $P(\text{"sair um número primo"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

A afirmação é falsa.

Afirmiação B:

$P(\text{"sair um número par e primo"}) = \frac{1}{6}$

$P(\text{"sair um número par"}) + P(\text{"sair um número primo"}) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1$

A afirmação é falsa.

Afirmiação C:

$P(\text{"sair um número primo"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ e $P(\text{"sair a face nacional"}) = \frac{1}{2}$

A afirmação é verdadeira.

R.: As afirmações A e B são falsas.

20 8.

8.1. a) $P(\text{"sair o número 5"}) = \frac{1}{20}$

b) $P(\text{"sair um quadrado perfeito"}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

c) $P(\text{"sair um número menor do que 10"}) = \frac{9}{20}$

d) $P(\text{"sair um número primo e ímpar"}) = \frac{7}{20}$

- 8.2. De acordo com a Lei dos Grandes Números, quando o número de repetições da experiência aleatória é elevado (como neste caso), a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar num valor que se adota como sendo a probabilidade desse acontecimento. Neste caso, a probabilidade de sair qualquer um dos números (de 1 a 20) é a mesma. Assim:

$$\frac{500}{20} = 25$$

R.: Realizando a experiência 500 vezes, é de esperar que a bola com o número 13 saia 25 vezes.

9.

- 9.1. De acordo com a Lei dos Grandes Números, quando o número de repetições da experiência aleatória é elevado, a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar num valor que se estima como sendo a probabilidade desse acontecimento.

Sendo o dado equilibrado, todas as faces têm a mesma probabilidade de sair, ou seja, a probabilidade de sair cada uma das faces é de $\frac{1}{6}$.

$$600 \times \frac{1}{6} = 100$$

R.: Em 600 lançamentos, é de esperar que saia a face 6, 100 vezes.

- 9.2. Pela alínea anterior, esperamos que cada face saia 100 vezes. Sabendo que saiu 96 vezes a face 3, não podemos concluir que o dado seja viciado.

10.

10.1. a) $P(\text{"sair um divisor de 8"}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

b) $P(\text{"sair um cubo perfeito"}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

c) $P(\text{"sair um número múltiplo de 30"}) = 0$

d) $P(\text{"sair um número primo"}) = \frac{1}{2}$

- 10.2. [B] É tão provável ficar voltada para cima uma face com um número par como com um número ímpar.

11.

- 11.1. Seja A o acontecimento: "ganhar o automóvel"

Então, $P(A) = \frac{1}{3}$.

- 11.2. Na situação atual, o Marcelo tem duas portas possíveis e um automóvel atrás de uma delas. A probabilidade de ganhar o automóvel será de $\frac{1}{2}$.

Na situação que o apresentador propõe, o Marcelo tem cinco portas e dois automóveis escondidos em duas dessas portas. A probabilidade de ganhar um automóvel será de $\frac{2}{5}$.

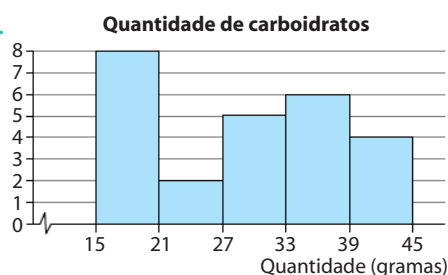
O Marcelo deve optar pela situação da montra atual, pois a probabilidade de ganhar o automóvel é maior.

12.

- 12.1. 25 marcas.

- 12.2. [15, 21[, [21, 27[, [27, 33[, [33, 39[, [39, 45[

12.3.



- 12.4. 40% das marcas.

20 13.

- 13.1. Vamos representar os resultados possíveis numa tabela de dupla entrada sabendo que o Júlio girou a roda duas vezes:

	10	20	30	40	50	60	70	80
10	20	30	40	50	60	70	80	90
20	30	40	50	60	70	80	90	100
30	40	50	60	70	80	90	100	110
40	50	60	70	80	90	100	110	120
50	60	70	80	90	100	110	120	130
60	70	80	90	100	110	120	130	140
70	80	90	100	110	120	130	140	150
80	90	100	110	120	130	140	150	160

R.: O Júlio pode obter 70 pontos de 6 modos diferentes.

- 13.2. No total das duas primeiras jogadas, a Bianca já somou 60 pontos.

- a) Para a Bianca ser eliminada tem que tirar mais de 40 pontos (caso tire 50, 60, 70 ou 80, ela fica com mais de 100 pontos e, portanto, é eliminada).

Assim:

$$P(\text{"Bianca ser eliminada"}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

- b) Para a Bianca eliminar o Júlio tem que tirar 20, 30 ou 40 pontos. Se tirar 10 pontos empata e se tirar mais de 40 pontos, ela é eliminada (como vimos na alínea anterior). Assim:

$$P(\text{"Bianca eliminar o Júlio"}) = \frac{3}{8}$$

- 13.3. Para a Teresa eliminar o Júlio numa só jogada, tem que tirar mais de 70 pontos, ou seja, tem que tirar 80. Assim:

$$P(\text{"Teresa eliminar o Júlio"}) = \frac{1}{8}$$

14.

14.1. $P(\text{"aluno não praticar nenhuma atividade"}) = \frac{11}{100}$

14.2. $P(\text{"aluno praticar as duas atividades"}) = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$

14.3. $P(\text{"aluno praticar apenas atletismo"}) = \frac{27}{100}$

- 20 15. De acordo com a Lei dos Grandes Números, quando o número de repetições da experiência aleatória é elevado (como neste caso), a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar num valor que se adota como sendo a probabilidade desse acontecimento.

Assim: $P(\text{"sair face com cor verde"}) = \frac{2068}{6300} \approx 32,8\%$

$P(\text{"sair face com cor laranja"}) = \frac{3152}{6300} \approx 50\%$

$P(\text{"sair face com cor azul"}) = \frac{1080}{6300} \approx 17,1\%$

Como o dado tem 6 faces:

Verde: 6 ————— 100%

x ————— 32,8%

$$x \approx 1,97$$

Azul: 6 ————— 100%

y ————— 17,1%

$$y \approx 1,03$$

Deste modo, podemos dizer que duas das faces do cubo estão pintadas de verde e uma das faces está pintada de azul.

16.

16.1. a) $P(\text{"não se obter a face 2"}) =$

$$= 1 - \frac{5}{36} = \frac{36}{36} - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$$

b) $P(\text{"sair a face 7"}) = 0$

c) $P(\text{"sair um número menor do que 7"}) = 1$

- 16.2. De acordo com a Lei dos Grandes Números, quando o número de repetições da experiência aleatória é elevado (como é o caso), a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar num valor que se estima como sendo a probabilidade desse acontecimento. Assim:

$$P(\text{"sair a face 2"}) = \frac{172}{999}$$

- 16.3. É mais provável obter-se a face 2 no pião do Pedro.

16.4. $P(\text{"sair face azul"}) = \frac{52}{78} = \frac{2}{3}$

Assim, pode afirmar-se que em três faces, duas são iguais. Desta forma, como o dado tem seis faces, existem quatro faces azuis. Logo, duas são vermelhas.

17.

- 17.1. a) Por exemplo, "tirar um cartão com a letra D".

- b) Por exemplo, "tirar um cartão cuja letra seja uma consoante".

- 17.2. A palavra PROBABILIDADES tem 14 letras, duas das quais são a vogal A.

$$P(\text{"sair a letra A"}) = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

- 17.3. No saco ficam onze cartões com letras. Um deles contém a letra O (cartão que é necessário retirar para se obter a palavra DADO).

$$P(\text{"sair a letra O"}) = \frac{1}{11}$$

- 20 18. Começamos por construir uma tabela de dupla entrada que traduza os dados do problema:

	-1	-3	-8	1	3	8
-1	(-1, -1)	(-1, -3)	(-1, -8)	(-1, 1)	(-1, 3)	(-1, 8)
-3	(-3, -1)	(-3, -3)	(-3, -8)	(-3, 1)	(-3, 3)	(-3, 8)
-8	(-8, -1)	(-8, -3)	(-8, -8)	(-8, 1)	(-8, 3)	(-8, 8)
1	(1, -1)	(1, -3)	(1, -8)	(1, 1)	(1, 3)	(1, 8)
3	(3, -1)	(3, -3)	(3, -8)	(3, 1)	(3, 3)	(3, 8)
8	(8, -1)	(8, -3)	(8, -8)	(8, 1)	(8, 3)	(8, 8)

- 18.1. Nas restantes faces são registados os números 1, -3 e -8.

18.2. a) $\frac{1}{36}$

b) $\frac{1}{12}$

c) $\frac{11}{36}$

d) $\frac{1}{36}$

e) $\frac{1}{6}$

f) 0

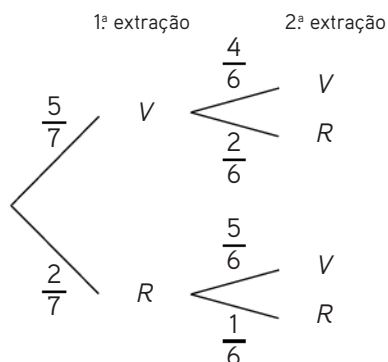
- 20 19.** Vamos construir uma tabela de dupla entrada para traduzir os dados do problema:

Filipa	Castanha	Preta	Amarela	Vermelha
Cristina	(C)	(P)	(A)	(V)
Vermelha (V)	(V, C)	(V, P)	(V, A)	(V, V)
Azul (Az)	(Az, C)	(Az, P)	(Az, A)	(Az, V)
Castanha (C)	(C, C)	(C, P)	(C, A)	(C, V)

As duas amigas podem ter escolhido a camisa de cor vermelha ou a camisa de cor castanha e, neste caso, teriam camisas da mesma cor. Assim:

$$P(\text{"as amigas terem escolhido uma camisa da mesma cor"}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

- 20 20.** Vamos construir um diagrama de árvore para clarificar o que acontece em cada uma das extrações: podemos tirar uma bola verde (V) ou uma bola roxa (R):



$$20.1. P(\text{"extrair duas bolas roxas"}) = \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{42} = \frac{1}{21}$$

$$20.2. P(\text{"extrair duas bolas verdes"}) = \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$$

$$20.3. P(\text{"extrair uma bola roxa seguida de uma bola verde"}) = \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$$

$$21. A = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

$$21.1. \bar{B} = \{1, 2, 3\}$$

$$21.2. A \cap B = \{5\}$$

$$\text{Logo, } \overline{A \cap B} = \{1, 2, 3, 4, 6\}.$$

$$21.3. \text{Como } \bar{A} = \{2, 4, 6\}, \text{ então } \bar{A} \cup B = \{2, 4, 5, 6\}.$$

$$\text{Logo, } \overline{\bar{A} \cup B} = \{1, 3\}.$$

- 20 22.**

22.1.

		Caixa V									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Caixa U	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
	3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
	4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
	5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

O conjunto dos resultados possíveis é $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 45, 50\}$.

$$22.2. \frac{3}{50}$$

22.3. Por exemplo, "o produto dos números saídos é 7" e "o produto dos números saídos é 45".

22.4. Por observação da tabela, verificamos que existem 3 casos favoráveis ao acontecimento A e 2 casos favoráveis ao acontecimento B.

Logo, o acontecimento A é mais provável.

23.

$$23.1. A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{3, 6\} \text{ e } D = \{1, 3\}$$

$$23.2. \text{a) } B \text{ e } D$$

$$\text{b) } A \text{ e } B$$

$$\text{c) } A \text{ e } D$$

24.

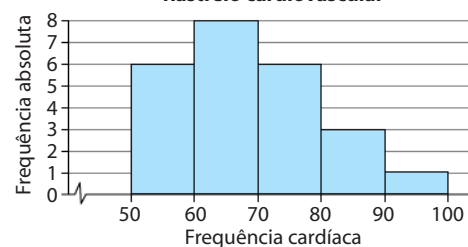
$$24.1. \frac{14}{24} \approx 42\%$$

$$\text{R.: } 42\%$$

24.2.

Classes	Frequência absoluta
[50, 60[	6
[60, 70[	8
[70, 80[	6
[80, 90[	3
[90, 100[	1

Rastreamento cardiovascular

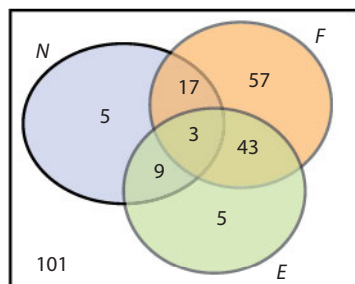


24.3. Existem 6 pessoas com ritmo cardíaco inferior a 60 batimentos por minuto.

$$\text{Logo, } \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

20 25.

25.1.



25.2. a) $P(\text{"não praticar nenhuma atividade"}) = \frac{101}{240}$

b) $P(\text{"praticar equitação, mas não praticar natação"}) = \frac{48}{240} = \frac{1}{5}$

c) $P(\text{"praticar futebol"}) = \frac{120}{240} = \frac{1}{2}$

d) $P(\text{"praticar natação e futebol mas não praticar equitação"}) = \frac{17}{240}$

20 26.

26.1.

Comprimento dos parafusos (em cm)	Frequência absoluta
[5,0; 5,1[	3
[5,1; 5,2[	5
[5,2; 5,3[	9
[5,3; 5,4[	13
[5,4; 5,5[	18
[5,5; 5,6[	19
[5,6; 5,7[	17
[5,7; 5,8[	10
[5,8; 5,9[	3
[5,9; 6,0[	2
[6,0; 6,1[	1
Total	100

26.2. $\frac{3 + 5 + 9 + 13 + 18}{100} = \frac{48}{100} = 48\%$

26.3. Existem 67 parafusos com comprimento inferior a 5,6 ($3 + 5 + 9 + 13 + 18 + 19 = 67$).

Logo, $P = \frac{67}{100} \times \frac{66}{99} = \frac{67}{100} \times \frac{1}{3} = \frac{134}{300} = \frac{67}{150}$.

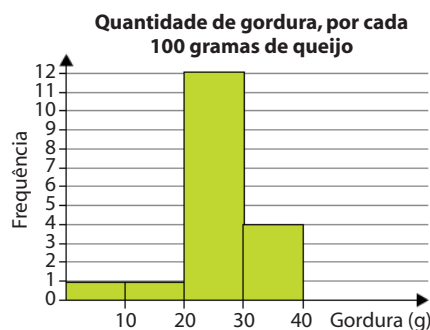
20 27.

27.1.

0	8
1	4
2	0 0 1 3 3 5 6 6 7 7 8 9
3	2 2 4 7

27.2. [0, 10[, [10, 20[, [20, 30[e [30, 40[

27.3.



27.4. $\frac{2}{18} \approx 11\%$

20 28.

28.1. $\Omega = \{(1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (2, 1); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (3, 1); (3, 2); (3, 4); (3, 5); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 5); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4)\}$

28.2. a) Por exemplo, "extrair o número 2 e, depois, o número 5".

b) Por exemplo, "extrair dois números ímpares".

28.3. Vamos construir uma tabela de dupla entrada:

+	1	2	3	4	5
1	-	3	4	5	6
2	3	-	5	6	7
3	4	5	-	7	8
4	5	6	7	-	9
5	6	7	8	9	-

Temos 12 casos favoráveis ao acontecimento A.

28.4. Com o auxílio da alínea 18.1., sabemos que temos 20 casos possíveis e, destes, 10 são favoráveis. Assim:

$P(B) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

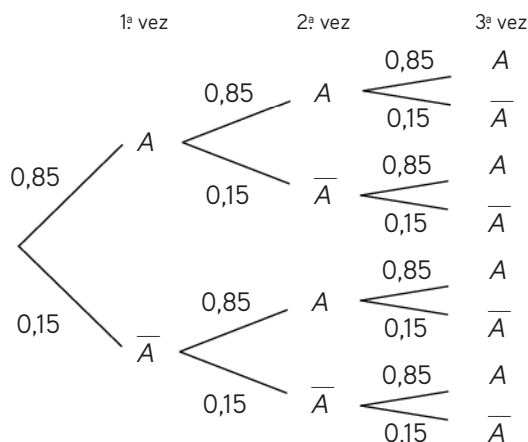
29.

29.1. Existem três cofres, cada um com três letras. O número de códigos possível depende das combinações possíveis dessas letras. Assim, existem 3^3 possibilidades, ou seja, existem 27 códigos diferentes.

29.2. Conhecendo a letra "certa" para um dos cofres, os casos possíveis dependem apenas dos outros cofres. Assim, temos dois cofres com três possibilidades de escolha cada. Para cada uma das letras do 1º cofre há três possíveis escolhas (no 3º cofre), o que faz com que os casos possíveis sejam 9.

$P(\text{"abrir o cofre"}) = \frac{1}{9}$

- 20 30.** Seja A o acontecimento: “acertar no alvo”. Então, $P(A) = 0,85$ e, consequentemente, $P(\bar{A}) = 0,15$ (em que $\bar{A}$ é o acontecimento “não acertar no alvo”). Construindo um diagrama de árvore, muito facilmente se ilustra a situação:



- 30.1.** $P(\text{“acertar três vezes”}) = 0,85 \times 0,85 \times 0,85 = 0,614\ 125$
- 30.2.** $P(\text{“não acertar no alvo”}) = 1 - 0,85 = 0,15$
- 30.3.** Vamos calcular a probabilidade de o Henrique não acertar nenhuma vez no alvo:
 $P(\text{“não acertar nenhuma vez no alvo”}) = 0,15 \times 0,15 \times 0,15 = 0,003\ 375$
 Assim, $P(\text{“acertar, pelo menos, uma vez, no alvo”}) = 1 - 0,003\ 375 = 0,996\ 625$.

31.

31.1. $s = \frac{1}{3}; t = \frac{1}{4}; u = \frac{5}{6}$

31.2. a) $P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

b) $P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{6}{12} + \frac{1}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18} = \frac{9}{18} + \frac{1}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

- 32.** Vamos apresentar todas as opções, sabendo que os dois envelopes são retirados em simultâneo:
- | | | |
|-----------|---------|---------|
| 500 / 100 | 500 / 0 | 500 / 0 |
| 100 / 0 | 100 / 0 | 0 / 0 |
- Assim, $P(\text{“João não receber nenhuma importância”}) = \frac{1}{6} \approx 16,7\%$.

33.

- 33.1.** Consideremos B – bola branca, P – bola preta e A – bola amarela.
 Então, $\Omega = \{B, P, A\}$.

33.2. $P(\text{“retirar uma bola que não seja branca”}) = 100\% - 12\% = 88\%$

- 33.3.** Sabemos, pela alínea anterior, que a probabilidade de se retirar uma bola preta ou amarela é de 88%. Se o número de bolas pretas é igual ao número de bolas amarelas, então a probabilidade de se retirar uma bola amarela é de 44%.

- 33.4.** Vamos determinar o número de bolas que estão dentro do saco sabendo que 88% das bolas presentes no saco não são brancas e que no saco se encontram 44 bolas de outras cores.

$$\begin{array}{rcl} 44 & \text{---} & 88\% \\ x & \text{---} & 100\% \end{array}$$

$$x = 50$$

R.: Dentro do saco estão 50 bolas.

- 34.** Vamos determinar as coordenadas dos pontos:

x	-2	-1	0	3	4
$f(x)$	-8	-6	-4	2	4

Assim, os cinco pontos referidos no enunciado são: $A(-2, -8)$; $B(-1, -6)$; $C(0, -4)$; $D(3, 2)$; $E(4, 4)$

Todos os possíveis segmentos de reta que têm por extremidades dois destes pontos são: segmentos de reta $AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE$ e DE , ou seja, são 10 os casos possíveis de construção.

Destes segmentos, 6 interseitam o eixo das abcissas. Então:

$$P(\text{“segmento de reta interseitar o eixo das abcissas”}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

- 35.** Seja x a probabilidade de ocorrer cada uma das faces do cubo, exceto a face 6 cuja probabilidade será de $2x$.

35.1. $7x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}$

R.: A probabilidade de se obter a face 3 é $\frac{1}{7}$.

- 35.2.** Se não obtemos a face 6, queremos saber a probabilidade de se obter qualquer uma das outras faces do cubo (1, 2, 3, 4 ou 5): $5 \times \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$

R.: A probabilidade de não se obter a face 6 é $\frac{5}{7}$.

35.3. Queremos saber a probabilidade de se obter a face

$$\text{que seja divisor de 6: } 5 \times \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$$

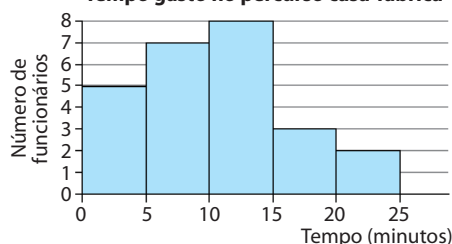
A probabilidade de se obter a face que seja divisor de 6 é $\frac{5}{7}$.

20 Testar – páginas 20 e 21

1.

1.1. $[10, 15[$

12. **Tempo gasto no percurso casa-fábrica**



1.3. $\frac{3+2}{25} = \frac{5}{25} = 20\%$

2.

2.1. a) $P(\text{"sair o número 7"}) = \frac{1}{20}$

b) $P(\text{"sair um número par"}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

c) $P(\text{"sair um divisor de 10"}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

d) $P(\text{"sair um múltiplo de 3"}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

e) $P(\text{"sair um número não inferior a 13"}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

f) $P(\text{"sair um quadrado perfeito"}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

g) $P(\text{"sair um cubo perfeito"}) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

2.2. Os números 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 13, 17, 19 e 20 são primos ou divisores de 20. Assim:

$$P(\text{"sair um número primo ou divisor de 20"}) = \frac{2}{20} = 0,6$$

[D] 60%

3.

3.1. [C] composto

3.2. $P(\text{"retirar uma moeda não identificada com o número 3"}) = \frac{47}{48}$

4. Começamos por calcular a probabilidade de se retirar da arca um gelado com sabor a laranja:

Sejam A , B , C e D os acontecimentos: "retirar um gelado com sabor a morango", "retirar um gelado com sabor a limão", "retirar um gelado com sabor a framboesa" e "retirar um gelado com sabor a laranja", respetivamente.

Sabemos que $P(A) = 30\%$, $P(B) = 10\%$ e $P(C) = 50\%$. Então, $P(D) = 100\% - 30\% - 10\% - 50\% = 10\%$.

Existem 2 gelados de laranja na arca que correspondem a 10% do número total de gelados. Vamos calcular este número:

$$2 \text{ ————— } 10\%$$

$$x \text{ ————— } 100\%$$

$$x = 20$$

R.: Na arca existem 20 gelados.

5. $1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

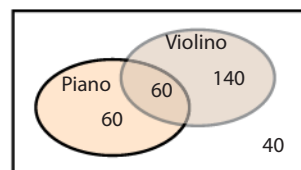
A probabilidade de se tirar uma bola vermelha é de $\frac{1}{2}$, logo a probabilidade de se tirar uma bola branca é, também, de $\frac{1}{2}$.

Se a probabilidade de se tirar, ao acaso, uma bola vermelha é igual à probabilidade de se tirar, ao acaso, uma bola branca, então o número de bolas vermelhas é igual ao número de bolas brancas. Assim, há cinco bolas vermelhas e cinco bolas brancas.

R.: Foram colocadas, no saco, dez bolas.

6.

6.1. $300 - 40 = 260$
 $200 + 120 = 320$
 $320 - 260 = 60$
 $120 - 60 = 60$
 $200 - 60 = 140$



6.2. a) $P(\text{"aluno estar inscrito nas aulas de violino"}) = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$

b) $P(\text{"aluno estar inscrito apenas nas aulas de piano"}) = \frac{60}{300} = \frac{1}{5}$

c) $P(\text{"aluno estar inscrito nas aulas de violino e de piano"}) = \frac{60}{300} = \frac{1}{5}$

7. Vamos calcular a área do quadrado e a área da circunferência, começando por determinar o comprimento do lado do quadrado (l) que corresponde, também, ao diâmetro da circunferência:

$$l^2 + l^2 = \sqrt{8^2}$$

$$\Leftrightarrow 2l^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow l^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow l = -2 \vee l = 2$$

Como $l > 0$, então $l = 2$.

$$A_{\square} = l \times l$$

$$A_{\square} = 2 \times 2 \Leftrightarrow A_{\square} = 4$$

$$A_{\circ} = \pi r^2$$

$$A_{\circ} = \pi \times 1^2 \Leftrightarrow A_{\circ} = \pi$$

$$A_{\text{zona sombreada}} = 4 - \pi$$

A zona sombreada da figura tem $(4 - \pi) \text{ cm}^2$ de área.

$P(\text{"ponto escolhido pertencer à zona sombreada"}) =$

$$= \frac{4 - \pi}{4} \approx 0,2146$$

R.: A probabilidade de o ponto escolhido pertencer à zona sombreada é de, aproximadamente, 0,21.

8. A afirmação do Filipe é falsa.

O Filipe está a tentar utilizar a Lei dos Grandes Números (quando o número de repetições da experiência aleatória é elevado, a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar num valor que se estima como sendo a probabilidade desse acontecimento). No entanto, neste caso, 20 lançamentos não é um número suficientemente elevado para se tirar conclusões acerca de o dado estar viciado. Para se retirar tais conclusões, o Filipe deveria ter lançado o dado mais vezes!

Unidade 2 – Funções

Praticar – páginas 24 a 31

1.

1.1. $k = \frac{10}{1} = 10$

1.2.

a	1	10	0,2	0,5
b	10	100	2	5

1.3. $b = 10a$

2.

2.1. $k = 1 \times 10 = 10$

2.2.

c	1	10	5	2
d	10	1	2	5

2.3. $d = \frac{10}{c}$

3.

3.1.

x	1	-1	-4	4	8
$f(x)$	-3	-1	-0,5	1,5	0,5

Cálculos auxiliares:

• $f(1) = \frac{3}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3$

• $\frac{3}{x-2} = -1 \Leftrightarrow -x+2=3 \Leftrightarrow -x=1 \Leftrightarrow x=-1$

• $f(-4) = \frac{3}{-4-2} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2} = -0,5$

• $\frac{3}{x-2} = 1,5$

$$\Leftrightarrow 1,5x - 3 = 3$$

$$\Leftrightarrow 1,5x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

• $f(8) = \frac{3}{8-2} = \frac{3}{6} = 0,5$

- 3.2. Numa função de proporcionalidade inversa, o produto das coordenadas de cada ponto é constante. Ora, $1 \times (-3) = -3$ e $(-1) \times (-1) = 1$, logo a função f não é de proporcionalidade inversa.

4. [A] Gráfico A

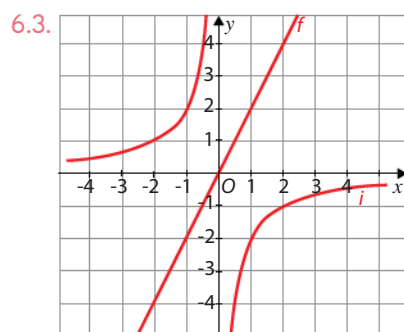
Como $A_{\text{triângulo}} = \frac{b \times h}{2}$ logo, se a área é constante, estamos perante uma situação de proporcionalidade inversa, pelo que a representação gráfica da sua função é o ramo de uma hipérbole.

5. [C] Tabela C

20 6.

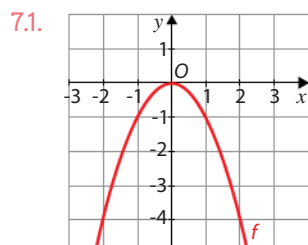
- 6.1. A função f é uma função de proporcionalidade direta e a constante de proporcionalidade direta é 2. As funções i e l são funções de proporcionalidade inversa e as constantes de proporcionalidade inversa são -2 e $7,5$, respetivamente.

$$\begin{aligned}
 6.2. f(2) + 3g(3) - 5h(8) &= \\
 &= 2 \times 2 + 3(-3 \times 3 + 4) - 5\left(\frac{3}{8-2}\right) = \\
 &= 4 + 3(-9 + 4) - 5\left(\frac{3}{6}\right) = \\
 &= 4 - 15 - 5\left(\frac{1}{2}\right) = \\
 &= -11 - \frac{5}{2} = \\
 &= -\frac{22}{2} - \frac{5}{2} = \\
 &= -\frac{27}{2}
 \end{aligned}$$



6.4. C.S. = { }

20 7.



$$\begin{aligned}
 7.2. a) \quad b &= -(-4)^2 \Leftrightarrow b = -16 \\
 b) \quad -a^2 &= -9 \Leftrightarrow a^2 = 9 \\
 &\Leftrightarrow a = -3 \vee a = 3
 \end{aligned}$$

8.

8.1. Se o Jorge vender 10 cães, passa a ter 50 cães, ou seja, $\frac{5}{6}$ da quantidade inicial. Sabendo que o número de cães é inversamente proporcional ao número de dias que pode alimentar os cães, podemos calcular para quantos dias tem o Jorge alimento:

$$20 \div \frac{5}{6} = 20 \times \frac{6}{5} = 24$$

R.: O alimento dará para 24 dias.

8.2. $v = 485 \text{ n}$

20 9.

9.1. 90 km ————— 60 min
 x ————— 45 min

$$x = 67,5 \text{ km}$$

R.: As duas localidades situam-se a 67,5 km.

9.2. Já sabemos que as duas localidades se situam a 67,5 km uma da outra. Assim:

60 km ————— 60 min

67,5 km ————— x

$$x = 67,5 \text{ min}$$

R.: Se a velocidade média fosse de 60 km/h, a viagem teria demorado 1 h 7 min 30 seg.

10.

10.1. [C] diminuiu para metade.

10.2. Se inicialmente três pessoas contribuíam com 20 €, então a prenda custa 60 € ($20 \times 3 = 60$).

$$\frac{60}{7,5} = 8$$

Então, podemos concluir que oito pessoas participaram na compra da prenda e cada uma delas contribuiu com 7,5 €.

11.

11.1. Uma hora e meia após a administração do medicamento, o chimpanzé tem 40 mg desse medicamento no sangue.

11.2. A constante de proporcionalidade é 60.

11.3. [A] $m = \frac{60}{t}$

20 12.

12.1. 200 reais ————— 122,182 dólares canadianos
 260 reais ————— x

$$x = 158,8366$$

R.: Se lhe tivessem sobrado 260 reais, a Patrícia teria recebido 158,84 dólares canadianos.

12.2. 1 € ————— 2,2357 reais

x ————— 200 reais

$$x \approx 89,457$$

R.: Com o dinheiro que lhe sobrou das férias, a Patrícia podia comprar as sapatilhas de 60 €.

13. Não.

Nenhuma das funções representadas pode ter uma expressão analítica da forma $y = ax^2$, uma vez que nenhuma delas contém a origem do referencial.

14. A afirmação do Joel é falsa.

Nos pontos que pertencem ao gráfico de uma função de proporcionalidade inversa, o produto das coordenadas de cada ponto do gráfico é constante. Ora, $2 \times 1 \neq 3 \times 0$, logo as variáveis x e y não são inversamente proporcionais.

15.

15.1. $6 \times 0,60 = 3,6$

A constante de proporcionalidade (3,6) representa a massa do bolo de aniversário do Jorge.

15.2. $n = \frac{3,6}{m}$

20 16.

16.1.
$$\left. \begin{array}{l} A_l = \frac{d \times D}{2} \\ A_l = 50 \text{ cm}^2 \end{array} \right\} \frac{d \times D}{2} = 50 \Leftrightarrow d \times D = 100$$

As variáveis d e D são inversamente proporcionais, pois o seu produto é constante (100).

16.2. $D = \frac{100}{d}$

16.3.
$$\left. \begin{array}{l} D = \frac{100}{d} \\ d = 10 \end{array} \right\} D = \frac{100}{10} \Leftrightarrow D = 10$$

As diagonais do losango têm o mesmo comprimento, portanto este losango é, também, um quadrado.

20 17.

17.1. Seja h e b diferentes de zero.

17.2.
$$\left. \begin{array}{l} A_r = \frac{b+B}{2} \times h \\ A_r = 50 \text{ cm}^2 \\ B = 16 \text{ cm} \end{array} \right\} \frac{b+16}{2} \times h = 50 \Leftrightarrow \frac{b+16}{2} = \frac{50}{h} \Leftrightarrow b+16 = \frac{100}{h} \Leftrightarrow b = \frac{100}{h} - 16$$

17.2. As variáveis b e h não são inversamente proporcionais, pois o produto dos valores correspondentes das duas variáveis não é uma constante.

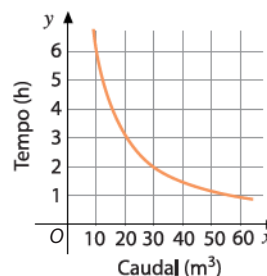
17.3.
$$\left. \begin{array}{l} b = \frac{100}{h} - 16 \\ h = 4 \end{array} \right\} b = \frac{100}{4} - 16 \Leftrightarrow b = 25 - 16 \Leftrightarrow b = 9$$

R.: A base menor tem 9 cm de comprimento.

18.

18.1. $5 \times 12 = 8a \Leftrightarrow 8a = 60 \Leftrightarrow a = 7,5$

18.2. [A]



18.3. $3,75 = 1,5t \Leftrightarrow t = 2,5$

Sabendo que o enchimento se iniciou às 15 horas e que demorou 2 h 30 min a atingir 3,75 dm de altura, então essa altura foi atingida às 17 h 30 min.

18.4. Sabemos que o tanque cheio tem 60 m³ de água.

Capacidade de vazão (em m³/h)	24	20	30	60
Tempo necessário ao esvaziamento total do tanque (em h)	2,5	3	2	1

18.5. $c \times t = 60$

19.

19.1. $0,005 \times 4000 = 20$

R.: A constante de proporcionalidade inversa é 20.

19.2. Quando o tijolo exerce 4000 N/m² de pressão, a face assente na areia tem 0,005 m² de área (de acordo com os dados da tabela). De acordo com a figura, podemos determinar a largura do retângulo da face:

$$\begin{aligned} 2l \times l &= 0,005 \\ \Leftrightarrow 2l^2 &= 0,005 \\ \Leftrightarrow l^2 &= 0,0025 \\ \Leftrightarrow l &= -0,05 \vee l = 0,05 \end{aligned}$$

R.: O retângulo tem 0,05 metros de largura.

20 20.

Consideremos a folha de papel A4, cuja largura e comprimento designaremos por l e c , respetivamente. A área dessa folha de papel será $a = c \times l$. Analisemos o que acontece nas dobragens dessa folha de papel:

Dobragem 1: $a_1 = \frac{c}{2} \times l = \frac{1}{2}(c \times l) = \frac{1}{2}a$

Dobragem 2: $a_2 = \frac{c}{2} \times \frac{l}{2} = \frac{1}{4}(c \times l) = \frac{1}{2^2}a$

Dobragem 3: $a_3 = \frac{c}{4} \times \frac{l}{2} = \frac{1}{8}(c \times l) = \frac{1}{2^3}a$

Dobragem 4: $a_4 = \frac{c}{4} \times \frac{l}{4} = \frac{1}{16}(c \times l) = \frac{1}{2^4}a$

...

Dobragem n : $a_n = \frac{1}{2^n}a$

Vamos construir uma tabela que relacione o número de dobragens da referida folha com a sua área:

Nº dobragens	1	2	3	4	...	n
Área	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2^2}a$	$\frac{1}{2^3}a$	$\frac{1}{2^4}a$	...	$\frac{1}{2^n}a$

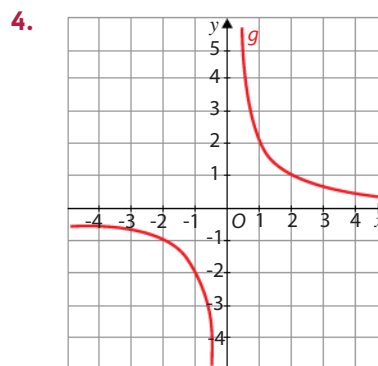
Não existe proporcionalidade entre o número de dobragens e a área de cada um dos retângulos obtidos.

21. Se a expressão analítica da função f é $y = ax^2$ isto significa que o vértice da parábola é a origem. Assim, a função h é obtida de uma função f através da translação que “desloca” cada ponto da função f uma unidade para a esquerda e três unidades para baixo. Deste modo, sabemos que os pontos $(0, 0)$, $(2, 3)$ e $(-2, 3)$ pertencem à função f .

$$\left. \begin{array}{l} y = ax^2 \\ y = 3 \\ x = 2 \end{array} \right\} 3 = a \times 4 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$$

20 Testar – páginas 32 e 33

- 1.
- 1.1. Se as variáveis x e y são diretamente proporcionais, então $k = \frac{6}{2} \Leftrightarrow k = 3$
A constante de proporcionalidade direta é 3. Então, $y = 3x$.
- 1.2. Se as variáveis x e y são inversamente proporcionais, então $k = 6 \times 2 \Leftrightarrow k = 12$
A constante de proporcionalidade inversa é 12.
Assim, $y = \frac{12}{x}$, $x \neq 0$.
2. [C] $y = x^2$
3. [D] $y = -x^2$



5. Sabemos que o tempo que o Filipe demora a aquecer o seu copo de leite, no micro-ondas, é inversamente proporcional à potência utilizada. O Filipe quer aquecer o seu leite em 45 segundos, três quartos do tempo que foi necessário no dia anterior (60 segundos).

$$60 \times \frac{3}{4} = 45$$

Assim, a potência do micro-ondas para que o leite aqueça em 45 segundos pode ser calculada da seguinte forma:

$$300 \div \frac{3}{4} = 300 \times \frac{4}{3} = 400$$

R.: O micro-ondas deve estar regulado para uma potência de 400 watts para que o leite do Filipe aqueça em 45 segundos.

- 6.
- 6.1. Numa função de proporcionalidade inversa, o produto dos valores correspondentes das duas variáveis é constante e não nulo.
Ora, $1,529 \times 532 = 813,428$ e $1,492 \times 545 = 813,14$.
R.: O número de litros de gasolina vendidos não é inversamente proporcional ao preço do litro da gasolina, por isso, não concordo com o Cristiano.
- 6.2. a) Se, no depósito com 71 litros de capacidade, o Daniel ainda tem 5 litros, serão necessários 66 litros de gasolina para encher o depósito do automóvel.
- $$66 = 33t \Leftrightarrow t = \frac{66}{33} \Leftrightarrow t = 2$$
- R.: O Daniel vai demorar 2 minutos a encher o depósito do seu automóvel.
- b) A constante representa o número de litros (33 litros) que o Daniel introduz no depósito do seu automóvel, por minuto.

6.3. a) A função representada a vermelho é de proporcionalidade direta. A constante de proporcionalidade é 0,6.

b) O Carlos abasteceu o seu automóvel com 19 litros (de acordo com o gráfico) e o preço de cada litro de gasolina é de 1,48 €.

$$19 \times 1,48 = 28,12$$

Sabendo que o Carlos beneficiou de 5% de desconto, temos:

$$28,12 \times 0,95 = 26,714$$

R.: No final do abastecimento, o Carlos pagou 26,71 €.

Unidade 3 – Equações

Praticar – páginas 36 a 43

1.

1.1. $-3x^2 = 2x \Leftrightarrow -3x^2 - 2x = 0$

1.2. $\frac{1}{3} - x^2 = -4x \Leftrightarrow x^2 + 4x + \frac{1}{3} = 0$

1.3. $9^2 - x = 2x \Leftrightarrow -3x + 81 = 0$

1.4. $x^2 + 3x - 7 = x^2 \Leftrightarrow 3x - 7 = 0$

As equações 1.3. e 1.4. não são do 2º grau.

2.

2.1. $x^2 - 10x =$
 $= x^2 - 10x + 25 - 25 =$
 $= (x^2 - 10x + 25) - 25 =$
 $= (x - 5)^2 - 25$

2.2. $x^2 + 8x =$
 $= x^2 + 8x + 16 - 16 =$
 $= (x^2 + 8x + 16) - 16 =$
 $= (x + 4)^2 - 16$

3.

3.1.

I. $(x - 3)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

II. $(-x + 1)^2 = -2x$
 $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 2x = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$

III. $(y - 3)(y + 3) = 4y$
 $\Leftrightarrow y^2 - 9 - 4y = 0$
 $\Leftrightarrow y^2 - 4y - 9 = 0$

IV. $-(x + 2)(x - 3) = 6$
 $\Leftrightarrow -(x^2 - 3x + 2x - 6) - 6 = 0$
 $\Leftrightarrow -x^2 + x = 0$

3.2. As equações I. e III. são equações do 2º grau completas.

20 4.

4.1. $(x + 3)^2 = 16$
 $\Leftrightarrow x + 3 = -4 \vee x + 3 = 4$
 $\Leftrightarrow x = -7 \vee x = 1$

4.2. a) $(3x + 1)^2 - 9 = 0$
 $\Leftrightarrow (3x + 1)^2 = 9$
 $\Leftrightarrow 3x + 1 = -3 \vee 3x + 1 = 3$
 $\Leftrightarrow 3x = -4 \vee 3x = 2$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \vee x = \frac{2}{3}$
 C.S. = $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right\}$

b) $(3x + 1)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 - 9 = 0$
 $\Leftrightarrow 9x^2 + 6x - 8 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 9 \times (-8)}}{2 \times 9}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 288}}{18}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 18}{18}$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \vee x = \frac{2}{3}$
 C.S. = $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right\}$

20 5.

5.1. $2x^2 - 200 = 0$
 $\Leftrightarrow 2x^2 = 200$
 $\Leftrightarrow x^2 = 100$
 $\Leftrightarrow x = -10 \vee x = 10$
 C.S. = $\{-10, 10\}$

5.2. $x^2 + 9x = 0$
 $\Leftrightarrow x(x + 9) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 9 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -9$
 C.S. = $\{-9, 0\}$

$$5.3. \quad x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 8}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -6 \vee x = 2$$

$$\text{C.S.} = \{-6, 2\}$$

$$5.4. \quad x^2 + 14x + 49 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 7)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -7$$

$$\text{C.S.} = \{-7\}$$

$$5.5. \quad x^2 + 6x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 - \frac{\sqrt{28}}{2} \vee x = -3 + \frac{\sqrt{28}}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -3 - \frac{\sqrt{28}}{2}, -3 + \frac{\sqrt{28}}{2} \right\}$$

$$5.6. \quad 2x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 24}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{4}$$

Equação impossível.

$$\text{C.S.} = \{\}$$

$$5.7. \quad 3x - 3 = x - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

$$\text{C.S.} = \{-3, 1\}$$

$$5.8. \quad 3x^2 + 2 = 5x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \vee x = 1$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{2}{3}, 1 \right\}$$

6.

$$6.1. \quad a = 3; b = 6; c = -9$$

$$6.2. \quad \Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 36 + 108 = 144 > 0$$

Como o binómio discriminante tem um valor positivo, então podemos concluir que a equação admite duas soluções reais distintas.

$$6.3. \quad 3x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 3 \times (-9)}}{2 \times 3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 108}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 12}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

$$\text{C.S.} = \{-3, 1\}$$

20 7. Para determinar o número de soluções de cada uma das equações sem as resolver, basta calcular o binómio discriminante de cada uma delas:

$$7.1. \quad 2x^2 + 4 = 0 \quad a = 2, b = 0, c = 4$$

$$\Delta = 0^2 - 4 \times 2 \times 4 = -32 < 0$$

A equação não tem soluções.

7.2. $-3x^2 + 4x = 0$ $a = -3, b = 4, c = 0$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-3) \times 0 = 16 > 0$$

A equação tem duas soluções distintas.

7.3. $-x^2 + 5x - 2 = 0$ $a = -1, b = 5, c = -2$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 17 > 0$$

A equação tem duas soluções distintas.

7.4. $2x^2 - 3x - 4 = 0$ $a = 2, b = -3, c = -4$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 41 > 0$$

A equação tem duas soluções distintas.

7.5. $3x^2 - \sqrt{24}x + 2 = 0$ $a = 3, b = -\sqrt{24}, c = 2$

$$\Delta = (-\sqrt{24})^2 - 4 \times 3 \times 2 = 0$$

A equação tem uma única solução.

7.6. $x^2 - 8x + 5 = 0$ $a = 1, b = -8, c = 5$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 44 > 0$$

A equação tem duas soluções distintas.

8.

8.1. $x^2 - 7x + 10 = 0$

A soma das soluções é 7 e o produto das soluções é 10.

8.2. $2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$

A soma das soluções é 2 e o produto das soluções

é $\frac{1}{2}$.

- 20 9. Consideremos que o retângulo tem $2x$ unidades de comprimento e x unidades de largura.

Então:

$$x \times 2x = 50 \Leftrightarrow 2x^2 = 50$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 5$$

Como $x > 0$, $x = 5$.

O retângulo tem 5 unidades de largura e 10 unidades de comprimento.

20 10.

- 10.1. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Então:

$$-15x + 140 + 3x^2 - 12x + 115 - 3x = 180$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 30x + 75 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

$$\text{C.S.} = \{5\}$$

Agora que determinamos o valor de x podemos calcular a amplitude de cada um dos ângulos internos.

$$\left. \begin{array}{l} -15x + 140 \\ x = 5 \end{array} \right\} -15 \times 5 + 140 = 65$$

$$\left. \begin{array}{l} 115 - 3x \\ x = 5 \end{array} \right\} 115 - 3 \times 5 = 100$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x^2 - 12x \\ x = 5 \end{array} \right\} 3 \times 5^2 - 12 \times 5 = 15$$

Os ângulos internos do triângulo têm as seguintes amplitudes: 65° , 100° e 15° .

- 10.2. O triângulo é obtusângulo (quanto à amplitude dos ângulos), pois um dos seus ângulos internos é obtuso.

A ângulos de diferentes amplitudes opõem-se lados de diferentes comprimentos, logo o triângulo é escaleno (quanto ao comprimento dos lados).

11. Se -2 é uma das soluções da equação, então:

$$2 \times (-2)^2 - a \times (-2) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 4 + 2a + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 + 2a + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a = -8 - 3$$

$$\Leftrightarrow 2a = -11$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{11}{2}$$

12.

- 12.1. Quando o foguete foi lançado (instante inicial) temos que $t = 0$. Assim:

$$h(0) = -0^2 + 13 \times 0 + 30$$

$$\Leftrightarrow h(0) = 30$$

R.: O foguete foi lançado a 30 decímetros de altura.

- 12.2. Quando o foguete caiu, a altura atingiu o valor zero. Assim:

$$-t^2 + 13t + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \times (-1) \times 30}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 120}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-13 \pm 17}{-2}$$

$$\Leftrightarrow t = 15 \vee t = -2$$

Como $t > 0$, $t = 15$.

R.: O foguete demorou 15 segundos a cair nas águas do mar.

20 13.

13.1. $(2x - 3)^2 - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 4 \times 5}}{2 \times 4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12 \pm 8}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \vee x = \frac{1}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right\}$$

13.2. $16 - (x - 5)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 16 - x^2 + 10x - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 10x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \times (-1) \times (-9)}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm 8}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 9 \vee x = 1$$

$$\text{C.S.} = \{1, 9\}$$

13.3. $3(x + 2) = 1 - x^2$

$$\Leftrightarrow 3x + 6 - 1 + x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

Equação Impossível

$$\text{C.S.} = \{\}$$

13.4.

$$x^2 = \frac{1}{2}(x + 6)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = x + 6$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6)}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 7}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = 2$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{3}{2}, 2 \right\}$$

13.5.

$$\frac{x^2 + 20}{4} = 1 + 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 20 = 4 + 8x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

$$\text{C.S.} = \{4\}$$

13.6.

$$x^2 + 5x = \frac{21 - 5x}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 15x = 21 - 5x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 20x - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \times 3 \times (-21)}}{2 \times 3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 252}}{6}$$

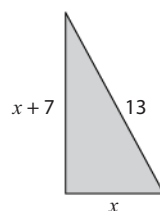
$$\Leftrightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{652}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-20 - \sqrt{652}}{6} \vee x = \frac{-20 + \sqrt{652}}{6}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{-20 - \sqrt{652}}{6}, \frac{-20 + \sqrt{652}}{6} \right\}$$

14. [B] $x^2 - 10x + 25 = 0$

20 15.



$$A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{\Delta} = \frac{x \times (x + 7)}{2}$$

Para determinar o valor de x recorreremos ao teorema de Pitágoras.

$$13^2 = x^2 + (x + 7)^2$$

$$\Leftrightarrow 169 = x^2 + x^2 + 14x + 49$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 14x - 120 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \times 2 \times (-120)}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 960}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{1156}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm 34}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-48}{4} \vee x = \frac{20}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -12 \vee x = 5$$

Como $x > 0$, então $x = 5$.

Assim,

$$A_{\Delta} = \frac{5 \times (5 + 7)}{2} =$$

$$= \frac{5 \times 12}{2} =$$

$$= \frac{60}{2} =$$

$$= 30$$

$$\text{R.: } A = 30 \text{ cm}^2$$

16.

$$16.1. \quad 2x^2 - 16x + 3 =$$

$$= 2(x^2 - 8x) + 3 =$$

$$= 2(x^2 - 8x + 16) + 3 - 2 \times 16 =$$

$$= 2(x - 4)^2 + 3 - 32 =$$

$$= 2(x - 4)^2 - 29$$

$$16.2. \quad -4x^2 - 16x + 2 =$$

$$= -4(x^2 + 4x) + 2 =$$

$$= -4(x^2 + 4x + 4) + 2 - (-4) \times 4 =$$

$$= -4(x + 2)^2 + 2 + 16 =$$

$$= -4(x + 2)^2 + 18$$

17.

17.1. O Rui obteve três soluções o que é impossível numa equação do 2º grau. A primeira vista, reparamos que a equação do 2º grau dada não tem termo independente, ou seja, naturalmente pode ser resolvida utilizando a lei do anulamento do produto após colocar x em evidência. Assim, uma das

soluções será 0; portanto, a resolução da Joana também não é correta.

$$17.2. \quad 2x^2 - 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \vee x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

$$\text{C.S.} = \{0, 4\}$$

18. Seja n a idade do Norberto:

$$n^2 + 5n = 6$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 5n - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -6 \vee n = 1$$

A idade do Norberto não pode ser negativa, logo o Norberto tem 1 ano de idade.

20 19. O triângulo tem x cm de altura e 40 cm² de área. Então:

$$\frac{x \left(\frac{4}{5}x \right)}{2} = 40$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}x^2 = 80$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow x = -10 \vee x = 10$$

Como $x > 0$, $x = 10$.

R.: O triângulo tem 10 cm de altura e 8 cm de base.

20.

20.1. Sabemos que o segmento de reta $[AB]$ tem $(x - 3)$ cm, logo o segmento de reta $[BC]$ mede $(x + 1)$ cm.

Assim:

$$A(x) = (x - 3)(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow A(x) = x^2 + x - 3x - 3$$

$$\Leftrightarrow A(x) = x^2 - 2x - 3$$

20.2. Começamos por calcular x , conhecendo a área do retângulo:

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x - 3 &= 12 \\
 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15)}}{2 \times 1} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{2 \pm 8}{2} \\
 \Leftrightarrow x &= -3 \vee x = 5
 \end{aligned}$$

x não pode tomar o valor -3 , pois as medidas dos lados do retângulo não podem ser negativas. Então, o retângulo tem 2 cm de largura e 6 cm de comprimento.

$$6 + 6 + 2 + 2 = 16$$

R.: O retângulo $[ABCD]$ tem 16 cm de perímetro.

21. Vamos começar por determinar o binómio discriminante de cada uma das equações dadas:

I. $x^2 - 2x + k = 0$ $a = 1, b = -2, c = k$
 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times k$
 $\Leftrightarrow \Delta = 4 - 4k$

II. $kx^2 + 6x + 5 = 0, k \neq 0$ $a = k, b = 6, c = 5$
 $\Delta = 6^2 - 4 \times k \times 5$
 $\Leftrightarrow \Delta = 36 - 20k$

III. $-2x^2 + 3kx + 2 = 0$ $a = -2, b = 3k, c = 2$
 $\Delta = (3k)^2 - 4 \times (-2) \times 2$
 $\Leftrightarrow \Delta = 9k^2 + 16$

- 21.1. Quando uma equação do 2º grau tem uma só solução, o binómio discriminante é igual a zero:

I. $4 - 4k = 0$
 $\Leftrightarrow -4k = -4$
 $\Leftrightarrow k = 1$

II. $36 - 20k = 0$
 $\Leftrightarrow -20k = -36$
 $\Leftrightarrow k = \frac{9}{5}$

III. $9k^2 + 16 = 0$
 $\Leftrightarrow 9k^2 = -16$
 $\Leftrightarrow k^2 = -\frac{16}{9}$
 $\Leftrightarrow k = \pm \sqrt{-\frac{16}{9}}$

Impossível.

- 21.2. Quando uma equação do 2º grau tem duas soluções, o binómio discriminante é positivo:

I. $4 - 4k > 0$ se $k = -6$, por exemplo.

II. $36 - 20k > 0$ se $k = 0$, por exemplo.

III. $9k^2 + 16 > 0$ se $k = 0$, por exemplo.

- 21.3. Quando uma equação do 2º grau não tem soluções, o binómio discriminante é negativo:

I. $4 - 4k < 0$ se $k = 2$, por exemplo.

II. $36 - 20k < 0$ se $k = 2$, por exemplo.

III. $9k^2 + 16 < 0$. Nenhum valor de k satisfaz a condição.

22. Seja x a medida de $[DC]$, ou seja, a medida da base menor. Então, a altura do trapézio é x e a base maior (segmento de reta $[AB]$) tem $(2x)$ cm de comprimento.

Assim, $A_T = \frac{(b + B)}{2} \times h$, sendo $b = h - x$ e $B = 2x$.

Logo,

$$\begin{aligned}
 \frac{x + 2x}{2} \times x &= 73,5 \\
 \Leftrightarrow 3x^2 &= 147 \\
 \Leftrightarrow x^2 &= 49 \\
 \Leftrightarrow x &= -7 \vee x = 7
 \end{aligned}$$

Como $x > 0$, $x = 7$.

R.: A base menor do trapézio mede 7 cm e a base maior mede 14 cm.

23.

23.1. $V(x) = 4(3x + 1)(x - 5)$
 $\Leftrightarrow V(x) = (12x + 4)(x - 5)$
 $\Leftrightarrow V(x) = 12x^2 - 60x + 4x - 20$
 $\Leftrightarrow V(x) = 12x^2 - 56x - 20$

23.2. $V = 12 \times 10^2 - 56 \times 10 - 20$
 $\Leftrightarrow V = 1200 - 560 - 20$
 $\Leftrightarrow V = 620$

Quando $x = 10$, o sólido tem 620 u.v.

23.3. $V(x) = 3660$

$$\begin{aligned}
 12x^2 - 56x - 20 &= 3660 \\
 \Leftrightarrow 12x^2 - 56x - 3680 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 3x^2 - 14x - 920 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \times 3 \times (-920)}}{2 \times 3} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{14 \pm \sqrt{196 + 11040}}{6} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{14 \pm 106}{6} \\
 \Leftrightarrow x &= -\frac{92}{6} \vee x = \frac{120}{6} \\
 \Leftrightarrow x &= -\frac{46}{3} \vee x = 20
 \end{aligned}$$

Como $x > 0$, então $x = 20$.

Sabendo que $x = 20$, vamos calcular as medidas dos comprimentos dos lados do sólido:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 1 \\ x = 20 \end{array} \right\} 3 \times 20 + 1 = 61$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 5 \\ x = 20 \end{array} \right\} 20 - 5 = 15$$

O sólido tem 61 unidades de comprimento, 15 unidades de largura e 4 unidades de altura.

- 24.** Com os dados do enunciado, sabemos que, se c representar a medida do comprimento do retângulo, a largura (que perfaz 75% do comprimento) pode ser

representada por $\frac{3}{4}c$.

Aplicando o teorema de Pitágoras, vamos determinar c :

$$\begin{aligned} c^2 + \left(\frac{3}{4}c\right)^2 &= 150^2 \\ \Leftrightarrow \frac{16}{16}c^2 + \frac{9}{16}c^2 &= 22\,500 \\ \Leftrightarrow 25c^2 &= 360\,000 \\ \Leftrightarrow c^2 &= 14\,400 \\ \Leftrightarrow c &= -120 \vee c = 120 \end{aligned}$$

Como $c > 0$, $c = 120$.

Assim, o terreno tem 120 metros de comprimento e 90 metros de largura.

Vamos determinar quantos metros de rede precisa o Sr. Henrique, calculando o perímetro do terreno:

$$P = 90 + 90 + 120 + 120 \Leftrightarrow P = 420$$

$$420 \times 3 = 1260$$

R.: O Sr. Henrique vai gastar 1260 € na vedação do terreno.

20 25.

- 25.1.** Os pontos A e B correspondem aos pontos de interseção das duas funções representadas. Então:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} y = -x^2 + 2 \\ y = -x \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ -x^2 + 2 = -x \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ -x^2 + x + 2 = 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-1) \times 2}}{2 \times (-1)} \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ x = 2 \vee x = -1 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -(2)^2 + 2 \\ x = 2 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} y = -(-1)^2 + 2 \\ x = -1 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -2 \\ x = 2 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ x = -1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Então, $A(-1, 1)$ e $B(2, -2)$.

- 25.2.** A área do triângulo $[AKB]$ corresponde à soma das áreas dos triângulos $[AKO]$ e $[OKB]$.

$$A_{[AKO]} = \frac{1 \times 1}{2} \Leftrightarrow A_{[AKO]} = \frac{1}{2}$$

$$A_{[OKB]} = \frac{1 \times 2}{2} \Leftrightarrow A_{[OKB]} = \frac{2}{2} \Leftrightarrow A_{[OKB]} = 1$$

$$A_{[AKB]} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A_{[AKB]} = \frac{3}{2}$$

R.: O triângulo $[AKB]$ tem 1,5 unidades de área.

26.

$$\begin{aligned} \text{26.1.} \quad \frac{x^2 - 7}{2} - \frac{x^2 - 8}{3} &= \frac{5}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 21}{6} - \frac{2x^2 - 16}{3} &= \frac{5}{6} \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 21 - 2x^2 + 16 - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 10 \\ \Leftrightarrow x &= -\sqrt{10} \vee x = \sqrt{10} \\ \text{C.S.} &= \{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{26.2.} \quad \frac{x^2 + 1}{3} &= \frac{-3 + x}{4} \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 4 &= -9 + 3x \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 3x + 13 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 4 \times 13}}{2 \times 4} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3 \pm \sqrt{-199}}{8} \end{aligned}$$

Equação impossível

C.S. = {}

$$\begin{aligned} \text{26.3.} \quad \frac{x}{50} &= \frac{1}{2x}, x \neq 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 &= 50 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow x &= -5 \vee x = 5 \\ \text{C.S.} &= \{-5, 5\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 26.4. \quad & \frac{6}{x} - 0,1 = \frac{1}{20}x, x \neq 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{6}{x} = \frac{x}{20} + \frac{2}{20} \\
 \Leftrightarrow & x^2 + 2x = 120 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + 2x - 120 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-120)}}{2 \times 1} \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 480}}{2} \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{-2 \pm 22}{2} \\
 \Leftrightarrow & x = -12 \vee x = 10 \\
 \text{C.S.} = & \{-12, 10\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 26.5. \quad & x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \\
 \Leftrightarrow & x(x^2 - 5x + 6) = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = 0 \vee x^2 - 5x + 6 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = 0 \vee x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} \\
 \Leftrightarrow & x = 0 \vee x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\
 \Leftrightarrow & x = 0 \vee x = \frac{5 \pm 1}{2} \\
 \Leftrightarrow & x = 0 \vee x = 2 \vee x = 3 \\
 \text{C.S.} = & \{0, 2, 3\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 26.6. \quad & x^3 + x(x-2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^3 + x^2 - 2x = 0 \\
 \Leftrightarrow & x(x^2 + x - 2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = 0 \vee x^2 + x - 2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \\
 \Leftrightarrow & x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \\
 \Leftrightarrow & x = 0 \vee x = -2 \vee x = 1 \\
 \text{C.S.} = & \{-2, 0, 1\}
 \end{aligned}$$

27.

$$\begin{aligned}
 27.1. \quad & (2x+3)^2 - (2x+3) - 6 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 4x^2 + 12x + 9 - 2x - 3 - 6 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 4x^2 + 10x = 0 \\
 \Leftrightarrow & x(4x+10) = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = 0 \vee 4x+10 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = 0 \vee 4x = -10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow & x = 0 \vee x = -\frac{10}{4} \\
 \Leftrightarrow & x = 0 \vee x = -\frac{5}{2} \\
 \text{C.S.} = & \left\{-\frac{5}{2}, 0\right\}
 \end{aligned}$$

27.2. Se substituirmos $2x+3$ por y na equação $(2x+3)^2 - (2x+3) - 6 = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & y^2 - y - 6 = 0 \\
 \Leftrightarrow & y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \\
 \Leftrightarrow & y = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \\
 \Leftrightarrow & y = -2 \vee y = 3 \\
 \text{C.S.} = & \{-2, 3\}
 \end{aligned}$$

Como $2x+3 = y$ e $y = -2 \vee y = 3$, então

$$\begin{aligned}
 & 2x+3 = -2 \vee 2x+3 = 3 \\
 \Leftrightarrow & 2x = -5 \vee 2x = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = -\frac{5}{2} \vee x = 0 \\
 \text{C.S.} = & \left\{-\frac{5}{2}, 0\right\}
 \end{aligned}$$

28.

28.1. Seja l a largura do retângulo e, portanto, $\frac{3}{2}l$ representa o seu comprimento.

$$\begin{aligned}
 & l\left(\frac{3}{2}l\right) = 24 \\
 \Leftrightarrow & \frac{3}{2}l^2 = 24 \\
 \Leftrightarrow & l^2 = 16 \\
 \Leftrightarrow & l = -4 \vee l = 4
 \end{aligned}$$

Sabemos que l não pode ser negativo, portanto o retângulo tem 4 cm de largura e 6 cm de comprimento.

28.2. Conhecemos a área do quadrado: 24 cm^2 . Seja l o comprimento do lado do quadrado. Então:

$$l^2 = 24 \Leftrightarrow l = -\sqrt{24} \vee l = \sqrt{24}$$

Como se trata de uma medida, então l é positivo.

$$P = 4\sqrt{24}$$

R.: O quadrado tem $(4\sqrt{24})$ cm de perímetro.

29. Vamos escrever a equação na forma canônica e calcular o binômio discriminante.

$$2x^2 - 3kx = 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 3kx - 5 = 0$$

$$a = 2, b = -3k, c = -5$$

$$\Delta = (-3k)^2 - 4 \times 2 \times (-5) \Leftrightarrow \Delta = 9k^2 + 40$$

A expressão $9k^2 + 40$ é sempre positiva, portanto o binômio discriminante é sempre maior do que zero. Assim, podemos dizer que a equação tem sempre duas soluções distintas, independentemente do valor de k .

30. $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}x(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0 \vee \sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

31. Seja a a abscissa do ponto A e b a abscissa do ponto B . Digamos que $b > a$. Então:

$$\begin{cases} b - a = 11 \\ ab = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 11 + a \\ a(11 + a) = -28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 11a + 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 112}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-11 \pm 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -7 \vee a = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -7 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 7 \\ a = -4 \end{cases}$$

R.: As abscissas dos pontos A e B podem ser -7 e 4 ou -4 e 7 , respectivamente.

32. Começemos por escrever o enunciado matematicamente, determinando as bases que são referidas:

$$125 = a^2 + (2a)^2$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 = 125$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow a = -5 \vee a = 5$$

Assim, há quatro decomposições possíveis:

$$125 = (-5)^2 + (-10)^2 \text{ ou } 125 = 5^2 + 10^2 \text{ ou}$$

$$125 = (-5)^2 + 10^2 \text{ ou } 125 = 5^2 + (-10)^2$$

33. Representemos a diagonal menor por d e, consequentemente, a diagonal maior por $d + 5$.

- 33.1. Como $A = \frac{d \times D}{2}$, temos

$$25 = \frac{d(d+5)}{2}$$

$$\Leftrightarrow d^2 + 5d = 50$$

$$\Leftrightarrow d^2 + 5d - 50 = 0$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times (-50)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 200}}{2}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{-5 \pm 15}{2}$$

$$\Leftrightarrow d = -10 \vee d = 5$$

Como $d > 0$, $d = 5$.

R.: A diagonal menor tem 5 cm e a diagonal maior tem 10 cm.

- 33.2. Seja O o ponto de interseção das duas diagonais. Vamos calcular a hipotenusa do triângulo $[DOC]$ (utilizando o teorema de Pitágoras, pois sabemos que as duas diagonais de um losango formam quatro ângulos retos).

$$\overline{DC}^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{4} \overline{DC}^2 = \frac{25}{4} + \frac{100}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4\overline{DC}^2 = 125$$

$$\Leftrightarrow \overline{DC}^2 = \frac{125}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DC} = \pm \sqrt{\frac{125}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DC} = -\frac{\sqrt{125}}{2} \vee \overline{DC} = \frac{\sqrt{125}}{2}$$

Como $\overline{DC}$ é um comprimento, $\overline{DC} > 0$, logo

$\overline{DC} = \frac{\sqrt{125}}{2}$. Os quatro lados de um losango têm o mesmo comprimento. Assim:

$$P = 4 \times \frac{\sqrt{125}}{2} \Leftrightarrow P = 2\sqrt{125}$$

R.: O losango tem $(2\sqrt{125})$ cm de perímetro.

- 34.** Consideremos cada um dos cartões tem x cm de comprimento e y cm de largura. Assim, sabemos que $x + 2y = 30$.

Conhecendo a área de cada um dos cartões, podemos dizer que $xy = 100$.

Utilizando um sistema, vamos determinar as dimensões de cada um dos retângulos iguais:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y = 30 \\ xy = 100 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 - 2y \\ \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y(30 - 2y) = 100 \\ \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2y^2 + 30y - 100 = 0 \\ \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 + 15y - 50 = 0 \\ \end{cases} & \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \times (-1) \times (-50)}}{2 \times (-1)} \\ \end{cases} & \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 200}}{-2} \\ \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-15 \pm 5}{-2} \\ \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 \quad \vee \quad y = 5 \\ \end{cases} & \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 - 20 \\ y = 10 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 30 - 10 \\ y = 5 \end{cases} & \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 20 \\ y = 5 \end{cases} & \end{aligned}$$

De acordo com os dados do enunciado, as medidas dos comprimentos são diferentes, portanto $x = 20$ e $y = 5$.

Vamos calcular a área da fotografia, sabendo que tem 20 cm de comprimento ($30 - 2 \times 5$) e 10 cm de largura ($20 - 2 \times 5$):

$$A = 20 \times 10 \Leftrightarrow A = 200$$

R.: A fotografia tem 200 cm² de área.

- 35.** A expressão que representa a área do retângulo é: $(x - 1)(x + 3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$

Relativamente ao triângulo, sabendo que é isósceles e retângulo, podemos dizer que a base e a altura medem ambas $(x + 3)$. Assim, a expressão que representa a área do triângulo é:

$$\frac{(x+3)(x+3)}{2} = \frac{x^2 + 6x + 9}{2}$$

Vamos calcular para que valores de x , os polígonos têm a mesma área:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= \frac{x^2 + 6x + 9}{2} \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 6 - x^2 - 6x - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15)}}{2 \times 1} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2 \pm 8}{2} \\ \Leftrightarrow x &= -3 \quad \vee \quad x = 5 \end{aligned}$$

Como x não pode ser negativo (as medidas dos comprimentos dos lados dos polígonos são sempre positivas), então $x = 5$.

36.

- 36.1.** $[EFGH]$ é um retângulo, portanto os lados $[EF]$ e $[HG]$ são paralelos. Assim, podemos garantir que os segmentos de reta $[EF]$ e $[AB]$ são paralelos.

Quando duas retas paralelas intersectam uma reta, os ângulos formados são geometricamente iguais, ou seja, neste caso sabemos que os ângulos CEF e CAB têm a mesma amplitude. Além disso, ACB e ECF representam o mesmo ângulo.

Pelo critério AA de semelhança de triângulos, os triângulos $[ABC]$ e $[EFC]$ são semelhantes.

- 36.2.** Consideremos que o segmento de reta $[EF]$ mede x e, conseqüentemente, que o segmento de reta $[FG]$ mede $2x$.

Os ângulos CIF e CDB são ambos retos. Como os ângulos DCB e ICF representam o mesmo ângulo, podemos deduzir, pelo critério AA, que os triângulos $[CIF]$ e $[CDB]$ são semelhantes.

$$\text{Então, } \frac{\overline{CD}}{\overline{CI}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{IF}}.$$

$$\text{Ora: } \overline{CD} = 4 + 2x, \overline{CI} = 4, \overline{DB} = 2, \overline{IF} = \frac{x}{2}$$

Calculando x :

$$\begin{aligned} \frac{4+2x}{4} &= \frac{\frac{x}{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{4+2x}{4} &= \frac{x}{4} \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 4x &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2 \times 1} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-2 \pm 6}{2} \\ \Leftrightarrow x &= -4 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Como x tem que ser positivo (não há comprimentos negativos), então $x = 2$.

$$P = 2 + 4 + 2 + 4 = 12$$

R.: O retângulo $[EFGH]$ tem 12 cm de perímetro.

20 Testar – páginas 44 e 45

$$\begin{aligned} 1. \quad 2x^2 - 24x + 84 &= \\ &= 2(x^2 - 12x) + 84 = \\ &= 2(x^2 - 12x + 36) + 84 - 2 \times 36 = \\ &= 2(x - 6)^2 + 84 - 72 = \\ &= 2(x - 6)^2 + 12 \end{aligned}$$

2.

$$2.1. \quad x^2 + 5x + 15 = 0, \text{ por exemplo.}$$

$$2.2. \quad x^2 - 11x = 0, \text{ por exemplo.}$$

2.3. Sejam 2 e 3 as soluções de uma equação, por exemplo. Então, $S = 5$ e $P = 6$: $x^2 - 5x + 6 = 0$, por exemplo.

2.4. Seja o número 3 a única solução de uma equação, por exemplo. Então $S = 6$ e $P = 9$: $x^2 - 6x + 9 = 0$, por exemplo.

2.5. Se uma equação não tem soluções, então o binômio discriminante é negativo. Seja $a = 1$, $b = 0$ e $c = 12$, então $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 12 = -48 < 0$.

$$x^2 + 12 = 0, \text{ por exemplo.}$$

2.6. Se as soluções são -5 e 0, então $S = -5$ e $P = 0$:

$$x^2 + 5x = 0, \text{ por exemplo.}$$

3.

$$3.1. \quad \left. \begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ a &= -2, b = -4, c = 6 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \Delta &= (-4)^2 - 4 \times (-2) \times 6 = \\ &= 64 > 0 \end{aligned}$$

Como o binômio discriminante é positivo, a equação tem duas soluções reais distintas.

$$\begin{aligned} 3.2. \quad -2x^2 - 4x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2 \times (-2)} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{4 \pm 8}{-4} \\ \Leftrightarrow x &= 1 \vee x = -3 \\ \text{C.S.} &= \{-3, 1\} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} 4.1. \quad 3(x^2 + x) &= 1 - x - x^2 \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 1 + x + x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 4 \times (-1)}}{2 \times 4} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{8} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-4 - \sqrt{32}}{8} \vee x = \frac{-4 + \sqrt{32}}{8} \\ \text{C.S.} &= \left\{ \frac{-4 - \sqrt{32}}{8}, \frac{-4 + \sqrt{32}}{8} \right\} \end{aligned}$$

4.2.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 10x &= (x + 4)^2 - 4 \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 10x - x^2 - 8x - 16 + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1 \pm 5}{2} \\ \Leftrightarrow x &= -3 \vee x = 2 \\ \text{C.S.} &= \{-3, 2\} \end{aligned}$$

4.3.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x}{5} &= 7 + x \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x &= 35 + 5x \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 35 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-35)}}{2 \times 1} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2 \pm 12}{2} \\ \Leftrightarrow x &= -5 \vee x = 7 \\ \text{C.S.} &= \{-5, 7\} \end{aligned}$$

5. Seja m a idade atual da Mafalda.

$$m(m+7) = 228$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 7m - 228 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 1 \times (-228)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-7 \pm \sqrt{961}}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-7 \pm 31}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = -19 \vee m = 12$$

Como $m > 0$, $m = 12$.

R.: A Mafalda tem 12 anos.

6. Calculemos x , conhecendo a área do retângulo $[ABCD]$:

$$(6+x-1)(3+x) = 48$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(3+x) = 48$$

$$\Leftrightarrow 3x + x^2 + 15 + 5x = 48$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x - 33 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 1 \times (-33)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{196}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm 14}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -11 \vee x = 3$$

x não pode tomar valores negativos, logo $x = 3$.

O retângulo $[DEFG]$ tem 3 dm de altura e 2 dm de largura:

$$A_{[DEFG]} = 3 \times 2 \Leftrightarrow A_{[DEFG]} = 6$$

Assim, podemos concluir que o retângulo $[DEFG]$ tem 6 dm² de área.

7. Se as equações apresentadas só têm uma solução, então o binómio discriminante de cada uma delas é igual a zero:

7.1. $x^2 - 3x + k = 0 \quad a = 1, b = -3, c = k$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times k$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 9 - 4k$$

$$\text{Então: } 9 - 4k = 0$$

$$\Leftrightarrow -4k = -9$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{9}{4}$$

7.2. $-kx^2 - 5x = 2k, k \neq 0$

$$\Leftrightarrow -kx^2 - 5x - 2k = 0, k \neq 0$$

$$a = -k, b = -5, c = -2k$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-k) \times (-2k)$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 25 - 8k^2$$

Então:

$$25 - 8k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -8k^2 = -25$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{25}{8}$$

$$\Leftrightarrow k = -\sqrt{\frac{25}{8}} \vee k = \sqrt{\frac{25}{8}}$$

9.

9.1.
$$\left. \begin{array}{l} h(x) = -x^2 + 8x + 40 \\ x = 0 \end{array} \right\} h(0) = 40$$

R.: Os pilares da arcada têm 40 metros de altura.

- 9.2. O arco encontra-se assente em dois pilares, cada um com 40 metros de altura (pela alínea anterior). Então, vamos calcular os valores de x para os quais a altura do arco é de 40 metros:

$$-x^2 + 8x + 40 = 40$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-x + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee -x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$$

R.: O arco tem 8 metros de largura.

Unidade 4 – Circunferência

Praticar – páginas 53 a 57

1.

Afirmação	1	2	3	4	5	6
Ilustração	I	V	III	II	IV	VI

20 2.

- 2.1. a) Por exemplo, AF e VF .

b) Por exemplo, VT e QR .

c) Por exemplo, RS e ST .

d) Por exemplo, PV e SD .

- 2.2. a) Por exemplo, VTE e TSD .

b) Por exemplo, ABC e PQR .

- 2.3. a) Por exemplo, VT .

b) Por exemplo, ET .

c) Por exemplo, RS .

d) Por exemplo, PF .

- 2.4. a) O plano VTS é paralelo ao plano FED porque contém duas retas concorrentes, VT e TS , que são paralelas ao plano FED (a reta VT é paralela ao plano FED porque é paralela à reta FE que está

contida nesse plano; a reta TS é paralela ao plano FED porque é paralela à reta ED que está contida nesse plano).

- b) A reta VF é perpendicular ao plano BCD porque é perpendicular às retas AF e FE , que são concorrentes e estão contidas no plano BCD (as retas VF e AF são perpendiculares porque contêm os segmentos de reta $[VF]$ e $[AF]$ que, sendo lados adjacentes de um retângulo são perpendiculares. Da mesma forma provamos que as retas VF e FE são perpendiculares).

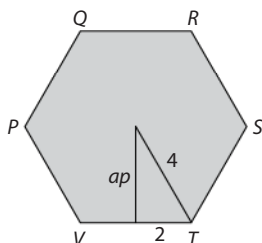
- 2.5. O prisma é hexagonal regular, portanto as suas faces laterais são seis retângulos equivalentes, cada um deles com 4 cm de largura.

$$A_{\text{lateral}} = 6 \times (4 \times 12) = 288$$

R.: A área lateral do prisma é 288 cm².

- 2.6. $V_{\text{Prisma}} = Ab \times h$

$$Ab = \frac{P}{2} \times ap$$



Para determinar o apótema do hexágono recorreremos ao teorema de Pitágoras.

$$4^2 = ap^2 + 2^2$$

$$\Leftrightarrow ap^2 = 16 - 4$$

$$\Leftrightarrow ap^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow ap = \pm\sqrt{12}$$

Como $ap > 0$, então $ap = \sqrt{12}$.

Assim,

$$Ab = \frac{6 \times 4}{2} \times \sqrt{12} = 12\sqrt{12}$$

Logo,

$$V_{\text{Prisma}} = 12\sqrt{12} \times 12$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{Prisma}} = 144\sqrt{12}$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{Prisma}} \approx 499$$

R.: $V \approx 499 \text{ cm}^3$

- 20 3. De forma a regar a maior área possível do jardim, a família Antunes colocará o aspersor com bico de 90° na esquina do jardim e o aspersor com bico de 270° no centro do terreno, colado à casa. Sabendo que

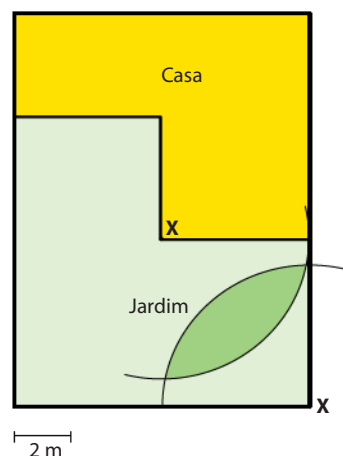
ambos têm 5 metros de alcance e que 1 cm no papel corresponde a 2 metros na realidade, então:

$$1 \text{ cm} \text{ ————— } 2 \text{ m}$$

$$x \text{ ————— } 5 \text{ m}$$

$$x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2,5$$

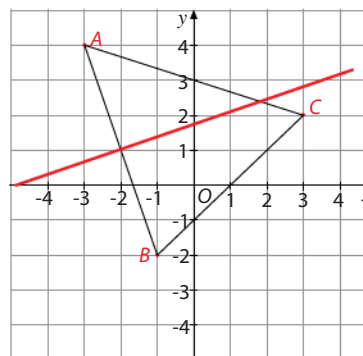
Cada um dos aspersores, no desenho, tem um alcance de 2,5 cm. Vamos marcar a área pedida no desenho, utilizando régua e compasso:



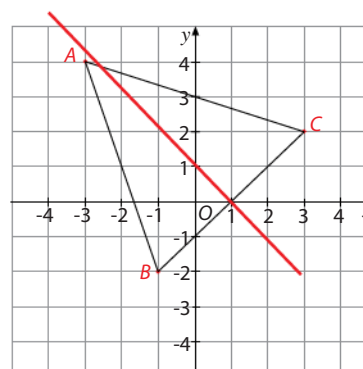
20 4.

- 4.1. $A(-3, 4)$, $B(-1, -2)$, $C(3, 2)$

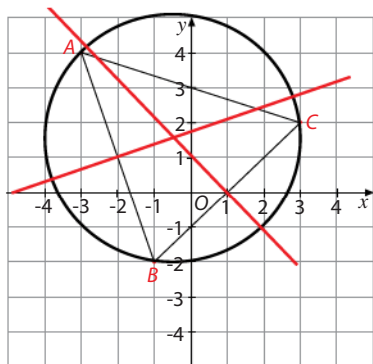
- 4.2. a)



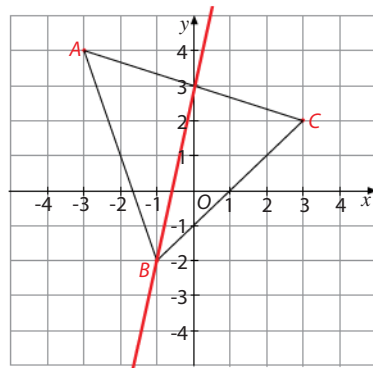
- b)



- c) O centro da circunferência que circunscreve o triângulo $[ABC]$ corresponde ao ponto de interseção das mediatrizes dos lados desse triângulo.



4.3.



5.

- 5.1. A tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência. Então, o ângulo ACB tem 90° de amplitude.
- 5.2. Calculemos o valor de x , aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[ABC]$:

$$x^2 = 17^2 - 14^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 289 - 196$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 93$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{93} \vee x = \sqrt{93}$$

Como $x > 0$, então $x = \sqrt{93}$.

a) Como $P = 2 \times \pi \times r$ então $P = 2\sqrt{93} \pi$.

R.: A circunferência tem $(2\sqrt{93} \pi)$ cm de perímetro.

b) $A = \frac{b \times h}{2}$

$$A = \frac{14 \times \sqrt{93}}{2} \Leftrightarrow A = 7\sqrt{93}$$

R.: O triângulo $[ABC]$ tem $(7\sqrt{93})$ cm² de área.

6.

- 6.1. Arcos compreendidos entre cordas paralelas são geometricamente iguais. Assim, o arco EH tem 68° de amplitude.

6.2. $\widehat{HG} = 360^\circ - 68^\circ - 68^\circ - 100^\circ \Leftrightarrow \widehat{HG} = 124^\circ$

7. $\widehat{BOA} = 360^\circ - 224^\circ \Leftrightarrow \widehat{BOA} = 136^\circ$

O ângulo BOA tem 136° de amplitude. A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Então, o arco AB , representado a vermelho, tem 136° de amplitude.

8.

8.1. Comprimento do arco = $\frac{x \times \pi \times r}{180}$ } Comprimento do arco = $\frac{250\pi}{180}$
 $r = 5$ } $\Leftrightarrow$ Comprimento do arco = $\frac{25}{18}\pi$
 $x = 50^\circ$

R.: O arco AB tem $\left(\frac{25}{18}\pi\right)$ cm de comprimento.

8.2.

Comprimento do arco = $\frac{x \times \pi \times r}{180}$ } Comprimento do arco = $\frac{700\pi}{180}$
 $r = 7$ } $\Leftrightarrow$ Comprimento do arco = $\frac{35}{9}\pi$
 $x = 100^\circ$

R.: O arco AB tem $\left(\frac{35}{9}\pi\right)$ cm de comprimento.

9.

9.1. Área do setor circular = $\frac{x \times \pi \times r^2}{360}$ } Área do setor circular = $\frac{720\pi}{360}$
 $r = 4$ } $\Leftrightarrow$ Área do setor circular = 2π
 $x = 45^\circ$

R.: O setor circular tem (2π) cm² de área.

$$\left. \begin{array}{l} \text{9.2. Área do setor} \\ \text{circular} = \frac{x \times \pi \times r^2}{360} \\ r = 2 \\ x = 145^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Área do setor} \\ \text{circular} = \frac{580\pi}{360} \\ \Leftrightarrow \text{Área do setor} \\ \text{circular} = \frac{29}{18}\pi \end{array}$$

R.: O setor circular tem $\left(\frac{29}{18}\pi\right)$ cm² de área.

$$\left. \begin{array}{l} \text{9.3. Área do setor} \\ \text{circular} = \frac{x \times \pi \times r^2}{360} \\ r = 12 \\ x = 304^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Área do setor} \\ \text{circular} = \frac{43776\pi}{360} \\ \Leftrightarrow \text{Área do setor} \\ \text{circular} = \frac{608}{5}\pi \end{array}$$

R.: O setor circular tem $\left(\frac{608}{5}\pi\right)$ cm² de área.

$$\begin{aligned} \text{10.} \quad 4,19 &= \frac{60\pi \times r}{180} \\ \Leftrightarrow 6\pi \times r &= 75,42 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{12,57}{\pi} \\ \Leftrightarrow r &\approx 4 \end{aligned}$$

R.: O raio da circunferência tem, aproximadamente, 4 metros de comprimento.

11. Ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência têm a mesma amplitude. Assim, $\hat{a} = 42^\circ$. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente. Então, $\hat{b} = 84^\circ$.

12.

12.1. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente. Então, $\hat{\alpha} = 162^\circ$.

12.2. Ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência têm a mesma amplitude. Então, $\hat{\alpha} = 63^\circ$.

12.3. Um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto. Podemos calcular α sabendo que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° .
 $\hat{\alpha} = 180^\circ - 90^\circ - 26^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 64^\circ$

12.4. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Como ângulos verticalmente opostos têm a mesma amplitude, então:
 $\hat{\alpha} = 180^\circ - 46^\circ - 35^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 99^\circ$

12.5. A soma das amplitudes dos ângulos opostos internos de um quadrilátero inscrito numa circunferência é 180° . Então:
 $\hat{\alpha} = 180^\circ - 69^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 111^\circ$

12.6. Começamos por calcular a amplitude do ângulo ao centro representado:
 $360^\circ - 273^\circ = 87^\circ$
 O triângulo representado é isósceles (visto que dois dos lados do triângulo correspondem a raios da circunferência). Sabendo que a lados de igual comprimento se opõem ângulos de igual amplitude e que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então:

$$\hat{\alpha} = \frac{180^\circ - 87^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 46,5^\circ$$

12.7. Ângulos verticalmente opostos têm a mesma amplitude. Sabemos que o triângulo representado (no qual um dos ângulos internos está representado por α) é isósceles (visto que dois dos lados do triângulo correspondem a raios da circunferência). Sabendo que a lados de igual comprimento se opõem ângulos de igual amplitude e que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é de 180° , então:

$$\hat{\alpha} = \frac{180^\circ - 75^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 52,5^\circ$$

12.8. O ângulo suplementar do ângulo com 137° de amplitude, tem 43° de amplitude ($137^\circ + 43^\circ = 180^\circ$). A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente. Assim:

$$\hat{\alpha} = \frac{43^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 21,5^\circ$$

12.9. Ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência têm a mesma amplitude. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então:
 $\hat{\alpha} = 180^\circ - 45^\circ - 63^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 72^\circ$

13. α e β são ângulos excêntricos. Assim:

$$\hat{\alpha} = \frac{85^\circ + 42^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 63,5^\circ$$

$$\hat{\beta} = \frac{85^\circ - 42^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\beta} = 21,5^\circ$$

14.

- 14.1. Um hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros.

Deste modo, sabemos que o raio da circunferência tem 6 cm de comprimento.

O segmento de reta $[AD]$ é um diâmetro da circunferência, logo $\overline{AD} = 12$ cm.

- 14.2. Utilizando o teorema de Pitágoras:

$$ap^2 + 3^2 = 6^2$$

$$\Leftrightarrow ap^2 = 36 - 9$$

$$\Leftrightarrow ap^2 = 27$$

$$\Leftrightarrow ap = -\sqrt{27} \vee ap = \sqrt{27}$$

Como $ap > 0$, então $ap = \sqrt{27}$.

R.: O apótema do hexágono tem $\sqrt{27}$ cm de comprimento.

- 14.3. Já sabemos (pela alínea 13.1.) que a circunferência tem 6 cm de raio.

$$A_{\text{círculo}} = \pi \times 6^2 \Leftrightarrow A_{\text{círculo}} = 36\pi$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{\text{hexágono}} = \frac{P}{2} \times ap \\ P = 36 \\ ap = \sqrt{27} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} A_{\text{hexágono}} = \frac{36}{2} \times \sqrt{27} \\ A_{\text{hexágono}} = 18\sqrt{27} \end{array} \right\}$$

R.: A área do círculo não ocupada pelo hexágono é $(36\pi - 18\sqrt{27})$ cm².

15.

$$\left. \begin{array}{l} S = (n - 2) \times 180^\circ \\ n = 20 \end{array} \right\} S = 3240^\circ$$

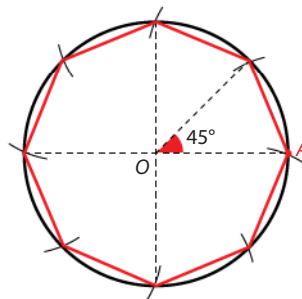
$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \\ n = 20 \end{array} \right\} \alpha = 162^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{\text{ext}} = \frac{360^\circ}{n} \\ n = 20 \end{array} \right\} \alpha_{\text{ext}} = 18^\circ$$

16.

$$16.1. 360^\circ : 8 = 45^\circ$$

Na circunferência, devemos traçar o raio $[OA]$ e, com o transferidor, traçar um ângulo de amplitude 45° para determinar o outro vértice do octógono. Depois basta usar o compasso e desenhar o polígono.



$$16.2. \left. \begin{array}{l} \alpha_{\text{int}} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \\ n = 8 \end{array} \right\} \alpha_{\text{int}} = 135^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{\text{ext}} = \frac{360^\circ}{n} \\ n = 8 \end{array} \right\} \alpha_{\text{ext}} = 45^\circ$$

Cada um dos ângulos internos do octógono tem 135° de amplitude e cada um dos ângulos externos tem 45° de amplitude.

20 17.

A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente. Assim, $\hat{\alpha} = 56^\circ$.

Os ângulos α e ε são suplementares. Então:

$$\hat{\varepsilon} = 180^\circ - 56^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{\varepsilon} = 124^\circ$$

O triângulo $[ABD]$ é isósceles. Como a lados de igual comprimento se opõem ângulos de igual amplitude, então $\hat{\delta} = 28^\circ$.

Um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto, portanto $\hat{\gamma} = 90^\circ - 28^\circ \Leftrightarrow \hat{\gamma} = 62^\circ$.

O triângulo $[ACD]$ é isósceles. Como a lados de igual comprimento se opõem ângulos de igual amplitude, então $\hat{\beta} = 62^\circ$.

18.

Se o apótema do quadrilátero regular (cujos quatro lados têm o mesmo comprimento) tem 15 cm de comprimento, então podemos deduzir que o lado do quadrilátero tem 30 cm de comprimento.

$$A = 30 \times 30$$

$$\Leftrightarrow A = 900$$

R.: O quadrilátero tem 900 cm² de área.

$$19. \left. \begin{array}{l} \hat{\alpha} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \\ n = 5 \end{array} \right\} \hat{\alpha} = 108^\circ$$

O triângulo ABC é isósceles e, sabendo que a lados de igual comprimento se opõem ângulos com a mesma amplitude, então:

$$\hat{\beta} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\beta} = 36^\circ$$

20. O erro está no passo em que se dividem ambos os membros da igualdade por $x - 1$ pois, como $x = 1$, $x - 1 = 0$, motivo pelo qual a divisão não pode ser efetuada.

21.

21.1. a) Por exemplo, AB e BC .

b) Por exemplo, AB e BI .

c) Por exemplo, AI e BC .

21.2. Sabemos que dois planos são paralelos se e só se existir um par de retas concorrentes em cada plano, que sejam paralelas duas a duas.

Assim, como as retas AC e BD do plano ABC são concorrentes e paralelas, respetivamente, às retas EG e FH do plano AFG , podemos concluir que os planos ABC e EFG são paralelos.

21.3. O volume do tronco resulta da diferença entre o volume da pirâmide I, de base $ABCD$ e vértice I, e o volume da pirâmide II, de base $EFGH$ e vértice I.

$$\left. \begin{array}{l} V_I = \frac{A_b \times h}{3} \\ A_b = 12 \times 12 = 144 \\ h = 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} V_I = \frac{144 \times 20}{3} \\ \Leftrightarrow V_I = 960 \text{ cm}^3 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} V_{II} = \frac{A_b \times h}{3} \\ A_b = 3 \times 3 = 9 \\ h = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} V_{II} = \frac{9 \times 5}{3} \\ \Leftrightarrow V_{II} = 15 \text{ cm}^3 \end{array}$$

$$V_{\text{tronco}} = V_I - V_{II}$$

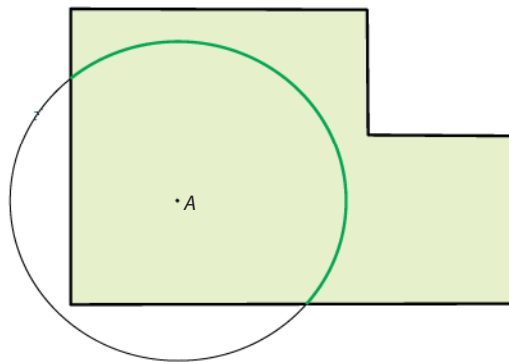
$$V_{\text{tronco}} = 960 \text{ cm}^3 - 15 \text{ cm}^3 \Leftrightarrow V_{\text{tronco}} = 945 \text{ cm}^3$$

R.: O tronco da pirâmide tem 945 cm^3 de volume.

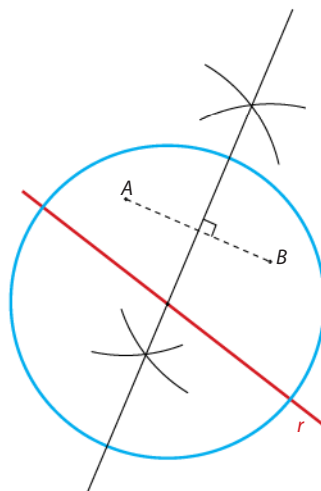
- 20 22. De acordo com a escala, 1 centímetro no desenho corresponde a 100 centímetros na realidade. Ora,

3 metros (ou 300 centímetros) na realidade serão representados por 3 centímetros no esquema:

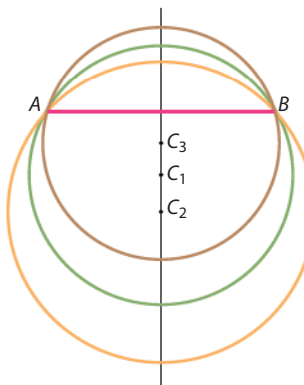
$$\frac{300}{100} = 3.$$



- 20 23. Para determinar o centro da circunferência devemos construir a mediatriz do segmento de reta $[AB]$ e intersecá-la com a reta r . Depois, basta desenhar a circunferência com o auxílio do compasso.



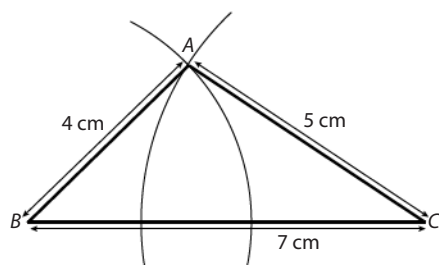
- 20 24.
24.1. e 24.2.



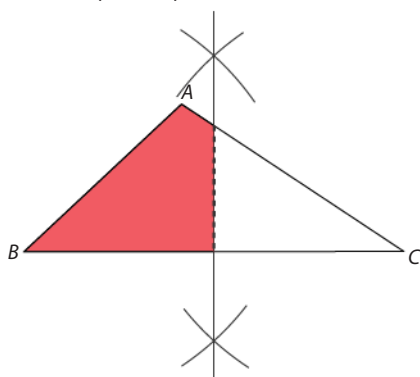
- 24.3. "Os centros das circunferências que passam por A e B pertencem à mediatriz do segmento de reta $[AB]$ ".

20 25.

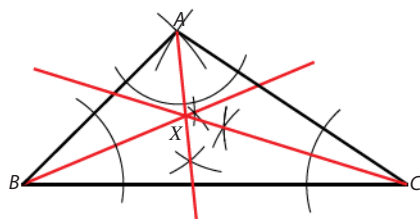
25.1.



25.2. Devemos construir a mediatriz do segmento de reta $[BC]$ e, depois, colorir a vermelho, os pontos do triângulo que se encontram mais próximos do ponto B do que do ponto C :



25.3. Para determinar o incentro do triângulo devemos interseccionar as bissetrizes dos seus ângulos internos:

**26.**

26.1. Como comprimento do arco $= \frac{x \times \pi \times r}{180}$, temos:

$$\text{Comprimento do arco} = \frac{480\pi}{180}$$

$$\Leftrightarrow \text{Comprimento do arco} = \frac{8\pi}{3}$$

R.: O arco menor AB tem, aproximadamente, 8,38 cm de comprimento.

26.2. $36^\circ - 80^\circ = 280^\circ$

O setor circular colorido a azul tem 280° de amplitude.

$$\text{Área do setor circular} = \frac{x \times \pi \times r^2}{360}$$

Assim,

$$\text{Área do setor circular} = \frac{10\,080\pi}{360}$$

$$\Leftrightarrow \text{Área do setor circular} = 28\pi$$

R.: O setor circular colorido a azul tem (28π) cm^2 de área.

27.

A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente. Assim, o setor circular representado tem 60° de amplitude.

$$\text{Área do setor circular} = \frac{x \times \pi \times r^2}{360}$$

$$\text{Área do setor circular} = \frac{6000\pi}{360}$$

$$\Leftrightarrow \text{Área do setor circular} = \frac{50}{3}\pi$$

R.: O setor circular colorido tem $\left(\frac{50}{3}\pi\right)$ cm^2 de área.

28.

28.1. Arcos compreendidos entre cordas paralelas são congruentes, por isso, o arco EF é geometricamente igual ao arco GB .

28.2. A tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência. Sendo A o centro da circunferência, temos que a reta EB é perpendicular à reta r .

28.3. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo o arco menor FL tem 60° de amplitude. Assim:

$$\widehat{FH} = 180^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{FH} = 120^\circ$$

28.4. Como as retas HL e FG são perpendiculares, então a amplitude do arco FH é igual à amplitude do arco HG (que sabemos, pela alínea anterior, ser de 120°).

Como comprimento do arco $= \frac{x \times \pi \times r}{180}$, então

$$\text{Comprimento do arco} = \frac{600\pi}{180}$$

$$\Leftrightarrow \text{Comprimento do arco} = \frac{10\pi}{3}$$

R.: O arco HG tem, aproximadamente, 10,47 cm de comprimento.

28.5. Sabemos que as retas HL e FG são perpendiculares e que as retas EB e FG são paralelas; portanto, as retas HL e EB também são perpendiculares. Assim, o ângulo BAH é reto e, portanto, o triângulo $[HBA]$ é retângulo. Sendo A o centro da circunferência, então os segmentos de reta $[AB]$ e $[AH]$ são raios da circunferência e, portanto, têm o mesmo comprimento. Então, o triângulo $[HBA]$ é isósceles.

29.

29.1. O segmento de reta $[AC]$ é um diâmetro, logo o arco AC tem 180° de amplitude. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Então, $\widehat{BC} = 60^\circ$.
 $\widehat{AB} = 180^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{AB} = 120^\circ$

29.2. Se as cordas $[PB]$ e $[AC]$ são paralelas, então os arcos compreendidos entre elas são geometricamente iguais, ou seja, $\widehat{AP} = \widehat{BC} = 60^\circ$.

O segmento de reta $[AC]$ é um diâmetro, logo o arco AC tem 180° de amplitude.

$$\widehat{CBP} = 180^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{CBP} = 120^\circ$$

29.3. A reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência. Assim, o ângulo OAD é reto.

Sabendo que o ângulo BAD é agudo:

$$\widehat{BAD} = 90^\circ - 30^\circ \Leftrightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ$$

20 30.

30.1. A reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência. Assim, o ângulo CEA é reto, ou seja, tem 90° de amplitude.

30.2. O triângulo $[ADE]$ é isósceles, pois dois dos seus lados são raios da circunferência (segmentos de reta $[AD]$ e $[AE]$). Num triângulo, a lados de igual comprimento opõem-se ângulos de igual amplitude. Assim, os ângulos ADE e DEA são geometricamente iguais.

30.3. a) Tendo em conta a alínea anterior, sabemos que os ângulos ADE e DEA são geometricamente iguais. Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então:

$$\widehat{ADE} = \frac{180^\circ - 126^\circ}{2} \Leftrightarrow \widehat{ADE} = 27^\circ$$

b) A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, por isso, o arco menor DE tem 126° de amplitude.

$$\widehat{DE} = 360^\circ - 126^\circ \Leftrightarrow \widehat{DE} = 234^\circ$$

R.: O arco maior DE tem 234° de amplitude.

c) O ângulo β é excêntrico e o seu vértice encontra-se no exterior da circunferência. Já sabemos, pelas alíneas anteriores, a amplitude do arco maior DE e do arco menor DE . Assim:

$$\hat{\beta} = \frac{234^\circ - 126^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\beta} = 54^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{x \times \pi \times r}{180} \\ r = 10 \\ x = 126^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{1260\pi}{180} \\ \Leftrightarrow \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = 7\pi \end{array}$$

R.: O arco menor DE tem (7π) cm de comprimento.

31.

31.1. O setor circular representado tem 120° de amplitude.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Área do setor} \\ \text{circular} = \frac{x \times \pi \times r^2}{360} \\ r = 6 \\ x = 120^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Área do setor} \\ \text{circular} = \frac{4320\pi}{360} \\ \Leftrightarrow \text{Área do setor} \\ \text{circular} = 12\pi \end{array}$$

R.: O setor circular tem (12π) cm² de área.

31.2. O hexágono regular divide-se em seis triângulos equiláteros. Vamos calcular a área de cada um deles, começando por determinar o apótema, utilizando o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} ap^2 + 3^2 &= 6^2 \\ \Leftrightarrow ap^2 &= 36 - 9 \\ \Leftrightarrow ap^2 &= 27 \\ \Leftrightarrow ap &= -\sqrt{27} \vee ap = \sqrt{27} \end{aligned}$$

Como $ap > 0$, então $ap = \sqrt{27}$.

$$A_{\Delta} = \frac{6 \times \sqrt{27}}{2} \Leftrightarrow A_{\Delta} = 3\sqrt{27}$$

Agora, podemos calcular a área pedida:

$$\begin{aligned} A &= (\pi \times 6^2) - 12\pi - 4 \times 3\sqrt{27} \\ \Leftrightarrow A &= 36\pi - 12\pi - 12\sqrt{27} \\ \Leftrightarrow A &= 24\pi - 12\sqrt{27} \end{aligned}$$

A área interior à circunferência que não é ocupada nem pelo hexágono nem pelo setor circular é $(24\pi - 12\sqrt{27})$ cm².

20 32.

- 32.1. Seja y o ângulo suplementar do ângulo x representado:

$$\hat{y} = \frac{90^\circ + 50^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{y} = 70^\circ$$

$$\text{Então, } \hat{x} = 180^\circ - 70^\circ \Leftrightarrow \hat{x} = 110^\circ$$

32.2. $\hat{x} = \frac{80^\circ + 55^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{x} = 67,5^\circ$

32.3. $\hat{x} = \frac{135^\circ - 35^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{x} = 50^\circ$

- 32.4. Para determinar a amplitude do ângulo excêntrico x , é necessário calcular a amplitude do arco menor desconhecido. Para tal, utilizamos o outro ângulo excêntrico representado, com 80° de amplitude. Seja a a amplitude do arco menor referido:

$$80^\circ = \frac{128^\circ + \hat{a}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \hat{a} = 160^\circ - 128^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{a} = 32^\circ$$

$$\hat{x} = \frac{128^\circ - 32^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{x} = 48^\circ$$

20 33.

33.1. $360^\circ : 5 = 72^\circ$

O triângulo $[RSO]$ é isósceles (dois dos seus lados são raios da circunferência).

O ângulo ao centro SOR tem 72° de amplitude.

Então:

$$\hat{RSO} = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{RSO} = 54^\circ$$

O ângulo TPQ é um dos ângulos internos do pentágono regular:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{TPQ} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \\ n = 5 \end{array} \right\} \hat{TPQ} = 108^\circ$$

- 33.2. O hexágono pode ser decomposto em cinco triângulos, cada um com 12 unidades de área.

$$A = \pi \times 8^2 - 5 \times 12 \Leftrightarrow A = 64\pi - 60$$

R.: A zona azul da figura tem, aproximadamente, 141,06 unidades de área.

34.

- 34.1. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

Então, o arco menor CE tem 78° de amplitude.

Deste modo, sabemos que o arco ECB tem 258° de amplitude ($180^\circ + 78^\circ = 258^\circ$).

Pelo raciocínio anterior, o ângulo inscrito α tem 129° de amplitude.

- 34.2. Pela alínea anterior, sabemos que o arco ECB tem 258° de amplitude, logo o arco BGE tem 102° de amplitude ($360^\circ - 258^\circ = 102^\circ$).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{x \times \pi \times r}{180} \\ r = 6 \\ x = 102^\circ \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{612\pi}{180} \\ \Leftrightarrow \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{17}{5}\pi \end{array} \right.$$

R.: O arco ECB tem, aproximadamente, 10,68 cm.

20 35.

Vamos começar por calcular a área do setor circular da base da parte do cilindro representada:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Área do setor} \\ \text{circular} = \frac{x \times \pi \times r^2}{360} \\ r = 26 \\ x = 24^\circ \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Área do setor} \\ \text{circular} = \frac{16\,224\pi}{360} \\ \Leftrightarrow \text{Área do setor} \\ \text{circular} = \frac{676}{15}\pi \end{array} \right.$$

Calculando o volume do sólido representado:

$$V = \frac{676}{15}\pi \times 8 \Leftrightarrow V = \frac{5408}{15}\pi$$

R.: O sólido tem $\left(\frac{5408}{15}\pi\right) \text{ cm}^3$ de volume.

20 36.

- 36.1. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Então, o arco DB tem 64° de amplitude.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{x \times \pi \times r}{180} \\ r = 10 \\ x = 64^\circ \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{6400\pi}{180} \\ \Leftrightarrow \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{320}{9}\pi \end{array} \right.$$

R.: O arco DB tem, aproximadamente, 111,7 cm de comprimento.

$$36.2. \left. \begin{array}{l} \widehat{DB} = 2\widehat{FG} \\ \widehat{DB} = \frac{320}{9}\pi \end{array} \right\} \widehat{FG} = \frac{320}{18}\pi \Leftrightarrow \widehat{FG} = \frac{160}{9}\pi$$

Calculando a amplitude do arco FG :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{x \times \pi \times r}{180} \\ r = 10 \\ \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{160}{9}\pi \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{160}{9}\pi = \frac{100x}{180}\pi \\ \Leftrightarrow \frac{160}{9} = \frac{5}{9}x \\ \Leftrightarrow x = 32^\circ \end{array}$$

R.: O arco FG tem 32° de amplitude.

$$36.3. \hat{\beta} = \frac{64^\circ - 32^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\beta} = 16^\circ$$

37.

37.1. O segmento de reta $[BC]$ é um diâmetro da circunferência, logo o arco BC tem 180° de amplitude. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo o arco menor BE tem 56° de amplitude. O arco CBE tem 236° de amplitude ($180^\circ + 56^\circ = 236^\circ$). Pelo raciocínio anterior, o ângulo β tem 118° de amplitude.

37.2. Se as cordas $[CD]$ e $[DE]$ forem lados consecutivos de um polígono regular, significa (pela alínea anterior) que os ângulos internos desse polígono têm 118° de amplitude. Vejamos se é possível isso acontecer:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\alpha} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \\ \hat{\alpha} = 118^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = 118^\circ \\ \Leftrightarrow \frac{360^\circ}{n} = 62^\circ \\ \Leftrightarrow n \approx 5,81 \end{array}$$

Como n não é um número inteiro, a afirmação é falsa.

38.

38.1. Como β é um ângulo inscrito na circunferência e o seu arco correspondente é $\widehat{CE}$, temos que:

$$\beta = \frac{\widehat{CE}}{2} = \frac{\widehat{CB} + \widehat{BE}}{2}.$$

Como $\widehat{BE}$ é o arco correspondente ao ângulo inscrito ECB e $\widehat{ECB} = 28^\circ$, $\widehat{BE} = 2 \times 28^\circ = 56^\circ$.

$$\text{Assim, } \beta = \frac{180^\circ + 56^\circ}{2} = \frac{236^\circ}{2} = 118^\circ.$$

38.2. Se as cordas $[CD]$ e $[DE]$ forem dois lados consecutivos de um polígono regular, então o ângulo CDE é um ângulo interno desse polígono.

Assim, sendo n o número de lados do polígono,

$$\begin{aligned} 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} &= 118^\circ \\ \Leftrightarrow 180^\circ - 118^\circ &= \frac{360^\circ}{n} \\ \Leftrightarrow 62^\circ &= \frac{360^\circ}{n} \\ \Leftrightarrow 62^\circ n &= 360^\circ \\ \Leftrightarrow n &= \frac{360^\circ}{62^\circ} \\ \Leftrightarrow n &\approx 5,8 \end{aligned}$$

Como $n \notin \mathbb{N}$, a afirmação é falsa.

39.

$$39.1. V_{\text{cilindro}} = A_b \times h$$

$$A_b = \pi \times r^2$$

$$A_b = 16\pi$$

Logo,

$$V_{\text{cilindro}} = 16\pi \times 8$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = 128\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi \times 64$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{esfera}} = \frac{256}{3} \pi (\approx 85,33\pi \text{ cm}^3)$$

R.: A embalagem com a forma de cilindro é a que tem maior capacidade.

$$39.2. 1,5 \ell = 1,5 \text{ dm}^3 = 1500 \text{ cm}^3$$

A embalagem em forma de cilindro tem aproximadamente, $402,12 \text{ cm}^3$ de capacidade e a embalagem em forma de esfera tem, aproximadamente, $268,08 \text{ cm}^3$ de capacidade.

R.: Nenhuma das embalagens tem capacidade para mais do que $1,5 \ell$ de sumo.

39.3. Vamos calcular a quantidade de cartão necessária à produção de cada uma das embalagens. Essa quantidade obtém-se calculando a área total das duas embalagens:

Cilindro:

$$V_{\text{Total}} = 2A_b + A_l$$

$$A_b = \pi \times r^2$$

$$A_b = \pi \times 4^2$$

$$\Leftrightarrow A_b = 16\pi$$

$$A_l = P_o \times 8$$

$$P_o = 2 \times \pi \times r$$

$$P_o = 2 \times \pi \times 4$$

$$\Leftrightarrow P_o = 8\pi$$

$$\text{Assim, } A_l = 8\pi \times 8 = 64\pi$$

Logo,

$$A_{\text{Total}} = 2 \times 16\pi + 64\pi$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{Total}} = 96\pi \text{ cm}^2$$

Esfera:

$$A_{\text{Total}} = 4\pi \times r^2$$

$$A_{\text{Total}} = 4\pi \times 4^2$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{Total}} = 64\pi \text{ cm}^2$$

Agora, calculemos a relação entre o volume e a quantidade de cartão necessário à produção de cada uma das embalagens representadas:

Cilindro:

$$\frac{128\pi}{96\pi} = \frac{128}{96} = \frac{4}{3}$$

Esfera:

$$\frac{\frac{256}{3}\pi}{64\pi} = \frac{256}{192} = \frac{4}{3}$$

Na relação entre o volume que transporta e a quantidade de cartão necessário à sua produção, as duas embalagens não diferem.

- 39.4. A embalagem em forma de cilindro tem $128\pi \text{ cm}^3$ de volume e é vendida a 1,28 €. Então:

$$\begin{aligned} 1,28\text{€} & \text{ ————— } 128\pi \text{ cm}^3 \\ x & \text{ ————— } 1 \text{ cm}^3 \\ x &= \frac{1,28 \times 1}{128\pi} = \frac{1,28}{128\pi} = \frac{0,01}{\pi} \end{aligned}$$

O pacote esférico tem $\frac{156}{3}\pi \text{ cm}^3$ de volume. Para ser vendido ao mesmo preço, temos:

$$\frac{256\pi}{3} \times \frac{0,01}{\pi} \approx 0,85$$

R.: O pacote esférico deve ser vendido a 0,85 € (para manter aproximadamente o mesmo preço por litro).

40. Todos os passos estão corretos, com exceção do passo $\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \Rightarrow 4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$.

De uma forma geral, $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b \vee a = -b$, pois

$$a^2 = b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = 0$$

$$\Rightarrow (a - b)(a + b) = 0$$

$$\Rightarrow a - b = 0 \vee a + b = 0$$

$$\Rightarrow a = b \vee a = -b$$

20 41.

- 41.1. A água entra em contacto com metade da área total do sólido.

Área total do cilindro em contacto com a água (só uma das bases é contabilizada).

$$\left. \begin{aligned} A_{T(\text{contacto})} &= \frac{A_b + A_l}{2} \\ A_b &= \pi \times 9^2 = 81\pi \\ A_l &= 18 \times (2\pi \times 9) = 324\pi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A_l &= \frac{81\pi + 324\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow A_l = \frac{405\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow A_l = 202,5\pi \end{aligned}$$

Área total da semiesfera em contacto com a água:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{4\pi \times r^2}{4} \\ r &= 9 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A &= \frac{4\pi \times 9^2}{4} \\ &\Leftrightarrow A = \frac{324\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow A = 81\pi \end{aligned}$$

Então, a área da superfície do recipiente em contacto com a água é:

$$\begin{aligned} A_{\text{sup}} &= \frac{405\pi}{2} + \frac{324\pi}{4} \Leftrightarrow A_{\text{sup}} = 202,5\pi + 81\pi \\ &\Leftrightarrow A_{\text{sup}} = 283,5\pi \end{aligned}$$

R.: A área da superfície do contentor em contacto com a água é $283,5\pi \text{ cm}^2$.

- 41.2. A quantidade de água dentro do recipiente corresponde a metade do volume do recipiente. Calculemos o volume do recipiente, calculando o volume do cilindro e da semiesfera.

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{cilindro}} &= A_b \times h \\ A_b &= \pi \times 9^2 = 81\pi \\ h &= 18 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} V_{\text{cilindro}} &= 81\pi \times 18 \\ &\Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = 1458\pi \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{semiesfera}} &= \frac{\frac{4}{3}\pi \times r^3}{2} \\ r &= 9 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} V_{\text{semiesfera}} &= \frac{\frac{4}{3}\pi \times 9^3}{2} \\ &\Leftrightarrow V_{\text{semiesfera}} = \frac{972\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow V_{\text{semiesfera}} = 486\pi \end{aligned}$$

Calculemos então, a quantidade de água introduzida:

$$V_{\text{recipiente}} = 1458\pi + 486\pi \Leftrightarrow V_{\text{recipiente}} = 1944\pi$$

$$V_{\text{água}} = \frac{1944\pi}{2} \Leftrightarrow V_{\text{água}} = 972\pi$$

Foram introduzidos $972\pi \text{ cm}^3$ de água no recipiente, como queríamos demonstrar.

- 41.3. Sabendo o volume da água introduzida, vamos calcular a altura do cilindro:

$$\left. \begin{aligned} V &= 972\pi \\ V &= A_b \times h \\ A_b &= \pi \times 9^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} V &= 81\pi \times h \\ &\Leftrightarrow h = 12 \end{aligned}$$

R.: A água dentro do recipiente tem 12 cm de altura.

- 41.4. Começemos por calcular a quantidade de água presente na semiesfera (sabemos que a altura da água na semiesfera é 9 cm). Assim, determinamos o volume de água na parte cilíndrica do contentor e, posteriormente, a altura desta.

$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \times r^3}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} V_{\text{semiesfera}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \times 9^3}{2}$$

$$r = 9 \quad \Leftrightarrow V_{\text{semiesfera}} = 486\pi$$

A quantidade de água na parte cilíndrica será então $972\pi - 486\pi = 486\pi$.

$$V_{\text{cilindro}} = A_b \times h$$

$$A_b = \pi \times r^2$$

$$A_b = \pi \times 9^2$$

$$\Leftrightarrow A_b = 81\pi$$

Assim, $V_{\text{cilindro}} = 81\pi \times h$ e, portanto,

$$81\pi \times h = 486\pi$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{486\pi}{81}$$

$$\Leftrightarrow h = 6\pi$$

Então, a altura da água é 15 cm ($9 + 6 = 15$).

R.: A água está a 15 cm de altura.

42.

- 42.1. Seja a a aresta do cubo.

$$V_{\text{Cubo}} = a^3$$

$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} A_b \times h$$

$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} \times a^2 \times a$$

$$\text{Assim, } V_{\text{Pedido}} = V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Pirâmide}}.$$

$$V_{\text{Pedido}} = a^3 - \frac{1}{3} a^3 = \frac{2}{3} a^3$$

$$\text{Ou seja, } V_{\text{Pedido}} = \frac{2}{3} V_{\text{Cubo}}.$$

$$\text{R.: } \frac{2}{3}$$

- 42.2. Sabemos que $\frac{2}{3} V_{\text{Cubo}} = 18$, ou seja,

$$\frac{2}{3} a^3 = 18$$

$$\Leftrightarrow 2a^3 = 54$$

$$\Leftrightarrow a^3 = \frac{54}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^3 = 27$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt[3]{27}$$

$$\Leftrightarrow a = 3$$

Logo, a aresta do cubo tem 3 cm.

- 42.3. Vamos determinar a medida do diâmetro da superfície esférica.

$$\text{Pelo teorema de Pitágoras, } \overline{DG}^2 = \overline{GH}^2 + \overline{DH}^2.$$

$$\text{Como } \overline{DH}^2 = \overline{DI}^2 + \overline{IH}^2, \text{ temos } \overline{DH}^2 = 3^2 + 3^2 = 18.$$

$$\text{Assim, } \overline{DG}^2 = 3^2 + 18$$

$$\Leftrightarrow \overline{DG}^2 = 9 + 18$$

$$\Leftrightarrow \overline{DG}^2 = 27$$

$$\Leftrightarrow \overline{DG} = \pm\sqrt{27}$$

$$\text{Como } \overline{DG} > 0, \text{ então } \overline{DG} = \sqrt{27}.$$

Então, como o raio da superfície esférica é metade do seu diâmetro, temos:

$$r = \frac{\overline{DG}}{2}, \text{ ou seja, } r = \frac{\sqrt{27}}{3}.$$

$$\text{Sabemos que } A_{\text{Superfície esférica}} = 4\pi r^2.$$

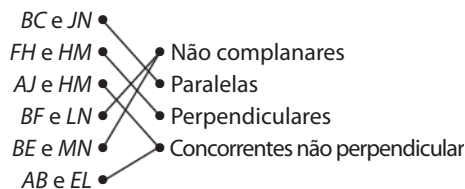
$$\text{Logo, } A_{\text{Superfície esférica}} = 4\pi \times \left(\frac{\sqrt{27}}{3}\right)^2 = 4\pi \times \frac{27}{9} = 27\pi.$$

$$\text{R.: } A = 27\pi \text{ cm}^2$$

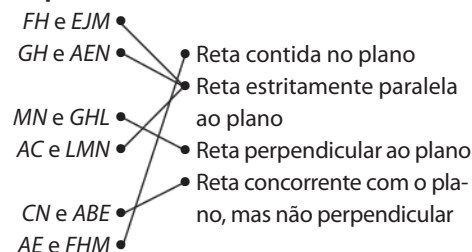
- 42.4. A reta BE é secante ao plano ADI. Logo, a afirmação falsa é a [C], isto é, a reta BE não tem nenhum ponto em comum com o plano ADI.

43.

- 43.1. Pares de retas Chave



- 43.2. Pares (reta, plano) Chave



- 43.3. a) Como $V_{\text{Cubo}} = a^3$, temos:

$$a^3 = 64$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt[3]{64}$$

$$\Leftrightarrow a = 4$$

$$\text{R.: } a = 4 \text{ cm}$$

- b) A altura da pirâmide [MNJLE] é igual à diferença entre a altura da pirâmide [ABCDE] e a aresta do cubo, ou seja, 8 cm ($12 - 4 = 8$).

$$\text{c) } V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} A_b \times h$$

Para determinar a área da base, vamos calcular $\overline{AB}$, recorrendo à semelhança de triângulos.

Os triângulos $[AEB]$ e $[JEL]$ são semelhantes, pelo critério AA de semelhança de triângulos.

Assim,

$$8 \text{ — } 2$$

$$12 \text{ — } x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12 \times 2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{24}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 8$$

Como $\overline{AB} = 2x$, temos que $\overline{AB} = 16$.

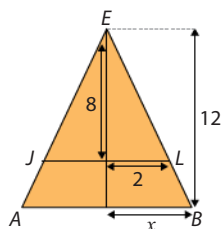
Logo, $A_{\text{base}} = 6^2 = 36$ e, portanto,

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 36 \times 8$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{pirâmide}} = \frac{288}{3}$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{pirâmide}} = 96$$

$$\text{R.: } V_{\text{pirâmide}} = 96 \text{ cm}^3$$



44.

44.1. Como o ponto A pertence ao eixo Ox , A tem ordenada nula.

Assim, $f(x) = 0$, ou seja, $-\frac{1}{2}x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

Logo, o ponto A tem coordenadas (6, 0).

Como o ponto B pertence ao eixo Oy , B tem abscissa nula.

$$\text{Assim, } f(0) = -\frac{1}{2} \times 0 + 3 = 3$$

Logo, o ponto B tem coordenadas (0, 3).

44.2. $A_{\text{cone}} = A_{\text{base}} + A_{\text{superfície lateral}}$

$$A_{\text{base}} = \pi r^2$$

$$\text{Como } r = \overline{OA}, A_{\text{base}} = \pi \times 6^2 = 36\pi$$

$$A_{\text{superfície lateral}} = \frac{P_{\text{base}}}{2} \times g$$

Como $P_{\text{base}} = 2\pi r$ e $r = \overline{OA}$, temos que

$$P_{\text{base}} = 2\pi \times 6 = 12\pi.$$

A geratriz do cone é $\overline{AB}$. Logo, pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{AB}^2 = 6^2 + 3^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 36 + 9$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 45$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \pm\sqrt{45}$$

Como $\overline{AB} > 0$, então $\overline{AB} = \sqrt{45}$.

$$\text{Logo, } A_{\text{superfície lateral}} = \frac{12\pi}{2} \times \sqrt{45} = 6\pi\sqrt{45}$$

$$\text{Assim, } A_{\text{cone}} = 36\pi + 6\pi\sqrt{45} \approx 239,5$$

$$\text{R.: } A \approx 239,5 \text{ u.a.}$$

45. O núcleo da Terra é o lugar geométrico dos pontos do espaço que se encontram a uma distância igual ou inferior a 2891 km do seu centro.

20 46. Traçamos o segmento de reta que une a árvore das aves exóticas ao lago das focas. Traçamos a mediatriz desse segmento.

Medimos a distância entre o reptilário e a encosta dos felinos.

Abrimos o compasso com essa distância e traçamos a circunferência com esse raio, cujo centro seja a aldeia dos macacos.

Intersectamos a mediatriz com a circunferência e assinalamos o ponto C.



47.

A. Verdadeira (triângulo retângulo em D, pois o ângulo BDC está inscrito numa semicircunferência).

B. Verdadeira (os segmentos de reta [AC] e [AD] são raios da circunferência).

C. Verdadeira (o arco DB tem 60° de amplitude que é o dobro da amplitude do ângulo inscrito nesse arco. Consequentemente, o arco CD tem 120° de amplitude: 180° - 60° = 120°).

D. Falsa (já vimos que o arco DB tem 60° de amplitude. O ângulo ao centro DAB tem a mesma amplitude do arco compreendido entre os seus lados, ou seja, 60°).

E. Verdadeira (num triângulo, a lados de igual comprimento opõem-se ângulos de igual amplitude. Assim, o ângulo ADC tem 30° de amplitude).

A afirmação C. é verdadeira.

- 20 48.** O arco da circunferência representado a azul tem 270° de amplitude. Assim, o ângulo ao centro marcado a azul também terá 270° de amplitude. Assim:

$$4x - 12 = 270$$

$$\Leftrightarrow 4x = 282$$

$$\Leftrightarrow x = 70,5$$

O arco da circunferência a azul tem 270° de amplitude. O seu comprimento corresponde a $(2y - 14)\pi$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{x \times \pi \times r}{180} \\ r = 8 \\ x = 270^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{2160}{180} \pi \\ \Leftrightarrow \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = 12\pi \end{array}$$

$$(2y - 14)\pi = 12\pi$$

$$\Leftrightarrow 2y - 14 = 12$$

$$\Leftrightarrow 2y = 26$$

$$\Leftrightarrow y = 13$$

20 49.

- 49.1.** As três circunferências da figura têm o mesmo raio: 4 cm (basta pensar que a figura 2 é uma representação de três frascos do mesmo produto). Assim, cada lado do triângulo $[ACE]$ mede 8 cm.

R.: O triângulo $[ACE]$ é equilátero.

- 49.2.** Vamos começar por calcular o comprimento do arco de uma das circunferências, com 120° de amplitude.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{x \times \pi \times r}{180} \\ r = 4 \\ x = 120^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{480}{180} \pi \\ \Leftrightarrow \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{8}{3} \pi \end{array}$$

Vamos calcular o comprimento da fita:

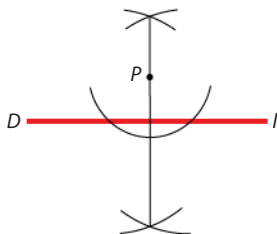
$$3 \times 8 + \frac{8}{3} \pi \times 3 = 24 + 8\pi$$

R.: Para envolver cada *pack*, é necessário, aproximadamente, 49,1 cm de fita.

50.

50.1. [D]

50.2.



51.

- 51.1.** Se BG é a mediatriz de $[ED]$, então o ponto I é equidistante dos pontos E e D . Assim, podemos garantir que $\overline{EI} = \overline{ID}$.

- 51.2. a)** O segmento de reta $[BI]$ une um dos vértices do pentágono ao ponto médio do lado oposto, portanto, divide o pentágono em dois quadriláteros com a mesma área.

O pentágono regular pode ser decomposto em cinco triângulos isósceles geometricamente iguais. Cada um deles tem 5 cm de base e 3,441 cm de altura.

$$A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{\Delta} = \frac{5 \times 3,441}{2} \Leftrightarrow A_{\Delta} = 8,6025$$

$$A_{\text{Pentágono}} = 5 \times A_{\Delta}$$

$$A_{\text{Pentágono}} = 5 \times 8,6025 \Leftrightarrow A_{\text{Pentágono}} = 43,0125$$

$$A_{[ABIE]} = \frac{43,0125}{2} \Leftrightarrow A_{[ABIE]} = 21,50625$$

R.: O quadrilátero $[ABIE]$ tem, aproximadamente, $21,5 \text{ cm}^2$ de área.

- b)** O arco BC tem 72° de amplitude ($360^\circ : 5 = 72^\circ$). Seja X o ponto de interseção da reta BG com a circunferência de centro F representada. Então, os arcos EX e XD têm a mesma amplitude (sabemos que BG é a mediatriz de $[ED]$, portanto divide o arco em dois arcos geometricamente iguais). Assim, o arco XD tem 36° de amplitude ($72^\circ : 2 = 36^\circ$).

Calculemos a amplitude do ângulo excêntrico α :

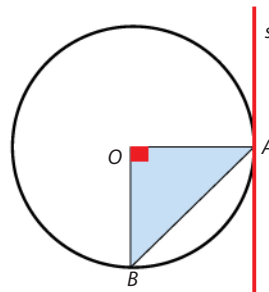
$$\hat{\alpha} = \frac{72^\circ - 36^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 18^\circ$$

Sabemos que os arcos AE e CD têm 72° de amplitude.

Calculemos a amplitude do ângulo excêntrico β :

$$\hat{\beta} = \frac{72^\circ + 72^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\beta} = 72^\circ$$

- 20 52.** Façamos um esboço dos dados do enunciado:



- 52.1. Como será fácil de verificar, o triângulo retângulo $[AOB]$ é também isósceles, pois dois dos seus lados correspondem a raios da circunferência. Num triângulo, a lados de igual comprimento opõem-se ângulos de igual amplitude, logo:

$$\widehat{ABO} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} \Leftrightarrow \widehat{ABO} = 45^\circ$$

- 52.2. É muito fácil constatar pelo desenho que o ângulo maior formado pelas duas retas tem 135° de amplitude ($45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$).

20 53.

$$53.1. \quad a) \quad \left. \begin{aligned} \hat{\alpha} &= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \\ n &= 12 \end{aligned} \right\} \hat{\alpha} &= 180^\circ - 30^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 150^\circ$$

$$b) \quad 360^\circ : 12 = 30^\circ$$

$$\widehat{AFK} = 10 \times 30^\circ \Leftrightarrow \widehat{AFK} = 300^\circ$$

- 53.2. Com os dados do enunciado devemos compreender que as retas AL , SR , NO e FG são paralelas e que as retas BC , ST , RP , QM e IH também são paralelas. Assim, a amplitude do ângulo CXP será a mesma que a amplitude do ângulo TPR . Vamos começar por calcular a amplitude de cada um dos ângulos internos do hexágono regular representado.

$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha} &= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \\ n &= 6 \end{aligned} \right\} \hat{\alpha} &= 180^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 120^\circ$$

$$\widehat{TPM} = 120^\circ, \text{ logo } \widehat{TPR} = 60^\circ.$$

Os ângulos TPR e CXP têm a mesma amplitude, portanto $\widehat{CXP} = 60^\circ$.

20 54.

$$54.1. \quad a) \quad \left. \begin{aligned} \alpha_{ext} &= \frac{360^\circ}{n} \\ n &= 3 \end{aligned} \right\} \alpha_{ext} &= 120^\circ$$

R.: Cada um dos ângulos externos do triângulo regular tem 120° de amplitude.

$$b) \quad \left. \begin{aligned} S &= (n - 2) \times 180^\circ \\ n &= 6 \end{aligned} \right\} S &= 4 \times 180^\circ \Leftrightarrow S = 720^\circ$$

R.: A soma das amplitudes dos ângulos internos do hexágono é 720° .

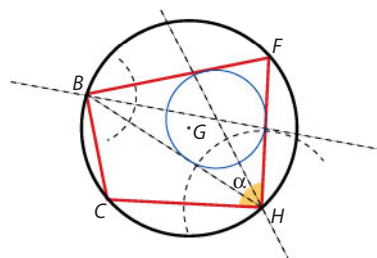
$$c) \quad 360^\circ : 3 = 120^\circ, \text{ logo } \widehat{BF} = 120^\circ.$$

$$360^\circ : 6 = 60^\circ, \text{ logo } \widehat{BC} = 60^\circ.$$

O arco CBF tem 180° de amplitude. A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do

arco compreendido entre os seus lados, logo o ângulo α tem 90° de amplitude.

- 54.2. Para inscrever uma circunferência num triângulo é necessário determinar o incentro do triângulo (I). Para determinar o incentro basta determinar o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo.



20 55.

A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Assim, o arco menor AE tem 124° de amplitude. Vamos calcular a amplitude do arco menor CB conhecendo a amplitude do ângulo excêntrico AFE :

$$133^\circ = \frac{\widehat{CB} + 124^\circ}{2}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{CB} = 266^\circ - 124^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{CB} = 142^\circ$$

O segmento de reta $[CE]$ é um diâmetro da circunferência, portanto:

$$\widehat{BE} = 180^\circ - 142^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BE} = 38^\circ$$

Então, o ângulo FCB tem 19° de amplitude ($19^\circ \times 2 = 38^\circ$).

56.

Se as três circunferências são geometricamente iguais duas a duas, então as três têm o mesmo raio. Assim sendo, o triângulo representado é equilátero, pois os segmentos de reta $[AC]$, $[AB]$ e $[BC]$ têm 16 cm de comprimento. Num triângulo, a lados de igual comprimento opõem-se ângulos de igual amplitude, logo, cada um dos ângulos internos do triângulo têm 60° de amplitude ($180^\circ : 3 = 60^\circ$). A região colorida corresponde à diferença entre a área do triângulo $[ABC]$ e as áreas dos setores circulares (um setor em cada circunferência e os três com a mesma área).

Para determinar a área do triângulo $[ABC]$ devemos determinar a sua altura. Para tal, podemos utilizar o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
 h^2 + 8^2 &= 16^2 \\
 \Leftrightarrow h^2 &= 256 - 64 \\
 \Leftrightarrow h^2 &= 192 \\
 \Leftrightarrow h &= -\sqrt{192} \vee h = \sqrt{192} \\
 \text{Como } h > 0, &\text{ então } h = \sqrt{192}. \\
 \text{Então:}
 \end{aligned}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{16 \times \sqrt{192}}{2} \Leftrightarrow A_{[ABC]} = 8\sqrt{192}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Área do setor} \\ \text{circular} = \frac{x \times \pi \times r^2}{360} \\ r = 8 \\ x = 60^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Área do setor} \\ \text{circular} = \frac{3840}{360} \pi \\ \Leftrightarrow \text{Área do setor} \\ \text{circular} = \frac{32}{3} \pi \end{array}$$

Podemos agora calcular a área da região colorida:

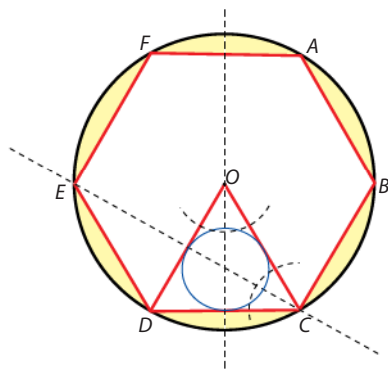
$$\begin{aligned}
 A &= 8\sqrt{192} - 3 \times \frac{32}{3} \pi \\
 \Leftrightarrow A &= 8\sqrt{192} - 32\pi
 \end{aligned}$$

R.: A região colorida tem, aproximadamente, 10,3 cm².

20 Testar – páginas 72 e 73

1.

- 1.1. Para inscrever uma circunferência num triângulo é necessário determinar o incentro do triângulo (*I*). Para determinar o incentro basta determinar o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo. Depois de o determinarmos, basta traçar a circunferência.



- 1.2. Um hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros. Sabendo que o triângulo *DOC* é equilátero e que, num triângulo, a lados de igual comprimento se opõem ângulos de igual amplitude, então os ângulos

internos do triângulo *DOC* têm 60° de amplitude (180° : 3 = 60°).

- a) $\widehat{DOC} = 60^\circ$
 b) $\widehat{CDO} = 60^\circ$
 c) O ângulo *FAB* é um dos ângulos internos do hexágono regular.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{FAB} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \\ n = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \widehat{FAB} = 180^\circ - 60^\circ \\ \Leftrightarrow \widehat{FAB} = 120^\circ \end{array}$$

- 1.3. A tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Então, o ângulo *OAP* tem 90° de amplitude.
- 1.4. Como o hexágono é regular, sabemos que os segmentos de reta [*FA*] e [*DC*] são paralelos. Arcos compreendidos entre retas paralelas são geometricamente iguais, portanto o arco menor *DF* é geometricamente igual ao arco menor *AC*.
- 1.5. A região sombreada corresponde ao lugar geométrico dos pontos do plano situados no exterior do hexágono regular [*ABCDEF*] e no interior da circunferência de raio [*OB*] e centro *O*.
- 1.6. O hexágono regular é decomposto em seis triângulos equiláteros e equivalentes, ou seja, com a mesma área.

Logo,

$$\begin{aligned}
 A_{\text{Hexágono}} &= 6 \times A_{\Delta} \\
 A_{\text{Hexágono}} &= 6 \times 4\sqrt{3} \Leftrightarrow A_{\text{Hexágono}} = 24\sqrt{3} \\
 A_O &= \pi r^2 \\
 A_O &= \pi \times 4^2 \Leftrightarrow A_O = 16\pi \\
 \text{Então, } A &= 16\pi - 24\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

R.: A região sombreada tem, aproximadamente, 9 cm² de área.

- 1.7. O arco *ABD* tem 180° de amplitude.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{x \times \pi \times r}{180} \\ r = 4 \\ x = 180^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{720\pi}{180} \\ \Leftrightarrow \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = 4\pi \end{array}$$

R.: O arco *ABD* tem (4π) cm de comprimento.

- 1.8. 360° : 6 = 60°
 Os arcos menores *FA* e *BC* têm, ambos, 60° de amplitude. Calculando a amplitude do ângulo excêntrico *APF*:

$$\widehat{APF} = \frac{60^\circ + 60^\circ}{2} \Leftrightarrow \widehat{APF} = 60^\circ$$

$$1.9. \left. \begin{array}{l} \hat{\alpha}_{ext} = \frac{360^\circ}{n} \\ n = 6 \end{array} \right\} \hat{\alpha}_{ext} = 60^\circ$$

R.: Cada um dos ângulos externos do hexágono tem 60° de amplitude.

1.10. a) Ponto F .

b) Triângulo $[OFE]$.

2. Consideremos as proposições:

a : "As vendas diminuem"

b : "A empresa vai à falência"

c : "O custo de produção sobe"

d : "Os preços sobem"

Sabemos que $a \Rightarrow b$, $c \Rightarrow d$ e $d \Rightarrow a$.

Assim, como $c \Rightarrow d$ e $d \Rightarrow a$, concluímos que $c \Rightarrow a$.

Logo, como $c \Rightarrow a$ e $a \Rightarrow b$, concluímos que $c \Rightarrow b$.

Por outro lado, sabemos que a empresa não foi à falência, $\sim b$.

Então, como $c \Rightarrow b$, temos $\sim b \Rightarrow \sim c$, ou seja, o custo de produção não sobe.

A opção correta é a [B].

3.

3.1. a) A reta HG é estritamente paralela ao plano ABF .

b) As retas são não coplanares.

3.2. Sabemos que dois planos são paralelos se e só se existir um par de retas concorrentes em cada plano, que sejam paralelas duas a duas.

Assim, como as retas EG e FH do plano HEF são concorrentes e paralelas, respetivamente, às retas AC e BD do plano DCB , podemos concluir que o plano HEF é paralelo ao plano DCB .

3.3. Sendo V o volume do prisma e V' o volume da pirâmide, temos:

$$V = Ab \times h$$

$$V' = \frac{1}{3} Ab \times h'$$

Como a altura da pirâmide é a terça parte da altura do prisma, $h' = \frac{1}{3} h$ e, portanto, $V' = \frac{1}{3} Ab \times \frac{1}{3} h = \frac{1}{9} Ab \times h$.

$$\text{Assim, } \frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{9} Ab \times \frac{1}{3} h}{Ab \times h} = \frac{1}{9}.$$

3.3. a) $V_{\text{sólido}} = V_{\text{Prisma}} + V_{\text{Pirâmide}}$

$$V_{\text{Prisma}} = Ab \times h$$

$$V_{\text{Prisma}} = 13^2 \times 18 = 3042$$

$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} Ab \times h'$$

$$\text{Como } h' = \frac{1}{3} h, h' = \frac{1}{3} \times 18 = \frac{18}{3} = 6.$$

Assim,

$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 13^2 \times 6 = 338$$

$$\text{Logo, } V_{\text{sólido}} = 3042 + 338 = 3380$$

$$\text{R.: } V_{\text{sólido}} = 3380 \text{ cm}^3$$

Outro processo

Vimos na alínea 3.3. que $\frac{V'}{V} = \frac{1}{9}$. Logo, $V' = \frac{1}{9} V$.

$$\text{Assim, } V_{\text{sólido}} = V + V' = V + \frac{1}{9} V = \frac{10}{9} V$$

$$\text{Como } V = 13^2 \times 18 = 3042, \text{ temos } V_{\text{sólido}} = \frac{10}{9} V$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{sólido}} = \frac{10}{9} \times 3042$$

$$V_{\text{sólido}} = 3380$$

$$\text{R.: } V_{\text{sólido}} = 3380 \text{ cm}^3$$

$$\text{b) } A_{\text{Lateral}} = 4 \times A_{[IEF]}$$

$$A_{[IEF]} = \frac{\overline{EF} \times \overline{IL}}{2}$$

Vamos determinar $\overline{IL}$ recorrendo ao teorema de Pitágoras.

$$13^2 = \overline{IL}^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{IL}^2 = 169 - \frac{169}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{IL}^2 = 169 - \frac{169}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{IL}^2 = \frac{507}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{IL} = \pm \sqrt{\frac{507}{4}}$$

$$\text{Como } \overline{IL} > 0, \text{ então } \overline{IL} = \sqrt{\frac{507}{4}} = \frac{\sqrt{507}}{2}.$$

Assim,

$$A_{[IEF]} = \frac{13 \times \frac{\sqrt{507}}{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow A_{[IEF]} = \frac{13\sqrt{507}}{4}$$

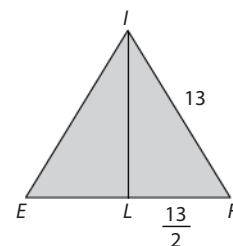
$$\text{Logo, } A_{\text{Lateral}} = 4 \times A_{[IEF]}$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{Lateral}} = 4 \times \frac{13\sqrt{507}}{4}$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{Lateral}} = 13\sqrt{507}$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{Lateral}} \approx 293$$

$$\text{R.: } A_{\text{Lateral}} \approx 293 \text{ cm}^2$$



4.

4.1. Os vértices do triângulo regular representado dividem o arco da circunferência em três arcos de igual amplitude.

$$360^\circ : 3 = 120^\circ$$

R.: O arco menor BC tem 120° de amplitude.

4.2. De acordo com a alínea anterior, o arco menor AC tem 120° de amplitude.

A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo α tem 60° de amplitude.

Pelo raciocínio anterior, o arco menor DA tem 60° de amplitude.

$$180^\circ - 151^\circ = 29^\circ$$

A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo o arco menor FC tem 29° de amplitude.

$$\beta = \frac{60^\circ - 29^\circ}{2} \Leftrightarrow \beta = 15,5^\circ$$

R.: O ângulo excêntrico β tem $15,5^\circ$ de amplitude.

Unidade 5 – Números reais. Inequações

Praticar – páginas 78 a 89

1.

1.1. a) $-7; \sqrt{4}$

b) $-7; \frac{2}{3}; 0,32; \frac{\sqrt{49}}{4}$

c) $-4\pi; \sqrt{125}$

d) $-4\pi; -7; \frac{2}{3}; 0,32; \frac{\sqrt{49}}{4}; \sqrt{4}; \sqrt{125}$

1.2. Sabemos que $125 \times 10^2 = 12\,500$.

$$\text{Como } 111^2 < 125 \times 10^2 < 112^2$$

Logo,

$$\left(\frac{111}{10}\right)^2 < 125 < \left(\frac{112}{10}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 11,1 < \sqrt{125} < 11,2$$

$$\text{R.: } \sqrt{125} \approx 11,2$$

2. [C] $\sqrt{8}$ e 2π

20 3.

3.1. $3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

3.2. $12\sqrt{6} - 6 \times 3\sqrt{6} - \sqrt{2} + 6\sqrt{6} =$
 $= 12\sqrt{6} - 18\sqrt{6} - \sqrt{2} + 6\sqrt{6} = 18\sqrt{6} - 18\sqrt{6} - \sqrt{2} = -\sqrt{2}$

3.3. $-2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + \sqrt{4} = 4\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 2 = -3\sqrt{3} + 2 =$
 $= 2 - 3\sqrt{3}$

3.4. $(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) = 1^2 - (\sqrt{5})^2 = 1 - 5 = -4$

4.

4.1. Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{BD}^2$.

$$\text{Assim, } \overline{BD}^2 = 1^2 + 3^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 1 + 9$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = \pm\sqrt{10}$$

Como $\overline{BD} > 0$, então $\overline{BD} = \sqrt{10}$, pelo que a abcissa do ponto A é $1 + \sqrt{10}$.

4.2. Sabemos que $\overline{AB} = \sqrt{10}$.

$$r = 0,3 = \frac{3}{10}$$

Enquadrando o produto $\left(\frac{10}{3}\right)^2 \times 10 = \frac{1000}{9}$ por dois quadrados perfeitos consecutivos, temos:

$$100 < \frac{1000}{9} < 121$$

$$\Leftrightarrow 102 < \left(\frac{10}{3}\right)^2 \times 10 < 112$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{10 \times 3}{10}\right)^2 < 10 < \left(\frac{11 \times 3}{10}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3^2 < 10 < 3,3^2$$

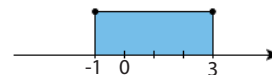
$$\Leftrightarrow 3 < \sqrt{10} < 3,3$$

5. Sabemos que, sendo a e b dois números reais positivos, se $a < b$, então $a^2 < b^2$.

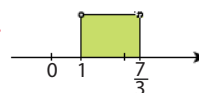
Assim, se $2a < 3b$, então $(2a)^2 < (3b)^2$, ou seja, $4a^2 < 9b^2$.

6.

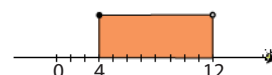
6.1.



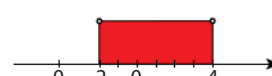
6.2.



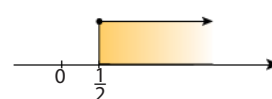
6.3.

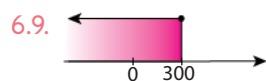
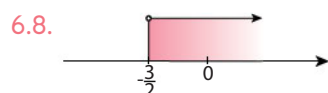
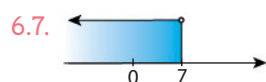
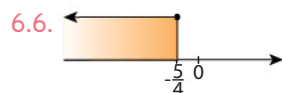


6.4.



6.5.





7.

7.1. $] -1, 3[= \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 3\}$

7.2. $] -3, 1] = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x \leq 1\}$

7.3. $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}\right\}$

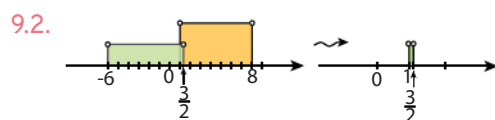
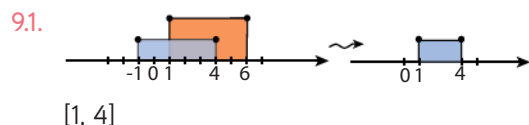
7.4. $[-5, \sqrt{2}] = \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x \leq \sqrt{2}\}$

7.5. $]0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

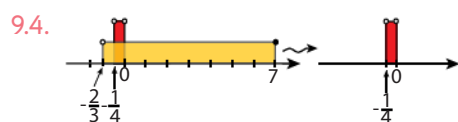
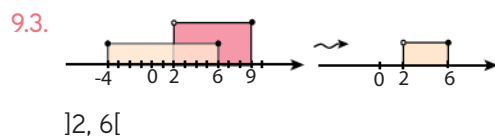
7.6. $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{2}{3}\right\}$

8. [C] $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -4 \wedge x < 2\}$

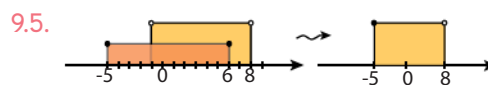
20 9.



9.3. $\left]1, \frac{3}{2}\right]$



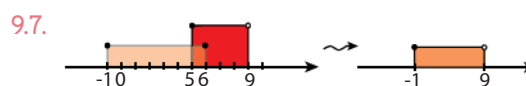
9.6. $\left]-\frac{1}{4}, 0\right]$



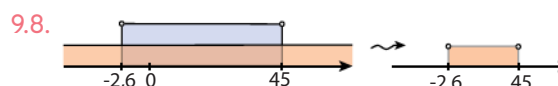
9.6. $[-5, 8[$



9.7. $] -10, 9]$



9.8. $[-1, 9[$

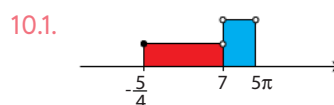


9.9. $]-2,6; 45[$



9.10. $\mathbb{R}$

20 10



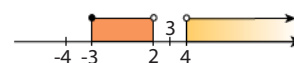
10.2. $A \cap B = \emptyset$

10.3. $A \cup B = \left[-\frac{5}{4}, 7\right] \cup [7, 5\pi] = \left[-\frac{5}{4}, 5\pi\right] \setminus \{7\}$

10.4. $A \cap \mathbb{R} = A = \left[-\frac{5}{4}, 7\right]$

10.5. $A \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$

11. [D] -3



20 12.

• Para $x = -3$:

$$\frac{2 - (-3)}{3} < 4 - 3 \times (-3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} < 4 + 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} < 13$$

Verdadeiro. Logo, -3 pertence ao conjunto-solução da inequação.

- Para $x = 0$:

$$\frac{2-0}{3} < 4-3 \times 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < 4$$

Verdadeiro. Logo, 0 pertence ao conjunto-solução da inequação.

- Para $x = \frac{5}{4}$:

$$\frac{2 - \frac{5}{4}}{3} < 4 - 3 \times \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \frac{5}{4}}{3} < 4 - \frac{15}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{8}{4} - \frac{5}{4}}{3} < \frac{16 - 15}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{12} < \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{12} < \frac{3}{12}$$

Falso. Logo, $\frac{5}{4}$ não pertence ao conjunto-solução da inequação.

- Para $x = 3$:

$$\frac{2-3}{3} < 4-3 \times 3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} < 4-0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} < 4$$

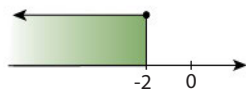
Verdadeiro. Logo, 3 pertence ao conjunto-solução da inequação.

20 13.

13.1. $x + 6 \leq 4$

$$\Leftrightarrow x \leq 4 - 6$$

$$\Leftrightarrow x \leq -2$$



$$\text{C.S.} =]-\infty, -2]$$

13.2. $x - 4 > 7$

$$\Leftrightarrow x > 7 + 4$$

$$\Leftrightarrow x > 11$$



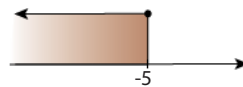
$$\text{C.S.} =]11, +\infty[$$

13.3. $4 - x \geq 9$

$$\Leftrightarrow -x \geq 9 - 4$$

$$\Leftrightarrow -x \geq 5$$

$$\Leftrightarrow x \leq -5$$



$$\text{C.S.} =]-\infty, -5]$$

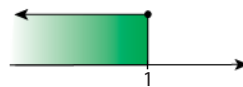
13.4. $11 - x < 17 - 7x$

$$\Leftrightarrow -x + 7x < 17 - 11$$

$$\Leftrightarrow 6x \leq 6$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{6}{6}$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1$$



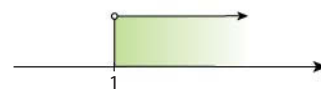
$$\text{C.S.} =]-\infty, 1]$$

13.5. $\frac{2}{3} > -x + \frac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow x > \frac{5}{3} - \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{3}{3} \Leftrightarrow x > 1$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$



$$\text{C.S.} =]1, +\infty[$$

13.6. $2 + x \leq 3x - 8$

$$\Leftrightarrow x - 3x \leq -8 - 2$$

$$\Leftrightarrow -2x \leq -10$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq 10$$

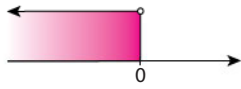
$$\Leftrightarrow x \geq \frac{10}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 5$$



$$\text{C.S.} = [5, +\infty[$$

$$\begin{aligned}
 13.7. \quad & 3x - 4x > 7x \\
 \Leftrightarrow & 3x - 4x - 7x > 0 \\
 \Leftrightarrow & -8x > 0 \\
 \Leftrightarrow & 8x < 0 \\
 \Leftrightarrow & x < \frac{0}{8} \\
 \Leftrightarrow & x < 0
 \end{aligned}$$



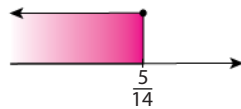
$$\text{C.S.} =]-\infty, 0[$$

$$\begin{aligned}
 13.8. \quad & 4x + 6 < 6x - 12 \\
 \Leftrightarrow & 4x - 6x < -12 - 6 \\
 \Leftrightarrow & -2x < -18 \\
 \Leftrightarrow & 2x > 18 \\
 \Leftrightarrow & x > \frac{18}{2} \\
 \Leftrightarrow & x > 9
 \end{aligned}$$



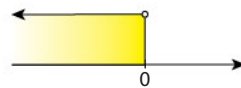
$$\text{C.S.} =]9, +\infty[$$

$$\begin{aligned}
 13.9. \quad & \frac{5}{1} - \frac{2}{5}x \geq \frac{9}{2} + \frac{x}{1} \\
 & \quad (\times 10) \quad (\times 2) \quad (\times 5) \quad (\times 10) \\
 \Leftrightarrow & \frac{50 - 4x}{10} \geq \frac{45 + 10x}{10} \\
 \Leftrightarrow & -4x - 10x \geq -50 + 45 \\
 \Leftrightarrow & -14x \geq -5 \\
 \Leftrightarrow & 14x \leq 5 \\
 \Leftrightarrow & x \leq \frac{5}{14}
 \end{aligned}$$



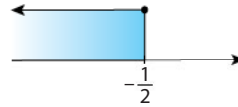
$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{5}{14} \right]$$

$$\begin{aligned}
 13.10. \quad & 2 - (x - 3) > 5 \\
 \Leftrightarrow & 2 - x + 3 > 5 \\
 \Leftrightarrow & -x > 5 - 2 - 3 \\
 \Leftrightarrow & -x > 0 \\
 \Leftrightarrow & x < 0
 \end{aligned}$$



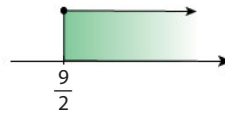
$$\text{C.S.} =]-\infty, 0[$$

$$\begin{aligned}
 13.11. \quad & -(3 - x) + 2 \geq 3x \\
 \Leftrightarrow & -3 + x + 2 \geq 3x \\
 \Leftrightarrow & x - 3x \geq 3 - 2 \\
 \Leftrightarrow & -2x \geq 1 \\
 \Leftrightarrow & x \leq -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



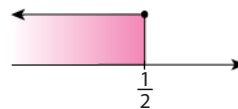
$$\text{C.S.} = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 13.12. \quad & 2(x - 6) + 3 \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & 2x - 12 + 3 \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & 2x \geq 12 - 3 \\
 \Leftrightarrow & 2x \geq 9 \\
 \Leftrightarrow & x \geq \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$



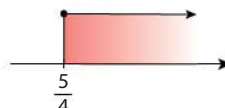
$$\text{C.S.} = \left[\frac{9}{2}, +\infty \right[$$

$$\begin{aligned}
 13.13. \quad & -3 + (2x - 1) \leq -3 \\
 \Leftrightarrow & -3 + 2x - 1 \leq -3 \\
 \Leftrightarrow & 2x \leq -3 + 3 + 1 \\
 \Leftrightarrow & 2x \leq 1 \\
 \Leftrightarrow & x \leq \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 13.14. \quad & 2(x - 1) + 3 \geq -2(x - 1) + 4 \\
 \Leftrightarrow & 2x - 2 + 3 \geq -2x + 2 + 4 \\
 \Leftrightarrow & 2x + 2x \geq 2 + 4 + 2 - 3 \\
 \Leftrightarrow & 4x \geq 5 \\
 \Leftrightarrow & x \geq \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$



$$\text{C.S.} = \left[\frac{5}{4}, +\infty \right[$$

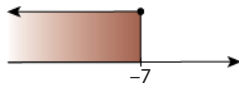
$$13.15. \quad 3x - 11 \geq 4(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 3x - 11 \geq 4x - 4$$

$$\Leftrightarrow 3x - 4x \geq -4 + 11$$

$$\Leftrightarrow -x \geq 7$$

$$\Leftrightarrow x \leq -7$$



$$\text{C.S.} =]-\infty, -7]$$

$$13.16. \quad \frac{x}{3} + 2 > -\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} + \frac{2}{1} > -\frac{x}{2}$$

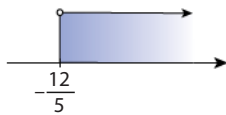
(x2) (x6) (x3)

$$\Leftrightarrow 2x + 12 > -3x$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3x > -12$$

$$\Leftrightarrow 5x > -12$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{12}{5}$$



$$\text{C.S.} =]-\frac{12}{5}, +\infty[$$

$$13.17. \quad \frac{x+2}{3} \leq -(x-6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{3} \leq -x+6$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{3} \leq -\frac{x}{1} + \frac{6}{1}$$

(x3) (x3)

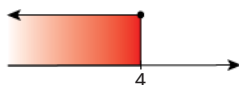
$$\Leftrightarrow x+2 \leq -3x+18$$

$$\Leftrightarrow x+3x \leq 18-2$$

$$\Leftrightarrow 4x \leq 16$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{16}{4}$$

$$\Leftrightarrow x \leq 4$$



$$\text{C.S.} =]-\infty, 4]$$

$$13.18. \quad \frac{-x+2}{3} > \frac{4x}{3} - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+2}{3} > \frac{4x}{3} - \frac{1}{1}$$

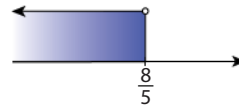
(x3)

$$\Leftrightarrow -x+2 > 4x-6$$

$$\Leftrightarrow -x-4x > -6-2$$

$$\Leftrightarrow -5x > -8$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{8}{5}$$



$$\text{C.S.} =]-\infty, \frac{8}{5}[$$

20 14.

$$14.1. \quad 3x + 30 \rightarrow \text{peso dos "pesos" do prato da esquerda}$$

$$300 \rightarrow \text{peso dos "pesos" do prato da direita}$$

$$14.2. \quad 3x + 30 < 300$$

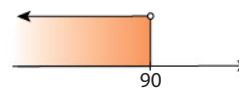
$$14.3. \quad 3x + 30 < 300$$

$$\Leftrightarrow 3x < 300 - 30$$

$$\Leftrightarrow 3x < 270$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{270}{3}$$

$$\Leftrightarrow x < 90$$



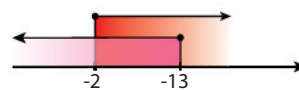
$$\text{C.S.} =]-\infty, 90[$$

$$\text{Como } x > 0, \text{ então } x \in]0, 90[.$$

20 15.

$$15.1. \quad x \leq 13 \quad \vee \quad 2x > -4$$

$$\Leftrightarrow x \leq 13 \quad \vee \quad x \geq -2$$



$$\text{C.S.} =]-\infty, +\infty[$$

$$15.2. \quad \frac{2x-4}{5} < \frac{-6}{1} \quad \vee \quad 2(-x+3) > 4$$

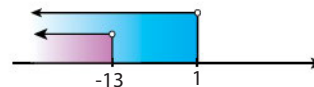
(x5)

$$\Leftrightarrow 2x-4 < -30 \quad \vee \quad -2x+6 > 4$$

$$\Leftrightarrow 2x < -26 \quad \vee \quad -2x > -2$$

$$\Leftrightarrow x < -13 \quad \vee \quad -2x < 2$$

$$\Leftrightarrow x < -13 \quad \vee \quad x < 1$$



$$\text{C.S.} =]-\infty, 1[$$

15.3. $5 - 3x \geq 9 - x \vee \frac{4x+1}{1} > \frac{2}{3}x + \frac{5}{1}$
 $\Leftrightarrow -3x + x \geq 9 - 5 \vee \frac{12x+3}{3} > \frac{2x}{3} + \frac{5}{3}$
 $\Leftrightarrow -2x \geq 4 \vee 12x - 2x > 5 - 3$
 $\Leftrightarrow 2x \leq -4 \vee 10x > 2$
 $\Leftrightarrow x \leq -2 \vee x > \frac{2}{10}$
 $\Leftrightarrow x \leq -2 \vee x > \frac{1}{5}$

$$\text{C.S.} =]-\infty, -2] \cup \left] \frac{1}{5}, +\infty \right[$$

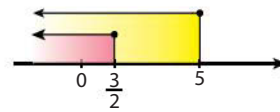
15.4. $2x + 5 > 3 \wedge 4x - 7 \leq 5$
 $\Leftrightarrow 2x > 3 - 5 \wedge 4x \leq 5 + 12$
 $\Leftrightarrow 2x > -2 \wedge 4x \leq 17$
 $\Leftrightarrow x > -1 \wedge x \leq \frac{17}{4}$

$$\text{C.S.} = \left] -1, \frac{17}{4} \right]$$

15.5. $5x + 7 < 3x + 2 \wedge \frac{4x}{3} > \frac{x+8}{1}$
 $\Leftrightarrow 5x - 3x < 2 - 7 \wedge 4x > 3x + 24$
 $\Leftrightarrow 2x < -5 \wedge 4x - 3x > 24$
 $\Leftrightarrow x < -\frac{5}{2} \wedge x > 24$

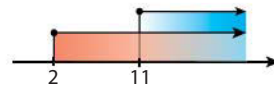
$$\text{C.S.} =]24, +\infty[$$

15.6. $3 - \frac{x+1}{2} \geq 0 \wedge \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \geq \frac{x}{1}$
 $\Leftrightarrow \frac{3}{1} + \frac{-x-1}{2} \geq 0 \wedge 2x + 3 \geq 4x$
 $\Leftrightarrow 6 - x - 1 \geq 0 \wedge 2x - 4x \geq -3$
 $\Leftrightarrow -x \geq -5 \wedge -2x \geq -3$
 $\Leftrightarrow x \leq 5 \wedge 2x \leq 3$
 $\Leftrightarrow x \leq 5 \wedge x \leq \frac{3}{2}$



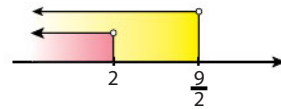
$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{3}{2} \right]$$

15.7. $2(x - 1) \geq 2 \wedge x \geq 11$
 $\Leftrightarrow 2x - 2 \geq 2 \wedge x \geq 11$
 $\Leftrightarrow 2x \geq 2 + 2 \wedge x \geq 11$
 $\Leftrightarrow 2x \geq 4 \wedge x \geq 11$
 $\Leftrightarrow x \geq \frac{4}{2} \wedge x \geq 11$
 $\Leftrightarrow x \geq 2 \wedge x \geq 11$



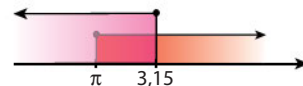
$$\text{C.S.} = [2, +\infty[\cap [11, +\infty[= [11, +\infty[$$

15.8. $\frac{4(x-2)}{3} < 0 \wedge 2(x-1) < 7$
 $\Leftrightarrow \frac{4x-8}{3} < 0 \wedge 2x-2 < 7$
 $\Leftrightarrow 4x-8 < 0 \wedge 2x < 7+2$
 $\Leftrightarrow 4x < 8 \wedge 2x < 9$
 $\Leftrightarrow x < \frac{8}{4} \wedge x < \frac{9}{2}$
 $\Leftrightarrow x < 2 \wedge x < \frac{9}{2}$



$$\text{C.S.} =]-\infty, 2[\cap \left] -\infty, \frac{9}{2} \right[=]-\infty, 2[$$

15.9. $x \geq \pi \wedge x \leq 3,15$



$$\text{C.S.} = [\pi, +\infty[\cap]-\infty; 3,15] = [\pi; 3,15]$$

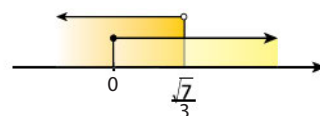
15.10. $2x + \sqrt{4} \geq 2 \wedge 3x < \sqrt{7}$

$$\Leftrightarrow 2x + 2 \geq 2 \wedge x < \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq 2 - 2 \wedge x < \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq 0 \wedge x < \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x < \frac{\sqrt{7}}{3}$$



$$\text{C.S.} = [0, +\infty[\cap \left] -\infty, \frac{\sqrt{7}}{3} \right[= \left[0, \frac{\sqrt{7}}{3} \right[$$

Como o setor circular corresponde a meio círculo, podemos concluir que a sua área é:

$$\frac{10\pi \text{ u.a.}}{2} = 5\pi \text{ u.a.}$$

19.4. A abscissa do ponto A é $-\sqrt{10}$.

Pretende-se uma aproximação por defeito, a menos de 0,1.

Começamos por enquadrar $\sqrt{10}$.

Enquadrando o produto $10^2 \times 10 = 1000$ por dois quadrados perfeitos consecutivos, obtemos:

$$\begin{aligned} 961 &< 1000 < 1024 \\ \Leftrightarrow 31^2 &< 10^2 \times 10 < 32^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{31}{10}\right)^2 &< 10 < \left(\frac{32}{10}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3,1^2 < 10 < 3,2^2$$

$$\Leftrightarrow 3,1 < \sqrt{10} < 3,2$$

Logo, $-3,1 > -\sqrt{10} > -3,2$, ou seja, $-3,2 < -\sqrt{10} < -3,1$.

R.: -3,2

20.

20.1. $15 < 5\pi < 16$

20.2. $3 < \sqrt{11} < 4$

20.3. $12 < 5\pi - \sqrt{11} < 13$

20.4. $19 < 5\pi + \sqrt{11} < 20$

21. $\pi + 4$:

- π é um número irracional
- $3 < \pi < 4$
- $7 < \pi + 4 < 8$
- $\pi + 4$ é um número irracional

22. Sabemos que $9 < 13 < 16$, ou seja, $3^2 < 13 < 4^2$. Multiplicando estas desigualdades por 10^2 , temos

$$\begin{aligned} 3^2 \times 10^2 &< 13 \times 10^2 < 4^2 \times 10^2 \\ \Leftrightarrow 30^2 &< 13 \times 10^2 < 40^2 \end{aligned}$$

Pelo método da dicotomia,

Como $35^2 = 1225$ e $1225 < 1300$, temos $35^2 < 13 \times 10^2 < 40^2$.

Como $36^2 = 1296$ e $1296 < 1300$, temos $36^2 < 13 \times 10^2 < 40^2$.

Como $37^2 = 1369$ e $1369 > 1300$, temos $36^2 < 13 \times 10^2 < 37^2$.

Assim,

$$\begin{aligned} 36^2 &< 13 \times 10^2 < 37^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{36}{10}\right)^2 &< 13 < \left(\frac{37}{10}\right)^2 \\ \Leftrightarrow 3,6 &< \sqrt{13} < 3,7 \end{aligned}$$

Para obtermos uma aproximação com mais uma casa decimal, multiplicamos novamente a última desigualdade por 10^2 .

$$36^2 \times 10^2 < 13 \times 10^2 \times 10^2 < 37^2 \times 10^2$$

$$\Leftrightarrow 360^2 < 13 \times 10^4 < 370^2$$

Pelo método da dicotomia,

Como $365^2 = 133\,225$ e $133\,225 > 130\,000$, temos $360^2 < 13 \times 10^4 < 365^2$.

Como $362^2 = 131\,044$ e $131\,044 > 130\,000$, temos $360^2 < 13 \times 10^4 < 362^2$.

Como $361^2 = 130\,321$ e $130\,321 > 130\,000$, temos $360^2 < 13 \times 10^4 < 361^2$.

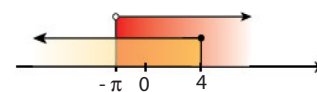
Assim,

$$\begin{aligned} 360^2 &< 13 \times 10^4 < 361^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{360}{100}\right)^2 &< 13 < \left(\frac{361}{100}\right)^2 \\ \Leftrightarrow 3,60 &< \sqrt{13} < 3,61 \end{aligned}$$

Logo, os três primeiros algarismos significativos de $\sqrt{13}$ são 3,60.

23.

23.1.



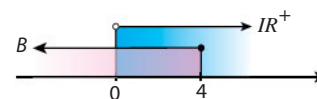
$$A \cup B =]-\infty, +\infty[$$

$$[D]]-\infty, +\infty[$$

23.2. a) $A \cap B =]-\pi, 4]$

b) $A \cap \mathbb{R} = A =]-\infty, 4]$

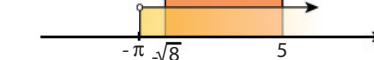
c) $B \cap \mathbb{R}^+ =]0, 4]$



d) $A \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

e) $B \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

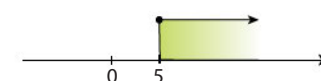
f)



$$B \cap [-\sqrt{8}, 5] = [-\sqrt{8}, 5]$$

24.

24.1. $A = [5, +\infty[$



$$B = \{x \in \mathbb{R} : 3x + 4 < 5x - 3\}$$

Cálculo auxiliar:

$$3x + 4 < 5x - 3$$

$$\Leftrightarrow 3x - 5x < -3 - 4$$

$$\Leftrightarrow -2x < -7$$

$$\Leftrightarrow 2x > 7$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{7}{2}$$



$$B = \left[\frac{7}{2}, +\infty \right[$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : 0 < 2x - 3 \leq 4\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : 0 < 2x - 3 \wedge 2x - 3 \leq 4\}$$

Cálculos auxiliares:

$$0 < 2x - 3$$

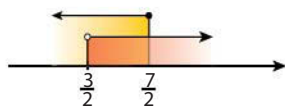
$$\Leftrightarrow 3 < 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} < x$$

$$2x - 3 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 4 + 3$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{7}{2}$$



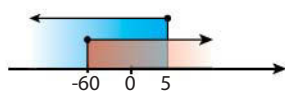
$$C = \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right]$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : -12 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : -12 \leq \frac{x}{5} \wedge \frac{x}{5} \leq 1 \right\}$$

Cálculos auxiliares:

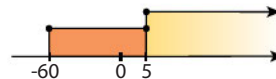
$$-\frac{12}{1} \leq \frac{x}{5} \Leftrightarrow -60 \leq x \Leftrightarrow x \geq -60$$

$$\frac{x}{5} \leq \frac{1}{1} \Leftrightarrow \frac{x}{5} \leq \frac{5}{5} \Leftrightarrow x \leq 5$$



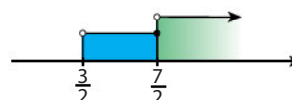
$$D = [-60, 5]$$

$$24.2. \text{ a) } A \cap D = [5, +\infty[\cap [-60, 5] = \{5\}$$



$$\text{b) } A \cup D = [-60, +\infty[$$

$$\text{c) } B \cap C = \left[\frac{7}{2}, +\infty \right[\cap \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right] = \emptyset$$

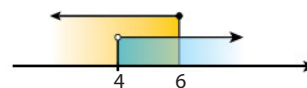


$$\text{d) } B \cup C = \left[\frac{3}{2}, +\infty \right[$$

25.

$$25.1. -1, 0, 1, 2, 3, 7, 8, 9 \text{ e } 10$$

25.2.

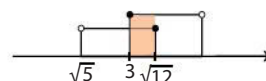


$$[4, +\infty[\cap]-\infty, 6] = [4, 6]$$

Logo, os números que pertencem ao conjunto são o 5 e o 6.

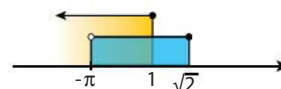
26.

26.1.



R.: Por exemplo, π .

26.2.



R.: Por exemplo, $-\pi$.

27.

$$\{x \in \mathbb{R} : x \geq -3 \wedge x < 5\}$$

28.

$$[D] \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \vee x \geq 3\}$$

29.

$$29.1. [B] A = [-5, 3[\cup]-\infty, -4]$$

29.2.

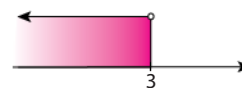
$$\frac{3}{1} > \frac{5+x}{2} - \frac{1}{1}$$

$$\Leftrightarrow 6 > 5 + x - 2$$

$$\Leftrightarrow -x > 5 - 2 - 6$$

$$\Leftrightarrow -x > -3$$

$$\Leftrightarrow x < 3$$



$$C.S. =]-\infty, 3[$$

30.

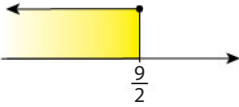
30.1. $-(2x - 4) + 5 \geq 0$

$$\Leftrightarrow -2x + 4 + 5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2x \geq -4 - 5$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 9$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{9}{2}$$



$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{9}{2} \right]$$

30.2. $-(2x - 4) + 5 < 3$

$$\Leftrightarrow -2x + 4 + 5 < 3$$

$$\Leftrightarrow -2x < 3 - 4 - 5$$

$$\Leftrightarrow -2x < -6$$

$$\Leftrightarrow 2x > 6$$

$$\Leftrightarrow x > 3$$



$$\text{C.S.} =]3, +\infty[$$

20 31.

$$0,3x + 2 < -\frac{3}{2}$$

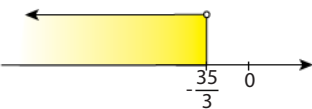
$$\Leftrightarrow \frac{3x}{10} + \frac{2}{1} < -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x + 20 < -15$$

$$\Leftrightarrow 3x < -15 - 20$$

$$\Leftrightarrow 3x < -35$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{35}{3}$$



$$\text{C.S.} = \left] -\infty, -\frac{35}{3} \right[$$

$$-0,3x - 2 < \frac{3}{2}$$

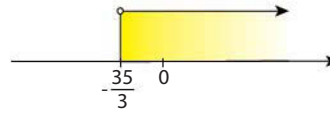
$$\Leftrightarrow -\frac{3x}{10} - \frac{2}{1} < \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow -3x - 20 < 15$$

$$\Leftrightarrow -3x < 35$$

$$\Leftrightarrow 3x > -35$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{35}{3}$$



$$\text{C.S.} = \left] -\frac{35}{3}, +\infty \right[$$

As inequações não são equivalentes porque não tem o mesmo conjunto-solução.

20 32.

32.1. $3x - 7 - \frac{x+1}{2} \geq -3(2-x)$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-7}{1} + \frac{x+1}{2} \geq -\frac{6+3x}{1}$$

$$\Leftrightarrow 6x - 14 + x + 1 \geq -12 + 6x$$

$$\Leftrightarrow \cancel{6x} + x - \cancel{6x} \geq 14 - 1 - 12$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$



$$\text{C.S.} = [1, +\infty[$$

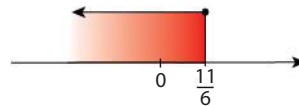
32.2. $\frac{2x}{1} - \frac{3-x}{4} \leq \frac{0,75x+2}{1}$

$$\Leftrightarrow 8x - 3 + x \leq 3x + 8$$

$$\Leftrightarrow 8x + x - 3x \leq 8 + 3$$

$$\Leftrightarrow 6x \leq 11$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{11}{6}$$



$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{11}{6} \right]$$

32.3. $\frac{2}{3}x - (4-x) > 5 - \frac{x+1}{2}$

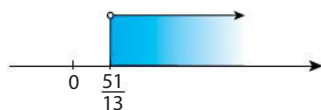
$$\Leftrightarrow \frac{2x}{3} - \frac{4+x}{1} > \frac{5}{1} + \frac{-x-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x - 24 + 6x > 30 - 3x - 3$$

$$\Leftrightarrow 4x + 6x + 3x > 30 - 3 + 24$$

$$\Leftrightarrow 13x > 51$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{51}{13}$$



$$\text{C.S.} = \left[\frac{51}{13}, +\infty \right[$$

32.4. $\frac{2-4x}{3} + \frac{7}{1} < \frac{2(x+5)}{1}$

$$\Leftrightarrow 2 - 4x + 21 < 6(x+5)$$

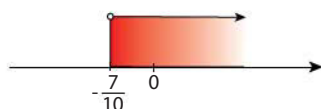
$$\Leftrightarrow 2 - 4x + 21 < 6x + 30$$

$$\Leftrightarrow -4x - 6x < 30 - 21 - 2$$

$$\Leftrightarrow -10x < 7$$

$$\Leftrightarrow 10x > -7$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{7}{10}$$



$$\text{C.S.} = \left] -\frac{7}{10}, +\infty \right[$$

32.5. $3 - \frac{x-6}{4} \geq 2(x-1)$

$$\Leftrightarrow 3 - \frac{x-6}{4} \geq 2x - 2$$

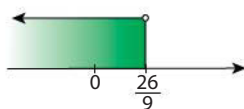
$$\Leftrightarrow \frac{3}{1} - \frac{x-6}{4} \geq \frac{2x-2}{1}$$

$$\Leftrightarrow 12 - x + 6 \geq 8x - 8$$

$$\Leftrightarrow -x - 8x \geq -8 - 12 - 6$$

$$\Leftrightarrow -9x \geq -26$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{26}{9}$$



$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{26}{9} \right]$$

32.6. $4 - (2x - 3) + 3(x - 1) > \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow 4 - 2x + 3 + 3x - 3 \geq \frac{2}{3}$$

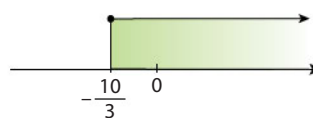
$$\Leftrightarrow \frac{4}{1} - \frac{2x}{1} + \frac{3x}{1} \geq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 12 - 6x + 9x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow -6x + 9x \geq 2 - 12$$

$$\Leftrightarrow 3x \geq -10$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{10}{3}$$



$$\text{C.S.} = \left[-\frac{10}{3}, +\infty \right[$$

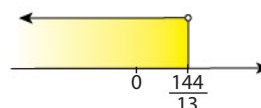
32.7. $\frac{x}{3} + x - \frac{x}{4} < 12$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} + \frac{x}{1} - \frac{x}{4} < \frac{12}{1}$$

$$\Leftrightarrow 4x + 12x - 3x < 144$$

$$\Leftrightarrow 13x < 144$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{144}{13}$$



$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{144}{13} \right[$$

32.8. $-\frac{3x-1}{4} + 2(x-6) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-1}{4} + 2x - 12 \leq 0$$

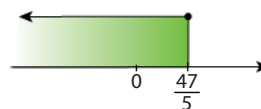
$$\Leftrightarrow -\frac{3x-1}{4} + \frac{2x}{1} - \frac{12}{1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 1 + 8x - 48 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 8x \leq -1 + 48$$

$$\Leftrightarrow 5x \leq 47$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{47}{5}$$



$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{47}{5} \right]$$

33.

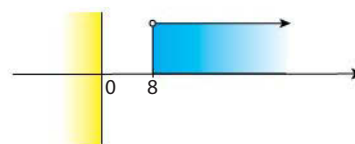
33.1. $2 \times 17 + 2 \times x > 50$

$$\Leftrightarrow 34 + 2x > 50$$

$$\Leftrightarrow 2x > 50 - 34$$

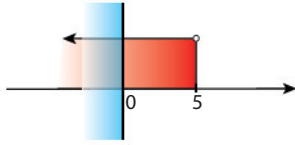
$$\Leftrightarrow 2x > 16$$

$$\Leftrightarrow x > 8$$



$$\text{C.S.} =]8, +\infty[$$

33.2. $17 \times x < 85 \Leftrightarrow x < \frac{85}{17} \Leftrightarrow x < 5$



Como $x > 0$, $x \in]0, 5[$.

34.

34.1. I. $2(x+1) < 4(x+3)$
 $\Leftrightarrow 2x + 2 < 4x + 12$
 $\Leftrightarrow -2x < 10$
 $\Leftrightarrow 2x > -10$
 $\Leftrightarrow x > -5$
 C.S. = $] -5, +\infty[$

II. $\frac{3x}{2} + \frac{12}{1} \leq \frac{6}{1}$
 $\Leftrightarrow 3x + 24 \leq 12$
 $\Leftrightarrow 3x \leq -12$
 $\Leftrightarrow x \leq -4$
 C.S. = $] -\infty, -4]$

III. $\frac{x-20}{2} > -\frac{7}{1}$
 $\Leftrightarrow x - 20 > -14$
 $\Leftrightarrow x > 6$
 C.S. = $] 6, +\infty[$

34.2. a) $\frac{3x}{2} + 12 \leq 6 \wedge \frac{x-20}{2} > -7$

b) $2(x+1) < 4(x+3) \wedge \frac{3x}{2} + 12 \leq 6$

35.

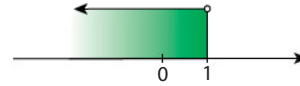
35.1. $5 - \frac{x+3}{2} > -(2x-1)$
 $\Leftrightarrow \frac{5}{1} + \frac{-x-3}{2} > \frac{-2x+1}{1}$
 $\Leftrightarrow 10 - x - 3 > -4x + 2$
 $\Leftrightarrow 3x > -5$
 $\Leftrightarrow x > -\frac{5}{3}$

C.S. = $] -\frac{5}{3}, +\infty[$

35.2. -1

20 36.

$((x+1) + (2x-1) + (3x+2)) - 4 \times (2x) > 0$
 $\Leftrightarrow 6x + 2 - 8x > 0$
 $\Leftrightarrow -2x > -2$
 $\Leftrightarrow 2x < 2$
 $\Leftrightarrow x < \frac{2}{2}$
 $\Leftrightarrow x < 1$



C.S. = $] -\infty, 1[$

Como $x > 0$, então $x \in]0, 1[$.

37.

$180x + 300 < 2100$
 $\Leftrightarrow 180x < 2100 - 300$
 $\Leftrightarrow 180x < 1800$
 $\Leftrightarrow x < \frac{1800}{180}$
 $\Leftrightarrow x < 10$



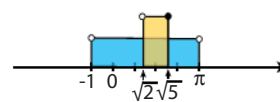
C.S. = $] -\infty, 10[$

Como $x > 0$, então $x \in]0, 10[$. Assim, podemos concluir que o avião pode subir a esta taxa durante os primeiros 10 minutos (exclusive).

20 38.

38.1. [B] $] -\sqrt{2}, +\infty[$

38.2.



a) $\pi - 3$, por exemplo.

b) Não existe, pois $B \subset C$.

20 39.

39.1. $x^2 - 5x = k$

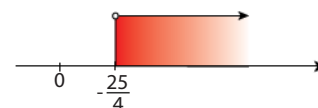
$\Leftrightarrow x^2 - 5x - k = 0$

Como $\Delta > 0$, $(-5)^2 - 4 \times 1 \times (-k) > 0$

$\Leftrightarrow 25 + 4k > 0$

$\Leftrightarrow 4k > -25$

$\Leftrightarrow k > -\frac{25}{4}$



$k \in] -\frac{25}{4}, +\infty[$

39.2. $kx^2 + 4x \Leftrightarrow kx^2 - 3x + 4 = 0$

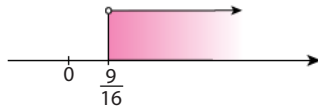
Como $\Delta < 0$, então $(-3)^2 - 4 \times k \times 4 < 0$

$$\Leftrightarrow 9 - 16k < 0$$

$$\Leftrightarrow -16k < -9$$

$$\Leftrightarrow 16k > 9$$

$$\Leftrightarrow k > \frac{9}{16}$$



$$k \in \left] \frac{9}{16}, +\infty \right[$$

40. Sabemos que se $a \geq b$, então $a^2 \geq b^2$.

Assim, se $7a \geq 3b$, então $(7a)^2 \geq (3b)^2$, ou seja, $49a^2 \geq 9b^2$.

Logo, a afirmação é verdadeira.

41. Segundo a desigualdade triangular:

1. $3 + 8 > x \Leftrightarrow 11 > x$

2. $x + 3 > 8 \Leftrightarrow x > 5$

3. $x + 8 > 3 \Leftrightarrow x > -5$

Podemos concluir que $x \in]5, 11[$.

Assim, o triângulo será isósceles se $x = 8$.

42.

42.1.
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - 3 \geq x \\ 3(x+1) > 2(x-5) \end{cases}$$

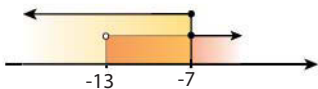
$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2} - \frac{3}{1} \geq \frac{x}{1} \wedge 3(x+1) > 2(x-5)$$

$$\Leftrightarrow x - 1 - 6 \geq 2x \wedge 3x + 3 > 2x - 10$$

$$\Leftrightarrow x - 2x \geq 1 + 6 \wedge 3x - 2x > -10 - 3$$

$$\Leftrightarrow -x \geq 7 \wedge x > -13$$

$$\Leftrightarrow x \leq -7 \wedge x > -13$$



$$C.S. =]-13, -7]$$

42.2.
$$\begin{cases} -12 \leq x + 4 \\ -\frac{1-2x}{3} > 3(x+2) \end{cases}$$

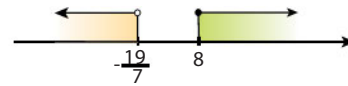
$$\Leftrightarrow -12 \leq x + 4 \wedge \frac{-1+2x}{3} > \frac{3x+6}{1}$$

$$\Leftrightarrow -x \leq -12 + 4 \wedge -1+2x > 9x+18$$

$$\Leftrightarrow -x \leq -8 \wedge -7x > 19$$

$$\Leftrightarrow x \geq 8 \wedge 7x < -19$$

$$\Leftrightarrow x \geq 8 \wedge x < -\frac{19}{7}$$



$$C.S. = \emptyset$$

42.3.
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 4 > x + 1 \\ -2(x+3) > 1 - \frac{3+5x}{2} \end{cases}$$

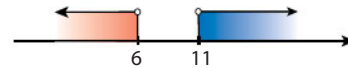
$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{4}{1} > \frac{x+1}{1} \wedge \frac{-2x-6}{1} > \frac{1}{1} + \frac{-3-5x}{2}$$

$$\Leftrightarrow x + 8 > 2x + 2 \wedge -4x - 12 > 2 - 3 - 5x$$

$$\Leftrightarrow x - 2x > 2 - 8 \wedge -4x + 5x > 12 + 2 - 3$$

$$\Leftrightarrow -x > -6 \wedge x > 11$$

$$\Leftrightarrow x < 6 \wedge x > 11$$



$$C.S. = \emptyset$$

42.4.
$$\begin{cases} 1 - \frac{3x-3}{5} \leq x + 4 \\ \frac{4-(x+3)}{2} < -2(-3x+5) \end{cases}$$

$$1 - \frac{3x-3}{5} \leq x + 4 \wedge \frac{4-(x+3)}{2} < -2(-3x+5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1} + \frac{-3x+3}{5} \leq \frac{x+4}{1} \wedge \frac{4-x-3}{2} < \frac{6x-10}{1}$$

$$\Leftrightarrow 5 - 3x + 3 \leq 5x + 20 \wedge 4 - x - 3 < 12x - 20$$

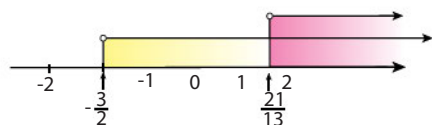
$$\Leftrightarrow -3x - 5x \leq 20 - 3 - 5 \wedge -x - 12x < -20 + 3 - 4$$

$$\Leftrightarrow -8x \leq 12 \wedge -13x < -21$$

$$\Leftrightarrow 8x \geq -12 \wedge x > \frac{21}{13}$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{12}{8} \wedge x > \frac{21}{13}$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2} \wedge x > \frac{21}{13}$$



$$C.S. = \left[\frac{21}{13}, +\infty \right[$$

43. x – número de intervalos realizados

$$8 \text{ h} = 8 \times 60 \text{ min} = 480 \text{ min}$$

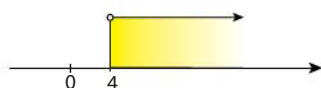
$$480 + 30x > 600$$

$$\Leftrightarrow 30x > 600 - 480$$

$$\Leftrightarrow 30x > 120$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{120}{30}$$

$$\Leftrightarrow x > 4$$



R.: No mínimo foram realizadas cinco paragens.

44. $4\pi(x - 6) \geq -(-4\pi x - 2\pi)$

$$\Leftrightarrow 4\pi x - 24\pi \geq 4\pi x + 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 4\pi x - 4\pi x \geq 2\pi + 24\pi$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq 26\pi \quad \text{Falso}$$

$$C.S. = \{ \}$$

A inequação é impossível.

45. A afirmação é falsa.

Se, por exemplo, $k = -2$, $7 \times (-2) = -14$ e $9 \times (-2) = -18$.

Logo, como $-14 > -18$, temos que $7k > 9k$.

46.

46.1. Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2$.

$$\text{Assim, } 4^2 + 1^2 = \overline{AB}^2$$

$$\Leftrightarrow 17 = \overline{AB}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \pm\sqrt{17}$$

$$\text{Como } \overline{AB} > 0, \overline{AB} = \sqrt{17}.$$

Assim, a abscissa do ponto F é $1 + \sqrt{17}$.

46.2. Como os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são semelhantes, têm os lados proporcionais. Então.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt{17}} = \frac{1}{\overline{EF}}$$

$$\Leftrightarrow 4\overline{EF} = 1 + \sqrt{17}$$

$$\Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$$

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{DE}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{OF}^2$.

$$\text{Assim, } \overline{DE}^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{4} \right)^2 + (1 + \sqrt{17})^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{DE}^2 = \frac{1 + 2\sqrt{17} + 17}{16} + \frac{1 + 2\sqrt{17} + 17}{1}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DE}^2 = \frac{1 + 2\sqrt{17} + 17 + 16 + 32\sqrt{17} + 272}{16}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DE}^2 = \frac{306 + 34\sqrt{17}}{16}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DE}^2 = \pm \sqrt{\frac{306 + 34\sqrt{17}}{16}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DE} = \pm \frac{\sqrt{360 + 34\sqrt{17}}}{4}$$

$$\text{Como } \overline{DE} > 0, \text{ então } \overline{DE} = \frac{\sqrt{360 + 34\sqrt{17}}}{4}.$$

$$\text{Então, a abscissa do ponto } G \text{ é } \frac{\sqrt{360 + 34\sqrt{17}}}{4}.$$

47.

47.1. $\overline{AB} = 3$

• Como $[ABC]$ é um triângulo isósceles, $\overline{BC} = \overline{AB} = 3$.

Assim, pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2.$$

$$3^2 + 3^2 = \overline{AC}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 9 + 9$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{18}$$

$$\text{Como } \overline{AC} > 0, \overline{AC} = \sqrt{18}$$

• Como $\overline{BC} = \overline{CD}$, então $\overline{CD} = 3$.

Assim, pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2.$$

$$(\sqrt{18})^2 + 3^2 = \overline{AD}^2$$

$$\Leftrightarrow 18 + 9 = \overline{AD}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AD} = \pm\sqrt{27}$$

$$\text{Como } \overline{AD} > 0, \overline{AD} = \sqrt{27}.$$

Então, a abscissa do ponto E é $-1 - \sqrt{27}$.

47.2. $A_{[ACD]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{CD}}{2}$

$$A_{[ACD]} = \frac{\sqrt{18} \times 3}{2}$$

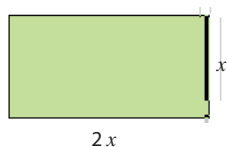
A área do triângulo $[ACD]$ é $\frac{3\sqrt{18}}{2}$ u.a.

48. Por exemplo, os números -4 e 3 são solução da inequação.

Se $x = -4$, $|-4 - 1| = |-5| = 5$ e $5 \leq 5$.

Se $x = 3$, $|3 - 1| = |2| = 2$ e $2 \leq 5$.

20 49.



$2x$

$$P = 2 \times 2x + 2 \times x = 4x + 2x = 6x$$

$$\bullet \quad 6x \geq \frac{2}{3} \times 90 \Leftrightarrow 6x \geq 60 \Leftrightarrow x \geq 10$$

Se $x \geq 10$, $2x \geq 20$.

$$\bullet \quad 6x \leq 90 \Leftrightarrow x \leq \frac{90}{6} \Leftrightarrow x \leq 15$$

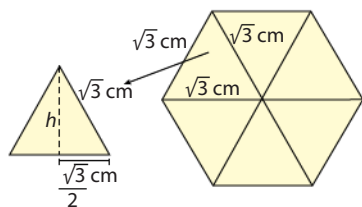
Se $x \leq 15$, $2x \leq 30$.

Assim, o comprimento do terreno é tal que $10 \leq c \leq 15$.

20 50.

- 50.1. Se $\sqrt{2} \text{ cm} < \overline{AB} < \sqrt{3} \text{ cm}$, então $6 \times \sqrt{2} \text{ cm} < 6 \times \overline{AB} < 6 \times \sqrt{3} \text{ cm}$, ou seja, $6\sqrt{2} \text{ cm} < P_{\text{hexágono}} < 6\sqrt{3} \text{ cm}$.

- 50.2. A área máxima do hexágono será obtida quando $\overline{AB}$ for máximo, ou seja, quando $\overline{AB} = \sqrt{3} \text{ cm}$. Assim:



$$(\sqrt{3})^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{3}{4} + h^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 3 - \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow h = \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$\Leftrightarrow h = -\frac{3}{2} \vee h = \frac{3}{2}$$

Como $h > 0$, então $h = \frac{3}{2}$, pelo que:

$$A_{\text{Hexágono}} = \frac{P}{2} \times ap$$

$$A_{\text{Hexágono}} = \frac{6 \times \sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2} \sqrt{3}$$

R.: A área máxima do hexágono é $\left(\frac{9}{2}\sqrt{3}\right) \text{ cm}^2$.

51.

$$9 \text{ h} = 9 \times 60 \text{ min} = 540 \text{ min}$$

$$7 \text{ h} = 7 \times 60 \text{ min} = 420 \text{ min}$$

$$540 - 10x < 420$$

$$\Leftrightarrow -10x < 420 - 540$$

$$\Leftrightarrow -10x < -120$$

$$\Leftrightarrow 10x > 120$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{120}{10}$$

$$\Leftrightarrow x > 12$$

$$\text{C.S.} =]12, +\infty[$$

R.: No mínimo passaram 13 comboios perto de sua casa.

52.

$$200 + 0,12 \times 600 \times x > 1500$$

$$\Leftrightarrow 200 + 72x > 1500$$

$$\Leftrightarrow 72x > 1500 - 200$$

$$\Leftrightarrow 72x > 1300$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1300}{72} \Leftrightarrow x > \frac{325}{18}$$

$$\text{C.S.} = \left] \frac{325}{18}, +\infty \right[$$

Como $\frac{325}{18} \approx 18,06$, podemos concluir que, para receber mais do que 1500€, o pai da Ana terá de vender 19 computadores num mês.

20 Testar – páginas 90 e 91

1. [D] $\sqrt{144}$

2.

2.1. Sabemos que $a > b$ e $c < b$.

Se $c < b$, então $b > c$.

Assim, se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$.

2.2. Se $4 > -7$, então $-7 < 4$.

2.3. Se $y > x$, então $3y > 3x$ e $-3y < -3x$.

3. $-3 < z < 4$

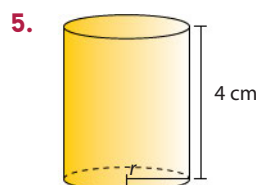
$$\Leftrightarrow -15 < 5z < 20$$

$$\Leftrightarrow 15 > -5z > -20$$

$$\Leftrightarrow 18 > -5z + 3 > -17$$

Logo, a opção correta é a [C] $-17 < -5z + 3 < 18$.

4. O erro que se pode obter é $0,2 \times 0,2 = 0,04$.



$$\pi \times r^2 \times 4 = 300$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{300}{4\pi}$$

$$\Leftrightarrow r = \pm \sqrt{\frac{300}{4\pi}}$$

$$\Leftrightarrow r = \pm \sqrt{\frac{75}{\pi}}$$

Como $r > 0$, então $r = \sqrt{\frac{75}{\pi}} = 4,886025\dots$

Assim, um valor aproximado às décimas, por excesso, do comprimento do raio da base é 4,9 cm.

6. $2x + 3 \leq 27$

7. $-x + 2 \leq -\frac{x-5}{4}$

$$\Leftrightarrow -\frac{x+2}{1} \leq \frac{-x+5}{4}$$

$$\Leftrightarrow -4x + 8 \leq -x + 5$$

$$\Leftrightarrow -3x \leq 5 - 8$$

$$\Leftrightarrow -3x \leq -3$$

$$\Leftrightarrow 3x \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$

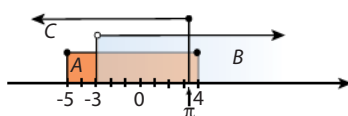
C.S. = $[1, +\infty[$

R.: O menor número inteiro que satisfaz a inequação é o 1.

8. [D] $B =]-\infty, 4[\cup [4, 6]$

9.

9.1.



a) -4

b) -5

9.2. Não, pois $B \cup C = \mathbb{R}$

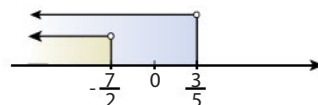
9.3. a) $A \cap B =]-3, 4]$

b) $B \cup C = \mathbb{R}$

c) $(A \cup B) \cap C = [-5, +\infty[\cap]-\infty, \pi] = [-5, \pi]$

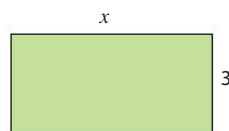
10. $(\sqrt{11} - 3)^2 + (-2\sqrt{3})^2 =$
 $= 11 - 6\sqrt{11} + 9 + 4 \times 3 =$
 $= 11 + 9 + 12 - 6\sqrt{11} =$
 $= 32 - 6\sqrt{11}$

11. $-\frac{2x-5}{3} + 3 < -2x \wedge 3(x-1) < -2x$
 $\Leftrightarrow \frac{-2x+5}{3} + \frac{3}{1} \wedge \frac{-2x}{1} \wedge 3x-3 < -2x$
 $\Leftrightarrow 2x+5+9 < -6x \wedge 3x+2x < 3$
 $\Leftrightarrow -2x+6x < -9-5 \wedge 5x < 3$
 $\Leftrightarrow 4x < -14 \wedge x < \frac{3}{5}$
 $\Leftrightarrow x < -\frac{14}{4} \wedge x < \frac{3}{5}$
 $\Leftrightarrow x < -\frac{7}{2} \wedge x < \frac{3}{5}$



C.S. = $\left] -\infty, -\frac{7}{2} \right[$

12.

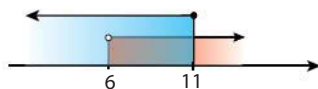


$$18 < 3 \times x \leq 33$$

$$\Leftrightarrow 18 < 3x \wedge 3x \leq 33$$

$$\Leftrightarrow \frac{18}{3} < x \wedge x \leq \frac{33}{3}$$

$$\Leftrightarrow 6 < x \wedge x \leq 11$$



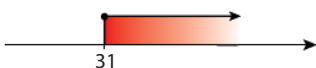
$$x \in]6, 11]$$

$$13. \quad \frac{26 + 24 + x}{3} \geq \frac{27}{1}$$

$$\Leftrightarrow 50 + x \geq 81$$

$$\Leftrightarrow x \geq 81 - 50$$

$$\Leftrightarrow x \geq 31$$



$$\text{C.S.} = [31, +\infty[$$

No dia seguinte, à mesma hora, deve fazer pelo menos 31 °C.

$$14. \quad x - \text{idade da irmã do Duarte}$$

$$x + 5 - \text{idade do Duarte}$$

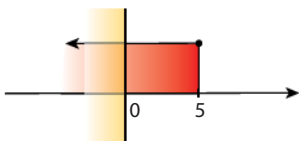
$$x + x + 5 \leq 25$$

$$\Leftrightarrow 2x + 5 \leq 25$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 20$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{20}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \leq 10$$



R.: A irmã do Duarte, no máximo, terá 10 anos.

$$15. \quad \text{Custos: } 25\,000 + 1,2 \times x$$

$$\text{Proveitos: } 4 \times x$$

O lucro da empresa é dado pela expressão:

$$4x - (25\,000 + 1,2x)$$

Para não ter prejuízo:

$$4x - (25\,000 + 1,2x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 25\,000 - 1,2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 1,2x \geq 25\,000$$

$$\Leftrightarrow 2,8x \geq 25\,000$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{25\,000}{2,8}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{25\,000}{2,8}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{62\,500}{7}$$

Como $\frac{62\,500}{7} \approx 8928,57$, podemos concluir que a

fábrica deve produzir pelo menos 8929 queijos.

Unidade 6 – Trigonometria no triângulo retângulo

Praticar – páginas 93 a 101

1. Calculemos x , a hipotenusa do triângulo retângulo representado:

$$x^2 = 4^2 + 7^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 16 + 49$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 65$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{65} \vee x = \sqrt{65}$$

Como $x > 0$, então $x = \sqrt{65}$.

Então:

$$\text{sen } \theta = \frac{7}{\sqrt{65}} \Leftrightarrow \text{sen } \theta \approx 0,87$$

$$\text{cos } \theta = \frac{4}{\sqrt{65}} \Leftrightarrow \text{cos } \theta \approx 0,50$$

$$\text{tg } \varepsilon = \frac{4}{7} \Leftrightarrow \text{tg } \varepsilon \approx 0,57$$

2.

$$2.1. \quad \text{sen } \alpha = \frac{0,9}{3,6}, \quad \text{logo } \hat{\alpha} = 14,5^\circ$$

$$2.2. \quad \text{tg } \alpha = \frac{8}{5}, \quad \text{logo } \hat{\alpha} = 58,0^\circ$$

$$2.3. \quad \text{tg } \alpha = \frac{8}{20}, \quad \text{logo } \hat{\alpha} = 21,8^\circ$$

$$2.4. \quad \text{cos } \alpha = \frac{4}{8}, \quad \text{logo } \hat{\alpha} = 60,0^\circ$$

$$3. \quad \text{tg } 32^\circ = \frac{q}{6}$$

$$\Leftrightarrow q = 6 \times \text{tg } 32^\circ$$

$$\Leftrightarrow q \approx 3,7$$

R.: q tem, aproximadamente, 3,7 cm de comprimento.

4.

$$4.1. \quad \text{sen } 20^\circ = \frac{\overline{BC}}{32}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 32 \text{ sen } 20^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} \approx 11$$

R.: O segmento de reta $[BC]$ tem, aproximadamente, 11 metros de comprimento.

$$4.2. \quad \cos 20^\circ = \frac{\overline{AC}}{32}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 32 \cos 20^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} \approx 30$$

R.: O segmento de reta [AC] tem, aproximadamente, 30 metros de comprimento.

5.

$$5.1. \quad \alpha \approx 36,9^\circ$$

$$5.2. \quad \left. \begin{array}{l} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \sin \alpha = 0,6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cos^2 \alpha = 1 - 0,36 \\ \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 0,64 \\ \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm 0,8 \end{array}$$

R.: Como α é um ângulo agudo, então $\cos \alpha = 0,8$.

6. Seja d a distância do barco ao farol.

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{40}{d} \Leftrightarrow d = \frac{40}{\operatorname{tg} 30^\circ} \Leftrightarrow d \approx 69$$

R.: O barco encontra-se a, aproximadamente, 69 metros do farol.

7. Seja α o ângulo que pretendemos determinar:

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}, \text{ logo } \hat{\alpha} \approx 48,2^\circ.$$

R.: A escada fazia com o chão um ângulo de, aproximadamente, $48,2^\circ$.

8.

$$8.1. \quad \sin 75^\circ = \frac{36}{h}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{36}{\sin 75^\circ} \Leftrightarrow h \approx 37$$

R.: O comprimento da torre tem, aproximadamente, 37 metros.

$$8.2. \quad \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{36}{x} \Leftrightarrow x = \frac{36}{\operatorname{tg} 75^\circ} \Leftrightarrow x \approx 9,6$$

R.: x mede, aproximadamente, 9,6 metros.

$$8.3. \quad \hat{\alpha} = 180^\circ - 75^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 105^\circ$$

9. Utilizando as razões trigonométricas:

$$\sin (\widehat{CAB}) = \frac{1,7}{2,5}, \text{ logo } \widehat{CAB} \approx 43^\circ$$

R.: O ângulo CAB tem, aproximadamente, 43° de amplitude.

$$10. \quad [C] \quad \cos \phi \times \operatorname{tg} \phi = \sin \phi$$

11. Seja x a medida do cateto desconhecido. Aplicando o teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 15^2 - 9^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 225 - 81$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow x = -12 \vee x = 12$$

11.1.

$$\sin \alpha = \frac{12}{15} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{9}{15} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{9} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$$

$$11.2. \quad P = 15 + 9 + 12 \Leftrightarrow P = 36$$

$$A = \frac{9 \times 12}{2} \Leftrightarrow A = 54$$

R.: O triângulo tem 36 cm de perímetro e 54 cm² de área.

11.3. A altura de um triângulo, referente à hipotenusa, é o segmento de reta perpendicular à hipotenusa que passa no vértice que se opõe à hipotenusa. Seja h a altura que pretendemos determinar.

Assim, sabemos que $\sin \alpha = \frac{h}{9}$ e $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

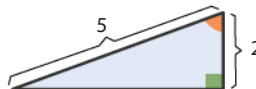
$$\frac{h}{9} = \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{4 \times 9}{5}$$

$$\Leftrightarrow h = 7,2$$

R.: A altura do triângulo, referente à hipotenusa, é de 7,2 cm.

12. Para construir o triângulo pedido, basta garantir que um dos catetos tem 2 unidades de comprimento e a hipotenusa tem 5 unidades. Assim, obtemos:

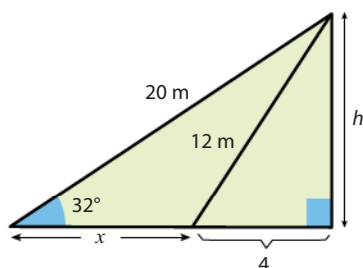


20 13. Não concordo com o João.

Vamos pensar num contraexemplo: consideremos um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 14 unidades e cujo cateto oposto a β mede 8 unidades. Assim:

$$\sin \beta = \frac{8}{14} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{4}{7}$$

- 20 14.** Seja h a altura do triângulo retângulo e seja y o outro cateto (além de h) do triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 12 metros. Assim:



$$\begin{aligned}\sin 32^\circ &= \frac{h}{20} \\ \Leftrightarrow h &= 20 \sin 32^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y^2 &= 12^2 - (20 \sin 32^\circ)^2 \\ \Leftrightarrow y^2 &\approx 31,6743 \\ \text{Como } y > 0, \text{ então } y &\approx 5,63.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 32^\circ &= \frac{x + 5,63}{20} \\ \Leftrightarrow x &= 20 \cos 32^\circ - 5,63 \\ \Leftrightarrow x &\approx 11,33\end{aligned}$$

R.: x mede, aproximadamente, 11 metros.

15.

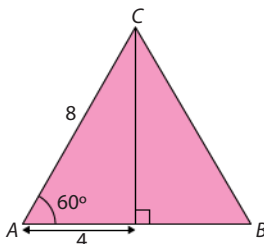
- 15.1.** Os dois triângulos são retângulos e um dos seus ângulos internos agudos mede 18° . Pelo critério AA, os triângulos são semelhantes.

- 15.2.** As razões trigonométricas não dependem do comprimento dos lados do triângulo mas apenas da amplitude dos seus ângulos internos. Assim, como os triângulos apresentados são semelhantes:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2$$

20 16.

- 16.1.** Como o triângulo tem os lados iguais, cada lado mede 8 cm ($24 : 3 = 8$). Além disso, como num triângulo a lados de igual comprimento opõem-se ângulos de igual amplitude, cada ângulo interno tem 60° de amplitude ($180^\circ : 3 = 60^\circ$).



$$\text{Assim, } \sin 60^\circ = \frac{h}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{8}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{8\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow h = 4\sqrt{3}$$

$$\text{R.: } \hat{B}\hat{A}\hat{C} = 60^\circ \text{ e } h = 4\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$16.2. A_{[ABC]} = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{8 \times 4\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow A_{[ABC]} = \frac{32\sqrt{3}}{2}$$

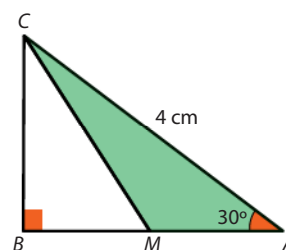
$$\Leftrightarrow A_{[ABC]} = 16\sqrt{3}$$

$$\text{R.: } A_{[ABC]} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

20 17.

$$A_{[AMC]} = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{[AMC]} = \frac{\overline{AM} \times \overline{BC}}{2}$$



Vamos determinar $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ através das razões trigonométricas do ângulo $\hat{B}\hat{A}\hat{C}$.

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{BA}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BA} = \frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BA} = 2\sqrt{3}$$

Como M é o ponto médio do segmento de reta $[BA]$,

$$\text{então } \overline{AM} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\overline{BC}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{4}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 2$$

$$\text{Assim, } A_{[ABC]} = \frac{4\sqrt{3} \times 2}{2} = \sqrt{3}$$

$$\text{R.: } A_{[ABC]} = \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

18. Pelo teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}x^2 &= 3^2 + 5^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 9 + 25 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 34 \\ \Leftrightarrow x &= -\sqrt{34} \vee x = \sqrt{34} \\ \text{Como } x > 0, \text{ então } x &= \sqrt{34}. \\ \text{Assim, } x &\approx 5,8. \\ 7,1^2 &= 5^2 + (3 + y)^2 \\ \Leftrightarrow 50,41 - 25 &= 9 + 6y + y^2 \\ \Leftrightarrow y^2 + 6y - 16,41 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 65,64}}{2} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{-6 \pm 10,08}{2} \\ \Leftrightarrow y &\approx 2,04 \vee y \approx -7,02 \\ \text{Como } y > 0, \text{ então } y &\approx 2,04. \\ \text{Assim, } y &\approx 2,0. \\ \text{sen } \alpha &= \frac{5}{7,1}, \text{ logo } \hat{\alpha} \approx 44,8^\circ.\end{aligned}$$

- 19.

- 19.1. Os dois triângulos são retângulos, ou seja, os ângulos ABC e EDC são ambos retos. Além disso, o ângulo DCE é comum aos dois triângulos. Logo, pelo critério AA de semelhança de triângulos, os triângulos são semelhantes.

- 19.2. Calculemos o comprimento do segmento de reta $[DE]$:

$$\text{tg } 27^\circ = \frac{\overline{DE}}{6} \Leftrightarrow \overline{DE} = 6 \text{ tg } 27^\circ$$

Então:

$$A_{[DEC]} = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{[DEC]} = \frac{6 \times 6 \text{ tg } 27^\circ}{2} \Leftrightarrow A_{[DEC]} = 18 \text{ tg } 27^\circ$$

R.: O triângulo $[DEC]$ tem $(18 \text{ tg } 27^\circ) \text{ cm}^2$.

- 19.3. Vamos começar por determinar o comprimento dos segmentos de reta $[AC]$ e $[BC]$:

$$\text{tg } 27^\circ = \frac{6}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{6}{\text{tg } 27^\circ}$$

$$\text{sen } 27^\circ = \frac{6}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{6}{\text{sen } 27^\circ}$$

Então, o triângulo $[ABC]$ tem

$$\left(6 + \frac{6}{\text{tg } 27^\circ} + \frac{6}{\text{sen } 27^\circ}\right) \text{ cm de perímetro.}$$

- 20.

20.1. $\text{tg } \alpha = \frac{2}{1} \Leftrightarrow \text{tg } \alpha = 2$, logo $\hat{\alpha} \approx 63,4^\circ$.

20.2. a) $\overline{EX} = \text{sen } \alpha$

b) $\overline{AX} = \cos \alpha$

c) $\overline{DB} = \text{tg } \alpha$

- 20.3. Vamos começar por calcular o comprimento do segmento de reta $[AD]$, recorrendo ao teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2 &= 2^2 + 1^2 \\ \Leftrightarrow \overline{AD}^2 &= 5\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AD} = -\sqrt{5} \vee \overline{AD} = \sqrt{5}$$

Como $\overline{AD} > 0$, então $\overline{AD} = \sqrt{5}$.

Assim:

$$\text{sen } \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ e } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Logo, } 5 \text{ sen } \alpha + 2 \cos \alpha = 5 \times \frac{2}{\sqrt{5}} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 5 \text{ sen } \alpha + 2 \cos \alpha = \frac{10}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 5 \text{ sen } \alpha + 2 \cos \alpha = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

- 21.

21.1. $\cos \beta (1 + \text{tg } \beta) =$

$$= \cos \beta + \cos \beta \text{ tg } \beta =$$

$$= \cos \beta + \cos \beta \times \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} =$$

$$= \cos \beta + \text{sen } \beta$$

21.2. $\text{sen } \beta (\cos \beta + \text{sen } \beta) + \cos \beta (\cos \beta - \text{sen } \beta) =$

$$= \text{sen } \beta \cos \beta + \text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta - \text{sen } \beta \cos \beta =$$

$$= \text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

22. Vamos verificar se o André tem razão, recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (0,6)^2 = \frac{3}{4} + \frac{36}{100} = \frac{75}{100} + \frac{36}{100} =$$

$$= \frac{111}{100} = 1,11 \neq 1$$

R.: O André não tem razão.

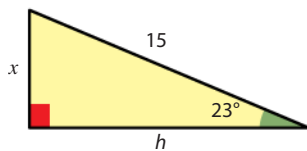
- 20 23.** Para determinar a área pretendida, devemos calcular, antes de mais, a altura do trapézio $[BCED]$, ou seja, o comprimento do segmento de reta $[DB]$:

$$\begin{aligned} \bullet \operatorname{tg} 9^\circ &= \frac{122}{AD} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{122}{\operatorname{tg} 9^\circ} \\ \bullet \operatorname{tg} 9^\circ &= \frac{304}{AD + DB} \\ \Leftrightarrow \frac{122}{\operatorname{tg} 9^\circ} \operatorname{tg} 9^\circ + \overline{DB} \operatorname{tg} 9^\circ &= 304 \\ \Leftrightarrow \overline{DB} \operatorname{tg} 9^\circ &= 304 - 122 \\ \Leftrightarrow \overline{DB} &= \frac{182}{\operatorname{tg} 9^\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } A_{\text{Trapézio}} &= \frac{B+b}{2} \times h \\ A_{\text{Trapézio}} &= \frac{304 + 122}{2} \times \frac{182}{\operatorname{tg} 9^\circ} \\ \Leftrightarrow A_{\text{Trapézio}} &= \frac{38766}{\operatorname{tg} 9^\circ} \\ \Leftrightarrow A_{\text{Trapézio}} &\approx 244\,759 \end{aligned}$$

R.: A peça tem, aproximadamente, 244 759 cm² de área.

- 24.** De acordo com os dados da figura, o triângulo é isósceles, portanto a altura do triângulo relativamente ao lado, do qual desconhecemos o comprimento, vai bissectar o ângulo e dividir esse lado (base) em dois segmentos com o mesmo comprimento. O esquema abaixo traduz a informação dada:



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 23^\circ &= \frac{x}{15} \Leftrightarrow x = 15 \operatorname{sen} 23^\circ \\ \cos 23^\circ &= \frac{h}{15} \Leftrightarrow h = 15 \cos 23^\circ \\ \text{Assim:} \\ A_{\Delta} &= \frac{b \times h}{2} \\ A_{\Delta} &= \frac{2 \times 5 \operatorname{sen} 23^\circ \times 15 \cos 23^\circ}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow A = 225 \operatorname{sen} 23^\circ \times 15 \cos 23^\circ$$

$$\Leftrightarrow A = 80,93$$

R.: O triângulo tem, aproximadamente, 80,93 m² de área.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} \\ \operatorname{sen} \beta &= \frac{1}{4} \cos \beta \end{aligned} \right\} \operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{1}{4} \cos \beta}{\cos \beta} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4}$$

- 20 26.** Se o triângulo é retângulo em A , então o segmento de reta $[BC]$ corresponde à hipotenusa e o segmento de reta $[AB]$ é o cateto oposto ao ângulo agudo ACB . Assim, podemos determinar o seno do ângulo ACB e, posteriormente, calcular a sua amplitude:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \hat{C} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{\frac{1}{2} \overline{BC}}{\overline{BC}} \\ \Leftrightarrow \operatorname{sen} \hat{C} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{C} = 30^\circ \end{aligned}$$

- 20 27.**

$$P_{[ABC]} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$$

Recorrendo ao triângulo $[ABD]$, temos $\cos 30^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$.

Então,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{AB}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{3}$$

Podemos agora determinar $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, recorrendo ao triângulo $[ABC]$.

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{\overline{BC}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{3 \times 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 6$$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

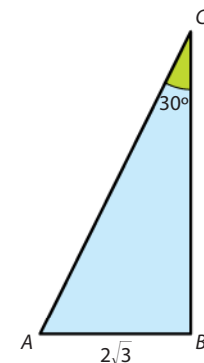
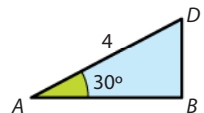
$$\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{\overline{AC}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{2 \times 2\sqrt{3}}{1}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{Logo, } P = 2\sqrt{3} + 6 + 4\sqrt{3} = 6 + 6\sqrt{3}$$

$$\text{R.: } P = (6 + 6\sqrt{3}) \text{ cm}$$



20 28.

28.1. A tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência. Como a reta AC é tangente às circunferências nos pontos A e C (respectivamente), então os segmentos de reta $[AO_1]$ e $[AC]$ são perpendiculares, tal como os segmentos de reta $[CO_2]$ e $[AC]$.

Deste modo, os ângulos O_2CA e CAO_1 são retos.

28.2. As bases do trapézio têm 9 cm e 3 cm respectivamente (medidas dos raios das circunferências). Vamos traçar a perpendicular ao segmento de reta $[O_2C]$ que passa pelo ponto O_1 . Assim, obtemos um triângulo retângulo do qual sabemos que a hipotenusa mede 12 cm e que um dos catetos mede 6 cm. Para calcularmos o outro cateto (que corresponde à altura do trapézio) basta aplicar o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}c^2 &= 12^2 - 6^2 \\ \Leftrightarrow c^2 &= 144 - 36 \\ \Leftrightarrow c^2 &= 108 \\ \Leftrightarrow c &= -\sqrt{108} \vee c = \sqrt{108}\end{aligned}$$

Como $c > 0$, então $c = \sqrt{108}$.

Calculemos a área e o perímetro do trapézio:

$$\begin{aligned}P &= 3 + 12 + 9 + \sqrt{108} \Leftrightarrow P = 24 + \sqrt{108} \\ A &= \frac{9+3}{2} \times \sqrt{108} \Leftrightarrow A = 6\sqrt{108}\end{aligned}$$

R.: O perímetro do trapézio é $(24 + \sqrt{108})$ cm e a área é $(6\sqrt{108})$ cm².

28.3. Usando as razões trigonométricas:

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{O_1O_2C}) &= \frac{6}{12} \Leftrightarrow \cos(\widehat{O_1O_2C}) = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \widehat{O_1O_2C} &= 60^\circ\end{aligned}$$

R.: O ângulo O_1O_2C tem 60° de amplitude.

28.4. A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, portanto o arco BC tem 60° de amplitude.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{x \times \pi \times r}{180} \\ r = 9 \\ x = 60^\circ \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{540\pi}{180} \\ \Leftrightarrow \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = 3\pi \end{array} \right\}$$

R.: O arco BC tem (3π) cm de comprimento.

29. Seja r o raio da circunferência e x o cateto adjacente ao ângulo de 37° do triângulo retângulo representado.

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} 37^\circ = \frac{r}{x} \\ \operatorname{tg} 23^\circ = \frac{r}{x+4} \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = x \operatorname{tg} 37^\circ \\ r = x \operatorname{tg} 23^\circ + 4 \operatorname{tg} 23^\circ \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ x \operatorname{tg} 37^\circ = x \operatorname{tg} 23^\circ + 4 \operatorname{tg} 23^\circ \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ x (\operatorname{tg} 37^\circ - \operatorname{tg} 23^\circ) = 4 \operatorname{tg} 23^\circ \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ x = \frac{4 \operatorname{tg} 23^\circ}{\operatorname{tg} 37^\circ - \operatorname{tg} 23^\circ} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{4 \operatorname{tg} 23^\circ \operatorname{tg} 37^\circ}{\operatorname{tg} 37^\circ - \operatorname{tg} 23^\circ} \\ x = \frac{4 \operatorname{tg} 23^\circ}{\operatorname{tg} 37^\circ - \operatorname{tg} 23^\circ} \end{array} \right.\end{aligned}$$

Agora podemos calcular a área do círculo:

$$A = \pi \times \left(\frac{4 \operatorname{tg} 23^\circ \operatorname{tg} 37^\circ}{\operatorname{tg} 37^\circ - \operatorname{tg} 23^\circ} \right)^2 \Leftrightarrow A \approx 15,1165\pi$$

R.: O círculo tem, aproximadamente, 47,5 cm² de área.

20 30. A base da pirâmide é um quadrado cujo lado (l) pretendemos determinar. Seja x o cateto adjacente do ângulo de 35° marcado (considerando o triângulo retângulo assinalado na figura).

Assim:

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x = \frac{4}{\operatorname{tg} 35^\circ}$$

Consideremos a base da pirâmide. A diagonal (d) do quadrado mede:

$$d = 2 \times \frac{4}{\operatorname{tg} 35^\circ} \Leftrightarrow d = \frac{8}{\operatorname{tg} 35^\circ}$$

Vamos calcular o lado do quadrado, aplicando o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}l^2 + l^2 &= \left(\frac{8}{\operatorname{tg} 35^\circ} \right)^2 \\ \Leftrightarrow 2l^2 &= \frac{64}{\operatorname{tg}^2 35^\circ}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow l^2 = \frac{32}{\operatorname{tg}^2 35^\circ}$$

$$\Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{32}{\operatorname{tg}^2 35^\circ}} \vee l = -\sqrt{\frac{32}{\operatorname{tg}^2 35^\circ}}$$

Assim:

$$V = \frac{\left(\sqrt{\frac{32}{\operatorname{tg}^2 35^\circ}}\right)^2 \times 4}{3} \Leftrightarrow V = \frac{128}{3 \operatorname{tg}^2 35^\circ}$$

R.: A pirâmide tem, aproximadamente, 87 cm³ de volume.

31.

31.1. Como a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, podemos dizer que o arco menor AT tem 72° de amplitude.

$[BT]$ é um diâmetro da circunferência e, portanto, o arco BT tem 180° de amplitude. Assim:

$$\widehat{BA} = 180^\circ - 72^\circ \Leftrightarrow \widehat{BA} = 108^\circ$$

R.: O arco BA tem 108° de amplitude.

31.2. A região sombreada corresponde à diferença entre a área da semicircunferência e a área do triângulo $[QBS]$. Antes de mais, devemos determinar o comprimento do segmento de reta $[QS]$ (através das razões trigonométricas).

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{\overline{QO}}{16}$$

$$\Leftrightarrow \overline{QO} = 16 \operatorname{tg} 36^\circ$$

Logo, $\overline{QS} = 32 \operatorname{tg} 36^\circ$.

Assim:

$$A_{[QBS]} = \frac{32 \operatorname{tg} 36^\circ \times 16}{2} \Leftrightarrow A_{[QBS]} = 256 \operatorname{tg} 36^\circ$$

Sabemos que a semicircunferência tem 16 cm de raio, portanto podemos calcular a área da região sombreada a amarelo (chamemos A):

$$A_A = \frac{\pi \times 16^2}{2} - 256 \operatorname{tg} 36^\circ$$

$$\Leftrightarrow A_A = 128\pi - 256 \operatorname{tg} 36^\circ$$

R.: A região sombreada tem, aproximadamente, 216 unidades de área.

32. Seja f a diagonal facial e e a diagonal espacial do cubo representado. Calculemos essas diagonais, utilizando o teorema de Pitágoras:

$$f^2 = 8^2 + 8^2$$

$$\Leftrightarrow f^2 = 64 + 64$$

$$\Leftrightarrow f^2 = 128$$

$$\Leftrightarrow f = -\sqrt{128} \vee f = \sqrt{128}$$

Como $f > 0$, $f = \sqrt{128}$.

$$e^2 = 8^2 + \sqrt{128}^2$$

$$\Leftrightarrow e^2 = 64 + 128$$

$$\Leftrightarrow e^2 = 192$$

$$\Leftrightarrow e = -\sqrt{192} \vee e = \sqrt{192}$$

Como $e > 0$, então $e = \sqrt{192}$.

Assim:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{8}{\sqrt{192}}; \cos \theta = \frac{\sqrt{128}}{\sqrt{192}}; \operatorname{tg} \theta = \frac{8}{\sqrt{128}}$$

Calculando o valor da expressão:

$$\operatorname{tg} \theta - 2 \cos \theta + \operatorname{sen} \theta =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{128}} - 2 \frac{\sqrt{128}}{\sqrt{192}} + \frac{8}{\sqrt{192}} \approx -0,35$$

33. Seja a a aresta do quadrado. Sabendo que $[AC]$ é uma das diagonais do quadrado, podemos garantir que bisseta o ângulo DCB , portanto o ângulo ACB tem 45° de amplitude.

Seja β o ângulo agudo cuja amplitude, somada à amplitude do ângulo α perfaz 45°. Então, usando as razões trigonométricas, podemos dizer que:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{1}{6}a}{a} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{6}.$$

Logo, $\hat{\beta} \approx 9,4623^\circ$.

Então, $\hat{\alpha} = 45^\circ - 9,4623^\circ \approx 35,5^\circ$.

20 Testar – páginas 102 e 103

1. $\cos \theta = \frac{12}{13}$, logo $\hat{\theta} \approx 22,6^\circ$.

2. $\cos 50^\circ = \frac{10}{\overline{DF}} \Leftrightarrow \overline{DF} = \frac{10}{\cos 50^\circ}$

$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{\overline{DE}}{10} \Leftrightarrow \overline{DE} = 10 \operatorname{tg} 50^\circ$$

Assim, $P = 10 + \frac{10}{\cos 50^\circ} + 10 \operatorname{tg} 50^\circ \approx 37,47$.

R.: O triângulo tem, aproximadamente, 37,47 cm de perímetro.

3. Pela fórmula fundamental da trigonometria, sabemos que:

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \Leftrightarrow \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\cos^2 x - 2\sin^2 x &= \\ = \cos^2 x - 2(1 - \cos^2 x) &= \\ = \cos^2 x - 2 + 2\cos^2 x &= \\ = 3\cos^2 x - 2\end{aligned}$$

[A] $3\cos^2 x - 2$

4. Pela fórmula fundamental da trigonometria, sabemos que:

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \Leftrightarrow \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = \\ &= \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{1 + \cos \alpha} = \\ &= 1 - \cos \alpha\end{aligned}$$

5. Sabemos que $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Como $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, temos:

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \sin^2 \alpha &= \frac{9}{9} - \frac{1}{9} \\ \Leftrightarrow \sin^2 \alpha &= \frac{8}{9} \\ \Leftrightarrow \sin \alpha &= -\frac{\sqrt{8}}{3} \vee \sin \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}\end{aligned}$$

Como α é agudo, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$.

Como $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ e $\sin \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$, temos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{8}$$

R.: [D] $\sin \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$ e $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{8}$

6. Consideremos o triângulo retângulo representado em que um dos ângulos internos tem 40° de amplitude (é o suplementar do ângulo θ e $180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$). Então, sendo r o raio do círculo da base do cone:

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{18}{r} \Leftrightarrow r = \frac{18}{\operatorname{tg} 40^\circ}$$

$$\text{Assim: } V = \frac{\pi \times \left(\frac{18}{\operatorname{tg} 40^\circ}\right)^2 \times 18}{3} \approx 8674,0$$

R.: O cone tem, aproximadamente, 8674,0 cm³ de volume.

7. Sabemos que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Com $\cos \alpha = -\frac{w}{3}$ e $\sin \alpha = \frac{w+2}{3}$, temos:

$$\begin{aligned}\frac{w+2}{2}^2 + \left(-\frac{w}{3}\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{w^2 + 4w + 4}{4} + \frac{w^2}{9} &= \frac{1}{1} \\ \Leftrightarrow 9w^2 + 36w + 36 + 4w^2 &= 36 \\ \Leftrightarrow 13w^2 + 36w &= 0 \\ \Leftrightarrow w(13w + 36) &= 0 \\ \Leftrightarrow w = 0 \vee 13w + 36 &= 0 \\ \Leftrightarrow w = 0 \vee w &= -\frac{36}{13}\end{aligned}$$

[C] $\left\{0, -\frac{36}{13}\right\}$

- 8.

8.1. A reta CD é tangente à circunferência, logo é perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência. Assim, o ângulo DCA é reto.

Como o triângulo $[ADC]$ é isósceles, sabemos que os segmentos de reta $[AC]$ e $[CD]$ têm o mesmo comprimento, que sabemos ser 3 cm, pois corres-

ponde ao raio da circunferência. Aplicando o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2 &= 3^2 + 3^2 \\ \Leftrightarrow \overline{AD}^2 &= 18 \\ \Leftrightarrow \overline{AD} &= -\sqrt{18} \vee \overline{AD} = \sqrt{18}\end{aligned}$$

Como $\overline{AD} > 0$, então $\overline{AD} = \sqrt{18}$.

- 8.2. O triângulo $[ADC]$ é triângulo e isósceles. Como a lados de igual comprimento se opõem ângulos de igual amplitude, então o ângulo CAD tem 45° de amplitude.

$$180^\circ - 45^\circ - 114^\circ = 21^\circ$$

Consideremos P o ponto de interseção da reta r (paralela a CD que contém o ponto E) com a reta AC . Então, o triângulo $[PEA]$ é retângulo. Sabemos que um dos seus ângulos internos tem 21° de amplitude. Vamos calcular o comprimento do segmento de reta $[PA]$:

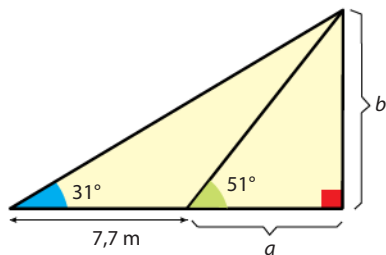
$$\cos 21^\circ = \frac{\overline{PA}}{3} \Leftrightarrow \overline{PA} = 3 \cos 21^\circ$$

Assim, a distância do ponto E à reta CD (d) pode ser calculada:

$$d = 3 + 3 \cos 21^\circ \approx 5,8$$

R.: O ponto E dista, aproximadamente, 5,8 cm da reta CD .

9. Seja h a altura da estátua do Infante D. Henrique e seja x o cateto adjacente ao ângulo de 51° de amplitude do triângulo retângulo apresentado:



$$\begin{aligned}\begin{cases} \operatorname{tg} 31^\circ = \frac{h}{7,7 + a} \\ \operatorname{tg} 51^\circ = \frac{h}{a} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} h = a \operatorname{tg} 31^\circ + 7,7 \operatorname{tg} 31^\circ \\ h = a \operatorname{tg} 51^\circ \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a \operatorname{tg} 51^\circ = a \operatorname{tg} 31^\circ + 7,7 \operatorname{tg} 31^\circ \\ \end{cases} & \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a (\operatorname{tg} 51^\circ - \operatorname{tg} 31^\circ) = 7,7 \operatorname{tg} 31^\circ \end{cases} &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7,7 \operatorname{tg} 31^\circ}{\operatorname{tg} 51^\circ - \operatorname{tg} 31^\circ} \\ \end{cases} & \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7,7 \operatorname{tg} 31^\circ}{\operatorname{tg} 51^\circ - \operatorname{tg} 31^\circ} \\ h = \frac{7,7 \operatorname{tg} 31^\circ \operatorname{tg} 51^\circ}{\operatorname{tg} 51^\circ - \operatorname{tg} 31^\circ} \end{cases} &\end{aligned}$$

R.: A estátua do infante D. Henrique mede, aproximadamente, 9 metros.

20 Prova global 1 – páginas 106 a 108

1.

- 1.1. Dos 26 alunos da turma da Aurora já foram selecionados 2 (o Henrique e o Manuel). Para a comissão, depois de formada, ser mista, o terceiro elemento terá de ser uma rapariga.

Assim, P ("a comissão, depois de formada, ser mista") = $\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$

- 1.2. P ("Aurora fazer parte da comissão") = $\frac{1}{24}$

- 1.3. Representemos o Henrique por H, o Manuel por M e a Aurora por A. Os casos possíveis de os três amigos se sentarem no muro são 6:

HMA HAM AMH AHM MAH MHA

Então, P ("Aurora ficar sentada no meio dos dois rapazes") = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2.

- 2.1. Calculemos o custo total do alojamento:

$$281,25 \times 12 = 3375 \text{ €}$$

Se estiverem inscritos 22 alunos ($12 + 10 = 22$), vejamos quanto pagaria cada um deles:

$$3375 : 22 = 153,41 \text{ € (aproximadamente).}$$

O alojamento total custa 3375 €. Se 22 alunos estiverem inscritos, cada um deles pagará 153,41 €.

- 2.2. $3375 : 135 = 25$

R.: Inscreveram-se 25 alunos na viagem.

- 2.3. $3375 : 5 = 675$

O alojamento, por noite, custa 675 €.

$$675 : 15 = 45 \text{ €}$$

Sabendo que o piso reservado tinha 15 quartos, o preço de cada um deles, por noite, neste hotel, custa 45 €.

3. Seja x a temperatura do 3º dia. Sabendo que a média das temperaturas máximas foi superior a 18 °C (visto que o Francisco ganhou a aposta), então:

$$\frac{8 + 10 + x}{3} > 12 \Leftrightarrow 18 + x > 36 \Leftrightarrow x > 18$$

R.: No terceiro dia, a temperatura máxima foi superior a 18 °C.

4.

- 4.1. Sabendo que o decágono inscrito na circunferência é regular, então os seus vértices dividem o arco da circunferência em arcos de igual amplitude. $360^\circ : 10 = 36^\circ$. Assim, o arco IJ tem 36° de amplitude.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{x \times \pi \times r}{180^\circ} \\ x = 36^\circ \\ r = 8 \text{ m} = 80 \text{ dm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Comprimento} \\ \text{do arco} = \frac{2880\pi}{180} \\ \Leftrightarrow \text{Comprimento} \\ \text{do arco} \approx 50 \end{array}$$

R.: O arco IJ tem, aproximadamente, 0,5 dm de comprimento.

- 4.2. A afirmação é verdadeira. O triângulo $[EFK]$ é isósceles, pois os segmentos de reta $[EK]$ e $[FK]$ são raios da circunferência. Como a lados de igual comprimento se opõem ângulos de igual amplitude, então a amplitude do ângulo FEK é igual à amplitude do ângulo KFE .

- 4.3. A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Assim, o ângulo FKE tem 36° de amplitude. Como o triângulo $[FEK]$ é isósceles:

$$\widehat{FEK} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} \Leftrightarrow \widehat{FEK} = 72^\circ$$

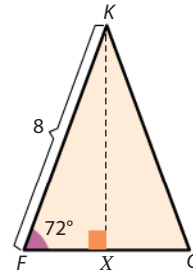
Usando o mesmo raciocínio, podemos constatar que o ângulo KED também tem 72° de amplitude (o arco DE tem 36° de amplitude, logo o ângulo EKD também tem 36° de amplitude. Como o triângulo $[EKD]$ é isósceles, podemos concluir que o ângulo KED tem 72° de amplitude).

$$\text{Assim, } \widehat{FED} = 72^\circ + 72^\circ \Leftrightarrow \widehat{FED} = 144^\circ$$

- 4.4. O arco menor CD tem 36° de amplitude e o arco IHF tem 108° de amplitude ($36^\circ \times 3 = 108^\circ$). Assim, podemos calcular a amplitude do ângulo excêntrico CPD :

$$\widehat{CPD} = \frac{108^\circ + 36^\circ}{2} \Leftrightarrow \widehat{CPD} = 72^\circ$$

- 4.5. Vamos começar por calcular o apótema do decágono e o seu perímetro. Para isso, observemos o seguinte esquema:



Seja X o ponto médio do segmento de reta $[FG]$ e ap o apótema, que corresponde à altura do triângulo. Utilizando as fórmulas trigonométricas, tem-se:

$$\sin 72^\circ = \frac{ap}{8} \Leftrightarrow ap = 8 \sin 72^\circ$$

$$\cos 72^\circ = \frac{\overline{FX}}{8} \Leftrightarrow \overline{FX} = 8 \cos 72^\circ$$

Calculemos o perímetro do decágono:

$$\text{Se } \overline{FX} = 8 \cos 72^\circ, \text{ então } \overline{FG} = 16 \cos 72^\circ.$$

$$\text{Assim, } P = 10 \times 16 \cos 72^\circ \Leftrightarrow P = 160 \cos 72^\circ$$

Agora podemos calcular a área do decágono:

$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{P}{2} \times ap \\ P = 160 \cos 72^\circ \\ ap = 8 \sin 72^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = \frac{160 \cos 72^\circ}{2} \times 8 \sin 72^\circ \\ \Leftrightarrow A \approx 188,091 \end{array}$$

R.: O decágono regular $[ABCDEFGHIJ]$ tem, aproximadamente, $188,1 \text{ m}^2$ de área.

5. $2(x-2)^2 = (x-1)(x+1) + 9$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 4x + 4) = x^2 - 1 + 9$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 = x^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x = 0$$

$$\boxed{x} \quad x^2 - 8x = 0$$

6.

6.1. $\frac{-3(x+4)-x}{2} - 0$

$$\Leftrightarrow -3x - 12 - x > 0$$

$$\Leftrightarrow -4x > 12$$

$$\Leftrightarrow x < -2$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, -2[$$

- 6.2. O menor número inteiro que é solução da inequação é o -4 .

7. $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 =$
 $= \sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha =$
 $= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha =$
 $= 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha$
 c.q.d.

8. $10 \times 2 = 20$ pontos
 $4 \times 3 = 12$ pontos
 R.: O Rafael efetuou quatro lançamentos de três pontos.

9. $A_{\text{Quadrado}} = l \times l = l^2$
 $A_{[DEFG]} = 2^2 = 4$
 $A_{[DEFG]} = x^2$
 $A_{\text{Circunferência}} = \pi \times r^2$
 O diâmetro da circunferência é igual a $2 - x$. Logo, o raio é igual a $\frac{2-x}{2}$.

Assim, $A_{\text{Circunferência}} = \pi \times \left(\frac{2-x}{2}\right)^2 = \pi \times \frac{(2-x)^2}{2} =$
 $= \frac{\pi}{4} \times (2-x)^2$

Logo, $A_{\text{Pedida}} = 4 - \left(x^2 + \frac{\pi}{4} (2-x)^2\right) =$
 $= 4 - x^2 - \frac{\pi}{4} (2-x)^2$

R.: $A_{\text{Pedida}} = \left(4 - x^2 - \frac{(2-x)^2\pi}{4}\right) \text{ cm}^2$

10.

10.1. A reta TQ é perpendicular ao plano STU no ponto T porque é perpendicular em T duas retas, TU e ST , contidas em STU .

10.2. a) Por exemplo, WR .

b) Por exemplo, TU .

c) Ponto V .

d) Plano STU .

e) Ponto W .

10.3. A distância da reta QR ao plano POS é igual a $\overline{PQ} = 2$ cm.

10.4. Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{WR}^2 = \overline{WX}^2 + \overline{XR}^2$. Consideremos a base $[PQRS]$, para determinar $\overline{PR}$, recorrendo ao teorema de Pitágoras.

$$\overline{PR}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2$$

$$\text{Assim, } \overline{PR}^2 = 2^2 + 2^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{PR}^2 = 4 + 4$$

$$\Leftrightarrow \overline{PR}^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \overline{PR} = \pm\sqrt{8}$$

$$\text{Como } \overline{PR} > 0, \text{ então } \overline{PR} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



$$\text{Logo, } \overline{XR} = \frac{\overline{PR}}{2} = \sqrt{2}$$

Então, como $\overline{WX} = \overline{UR} = 6$ cm,

$$\overline{WR}^2 = 6^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{WR}^2 = 36 + 2$$

$$\Leftrightarrow \overline{WR}^2 = 38$$

$$\Leftrightarrow \overline{WR} = \pm\sqrt{38}$$

Como $\overline{WR} > 0$, então $\overline{WR} = \sqrt{38}$

$$\text{R.: } \overline{WR} = \sqrt{38} \text{ cm}$$

10.5. $V_{\text{Prisma}} = Ab \times h$

$$V_{\text{Prisma}} = 2 \times 2 \times 6 = 24$$

$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} \times Ab \times h$$

$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times 6 = \frac{24}{3} = 8$$

Logo, como $V_{\text{Pedido}} = V_{\text{Prisma}} - V_{\text{Pirâmide}}$, temos

$$V_{\text{Pedido}} = 24 - 8 = 16.$$

$$\text{R.: } V = 16 \text{ cm}^3$$

11.

11.1. $a + b = 2^3 \times 3^2 \times 5 + 7^3 \times 16 \times 10 =$
 $= 2 \times 2^2 \times 3^2 \times 5 + 7^3 \times 4^2 \times 10 =$
 $= 2 \times 4 \times 3^2 \times 5 + 7^3 \times 4^2 \times 10 =$
 $= 4 \times (2 \times 3^2 \times 5 + 7^3 \times 4 \times 10)$

Logo, $a + b$ é divisível por 4.

11.2. Sabemos que $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$ e $b = 7^3 \times 16 \times 10$.

$$b = 7^3 \times 16 \times 10 =$$

$$= 7^3 \times 2^4 \times 2 \times 5 =$$

$$= 2^5 \times 5 \times 7^3$$

$$\text{Assim, m.m.c.}(a, b) = 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7^3 =$$

$$= 32 \times 9 \times 5 \times 343 =$$

$$= 493\,920$$

$$\text{R.: m.m.c.}(a, b) = 493\,920$$

20 Prova global 2 – páginas 109 a 111

1.

1.1. $1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

R.: A probabilidade de o Ricardo selecionar um pacote dentro do prazo de validade é de $\frac{1}{3}$.

1.2. $15 \times \frac{1}{3} = 5$

Dos 15 pacotes de natas que o Ricardo tem à disposição, 5 pacotes estão dentro do prazo de validade.

- 1.3. Seja t o número total de pacotes. Então:

$$t \times \frac{1}{3} = 10 \Leftrightarrow t = 30$$

$$30 - 10 = 20$$

Se 10 pacotes estão dentro do prazo de validade, então 20 pacotes encontram-se fora do prazo de validade.

- 1.4. Vamos representar as possíveis maneiras que os 4 amigos têm de se sentar ao balcão, considerando T – Tiago, F – Francisca, M – Mariana e J – Jorge:

T – Tiago, F – Francisca, M – Mariana e J – Jorge:

TFMJ TFMJ TMFJ TMJF TJFM TJMF

FTMJ FTJM FMTJ FMJT FJTM FJMT

MTFJ MTJF MFTJ MFJT MJTF MJFT

JTFM JTMF JFTM JFMT JMTF JMFT

- a) Basta observar o esquema anterior e perceber que há 8 maneiras diferentes de se sentarem e de as raparigas ficarem de um lado e os rapazes do outro.
- b) Mais uma vez, de acordo com o esquema, há 12 maneiras diferentes de se sentarem e as raparigas ficarem juntas.

2.

2.1. $1 \times 40 = 2 \times a \Leftrightarrow 2a = 40 \Leftrightarrow a = 20$

- 2.2. Seja n o número de empregados de mesa ao serviço. Assim:

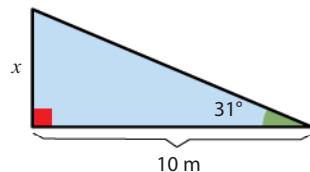
$$1 \times 40 = n \times 10 \Leftrightarrow 10n = 40 \Leftrightarrow n = 4$$

R.: Estavam ao serviço 4 empregados de mesa.

2.3. $t \times n = 40$

3. I. Área de não fumadores:

Estamos perante um triângulo retângulo com 10 metros de base e cuja altura (x) pode ser calculada utilizando as razões trigonométricas:



$$\operatorname{tg} 31^\circ = \frac{x}{10} \Leftrightarrow x = 10 \operatorname{tg} 31^\circ$$

Então:

$$A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2}$$

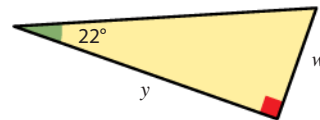
$$A = \frac{10 \times 10 \operatorname{tg} 31^\circ}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = 50 \operatorname{tg} 31^\circ$$

$$\Leftrightarrow A \approx 30,04$$

- II. Área de fumadores:

Estamos perante um triângulo retângulo cuja base (y) e altura (w) são desconhecidas mas podem ser determinadas utilizando as razões trigonométricas:



$$\cos 31^\circ = \frac{10}{y} \Leftrightarrow y = \frac{10}{\cos 31^\circ}$$

$$\operatorname{tg} 22^\circ = \frac{w}{\frac{10}{\cos 31^\circ}} \Leftrightarrow w = \frac{10 \operatorname{tg} 22^\circ}{\cos 31^\circ}$$

Então:

$$A = \frac{\frac{10}{\cos 31^\circ} \times \frac{10 \operatorname{tg} 22^\circ}{\cos 31^\circ}}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{100 \operatorname{tg} 22^\circ}{2 \cos^2 31^\circ}$$

$$\Leftrightarrow A \approx 27,49$$

R.: A área de não fumadores ficará maior.

4.

4.1. $360^\circ - 122^\circ = 238^\circ$

A parte da placa colorida a azul é um setor circular com 238° de amplitude.

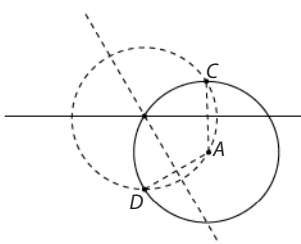
$$\left. \begin{array}{l} \text{Área do setor} \\ \text{circular} = \frac{x \times \pi \times r^2}{360^\circ} \\ x = 238^\circ \\ r = 50 \text{ dm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Área do setor} \\ \text{circular} = \frac{595\,000\pi}{360} \\ \Leftrightarrow \text{Área do setor} \\ \text{circular} \approx 5192,35 \end{array}$$

R.: A parte da placa colorida a azul tem, aproximadamente, $5192,35 \text{ dm}^2$ de área.

- 4.2. Para traçar essa circunferência devemos determinar o seu centro.

Basta traçar as mediatrizes dos segmentos de reta $[DA]$, $[CA]$ e $[CD]$, pois a sua interseção é o ponto equidistante dos pontos A , C e D , ou seja, o centro da circunferência.

Depois é só traçá-la, sabendo que o raio é a distância desse centro a um dos pontos mencionados (A, C ou D).



5. Os números são: -2, -1, 0, 1, 2 e 3.

$$\begin{aligned}
 6. \quad & -\frac{2x-5}{3} + 2 < -(x+1) \\
 & \Leftrightarrow -2x + 5 + 6 < -3x - 3 \\
 & \Leftrightarrow -2x + 3x < -14 \\
 & \Leftrightarrow x < -14 \\
 & \text{C.S.} =]-\infty, -14[
 \end{aligned}$$

7. Duas equações equivalentes têm o mesmo conjunto-solução.

$$\begin{aligned}
 & x^2 - 5x + 6 = 0 \\
 & \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\
 & \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \\
 & \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3 \\
 & \text{C.S.} = \{2, 3\}
 \end{aligned}$$

Vejamos qual das equações apresentadas é equivalente à anterior:

- $4(3x-2)x = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \vee 3x-2 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$
 $\text{C.S.} = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$
- $(x-2)(3-x) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \vee 3-x = 0$
 $\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$
 $\text{C.S.} = \{2, 3\}$
- $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 2$
 $\text{C.S.} = \{2\}$
- $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(3x-6) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee 3x-6 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$
 $\text{C.S.} = \{0, 2\}$

A equação $(x-2)(3-x) = 0$ é equivalente à dada.

$$\boxed{x} \quad (x-2)(3-x) = 0$$

8. Para que uma equação do 2º grau tenha apenas uma solução basta-nos garantir que o binômio discriminante é igual a zero.

$$\left. \begin{aligned} x^2 - 2x + m &= 0 \\ a &= 1, b = -2, c = m \\ \Delta &= b^2 - 4ac \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \Delta &= (-2)^2 - 4 \times 1 \times m \\ &\Leftrightarrow \Delta = 4 - 4m \end{aligned}$$

Resolvendo a equação:

$$4 - 4m = 0 \Leftrightarrow 4m = 4 \Leftrightarrow m = 1$$

Quando m toma o valor 1, a equação dada tem apenas uma solução.

9. Se o pentágono é regular, podemos determinar a amplitude de cada um dos seus ângulos externos (em particular, a amplitude do ângulo α):

$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{360^\circ}{n} \\ n &= 5 \end{aligned} \right\} \hat{\alpha} = \frac{360^\circ}{5} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 72^\circ$$

$$\text{R.: } \hat{\alpha} = 72^\circ$$

- 10.

$$\begin{aligned}
 10.1. \quad A_{[BEC]} &= \frac{\overline{BC} \times \overline{EF}}{2} \\
 A_{[BEC]} &= \frac{24 \times 6}{2} = \frac{144}{2} = 72 \\
 A_{[AED]} &= \frac{\overline{AD} \times (\overline{AB} - \overline{EF})}{2} \\
 A_{[AED]} &= \frac{24 \times 4}{2} = \frac{96}{2} = 48
 \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } A_{\text{Verde}} = 72 + 48 = 120$$

$$\text{Como } A_{\text{Azul}} = A_{[ABCD]} - A_{\text{Verde}} \text{ e } A_{[ABCD]} = 10 \times 24 = 240, \text{ temos:}$$

$$A_{\text{Azul}} = 240 - 120 = 120.$$

$$\text{Assim, } A_{\text{Verde}} = 120 \text{ cm}^2 \text{ e } A_{\text{Azul}} = 120 \text{ cm}^2.$$

Logo, a área do retângulo colorida a azul é igual à área do retângulo colorida a verde.

- 10.2. Suponhamos que $\overline{EF} = x$.

$$A_{[BEC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{EF}}{2}$$

$$A_{[BEC]} = \frac{24 \times x}{2} = 12x$$

$$A_{[AED]} = \frac{\overline{AD} \times (\overline{AB} - \overline{EF})}{2}$$

$$A_{[AED]} = \frac{24 \times (10 - x)}{2} = 12(10 - x) = 120 - 12x$$

$$\text{Assim, } A_{\text{Verde}} = 12x + 120 - 12x = 120$$

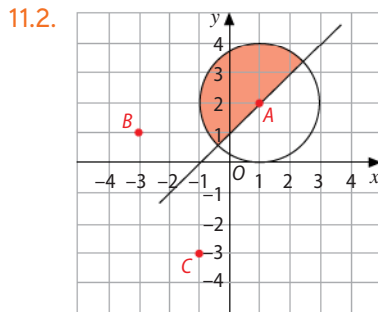
Como $A_{\text{Azul}} = A_{[ABCD]} - A_{\text{Verde}}$ e $A_{[ABCD]} = 240 \text{ cm}^2$, temos:

$$A_{\text{Azul}} = 240 - 120 = 120$$

Assim, $A_{\text{Verde}} = 120 \text{ cm}^2$ e $A_{\text{Azul}} = 120 \text{ cm}^2$.

11.

11.1. $A(1, 2)$, $B(-3, 1)$ e $C(-1, -3)$.



12.

$$2^{-5} + 2^{-7} = k \times 2^{-7}$$

$$\Leftrightarrow 2^{-7} \times (2^{-5+7} + 1) = k \times 2^{-7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{-7} \times (2^{-5+7} + 1)}{2^{-7}} = k$$

$$\Leftrightarrow k = 2^{-5+7} + 1$$

$$\Leftrightarrow k = 2^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow k = 5$$

13. A opção correta é a [A] porque P é a interseção das mediatrizes dos lados do triângulo. Logo, P é o circuncentro do triângulo $[ABC]$.

20 Prova global 3 – páginas 112 a 114

1.

1.1. A expressão $n \times p$ representa o valor que a companhia de teatro cobra pelo espetáculo.

1.2. O preço que a companhia cobra pelo espetáculo vai ser dividido, de igual forma, pelo número de alunos interessados. Assim, o produto entre o número de alunos e o preço a pagar por cada um deles, será sempre constante, logo as grandezas são inversamente proporcionais.

1.3. De acordo com o gráfico, a constante de proporcionalidade inversa é 500, pois o ponto $(10, 50)$ pertence ao gráfico da função $(10 \times 50 = 500)$.

$$\text{Assim: } a \times 40 = 500 \Leftrightarrow a = 12,5$$

$$20 \times b = 500 \Leftrightarrow b = 25$$

1.4. Vejamos quanto tem de pagar cada aluno para assistir à peça:

$$p \times 125 = 500 \Leftrightarrow p = 4$$

Cada um dos 125 alunos terá de pagar 4 € para assistir à peça. Sabendo que a direção da escola pagará 30% deste valor, a 42 alunos, então:

$$42 \times 4 = 168$$

$$168 \times 0,3 = 50,4$$

R.: A direção da escola vai gastar 50,4 €.

2.

2.1. $P(\text{"prêmio sair a um dos seis alunos que compraram rifas"}) = \frac{6}{400} = 1,5\%$

2.2. a) i. $P(\text{"prêmio sair a um encarregado educação que comprou a rifa em janeiro"}) = \frac{52}{400} = \frac{13}{100}$

ii. $P(\text{"prêmio sair a um professor"}) = \frac{211}{400}$

iii. $P(\text{"prêmio sair a alguém que comprou a rifa em fevereiro"}) = \frac{145}{400} = \frac{29}{80}$

b) 255 rifas foram adquiridas em janeiro.

$$P(\text{"prêmio sair a um funcionário"}) = \frac{15}{255} = \frac{1}{17}$$

3. Utilizando as razões trigonométricas, podemos determinar a altura (h) da árvore:

$$\text{tg } 40^\circ = \frac{h}{160}$$

$$\Leftrightarrow h = 160 \text{ tg } 40^\circ$$

$$\Leftrightarrow h \approx 134,26$$

$$134,26 \text{ cm} = 1,3426 \text{ m}$$

R.: A árvore tem, aproximadamente, 1,34 metros de altura.

4.

4.1. $-7, -\sqrt{16}$

4.2. $-7; -\sqrt{16}; 3,18; -\frac{1}{3}$

4.3. $\pi, 3,18$

4.4. Nenhum

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned} -\frac{3x-12}{5} + 3 &\leq x - 10 \\ \Leftrightarrow -3x + 12 + 15 &\leq 5x - 50 \\ \Leftrightarrow -3x + 27 &\leq 5x - 50 \\ \Leftrightarrow -8x &\leq -77 \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{77}{8} \\ \text{C.S.} &= \left[\frac{77}{8}, +\infty \right[\end{aligned}$$

5.

5.1. $A \cup B =]-5, +\infty[$

5.2. $A \cap B = [-2, 5[$

5.3. $A \cap C = \{7\}$

6.

6.1. O triângulo representado é retângulo em B .

Então, vamos determinar o valor de x usando o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} (2x)^2 + (x+1)^2 &= (3x-1)^2 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + x^2 + 2x + 1 &= 9x^2 - 6x + 1 \\ \Leftrightarrow 5x^2 - 9x^2 + 2x + 6x &= 0 \\ \Leftrightarrow -4x^2 + 8x &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x(-x+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x = 0 \vee -x+2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x &= 2 \\ \text{C.S.} &= \{0, 2\} \end{aligned}$$

x não pode ser zero, no contexto do problema, pois as medidas dos lados do triângulo, são sempre positivas. Assim, $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} A_T &= \frac{(x+1)(2x)}{2} \\ \Leftrightarrow A_T &= x^2 + x \\ x &= 2 \end{aligned} \right\} A_T = 2^2 + 2 \Leftrightarrow A_T = 6$$

R.: O triângulo tem 6 unidades de área.

6.2. Pela alínea anterior, sabemos que:

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= 3 \times 2 - 1 \Leftrightarrow \overline{AC} = 5 \\ \overline{AB} &= 2 \times 2 \Leftrightarrow \overline{AB} = 4 \\ \overline{BC} &= 2 + 1 \Leftrightarrow \overline{BC} = 3 \end{aligned}$$

Através das razões trigonométricas:

$$\text{sen}(\widehat{ACB}) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \widehat{ACB} \approx 53,13$$

R.: $\widehat{ACB} \approx 53,1^\circ$

7.

7.1. A reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio, no ponto de tangência. Ora, a reta FB não contém o ponto A (centro da circunferência), portanto não é perpendicular à reta BG . A afirmação é falsa.

7.2. Vamos usar os ângulos excêntricos apresentados e calcular a amplitude do arco EB e, de seguida, a amplitude do arco DB .

$$\begin{aligned} 57^\circ &= \frac{63^\circ + \widehat{BE}}{2} \Leftrightarrow 63^\circ + \widehat{BE} = 114^\circ \Leftrightarrow \widehat{BE} = 51^\circ \\ 49^\circ &= \frac{\widehat{DB} - 51^\circ}{2} \Leftrightarrow \widehat{DB} - 51^\circ = 98^\circ \Leftrightarrow \widehat{DB} = 149^\circ \end{aligned}$$

R.: O arco DB tem 149° de amplitude.

8.

8.1. Para calcular o perímetro do retângulo, comecemos por determinar as coordenadas dos pontos A , B , C e D .

Sabemos que o ponto C tem ordenada 8. Assim, sendo $f(x) = 8$, temos:

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Assim, as coordenadas dos pontos são $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 8)$ e $D(-2, 8)$.

Então, $P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$, ou seja, $P = 4 + 8 + 4 + 8 = 24$.

R.: $P = 24$ u.c.

8.2. O triângulo $[BCE]$ é equilátero e $\overline{BC} = 8$ cm.

$$A_{[BEC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{EM}}{2}$$

Como num triângulo a lados de igual comprimento se opõem ângulos de igual amplitude, os ângulos internos do triângulo $[BCE]$ têm 60° de amplitude.

Assim, considerando o triângulo retângulo $[BEM]$, temos:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\overline{ME}}{\overline{MB}}$$

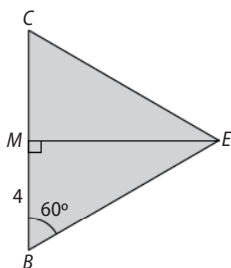
$$\sqrt{3} = \frac{\overline{ME}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{ME} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{Logo, } A_{[BEC]} = \frac{8 \times 4\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow A_{[BEC]} = 16\sqrt{3}$$

$$\text{R.: } A_{[BEC]} = 16\sqrt{3} \text{ u.a.}$$



9. $6 \times 1,6 = 9,6$

O conjunto de garrafas que comprou por 6 €, terá de vender por 9,6 €, ou seja, deverá vender cada garrafa por 0,4 € ($9,6 : 24 = 0,4$).

$$\begin{aligned} 10. \quad & \begin{cases} a + b = 6 \\ a \times b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 - b \\ (6 - b)b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -b^2 + 6b - 7 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ b^2 - 6b + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ b = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 7}}{2} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ b = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + \sqrt{2} \\ b = 3 - \sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a = 3 - \sqrt{2} \\ b = 3 + \sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & (a + b)^3 - 3a^2 = \\ & = 6^3 - 3(3 - \sqrt{2})^2 = \\ & = 216 - 3(9 - 6\sqrt{2} + 2) = \\ & = 216 - 27 + 18\sqrt{2} - 6 = \\ & = 183 + 18\sqrt{2} \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} 11.1. \quad T_{26} &= \frac{1}{6} \times 26 \times 27 \times (2 \times 26 + 1) = \\ &= \frac{1}{6} \times 26 \times 27 \times 53 = \\ &= 6201 \end{aligned}$$

11.2. a) $U_1 = T_2 - T_1$

$$U_1 = 1^2 + 2^2 - 1^2 = 2^2 = 4$$

$$U_2 = T_3 - T_2$$

$$U_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 - (1^2 + 2^2) =$$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 - 1^2 - 2^2 =$$

$$= 3^2 = 9$$

b) $U_n = (n + 1)^2$

11.3. Por observação da sequência verificamos que

$$V_1 = T_2, V_2 = T_4, \dots$$

$$\text{Logo, } V_n = T_{2n}.$$

20 Prova global 4 – páginas 115 a 117

1.

1.1. Como $V_{\text{Cubo}} = 1000 \text{ cm}^3$, então a aresta do cubo mede $\sqrt[3]{1000} \text{ cm}$.

Logo, $\overline{ED} = \sqrt[3]{1000} \text{ cm}$ e como $\overline{ED} = \overline{DC}$, $\overline{DC} = \sqrt[3]{1000} \text{ cm}$.

Como $V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} Ab \times h$, temos:

$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{BD} \times \overline{DC}}{2} \times \overline{DH}.$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } V_{\text{Pirâmide}} &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{10}}{2} \times \sqrt[3]{10} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{1000}}{6} \times \sqrt[3]{10} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{10000}}{6} = \\ &= \frac{10}{6} = \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

1.2. a) Por exemplo, BC .

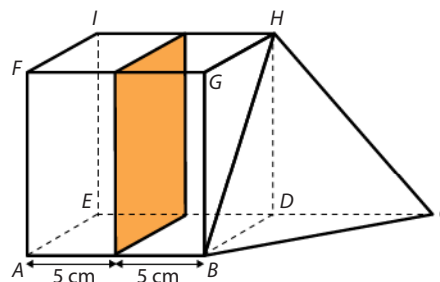
b) Por exemplo, BHC e BDH .

c) Por exemplo, AD .

1.3. HD é perpendicular ao plano que contém a face $[BDC]$ porque é perpendicular a duas retas, BD e DE , contidas nesse plano.

1.4. 10 cm

1.5.



2. Como $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, então

$$360^{17} = (2^3 \times 3^2 \times 5)^{17} =$$

$$= (2^3)^{17} \times (3^2)^{17} \times 5^{17} =$$

$$= 2^{51} \times 3^{34} \times 5^{17}$$

Logo, a opção correta é a **[A]**.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

3.

$$\begin{aligned} 3.1. \quad \bar{x} &= 0,20 \times 1 + 0,50 \times 2 + 0,15 \times 3 + 0,10 \times 4 + 0,05 \times 5 = \\ &= 0,20 + 1 + 0,45 + 0,40 + 0,25 = \\ &= 2,3 \end{aligned}$$

3.2. Como responderam à pergunta 200 candidatos, temos:

$$0,2 \times 200 = 40 \rightarrow \text{uma língua}$$

$$0,5 \times 200 = 100 \rightarrow \text{duas línguas}$$

$$0,15 \times 200 = 30 \rightarrow \text{três línguas}$$

$$0,10 \times 200 = 20 \rightarrow \text{quatro línguas}$$

$$0,05 \times 200 = 10 \rightarrow \text{cinco línguas}$$

$$\text{Logo, } P(\text{"candidato contratado falar quatro línguas"}) = \frac{20}{200} = 0,1$$

 4. O termo geral da sequência é $3n + 1$.

$$3n + 1 = 232$$

$$\Leftrightarrow 3n = 231$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{231}{3}$$

$$\Leftrightarrow n = 77$$

Logo, o termo desta sequência que tem 232 triângulos é o termo de ordem 77.

5. O maior número inteiro que pertence ao conjunto B é 22. Logo, a opção correta é a [B].

$$6. \quad \frac{3n-1}{5} + \frac{2}{1} \geq -\frac{n}{2}$$

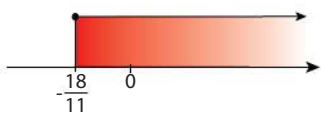
(x2) (x10) (x5)

$$\Leftrightarrow \frac{6n-2+20}{10} \geq -\frac{5n}{10}$$

$$\Leftrightarrow 6n + 5n \geq -20 + 2$$

$$\Leftrightarrow 11n \geq -18$$

$$\Leftrightarrow n \geq -\frac{18}{11}$$



$$\text{C.S.} = \left[-\frac{18}{11}, +\infty \right[$$

7.

7.1. Como o ponto A pertence ao gráfico da função g, temos:

$$8 = k \times (-2)2$$

$$\Leftrightarrow 8 = 4k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{8}{4}$$

$$\Leftrightarrow k = 2$$

7.2. Sabe-se que o triângulo [ABC] tem 6 unidades de área.

$$A_{[ABC]} = A_{\text{Trapézio}} - A_{[AXC]} - A_{[BDC]}$$

Assim,

$$6 = \frac{8+x}{2} \times 3 - \frac{2 \times 8}{2} - \frac{1+x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 12 = 24 + 3x - 16 - x$$

$$\Leftrightarrow 12 = 8 + 2x$$

$$\Leftrightarrow 2x = 12 - 8$$

$$\Leftrightarrow 2x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Logo, a ordenada do ponto B é 2.

 7.3. Como o gráfico de f é uma reta que passa nos pontos A(-2, 8) e B(1, 2), temos que $y = mx + b$, sendo

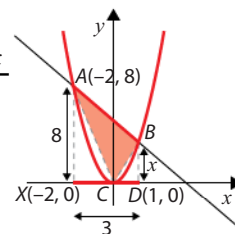
$$m = \frac{2-8}{1-(-2)} = \frac{-6}{3} = -2.$$

$$\text{Assim, } 2 = -2 \times 1 + b$$

$$\Leftrightarrow 2 = -2 + b$$

$$\Leftrightarrow b = 2 + 2$$

$$\Leftrightarrow b = 4$$

 Logo, $f(x) = -2x + 4$ e a opção correta é a [A].


$$8. \quad (x-6)(x+6) = -(x-6)^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 36 = -(x^2 - 12x + 36) + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 36 = -x^2 + 12x - 36 + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x - 36 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-12) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 12$$

$$\text{C.S.} = \{0, 12\}$$

9.

 9.1. $\hat{ABC} = 90^\circ$, pois qualquer ângulo inscrito numa semicircunferência é reto.

 Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , $\hat{ABC} + \hat{BCA} + \hat{CAB} = 180^\circ$. Então, $\hat{BCA} = 180^\circ - 35^\circ - 90^\circ = 45^\circ$.

 9.2. Como a reta AD é tangente à circunferência em A, então $\hat{DAC} = 90^\circ$.

 Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , $\hat{DAC} + \hat{ACD} + \hat{CDA} = 180^\circ$. Assim, $\hat{ACD} = 180^\circ - 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$.

 Logo, $\hat{BCD} = \hat{BCA} + \hat{ACD} = 45^\circ + 38^\circ = 83^\circ$.

$$9.3. \quad \text{tg } 38^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$\text{tg } 38^\circ = \frac{4}{\overline{AB}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{4}{\operatorname{tg} 38^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} \approx \frac{4}{0,7}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} \approx 5,71$$

Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B , temos:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{5,71 \times 4}{2} = 11,42$$

$$\text{R.: } A_{[ABC]} \approx 11,42 \text{ cm}^2$$

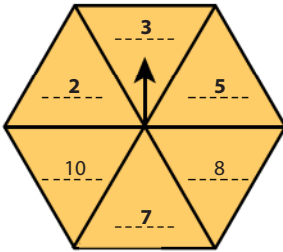
10. $\frac{2}{3} = \frac{?}{6}$

$$\Leftrightarrow ? = \frac{2 \times 6}{3}$$

$$\Leftrightarrow ? = 4$$

Logo, têm de existir quatro números primos.

Por exemplo,



11. Como T é diretamente proporcional a M^3 , então $T = k \times M^3$.

Sabemos que se $M = 2$, então $T = 80$.

Logo, $80 = k \times 23$

$$\Leftrightarrow 80 = 8k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{80}{8}$$

$$\Leftrightarrow k = 10$$

Assim, $T = 10 \times M^3$.

Se $M = 5$, então $T = 10 \times 5^3 = 10 \times 125 = 1250$.

12. Como W é inversamente proporcional a P^2 , então

$$W = \frac{k}{P^2}, \text{ ou seja, } W \times P^2 = k.$$

Sabemos que se $W = 8$, então $P = \sqrt{8}$.

Logo, $8 \times (\sqrt{8})^2 = k$

$$\Leftrightarrow 8 \times 8 = k$$

$$\Leftrightarrow k = 64$$

Então, $W = \frac{64}{P^2}$.

Se $W = 4$, temos $4 = \frac{64}{P^2}$

$$\Leftrightarrow P^2 = \frac{64}{4}$$

$$\Leftrightarrow P^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow P = \pm\sqrt{16}$$

$$\Leftrightarrow P = \pm 4$$

Como $P > 0$, então $P = 4$.

13. Sabemos que $(f + g)(2) = f(2) + g(2)$.

$$f(2) = 4 \times 2 - 6 = 8 - 6 = 2$$

$$g(2) = 6 \text{ pois } (2, 6) \in Gg.$$

Logo, $(f + g)(2) = 2 + 6 = 8$ e, portanto, a opção correta é a [D].